EST

المدرسة العليا للتكنولوجيا
جامعة الحسن الثاني الدار البيضاء

Ecole Supérieure de Technologie
Université Hassan II de Casablanca

Cours Analyse

Iaousse Mbarek

oct. 22, 2023

Table des matières

Année universitaire 2023-2024

Les mathématiques que vous avez étudiées au lycée étaient souvent présentées de manière pratique, axée sur l'application et la résolution de problèmes concrets. Mais après le baccalauréat, la manière d'aborder les mathématiques évolue : on se penche davantage sur la rigueur, la structure, et la théorie sous-jacente.

Au cours de vos études supérieures, vous allez découvrir que les mathématiques ne sont pas simplement une collection de formules ou d'équations à mémoriser. Elles constituent un langage, un moyen d'exprimer des idées et de décrire les phénomènes du monde qui nous entoure. Dans ce cadre, la construction et la compréhension des objets mathématiques sont essentielles.

Ce cours d'Analyse est conçu pour jeter les bases solides nécessaires à votre parcours académique et professionnel. Il vise à introduire, de manière rigoureuse et approfondie, les outils et concepts fondamentaux qui vous accompagneront tout au long de vos études. Au programme :

1. **L'ensemble des réels** : la fondation sur laquelle repose la plupart des mathématiques que vous étudierez ;
2. **Les suites des nombres réels** : une première approche des séquences et de leur comportement à l'infini ;
3. **Limites et continuité d'une fonction numérique** : comprendre le comportement des fonctions dans divers contextes ;
4. **Dérivabilité d'une fonction numérique** : étude des variations et des comportements locaux d'une fonction ;
5. **Fonctions usuelles** : exploration approfondie des fonctions courantes et de leurs propriétés ;
6. **Développements limités** : techniques permettant d'approximer les fonctions pour en faciliter l'étude ;
7. **Calcul Intégral** : méthodes et concepts associés au calcul d'intégrales.

Le contenu de ce cours s'inspire de plusieurs références clés que les étudiants sont encouragés à consulter pour approfondir leur compréhension. Ces références, dont certaines ont été utilisées pour élaborer des sections spécifiques et d'autres pour concevoir certains exercices, incluent :

— Analyse
— Bibm@th
— AlloSchool
— Mathématiques tout-en-un 1ère année : cours et exercices corrigés : MPSI, PCSI

Ce cours a pour objectif d'offrir aux étudiants une formation approfondie en Analyse, tout en tenant compte des besoins spécifiques et des applications pertinentes à l'informatique. L'analyse est en effet un pilier essentiel dans de nombreux domaines de l'informatique, de l'algorithmique à l'optimisation en passant par la modélisation. Nous espérons que ce cours éclairera votre chemin vers une maîtrise approfondie des mathématiques et de leurs nombreuses applications en informatique.

0.1 Les nombres réels

Le présent Chapitre contiendra :

1. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$
2. Propriétés de $\mathbb{R}$
3. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$
4. Borne supérieure
5. Exercices

0.1.1 Les nombres rationnels

L'écriture décimale

Par définition, l'ensemble des nombres rationnels est

$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N}^*\}$$

Par exemple : $\frac{2}{5}$, $\frac{-7}{71}$, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $etc...$

Les nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ fournissent d'autres exemples:

$$1,234 = 1234 \times 10^{-3} = \frac{1234}{1000} \text{ et } 0,00345 = 345 \times 10^{-5} = \frac{345}{100000}$$

Définition

Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimale périodique ou finie.

Exemple

le nombre $\frac{3}{5}$ est rationnel car:

$$\frac{3}{5} = 0,6 \quad \frac{1}{3} = 0,333\,...$$

Nous n'allons pas donner la démonstration mais le sens direct ($\Rightarrow$) repose sur la division euclidienne. Pour la réciproque ($\Leftarrow$) voyons comment cela marche sur un exemple : Montrons que $x = 12,3420212021\,...$ est un rationnel.

L'idée est d'abord de faire apparaître la partie périodique juste après la virgule. Ici la période commence deux chiffres après la virgule, donc on multiplie par 100 :

$$100x = 1234,20212021\,... \tag{1}$$

Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, donc ici on multiplie encore par 10 000 pour décaler de 4 chiffres :

Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, donc ici on multiplie encore par 10 000 pour décaler de 4 chiffres :

$$10000 \times 100x = 12342021,2021\,... \tag{2}$$

Les parties après la virgule des deux lignes (1) et (2) sont les mêmes, donc si on les soustrait en faisant (2) - (1) alors les parties décimales s'annulent :

$$10000 \times 100x - 100x = 12342021 - 1234$$

Donc $999900x = 12340787$ donc $x = \frac{12340787}{999900}$, x est bien un nombre rationnel.

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, les irrationnels. Les nombres irrationnels apparaissent naturellement dans les figures géométriques : par exemple la diagonale d'un carré de côté 1 est le nombre irrationnel $\sqrt{2}$; la circonférence d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ est π qui est également un nombre irrationnel. Enfin $e = exp(1)$ est aussi.

Nous allons prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Proposition

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Par l'absurde supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Alors il existe des entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ de plus, ce sera important pour la suite– on suppose que p et q sont premiers entre eux (c'est-à-dire que la fraction $\frac{p}{q}$ est sous une écriture irréductible).

En élevant au carré, l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ devient $2q^2 = p^2$. Cette dernière égalité est une égalité d'entiers. L'entier de gauche est pair, donc on en déduit que p^2 est pair; en termes de divisibilité 2 divise p^2. Mais si 2 divise p^2

Alors 2 divise p (cela se prouve par facilement l'absurde). Donc il existe un entier $p' \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2p'$

Démonstration

Repartons de l'égalité $2q^2 = p^2$ et remplaçons p par $2p'$. Cela donne $2q^2 = 4p'^2$. Donc $q^2 = 2p'^2$. Maintenant cela entraîne que 2 divise q^2 et comme avant alors 2 divise q. Nous avons prouvé que 2 divise à la fois p et q. Cela rentre en contradiction avec le fait que p et q sont premiers entre eux. Notre hypothèse de départ est donc fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Comme ce résultat est important en voici une deuxième démonstration, assez différente, mais toujours par l'absurde. Autre démonstration. Par l'absurde, supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donc $q\sqrt{2} = p \in \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{N} := \{n \in \mathbb{N}^* \mid n\sqrt{2} \in \mathbb{N}\}$$

Cet ensemble n'est pas vide car on vient de voir que $q\sqrt{2} = p \in \mathbb{N}$ donc $q \in \mathcal{N}$. Ainsi $\mathcal{N}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus petit élément $n_0 := \min \mathcal{N}$.

Posons

$$n_1 = n_0\sqrt{2} - n_0 = n_0(\sqrt{2} - 1)$$

Il découle de cette dernière égalité et de $1 < \sqrt{2} < 2$ que $0 < n_1 < n_0$.

De plus $n_1\sqrt{2} = (n_0\sqrt{2} - n_0)\sqrt{2} = 2n_0 - n_0\sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Donc $n_1 \in \mathcal{N}$ et $n_1 < n_0$: on vient de trouver un élément n_1 de $\mathcal{N}$ strictement plus petit que n_0 qui était le minimum. C'est une contradiction. Notre hypothèse de départ est fausse, donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

0.1.2 Propriétés de $\mathbb{R}$

Addition et multiplication

Ce sont les propriétés dont on a habitué. Pour $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, on a:

- $a + b = b + a$
- $a \times b = b \times a$
- $a + 0 = a$

- $a \times 1 = a$ si $a \neq 0$
- $a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b$
- $ab = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{b}$
- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- $a \times b = 0 \Leftrightarrow (a = 0$ ou $b = 0)$

On résume toutes ces propriétés en disant que :

Proposition

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Ordre sur $\mathbb{R}$

Nous allons voir que les réels sont ordonnés. La notion d'ordre est générale et nous allons définir cette notion sur un ensemble quelconque. Cependant gardez à l'esprit que pour nous $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{R} = \leq$

Définition

Soit E un ensemble.

1. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est un sous-ensemble de l'ensemble produit $E \times E$. Pour $(x, y) \in E \times E$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$ pour dire que $(x, y) \in R$.
2. Une relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si
   - $\mathcal{R}$ est *réflexive* : Pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$
   - $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* : pour tout $x, y \in E$, $(x\mathcal{R}y$ et$y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
   - $\mathcal{R}$ est *transitive* : pour tout $x, y, z \in E$, $(x\mathcal{R}y$ et$y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Définition

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est totale si pour tout $x, y \in E$ on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. On dit aussi que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble totalement ordonné.

Proposition

La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre, et de plus, elle est totale.

Nous avons donc:

- pour tout $x \in \mathbb{R}, x \leq x$,
- pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$,
- pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

Remarque

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a par définition:

$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+$

$x < y \Leftrightarrow x \leq y \quad$ et $\quad x \neq y$

Les opérations de $\mathbb{R}$ sont compatibles avec la relation d'ordre $\leq$ au sens suivant, pour des réels a, b, c, d :

$a \leq b \quad \text{et} \quad c \leq d) \Rightarrow a + c \leq b + d$

$a \leq b \quad \text{et} \quad c \geq 0) \Rightarrow a \times c \leq b \times c$

Définition

On définit le maximum de deux réels a et b par:

$$\max(a, b) = \begin{cases} a \text{ si } a \geq b \\ b \text{ si } b > a \end{cases}$$

Propriété d'Archimède

Proposition (Propriété d'Archimède)

$\mathbb{R}$ est *archimédien*, c'est-à-dire:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N};\ n > x$$

Autrementdit, Pour tout réel x, il existe un entier naturel n strictement plus grand que x.

Cette propriété peut sembler évidente, elle est pourtant essentielle puisque elle permet de définir la partie entière d'un nombre réel:

Proposition (partie entière)

Soit $x \in R$, il existe un unique entier relatif, la partie entière notée $E(x)$, tel que:

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Exemple

- $E(2, 853) = 2, E(\pi) = 3, E(-3, 5) = -4.$
- $E(x) = 3 \Leftrightarrow 3 \leq x < 4$

Pour la démonstration de la proposition de la partie entière il y a deux choses à établir: d'abord qu'un tel entier $E(x)$ existe et ensuite qu'il est unique:

Preuve

- **Existence**

Supposons $x > 0$.

Par la propriété d'Archimède il existe $n \in N$ tel que $n > x$.

L'ensemble $K := \{k \in \mathbb{N}; k \leq x\}$ est donc fini (car pour tout k dans K, on a $0 \leq k \leq n$).

Il admet donc un plus grand élément $k_{max} = \max K$.

On a alors $k_{max} \leq x$ car $k_{max} \in K$, et $k_{max} + 1 > x$ car $k_{max} + 1 \notin K$. Donc $k_{max} \leq x < k_{max} + 1$ et on prend donc $E(x) = k_{max}$.

— **Unicité:**
Si k et l sont deux entiers relatifs vérifiant $k \leq x < k+1$ et $l \leq x < l+1$, on a donc $k \leq x < l+1$.

donc par transitivité $k < l+1$.

En échangeant les rôles de l et k, on a aussi $l < k+1$.

On en conclut que $l-1 < k < l+1$, mais il n'y a qu'un seul entier compris strictement entre $l-1$ et $l+1$, c'est l.

Ainsi $k = l$.

Le cas $x < 0$ est similaire.

Valeur absolue

Définition

Pour un nombre réel x, on définit la valeur absolue de x par:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Proposition

1. $|x| \geq 0, \quad |x| = |-x|; \quad |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. Inégalité triangulaire: $|x+y| \leq |x| + |y|$
5. $||x| - |y|| \leq |x-y|$

Sur la droite numérique, $|x-y|$ représente la distance entre les réels x et y ; en particulier $|x|$ représente la distance entre les réels x et 0. De plus on a $|x-a| < r \Leftrightarrow a-r < x < a+r$.

0.1.3 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Intervalle

Définition

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété:

$$\forall a,\, b \in I,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow x \in I)$$

Remarque

Par définition;
— $I = \emptyset$ est un intervalle.
— $I = \mathbb{R}$ est aussi un intervalle.

Définition

Un intervalle ouvert est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$, où a et b sont des éléments de $\mathbb{R}$.

La notion de voisinage sera utile pour les limites.

Définition

Soit a un réel, $V \subset R$ un sous-ensemble. On dit que V est un voisinage de a s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset V$.

Densité

Théorème

1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'irrationnels.

0.1.4 Borne supérieure

Maximum, minimum

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un réel α est un plus grand élément de A si : $\alpha \in A$ et $\forall x \in A,\ x \leqslant \alpha$. S'il existe, le plus grand élément est unique, on le note alors max A. Le plus petit élément de A, noté min A, s'il existe est le réel α tel que $\alpha \in A$ et $\forall x \in A,\ x \geqslant \alpha$.

Le plus grand élément s'appelle aussi le maximum et le plus petit élément, le minimum. Il faut garder à l'esprit que le plus grand élément ou le plus petit élément n'existent pas toujours.

Exemple

— 3 est un majorant de $]0, 2[$;
— -7,π, 0 sont des minorants de $]0, +\infty[$ mais il n'y a pas de majorant.

Si un majorant (resp. un minorant) de A existe on dit que A est majorée (resp. minorée). Comme pour le minimum et le maximum il n'existe pas toujours de majorant ni de minorant, en plus on n'a pas l'unicité.

Soit $A = [0, 1[$

1. les majorants de A sont exactement les éléments de $[1, +\infty[$,
2. les minorants de A sont exactement les éléments de $]-\infty, 0]$.

Borne supérieure, borne inférieure

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel.

1. α est la borne supérieure de A si α est un majorant de A et si c'est le plus petit des majorants. S'il existe on le note $\sup A$.
2. α est la borne inférieure de A si α est un minorant de A et si c'est le plus grand des minorants. S'il existe on le note $\inf A$.

Exemple

Soit $A =]0, 1]$.

1. $\sup A = 1$: en effet les majorants de A sont les éléments de $[1, +\infty[$. Donc le plus petit des majorants est 1.
2. $\inf A = 0$: les minorants sont les éléments de $]-\infty, 0]$ donc le plus grand des minorants est 0.

- $\sup[a, b] = b$,
- $\inf[a, b] = a$,
- $\sup]a, b[= b$,
- $]0, +\infty[$ n'admet pas de borne supérieure,
- $\inf]0, +\infty[= 0$.

Théorème

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

De la même façon : Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

Proposition (Caractérisation de la borne supérieure)

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel $\sup A$ tel que

1. si $x \in A$, alors $x \leqslant \sup A$,
2. pour tout $y < \sup A$, il existe $x \in A$ tel que $y < x$.

0.1.5 Exercices

Exercice 1

Comment définir $\max(a, b, c)$, $\max(a_1, ..., a_n)$? Et $\min(a, b)$?

Exercice 2

1. Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction : $0,1212$;$0,1212\ldots$; $78,33454545\ldots$
2. Sachant $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer que $2-3\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $1-\frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
3. Notons D l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{2^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\frac{1}{3} \notin D$. Trouver $x \in D$ tel que $1234 < x < 1234,001$
4. Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r+x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $rx \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire que : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Exercice 4

Montrer que $\dfrac{\ln(3)}{ln(2)}$ est irrationnel.

Exercice 5

Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x,y)$. De même on notera $\min(x,y)$ le plus petit des deux nombres x, y. Démontrer que : $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.

Exercice 6

Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Exercice 7

Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1] \cap \mathbb{Q};]0,1[\cap \mathbb{Q}; \mathbb{N}; \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} | n \in \mathbb{N}^\star\right\}$$

Exercice 8

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a + b|(a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 9

Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Vrai ou faux?

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$,
2. $A \subset B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$,
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leq \sup(A + B)$.

Exercice 10

1. Soient x et y deux réels. Montrer que $|x| \geq ||x + y| - |y||$.
2. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels. Montrer que $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x1| + \dots + |x_n|$. Dans quel cas a-t-on égalité?
3. Soient $x, y > 0$ des réels. Comparer $E(x + y)$ avec $E(x) + E(y)$. Comparer $E(xy)$ et $E(x)E(y)$.

0.2 Les suites des nombres réels

Le présent Chapitre contiendra :

1. Suites réelles: Définitions générales
2. Convergence d'une suite réelle
3. Suites adjacentes
4. Suites récurrentes
5. Exercices

0.2.1 Suites réelles: Définitions générales

Définition

Une suite est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n^{ime} terme ou terme général de la suite u.

Une suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est plus souvent notée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geq 0}$ ou simplement par (u_n).

Si une suite u est définie à partir d'un certain entier naturel $n_0 > 0$, alors dans ce cas on note cette suite par $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemple

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sqrt{n} - 1$. Les cinq premiers termes de cette suite sont $-1, 0, \sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - 1, 1$.
2. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Les trois premiers termes de cette suite sont $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}$

3. $((-1)^n)$ est une suite qui prends deux valeurs: 1 et -1.

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite.

1. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite une suite croissante (resp. strictement croissante) si $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$), $\forall n \geq n_0$.
2. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite une suite décroissante (resp. strictement décroissante) si $u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$), $\forall n \geq n_0$.

Exemple

1. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, est strictement décroissante. En effet, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n^2-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{n^2-n^2-2n-1}{n^2(n+1)^2} \\ &= -\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

2. La suite (v_n) définie par $v_n = e^n,\ e^{n+1}-e^n = e^n e - e^n = e^n(e-1) > 0. Doncelleeststrictmentcroissante.$

Remarque

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite à termes strictement positifs, alors

1. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si, et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,\ \forall n \geq n_0$.
2. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si, et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1,\ \forall n \geq n_0$.

Considérons à nouveau la suite (v_n) telle que $v_n = e^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. On sait que $v_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{n+1}}{e^n} = e^{(n+1)-n} = e$$

Donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite (v_n) est strictement croissante.

Remarque

Il se peut qu'une suite ne soit ni croissante ni décroissante. Voilà deux exemples:

1. La suite (u_n) telle que $u_n = (-1)^n$ est une suite ni croissante ni décroissante.
2. Considérons la suite (v_n) définie par $v_n = \sin(n\dfrac{\pi}{2}),\ n \in \mathbb{N}$. Ces premiers termes sont:

$v_0 = \sin(0) = 0,\ v_1 = \sin(\frac{\pi}{2}),\ v_2 = \sin(\pi) = 0,\ v_3 = \sin(3\frac{\pi}{2}) = -1,\ v_4 = \sin(2\pi) = 0, \ldots$

Définition

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite monotone (resp. strictement monotone) si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite.

1. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M,\ \forall n \geq n_0$.
2. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq M,\ \forall n \geq n_0$.
3. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite bornée si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée et majorée.

Exemple

On considère les trois suites $(u_n),\ (v_n)$ et (w_n) définies par leurs termes généraux

$$u_n = 1 + n^2, \quad v_n = 5 - n(n+1), \quad w_n = 2 + \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 1$. Donc (u_n) est minorée par 1.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \leq 1$. Donc (v_n) est majorée par 5.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2 < w_n \leq 3$. La suite est donc bornée.

Remarque

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée par son premier terme.
2. Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante, alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée par son premier terme.

Proposition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle. Alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement si

$$\exists M \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0 : \quad |u_n| \leq M$$

0.2.2 Convergence d'une suite réelle

Définition

On dit qu'une suite réelle (u_n) converge vers un réel ℓ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > N$, on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Dans ce cas, ℓ est appelée limite de la suite (u_n). On dit alors que (u_n) a pour limite ℓ ou (u_n) tend vers ℓ et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

ou $u_n \to \ell$, quand $n \to +\infty$

Intuitivement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ signifie que les termes de la suite (u_n) se rapprochent de l toujours plus de ε lorsque l'indice n augmente indéfiniment.

Définition

Soit u_n une suite réelle.

1. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ (et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$) lorsque pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > N$, on a
$$u_n > A$$
2. On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ (et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$) lorsque pour tout $A < 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > N$, on a
$$u_n < A$$

Remarque

Une suite (u_n) est dite convergente si elle admet une limite finie. Dans le cas contraire, elle est divergente.

Proposition

Si une suite est convergente alors sa limite est unique.

Preuve

On procède par l'absurde. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente ayant deux limites ℓ et ℓ', $\ell \neq \ell'$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \dfrac{|\ell - \ell'|}{2}$

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe N_1 tel que $n \geq N_1$ implique $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

De même, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell'$, il existe N_2 tel que $n \geq N_2$ implique $|u_n - \ell'| < \varepsilon$.

Notons $N = \max(N_1, N_2)$ on a alors pour ce N :

$$|u_N - \ell| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |u_N - \ell'| < \varepsilon$$

Donc $|\ell - \ell'| = |\ell - u_N + u_N - \ell'| \leqslant |\ell - u_N| + |u_N - \ell'|$ d'après l'inégalité triangulaire. On en tire $|\ell - \ell'| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < |\ell - \ell'|$, ce qui est impossible, d'où la contradiction.

Exemple

1. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$
La suite $(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ est alors une suite convergente et elle converge vers 0.

2. On a

$$\lim_{n\to+\infty} 1-n^2=-\infty$$

La suite $(1-n^2)$ est donc une suite divergente.

Proposition

Soit $q\in\mathbb{R}^*$. On considère la suite $u_n=q^n,\ n\in\mathbb{N}$. On a:

1. Si $q\leq -1$: La suite (u_n) est divergente et n'admet pas de limite, ni finie ni infinie.
2. Si $-1<q<1$: La suite $(u_n)_n$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$
3. Si $q>1$: La suite $(u_n)_n$ est divergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

Proposition

Soit (u_n) une suite réelle et soit $\ell\in\mathbb{R}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n-\ell|=0.$$

Exemple

Soit $(v_n)_{\geq 1}$ la suite définie par $v_n=\dfrac{2n-1}{n}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} |v_n-2|=\lim_{n\to+\infty} |-\frac{1}{n}|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

En on déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_n=2$.

Proposition (Opérations sur les limites des suites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites et soient α et β dans $\mathbb{R}$,

1. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n=\beta$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\alpha+\beta \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=\alpha\times\beta$$

2. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha$ alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda u_n)=\lambda\alpha$$

3. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha$ et $\alpha\neq 0$ alors on a $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{1}{\alpha}$.
4. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=\pm\infty$ alors on a $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n}=0$,
5. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=\pm\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n=\alpha$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$ alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim_{n\to+\infty} u_n$
6. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=\pm\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n=\alpha$, avec $\alpha\in\mathbb{R}^+$ alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=\lim_{n\to+\infty} u_n$
7. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=+\infty$.
8. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n=-\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=-\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=+\infty$.

9. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = -\infty$.

Exemple

1. On a $\lim_{n\to+\infty}(\dfrac{-2}{\sqrt{n}-3} + 3n + 1) = +\infty$, puisque $\lim_{n\to+\infty}(\dfrac{-2}{\sqrt{n}-3}) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}(3n+1) = +\infty$.
2. On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{2}{3n} - 5}{1 + n + e^n} = 0$, puisque $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3n} - 5 = -5$ et $\lim_{n\to+\infty} 1 + n + e^n = +\infty$.

Parfois on tombe sur l'une des quatres "**formes indéterminées**" suivantes $+\infty - \infty,\ 0 \times \pm\infty,\ \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \dfrac{0}{0}$.

Limites usuelles utiles

— $\lim_{n\to+\infty} n \sin(\dfrac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(\dfrac{1}{n})}{\dfrac{1}{n}} = 1,$

— $\lim_{n\to+\infty} n^2 \cos(1 - \dfrac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(1 - \dfrac{1}{n})}{(\dfrac{1}{n})^2} = \dfrac{1}{2},$

— $\lim_{n\to+\infty} n \ln(1 + \dfrac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1 + \dfrac{1}{n})}{\dfrac{1}{n}} = 1,$

— $\lim_{n\to+\infty} n(e^{\frac{1}{n}}) = 1,$

— $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln(n))^\alpha}{n} = 0,$

— $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha e^{-n} = 0.$

Proposition

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n \leq v_n$ (ou $u_n < v_n$). Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Théorème (Théorème des "gendarmes")

Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n \leq w_n \leq v_n$$

et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$, alors la suite (w_n) est convergente. De plus on a

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$$