Método de Newton

18 de junho de 2021

1 Descrição

Considere o conjunto de n equações não lineares

$$f_j\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Essas equações podem ser reescritas de maneira concisa como

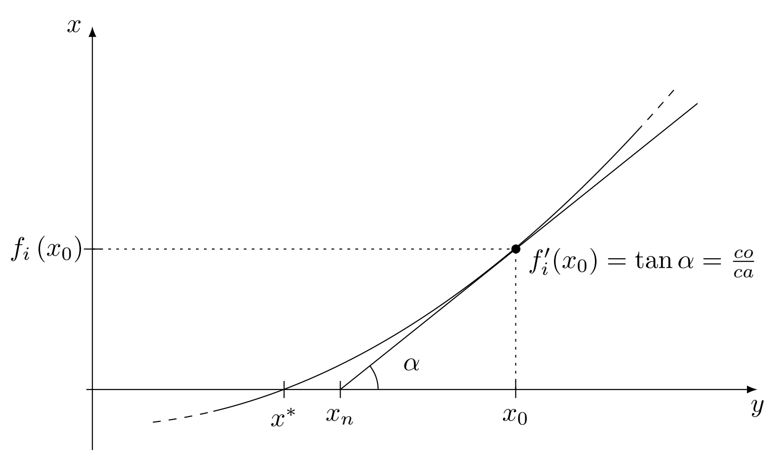
$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) = 0 \tag{2}$$

em que $\mathbf{x}$ é o vetor coluna de variáveis independentes e $\mathbf{f}$ o vetor coluna de funções f_j. Se $\mathbf{x}_i$ é a i-ésima aproximação da solução de (2) e $\mathbf{f}_i$ é escrita para $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i\right)$, então o método de Newton é definido por

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \mathbf{A}_i^{-1}\mathbf{f}_i \tag{3}$$

em que $\mathbf{A}_i$ é a matriz Jacobiana $[\partial f_j / \partial x_k]$ calculada em $\mathbf{x}_i$.

2 Uma descrição mais intuitiva



O gráfico acima, que representa uma função $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ajuda a ilustrar as operações envolvidas no método de Newton. Suponha que tenhamos como chute inicial o ponto x_0 e queremos encontrar a raiz da função $f_i(x)$ – ponto x^*. Se calcularmos a primeira derivada de $f_i(x_0)$, encontramos o coeficiente angular da reta tangente à função f_i no ponto x_0. Eventualmente, $f_i'(x) = 0$, ou seja, a reta tangente à função toca o eixo das abscissas – ponto x_n. Este ponto se encontra mais à esquerda do chute inicial (x_0), e se torna um melhor candidato a raiz; caso x_n ainda não seja raiz, podemos encontrar um x_{n+1} seguindo a mesma ideia, e proceder assim até que $|x_{n+i} - x_{n+i-1}|$ seja tão pequena que encontramos a raiz da função.

O problema, por ora, consiste em encontrarmos o valor de x_n. Lembrar que $f_i'(x_n) = \tan\alpha$, no entanto, diminui essa dificuldade: como temos x_0, podemos calcular $f_i(x_0)$ e $f_i'(x_0)$; ademais, sabendo que $\tan\alpha = \frac{co}{ca}$, vem:

$$
\begin{aligned}
f_i'(x_0) &= \frac{co}{ca} = \frac{f_i(x_0)}{x_0 - x_n} \\
\Rightarrow x_n &= x_0 - \frac{f_i(x_0)}{f_i'(x_0)}.
\end{aligned}
$$

Repare que a equação acima reproduz exatamente (3) para o caso em que tratamos apenas de uma variável e uma função.

3 Dificuldades

O método de Newton, como expresso em (3), sofre de duas dificuldades sérias: (i) calcular a matriz Jacobiana (por mais simples que as f_i's sejam, calcular todas as derivadas parciais é bastante custoso computacionalmente); e, principalmente, (ii) o frequente fracasso em convergir sem que sejam feitas algumas alterações no processo (em casos mais complexos, as condições de convergência são muito dependentes de boas estimativas para as raízes[1]). Tudo isso faz do método de Newton, como definido em (3), um algoritmo de pouca utilidade prática(Broyden, 1965, p.578).

Referências

Broyden, C. G. (1965). A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations. *Mathematics of Computation.*

Burden, R. L. and Faires, J. D. (1989). *Numerical Analysis.* PWS-Kent Publishing Company, Boston, 5 edition.

[1] Burden and Faires (1989, p.56) derivam método de Newton demonstrando desde o início como uma boa estimativa de x_0 condiciona a convergência.