Económicas, UBA. Actuario. Análisis Numérico. Cuatrimestre 2, 2021. Segundo Examen Parcial. RECUPERATORIO.

PARA APROBAR EL EXAMEN DEBE SUMAR AL MENOS 50 PUNTOS.

Alumna/o: Facundo Matias De Lorenzo 895187

07/diciembre/2021

INSTRUCCIONES

1. Ingrese su apellido, nombre y número de registro en la línea 4 de este documento Rmd (sección "author").
2. Remplace *NULL* por su número de registro en la línea 19 de este documento Rmd.
3. Teja el documento Rmd en pdf y utilice dicho documento para realizar su examen.
4. La entrega del examen debe constar de lo siguiente:
   a. El archivo pdf con el enunciado (generado en el punto 3. anterior).
   b. Cuantro scripts de R, uno por cada ejercicio. Los nombres de los scripts deben ser:
      - *1_Integracion_NroReg.R*
      - *2_Derivacion_NroReg.R*
      - *3_InterpolacionAjustamiento_NroReg.R*
      - *4_Simulacion_NroReg.R*

   Observación: en cada uno de los scripts debe figurar su nombre, apellido y número de registro (ingresados como *comentarios*, antes del código). Si no realiza un ejercicio, de todos modos deberá cargar el script correspondiente con sus datos y sin código.
5. Los archivos mencionados en el punto 4. deberán ser comprimidos en un archivo zip (o rar), cuyo nombre será *AN_2021_C2_Parcial2_Recup_NroRegistro.zip*, y cargados al campus de la materia, en la sección entregas.

1 Integración (30 puntos)

Considere la siguiente función de densidad de la variable aleatoria Y, con dominio en el intervalo $(0, \infty)$, y parámetros $\alpha = 1.99$ y $\theta = 1.32$ [De ser necesario, use la función de R `gamma(x)` para calcular $\Gamma(\alpha)$.]:

$$f_Y(x|\alpha, \theta) = \frac{(\theta/x)^{\alpha} e^{-\theta/x}}{x\Gamma(\alpha)}$$

1.1 Probabilidades simple

Aproxime la probabilidad de que Y esté entre 3.38 y 3.99 usando los métodos de "Trapecio", "Simpson" y "Simpson tres octavos". Ingrese cada algoritmo por separado (**NO SE ACEPTARÁ UN "ALGORITMO GENERAL"**). Indique en cada caso los "nodos" $y_0, y_1, \ldots, y_n$ que se utilizan para la aproximación.

1.2 Probabilidades Compuesto

Aproxime la probabilidad de que Y esté entre 3.38 y 3.99 usando el método de Simpson Compuesto con $n = 27$ (si el método es "Simpson" con n impar, use 'n+1'). Además:

- Indique los "nodos" $y_0, y_1, \ldots, y_n$ que se utilizan para la aproximación.
- Calcule la cota del error.
- Compare los resultados con el punto 1.1.

1.3 Esperanza

Use *Simpson Compuesto* con $n = 354$ (si el método es "Simpson" con n impar, use 'n+1') para aproximar $E(Y)$; es decir, la esperanza matemática de Y. Calcule la cota del error.

1.4 Derivada de $E(Y)$

Estime numéricamente las derivadas parciales de $E(Y|\alpha;\theta)$ respecto de los parámetros α y θ.

1.5 Varianza

Use *Trapecio Compuesto* con $n = 354$ (si el método es "Simpson" con n impar, use 'n+1') para aproximar la varianza de Y, es decir $V[Y] = E(Y^2) - E(Y)^2$. Calcule la cota del error.

1.6 Derivada de $V(Y)$

Estime numéricamente las derivadas parciales de $V(Y|\alpha;\theta)$ respecto de los parámetros α y θ.

2 Derivación (10 puntos)

Considere los datos de la tabla siguiente, donde $P = f(r)$.

r	P
0.00	114.8878
0.01	110.0817
0.02	104.9943
0.03	100.1919
0.04	95.1450
0.05	91.4054

r	P
0.06	87.2913
0.07	83.8146
0.08	80.0810
0.09	76.8462
0.10	73.4838
0.11	70.6687

2.1 Derivada primera

Utilice el método de los **tres puntos (punto extremo, con h<0)** para aproximar $P'(0.01)$ y $P'(0.02)$. Si no pudiese aplicar el método, explique por qué. [Observación: **Utilice solamente el código necesario** (no más de dos líneas) para el cálculo de cada derivada. **No se aceptará un "algoritmo general"**.]

2.2 Derivada segunda

Aproxime las derivadas segundas $P''(0.01)$ y $P''(0.02)$. Si no pudiese aproximarla/s, explique por qué. [Observación: **Utilice solamente el código necesario** (no más de dos líneas) para el cálculo de cada derivada. **No se aceptará un "algoritmo general"**.]

3 Interpolación y Ajustamiento (45 puntos)

Considere los datos x de la variable aleatoria pérdidas (L), y las **probabilidades** acumuladas ($F_L(x) = Prob(L < x)$) estimadas en la siguiente Tabla.

x	F(x) = P(L<x)
0.0227	0.0769
0.0817	0.1538
0.3147	0.2308
0.5258	0.3077
0.7502	0.3846
0.8877	0.4615
1.3583	0.5385
1.3716	0.6154
1.5854	0.6923
1.6288	0.7692
2.8558	0.8462
3.0106	0.9231
5.1854	1.0000

3.1 Lagrange (15 puntos)

- Utilice un polinomio de Lagrange que pase por todos los puntos dados para aproximar $F(0.0522)$. Comente el resultado hallado.
- Construya un polinomio de Lagrange que pase por los últimos 4 pares de datos para aproximar $F(0.0522)$. Comente el resultado hallado, comparándolo con el punto anterior.
- Construya un polinomio de Lagrange que pase por las últimas dos observaciones dadas para aproximar $F(0.0522)$. Comente el resultado hallado, comparándolo con los puntos anteriores.

[Observación: no es necesario que esriba los polinomios $P(x)$.]

3.2 Cubic Splines (10 puntos)

- Escriba el trazador cúbico $S(x)$ que pasa por todos los puntos dados. Indique claramente qué polinomio $S_j(x)$ debe utilizarse en cada subintervalo. **Para presentar el polinomio, utilice solamente cuatro decimales en los coeficientes.**
- Utilice el trazador cúbico para aproximar $F(0.0522)$ (Advertencia: para los cálculos, no redondee los coeficientes!). Comente el resultado hallado, comparándolo con los resultados hallados con el polinomio de Lagrange.

3.3 Ajustamiento (10 puntos)

- Ajuste los datos de la tabla a una distribución normal (`pnorm(x, mu, sigma)`) utilizando mínimos cuadrados no lineales (`nls`).
- Utilice el ajuste realizado para aproximar $F(0.0522)$. Comente el resultado hallado, comparándolo con los resultados de Lagrange y Cubic Splines.

3.4 Gráfico comparativo (10 puntos)

Realice un gráfico comparativo que incluya lo siguiente:

- Puntos originales en color negro y tipo de punto `pch = 4`.
- Curva continua con el polinomio de Lagrange que pasa por todos los puntos dados en color naranja, y un punto (`pch = 5` y el mismo color) marcando el valor interpolado.
- Curva continua con el trazador cúbico que pasa por todos los puntos dados en color dorado, y un punto (`pch = 7` y el mismo color) marcando el valor interpolado.
- Curva continua con el ajuste de la distribución Normal en color azul, y un punto (`pch = 9` y el mismo color) marcando el valor interpolado.

4 Simulación de Montecarlo (15 puntos)

4.1 Caminos de precios

Utilice una semilla igual a su número de registro[1] para simular 1941 ***caminos de precios diarios***, considerando $P_0 = 96$, $\mu = 0.19$ y $\sigma = 0.15$, y un horizonte temporal de seis meses.

Calcule la esperanza, calcule el desvío estándar, y grafique un histograma de los ***precios finales***, P_T.

[1] Ingrese `set.seed(NroReg)`, donde NroReg es su numero de registro, antes de empezar a simular.

4.2 Probabilidad

Calcule la probabilidad de que el precio final P_T sea menor al precio esperado en T (calculado en 4.1).

4.3 Percentil

Calcule el precio final x tal que $Prob(P_T < x) = 5\%$ (es decir, el percentil 5).