Cours Analyse II

Contenu de ce cours

Le présent cours contiendra :

- Intégration
- Equations différentielles
- séries

Intégration

a et b désignent deux réels tels que $a < b$. Toutes les fonctions sont supposées définies sur $[a, b]$ et a valeurs réelles. Le but de l'intégration est de définir un nombre qui, pour une fonction f positive sur un segment $[a, b]$, mesure l'aire délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Ce nombre sera appelé intégrale de f sur $[a, b]$ et notée :

$$ \int_a^b f(x)dx $$

Intégrale des fonctions en escalier

Subdivision d'un segment

Définition 1

- On appelle subdivision de $[a, b]$ toute famille $u=(x_i)_{i=0}^n$ telle que $n \in \mathbb{N}^\star$ et

$$ a=x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n=b $$

- On appelle pas ou module de la subdivision $u=(x_i)_{i=0}^n$, le reel

$$ \delta(u)=\max_{i \in [1, n]}(x_i - x_{i-1}) $$

Exemple

Une subdivision $(x_i)_{i=0}^n$ ou n un entier naturel non nul est dite a pas constant si:

$$ \forall i \in \{0, \ldots, n\}, x_i = a+i\dfrac{b-a}{n} $$

Son module est $\dfrac{b-a}{n}$

Définition 2

Si u et v sont deux subdivisions de $[a, b]$, on dit que u est plus fine que v si tout élément de v est élément de u.

Note

Par définition, une subdivision est une partie finie de $[a, b]$ contenant a et b. Ceci dit, une subdivision u est plus fine qu'une autre v est équivaut à dire que $v \subset u$.

Proposition 1

Pour toutes subdivisions u et v de $[a, b]$ il existe une subdivision plus fine que u et v.

Fonctions en escalier

Définition 3

Une fonction φ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite en escalier si l'on peut trouver une subdivision $u=(x_i)_{i=0}^n$ de $[a, b]$ telle que φ soit constante sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[, (1\leq i \leq n)$. La subdivision u est dite adaptée à la fonction φ.

Exemples

- Une fonction constante sur l'intervalle $[a,b]$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$.
- La fonction *partie entière* est une fonction en escalier sur segment $[a,b]$ (pensez à une subdivision adaptée!).

Remarques:

1. Une fonction en escalier prend un nombre fini de valeurs. En particulier, elle est bornée.
2. Si u est une subdivision adaptée à une fonction φ en escalier, alors toute subdivision plus fine que u est adaptée à φ.
3. Si φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur $[a. b]$, alors il existe une subdivision adaptée à φ et ψ.

Proposition 2

L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies sur $[a, b]$

Indication

Penser à utiliser la proposition 1!

Démonstration

Intégrale d'une fonction en escalier

Proposition 3

Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $u=(x_i)_{i=0}^n$ une subdivision adaptées à φ. Soit c_i la valeur prise par φ sur $]x_{i-1}, x_i[$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ (i.e $\varphi(x)=c_i$ pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$). Alors la quantité

$$ \sum_{i=1}^nc_i(x_i-x_{i-1}) $$
ne dépend pas de la subdivision choisie.

Cette quantité s'appelle `l'intégrale` de φ sur $[a, b]$ et on le note:

$$ \int_a^b \varphi(x)dx=\int_{[a, b]}\varphi $$

Démonstration

Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Dans ce qui suit on va noter l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ par $\mathcal{E}([a, b])$.

Proposition 4

Montrer que :

1- pour toutes fonctions en escalier sur $[a, b]$ φ et ψ, et pour tous réels α et β nous avons:

$$ \int_{[a, b]}\alpha\varphi + \beta\psi = \alpha\int_{[a, b]}\varphi + \beta\int_{[a, b]}\psi $$

2- une fonction en escalier positive a une intégrale positive.

3- si φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ alors:

$$ \varphi \leq \psi \Rightarrow \int_{[a, b]}\varphi \leq \int_{[a, b]}\psi $$

Démonstration

Proposition 5

Une fonction φ est en escalier sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $c \in]a, b[$, ses restrictions sur $]a, c[$ et $]c, b[$ le sont. Le cas échéant,

$$ \int_{[a, b]}\varphi = \int_{[a, c]}\varphi_{|[a, c]} + \int_{[c, b]}\varphi_{|[c, b]} $$

Démonstration

Fonctions continues par morceaux

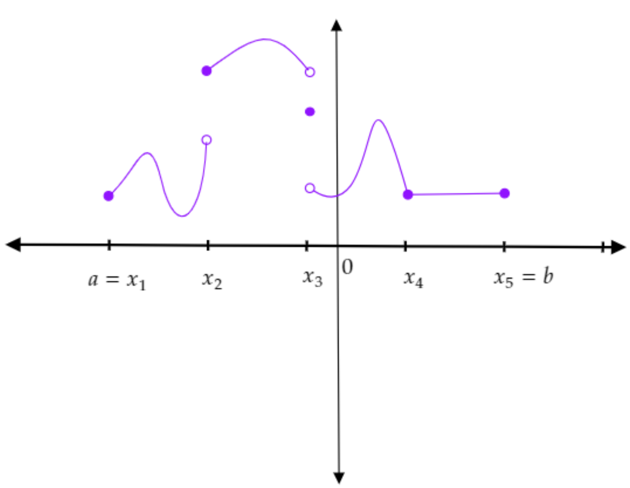
Définition, exemples

Définition 4

Une application f de $[a, b]$ and $\mathbb{R}$ est dit continue par morceaux s'il existe une subdivision $u=(x_i)_{i=0}^n$ de $[a, b]$ telle que pour chaque $i \in \{1,\ldots, n\}$ la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ soit continue et admette des limites finies en x_{i-1} et x_{i}.

La subdivision u est dite adaptée à la fonction f.

Illustration avec un exemple graphique:



Exemples

- Toute fonction en escalier est continue par morceaux.
- Toute fonction continue est continue par morceaux.
- La fonction f définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f(0)=0 \mbox{ et } \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, f(x)=\dfrac{1}{x} $$
n'est pas continue par morceaux, car elle n'a pas de limite finie à droite et à gauche de 0.

Remarques

Comme pour les fonctions en escalier, on peut vérifier que :

- si u est une subdivision adaptée à une fonction f continue par marceaux, alors toute subdivision plus fine que u est adaptée à f,
- si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, alors il existe Une subdivision adaptée à f et g.

Proposition 6

Une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.

Démonstration

Proposition 7

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. Les assertions suivantes sont correctes :

- $ \forall \lambda, \mu \in \mathbb R, \lambda f + \mu g$ est continue par morceaux.
- fg est continue par morceaux.

Démonstration

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Théorème (admis)

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Pour tout réel $\epsilon > O$:

- il existe une fonction en escalier θ telle que $|f - \theta| \leq \epsilon$
- il existe des fonctions en escalier φ et ψ telles que :

$$ \varphi \leq f \leq \psi \mbox{ et } \psi - \varphi \leq \epsilon $$

Notations: Dans ce qui suit, pour une fonction continue par morceaux f nous allons adopte les notations suivantes :

- $\mathcal{E}^+(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier plus grandes que f.
- $\mathcal{E}^-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier plus petites que f.

Proposition 8

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Alors :

- $\left\{\int_{[a, b]} \varphi | \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$ admet une borne supérieure,
- $\left\{\int_{[a, b]} \psi | \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$ admet une borne inferieure,

de plus,

$$ sup\left\{\int_{[a, b]} \varphi | \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}= inf\left\{\int_{[a, b]} \psi | \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\} $$

Démonstration

Fixons $\varphi \in \mathcal{E}^+(f)$. L’ensemble $\left\{\int_{[a, b]} \psi | \psi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$ est majoreé par $\int_{[a, b]} \varphi$. Alors nous avons forcement $\alpha \leq \int_{[a, b]} \varphi$ et ça pour tout $\varphi \in \mathcal{E}^+(f)$. Donc α est un minorant de $\left\{\int_{[a, b]} \varphi | \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$. Par consequent, $\alpha \leq \beta$.

Donc

$$\alpha \leq \beta$$

D’autre part, d’après le théorème
