

Contenu de ce cours

Le présent cours contiendra :

- Intégration
- Equations différentielles
- séries

Intégration

a et b désignent deux réels tels que $a < b$. Toutes les fonctions sont supposées définies sur $[a, b]$ et à valeurs réelles. Le but de l'intégration est de définir un nombre qui, pour une fonction f positive sur un segment $[a, b]$, mesure l'aire délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Ce nombre sera appelé intégrale de f sur $[a, b]$ et notée :

$$\int_a^b f(x)dx$$

Intégrale des fonctions en escalier

Subdivision d'un segment

Définition 1

- On appelle subdivision de $[a, b]$ toute famille $u = (x_i)_{i=0}^n$ telle que $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$$

- On appelle pas ou module de la subdivision $u = (x_i)_{i=0}^n$, le réel

$$\Delta(u) = \max_{i \in [1, n]} \{x_i - x_{i-1}\}$$

Exemple

Une subdivision $u = (x_i)_{i=0}^n$ ou n un entier naturel non nul est dite à pas constant si :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, x_i = a + i \frac{b-a}{n}$$

Son module est $\frac{b-a}{n}$

Définition 2

Si u et v sont deux subdivisions de $[a, b]$, on dit que u est plus fine que v si tout élément de v est élément de u .

Note

Par définition, une subdivision est une partie finie de $[a, b]$ contenant a et b . Ceci dit, une subdivision u est plus fine qu'une autre v est équivalent à dire que $v \subset u$.

Proposition 1

Pour toutes subdivisions u et v de $[a, b]$ il existe une subdivision plus fine que u et v .

Définition 3

Une fonction φ de $[a, b]$ dans \mathbb{R} est dite en escalier si l'on peut trouver une subdivision $u = (x_i)_{i=0}^{n+1}$ de $[a, b]$ telle que φ soit constante sur chacun des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, $(1 \leq i \leq n)$. La subdivision u est dite adaptée à la fonction φ .

Exemples

- Une fonction constante sur l'intervalle $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.
- La fonction *partie entière* est une fonction en escalier sur segment $[a, b]$ (pensez à une subdivision adaptée!).

Remarques:

1. Une fonction en escalier prend un nombre fini de valeurs. En particulier, elle est bornée.
2. Si u est une subdivision adaptée à une fonction φ en escalier, alors toute subdivision plus fine que u est adaptée à φ .
3. Si φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, alors il existe une subdivision adaptée à φ et ψ .

Proposition 2

L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies sur $[a, b]$.

Indication

Penser à utiliser la proposition 1!

Démonstration

Intégrale d'une fonction en escalier

Proposition 3

Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $u = (x_i)_{i=0}^{n+1}$ une subdivision adaptée à φ . Soit c_i la valeur prise par φ sur $[x_{i-1}, x_i]$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ (i.e $\varphi(x) = c_i$ pour tout $x \in [x_{i-1}, x_i]$). Alors la quantité

$$\sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$$
 ne dépend pas de la subdivision choisie.

Cette quantité s'appelle l'**intégrale** de φ sur $[a, b]$ et on le note:

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_{[a, b]} \varphi$$

Démonstration

Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Dans ce qui suit on va noter l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ par $\mathcal{E}([a, b])$.

Proposition 4

Montrer que :

1- pour toutes fonctions en escalier sur $[a, b]$ φ et ψ , et pour tous réels α et β nous avons:

$$\int_a^b \alpha \varphi + \beta \psi = \alpha \int_a^b \varphi + \beta \int_a^b \psi$$

2- une fonction en escalier positive a une intégrale positive.

3- si φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ alors:

$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi \Rightarrow \int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$$

Démonstration

Proposition 5

Une fonction φ est en escalier sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $c \in]a, b[$, ses restrictions sur $[a, c]$ et $[c, b]$ le sont. Le cas échéant,

$$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$$

Démonstration

Fonctions continues par morceaux

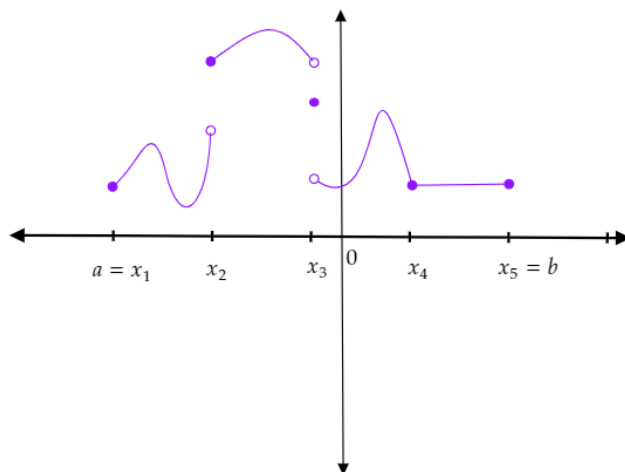
Définition, exemples

Définition 4

Une application f de $[a, b]$ dans \mathbb{R} est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $u = (x_i)_{i=0}^n$ de $[a, b]$ telle que pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ la restriction de f à $[x_{i-1}, x_i]$ soit continue et admette des limites finies en x_{i-1} et x_i .

La subdivision u est dite adaptée à la fonction f .

Illustration avec un exemple graphique:



Exemples

- Toute fonction en escalier est continue par morceaux.
- Toute fonction continue est continue par morceaux.
- La fonction f définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f(0)=0 \text{ et } \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, f(x)=\frac{1}{x}$$

n'est pas continue par morceaux, car elle n'a pas de limite finie à droite et à gauche de 0 .

Remarques

Comme pour les fonctions en escalier, on peut vérifier que :

- si \mathcal{U} est une subdivision adaptée à une fonction f continue par morceaux, alors toute subdivision plus fine que \mathcal{U} est adaptée à f ,
- si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, alors il existe une subdivision adaptée à f et g .

Proposition 6

Une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.

Démonstration

Proposition 7

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. Les assertions suivantes sont correctes :

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f + \mu g$ est continue par morceaux.
- fg est continue par morceaux.

Démonstration

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Théorème (admis)

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Pour tout réel $\epsilon > 0$:

- il existe une fonction en escalier ϑ telle que $|f - \vartheta| \leq \epsilon$
- il existe des fonctions en escalier φ et ψ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi - \varphi \leq \epsilon$$

Notations: Dans ce qui suit, pour une fonction continue par morceaux f nous allons adopter les notations suivantes :

- $\mathcal{E}^+(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier plus grandes que f .
- $\mathcal{E}^-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier plus petites que f .

Proposition 8

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Alors :

- $\inf_{\varphi \in \mathcal{E}^-(f)} \int_a^b \varphi$ admet une borne supérieure,
- $\sup_{\psi \in \mathcal{E}^+(f)} \int_a^b \psi$ admet une borne inférieure,

de plus,

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{E}^-(f)} \int_a^b \varphi = \inf_{\psi \in \mathcal{E}^+(f)} \int_a^b \psi$$

Fixons $\varphi \in \mathcal{E}^{+}(f)$. L'ensemble $\left\{ \int_a^b \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^{-}(f) \right\}$ est majoré par $\int_a^b \varphi$. Alors nous avons forcément $\alpha \leq \int_a^b \varphi$ et ça pour tout $\varphi \in \mathcal{E}^{+}(f)$. Donc α est un minorant de $\left\{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^{-}(f) \right\}$. Par conséquent, $\alpha \leq \beta$.

Donc

$$\alpha \leq \beta$$

D'autre part, d'après le théorème
