Crescimento Econômico: O Modelo de Solow

Ian Teixeira Barreiro

October 2021

1 Introdução

O que determina a renda e, consequentemente, o bem-estar de um país? Por que alguns países crescem mais e mais rápido que outros? Que papel os fatores de produção (capital e mão de obra) tem nesse crescimento e como podemos desenhar políticas que levem a um maior crescimento a longo prazo? Que papel tem o avanço tecnológico nesse crescimento? Essas e outras perguntas, relativas ao crescimento a longo prazo de uma economia serão respondidas no presente texto a partir de um resumo do Modelo de Crescimento de Solow, tendo como referência o livro texto "Macroeconomia, 8a Edição", do autor N. Gregory Mankiw. O Modelo de Solow apresenta o crescimento como função do estoque de capital, da mão de obra e do avanço tecnológico.

A estrutura do presente texto será a seguinte: i) primeiro descreveremos uma versão simplificada do modelo (em que excluímos a mão de obra e o avanço tecnológico como determinantes do produto) em termos de suas partes constituintes - a oferta ou produto agregado e a demanda agregada; ii) em seguida descreveremos o importante conceito do estado estacionário; iii) descreveremos então a implementação computacional do modelo simplificado descrito, com função de produção Cobb-Douglas, que encontra o estado estacionário da economia; iv) discutiremos então aprofundamentos do modelo simples apresentado, tais como o efeito da poupança no crescimento e a "regra de ouro".

2 O Modelo de Solow

O Modelo de Solow descreve como o estoque de capital, a força de trabalho e o avanço tecnológico, e em especial o crescimento dessas variáveis, interagem para levar ao crescimento do produto agregado a longo prazo. Para descrever o modelo, começaremos com uma economia fechada e sem atuação do governo.

2.1 A Função de Produção

No Modelo de Solow, a produção é uma função do estoque de capital e da força de trabalho, tendo a seguinte forma:

$$Y = F(K, L) \tag{1}$$

Tomamos o produto como tendo efeitos constantes de escala, ou seja, aumentos no estoque de capital e na força de trabalho a uma certa constante levam a crescimentos proporcionais do produto. Sabendo disso temos:

$$\begin{aligned} Y &= F(K, L) \\ Y \cdot 1/L &= F(K/L, 1) \\ y &= f(k) \end{aligned}$$

em que y é o produto por trabalhador e k é o capital por trabalhador. Deste modo, incorporamos a informação sobre o mercado de trabalho junto à variável do estoque de capital, tornando nossa análise independente do tamanho da economia quando medido através do tamanho da força de trabalho. A primeira derivada dessa função mostra o produto marginal da economia dado um acréscimo em k, ou seja, o aumento no produto dado um incremento infinitesimal no estoque de capital. Tomamos a segunda derivada como sendo negativa, para representar que o produto tem retornos marginais decrescentes em relação ao capital - quando k é alto, acréscimos adicionais nessa variável levam a um baixo aumento no produto. Uma função Cobb-Douglas possui as características acima descritas, por isso, nós adotaremos a seguinte função nas análises que seguem:

$$y = k^{1/3} = \sqrt[3]{k}$$

cujo gráfico é:

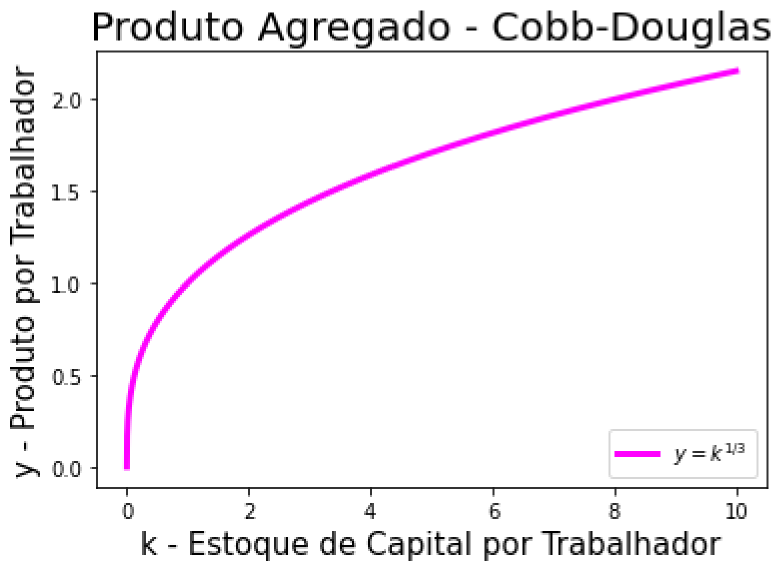

Figura 1: Um produto agregado Cobb-Douglas

2.2 A Função Consumo

Como dissemos anteriormente, nossa economia é fechada e sem gastos do governo. Deste modo, nossa demanda agregada é bastante simples, e compreende apenas o consumo e o investimento agregados. Para facilitar nossa análise, e tendo em vista que a produção está expressa em termos de cada trabalhador, dividiremos nossa função consumo por L para obter a demanda por trabalhador, como está expresso a seguir:

$$Y = C + I$$
$$\frac{Y}{L} = \frac{C}{L} + \frac{I}{L}$$
$$y = c + i$$

em que y é a demanda por trabalhador, c é o consumo por trabalhador e i é o investimento por trabalhador.

Suponhamos que s seja a taxa de poupança, valor entre 0 e 1, que representa a fração da renda poupada na economia. Nesse caso, poderíamos dizer que toda renda não poupada é usada no consumo, e assim expressar o consumo como:

$$c = (1 - s)y$$

e substituir essa equação na equação de demanda agregada obtendo:

$$\begin{aligned} y &= (1 - s)y + i \\ y(1 - 1 + s) &= i \\ i &= sy \\ i &= sf(k) \end{aligned}$$

de modo que agora podemos expressar o investimento na economia em termos de uma função do estoque de capital existente no presente. Tomando $s = 0.3$, e adotando ainda a função de produção Cobb-Douglas obtemos que $i = 0.3k^{1/3}$. A curva dessa função, juntamente com a da função de produção, está registrada na figura 2.

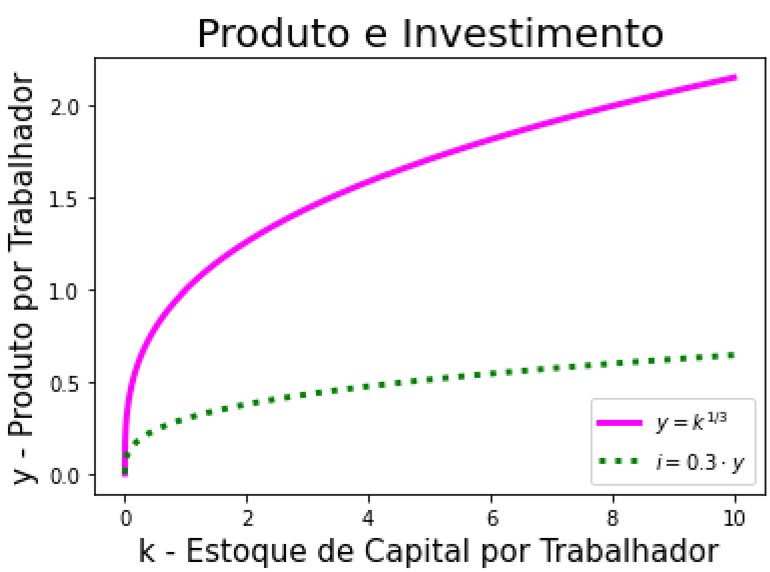

Figura 2: O produto e o investimento da economia

3 O Estado Estacionário

Para que possamos abordar o estado estacionário, é necessário acrescentar mais um elemento adicional, que nos ajudará a determinar em cada momento do tempo qual será a variação no estoque de capital: a depreciação. O investimento, abordado anteriormente, leva a um aumento no estoque de capital (estamos excluindo a manutenção de estoques). A depreciação atua deteriorando o capital. Ela expressa o tempo de vida útil a partir do qual o capital se torna inutilizável. No presente exemplo consideraremos que a depreciação atua anualmente a taxas constantes sobre o estoque de capital por trabalhador, de modo que a função depreciação seja linear. Supondo por exemplo uma depreciação de 0.1 teremos as curvas que seguem.

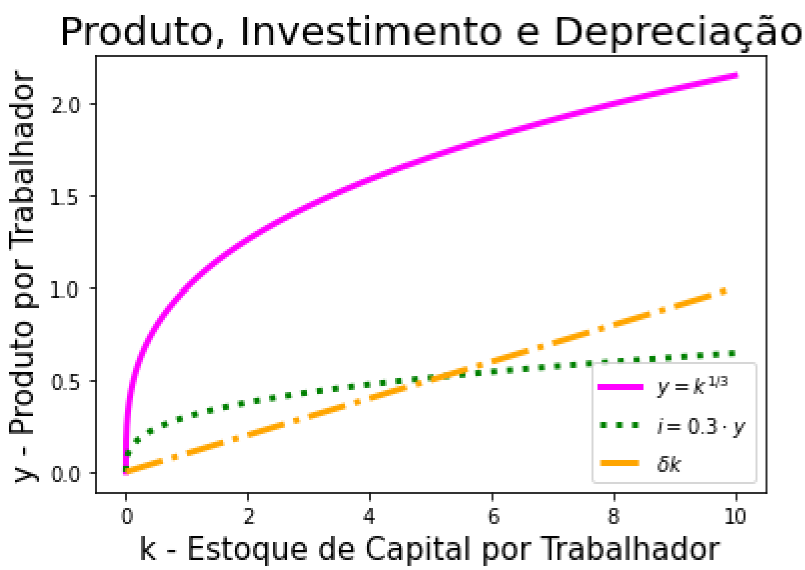

Figura 3: O produto, investimento e a depreciação de uma economia

Como observamos no gráfico, para certos valores de capital por trabalhador, o investimento é superior à depreciação. Devido a isso a variação do estoque de capital será positiva: mais capital é introduzido na economia do que deteriorado. Esse padrão de crescimento do estoque de capital continuará, até o ponto em que a reta de depreciação se encontra com a curva do investimento. Nesse ponto, a variação do estoque de capital é zero: a quantidade de capital novo introduzido na economia é igual à quantidade de capital depreciado. Esse ponto é chamado de estado estacionário, justamente pelo fato de que ao entrar nesse equilíbrio a economia permanecerá nesse ponto, não aumentando o seu estoque de capital. O estado estacionário representa o equilíbrio a longo prazo da economia.

4 Implementação Computacional

A seguir apresentamos a implementação computacional do programa que encontra o estado estacionário de uma economia dado uma função produção que depende apenas do estoque de capital.

```
 import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
sns.set

def produto(K, L, exp, K_por_trab = True):

    """
    Uma funcao de producao Cobb-Douglas:
    -------------------------------------
    K          = estoque de capital
    L          = forca de trabalho
    exp        = o expoente da funcao Cobb-Douglas
    K_por_trab = True -> a funcao produto se torna produto por trabalhador.
    Nesse caso recomenda-se usar L = 1.
    -------------------------------------
    """

    if K_por_trab:
        return (K / L) ** exp
    else:
        return (K ** exp) * (L ** exp)

def estado_estacionario(K, exp, s, depr, precisao = 4):

    """
    Encontra o equilibrio estacionario para um modelo com forca de
    trabalho constante e uma funcao de producao Cobb-Douglas.
    -------------------------------------
    K        = estoque de capital
```

```
    exp      = o expoente da funcao Cobb-Douglas
    s        = taxa de poupanca (entre 0 e 1)
    depr     = taxa de depreciacao (entre 0 e 1)
    precisao = a quantas casas decimais se deseja arredondar
    ----------------------------------------
    """

    assert s >= 0 and s <= 1
    assert depr >= 0 and depr <= 1

    k_t_mais = K
    delta = s * produto(K, 1, exp) - depr * K

    while round(delta, precisao) != 0:
        k_t_mais = K + delta
        delta = s * produto(k_t_mais, 1, exp) - depr * k_t_mais
        K = k_t_mais

    return round(K, precisao)
```

A primeira função é uma função que nos retorna um produto Cobb-Douglas dados os parâmetros. Caso K_por_trab seja avaliada como True, a função retornará o produto por trabalhador. Nesse caso, como escrito na documentação, recomenda-se o uso de L = 1, ainda que isso não seja necessário.

A função estado_estacionario é a função efetivamente usada para encontrar o estado estacionário da economia, no caso de uma função de produção por trabalhador. Primeiramente verifica-se se a taxa de poupança está entre 0 e 1. Em seguida, o mesmo é feito para a taxa de depreciação. Definimos em seguida uma variável temporária que armazena o que sera o capital no período subsequente ao que está sendo analisado. Delta é definido como sendo a diferença do investimento e do capital depreciado para um dado período. Como dito anteriormente, no estado estacionário o capital investido se iguala ao capital depreciado, de modo que delta seria avaliado para 0. Precisão é um parâmetro que indica a quantas casas decimais queremos arredondas delta no momento de avaliar se este se iguala a 0. Definimos uma iteração por *while* que cessa apenas quando delta arredondado a precisão casas decimais se iguala a 0. Enquanto a condição não for satisfeita, atualizamos o valor do capital no período subsequente, somando o valor atual com o valor de delta (a variação no estoque de capital) e recalculamos delta com base no novo estoque de capital. Quando a iteração cessa, retornamos o valor do capital no ponto estacionário arredondado a precisão casas decimais.

A seguir temos um exemplo do programa acima com os parâmetros utilizados para as funções anteriores, ou seja, uma função de produção Cobb-Douglas com expoente $\frac{1}{3}$, uma taxa de poupança de 0.3 e uma depreciação de 0.1. Rodamos o programa com um capital inicial de K = 6.

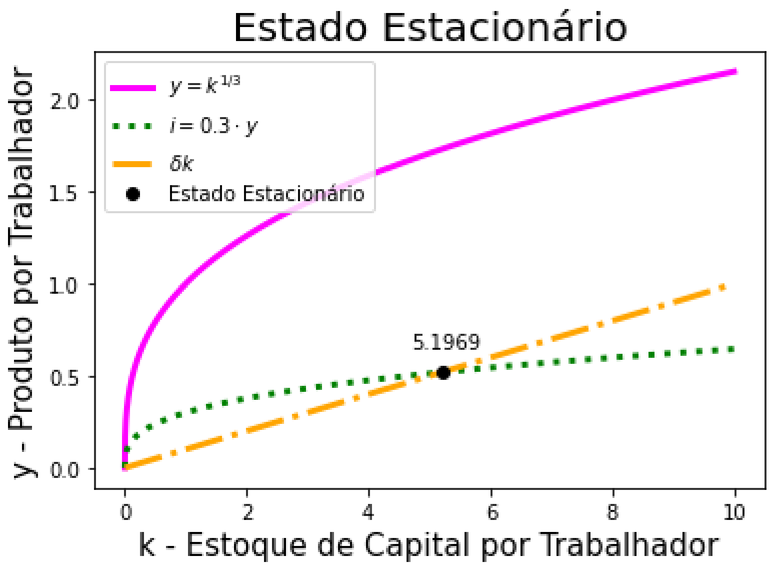

Figura 4: O estado estacionário para o exemplo dado

Como se vê o equilíbrio de longo prazo é alcançado no ponto K = 5.1969, arredondado com precisão = 4.