Caixa de Edgeworth

Ian Teixeira Barreiro

Dezembro 2021

1 Introdução

Pelo modelo da Caixa de Edgeworth, começamos a estudar condições de equilíbrio geral. O que se quer dizer por isso é que numa economia existem diversos mercados de bens que interagem entre si. Os preços de um produto interferem nos preços de outro, alterando os equilíbrios em mercados diferentes do seu. A condição de equilíbrio geral é aquela em que, para certos preços de cada bem em uma economia, as ofertas e demandas de cada um desses bens em seus respectivos mercados se iguala.

Analisar o equilíbrio geral de uma economia é bastante complexo e, por isso, cabe simplificar a economia estudada de forma a prover uma introdução ao assunto. No modelo da Caixa de Edgeworth temos uma economia com dois grupos de consumidores e dois bens. Não há produção na economia, de modo que as dotações de cada grupo do bem 1 e do bem 2 determinam a quantidade total desses bens na economia. É razoável supor que em algumas situações os consumidores desejarão consumir quantidades distintas de sua dotação de cada bem, levando a surgirem trocas na economia. Este resumo se dedica ao estudo das condições de trocas que levarão a equilíbrios nessa economia simplificada.

Usaremos como referência principal o livro "Microeconomia: Uma Abordagem Moderna, 8a ed."para esse texto. Iniciaremos a exposição descrevendo nossa economia e sob quais condições surgirão trocas nela. Depois abordaremos quando deixarão de haver trocas, ou seja, quando se chega a uma condição eficiente no mercado. Em seguida, será exposto como encontrar os pontos de equilíbrio nessa economia. Por fim, descreveremos uma implementação computacional que permite resolver o modelo da Caixa de Edgeworth.

2 Trocas

Como descrito anteriormente, temos uma economia sem produção, havendo uma dotação inicial de bens que se mantém fixa. Cada um dos dois grupos de consumidores nessa economia possui uma função utilidade que denota suas preferências pelos bens nos mercados dessa economia. Haverá uma curva de indiferença para cada um dos grupos que passa pela dotação inicial. Dado isso, haverão trocas entre os grupos caso seja possível acessar, por meio dessas trocas, curvas de indiferença preferidas por ambos os agentes. Dito de outro modo, pode ser que cada um dos agentes não esteja satisfeito com sua dotação inicial de cada bem e prefira uma condição em que possuem mais de um bem e menos de outro. Nessas condições, os agentes poderão abrir mão do bem menos preferido em favor de bens que aumentem sua função utilidade.

Dado o exposto, surge a questão de definir em que ponto as trocas irão cessar. Expusemos que é possível para os agentes se moverem para condições mais preferidas por ambos, mas não expusemos ainda como essas trocas levam para situações de equilíbrio, nem as consequências em termos de aumento de bem estar dessa nova condição.

3 Alocações Eficientes

Por meio das trocas os agentes tentarão se mover para situações em que seja impossível melhorar suas próprias condições sem prejudicar o outro grupo na economia. Nessa situação, dado que realizar mais trocas levaria a um grupo ser prejudicado, as trocas cessam. Nesse estado, temos uma alocação eficiente no sentido de Pareto. Não é mais possível aumentar os ganhos de mercado para todos os agentes da economia ao mesmo tempo. Em situações eficientes no sentido de Pareto, temos que cada grupo acessa sua curva de indiferença mais preferida possível. Desviar da condição eficiente significa reduzir sua utilidade. Desse modo, e dado que as preferências sejam monotônicas e convexas, temos que no ponto eficiente as curvas de indiferença de cada agente devem se tangenciar. Isso por que caso se interceptassem, haveria um ponto intermediário entre os interceptos que fosse mais preferido e, portanto, não estaríamos em uma situação eficiente de Pareto. Desse modo, é fácil encontrar situações eficientes de Pareto dadas as preferências de cada grupo. Tomada uma curva de indiferença de um grupo, basta caminhar pelos pontos desta que tornam a situação do outro grupo melhor, até encontrar o ponto em que qualquer movimento na curva de indiferença pioraria a situação do segundo grupo. Dito de outra maneira, basta encontrar os pontos em que a taxa marginal de substituição das preferências de cada grupo seja igual. Isso não quer dizer que as situações eficientes de Pareto sejam equilíbrios. Isso por que existem situações infactíveis, em que a quantidade de cada bem que satisfaz a tangência das curvas de indiferença não é viável dadas as dotações.

O conjunto de todos as quantidades demandadas eficientes tem o nome de curva de contrato. Para encontrá-la, é necessário encontrar todos os pontos de tangência entre as curvas de indiferença dos grupos, pontos esses que também devem satisfazer a condição de que as quantidades totais demandadas de cada bem se igualem à quantidade ofertada desses mesmos bens (caso contrário, haveria excesso de oferta ou demanda, o que seria sanado por uma alteração nos preços de equilíbrio).

4 Equilíbrio

Como dito anteriormente, os pontos onde cessam as trocas são aqueles eficientes de Pareto. Os pontos de equilíbrios são os pontos eficientes em que a oferta de bens se iguala à demanda de bens. Dito de outra maneira, ao resolver o problema do consumidor para cada um dos grupos, originando funções demanda de cada grupo por cada bem, igualamos a demanda total à oferta total e, respeitada essa condição, encontramos os pontos de equilíbrio da economia.

$$x_A^1(p_1, p_2) + x_B^1(p_1, p_2) = \omega_A^1 + \omega_B^1 \tag{1}$$
$$x_A^2(p_1, p_2) + x_B^2(p_1, p_2) = \omega_A^2 + \omega_B^2 \tag{2}$$

Podemos subtrair as dotações das equações (1) e (2) para encontrar que no equilíbrio a soma das demandas líquidas de cada grupo por cada bem devem ser 0. Isso é lógico, dado que não há produção na economia (é uma economia que funciona unicamente com trocas) caso se queira uma quantidade maior de um bem, deve se seguir que haverá uma redução na quantidade de outro bem com relação à dotação. Para haver equilíbrio, nas trocas um grupo deve dar bens ao outro na mesma quantidade que o outro recebe. Portanto se a demanda líquida do grupo A pelo bem 1 é 2, segue-se que no equilíbrio a demanda líquida do grupo B pelo bem 1 deve ser -2.

$$[x_A^1(p_1, p_2) - \omega_A^1] + [x_B^1(p_1, p_2) - \omega_B^1] = 0 \tag{3}$$
$$[x_A^2(p_1, p_2) - \omega_A^2] + [x_B^2(p_1, p_2) - \omega_B^2] = 0 \tag{4}$$

Podemos chamar o lado esquerdo das equações (3) e (4) de funções demanda excedente agregada, chegando à conclusão de que no equilíbrio a função demanda excedente agregada de cada bem deve se igualar a 0. Resolvendo esse sistema encontramos os preços de equilíbrio e as demandas de equilíbrio.

No entanto, não é necessário resolver esse sistema por inteiro, bastando garantir que a função demanda excedente agregada seja 0 para um bem, já que se seguirá que essa mesma condição será satisfeita para o outro mercado nesse caso. Isso é garantido pela lei de Walras, expressa abaixo.

Partindo da restrição orçamentária de cada agente (i = A, B):

$$p_1 x_i^1 + p_2 x_i^2 = p_1 \omega_i^1 + p_2 \omega_i^2$$
$$p_1[x_i^1 - \omega_i^1] + p_2[x_i^2 - \omega_i^2] = 0$$

Somando as expressões para i = A, B temos:

$$p_1[x_A^1 + x_B^1 - \omega_A^1 - \omega_B^1] + p_2[x_A^2 + x_B^2 - \omega_A^2 - \omega_B^2] = 0$$
$$p_1 z_1(p_1, p_2) + p_2 z_2(p_1, p_2) = 0$$

Vê-se que caso $z_1(p_1, p_2) = 0$, então necessariamente para que a igualdade valha $z_2(p_1, p_2) = 0$.. Desse modo, basta encontrar a raiz de uma função demanda excedente agregada que se encontra o equilíbrio de mercado. Isso é facilitado ainda mais caso se tome um preço como numerário e se lide com os demais preços como preços relativos em relação ao numerário. É isso que foi feito na implementação computacional, tomando o preço do bem 2 como sendo o numerário.

5 Exemplo

Como exemplo numérico tomemos a situação em que para a pessoa A, suas dotações iniciais são 10 e 5 dos bens 1 e 2 respectivamente e para a pessoa B as dotações iniciais são 2 e 7 para os bens 1 e 2 respectivamente. Ambos os agentes tem suas preferências bem modeladas por funções do tipo Cobb-Douglas da forma $U_A = x_1^{0.6} x_2^{0.4}$ para a pessoa A e $U_B = x_1^{0.5} x_2^{0.5}$ para a pessoa B. Prosseguindo da maneira indicada, utilizando a implementação computacional abaixo, encontramos o equilíbrio em que a demanda pelo bem 1 da pessoa A é 8.31, a demanda pelo bem 1 da pessoa B é 3.69, a demanda pelo bem 2 da pessoa A é 7.2 e a demanda pelo bem 2 da pessoa B é 4.8. O gráfico abaixo mostra esse ponto de equilíbrio.

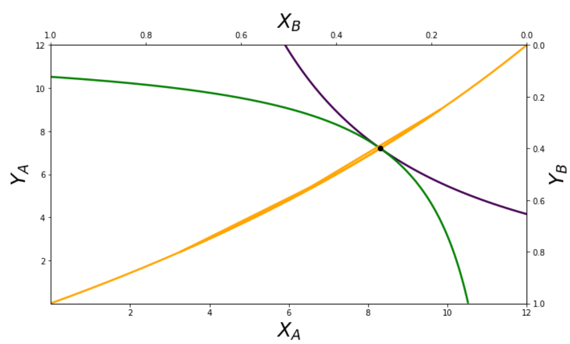

Figura 1: Exemplo do equilíbrio para os valores dados

6 Implementação Computacional

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Utilizando a formula dada pelo Varian, com o bem 2 tendo
# seu preco como numerario
def preco_eq_analitico(exp1, exp2, w1a, w2a, w1b, w2b):

    p1 = (exp1 * w2a + exp2 * w2b) /\
        ((1 - exp1) * w1a + (1 - exp2) * w1b)
```

```python

    return p1

# Funcao demanda para Cobb-Douglas do tipo x1^a x2^(1-a)
# p2 eh o numerario
def demanda(p1, w1, w2, exp, p2 = 1, bem1 = True):

    """
    p1   = preco do bem 1
    w1   = dotacao do bem 1
    w2   = dotacao do bem 2
    exp  = expoente da Cobb-Douglas
    p2   = preco do bem 2 (default = 1)
    bem1 = caso True calcula-se a demanda do bem 1, \
        cc. demanda do bem 2

    """

    dota = p1 * w1 + p2 * w2

    if bem1:
        dem  = (exp * dota) / p1
        return dem

    dem = ((1 - exp) * dota) / p2

    return dem

# Funcao demanda excedente agregada
def dem_ex_agreg(dem_a, dem_b, wa, wb):

    """
    dem_a = demanda da pessoa A
    dem_b = demanda da pessoa B
    wa    = dotacao da pessoa A
    wb    = dotacao da pessoa B
    """

    return dem_a + dem_b - wa - wb

# Encontra o equilibrio tomado p2 como o numerario
def equilibrio(w1a, w2a, w1b, w2b, exp1, exp2, ps, pe, pt):

    """
    w1a  = dotacao do bem 1 da pessoa A
    w2a  = dotacao do bem 2 da pessoa A
    w1b  = dotacao do bem 1 da pessoa B
    w2b  = dotacao do bem 2 da pessoa B
    exp1 = expoente da Cobb-Douglas da pessoa A
    exp2 = expoente da Cobb-Douglas da pessoa B
    ps   = comeco do vetor de precos
    pe   = fim do vetor de precos
    pt   = tamanho do vetor de precos
    """

    # Declarando vetores
    p1_vec = np.linspace(ps, pe, pt)
```

```
    dem1_a_vec = []
    dem1_b_vec = []
    dem_ex_abs = []

    # Para cada preco possivel
    for p1 in p1_vec:

        # Calcula-se a demanda de cada agente
        dem_a = demanda(p1, w1a, w2a, exp1)
        dem_b = demanda(p1, w1b, w2b, exp2)
        dem1_a_vec.append(dem_a)
        dem1_b_vec.append(dem_b)

        # Calcula-se a demanda excedente agregada para
        # o bem 1
        dem_ex = dem_ex_agreg(dem_a, dem_b, w1a, w1b)
        dem_ex_abs.append(abs(dem_ex))

    # Preco de equilibrio do bem 1 no ponto de minimo
    # do valor absoluto da demanda excedente agregada
    p1_eq = p1_vec[np.argmin(dem_ex_abs)]

    # Encontra demandas
    dem_1a = dem1_a_vec[np.argmin(dem_ex_abs)]
    dem_1b = dem1_b_vec[np.argmin(dem_ex_abs)]
    dem_2a = demanda(p1_eq, w1a, w2a, exp1, bem1 = False)
    dem_2b = demanda(p1_eq, w1b, w2b, exp2, bem1 = False)

    return dem_1a, dem_1b, dem_2a, dem_2b, p1_eq

# Encontra pontos na curva de contrato
def curva_de_contrato(w1_total, w2_total, exp1, exp2, w1t, w2t):

    """
    w1_total = dotacao total do bem 1
    w2_total = dotacao total do bem 2
    exp1     = expoente da Cobb-Douglas da pessoa A
    exp2     = expoente da Cobb-Douglas da pessoa B
    w1t      = tamanho do vetor para w1
    w2t      = tamanho do vetor para w2
    """

    # Criando os vetores de dotacoes
    w1_vec = np.linspace(0, w1_total, w1t)
    w2_vec = np.linspace(0, w2_total, w2t)

    # Criando os vetores de precos e demandas
    p1_v     = []
    dem1_a_v = []
    dem1_b_v = []
    dem2_a_v = []
    dem2_b_v = []

    # Para cada ponto no grid
    for w2 in w2_vec:
        for w1 in w1_vec:

```

```
            w1b = w1_total - w1
            w2b = w2_total - w2

            # Encontra preco de equilibrio
            p1 = preco_eq_analitico(exp1, exp2, w1, w2, w1b, w2b)

            # Encontra demandas no equilibrio
            dem1_a = demanda(p1, w1, w2, exp1)
            dem2_a = demanda(p1, w1, w2, exp1, bem1 = False)
            dem1_b = demanda(p1, w1b, w2b, exp2)
            dem2_b = demanda(p1, w1b, w2b, exp2, bem1 = False)

            # Adiciona valores na lista
            p1_v.append(p1)
            dem1_a_v.append(dem1_a)
            dem2_a_v.append(dem2_a)
            dem1_b_v.append(dem1_b)
            dem2_b_v.append(dem2_b)

    return dem1_a_v, dem2_a_v, dem1_b_v, dem2_b_v, p1_v

# Construido analiticamente
def equilibrio_analitico(x, w1, w2, exp1, exp2):

    parcela1 = (exp2 * w2 - exp2 * w2 * exp1) * x
    parcela2 = (exp2 * x - exp1 * x) - (exp2 * w1 * exp1) + (exp1 * w1)

    return parcela1 / parcela2
```