Teoria dos Jogos

Ian Teixeira Barreiro

Novembro 2021

1 Introdução

A teoria dos jogos é a área da matemática que formaliza o estudo da interação estratégica entre agentes racionais. Devido a isso, as técnicas da teoria dos jogos encontram aplicação em uma variedade de áreas, como a ciência da computação, a biologia, as ciências políticas e a economia. No presente resumo, abordaremos os conceitos básicos da teoria dos jogos, alguns exemplos de jogos muito conhecidos e descreveremos uma implementação computacional que encontra equilíbrios puros e mistos para jogos simultâneos com 2 jogadores. O texto terá como referência o livro ”Microeconomia: Uma Abordagem Moderna, 8a Edição”de Hal Varian e se estruturará da seguinte maneira: i) primeiro será descrito o que se entende por jogo e será exposta a matriz de payoffs; ii) em seguida serão discutidos os equilíbrios em jogos; iii) logo após, brevemente abordaremos as diferenças entre jogos simultâneos e sequenciais; iv) será exposta a implementação computacional desenvolvida; v) por fim, serão descritos alguns jogos bem conhecidos, sendo usada a implementação computacional para resolvê-los.

2 Jogos e a Matriz de Payoffs

Em teoria dos jogos, entende-se por jogo qualquer circunstância cujos resultados são dependentes das ações estratégicas daqueles envolvidos no jogo, ou os jogadores. Assim, jogos lúdicos como xadrez ou jogos de tabuleiro, assim como o comportamento de empresas em um mercado de oligopólio, comércio digital, leilões e até mesmo a evolução de espécies podem ser modeladas como jogos. Os jogadores são compreendidos como agentes racionais na medida que esses buscam tomar ações que levem a resultados mais benéficos para eles próprios. Dito em termos de vocabulário típico da área, os agentes buscam maximizar seus payoffs (sua utilidade). Jogos podem tem múltiplos jogadores e muitas estratégias, e o payoff de cada jogador dado cada resultado de um jogo pode ser exibido em uma matriz de payoffs. Para fins de simplicidade, mostraremos abaixo uma matriz de payoffs para um jogo de 2 jogadores e 2 estratégias cada.

		Jogador 1	
		A	B
Jogador 2	C	$(1, 2)$	$(0, 1)$
	D	$(2, 1)$	$(1, 0)$

Como se vê, caso o jogador 1 escolha a estratégia A e o jogador 2 escolha a estratégia C, teremos uma situação na qual o jogador 1 recebe um payoff de 2 e o jogador 2 recebe um payoff de 1. Interpretação idêntica vale para as demais condições.

3 Equilíbrios em Jogos Estratégicos

Dada uma matriz de payoffs e assumindo jogadores racionais como descrito, podemos analisar para qual resultado global o jogo tenderá. No exemplo descrito anteriormente, temos que independente da jogada do jogador 2, a estratégia A dá maiores payoffs ao jogador 1, sendo, portanto, a escolha lógica. Do mesmo modo, independente da estratégia escolhida por 1, para o jogador 2 será sempre preferível escolher D. Assim, vemos que o jogo tende para a situação em que o jogador 1 escolhe A e o jogador 2 escolhe D, levando aos payoffs de 1 e 2 respectivamente. Situações como essa em que há uma escolha ótima para cada jogador para todas as outras possíveis jogadas do outro jogador são chamadas de equilíbrio em estratégias dominantes. Esse é o tipo de equilíbrio mais simples. Iremos introduzir outros equilíbrios em seguida.

3.1 Equilíbrio de Nash

Os equilíbrios em estratégia dominante são raros, dado que em poucas situações existe uma estratégia que seja ideal para um jogador dado qualquer possível estratégia do outro. Mas sabendo que os jogadores sejam racionais, ou seja, sabendo que meus adversários buscarão a melhor jogada, levando em consideração minhas possibilidades de jogada, posso buscar apenas uma estratégia que seja ótima dada a escolha ótima do meu adversário. Dito de outra maneira, esse equilíbrio é o par de estratégias em que um jogador escolhe a melhor jogada com base na melhor jogada do outro, e vice-versa. Nessa situação, mesmo depois de reveladas as jogadas de cada jogador, nenhum terá o incentivo a mudar de estratégia, haja visto que sua estratégia já era ótima dadas as estratégias ótimas dos demais agentes racionais. Esse equilíbrio é chamado de equilíbrio de Nash. Podem existir inúmeros equilíbrios de Nash em um jogo, de modo que conhecê-los não torna o jogo completamente previsível. Um exemplo é o jogo abaixo, em que a melhor estratégia para o jogador 2 é C caso o 1 escolha A e D caso o 1 escolha B, o mesmo valendo de modo recíproco para o jogador 1.

Jogador 1

Jogador 2		A	B
	C	$(1,2)$	$(0,0)$
	D	$(0,0)$	$(2,1)$

O equilíbrio de Nash é um conceito extremamente útil, mas existem ainda outros equilíbrios possíveis. Eles surgem, por exemplo, das situações em que não há nenhum equilíbrio de Nash, mas ainda assim existe um equilíbrio.

3.2 Equilíbrio em Estratégias Mistas

Nada exige que os jogadores tomem uma mesma estratégia de modo consistente. Existe a possibilidade de que, ao aleatorizarem suas estratégias segundo uma certa distribuição de probabilidade, os agentes possam atingir um payoff esperado superior. Para além disso, podem existir situações em que agir segundo uma determinada distribuição protege o jogador contra qualquer eventual jogada do seu adversário, tornando-o indiferente à jogada do seu oponente. Resta encontrar essa distribuição, também chamada de equilíbrio em estratégias mistas.

Tomemos o jogo expresso na tabela abaixo. Verificamos que se tomarmos uma única jogada 100% do tempo não haverá nenhum equilíbrio. Ou seja, se tomarmos estratégias puras, o jogo não alcançará um equilíbrio.

Jogador 1

Jogador 2		A	B
	C	$(0,0)$	$(0,-1)$
	D	$(1,0)$	$(-1,3)$

Mas e se randomizarmos nossa escolha de estratégia? Podemos verificar as estratégias mistas ótimas calculando os payoffs esperados de cada estratégia para cada jogador e igualando seus valores, de modo que qualquer escolha de estratégia gera o mesmo payoff esperado.

$$\begin{aligned}
&\textbf{Para o jogador 1:}\\
\textbf{Jogada A: }&\mathbb{E}_{\mathbb{A}} = \pi\cdot 0 + (1-\pi)\cdot 0 = 0\\
\textbf{Jogada B: }&\mathbb{E}_{\mathbb{B}} = -\pi + 3 - 3\pi = 3 - 4\pi\\
&0 = 3 - 4\pi \implies \pi = \frac{3}{4}\\
&\textbf{Para o jogador 2:}\\
\textbf{Jogada C: }&\mathbb{E}_{\mathbb{C}} = 0\cdot\alpha + 0\cdot(1-\alpha) = 0\\
\textbf{Jogada D: }&\mathbb{E}_{\mathbb{D}} = \alpha - 1 + \alpha = -1 + 2\alpha\\
&0 = -1 + 2\alpha \implies \alpha = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

A combinação de probabilidades alfa igual a meio e pi igual a três quartos é a randomização de equilíbrio para ambos os jogadores e, portanto, é a estratégia de equilíbrio misto.

4 Jogos Simultâneos e Sequenciais

Até agora vimos jogos em que ambos os jogadores declaram as suas jogadas ao mesmo tempo. Nesse texto, por simplicidade, analisaremos jogos apenas desse tipo. No entanto, existem jogos em que um jogador declara sua jogada depois do outro. São os chamados jogos sequenciais, que tem implicações estratégicas distintas que os jogos simultâneos.

5 Implementação Computacional

5.1 Implementação do Equilíbrio em Estratégias Puras

```python

# Importando pacotes

import numpy as np

# Definindo a funcao que encontra equilibrios puros

def eq_puros(mat_vec):

    """
    Encontra os equilibrios puros dado um vetor contendo
    as matrizes de payoffs
    """

    # Definindo listas de melhores jogadas
    # os payoffs e a lista de payoffs no
    # equilibrio
    best1 = []
    best2 = []
    payoff1_t = np.transpose(mat_vec[0])
    payoff2 = mat_vec[1]
    eqs_pay = []

    # Para cada linha do payoff 1 transposto e
    # do payoff 2 encontra a posicao do maior payoff
    for line in range(len(mat_vec[0])):
        best1.append(np.argmax(payoff1_t[line]))
        best2.append(np.argmax(payoff2[line]))

    # Caso coincidirem locais com maior payoff
    # para ambos os jogadores isso sera um
    # equilibrio puro
    for i in range(len(best1)):
        if best1[i] in best2:
            loc = best1[i]
            temp = [payoff1_t[loc][loc], payoff2[loc][loc]]
```

```
            eqs_pay.append(temp)

    return eqs_pay
```

5.2 Implementação do Equilíbrio em Estratégias Mistas

```
# Definindo a funcao que encontra equilibrios mistos

def eq_mis(mat_pay, t = 10000):

    """
    Encontra os equilibrios mistos dado uma matriz de payoffs
    em que as linhas representam os payoffs de uma jogada.
    """

    # Cria um vetor de probabilidades e diferencas
    p_vec = np.linspace(0, 1, t)
    dif = []

    # Para cada probabilidade
    for p in p_vec:

        # No equilibrio as esperancas de cada jogada
        # devem ser iguais
        probs = np.array([p, 1 - p])
        esp_1 = np.dot(mat_pay[0], probs)
        esp_2 = np.dot(mat_pay[1], probs)

        dif.append(abs(esp_1 - esp_2))

    p = p_vec[np.argmin(dif)]

    return p

# Cria a funcao que encontra os equilibrios puros e mistos
# para um jogo simples de dois jogadores
def equilibrios(mat_vec):

    eq_puros_pay = eq_puros(mat_vec)
    eq_m_1 = eq_mis(mat_vec[0])
    eq_m_2 = eq_mis(np.transpose(mat_vec[1]))

    eq_misto = {'jogador_1':[eq_m_1, 1 - eq_m_1],
                'jogador_2':[eq_m_2, 1 - eq_m_2]}

    return eq_puros_pay, eq_misto
```

6 Exemplos

O Stag Hunt game é um jogo clássico da teoria dos jogos que busca ilustrar o dilema entre a cooperação, que pode gerar resultados incertos, e a não cooperação gerando resultados certeiros. A ideia é que existem dois caçadores. Caso cada caçador trabalhe sozinho, ele conseguirá capturar um lebre. Caso os caçadores cooperem, caçarão um veado, que dará uma recompensa muito maior para ambos. Mas caso um se comprometa a cooperar e o outro desista de cooperar no meio do caminho, um deles conseguirá caçar várias lebres enquanto o outro sairá em desvantagem e não conseguirá trazer muita comida de volta a sua casa. Um exemplo típico de um stag hunt está ilustrado na tabela abaixo.

		Jogador 1	
		A	B
Jogador 2	C	$(4,4)$	$(1,3)$
	D	$(3,1)$	$(2,2)$

Utilizando a implementação computacional é possível encontrar os equilíbrios para esse jogo da seguinte maneira.

```python
import numpy as np

# Definindo matrizes que serao usadas para teste

payoff1 = np.array([[4, 1],
                    [3, 2]])

payoff2 = np.array([[4, 3],
                    [1, 2]])

matrizes = [payoff1, payoff2]

puros, mistos = equilibrios(matrizes)
```

O resultado é que o jogo possui dois equilíbrios puros, tanto na situação em que ambos caçam separadamente quanto na situação em que ambos caçam juntos. Há um equilíbrio misto, em que ambos os jogadores escolhem cada estratégia com 50% de probabilidade.