Escolhas sob Incerteza

Ian Teixeira Barreiro

Novembro 2021

1 Introdução

A incerteza permeia o fenômeno econômico. Há diversas incertezas enfrentadas pelos agentes de uma economia. Aqui analisaremos a partir da perspectiva dos consumidores duas incertezas diferentes: i) aquela referente à escolha do seguro ótimo frente à possibilidade de perda de uma parcela do valor de um bem e ii) aquela referente à incerteza do agente quanto à sua renda em um momento futuro.

Primeiro será abordada a situação da escolha do seguro ótimo, sendo feito um resumo teórico e logo após uma descrição de uma implementação computacional do modelo. Logo após, será discutido brevemente a situação da incerteza sobre a renda, junto de uma curta implementação computacional.

2 Escolha de Seguros sob Incerteza

2.1 Consumo Contingente

Por consumo contingente entende-se o cenário em que o consumo dos agentes varia de acordo com uma certa distribuição de probabilidade. Para fins de simplificação, tomemos que apensar dos cenários do futuro serem incertos, temos conhecimento de todo o rol de estados possíveis que o futuro pode assumir. Um consumo pode ser possível apenas dado que no futuro um estado ou um conjunto de estados em particular aconteça. Imaginemos, por exemplo, que temos um carro de valor R$ 35000,00. Existe um conjunto de cenários possíveis no futuro em que o carro preserva o seu valor inicial (assumindo para fins de simplificação, não haver depreciação). Existe outro evento possível em que por algum motivo o carro perca R$ 10000,00, passando a valer R$ 25000,00.

Pode ser interessante para o agente se precaver dos cenários em que ocorre a perda de valor de seu bem. Uma opção seria o agente contratar um seguro que o pague um valor K caso ocorra algum cenário adverso. Para cada R$ 1,00 de seguro o agente deve pagar γ. Assim sendo $W_g = 35000$ e $W_b = 25000$ as dotações do agente nos cenários bom e ruim não havendo contratação de seguro e c_g e c_b a riqueza do agente após a contratação do seguro, temos o sistema abaixo.

$$c_g = W_g - \gamma K$$
$$c_b = W_b + (1-\gamma)K$$

Isolando K na segunda equação e substituindo na primeira chegamos à restrição orçamentária que representa a fronteira de possibilidades de escolha para a riqueza no cenário bom e a riqueza no cenário ruim.

$$K = \frac{c_b - W_b}{1-\gamma}$$
$$c_g = W_g - \gamma(\frac{c_b - W_b}{1-\gamma}$$
$$c_g = W_g - \frac{\gamma}{1-\gamma}c_b + \frac{\gamma}{1-\gamma}W_b$$
$$c_g + \frac{\gamma}{1-\gamma}c_b = W_g + \frac{\gamma}{1-\gamma}W_b$$

Como se vê pela restrição orçamentária, aumentar a riqueza para o cenário ruim significa abrir mão de $\frac{\gamma}{1-\gamma}$ de riqueza no cenário bom. Um exemplo de restrição orçamentária para os valores dados pode ser visto na Figura 1.

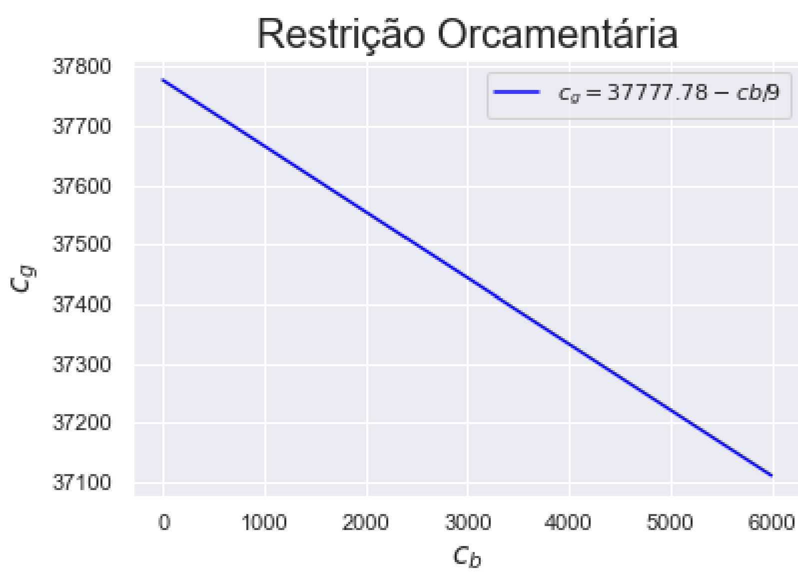

Figura 1: Restrição orçamentária entre riquezas nos cenários bom e ruim

O agente pode ter preferências distintas acerca da quantidade K de seguro que ele deverá contratar. Agentes mais avessos ao risco decidirão contratar mais seguro, enquanto agentes menos avessos ao risco contratarão menos seguro. Independente da aversão ao risco da pessoa, temos que é natural que essa pessoa queira maximizar sua utilidade frente ao cenário de incerteza. Dito de outra maneira, o agente deseja maximizar sua utilidade esperada, ou a esperança de sua utilidade. Assim, para utilidades dadas pelo logaritmo natural de cada estado de riqueza, e sendo a probabilidade do cenário ruim π, o problema do consumidor será como exposto.

$$\max_{c_g, c_b} (1-\pi)\ln c_g + \pi \ln c_b$$

Uma curva de indiferença que segue essa função utilidade está exposta na figura 2, em que $\pi = 0.01$. Isso significaria, por exemplo, que a probabilidade de haver um cenário em que o carro sofre um acidente que o deprecia em R$ 10000,00 é de 1%.

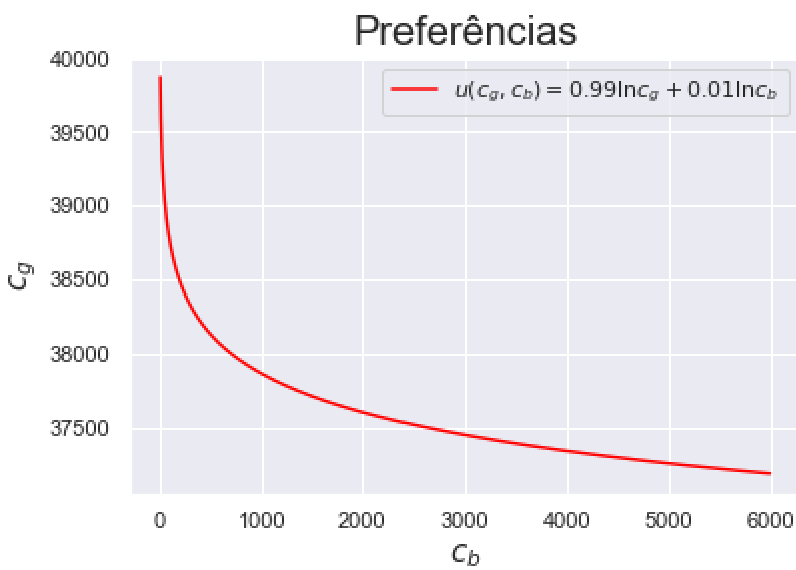

Figura 2: Uma curva de indiferença

O equilíbrio é atingido no ponto de tangência entre as preferências e a restrição orçamentária. Ou seja, no ponto em que a taxa marginal de substituição se iguala à inclinação da restrição orçamentária. Para o problema que expusemos, a figura 3 ilustra o ponto da escolha ótima.

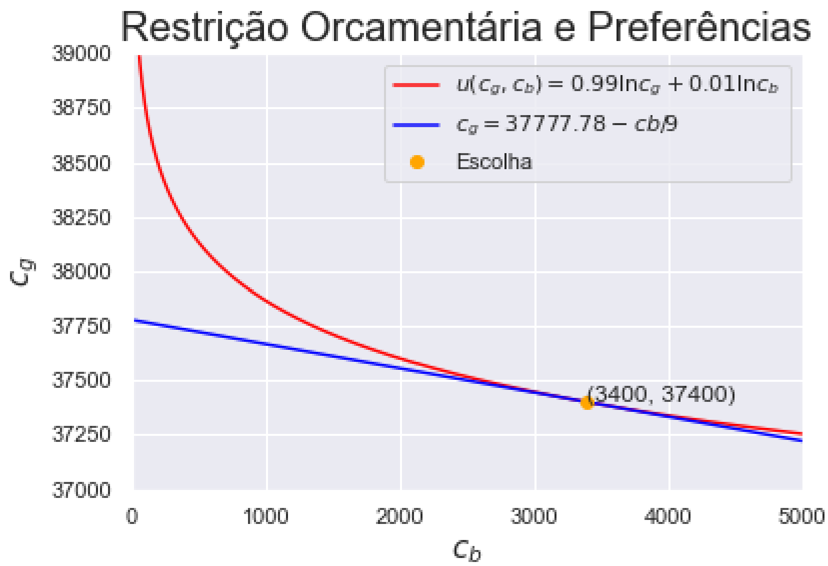

Figura 3: A escolha ótima

2.2 Implementação Computacional

2.2.1 Implementação Numérica

```
def seguro_otm(func, val, perda, gama, p, cs, ce, ct = 1000):

    # Criando os vetores do grid, da utilidade
    # e dos pares ordenados de cg e cb
    cgvec = cbvec = np.linspace(cs, ce, ct)
    pares_cons = []
    util = []

    # Para cada parordenado no grid
    for cg in cgvec:
        for cb in cbvec:

            # Calcula a restricao orcamentaria no ponto
            res_orc = (1 - gama) * cg + gama * cb - val + gama *
    perda

            # Se o ponto esta sobre ou abaixo da restricao
            # orcamentaria
            if res_orc <= 0:

                # Calcula e apenda a utilidade a lista
                u_c1 = (1 - p) * func(cg)
                u_c2 = p * func(cb)
                util.append(u_c1 + u_c2)
                pares_cons.append([cg, cb])

```

```python
    util = np.array(util)

    u_max = util.max()
    cg_m, cb_m = pares_cons[np.argmax(util)]
    k_max = (cb_m - val + perda) / (1 - gama)

    return k_max, cg_m, cb_m, u_max
```

2.2.2 Implementação Analítica

```python
def seguro_analitico(d_g, d_b, p, g):

    # dotacao
    dota = d_g + (g / (1 - g)) * d_b

    # consumos
    cb = (dota * p * (1 - g)) / g
    cg = (g / (1 - g)) * ((1 - p) / p) * cb

    # utilidade
    u = (1 - p) * np.log(cg) + p * np.log(cb)

    # seguro otimo
    k = (cb - d_b) / (1 - g)

    return k, cg, cb, u
```

3 Escolha da Poupança com Renda Incerta

O agente pode ter incertezas sobre sua renda no futuro. Pode ser que ele seja demitido, fazendo sua renda cair para 0. A percepção de risco do agente sobre sua renda futura o leva a poupar de modo adicional no presente, sendo essa poupança adicional chamada de poupança precaucional. Imaginemos o modelo de escolha intertemporal abordado no relatório anterior, vide a Equação de Euler do Consumo e a Restrição Orçamentária Intertemporal.

$$\frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \frac{1}{1+r}$$
$$c_t + \frac{c_{t+1}}{1+r} = y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r}$$

Agora imaginemos que a renda no segundo período tenha a seguinte distribuição de probabilidade:

$$\tilde{Y_{t+1}} = \begin{cases} 0, \text{ com probabilidade } p \\ \frac{Y_{t+1}}{1-p}, \text{ com probabilidade } 1-p \end{cases}$$

O problema de maximização será o seguinte.

$$\max_{ct, c_{t+1}, s} u(c_t, c_{t+1}) = \mathbf{E}[u(c_t) + \beta u(c_{t+1})]$$

$$\text{Sujeito a:}$$
$$c_t = Y_t - s$$
$$c_{t+1} = \tilde{Y_{t+1}} + Rs$$

Desse modo, substituindo c_t e c_{t+1} na função utilidade e tirando a condição de primeira ordem com relação a s temos:

$$\mathbf{E}[-u'(Y_t - s) + \beta R u'(\tilde{Y_{t+1}} + Rs)] = 0$$
$$u'(Y_t - s) = \mathbf{E}[\beta R u'(\tilde{Y_{t+1}} + Rs)]$$

Considerando uma função utilidade CRRA, segue-se que:

$$(Y_t - s)^{-\alpha} = \beta R \mathbf{E}[(\tilde{Y_{t+1}} + Rs)^{-\alpha}]$$
$$(Y_t - s)^{-\alpha} = \beta R[p(sR)^{-\alpha} + (1-p)(\frac{Y_{t+1}}{1-p} + Rs)^{-\alpha}]$$

De modo que com a última equação torna-se possível encontrar o s que maximiza a utilidade do consumidor a partir de aproximação numérica, como é feito na implementação computacional.

3.1 Implementação Computacional

```python
def formula(beta, R, y1, y2, gama, p, poupanca = 0.00001):

    beta_r = beta * R
    menos_gama = -gama
    p1 = (y1 - poupanca)**(menos_gama)
    p2 = (1 - p) * (((y2)/(1 - p) + R * poupanca) ** menos_gama)
    p3 = p * ((R * poupanca) ** menos_gama)
    formula = p1 - beta_r * (p2 + p3)

    return formula

def poupanca_precaucional(beta, R, y1, y2, gama, p, precisao):

    poupanca = 0.00001

    while round(formula(beta, R, y1, y2, gama, p, poupanca),
    precisao) != 0.0:
        poupanca += 0.002

    return poupanca
```