Oligopólio: Escolha Simultânea em Quantidade

Ian Teixeira Barreiro

Dezembro 2021

1 Introdução

Apesar da utilidade do estudo de modelos de competição perfeita e modelos de mercados monopolísticos, a maioria dos mercados se encontra em um ponto intermediário, havendo mais de uma empresa no mercado, mas não o suficiente para que cada empresa tome o preço como dado. Nesses mercados, havendo a influência da escolha de preço e quantidade de uma empresa sobre as decisões das demais, entra em cena a importância da estratégia das empresas, sendo útil modelar esses mercados à partir do ferramental da teoria dos jogos. Estudaremos neste resumo, um cenário desses mercados, ditos oligopolísticos, que é a escolha simultânea de quantidade.

Para esse estudo, utilizaremos como material o livro-texto "Microeconomia: Uma Abordagem Moderna, 8a Edição"de Hal Varian. O texto será estruturado da seguinte maneira: i) primeiramente descreveremos o tipo de escolhas que estão disponíveis para as empresas em mercados de oligopólio; ii) segundo, descreveremos o Modelo de Cournot, primeiro apenas com um duopólio, que modela o cenário de escolha simultânea de quantidade em um mercado com 2 empresas; iii) depois expandiremos o Modelo do Cournot para um cenário com N-Jogadores; iv) em seguida descreveremos a implementação computacional do modelo; v) por fim serão feitos exercícios de estática comparativa para ilustrar o efeito de alterações nos parâmetros do modelo no resultado global do mercado.

2 Escolha de uma Estratégia

Dado um oligopólio, as empresas tem ao seu alcance a escolha de preço, quantidade e qualidade como variáveis estratégicas. Assumindo que as empresas sejam homogêneas, apenas preço e quantidade estão ao seu dispor como escolhas estratégicas. As empresas podem interagir em jogos que são sequenciais e em jogos que são simultâneos. No primeiro caso, uma empresa age antes da outra. Por exemplo, uma empresa pode escolher o preço de seus produtos antes das outras, se tornando assim líder em preço. Ainda, uma empresa pode escolher a quantidade a produzir antes das demais, tornando-se líder em quantidade. Isso é vantajoso para uma empresa dado que suas decisões impactam as decisões disponíveis para as demais, sendo possível que a líder tome decisões que a beneficiem em detrimento dos outros agentes de mercado.

Podem haver ainda situações de escolha simultânea de preços ou quantidade. Nesse caso, não existe a opção de uma empresa tornar-se líder, já que ambas as empresas tomam decisões ao mesmo tempo, levando em conta as decisões que esperam que as demais empresas irão tomar. É o caso do modelo de Cournot, que aqui teremos como foco, em que as empresas escolhem a quantidade a produzir simultaneamente.

Esse tipo de classificação é válido para jogos competitivos. Há ainda os jogos cooperativos, em que empresas do mercado estão em conluio umas com as outras, como é o caso dos cartéis.

3 Modelo de Cournot: Escolha Simultânea em Quantidade

O modelo de Cournot descreve a situação em que duas empresas concorrentes devem escolher as suas quantidades a produzir, levando-se em conta suas previsões (tomado seu conhecimento de que as demais empresas são agentes racionais) das escolhas das demais empresas. Descrevamos o modelo da perspectiva de uma empresa em um duopólio. Tomemos que essa empresa espere que a segunda empresa produza uma quantidade de Y_2^e. Tomemos ainda que a função demanda do mercado seja dada por $P(Y_1, Y_2^e) = a - b(Y_1 + Y_2^e)$, e que a função custo da empresa 1 seja $C(Y_1)$. Então, o problema de maximização da empresa 1 será dado pela expressão abaixo.

$$\max_{Y_1} (a - b(Y_1 + Y_2^e))Y_1 - C(Y_1)$$

Encontraremos a função de escolhas ótimas da empresa 1, dada a escolha esperada da empresa 2, tomando sua condição de primeira ordem, como expresso abaixo.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial((a - b(Y_1 + Y_2^e))Y_1 - C(Y_1))}{\partial Y_1} &= 0 \\
a - 2bY_1 - bY_2^e - C'(Y_1) &= 0 \\
Y_1 &= \frac{a - bY_2^e - C'(Y_1)}{2b}
\end{aligned}$$

De modo similar, a escolha ótima da empresa 2 tomado o que ela espera que a empresa 1 faça será expresso como abaixo.

$$Y_2 = \frac{a - bY_1^e - C'(Y_2)}{2b}$$

Temos que no equilíbrio, tanto a empresa 1 quanto a empresa 2 tomarão as escolhas ótimas disponíveis para cada uma para que possam maximizar seus lucros. As empresas sabem, e esperam, que a outra empresa tomará a decisão ótima. Assim as variáveis de quantidade esperada correspondem justamente à escolha ótima, de forma que resolvendo o sistema expresso acima será possível encontrar a quantidade de equilíbrio de cada empresa.

$$\begin{cases} Y_1 - \frac{Y_2}{2} = \frac{a - C'(Y_1)}{2b} \\ \frac{Y_1}{2} - Y_2 = \frac{a - C'(Y_2)}{2b} \end{cases}$$

4 Modelo de Cournot com N-Jogadores

Com N-Jogadores, é possível expandir o sistema anterior para N empresas, estratégia essa que foi usada na implementação computacional. Como exemplo, tomaremos um sistema com 3 empresas, para ilustrar o argumento.

$$\begin{cases} Y_1 - \frac{Y_2}{2} - \frac{Y_3}{2} = \frac{a - C'(Y_1)}{2b} \\ \frac{Y_1}{2} - Y_2 - \frac{Y_3}{2} = \frac{a - C'(Y_2)}{2b} \\ \frac{Y_1}{2} - \frac{Y_2}{2} - Y_3 = \frac{a - C'(Y_3)}{2b} \end{cases}$$

5 Implementação Computacional

5.1 Implementação Analítica

Para a implementação analítica foi tomada uma demanda linear e custos lineares para cada uma das empresas de um duopólio. Resolvemos o problema de maximização para cada empresa, substituindo os valores de escolha ótima de Y_2 e, Y_1, para encontrar uma expressão que desse a escolha ótima da primeira empresa. Posteriormente esse valor foi substituído em Y_2 para encontrarmos a quantidade de equilíbrio.

```
def modelo_cournot_analitico(intr_dem, inc_dem, intr_c1, inc_c1,
    intr_c2, inc_c2):

    y1 = (intr_dem + inc_c2 - 2 * inc_c1) / (3 * inc_dem)

    y2 = (intr_dem - inc_dem * y1 - inc_c2) / 2 * inc_dem

    return y1, y2
```

5.2 Implementação por Sistemas Lineares

Para essa implementação o sistema foi expresso matricialmente e resolvido multiplicando o lado direito pela função inversa da matriz de coeficientes.

```
def modelo_cournot_duo_alglin(intr_dem, inc_dem, intr_c1,
                              inc_c1, intr_c2, inc_c2):
```

```python

    # Criando a matriz de coeficientes

    mat_coef = np.array([[1, 0.5],
                         [0.5, 1]])

    # Calculando a matriz inversa

    assert np.linalg.det(mat_coef) != 0

    inv_matcoef = np.linalg.inv(mat_coef)

    # Criando vetor dos resultados

    vec_resl = np.array([[intr_dem / (2 * inc_dem) - inc_c1 / (2 *
    inc_dem)],
                         [intr_dem / (2 * inc_dem) - inc_c2 / (2 *
    inc_dem)]])


    y_vec = np.dot(inv_matcoef, vec_resl)

    # Preco

    p = intr_dem - inc_dem * (sum(y_vec))


    return y_vec[0], y_vec[1], p
```

5.3 Implementação para N-Jogadores

A implementação para N-Jogadores utiliza a mesma estratégia da implementação anterior, mas permitindo que o usuário coloque como parâmetro o número de empresas no mercado e gerando matrizes de coeficientes e resultados de acordo.

```python
def modelo_cournot_njogadores_alglin(intr_dem, inc_dem, n_joga,
    c_marg_vec):

    assert len(c_marg_vec) == n_joga
    assert type(c_marg_vec).__module__ == np.__name__

    # Formando o vetor res

    vec_intr = [intr_dem / (2 * inc_dem) for i in range(n_joga)]
    res      = vec_intr - c_marg_vec * (1 / (2 * inc_dem))

    # Formando a matriz de coeficientes

    mat_coef = [[1 if i == j else 0.5 for i in range(n_joga)] for j
     in range(n_joga)]

    # Calculando a matriz inversa

    assert np.linalg.det(mat_coef) != 0

```

```
    inv_mat_coef = np.linalg.inv(mat_coef)

    # Encontrando as quantidades produzidas

    y_vec = np.dot(inv_mat_coef , res)

    # Encontrando o preco de equilibrio

    p = intr_dem - inc_dem * (sum(y_vec))

    return y_vec , p
```

6 Exemplos Gráficos

O gráfico abaixo mostra a evolução do equilíbrio quando se alteram os custos para uma única firma. Como se vê, a curva de resposta ótima desse empresa abaixa, levando a equilíbrios com quantidades produzidas cada vez menores para essa empresa, enquanto a outra empresa no duopólio produz cada vez mais produtos.

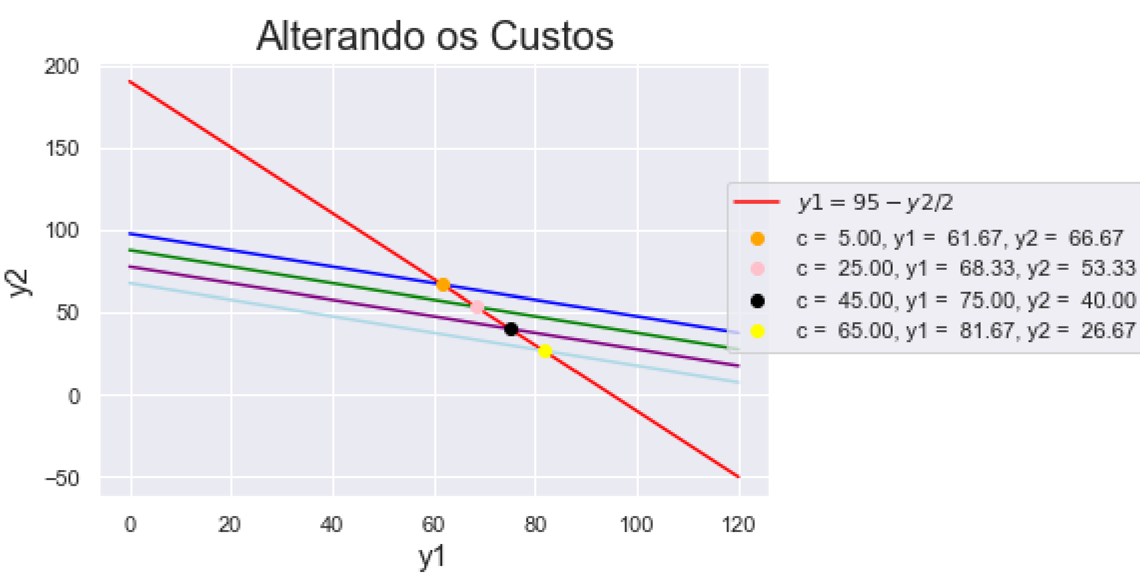

Figura 1: Efeito do aumento de custos no resultado de equilíbrio

O segundo gráfico mostra o efeito da entrada de novas firmas idênticas em um mercado com produtos homogêneos. Como se vê, há uma redução exponencial do preço e quantidade de equilíbrio.

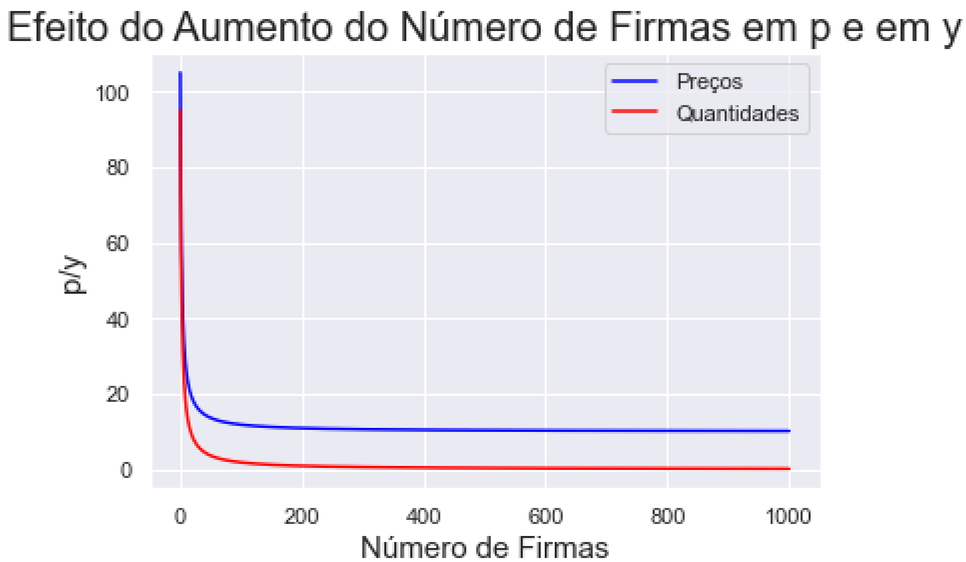

Figura 2: Efeito da entrada de novas empresas idênticas no preço e quantidade de equilíbrio