Desemprego: O Lake Model

Ian Teixeira Barreiro

Novembro 2021

1 Introdução

O desemprego é um problema econômico relevante, haja visto seu impacto na qualidade de vida das pessoas e no desempenho da economia. Os estudos macroeconômicos nessa área visam compreender os determinantes do desemprego, de modo a permitir o desenho de políticas públicas que melhor mitiguem esse problema. Nesse sentido, o Lake Model busca modelar os determinantes do desemprego e como esses interagem de modo a levar a economia a um ponto estável, em que o número de contratações se iguala ao número de demissões. Esse ponto de estabilidade leva ao conceito de taxa natural de desemprego, à qual a economia gravita no longo prazo.

O presente texto apresenta um resumo do Lake Model, escrito com base no texto "Macroeconomia, 8a edição"de N. Gregory Mankiw e "Quantitative Economics with Python"do Thomas J. Sargent e John Stachurski. Além disso, descrevemos uma implementação computacional que encontra a taxa natural de desemprego, a trajetória da taxa de desemprego e a trajetória do estoque de empregados e desempregados na economia para um Lake Model simplificado, em que a quantidade de trabalhadores dispostos a trabalhar é constante (não há entrada nem saída do mercado de trabalho). O texto se estrutura do seguinte modo: i) primeiro é feita uma descrição teórica do Lake Model; ii) em seguida descrevemos a implementação computacional do modelo; iii) por fim analisamos a mudança dos resultados do modelo quando se varia seus parâmetros.

2 O Lake Model

A dinâmica do mercado de trabalho é marcada pela constante contratação e demissão de membros do mercado de trabalho. Há um fluxo entre o grupo dos empregados e desempregados da economia, entendidos aqui como os "lagos"do Lake Model, de modo que a quantidade desses estoques varia no tempo. Para modelar essa dinâmica, vamos assumir que o tamanho do mercado de trabalho é constante. Isso é uma grande simplificação, haja visto que a todo momento há membros do mercado de trabalho que decidem parar de buscar um emprego (seja por se aposentarem, seja por não estarem interessados em trabalhar) e há novas pessoas entrando no mercado de trabalho (como jovens que ingressam no mercado de trabalho pela primeira vez, ou pessoas que estavam fora do mercado de trabalho e que decidem reentrar no mercado). Assumiremos outra simplificação para o modelo: a de que as taxas de contratação e demissão, que governam a transição do grupo de desempregados para empregados e vice-versa, são constantes no tempo. Denotaremos essas taxas por c e d, respectivamente. Denotaremos também o número de empregados por E e o número de desempregados por U, sendo o tamanho total da força de trabalho L.

A condição de equilíbrio nesse mercado, ou seja, a situação em que o número de empregados e desempregados na economia, assim como a taxa de desemprego permanecem constantes, será alcançada quando o número de pessoas contratadas se iguala ao número de pessoas demitidas, ou seja, quando:

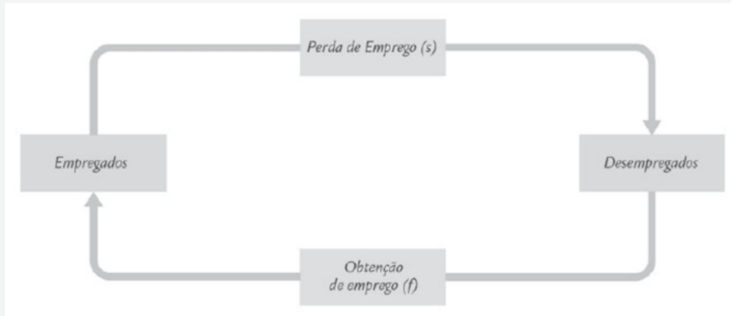
$$cU = dE$$

Nesse ponto, a taxa de desemprego é chamada de taxa natural de desemprego, que é a taxa de desemprego na qual a economia alcança seu pleno potencial produtivo, dada a taxa de contratação e demissão nessa economia. Essa taxa pode ser encontrada dadas as taxas de contratação e demissão da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
cU &= dE \\
cU &= d(L-U) \\
c\frac{U}{L} &= d(1-\frac{U}{L}) \\
\frac{U}{L}(c+d) &= d \\
\frac{U}{L} &= \frac{d}{c+d}
\end{aligned}$$

de modo que por meio dessa fórmula é possível encontrar a taxa natural de desemprego de equilíbrio sem analisar a trajetória inteira da economia até esse ponto. Uma conclusão lógica é que quanto maior a taxa de demissão, maior a taxa natural de desemprego no equilíbrio, e quanto maior a taxa de contratação, menor será a taxa natural de desemprego no equilíbrio.

Como ilustração final do Lake Model, vejamos a figura abaixo, retirada do material base para esse texto.



As Transições entre Emprego e Desemprego Em todos os períodos, uma fração, s, das pessoas empregadas perde seus respectivos empregos, e uma fração, f, das pessoas desempregadas consegue um emprego. As taxas de perda de emprego e de obtenção de emprego determinam a taxa de desemprego.

Figura 1: Fonte: Imagem retirada do livro "Macroeconomia, 8a edição"de N. Gregory Mankiw, capítulo 7

A imagem demonstra como ocorre a transição de trabalhadores de um "lago"para o outro de um período para o outro através das taxas c e d.

3 Implementação Computacional

Para a implementação computacional do Lake Model, primeiramente foram criadas as funções auxiliares 1) taxa_natural_desemprego, que calcula a taxa natural de desemprego utilizando a fórmula explicitada na sessão anterior, 2) atualiza_empregados, que calcula o número de empregados no período t+1 a partir do número de empregados em t, e do número de pessoas contratadas e demitidas, e a função 3) atualiza_desempregados, que é análoga à atualiza_-empregados mas para os desempregados do período seguinte.

A função principal lake_model recebe como parâmetros o número de empregados e desempregados em t = 0, a taxa de contratação, a taxa de demissão e uma variável que indica a precisão das saídas em casas decimais. Como saídas, a função retorna a taxa natural de desemprego, um vetor da trajetória do número de empregados na economia, um vetor da trajetória do número de desempregados na economia, um vetor da trajetória da taxa de desemprego e um valor que indica o número de períodos corridos para se alcançar o equilíbrio. O funcionamento da função segue a seguinte sequência: 1) calcula-se o tamanho total da força de trabalho, 2) calcula-se a taxa natural de desemprego a partir da função auxiliar, 3) criam-se os vetores da trajetória dos empregados, desempregados e taxa de desemprego respectivamente, preenchidas com os valores dados como parâmetros, 4) criam-se os primeiros valores de demitidos e contratados multiplicando-se a taxa de demissão pelo número de empregados e a taxa de contratação pelo número de desempregados, 5) instancia-se o contador em 1, 6) cria-se um loop que atualiza os vetores de saída usando as funções auxiliares atualiza_empregados e atualiza_desempregados e o contador enquanto o valor absoluto de contratados menos demitidos for diferente de zero arredondado para a tolerância e finalmente 7) retornam-se os valores de saída.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits import mplot3d

def taxa_natural_desemprego(t_con, t_dem):
    """
    Calcula a taxa natural de desemprego
    -----------------------------------
    t_con: Taxa de contratacao
    t_dem: Taxa de demissao
    """
    return (t_dem / (t_con + t_dem))

# Atualiza o numero de trabalhadores empregados para
# o periodo t + 1
def atualiza_empregados(emp_em_t, demitidos, contratados):
    return emp_em_t + contratados - demitidos


def atualiza_desempregados(des_em_t, demitidos, contratados):
    return des_em_t + demitidos - contratados

def lake_model(emp, des, t_con, t_dem, tol = 4):

    """
    Encontra a tragetoria do mercado de trabalho ate o estado estacionario
    -----------------------------------
    emp   = Numero de empregados
    des   = Numero de desempregados
    t_con = Taxa de contratacao
    t_dem = Taxa de demissao
    tol   = A precisao da estimativa em casas decimais (default = 4)
    """

    # Numero de trabalhadores na economia
    L = emp + des

    # Encontra taxa natural de desemprego
    t_des_nat = taxa_natural_desemprego(t_con, t_dem)

    # Tragetoria empregados, desempregados e taxa de desemprego
    vec_emp = np.array([emp])
    vec_des = np.array([des])
    vec_t   = np.array([des/L])

    # Numbero de pessoas demitidas e contratadas
    demitidos = t_dem * vec_emp[-1]
    contratados = t_con * vec_des[-1]

    # Contador
    counter = 1

    # Encontra o estado de equilibrio
```

```
    while np.round(np.abs(contratados - demitidos), tol) > 10 ** (-
    tol):

        # Calcula numero de desempregados e empregados
        # no proximo periodo
        emp_t_mais_1 = atualiza_empregados(vec_emp[-1],
                                           demitidos,
                                           contratados)

        des_t_mais_1 = atualiza_desempregados(vec_des[-1],
                                              demitidos,
                                              contratados)

        vec_emp = np.append(vec_emp, emp_t_mais_1)
        vec_des = np.append(vec_des, des_t_mais_1)
        vec_t   = np.append(vec_t, des_t_mais_1 / L)

        # Atualiza o numero de contratados e demitidos
        demitidos = t_dem * vec_emp[-1]
        contratados = t_con * vec_des[-1]

        # Atualiza o counter
        counter += 1

    return t_des_nat, vec_emp, vec_des, vec_t, counter
```

4 Gráficos e Estática Comparativa

A seguir apresentamos alguns gráficos para ilustrar as saídas da implementação computacional do modelo. Os parâmetros iniciais utilizados para esses gráficos foram: número de empregados = 100, número de desempregados = 30, taxa de contratação = 0.4 e taxa de demissão = 0.01. Nesse modelo inicial o equilíbrio é atingido em 23 períodos.

A figura abaixo retrata a trajetória dos empregados durante os 23 períodos. Como se vê, a trajetória se estabiliza com valores próximos a 126 e o valor de equilíbrio é aproximadamente 127.

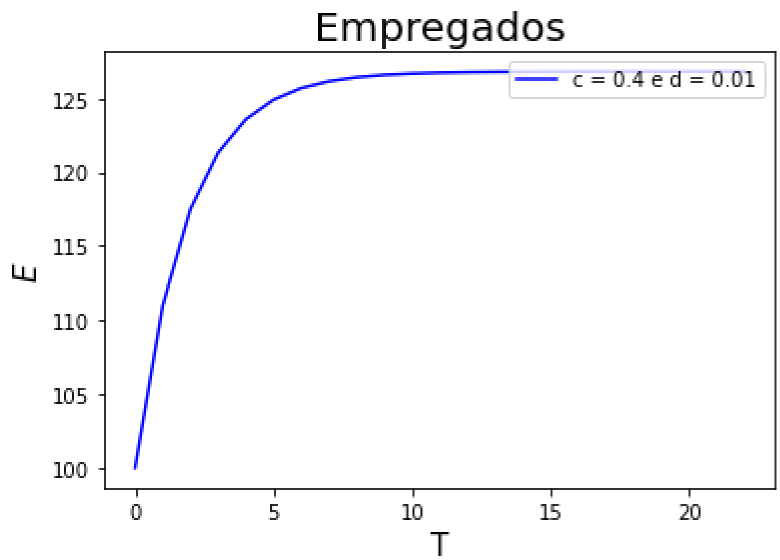


Figura 2: A trajetória dos empregados

A segunda imagem demonstra a trajetória dos desempregados, que alcança seu equilíbrio no ponto em que o número de desempregados é aproximadamente 3.

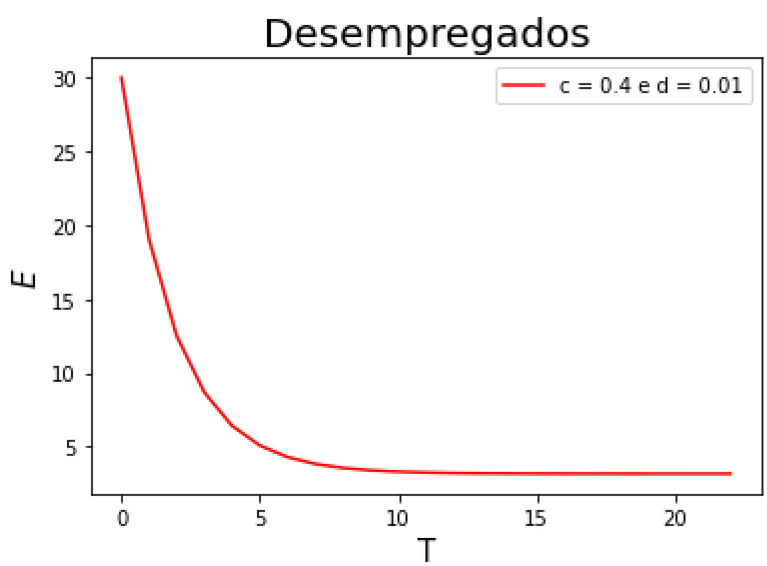


Figura 3: A trajetória dos desempregados

A figura abaixo retrata a trajetória da taxa de desemprego até a taxa natural de desemprego de 2.439%.

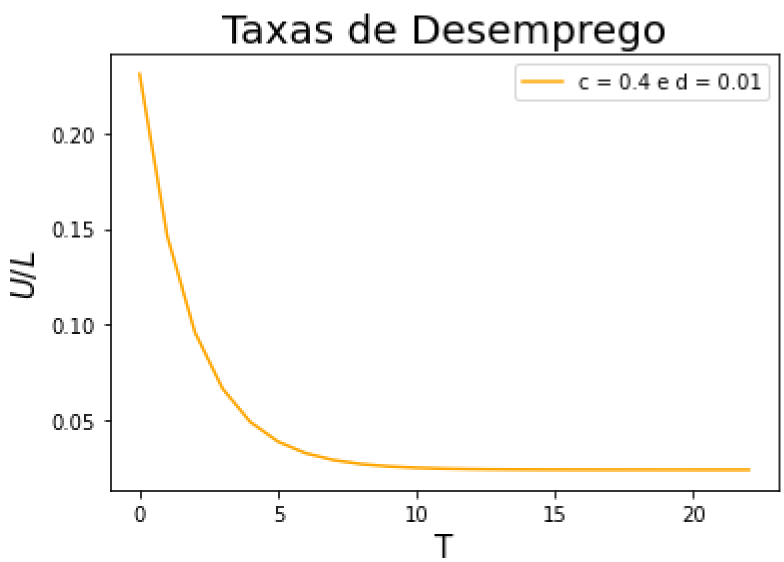


Figura 4: A trajetória da taxa de desemprego

Como se observa pelo gráfico abaixo, o aumento da taxa de demissão, mantendo-se a taxa de contratação constante leva a trajetórias da taxa de desemprego em níveis cada vez maiores, estabilizando em taxas naturais de desemprego também mais altas, como é de se esperar pela fórmula apresentada anteriormente. Outro ponto curioso é que a depender da taxa de demissão escolhida, vemos uma trajetória crescente da taxa de desemprego, em que no estado estacionário a taxa é superior à taxa inicial.

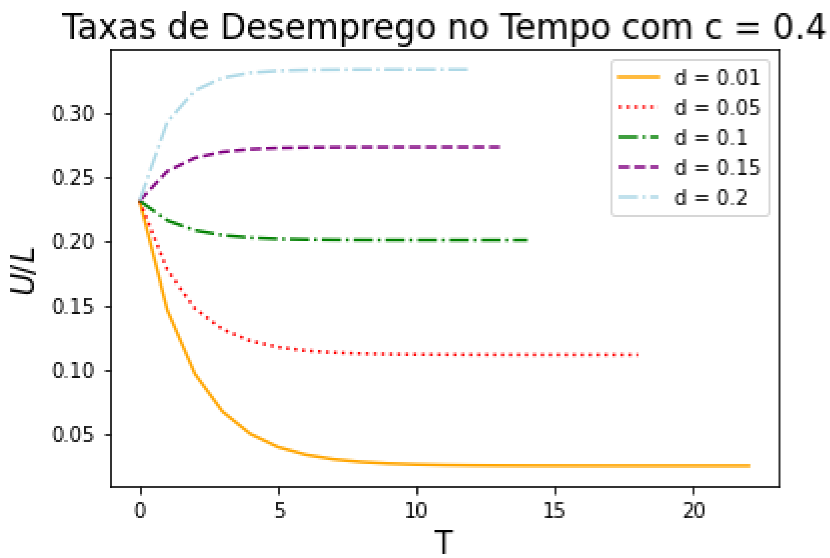


Figura 5: A variação da taxa de desemprego alterando-se a taxa de demissão

A figura abaixo retrata o baixo impacto da taxa de contratação na trajetória da taxa de desemprego. Como se vê, mudanças na taxa de contratação geram alterações pouco significativas na trajetória da taxa de desemprego.

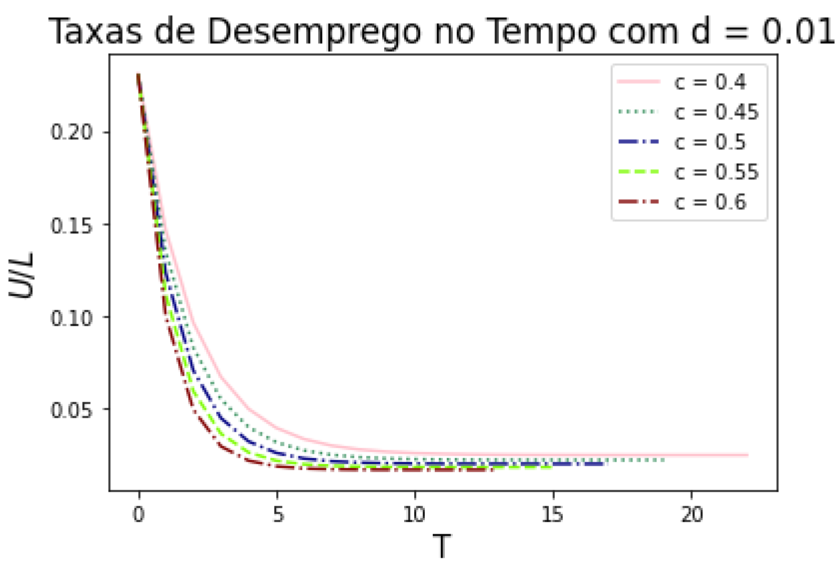


Figura 6: A variação da taxa de desemprego alterando-se a taxa de contratação

Os últimos gráficos demonstram o impacto de alterações tanto na taxa de contratação quanto na de demissão na taxa natural de desemprego. Como se vê a taxa tende a 1 tanto quando a taxa de demissão tende a 1 e a taxa de contratação tende a 0, quanto quando ambas as taxas tendem a 0.

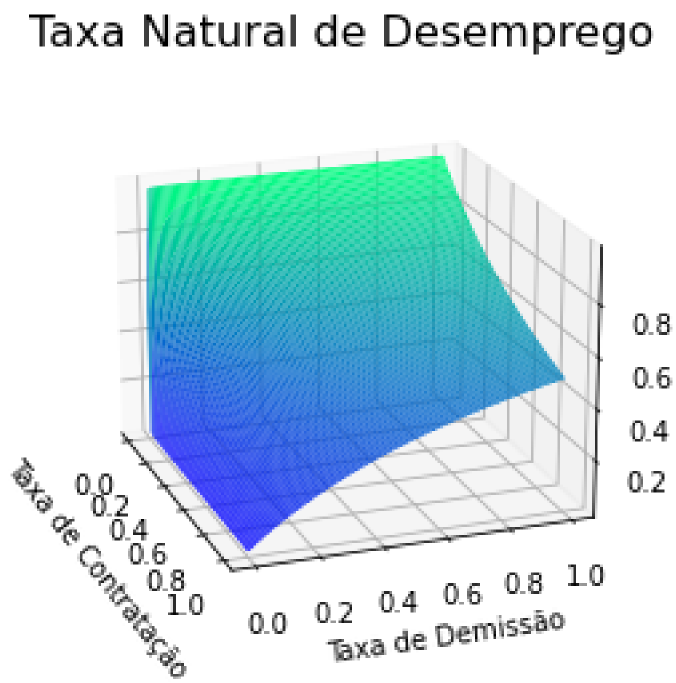


Figura 7: A variação da taxa natural de desemprego alterando-se as taxas de contratação e demissão

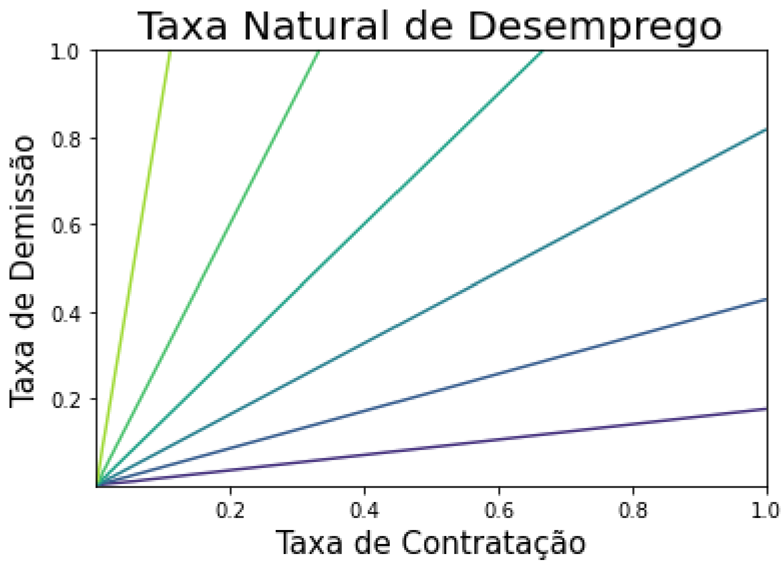


Figura 8: As curvas de nível da superfície da Figura 6

5 Extensão do Modelo

Para a extensão do modelo, fizemos duas implementações. Na primeira, tratamos do caso em que o tamanho do mercado de trabalho não é constante, havendo entradas e saídas do mercado de trabalho. No segundo tratamos da dinâmica de um trabalhador individual, e analisamos como varia a porcentagem de tempo em que ele fica empregado ou desempregado.

5.1 Primeira Extensão: Mercado de Trabalho Dinâmico

No nosso exemplo anterior tínhamos que o tamanho do mercado de trabalho, ou seja, a soma dos trabalhadores empregados e desempregados, era fixa. Nessa extensão tomaremos que existe uma certa parcela de trabalhadores a cada período t que entra no mercado de trabalho, sejam esses jovens que estão entrando no mercado de trabalho pela primeira vez ou sejam esses pessoas que tinham deixado de procurar um empregado e estão procurando um emprego agora, e uma parcela de trabalhadores que deixa o mercado de trabalho, seja por que se aposentaram ou por que deixaram de buscar um emprego. Os trabalhadores que entram no mercado entram para o lago de desempregados. Tomemos novamente c e d como as taxas de contratação e demissão respectivamente, mas introduziremos as taxas α e β como sendo as taxas de entrada e de saída do mercado de trabalho.

A cada período dos E_t trabalhadores empregados $(1-\beta)E_t$ permanecerão no mercado no próximo período, e desses $(1-\beta)(1-d)E_t$ permanecerão empregados. Dos trabalhadores desempregados, no próximo período $(1-\beta)U_t$ permanecerão no mercado e $(1-d)cU_t$ serão contratados. Dado isso, a dinâmica dos trabalhadores empregados a cada período pode ser descrita como $E_{t+1} = (1-\beta)(1-d)E_t + (1-d)cU_t$. Uma análise similar pode ser feita para a dinâmica dos trabalhadores desempregados, com a mudança de que a cada período αN_t novos trabalhadores entrarão para o lado de desempregados, sendo $N_t = E_t + U_t$. Assim, $U_{t+1} = (1-\beta)dE_t + (1-\beta)(1-c)U_t + \alpha N_t$. Assim, escrito matricialmente, temos o sistema abaixo.

$$X_t = \begin{pmatrix} U_t \\ E_t \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} (1-\beta)(1-c)+\alpha & (1-\beta)d+\alpha \\ (1-d)c & (1-\beta)(1-d) \end{pmatrix}$$

$$X_{t+1} = AX_t$$

Isso nos dá a dinâmica dos estoques de trabalhadores para qualquer período futuro. No entanto, para taxas, devemos dividir a equação acima pelo tamanho total da força de trabalho e multiplicar a força de trabalho pela sua taxa de crescimento $g = \alpha - \beta$.

$$x_t = \begin{pmatrix} \frac{U_t}{N_t} \\ \frac{E_t}{N_t} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} (1-\beta)(1-c)+\alpha & (1-\beta)d+\alpha \\ (1-d)c & (1-\beta)(1-d) \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$x_{t+1} = \frac{1}{1+g}Ax_t \tag{3}$$

$$x_{t+1} = A^* x_t \tag{4}$$

Em (4) A^* é simplesmente $A^* = \frac{1}{1+g}A$. Agora temos a dinâmica em termos de taxas. Podemos agora implementar um programa que implemente essa dinâmica até encontrar o estado de equilíbrio, ou seja, a taxa natural de desemprego, em que de um período para o outro a taxa não se altera.

```
def lake_model_ext(emp, des, t_con, t_dem, t_e_merc, t_s_merc, tol
    = 1e-5):

    # Forca de trabalho total inicial
    N = emp + des

    # Taxa de crescimento da forca de trabalho
    g = t_e_merc - t_s_merc

    # Vetor da taxa de desemprego e emprego
    xt = np.array([[des/N],
                   [emp/N]])

```

```python
    # Dinamica do modelo - como atualizar o numero de desempregados
    # e de empregados
    n_contratados = (1 - t_s_merc) * (1 - t_con) + t_e_merc
    demitidos = (1 - t_s_merc) * t_dem + t_e_merc
    contratados = (1 - t_s_merc) * t_con
    n_demitidos = (1 - t_s_merc) * (1 - t_dem)

    # Criando as matrizes de coeficientes para a atualizacao
    # do modelo dinamico
    A = np.array([[n_contratados, demitidos],
                  [contratados, n_demitidos]])

    A_hat = (1 / (1 + g)) * A

    # Inicializando o erro
    error = tol + 1

    # Inicializando listas e periodos
    t = 1
    U_vec = np.array([des])
    E_vec = np.array([emp])
    N_vec = np.array([N])
    u_vec = np.array([xt[0]])
    e_vec = np.array([xt[1]])

    # Roda a dinamica
    while error > tol:

        # Atualiza taxas
        xt_1 = A_hat @ xt
        error = np.max(np.abs(xt_1 - xt))
        xt = xt_1

        # Atualiza estoques
        N *= (1 + g)
        U = N * xt_1[0]
        E = N * xt_1[1]

        # Apensa novos valores
        u_vec = np.append(u_vec, xt_1[0])
        e_vec = np.append(e_vec, xt_1[1])
        U_vec = np.append(U_vec, U)
        E_vec = np.append(E_vec, E)
        N_vec = np.append(N_vec, N)

        t += 1

    return u_vec[-1], u_vec, e_vec, U_vec, E_vec, N_vec, t, A_hat
```

5.1.1 Estática Comparativa na Extensão

Faremos agora um exercício de estática comparativa. As constantes serão o número de empregados inicial, que será 100, o número de desempregados inicial, que será 30, a taxa de contratação que será 0.4 e a taxa de demissão que será 0.05.

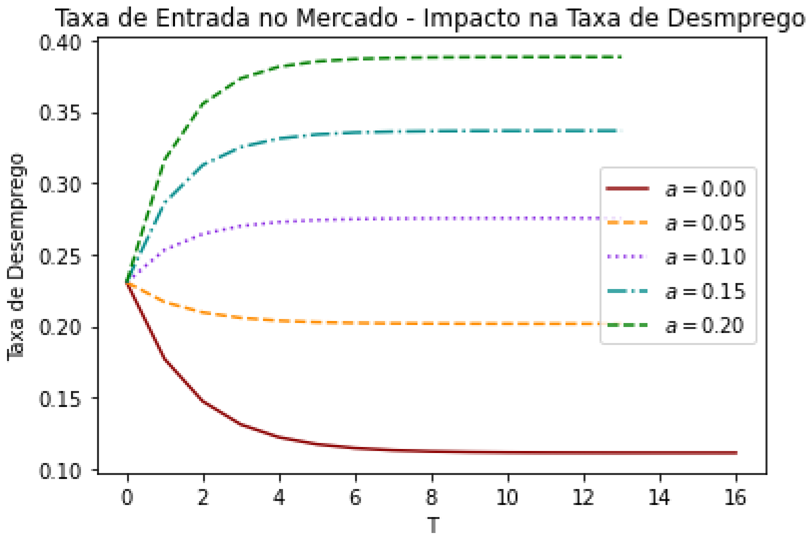


Figura 9: Como a variação na taxa de entrada no mercado altera a taxa de desemprego

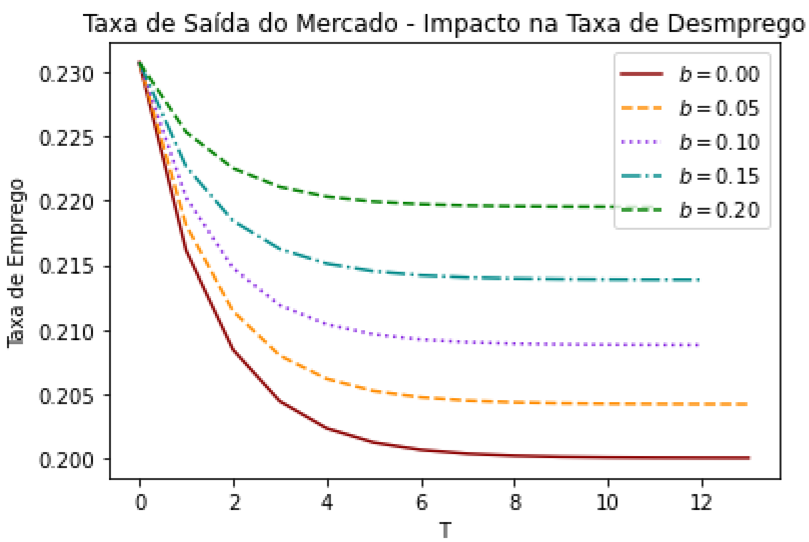


Figura 10: Como a variação na taxa de saída do mercado altera a taxa de desemprego

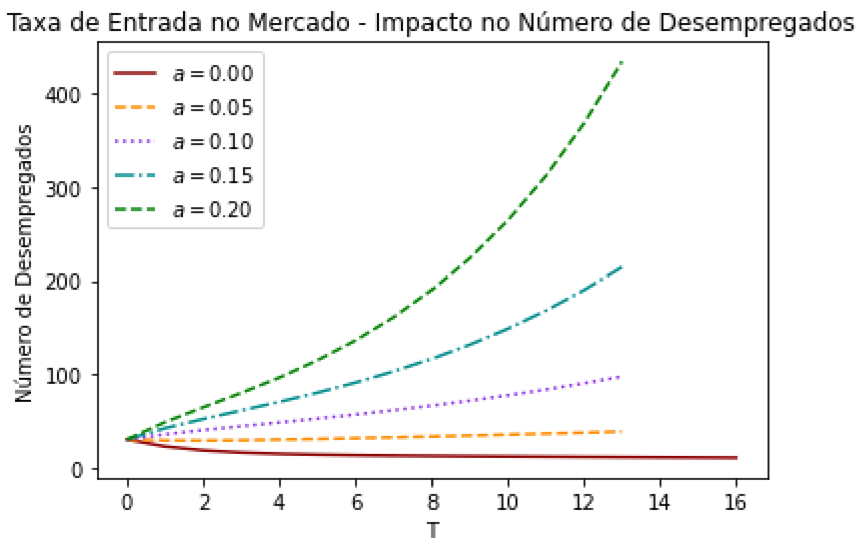


Figura 11: Como a taxa de entrada no mercado altera o estoque de desempregados

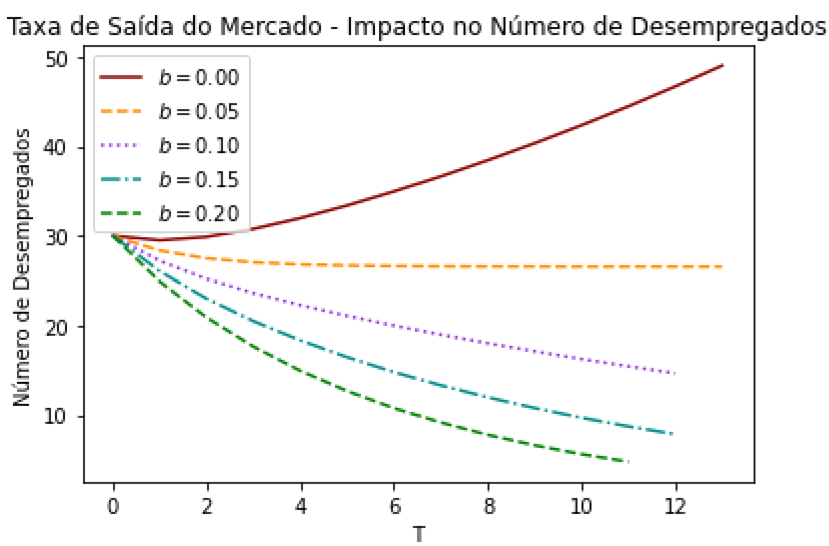


Figura 12: Como a taxa de saída do mercado altera o estoque de desempregados

5.2 Segunda Extensão: Dinâmica de um Trabalhador Individual

Modelaremos agora a dinâmica de um trabalhador individual que a cada período pode estar ou empregado, ou desempregado. A probabilidade do trabalhador estar em qualquer um dos dois estados possíveis depende unicamente do estado em que ele estava no período anterior e da taxa de contratação e demissão na economia. Tal comportamento permite que se modele essa situação à partir de cadeias de Markov finitas. Cadeias de Markov finitas são sequências de variáveis aleatórias definidas sobre um espaço de estados finito $S = 1, 2, ..., n$ tal que a propriedade abaixo vale.

$$\mathbf{P}(X_{t+1} = y|X_t) = \mathbf{P}(X_{t+1} = y|X_t, X_{t-1}, ...) \qquad y \in S$$

Ou seja, a probabilidade da próxima variável aleatória assumir um determinado valor depende apenas da variável aleatória anterior. Podemos expressar as probabilidade de transição entre estados de uma variável para a outra em uma matriz em que as linhas expressam o estado anterior e as colunas o estado posterior. Assim o elemento na linha 1 coluna 2 denotaria a probabilidade de transição do estado 1 para o estado 2. Essa matriz é chamada de matriz estocástica. Uma vez que um determinada linha denota as probabilidades de se fazer a transição entre um determinado estado inicial e qualquer outro estado possível, temos que as linhas são as distribuições condicionais de probabilidades do estado inicial para qualquer outro estado, e portanto devem somar 1. Além disso, já que cada elemento de uma matriz estocástica é uma probabilidade, todos os elementos devem ser não negativos e menores ou iguais a 1. Por fim, denotemos por ψ_t a função massa de probabilidade para a variável aleatória X_t, contendo as probabilidades da variável assumir cada estado possível.

Vamos montar uma cadeia de Markov em que cada variável aleatória representa o trabalhador e se este está empregado ou desempregado. Os estados possíveis são $S = 0, 1$, em que 0 representa estar desempregado e 1 representa estar empregado. Tomemos novamente que a taxa de contratação é c e a taxa de demissão é d. Desse modo, a matriz estocástica que demonstra as probabilidades de transição entre os estados será como consta abaixo.

$$P = \begin{pmatrix} 1-c & c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

Suponhamos que queiramos saber a distribuição marginal para qualquer X_t. Desenvolvendo pela Lei da Probabilidade Total temos o abaixo.

$$x, y \in S$$

$$\mathbf{P}(X_t = y) = \sum_{x \in S} \mathbf{P}(X_t = y | X_{t-1} = x)\mathbf{P}(X_{t-1} = x)$$

$$\psi_t(y) = \sum_{x \in S} \mathbf{P}(x, y)\psi_{t-1}(x)$$

Tomando para todos os y possíveis, temos que a equação $\psi_t = \psi_{t-1}P$ nos provê a nova distribuição de massa de probabilidade para cada t. Assim $\psi_{t+m} = \psi_t P^m$. Utilizamos esse raciocínio para o programa abaixo. Para cada momento t, calcula-se a distribuição de massa de probabilidade e sorteia-se de uma distribuição uniforme um valor entre 0 e 1. Esse valor sorteado indica se o trabalhador estará empregado ou desempregado, de acordo com a distribuição de probabilidade do seu período. Calcula-se então a porcentagem de tempo que o trabalhador ficou desempregado e empregado para cada período. Plotamos essa variação e verificamos, como esperado pela teoria, que o tempo empregado e desempregado converge para o estado estacionário dado por $\psi[0] = \frac{d}{c+d}$.

```python
# Simulando um trabalhador individual - Cadeias de Markov

def stationary_distribution(t_con, t_dem):

    # Probabilidade de estar desempregado
    # e empregado no estado estacionario
    p_u = t_dem / (t_con + t_dem)
    p_e = 1 - p_u

    return p_u, p_e


def markov_chain_lake(p_u, p_e, t_con, t_dem, periodos = 1001):

    assert 0 <= p_u <= 1
    assert 0 <= p_e <= 1
    assert p_u + p_e == 1
    assert 0 <= t_con <= 1
    assert 0 <= t_dem <= 1

    # A distribuicao de probabilidade da primeira
    # variavel aleatoria da cadeia de markov
    dist_prob = np.array([p_u, p_e])

    # A matriz estocastica
    stoch_mat = np.array([[1 - t_con, t_con],
                          [t_dem, 1 - t_dem]])

    # Criando listas
    desempregado = np.array([])
    empregado    = np.array([])
    tempo_u_vec = np.array([])
    tempo_e_vec = np.array([])

```

```
    # Para cada periodo
    for i in range(1, periodos):

        # Gerar um valor aleatorio entre 0 e 1
        # segundo a uniforme
        rand = np.random.uniform(0, 1, 1)

        # Se o valor aleatorio for abaixo da probabilidade
        # de estar desempregado segundo a distribuicao de
        # Xt apensa 1 a lista de desempregado e 0 a lista
        # de empregado
        if rand <= dist_prob[0]:

            desempregado = np.append(desempregado, 1)
            empregado = np.append(empregado, 0)

        # Caso contrario faz o inverso
        else:

            desempregado = np.append(desempregado, 0)
            empregado = np.append(empregado, 1)

        # Com base no periodo calcula a porcentagem de tempo
        # empregado ou desempregado e apensa na lista
        percent_des = sum(desempregado == 1) / i
        percent_emp = sum(empregado == 1) / i

        tempo_u_vec = np.append(tempo_u_vec, percent_des)
        tempo_e_vec = np.append(tempo_e_vec, percent_emp)

        dist_prob = dist_prob @ stoch_mat

    return tempo_u_vec, tempo_e_vec, desempregado, empregado
```

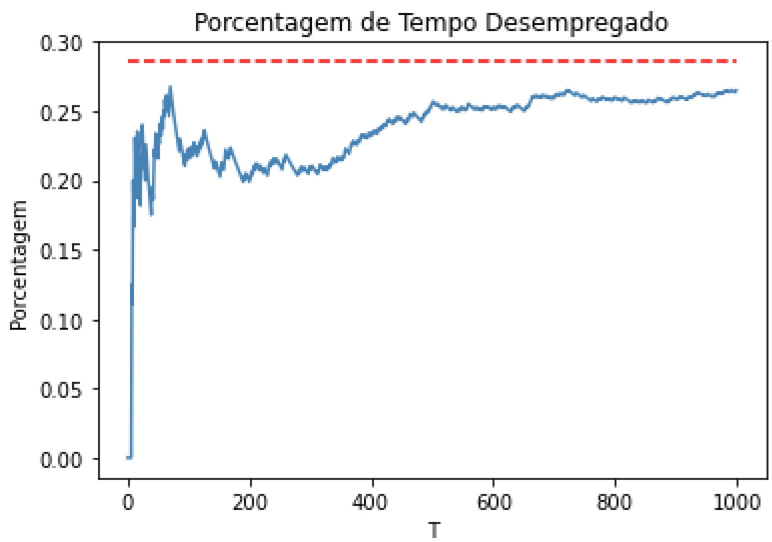


Figura 13: Variação do tempo desempregado em cada período, sendo que a reta indica o estado estacionário

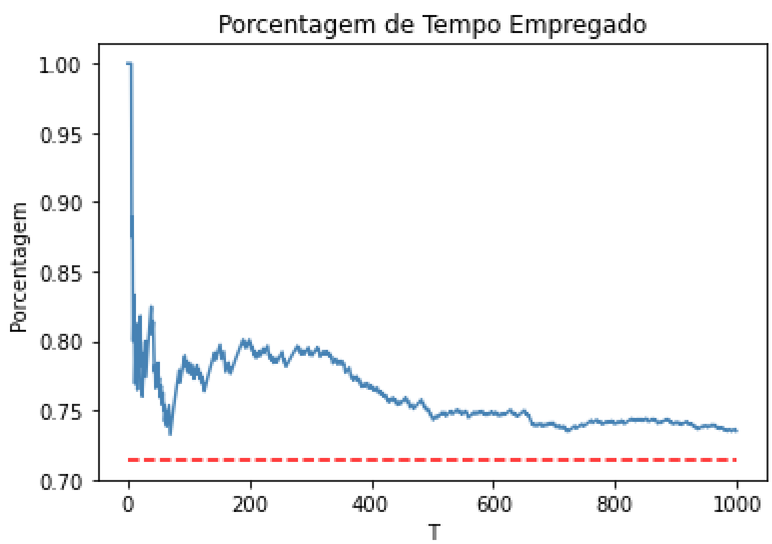


Figura 14: Variação do tempo empregado em cada período, sendo que a reta indica o estado estacionário