Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Katia Barré

Lycée Lesage Vannes

Mathématiques Spéciales PT



- Formule de la moyenne
- Inégalité triangulaire
- Sommes de Riemann
- Intégrale fonction de ses bornes
- Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Intégration par parties
- Changement de variable
- Formule de Taylor avec reste intégral
- Inégalité de Taylor-Lagrange
- Techniques de calcul de primitives
 - Primitives de polynômes en cos et sin
 - Primitives de fractions rationnelles en sin et cos: $\int f(\sin(x), \cos(x)) dx$. Règles de Bioche
 - Primitives de polynômes et fractions rationnelles en sh et $ch: \int f(sh(x), ch(x)) dx$.
 - $\int P(x)e^{ax} dx$ où P est un polynôme
 - Fonctions $x \mapsto \cos(bx)e^{ax}$ ou $x \mapsto \sin(bx)e^{ax}$
 - Fractions rationnelles: guelques exemples
- Quelques exercices ...



- Revoir les primitives usuelles
- **2** Relation de Chasles (f à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}).
- **3** Linéarité (f à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

- **3** Si f est **CONTINUE** et **POSITIVE** sur le segment [a,b] (a < b) et si $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $f = \tilde{0}$ sur [a,b].
- ⓐ Si f est CONTINUE et POSITIVE sur le segment [a,b] (a < b) et s'il existe $x_0 ∈ [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f(t) dt > 0$.
- **9** Si f est continue par morceaux et positive sur [a,b], alors $\int_a^b f(t) \ dt \ge 0$
- **③** Si f et g sont continues par morceaux (à valeurs dans \mathbb{R}) et si $f \ge g$ sur [a,b] alors $\int_a^b f \ge \int_a^b g$.

- Revoir les primitives usuelles
- **②** Relation de Chasles (f à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}).
- **3** Linéarité (f à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

- Si f est **CONTINUE et POSITIVE** sur le segment [a,b] (a < b) et si $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $f = \tilde{0}$ sur [a,b].
- ② Si f est CONTINUE et POSITIVE sur le segment [a,b] (a < b) et s'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f(t) \ dt > 0$.
- **3** Si f est continue par morceaux et positive sur [a,b], alors $\int_a^b f(t) \ dt \ge 0$
- Si f et g sont continues par morceaux (à valeurs dans \mathbb{R}) et si $f \geq g$ sur [a,b] alors $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

- Revoir les primitives usuelles
- **②** Relation de Chasles (f à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}).
- **3 Linéarité** (f à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

- Si f est **CONTINUE et POSITIVE** sur le segment [a,b] (a < b) et si $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $f = \tilde{0}$ sur [a,b].
- ② Si f est CONTINUE et POSITIVE sur le segment [a,b] (a < b) et s'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f(t) \ dt > 0$.
- **3** Si f est continue par morceaux et positive sur [a,b], alors $\int_a^b f(t) \ dt \ge 0$.
- **②** Si f et g sont continues par morceaux (à valeurs dans \mathbb{R}) et si $f \ge g$ sur [a,b], alors $\int_a^b f$ ≥ $\int_a^b g$.

- Revoir les primitives usuelles
- **②** Relation de Chasles (f à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}).
- **3** Linéarité (f à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

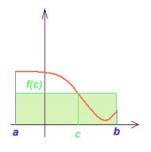
- Si f est **CONTINUE et POSITIVE** sur le segment [a,b] (a < b) et si $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $f = \tilde{0}$ sur [a,b].
- ② Si f est **CONTINUE** et **POSITIVE** sur le segment [a,b] (a < b) et s'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f(t) dt > 0$.
- **3** Si f est continue par morceaux et positive sur [a,b], alors $\int_a^b f(t) dt \ge 0$.
- Si f et g sont continues par morceaux (à valeurs dans \mathbb{R}) et si $f \geq g$ sur [a,b], alors $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

Formule de la moyenne

Formule de la moyenne (f à valeurs dans \mathbb{R} : il n'y a pas de Théorème des Valeurs Intermédiaires pour les fonctions à valeur dans \mathbb{C})

Si f est **continue** sur le segment [a,b] et à valeurs dans \mathbb{R} , alors il existe $c\in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t) dt = (b-a) \times f(c).$$



Preuve :

- 1) ou bien : On remarque que l'image par une application continue d'un segment est un segment : f([a,b]) = [m,M], puis on applique le théorème des valeurs intermédiaires.
- 2) ou bien : On écrit le théorème des accroissements finis pour une primitive F de f sur [a,b].



Inégalité triangulaire :

(f à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

$$\left| \int_a^b f(t) \ dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \ dt \quad \text{si} \quad a < b,$$

$$\left| \int_a^b f(t) \ dt \right| \leq \left| \int_a^b |f(t)| \ dt \right| \quad \text{dans le cas général}.$$

Sommes de Riemann

Si f est continue sur le segment [a,b] et à valeurs dans $\mathbb R$ ou $\mathbb C$, alors les suites de termes

$$\sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right),\,$$

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right),$$

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

sont convergentes de même limite $\int_a^b f(t) dt$.



Intégrale fonction de ses bornes

Soit I un intervalle de \mathbb{R} ,

 α et β deux applications dérivables définies sur I et à valeurs dans le segment [a,b], f une application continue sur [a,b] à valeurs dans $\mathbb R$ ou $\mathbb C$.

Alors l'application g définie sur I par $g: I \to \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} $x \mapsto g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) \ dt$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \ g'(x) = \beta'(x)f(\beta(x)) - \alpha'(x)f(\alpha(x)).$$

Preuve: Si F est une primitive de f, alors $g = F(\beta) - F(\alpha)$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient f , $g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Alors

$$\left| \int_a^b f g \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2}.$$

Preuve:

 $P: x \mapsto \int_a^b (f(t) + x \ g(t))^2 \ dt$ est un polynôme de degré au plus 2 à valeurs positives; son discriminant réduit est donc négatif ou nul.

Intégration par parties

Soient f , $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ à valeurs dans $\mathbb R$ ou $\mathbb C$. Alors

$$\int_a^b fg' = [gf]_a^b - \int_a^b f'g.$$

Preuve: (fg)' = f'g + fg'.

Changement de variable

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $[\alpha,\beta]$ un segment de \mathbb{R} , $\phi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta],I)$ et $f \in \mathcal{C}(I)$ (à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}). Alors

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) \ dx = \int_{\alpha}^{\beta} \phi'(t) . f(\phi(t)) \ dt.$$

Preuve : Soit F une primitive de f : calculer la dérivée de $F(\phi)$.

Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(]a - \epsilon, a + \epsilon[)$ à valeurs dans $\mathbb R$ ou $\mathbb C$. Alors $\forall x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$,

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_{a}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(]-\epsilon,\epsilon[)$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Alors

$$\forall x \in]-\epsilon, \epsilon[, \quad f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^{k} + \int_{0}^{x} \frac{(x-t)^{n}}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Preuve:

Récurrence sur n et Intégration par parties



Inégalité de Taylor-Lagrange

Entre a et x

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(]a - \epsilon, a + \epsilon[)$ à valeurs dans $\mathbb R$ ou $\mathbb C$. Alors $\forall x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$,

$$\left| f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq Max_{t \in [a,x]} |f^{(n+1)}(t)| \times \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Entre 0 et x

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(] - \epsilon, \epsilon[)$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

On suppose que:

$$\forall t \in]-\epsilon,\epsilon[, |f^{(n+1)}(t)| \leq M_{n+1}.$$

Alors
$$\forall x \in]-\epsilon, \epsilon[$$

$$\left| f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^{k} \right| \leq M_{n+1} \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$



Applications de l'inégalité de Taylor-Lagrange

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{x} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k}}{k!},$$

$$ch(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad sh(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Primitives de polynômes en cos et sin

Primitives de fractions rationnelles en sin et $\cos:\int f(\sin(x),\cos(x))\ dx$. Règle Primitives de polynômes et fractions rationnelles en sh et $ch:\int f(sh(x),ch(x))\int f(x)dx$. On f est un polynôme Fonctions $x\mapsto \cos(bx)e^{2x}$ ou $x\mapsto \sin(bx)e^{2x}$.

Primitives de polynômes en cos et sin

- Pour intégrer $\cos^p \sin^{2n+1} = \cos^p (1 \cos^2)^n \times \sin$, on fait le changement de variable $u = \cos$,
- Pour intégrer $\sin^p \cos^{2n+1} = \sin^p (1 \sin^2)^n \times \cos$, on fait le changement de variable $u = \sin$.
- Pour intégrer $\sin^{2n}\cos^{2m}$, on linéarise.

Primitives de polynômes en cos et sin $Primitives de fractions rationnelles en sin et cos: \int f(\sin(x),\cos(x)) \, dx.$ Règle Primitives de polynômes et fractions rationnelles en sh et ch: $\int f(sh(x),ch(x)) \, f(sh(x)) \, dx = \int f(sh(x),ch(x)) \, dx$ ou $f(sh(x),ch(x)) \, dx$ ou $f(sh(x),ch(x)) \, dx$ ou f(sh(x),ch(x)) fonctions $f(sh(x),ch(x)) \, dx$ ou f(sh(x),ch(x)) ou f(sh(x),ch(x)) ou f(sh(x),ch(x)) ou f(sh(x),ch(x)) ou f(sh(x),ch(x)) or f(sh(x),ch(x)) ou f(sh(x),ch(x)) ou f(sh(x),ch(x)) ou f(sh(x),ch(x)) of f(sh(x),ch(x)) of f(sh(x),ch(x)) or f(sh(x),ch(x)) of f(sh(x),ch(x)) of

- Lorsque le changement de variable $x \to -x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin,\cos) = -f(\sin,\cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \cos(x)$,
- Lorsque le changement de variable $x \to \pi x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(\sin, -\cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \sin(x)$
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose $u = \cos(2x)$, en se rappelant que

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$
 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

- Lorsque le changement de variable $x \to \pi + x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, -\cos) = f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \tan(x)$
- ullet Sinon, on fait le changement de variable $t=\tan(x/2)$, en se rappelant que

$$1+t^2$$
 $1+t^2$ 2

Primitives de polynômes en cos et sin Primitives de fractions rationnelles en sin et cos: $\int f(\sin(x),\cos(x)) \, dx$. Règle Primitives de polynômes et fractions rationnelles en sh et ch: $\int f(sh(x),ch(x)) \, f(sh(x)) \, dx$. On the set un polynôme Fonctions $x = -\cos(bx)e^{2h}$ ou $x \mapsto \sin(bx)e^{2h}$.

- Lorsque le changement de variable $x \to -x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin,\cos) = -f(\sin,\cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \cos(x)$,
- Lorsque le changement de variable $x \to \pi x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(\sin, -\cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \sin(x)$,
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose $u = \cos(2x)$, en se rappelant que

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$
 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

- Lorsque le changement de variable $x \to \pi + x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, -\cos) = f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \tan(x)$
- ullet Sinon, on fait le changement de variable t= an(x/2), en se rappelant que

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dt = \frac{1+t^2}{2}dx.$$



Quelques exercices ...

Primitives de polynômes en \cos et sin Primitives de fractions rationnelles en sin et \cos : $\int f(\sin(x),\cos(x)) \, dx$. Règle Primitives de polynômes et fractions rationnelles en sh et ch: $\int f(sh(x),ch(x)) \int P(x)e^{2X} \, dx$ où P est un polynôme Fonctions $x \mapsto \cos(bx)e^{2X}$ ou $x \mapsto \sin(bx)e^{2x}$

- Lorsque le changement de variable $x \to -x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin,\cos) = -f(\sin,\cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \cos(x)$,
- Lorsque le changement de variable $x \to \pi x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(\sin, -\cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \sin(x)$,
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose u = cos(2x),en se rappelant que

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \, .$$

- Lorsque le changement de variable $x \to \pi + x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, -\cos) = f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \tan(x)$
- Sinon, on fait le changement de variable $t = \tan(x/2)$, en se rappelant que

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dt = \frac{1+t^2}{2}dx.$$



Quelques exercices ...

Primitives de polynômes en cos et sin Primitives de fractions rationnelles en sin et cos : $\int f(\sin(x), \cos(x)) dx$. Règle Primitives de polynômes et fractions rationnelles en sh et ch : $\int f(sh(x), ch(x)) \int P(x)e^{2X} dx$ où P est un polynôme Fonctions $x \mapsto -\cos(sh)e^{2N}$ ou $x \mapsto -\sin(sh)e^{2N}$

- Lorsque le changement de variable $x \to -x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin,\cos) = -f(\sin,\cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \cos(x)$,
- Lorsque le changement de variable $x \to \pi x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(\sin, -\cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \sin(x)$,
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose $u=\cos(2x)$, en se rappelant que

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

- Lorsque le changement de variable $x \to \pi + x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, -\cos) = f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \tan(x)$,
- Sinon, on fait le changement de variable $t = \tan(x/2)$, en se rappelant que

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dt = \frac{1+t^2}{2}dx$$



Quelques exercices ...

- Lorsque le changement de variable $x \to -x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin,\cos) = -f(\sin,\cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \cos(x)$,
- Lorsque le changement de variable $x \to \pi x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(\sin, -\cos) = -f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \sin(x)$,
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose u = cos(2x), en se rappelant que

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

- Lorsque le changement de variable $x \to \pi + x$ ne change pas l'intégrale (i.e. si $f(-\sin, -\cos) = f(\sin, \cos)$), alors on fait le changement de variable $u = \tan(x)$,
- Sinon, on fait le changement de variable $t = \tan(x/2)$, en se rappelant que

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dt = \frac{1+t^2}{2}dx.$$



Primitives de polynômes en cos et sin Primitives de fractions rationnelles en sin et cos: $\int f(\sin(x), \cos(x)) \, dx$. Règle Primitives de polynômes et fractions rationnelles en sh et $ch: \int f(sh(x), ch(x)) \, f(x) \, dx$ dx où P est un polynôme Fonctions $x \mapsto \cos(bx) e^{ax}$ ou $x \mapsto \sin(bx) e^{ax}$ Fractions rationnelles suedeluse sexembles

$\int f(sh(x),ch(x)) dx$

- Lorsque $\int f(\sin,\cos)$ se calcule avec $t=\cos(x)$, alors on fait le changement de variable u=ch(x),
- Lorsque ∫ f(sin, cos) se calcule avec t = sin(x), alors on fait le changement de variable u = sh(x),
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose u = ch(2x),
- Lorsque $\int f(\sin,\cos)$ se calcule avec $t=\tan(x)$, alors on fait le changement de variable u=th(x),
- Sinon, on fait le changement de variable $u = e^x$

Primitives de polynômes en cos et sin Primitives de fractions rationnelles en sin et cos: $\int f(\sin(x), \cos(x)) \, dx$. Règle Primitives de polynômes et fractions rationnelles en sh et $ch: \int f(sh(x), ch(x)) \, dx$. Per $\int P(x)e^{ax} \, dx$ où P est un polynôme Fonctions $x \mapsto \cos(bx)e^{ax}$ ou $x \mapsto \sin(bx)e^{ax}$. Fractions rationnelles expendes expendes

$\int f(sh(x),ch(x)) dx$

- Lorsque $\int f(\sin,\cos)$ se calcule avec $t=\cos(x)$, alors on fait le changement de variable u=ch(x),
- Lorsque \int f(\sin, \cos) se calcule avec \(t = \sin(x)\), alors on fait le changement de variable \(u = \sh(x)\),
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose u = ch(2x),
- Lorsque $\int f(\sin,\cos)$ se calcule avec $t=\tan(x)$, alors on fait le changement de variable u=th(x),
- Sinon, on fait le changement de variable $u = e^x$

Primitives de polynômes en cos et sin Primitives de fractions rationnelles en sin et cos: $\int f(\sin(x), \cos(x)) \, dx$. Règle Primitives de polynômes et fractions rationnelles en sh et $ch: \int f(sh(x), ch(x)) \, dx$. Per $\int P(x)e^{ax} \, dx$ où P est un polynôme Fonctions $x \mapsto \cos(bx)e^{ax}$ ou $x \mapsto \sin(bx)e^{ax}$. Fractions rationnelles expendes expendes

$\int f(sh(x),ch(x)) dx$

- Lorsque $\int f(\sin,\cos)$ se calcule avec $t=\cos(x)$, alors on fait le changement de variable u=ch(x),
- Lorsque \int f(\sin, \cos) se calcule avec \(t = \sin(x)\), alors on fait le changement de variable \(u = \sh(x)\),
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose u = ch(2x),
- Lorsque $\int f(\sin,\cos)$ se calcule avec $t=\tan(x)$, alors on fait le changement de variable u=th(x),
- Sinon, on fait le changement de variable $u = e^x$

Primitives de polynômes en cos et sin Primitives de fractions rationnelles en sin et cos : $\int f(\sin(x),\cos(x)) \, dx$. Règle Primitives de polynômes et fractions rationnelles en sh et ch: $\int f(sh(x),ch(x)) \, f(sh(x)) \, dx$. So u P est un polynôme en fonctions $x \mapsto \cos(bx) \, e^{2x} \, dx$ ou $x \mapsto \sin(bx) \, e^{2x}$.

$\int f(sh(x),ch(x)) dx$

- Lorsque $\int f(\sin,\cos)$ se calcule avec $t=\cos(x)$, alors on fait le changement de variable u=ch(x),
- Lorsque \int f(\sin, \cos) se calcule avec \(t = \sin(x)\), alors on fait le changement de variable \(u = \sh(x)\),
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose u = ch(2x),
- Lorsque $\int f(\sin,\cos)$ se calcule avec $t=\tan(x)$, alors on fait le changement de variable u=th(x),
- Sinon, on fait le changement de variable $u = e^x$.

Primitives de polynômes en cos et sin Primitives de fractions rationnelles en sin et cos : $\int f(\sin(x),\cos(x)) \, dx$. Règle Primitives de polynômes et fractions rationnelles en sh et ch: $\int f(sh(x),ch(x)) \, f(sh(x)) \, dx$. On $f(sh(x)) = f(sh(x)) \, dx$ of $f(sh(x)) = f(sh(x)) \, dx$ of $f(sh(x)) = f(sh(x)) \, dx$. Sin $f(sh(x)) = f(sh(x)) \, dx$.

$\int f(sh(x),ch(x)) dx$

- Lorsque $\int f(\sin,\cos)$ se calcule avec $t=\cos(x)$, alors on fait le changement de variable u=ch(x),
- Lorsque \int f(\sin, \cos) se calcule avec \(t = \sin(x)\), alors on fait le changement de variable \(u = \sh(x)\),
- Lorsque les deux changements de variable précédents conviennent, alors on pose u = ch(2x),
- Lorsque $\int f(\sin,\cos)$ se calcule avec $t=\tan(x)$, alors on fait le changement de variable u=th(x),
- Sinon, on fait le changement de variable $u = e^x$.

Primitives de polynômes en cos et sin Primitives de fractions rationnelles en sin et $\cos:\int f(\sin(x),\cos(x))\ dx.$ Règlier Primitives de polynômes et fractions rationnelles en sh et $ch:\int f(sh(x),ch(x))\ f(x) = f(sh(x),ch(x)) = f(sh(x),ch(x)) = f(sh(x),ch(x)) = f(sh(x),ch(x))$ ou $x \mapsto \sin(bx) e^{2x}$ ou $x \mapsto \sin(bx) e^{2x}$

$\int P(x)e^{ax} dx$ où P est un polynôme

On fait degr'e(P) intégrations par parties successives en dérivant toujours le polynôme pour faire chuter son degr\'e.

Primitives de polynômes en cos et sin Primitives de fractions rationnelles en sin et $\cos:\int f(\sin(x),\cos(x))\ dx$. Règle Primitives de polynômes et fractions rationnelles en sh et $ch:\int f(sh(x),ch(x))\ f(x) = f(sh(x),ch(x))$. Fonctions $x \mapsto \cos(bx)e^{ax}$ ou $x \mapsto \sin(bx)e^{ax}$.

Fonctions $x \mapsto \cos(bx)e^{ax}$ ou $x \mapsto \sin(bx)e^{ax}$

On fait deux I.P.P successives en dérivant toujours le même type de fonction (exponentielle, ou trigonométrique) : on retombe à constante près sur l'intégrale de départ.

Primitives de polynômes en cos et sin Primitives de fractions rationnelles en sin et $\cos: \int f(\sin(x), \cos(x)) \, dx$. Règle Primitives de polynômes et fractions rationnelles en sh et $ch: \int f(sh(x), ch(x)) \int P(x) e^{2X} \, dx$ où P est un polynôme Fountions $e^{2X} = e^{-x} \int dx \, dx$.

Fractions rationnelles :quelques exemples

Fractions rationnelles: quelques exemples

Calculer des primitives de

$$t\mapsto rac{1}{t^2-1}$$
 et $t\mapsto rac{1}{t^3+1}$.

$$\bullet \ \, \text{\'etudier} \ \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{\sqrt{n^8 + 3n^6k^2 + 3n^4k^4 + n^2k^6}}, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}.$$

- \odot Soit $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t) \cos(nt) \ dt \ et \ \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 t^n f(t) \ dt$$

$$x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1 + \tan(x)}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\cos^2(x) - 4\sin(x) - 6}$$

- Déterminer $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3} \int_3^x e^{t^2} dt$.
- **②** Calculer l'aire de la région du plan délimitée par les droites (x = 0), (x = 4) et les graphes des fonctions f et g où $f(x) = -x^2 + \frac{9}{2}x \frac{5}{2}$ et $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

$$\bullet \ \, \text{\'etudier} \ \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{\sqrt{n^8 + 3n^6k^2 + 3n^4k^4 + n^2k^6}}, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}.$$

3 Soit $f \in C^1[0,1]$. Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t) \cos(nt) \ dt \ et \ \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 t^n f(t) \ dt$$

$$x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1 + \tan(x)}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\cos^2(x) - 4\sin(x) - 6}$$

- Calculer l'aire de la région du plan délimitée par les droites (x=0), (x=4) et les graphes des fonctions f et g où $f(x)=-x^2+\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}$ et $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

$$\bullet \ \, \text{\'Etudier} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{\sqrt{n^8 + 3n^6k^2 + 3n^4k^4 + n^2k^6}}, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}.$$

- $oldsymbol{3}$ Soit $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\cos(nt)\ dt \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\ dt.$$

$$x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1 + \tan(x)}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\cos^2(x) - 4\sin(x) - 6}$$

- O Calculer l'aire de la région du plan délimitée par les droites (x=0), (x=4) et les graphes des fonctions f et g où $f(x)=-x^2+\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}$ et $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

$$\bullet \ \, \text{\'Etudier} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{\sqrt{n^8 + 3n^6k^2 + 3n^4k^4 + n^2k^6}}, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}.$$

- $oldsymbol{3}$ Soit $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\cos(nt)\ dt \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\ dt.$$

$$x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1 + \tan(x)}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\cos^2(x) - 4\sin(x) - 6}.$$

- ② Calculer l'aire de la région du plan délimitée par les droites (x=0), (x=4) et les graphes des fonctions f et g où $f(x)=-x^2+\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}$ et $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

$$\bullet \ \, \text{\'Etudier} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{\sqrt{n^8 + 3n^6k^2 + 3n^4k^4 + n^2k^6}}, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}.$$

- Calculer $\int_{0}^{1} arctan(x) dx$, $\int_{0}^{1} \sin(t).ch(t) dt$, $\int_{0}^{\pi} t^{2} \cos(t) dt$.
- **3** Soit $f \in C^1[0,1]$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\cos(nt)\ dt \ \text{et} \ \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\ dt.$$

$$x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1 + \tan(x)}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\cos^2(x) - 4\sin(x) - 6}.$$

- **5** Déterminer $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3} \int_{3}^{x} e^{t^2} dt$.
- 3 Calculer l'aire de la région du plan délimitée par les droites (x = 0), (x = 4) et les

- **3** Soit $f \in C^1[0,1]$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\cos(nt)\ dt \ \text{et} \ \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\ dt.$$

$$x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1 + \tan(x)}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\cos^2(x) - 4\sin(x) - 6}.$$

- **3** Calculer l'aire de la région du plan délimitée par les droites (x=0), (x=4) et les graphes des fonctions f et g où $f(x)=-x^2+\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}$ et $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.