المدرسة العليا للتكنولوجيا
جامعة الحسن الثاني الدار البيضاء
Ecole Supérieure de Technologie
Université Hassan II de Casablanca

Cours Analyse

Iaousse Mbarek

oct. 22, 2023

Table des matières

Année universitaire 2023-2024

Les mathématiques que vous avez étudiées au lycée étaient souvent présentées de manière pratique, axée sur l'application et la résolution de problèmes concrets. Mais après le baccalauréat, la manière d'aborder les mathématiques évolue : on se penche davantage sur la rigueur, la structure, et la théorie sous-jacente.

Au cours de vos études supérieures, vous allez découvrir que les mathématiques ne sont pas simplement une collection de formules ou d'équations à mémoriser. Elles constituent un langage, un moyen d'exprimer des idées et de décrire les phénomènes du monde qui nous entoure. Dans ce cadre, la construction et la compréhension des objets mathématiques sont essentielles.

Ce cours d'Analyse est conçu pour jeter les bases solides nécessaires à votre parcours académique et professionnel. Il vise à introduire, de manière rigoureuse et approfondie, les outils et concepts fondamentaux qui vous accompagneront tout au long de vos études. Au programme :

1. **L'ensemble des réels** : la fondation sur laquelle repose la plupart des mathématiques que vous étudierez ;
2. **Les suites des nombres réels** : une première approche des séquences et de leur comportement à l'infini ;
3. **Limites et continuité d'une fonction numérique** : comprendre le comportement des fonctions dans divers contextes ;
4. **Dérivabilité d'une fonction numérique** : étude des variations et des comportements locaux d'une fonction ;
5. **Fonctions usuelles** : exploration approfondie des fonctions courantes et de leurs propriétés ;
6. **Développements limités** : techniques permettant d'approximer les fonctions pour en faciliter l'étude ;
7. **Calcul Intégral** : méthodes et concepts associés au calcul d'intégrales.

Le contenu de ce cours s'inspire de plusieurs références clés que les étudiants sont encouragés à consulter pour approfondir leur compréhension. Ces références, dont certaines ont été utilisées pour élaborer des sections spécifiques et d'autres pour concevoir certains exercices, incluent :

- Analyse
- Bibm@th
- AlloSchool
- Mathématiques tout-en-un 1ère année : cours et exercices corrigés : MPSI, PCSI

Ce cours a pour objectif d'offrir aux étudiants une formation approfondie en Analyse, tout en tenant compte des besoins spécifiques et des applications pertinentes à l'informatique. L'analyse est en effet un pilier essentiel dans de nombreux domaines de l'informatique, de l'algorithmique à l'optimisation en passant par la modélisation. Nous espérons que ce cours éclairera votre chemin vers une maîtrise approfondie des mathématiques et de leurs nombreuses applications en informatique.

0.1 Les nombres réels

Le présent Chapitre contiendra :

1. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$
2. Propriétés de $\mathbb{R}$
3. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$
4. Borne supérieure
5. Exercices

0.1.1 Les nombres rationnels

L'écriture décimale

Par définition, l'ensemble des nombres rationnels est

$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N}^*\}$$

Par exemple : $\frac{2}{5}$, $\frac{-7}{71}$, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $etc...$

Les nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ fournissent d'autres exemples:

$$1,234 = 1234 \times 10^{-3} = \frac{1234}{1000} \text{ et } 0,00345 = 345 \times 10^{-5} = \frac{345}{100000}$$

Définition

Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimale périodique ou finie.

Exemple

le nombre $\frac{3}{5}$ est rationnel car:

$$\frac{3}{5} = 0,6 \quad \frac{1}{3} = 0,333\ldots$$

Nous n'allons pas donner la démonstration mais le sens direct ($\Rightarrow$) repose sur la division euclidienne. Pour la réciproque ($\Leftarrow$) voyons comment cela marche sur un exemple : Montrons que $x = 12,3420212021\ldots$ est un rationnel.

L'idée est d'abord de faire apparaître la partie périodique juste après la virgule. Ici la période commence deux chiffres après la virgule, donc on multiplie par 100 :

$$100x = 1234,20212021\ldots \tag{1}$$

Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, donc ici on multiplie encore par 10 000 pour décaler de 4 chiffres :

Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, donc ici on multiplie encore par 10 000 pour décaler de 4 chiffres :

$$10000 \times 100x = 12342021,2021\ldots \tag{2}$$

Les parties après la virgule des deux lignes (1) et (2) sont les mêmes, donc si on les soustrait en faisant (2) - (1) alors les parties décimales s'annulent :

$$10000 \times 100x - 100x = 12342021 - 1234$$

Donc $999900x = 12340787$ donc $x = \frac{12340787}{999900}$, x est bien un nombre rationnel.

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, les irrationnels. Les nombres irrationnels apparaissent naturellement dans les figures géométriques : par exemple la diagonale d'un carré de côté 1 est le nombre irrationnel $\sqrt{2}$; la circonférence d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ est π qui est également un nombre irrationnel. Enfin $e = exp(1)$ est aussi.

Nous allons prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Proposition

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Par l'absurde supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Alors il existe des entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ de plus, ce sera important pour la suite– on suppose que p et q sont premiers entre eux (c'est-à-dire que la fraction $\frac{p}{q}$ est sous une écriture irréductible).

En élevant au carré, l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ devient $2q^2 = p^2$. Cette dernière égalité est une égalité d'entiers. L'entier de gauche est pair, donc on en déduit que p^2 est pair ; en termes de divisibilité 2 divise p^2. Mais si 2 divise p^2

Alors 2 divise p (cela se prouve par facilement l'absurde). Donc il existe un entier $p' \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2p'$

Démonstration

Repartons de l'égalité $2q^2 = p^2$ et remplaçons p par $2p'$. Cela donne $2q^2 = 4p'^2$. Donc $q^2 = 2p'^2$. Maintenant cela entraîne que 2 divise q^2 et comme avant alors 2 divise q. Nous avons prouvé que 2 divise à la fois p et q. Cela rentre en contradiction avec le fait que p et q sont premiers entre eux. Notre hypothèse de départ est donc fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Comme ce résultat est important en voici une deuxième démonstration, assez différente, mais toujours par l'absurde. Autre démonstration. Par l'absurde, supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donc $q\sqrt{2} = p \in \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{N} := \{n \in \mathbb{N}^* \mid n\sqrt{2} \in \mathbb{N}\}$$

Cet ensemble n'est pas vide car on vient de voir que $q\sqrt{2} = p \in \mathbb{N}$ donc $q \in \mathcal{N}$. Ainsi $\mathcal{N}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus petit élément $n_0 := \min \mathcal{N}$.

Posons

$$n_1 = n_0\sqrt{2} - n_0 = n_0(\sqrt{2} - 1)$$

Il découle de cette dernière égalité et de $1 < \sqrt{2} < 2$ que $0 < n_1 < n_0$.

De plus $n_1\sqrt{2} = (n_0\sqrt{2} - n_0)\sqrt{2} = 2n_0 - n_0\sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Donc $n_1 \in \mathcal{N}$ et $n_1 < n_0$: on vient de trouver un élément n_1 de $\mathcal{N}$ strictement plus petit que n_0 qui était le minimum. C'est une contradiction. Notre hypothèse de départ est fausse, donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

0.1.2 Propriétés de $\mathbb{R}$

Addition et multiplication

Ce sont les propriétés dont on a habitué. Pour $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, on a:
- $a + b = b + a$
- $a \times b = b \times a$
- $a + 0 = a$

— $a \times 1 = a$ si $a \neq 0$
— $a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b$
— $ab = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{b}$
— $(a + b) + c = a + (b + c)$
— $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
— $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
— $a \times b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$

On résume toutes ces propriétés en disant que :

Proposition

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Ordre sur $\mathbb{R}$

Nous allons voir que les réels sont ordonnés. La notion d'ordre est générale et nous allons définir cette notion sur un ensemble quelconque. Cependant gardez à l'esprit que pour nous $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{R} = \leq$

Définition

Soit E un ensemble.

1. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est un sous-ensemble de l'ensemble produit $E \times E$. Pour $(x, y) \in E \times E$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$ pour dire que $(x, y) \in R$.
2. Une relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si
   — $\mathcal{R}$ est *réflexive* : Pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$
   — $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* : pour tout $x, y \in E$, $(x\mathcal{R}y \text{ et} y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
   — $\mathcal{R}$ est *transitive* : pour tout $x, y, z \in E$, $(x\mathcal{R}y \text{ et} y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Définition

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est totale si pour tout $x, y \in E$ on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. On dit aussi que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble totalement ordonné.

Proposition

La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre, et de plus, elle est totale.

Nous avons donc:
— pour tout $x \in \mathbb{R}, x \leq x$,
— pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$,
— pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

Remarque

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a par définition:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+$$

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \quad \text{et} \quad x \neq y$$

Les opérations de $\mathbb{R}$ sont compatibles avec la relation d'ordre $\leq$ au sens suivant, pour des réels a, b, c, d :

$a \leq b \quad$ et $\quad c \leq d) \Rightarrow a + c \leq b + d$

$a \leq b \quad$ et $\quad c \geq 0) \Rightarrow a \times c \leq b \times c$

Définition

On définit le maximum de deux réels a et b par:

$$\max(a, b) = \begin{cases} a \text{ si } a \geq b \\ b \text{ si } b > a \end{cases}$$

Propriété d'Archimède

Proposition (Propriété d'Archimède)

$\mathbb{R}$ est *archimédien*, c'est-à-dire:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N};\ n > x$$

Autrementdit, Pour tout réel x, il existe un entier naturel n strictement plus grand que x.

Cette propriété peut sembler évidente, elle est pourtant essentielle puisque elle permet de définir la partie entière d'un nombre réel:

Proposition (partie entière)

Soit $x \in R$, il existe un unique entier relatif, la partie entière notée $E(x)$, tel que:

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Exemple

- $E(2, 853) = 2, E(\pi) = 3, E(-3, 5) = -4.$
- $E(x) = 3 \Leftrightarrow 3 \leq x < 4$

Pour la démonstration de la proposition de la partie entière il y a deux choses à établir: d'abord qu'un tel entier $E(x)$ existe et ensuite qu'il est unique:

Preuve

- **Existence**

Supposons $x > 0$.

Par la propriété d'Archimède il existe $n \in N$ tel que $n > x$.

L'ensemble $K := \{k \in \mathbb{N}; k \leq x\}$ est donc fini (car pour tout k dans K, on a $0 \leq k \leq n$).

Il admet donc un plus grand élément $k_{max} = \max K$.

On a alors $k_{max} \leq x$ car $k_{max} \in K$, et $k_{max} + 1 > x$ car $k_{max} + 1 \notin K$. Donc $k_{max} \leq x < k_{max} + 1$ et on prend donc $E(x) = k_{max}$.

— **Unicité:**
Si k et l sont deux entiers relatifs vérifiant $k \leq x < k+1$ et $l \leq x < l+1$, on a donc $k \leq x < l+1$.

donc par transitivité $k < l+1$.

En échangeant les rôles de l et k, on a aussi $l < k+1$.

On en conclut que $l-1 < k < l+1$, mais il n'y a qu'un seul entier compris strictement entre $l-1$ et $l+1$, c'est l.

Ainsi $k = l$.

Le cas $x < 0$ est similaire.

Valeur absolue

Définition

Pour un nombre réel x, on définit la valeur absolue de x par:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Proposition

1. $|x| \geq 0, \quad |x| = |-x|; \quad |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. Inégalité triangulaire: $|x+y| \leq |x| + |y|$
5. $||x| - |y|| \leq |x-y|$

Sur la droite numérique, $|x-y|$ représente la distance entre les réels x et y ; en particulier $|x|$ représente la distance entre les réels x et 0. De plus on a $|x-a| < r \Leftrightarrow a-r < x < a+r$.

0.1.3 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Intervalle

Définition

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété:

$$\forall a,\, b \in I,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow x \in I)$$

Remarque

Par définition;
— $I = \emptyset$ est un intervalle.
— $I = \mathbb{R}$ est aussi un intervalle.

Définition

Un intervalle ouvert est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$, où a et b sont des éléments de $\mathbb{R}$.

La notion de voisinage sera utile pour les limites.

Définition

Soit a un réel, $V \subset R$ un sous-ensemble. On dit que V est un voisinage de a s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset V$.

Densité

Théorème

1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'irrationnels.

0.1.4 Borne supérieure

Maximum, minimum

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un réel α est un plus grand élément de A si : $\alpha \in A$ et $\forall x \in A,\ x \leqslant \alpha$. S'il existe, le plus grand élément est unique, on le note alors max A. Le plus petit élément de A, noté min A, s'il existe est le réel α tel que $\alpha \in A$ et $\forall x \in A,\ x \geqslant \alpha$.

Le plus grand élément s'appelle aussi le maximum et le plus petit élément, le minimum. Il faut garder à l'esprit que le plus grand élément ou le plus petit élément n'existent pas toujours.

Exemple

- 3 est un majorant de $]0, 2[$;
- -7,π, 0 sont des minorants de $]0, +\infty[$ mais il n'y a pas de majorant.

Si un majorant (resp. un minorant) de A existe on dit que A est majorée (resp. minorée). Comme pour le minimum et le maximum il n'existe pas toujours de majorant ni de minorant, en plus on n'a pas l'unicité.

Soit $A = [0, 1[$

1. les majorants de A sont exactement les éléments de $[1, +\infty[$,
2. les minorants de A sont exactement les éléments de $]-\infty, 0]$.

Borne supérieure, borne inférieure

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel.

1. α est la borne supérieure de A si α est un majorant de A et si c'est le plus petit des majorants. S'il existe on le note $\sup A$.
2. α est la borne inférieure de A si α est un minorant de A et si c'est le plus grand des minorants. S'il existe on le note $\inf A$.

Exemple

Soit $A =]0, 1]$.

1. $\sup A = 1$: en effet les majorants de A sont les éléments de $[1, +\infty[$. Donc le plus petit des majorants est 1.
2. $\inf A = 0$: les minorants sont les éléments de $]-\infty, 0]$ donc le plus grand des minorants est 0.

- $\sup[a, b] = b$,
- $\inf[a, b] = a$,
- $\sup]a, b[= b$,
- $]0, +\infty[$ n'admet pas de borne supérieure,
- $\inf]0, +\infty[= 0$.

Théorème

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

De la même façon : Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

Proposition (Caractérisation de la borne supérieure)

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel $\sup A$ tel que

1. si $x \in A$, alors $x \leqslant \sup A$,
2. pour tout $y < \sup A$, il existe $x \in A$ tel que $y < x$.

0.1.5 Exercices

Exercice 1

Comment définir $\max(a, b, c)$, $\max(a_1, ..., a_n)$? Et $\min(a, b)$?

Exercice 2

1. Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction : $0,1212$;$0,1212....$; $78,33454545...$
2. Sachant $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer que $2 - 3\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
3. Notons D l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{2^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\frac{1}{3} \notin D$. Trouver $x \in D$ tel que $1234 < x < 1234,001$
4. Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $rx \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire que : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Exercice 4

Montrer que $\dfrac{\ln(3)}{ln(2)}$ est irrationnel.

Exercice 5

Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x, y. Démontrer que : $\max(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$ et $\min(x, y) = \dfrac{x + y - |x - y|}{2}$.

Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 6

Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Exercice 7

Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q};]0, 1[\cap \mathbb{Q}; \mathbb{N}; \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} | n \in \mathbb{N}^\star\right\}$$

Exercice 8

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a + b | (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 9

Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Vrai ou faux?

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$,
2. $A \subset B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$,
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leq \sup(A + B)$.

Exercice 10

1. Soient x et y deux réels. Montrer que $|x| \geq ||x + y| - |y||$.
2. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels. Montrer que $|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x1| + \ldots + |x_n|$. Dans quel cas a-t-on égalité?
3. Soient $x, y > 0$ des réels. Comparer $E(x + y)$ avec $E(x) + E(y)$. Comparer $E(xy)$ et $E(x)E(y)$.

0.2 Les suites des nombres réels

Le présent Chapitre contiendra :

1. Suites réelles: Définitions générales
2. Convergence d'une suite réelle
3. Suites adjacentes
4. Suites récurrentes
5. Exercices

0.2.1 Suites réelles: Définitions générales

Définition

Une suite est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n^{ime} terme ou terme général de la suite u.

Une suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est plus souvent notée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geq 0}$ ou simplement par (u_n).

Si une suite u est définie à partir d'un certain entier naturel $n_0 > 0$, alors dans ce cas on note cette suite par $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemple

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sqrt{n} - 1$. Les cinq premiers termes de cette suite sont $-1, 0, \sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - 1, 1$.
2. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Les trois premiers termes de cette suite sont $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}$

3. $((-1)^n)$ est une suite qui prends deux valeurs: 1 et -1.

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite.

1. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite une suite croissante (resp. strictement croissante) si $u_{n+1}\geq u_n$ (resp. $u_{n+1}>u_n$), $\forall n\geq n_0$.
2. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite une suite décroissante (resp. strictement décroissante) si $u_{n+1}\leq u_n$ (resp. $u_{n+1}<u_n$), $\forall n\geq n_0$.

Exemple

1. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n=\dfrac{1}{n^2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, est strictement décroissante. En effet, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}\\
&= \frac{n^2-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}\\
&= \frac{n^2-n^2-2n-1}{n^2(n+1)^2}\\
&= -\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\\
&< 0
\end{aligned}$$

2. La suite (v_n) définie par $v_n=e^n,\ e^{n+1}-e^n=e^ne-e^n=e^n(e-1)>0. Doncelleeststrictmentcroissante.$

Remarque

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite à termes strictement positifs, alors

1. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si, et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1,\ \forall n\geq n_0$.
2. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si, et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1,\ \forall n\geq n_0$.

Considérons à nouveau la suite (v_n) telle que $v_n=e^n,\ \forall n\in\mathbb{N}$. On sait que $v_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{e^{n+1}}{e^n}=e^{(n+1)-n}=e$$

Donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}>1,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Ainsi la suite (v_n) est strictement croissante.

Remarque

Il se peut qu'une suite ne soit ni croissante ni décroissante. Voilà deux exemples:

1. La suite (u_n) telle que $u_n=(-1)^n$ est une suite ni croissante ni décroissante.
2. Considérons la suite (v_n) définie par $v_n=\sin(n\dfrac{\pi}{2}),\ n\in\mathbb{N}$. Ces premiers termes sont:

$v_0 = \sin(0) = 0,\ v_1 = \sin(\frac{\pi}{2}),\ v_2 = \sin(\pi) = 0,\ v_3 = \sin(3\frac{\pi}{2}) = -1,\ v_4 = \sin(2\pi) = 0, ...$

Définition

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite monotone (resp. strictement monotone) si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite.

1. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M,\ \forall n \geq n_0$.
2. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq M,\ \forall n \geq n_0$.
3. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite bornée si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée et majorée.

Exemple

On considère les trois suites $(u_n),\ (v_n)$ et (w_n) définies par leurs termes généraux

$$u_n = 1 + n^2, \quad v_n = 5 - n(n+1), \quad w_n = 2 + \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 1$. Donc (u_n) est minorée par 1.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \leq 1$. Donc (v_n) est majorée par 5.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2 < w_n \leq 3$. La suite est donc bornée.

Remarque

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée par son premier terme.
2. Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante, alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée par son premier terme.

Proposition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle. Alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement si

$$\exists M \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0 : \quad |u_n| \leq M$$

0.2.2 Convergence d'une suite réelle

Définition

On dit qu'une suite réelle (u_n) converge vers un réel ℓ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > N$, on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Dans ce cas, ℓ est appelée limite de la suite (u_n). On dit alors que (u_n) a pour limite ℓ ou (u_n) tend vers ℓ et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

ou $u_n \to \ell$, quand $n \to +\infty$

Intuitivement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ signifie que les termes de la suite (u_n) se rapprochent de l toujours plus de ε lorsque l'indice n augmente indéfiniment.

Définition

Soit u_n une suite réelle.

1. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ (et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$) lorsque pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > N$, on a
$$u_n > A$$
2. On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ (et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$) lorsque pour tout $A < 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > N$, on a
$$u_n < A$$

Remarque

Une suite (u_n) est dite convergente si elle admet une limite finie. Dans le cas contraire, elle est divergente.

Proposition

Si une suite est convergente alors sa limite est unique.

Preuve

On procède par l'absurde. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente ayant deux limites ℓ et ℓ', $\ell \neq \ell'$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \dfrac{|\ell - \ell'|}{2}$

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe N_1 tel que $n \geq N_1$ implique $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

De même, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell'$, il existe N_2 tel que $n \geq N_2$ implique $|u_n - \ell'| < \varepsilon$.

Notons $N = \max(N_1, N_2)$ on a alors pour ce N :

$$|u_N - \ell| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |u_N - \ell'| < \varepsilon$$

Donc $|\ell - \ell'| = |\ell - u_N + u_N - \ell'| \leqslant |\ell - u_N| + |u_N - \ell'|$ d'après l'inégalité triangulaire. On en tire $|\ell - \ell'| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < |\ell - \ell'|$, ce qui est impossible, d'où la contradiction.

Exemple

1. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$
La suite $(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ est alors une suite convergente et elle converge vers 0.

2. On a

$$\lim_{n\to+\infty} 1-n^2 = -\infty$$

La suite $(1-n^2)$ est donc une suite divergente.

Proposition

Soit $q \in \mathbb{R}^*$. On considère la suite $u_n = q^n,\ n \in \mathbb{N}$. On a:

1. Si $q \leq -1$: La suite (u_n) est divergente et n'admet pas de limite, ni finie ni infinie.
2. Si $-1 < q < 1$: La suite $(u_n)_n$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
3. Si $q > 1$: La suite $(u_n)_n$ est divergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Proposition

Soit (u_n) une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0.$$

Exemple

Soit $(v_n)_{\geq 1}$ la suite définie par $v_n = \dfrac{2n-1}{n}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} |v_n - 2| = \lim_{n\to+\infty} |-\frac{1}{n}| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

En on déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$.

Proposition (Opérations sur les limites des suites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites et soient α et β dans $\mathbb{R}$,

1. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \beta$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \alpha + \beta \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \alpha \times \beta$$

2. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} (\lambda u_n) = \lambda\alpha$$

3. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ et $\alpha \neq 0$ alors on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\alpha}$.
4. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ alors on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$,
5. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n$
6. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$ alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n$
7. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$.
8. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$.

9. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = -\infty$.

Exemple

1. On a $\lim_{n\to+\infty}(\dfrac{-2}{\sqrt{n}-3} + 3n + 1) = +\infty$, puisque $\lim_{n\to+\infty}(\dfrac{-2}{\sqrt{n}-3}) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}(3n+1) = +\infty$.
2. On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{2}{3n} - 5}{1 + n + e^n} = 0$, puisque $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3n} - 5 = -5$ et $\lim_{n\to+\infty} 1 + n + e^n = +\infty$.

Parfois on tombe sur l'une des quatres "**formes indéterminées**" suivantes $+\infty - \infty,\ 0 \times \pm\infty,\ \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \dfrac{0}{0}$.

Limites usuelles utiles

— $\lim_{n\to+\infty} n\sin(\dfrac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1,$

— $\lim_{n\to+\infty} n^2\cos(1 - \dfrac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(1-\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})^2} = \dfrac{1}{2},$

— $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1 + \dfrac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1,$

— $\lim_{n\to+\infty} n(e^{\frac{1}{n}}) = 1,$

— $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln(n))^\alpha}{n} = 0,$

— $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha e^{-n} = 0.$

Proposition

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n \leq v_n$ (ou $u_n < v_n$). Alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$
2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Alors
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$
3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Théorème (Théorème des "gendarmes")

Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n \leq w_n \leq v_n$$

et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$, alors la suite (w_n) est convergente. De plus on a

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$$

Exemple

Calculer, à l'aide de Théorème des "gendarmes", la limite suivante

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{\sin(n)}{n})$$

Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse: la suite $((-1)^n)$ est bornée mais elle diverge (elle n'admet pas de limite).En revanche, on a le résultat suivant.

Théorème

1. Toute suite croissante et majorée est convergente.
2. Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Preuve

On montrera l'assertion "Toute suite convergente est bornée." En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers le réel ℓ. En appliquant la définition de limite avec $\varepsilon = 1$, on obtient qu'il existe un entier naturel N tel que pour $n \geq N$ on ait, $|u_n - \ell| \leq 1$, et donc pour $n \geq N$ on a

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \leq |\ell| + |u_n - \ell| \leq |\ell| + 1$$

Donc si on pose $M = \max(|u_0|, |u_1|, ..., |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$

on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

0.2.3 Suites adjacentes

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si (u_n) est celle qui est croissante, l'autre est décroissante et leur différente et leur différence tend vers 0.

Remarque

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes et si (u_n) est celle qui croissante (donc (v_n) est décroissante) alors

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; u_n \leq v_n$$

Preuve

On pose :

$$w_n = v_n - u_n$$

Etudions le sens de variation de (w_n) :

Pour cela, calculons la différence $w_{n+1} - w_n$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) && (1) \\ &= v_{n+1} - u_{n+1} - v_n + u_n && (2) \\ &= (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}) && (3) \end{aligned}$$

Comme (v_n) est décroissante, alors :

$$v_{n+1} - v_n \leq 0$$

Et comme (u_n) est croissante, alors :

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

Donc, $u_n - u_{n+1} \leq 0$.

En combinant ces deux inégalités, on a :

$$w_{n+1} - w_n \leq 0$$

On en conclut que la suite (w_n) est décroissante.

De plus, comme (w_n) converge vers 0 (par définition des suites adjacentes), la suite (w_n) est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pratiquement, pour montrer que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, on commence par chercher celle qui est plus grande que l'autre. On montre alors que la plus grande est décroissante et que l'autre (la plus petite) est croissante puis on montre que la différence des deux suites converge vers 0.

Exemple

Les deux suites $(1 + \dfrac{1}{n})_{n>0}$ et $(1 - \dfrac{1}{n})_{n>0}$ sont adjacentes.

Théorème

Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.

Preuve

On montre que les suites (u_n) et (v_n) convergent :

$u_n < v_n < v_0$ car la suite (v_n) est décroissante.

Donc (u_n) est croissante majorée par v_0 donc converge.

De même, $u_0 < u_n < v_n$ car (u_n) est croissante donc (v_n) est décroissante minorée et convergente.

Montrons qu'elles ont même limite : On pose $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = L'$. On a : $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ donc $L - L' = 0$ et $L = L'$.

Exemple

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*$.

L'objectif de cet exemple est de montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $v_n = u_n + \dfrac{2}{n+1}, \quad n \geq 1.$

Montrons que les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

— Remarquons tout d'abord que $u_n \leq v_n,\ n \geq 1$. Montrons alors que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et que $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

On a $\forall n \geq 1: \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}.$

Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante. Et pour tout $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{2}{n+2} - u_n - \frac{2}{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} \\ &= \frac{-n}{(n+1)^2(n+2)}. \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} - v_n \leq 0,\ n \geq 1$. Ainsi, la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

— On a $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0.$

En on déduit les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent vers la même limite. En particulier, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

0.2.4 Suites récurrentes

Définition

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite récurrente si elle est définie par son premier terme u_{n_0} et une relation de récurrence de forme

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \geq n_0$$

où f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemples remarquables de suites récurrentes

Suites arithmétiques:

Définition

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite **arithmétique** si elle est définie par son premier terme u_{n_0} et

$$\exists r \in \mathbb{R},\ \forall n \geq n_0: \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Dans ce cas, le réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Proposition

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r, alors $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r,\ \forall n \geq n_0$. En particulier, on a

— si $r > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

— si $r < 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

— si $r = 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0$$

Proposition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r,($r \neq 0$) et de premier terme u_{n_0}, la somme des termes successifs de la suite (u_n) s'exprime par la formule suivante:

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2} = (n-p+1)\frac{2u_p + (n-p)r}{2} \ n_0 \leq p \leq n$$

Suites géométriques:

Définition

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite **géométrique** si elle est définie par son premier terme u_{n_0} et

$$\exists q \in \mathbb{R},\ \forall n \geq n_0 : \quad u_{n+1} = qu_n$$

Dans ce cas, le réel q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Proposition

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique non nulle de raison $q(q \neq 0)$, alors $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0},\ \forall n \geq n_0$. Et en particulier, on a

1. Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$,
2. Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$,
3. Si $q \leq -1$, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ diverge.

Proposition(Série géométrique)

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q(q \neq 1)$, alors

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{u_0}\frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1-q}, \quad \forall n \geq n_0$$

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n,\ n \in \mathbb{N}$. Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. Le terme général de cette suite est $u_n = \frac{1}{2}^n,\ n \in \mathbb{N}$. Ainsi puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On a alors

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}})$$

Autrement dit $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} = 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}})$.

D'autre part, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

On écrit alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 2$

Convergence d'une suite récurrente

Dans toute la suite, soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite récurrente définie par son premier terme et par la relation $u_{n+1} = f(u_n),\ n \geq n_0$, où f est une fonction numérique donnée.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I avec $f(I) \subset I$. Si $u_{n_0} \in I$ et si la suite récurrente (u_n) est convergente, alors la limite ℓ de cette suite est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Le théorème précédent impose sur la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ d'être convergente. Et si les autres conditions du théorème sont satisfaites, alors la limite de $(u_n)_{n\geq n_0}$ est parmi les solutions de l'équation $f(x) = x$. En ajoutant une condition supplémentaire sur la fonction f, la convergence de $(u_n)_{n\geq n_0}$ sera alors assurée:

Théorème

Supposons que $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue et croissante et supposons que $u_{n_0} \in [a, b]$. Alors la suite récurrente (u_n) est monotone et converge vers $\ell \in [a, b]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.

Remarque

La monotonie de $(u_n)_{n\geq n_0}$ dans le théorème précédent s'obtienne en comparant seulement les deux premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$:

- Si $u_{n_0} \leq u_{n_0+1}$ alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante.
- Si $u_{n_0} \geq u_{n_0+1}$ alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante.

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par: $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = x - x^2$. La fonction f est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ et on peut vérifier que f est croissante sur cet intervalle et que $f([0, \frac{1}{2}]) \subset [0, \frac{1}{2}]$.

On en déduit que $(u_n)_n$ est monotone: on a $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_1 = 2/9$, donc $u_0 > u_1$. Ainsi $(u_n)_n$ est décroissante. De plus $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in [0, \frac{1}{2}]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$. Or $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell - \ell^2 = \ell \Leftrightarrow -\ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$.
Ainsi, on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

0.2.5 Exercices

Exercice 1

Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 2

Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 3

Les suites suivantes sont-elles croissantes? décroissantes?

$$u_n = n^2 + 5n + 4$$

$$v_n = \frac{-2n + 3}{n + 1}$$

$$w_n = \sqrt{2n + 5}$$

$$a_n = \frac{2^n}{n}$$

Exercice 4

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

Exercice 5

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. la suite

$$\frac{sin(n) + 3cos(n^2)}{\sqrt{n}}$$

2. la suite

$$\frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$$

3. la suite

$$\frac{n^3+5n}{4n^2+sin(n)+ln(n)}$$

Exercice 6

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

4. la suite

$$3^n e^{-3n}$$

5. la suite

$$\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$$

6. la suite

$$\frac{ln(n+e^n)}{n}$$

7. la suite

$$\frac{ln(1+\sqrt{n})}{1+n^2}$$

Exercice 7

1. Déterminer deux réels a et b tels que:

$$\frac{1}{k^2-1}=\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k-1}$$

2. En déduire la limite de la suite:

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$$

Exercice 8

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\leq\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

En déduire le comportement de la suite (u_n) définie par:

$$u_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

— Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
— Démontrer que, pour tout $n \geq 1$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

— Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
— En déduire que la suite (u_n) est convergente.

0.3 Fonctions numériques, limite et continuité

Le présent Chapitre contiendra :

1. Fonctions numérique: Définitions générales
2. Limite d'une fonction numérique
3. Limite en un point en l'infini
4. Limite à gauche et à droite en un point
5. Propriétés des limites
6. Continuité d'une fonction numérique
7. Prolongement par continuité
8. Théorème des valeurs intermédiaires
9. Théorème de la bijection
10. Application: Fonctions Logarithme et exponentielle
11. Exercices

0.3.1 Fonctions numérique: Définitions générales

Définition

Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : D \to \mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$. En général, D est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle D le domaine de définition de la fonction f et on le note souvent par D_f et on a

$$D_f := \{x \in \mathbb{R};\ f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Exemple

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ est $D_f = [0, 2[\cup]2, +\infty[$.

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie D de $\mathbb{R}$.

- La somme de f et g est la fonction $f+g : D \to \mathbb{R}$ définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in D$.
- Le produit de f et g est la fonction $f \times g : D \to \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in D$.
- La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda.f : D \to \mathbb{R}$ définie par $(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$ pour tout $x \in D$.

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que:
- f est majorée sur D si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D;\ f(x) \leq M$;
- f est minorée sur D si $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ f(x) \geq m$;
- f est bornée sur D si f est à la fois majorée et minorée sur D, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D,\ |f(x)| \leq M$.

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que:
- f est croissante sur D si: pour tout x et y dans D on a $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f est strictement croissante sur D si: pour tout x et y dans D on a $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- f est décroissante sur D si: pour tout x et y dans D on a $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- f est strictement décroissante sur D si: pour tout x et y dans D on a $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- f est monotone (resp. strictement monotone) sur D si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur D.

Définition

On dit que:
- f est paire si $\forall x \in D_f : -x \in D_f$ et $\forall x \in D_f\ f(-x) = f(x)$,
- f est impaire si $\forall x \in D_f : -x \in D_f$ et $\forall x \in D_f\ f(-x) = -f(x)$,

---

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T si $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x+T) = f(x)$.

Exemple

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodique. La fonction tangente est π-périodique.

0.3.2 Limite d'une fonction numérique

Limite en un point en l'infini

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[,\ x_0 \in \mathbb{R}$.

Définition

Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite en x_0 si

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad x \in D_f : \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0. On note alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ ou bien $\lim_{x_0} f(x) = l$.

Définition

On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad x \in I: \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$

On note alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad x \in I: \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A.$

On note alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Définition

— Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad x \in I: \quad x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{+\infty} = l$.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad x \in I: \quad x > B \Rightarrow f(x) > A.$

On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles de type $]-\infty, a[$.

Exemple

On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:

— $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

— $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{x^n}) = 0$

— Soient $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$ deux polynômes ($a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$). On a

$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$ et $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si} n < m \end{cases}$

— Les fonctions sin et cos n'admettent pas de limite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.

Limite à gauche et à droite en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]x_0, b[$ (resp. $]a, x_0[$). On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à droite (resp. à gauche) en x_0 si

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D_f: \quad x_0 < x < x_0 + \delta$ (resp. $x_0 - \delta < x < x_0$) $\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

On écrit alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)) = l$.

On note aussi $\lim\limits_{x_0^+} f$ pour la limite à droite et $\lim\limits_{x_0^-} f$ pour la limite à gauche.

Proposition

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f = \lim\limits_{x \to x_0^-} f = \ell$.

Exemple

Considérons la fonction $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 1, \\ x + 1 & \text{si } x < 1. \end{cases}$

On a $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x - 2) = -1$.

Comme $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, on en déduit que f n'a pas de limite en 1.

Propriétés

Proposition

Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$.

Proposition

Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors:

- $\lim\limits_{x_0} (\lambda.f) = \lambda.\ell$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x_0} (f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{x_0} (f \times g) = \ell \times \ell'$
- Si $\ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$
- Si $\lim\limits_{x_0} f = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

Voici une liste de formes indeterminées:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\infty}, \ldots$$

Proposition
— Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors: $\ell \leqslant \ell'$.
— Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.
— Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, alors g a une limite en x_0 et $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.

0.3.3 Continuité d'une fonction numérique

Définition
— Soit f une fonction définie en un voisinage de x_0. On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
— Soit f une fonction définie en un intervalle de type $]x_0 - \varepsilon, x_0]$. On dit que f est continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
— Soit f une fonction définie en un intervalle de type $[x_0, x_0 + \varepsilon[$. On dit que f est continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Définition

Soit f une fonction définie en un voisinage de x_0. On a f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Définition
— Une fonction f est dite continue sur un intervalle ouvert $I \subset D_f$ si elle est continue en tout point de I.
— Une fonction f est dite continue sur un intervalle $[a, b] \subset D_f$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a et à gauche en b.
— Une fonction f est dite continue sur un intervalle $[a, b[\subset D_f$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a.

De même, on définit la continuité d'une fonction sur un intervalle $]a, b]$, sur $]-\infty, a]$, sur $[a, +\infty[, \ldots$

Exemple
— La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
— Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$.
— La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition

Soient $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors
— $\lambda . f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),
— $f + g$ est continue en x_0.
— $f \times g$ est continue en x_0.
— Si $f(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en x_0.

Exemple

Les polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

Toute fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue sur son domaine de définition.

La composition conserve la continuité (mais il faut faire attention en quels points les hypothèse s'appliquent)

Proposition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

0.3.4 Prolongement par continuité

Définition

Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

— On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\ell = \lim_{x_0} f$.

— On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases}$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$. Etudions le prolongement par continuité de f en 1. On a

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \to 1} x + 2 = 3$$

Donc f est prolongeable par continuité en 1. Le prolongement par continuité de f en 1 est donc $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

0.3.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Si $f(a).f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple

Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle. En effet, un tel polynôme s'écrit $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ avec n un entier impair. On peut supposer que le coefficient a_n est strictement positif. Alors on a $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$. En particulier, il existe deux réel a et b tels que $P(a) < 0$ et $P(b) > 0$ et on conclut grâce au corollaire précédent qu'il existe au moins $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$.

Voici une formulation théorique du théorème des valeurs intermédiaires

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Attention! Il serait faux de croire que l'image par une fonction f de l'intervalle $[a, b]$ soit l'intervalle $[f(a), f(b)]$. Cependant, on a le théorème suivant

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe deux réels m et M tels que $f([a, b]) = [m, M]$. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Comme on sait déjà par le théorème des valeurs intermédiaires que $f([a, b])$ est un intervalle, le théorème précédent signifie que si f est continue sur $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$, et elle atteint ses bornes: m est le minimum de la fonction sur l'intervalle $[a, b]$ alors que M est bon maximum sur $[a, b]$.

0.3.6 Théorème de la bijection

Définition

Soit $f : E \to F$ une fonction, où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.

— f est injective $\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;

— f est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E,\ y = f(x)$;

— f est bijective si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F,\ \exists! x \in E :\ y = f(x)$.

Proposition

Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. La fonction g est la bijection réciproque de f et se note f^{-1}.

◇ On rappelle que l'identité, $\mathrm{Id}_E : E \to E$ est simplement définie par $x \mapsto x$.

◇ $g \circ f$ =Id_E se reformule ainsi: $\forall x \in E, \quad g(f(x)) = x$.

◇ Alors que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ s'écrit: $\forall y \in F \quad f(g(y)) = y$.

Le théorème suivant est un outil très utile dans la pratique pour montrer qu'une fonction est bijective.

Théorème (Théorème de la bijection)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors

1. f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle $J = f(I)$,
2. La fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.

Exemple

Considérons la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La fonction f est continue et est strictement croissante sur $I = [0, +\infty[$, donc f établit une bijection de I dans $J = f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$. Déterminons sa fonction réciproque: Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$, on a

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$$

Donc $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Généralisons en partie l'exemple précédent;

Exemple

Soit $n \geq 1$. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^n$. On a f est continue et strictement croissante. Donc f admet sur $I = [0, +\infty[$ une fonction réciproqie f^{-1} définie sur $J = f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$.

f^{-1} est notée: $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ ou aussi $x \mapsto \sqrt[n]{x}$; c'est la fonction racine $n-$ième. Elle est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

0.3.7 Application: Fonctions Logarithme et exponentielle

Proposition

Il existe une unique fonction, notée ln :$]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x > 0 \qquad \text{et} \qquad \ln(1) = 0$$

De plus, cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$) :

1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,
3. $\ln(a^n) = n\ln(a)$, (pour tout $n \in \mathbb{N}$).
4. ln est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Définition

La bijection réciproque de ln $:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle, notée exp: $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$.

Proposition

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes:

1. $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp(x)) =$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
2. $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
3. $\exp(nx) = (\exp(x))^n$
4. exp: $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante vérifiant $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$
5. La fonction exponentielle est dérivable et $\exp'(x) = \exp(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque

La fonction exponentielle est l'unique fonction qui vérifie $\exp'(x) = \exp(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$) et $\exp(1) = e$, où $e \simeq 2.718...$ est le nombre qui vérifie $\ln(e) = 1$.

Par définition, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $a^b = \exp(b\ln(a))$

Remarque

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2}\ln(a))$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\ln(a))$ (la racine n-ième de a)

On note aussi $\exp(x)$ par e^x ce qui se justifie par le calcul: $e^x = \exp(x\ln(e)) = \exp(x)$.

Les fonctions $x \mapsto a^x$ s'appellent aussi des fonctions exponentielles et se ramènent systématiquement à la fonction exponentielle classique par l'égalité $a^x = \exp(x\ln(a))$. Il ne faut surtout pas les confondre avec les fonctions puissances $x \mapsto x^a$. On a les propriété suivantes;

Proposition

Soient $x, y > 0$ et $a,\ b \in \mathbb{R}$.

1. $x^{a+b} = x^a x^b$
2. $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$

3. $(xy)^a = x^a y^a$
4. $(x^a)^b = x^{ab}$
5. $\ln(x^a) = a\ln(x)$

Comparons les fonctions $\ln(x)$, $\exp(x)$ avec x :

Proposition

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$$

0.3.8 Exercices

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$$
$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}$$

Exercice 2

Soit f la fonction definit par:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$$

— Determiner le domaine de definition de f.
— Etudier la limite de f en $x_0 = -1$.

Exercice 3

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x})$$
$$g(x) = \frac{1}{x}\ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2})$$
$$h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

Exercice 4

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que f est constante et égale à 1 ou -1.

0.4 Dérivée d'une fonction numérique- fonctions usuelles

Le présent Chapitre contiendra :

1. Dérivabilité d'une fonction numérique
2. Opérations sur les fonctions dérivables
3. Quelques applications de la dérivabilité
4. Théorème de Rolle-Théorème des accroissements finis
5. Fonctions circulaires inverses
6. Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses
7. Tangente hyperbolique et son inverse
8. Exercices

0.4.1 Dérivabilité d'une fonction numérique

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Definition

f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Définition

f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f, elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Exemple

La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0}{x - x_0} = x + x_0 \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 2x_0$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$. Autrement dit: $f'(x) = 2x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De même, on peut montrer que la fonction $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = 3x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Définition

— Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[x_0, x_0 + \varepsilon[$. On dit que f est dérivable en x_0 à droite si

$$\lim_{x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas le nombre ℓ est appelé dérivé de f à droite en x_0 et est noté par $f'_d(x_0)$.

— Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]x_0 - \varepsilon, x_0]$. On dit que f est dérivable en x_0 à gauche si

$$\lim_{x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas le nombre ℓ est appelé dérivé de f à gauche en x_0 et est noté par $f'_g(x_0)$.

Exemple

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 0$. En effet, on a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Proposition

f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

0.4.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

— $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,

— $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé,

— $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

— $(\frac{1}{f})'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$ (si $f(x) \neq 0$),

— $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ (si $g(x) \neq 0$)

Exemple

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x + \exp(x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, on a $f'(x) = 1 + \exp(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1/2\}$ par $g(x) = \frac{x^2+3x-1}{2x-1}$. La fonction g est dérivable sur son domaine de définition et, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1/2\}$, on a

$$g'(x) = \frac{(2x + 3)(2x - 1) - 2(x^2 + 3x - 1)}{(2x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{(2x - 1)^2}$$

Proposition

Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x de dérivée:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$$

Corollaire

Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}))}$$

Le tableau suivant résume les principales formules à connaître où x est une variable réelle;

Fonction	Dérivée
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Le tableau suivant résume les principales formules à connaître de la composée des fonctions dérivable où u est une fonction dérivable;

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1}$ $n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Remarque

Si vous voulez dériver une fonction avec un exposant dépendant de x il faut absolument repasser à la forme exponentielle. Par exemple si $f(x) = 2^x$ alors on réécrit d'abord $f(x) = e^{x \ln 2}$ pour pouvoir calculer $f'(x) = \ln 2.e^{x \ln 2} = \ln 2.2^x$.

0.4.3 Quelques applications de la dérivabilité

Etude de sens de variation d'une fonction

Proposition (Dérivée et monotonie d'une fonction)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geq 0 (\text{resp.} f'(x) > 0) \Rightarrow f$ est croissante (resp. f est strictement croissante).
2. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \leq 0 (\text{resp.} f'(x) < 0) \Rightarrow f$ est décroissante (resp. f est strictement décroissante).
3. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante.

Exemple

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1-x)e^x$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = (-1+1-x)e^x = -xe^x$$

Donc $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$. En déduit que g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$.

Etude d'extremums d'une fonction

Définition

On dit que f admet un maximum (resp. un minimum) en un point $x_0 \in D_f$ si

$$\forall x \in D_f,\ f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

On dit que f admet un maximum (resp. un minimum) local en un point x_0 s'il existe un voisinage $I \subset D_f$ de x_0 tel que

$$\forall x \in I,\ f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

On dit que f admet un extremum (resp. un extremum local) si f admet un maximum ou un minimum (resp. un maximum local ou un minimum local).

Proposition (Dérivée et extremums locaux d'une fonction)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit x_0 un point dans l'interieur de I tel que $f'(x_0) = 0$.

⋄ S'il existe $h > 0$ tel que $]x_0 - h, x_0 + h[\subset I$ avec $f' > 0$ sur $]x_0 - h, x_0[$ et $f' < 0$ sur $]x_0, x_0 + h[$, alors f admet un maximum local en x_0.

⋄ S'il existe $h > 0$ tel que $]x_0 - h, x_0 + h[\subset I$ avec $f' < 0$ sur $]x_0 - h, x_0[$ et $f' > 0$ sur $]x_0, x_0 + h[$, alors f admet un minimum local en x_0.

Exemple

Considérons la fonction g définie dans l'exemple précédent $g(x) = (1-x)e^x$. D'après le tableau de variation de g, elle admet un maximum global en $x_0 = 0$ puisque

$$\forall x \in \mathbb{R};\ g(x) \leq g(0)$$

La fonction g n'admet pas de minimum (ni global ni local)

0.4.4 Théorème de Rolle-Théorème des accroissements finis

Théorème(Théorème de Rolle)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

◇ f est continue sur $[a, b]$,

◇ f est dérivable sur $]a, b[$,

◇ $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exemple

Soit $f(x) = x^3 - x$. On a $f(-1) = f(1)$. De plus, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier, f est continue sur $[-1, 1]$ et est dérivable sur $]-1, 1[$. D'après le Théorème de Rolle, il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème (Théorème des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Corollaire (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$ alors

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|,\ \forall x, y \in I$$

Exemple

En utilisant le théorème des accroissements finis, on va montrer que

$$x < e^x - 1 < xe^x,\ \forall x > 0$$

Fixons donc x tel que $x > 0$ et considérons la fonction $f(t) = e^t$ sur l'intervalle $[0, x]$. f est continue sur $[0, x]$ et est dérivable sur $]0, x[$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$f'x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$$

C-à-d: $\exists c \in]0, x[$: $e^x - 1 = xe^c$, or, $0 < c < x$ implique $1 < e^c < e^x$, donc puisque $x > 0$, on a $x < xe^c < xe^x$. Ainsi $x < e^x - 1 < xe^x$.

Proposition (Règle de l'Hospital)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que
- $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\},\ g'(x) \neq 0$.

Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell\ (\ell \in \mathbb{R})$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Exemple

Calculer la limite en 1 de $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. On vérifie que:
- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1),\ f(1) = 0,\ f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$,
- $g(x) = \ln(x),\ g(1) = 0,\ g'(x) = \frac{1}{x}$,
- Prenons $I =]0, 1]$, $x_0 = 1$, alors g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \to 3,\ qd\, x \to 1$$

Donc, $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to 3,\ qdx \to 1$.

0.4.5 Fonctions circulaires inverses

Arccosinus

Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \cos x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arccosinus:**

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

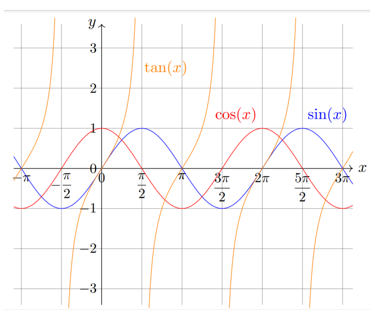


FIG. 1 – fonctions sin cos et leurs inverse

On a donc, par définition de la bijection réciproque:

$$\cos(\arccos(x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arccos(\cos(x) = x \quad x \in [0, \pi]$$

Autrement dit:

$$\text{Si} \quad x \in [0, \pi] \cos(x) = y \Leftrightarrow x = \arccos y$$

Notons finalement que la fonction arccosinus est dérivable sur l'intervalle $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Démonstration:

On a l'égalité $\cos(\arccos x) = x$ que l'on dérive :

$$\begin{aligned} \cos(\arccos x) = x \quad & \Rightarrow \quad -\arccos'(x) \times \sin(\arccos x) = 1 \\ & \Rightarrow \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} \\ & \Rightarrow \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \\ & \Rightarrow \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Arcsinus

La restriction

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arcsinus** définie par

$$\sin(\arcsin(x)) = x, \ \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin(\sin(x)) = x, \ \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

On a alors: $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \sin(x) = y \Leftrightarrow x = \arcsin(y)$.

La fonction arcsinus est dérivable sur l'intervalle $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Arctangente

La restriction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arctangente:

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Ainsi

$$\tan(\arctan(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(\tan(x)) = x, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Et si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors $\tan(x) = y \Leftrightarrow x = \arctan y$.

0.4.6 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le cosinus hyperbolique est :

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

La restriction $ch : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque est $argch : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$

Sinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le sinus hyperbolique est:

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant $\lim_{x\to-\infty} shx = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} shx = +\infty$, c'est donc une bijection. Sa bijection réciproque est $argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition

— $ch^2x - sh^2x = 1$.
— $ch'x = shx,\ sh'x = chx$.
— argsh est dérivable et $argsh'x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
— $argshx = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

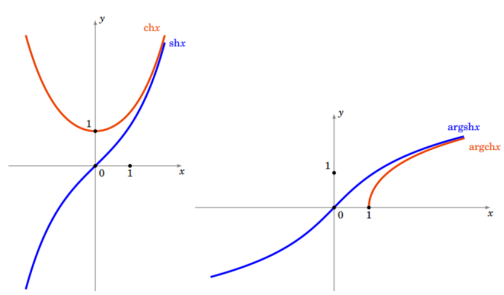


FIG. 2 – fonctions sh, ch, argch et argsh

0.4.7 Tangente hyperbolique et son inverse

Par définition la **tangente hyperbolique** est :

$$thx = \frac{shx}{chx}$$

La fonction $th : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est une bijection, on note $argth :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

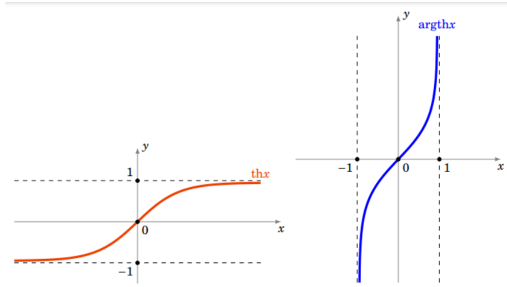


FIG. 3 – fonctions th et argth

Trigonométrie hyperbolique

$$ch^2a - sh^2a = 1$$

$$ch(a+b) = cha.chb + sha.shb$$

$$ch(2a) = ch^2a + sh^2a = 2ch^2a - 1 = 1 + 2sh^2a$$

$$sh(a+b) = sha.chb + shb.cha$$

$$sh(2a) = 2sha.cha$$

$$th(a+b) = \frac{tha + thb}{1 + tha.thb}$$

Dérivées de fonctions hyperboliques et leurs inverses

$$ch'x = shx$$

$$sh'x = chx$$

$$th'x = 1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$$

$$argch'x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ |x| > 1$$

$$argsh'x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$argth'x = \frac{1}{1-x^2},\ |x| < 1$$

$$argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),\ |x| \leq 1$$

$$arhsh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ (x \in \mathbb{R})$$

$$argthx = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}),\ (-1 < x < 1)$$

formules trigonometriques

Rapel:

- les fonctions sin et cos sont definies sur $\mathbb{R}$ et a valeurs dans $[-1, 1]$, 2π-periodiques.
- La fonction tan est definie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ a valeurs dans $\mathbb{R}$, π-periodiques.
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\tan(x) = frac\sin(x)\cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
- $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$
- $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, avec $t = \tan(\frac{x}{2})$
- $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, avec $t = \tan(\frac{x}{2})$
- $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$, avec $t = \tan(\frac{x}{2})$

0.4.8 Exercices

Exercice 1

Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$sh(x + y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y)$$

$$ch(x + y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y).$$

Exercice 2

Déterminer la valeur de $\arcsin(-1/2), \arccos(-\sqrt{2}/2), \arctan(\sqrt{3})$.

Exercice 3

Calculer

$$\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\cos\frac{-2\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\sin\frac{17\pi}{5}\right).$$

Exercice 4

Soit $a \neq 0$ un réel.

1. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(ax)$.
2. En déduire une primitive de $\frac{1}{4+x^2}$.

Exercice 5

Simplifier les expressions suivantes :

$$\tan(\arcsin x), \quad \sin(\arccos x), \quad \cos(\arctan x).$$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. En posant $x = \sin t$, simplifier l'écriture de f.

Exercice 7

Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

0.5 Complement sur les suites et les fonctions numériques

Le présent Chapitre contiendra : quelques notions qui completent les suites et les fonctions numeriques:

1. Relations de comparaison des suites
2. Derivees succesives
3. Relations de comparaison des fonctions
4. Developements limites
5. Calcul integral
6. Exercices

0.5.1 Complément sur les suites et les fonctions numériques

Suites et critère de Chauchy

Le très grand intéret du critère de Cauchy provient du fait qu'il caractérise dans $\mathbb{R}$ les suites convergentes, sans que la limite apparaisse. D'où son utilisation dans l'étude des séries par exemple, ou encore pour montrer qu'une suite n'est pas convergente.

Le concept de suite de Cauchy correspond à la propriété que la distance entre deux termes de la suite devient arbitrairement petite (et non de plus en plus petite) quand ces termes sont de rang assez grand.

Définition (suite de chauchy)

Soit (u_n) une suite réelle; on dit que (u_n) est une suite de Cauchy ou vérifie le critère de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} p \geq N \\ n \geq N \end{cases} \Rightarrow |u_p - u_n| < \epsilon$$

Théorème (Critère de Cauchy)

Une suite de réels est convergente dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, c'est une suite de Cauchy.

Le critère de Cauchy est utilisé pour montrer qu'une suite (u_n) est convergente (resp divergente) dans les cas où l'on peut obtenir facilement une majoration (resp minoration) de $|u_p - u_n|$ pour n et p assez grands. C'est le cas en particulier pour certaines séries.

Comparaison des suites

Définition

Soient (u_n), (v_n) et (ϵ_n) trois suites telles qu'à partir d'un certain rang $u_n = v_n \varepsilon_n$. On dit que :

— u_n est dominée par v_n lorsque la suite (ϵ_n) est bornée. Notation : $u_n = O(v_n)$.

— u_n est négligeable devant v_n lorsque la suite (ϵ_n) tend vers 0 ($\lim \epsilon_n = 0$). Notation : $u_n = o(v_n)$.

— u_n est équivalente à v_n lorsque la suite (ϵ_n) tend vers 1 ($\lim \epsilon_n = 1$). Notation : $u_n \sim v_n$.

Théorème (Caractérisations)

Lorsque la suite v ne s'annule pas à partir d'un certain rang :

— $u_n = O(v_n)$ si et seulement si la suite $\frac{u}{v}$ est bornée.

— $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

— $u_n \sim v_n$ si et seulement si $lim \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemple

On a:

— $n = o(n^2)$ (on prend $\epsilon = \frac{1}{n} \to 0$).

— $ln(n) = o(n)$ car $\frac{ln(n)}{n} \to 0$.

— $n \sin(n) = O(n)$ car $\frac{n \sin(n)}{n} = sin(n)$ bornée.

— $\sin(n) = O(1)$ car $\frac{\sin(n)}{1} = sin(n)$ bornée.

— $\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ car $\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2+1} \to 1$.

— $(1 + \frac{1}{n})^n \sim e$ car $\dfrac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} \to 1$.

Remarque

— $u_n = O(1)$ signifie que la suite (u_n) est bornée.

— $u_n = o(1)$ signifie que $u_n \to 0$.

— Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.

— Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = O(v_n)$.

— Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$ (transitivité).

— Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$ (transitivité).
— $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$.
— si $l \in \mathbb{R}$ et si $u_n \sim l$ alors $u_n \to l$ (réciproque vraie lorsque $l \neq 0$).
— Si $u_n = o(v_n)$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda u_n + v_n \sim v_n$.

Théorème (croissances comparées)

Soient $\alpha, \beta > 0$:
— si $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha = o(n^\beta)$ et $\frac{1}{n^\beta} = o(\frac{1}{n^\alpha})$.
— $ln(n)^\alpha = o(n^\beta)$.
— $n^\alpha = o(e^{n\beta})$ et $n^\alpha = o(e^{n^\beta})$.
— $\forall a \in \mathbb{R}, a^n = o(n!)$ et $n^\alpha = o(n!)$.
— $n! = o(n^n)$.

Théorème (les équivalents usuels)
— Soit (u_n) une suite de limite nulle ($\lim u_n = 0$). On a:
  — Si $f :] - a; a[\to \mathbb{R}$ (avec $a > 0$) est dérivable en 0, et si $f'(0) \neq 0$, alors on a $f(u_n) - f(0) \sim f'(0)u_n$.
  — $\sin(u_n) \sim u_n$,
  — $e^{u_n} - 1 \sim u_n$,
  — $ln(1 + u_n) \sim u_n$,
  — $\tan(u_n) \sim u_n$,
  — $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.
— Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ une fonction polynomiale avec $a_p \neq 0$, alors $P(n) \sim a_p n^p$ (équivalence avec le terme de plus haut degré).
— Soit $Q(x) = \frac{P(x)}{R(x)}$ une fraction rationnelle avec $a_p x^p$ le terme de plus haut degré de P ($a_p \neq 0$) et $b_r x^r$ celui de R ($b_r \neq 0$), alors $Q(n) \sim \frac{a_p}{b_r} n^{p-r}$ (équivalence avec le rapport des termes de plus haut degré).

Théorème

Soient u et v deux suites,
— Si $u_n \sim v_n$ alors les deux suites ont le meme singe à partir d'un certain rang.
— Si $u_n \sim v_n$ et si $\lim v_n = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, alors $\lim u_n = l$.
— Si $u_n \sim v_n$ et si $a_n \sim b_n$, alors $u_n a_n \sim v_n b_n$ (compatibilité avec la multiplication).
— Si $u_n \sim v_n$ et si v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$ (compatibilité avec le passage à l'inverse).
— Si $u_n \sim v_n$ et si $v_n > 0$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour tout réel α (compatibilité avec les puissances constantes).

Avertissement:
— Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ ce ne veut pas dire que $u_n = w_n$!!!
— Il n'y a pas compatibilité avec l'addition en général, par exemple : $n + \frac{1}{n} \sim n$ et $-n \sim 1 - n$, mais $\frac{1}{n}$ n'est pas équivalent à 1.
— Ces propriétés sont utiles pour les calculs de limites qui ne peuvent pas être faits directement : on essaie de se ramener à un équivalent plus simple (s'il y en a …) dont on sait calculer la limite.

Note: L'écriture $u_n = v_n + o(w_n)$ signifie que $u_n - v_n = o(w_n)$.

Exemples

— $\frac{1}{n} = o(1)$
— $1 = o(n)$
— $(\frac{1}{2})^n = o(n)$
— $n^2 = o(n^3)$
— $(ln(n))^2 = o(n)$
— $3^n = o(n!)$
— $e^n = o(3^n)$
— $n^3 = o(e^n)$
— $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$
— $n^2 + 2ln(n) + 4 + \frac{1}{n} \sim n^2$
— $\frac{2}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^4} \sim \frac{2}{n}$
— $2n^2 - n + n^3 \sim n^3$
— $ln(n) + (ln(n))^2 \sim (ln(n))^2$

Théorème (formule de stirling)

$n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$

Dérivées successives

Définition

Soit une fonction f dérivable sur $D \subset \mathbb{R}$. Sa fonction dérivée $f^{'}$ est appelé dérivée première (ou d'ordre 1) de la fonction f sur D. $f^{"}$, est appelé dérivée seconde (ou d'ordre 2) de la fonction f. Par itération, pour tout naturel $n > 2$, on définit la fonction dérivée n-ième (ou d'ordre n), notée $f^{(n)}$ comme étant la fonction dérivée de la fonction dérivée d'ordre $(n-1)$, soit : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})^{'}$.

Exemple

Déterminer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 des fonctions suivantes :

— $f(x) = x^4 - 2x^2 + x - 1$
— $g(x) = cos(2x) + sin(2x)$

Exercice

Soit la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x+1)$.

1. Calculer les dérivées d'ordre 1, 2, 3 et 4.
2. En déduire et Démontrer par récurrence l'expression de la dérivée d'ordre n.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition

On note :
- $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.
- $\mathcal{C}^1(I)$ est l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur I, i.e. l'ensemble des fonctions qui sont dérivables sur I dont la fonction dérivée $f^{'}$ est continue sur I.
- $\mathcal{C}^n(I)$ est l'ensemble des fonctions n fois continûment dérivables sur I, i.e. l'ensemble des fonctions n-fois dérivables sur I dont la fonction dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I ;
- $\mathcal{C}^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I.

Dérivée n-ième usuelles

Proposition

Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f et g deux fonctions telles ques $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^n$ et $g(x) = (x-a)^n$. Alors f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1) \times ... \times (n-k+1)x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 \quad \text{si } k > l \end{cases}$$

$$g^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1) \times ... \times (n-k+1)(x-a)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 \quad \text{si } k > l \end{cases}$$

Proposition

Soient $a \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions telles ques $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, g(x) = \dfrac{1}{x-a}$. Alors f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ respectivement et on a:
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$

Proposition

Les fonctions exp, ln, sin, cos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition et on pour tout $n \in \mathbb{N}$:
- $\exp^{(n)}(x) = \exp(x)$
- $\ln^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
- $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$
- $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$

Proposition

Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, (\lambda f + g)$ et fg sont encore des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et de plus :
- $(\alpha f + g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + g^{(n)}$

— $(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (avec $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$)

Proposition

Soient I et J deux intervalles et soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et si g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Remarques

— $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \mapsto x^{\alpha} = \exp(\alpha \ln(x))$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0, +\infty[$.

— $\forall a > 0, x \mapsto a^x = \exp(x \ln(a))$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

— Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et si g ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I.

Comparaison des fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. Nous supposerons ici que f et g sont deux fonctions qui ne s'annulent pas sur un voisinage de a privé de a. Il s'agit ici de comparer les 2 fonctions au voisinage de a. Pour cela, formons leur rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ et regardons ce qui se passe lorsque $x \to a$.

Définition

1. Si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a, on dira que f est dominée par g au voisinage de a et on écrit:

$$f = \underset{x \to a}{O}(g) \text{ ou } f = \underset{a}{O}(g) \text{ ou encore } f = O(g) \text{ au voisinage de } a$$

1. Si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers a ($\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$), on dira que f est négligeable devant g au voisinage de a et on écrit:

$$f = \underset{x \to a}{o}(g) \text{ ou } f = \underset{a}{o}(g) \text{ ou encore } f = o(g) \text{ au voisinage de } a$$

1. Si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 lorsque x tend vers a ($\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$), on dira que f et g sont équivalentes au voisinage de a et on écrit:

$$f \underset{x \to a}{\sim} g \text{ ou } f \underset{a}{\sim} g \text{ ou encore } f \sim g \text{ au voisinage de } a$$

Remarque

— Notation : $f(x) = O(g(x))$, $f(x) = o(g(x))$, $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a.

— Par abus de langage, on notera $O(g)$ (respectivement $o(g)$) toute fonction étant un grand O (repectivement petit o) de g au voisinage de a.

— Lorsque $f(x) = O(g(x))$, on pourra dans un calcul remplacer $f(x)$ par $O(g(x))$ mais **ATTENTION! IL EST FAUX de remplacer** $O(g(x))$ **par** $f(x)$.

— Lorsque $f(x) = o(g(x))$, on pourra dans un calcul remplacer $f(x)$ par $o(g(x))$ mais **ATTENTION! IL EST FAUX de remplacer** $o(g(x))$ **par** $f(x)$.

— **Ne JAMAIS écrire que** $f(x) \underset{a}{\sim} 0$ **puisque la fonction nulle ne vérifie pas les conditions d'application de la définition!!**

- Il faut toujours specifier le voisinage du point dont on compare deux fonctions!
- $f = O(1)$ au voisinage de a signifie que f est bornée au voisinage de a.
- $f = o(1)$ au voisinage de a signifie que f tend vers 0 lorsque $x \to a$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$).
- Il n'y a aucune relation entre $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) = 0$.

Exemples

1. Soit $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x$. Alors:
   - $f(x) = O(x)$ au voisinage de 0.
   - $f(x) = O(x^5)$ au voisinge de $+\infty$.
   - $f(x) = o(x)$ au voisinge de 0.
   - $f(x) = o(x^6)$ au voisinage de $+\infty$.
2. Si P est une fonction polynomiale non nulle :
   - P est équivalente à son monôme de plus haut degré au voisinage de $+\infty$
   - P est équivalente à son monôme de plus bas degré au voisinage de 0
3. Au voisinage de $+\infty$: $ch(x) \sim \dfrac{e^x}{2}$ et $sh(x) \sim \dfrac{e^x}{2}$

Remarque

Une fonction donnée admet une infinité d'équivalents au voisinage d'un point a. Seulement l'intérêt d'un équivalent est de remplacer une fonction par une autre fonction plus simple. On choisira donc toujours l'équivalent le plus simple.

Par exemple, au voisinage de $+\infty$ on a:
- $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 \sim x^3$
- $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 \sim x^3 - 5x + 8$
- $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 \sim x^3 + 4x^2 - 6$
- $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 \sim x^3 - 2x^2$

Seul le premier équivalent a un intérêt!!

Proprietes

- Soit $p, q \in \mathbb{N}$ alors $x^p = o(x^q)$ au voisinage de $0 \Leftrightarrow p < p$.
- Si au voisinage d'un point a on a $f(x) = o(g(x))$ alors $f(x) = O(g(x))$.
- Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$ trois reels strictment positifs:
  - Comparaison ln et puissances:
    - au voisinage de $+\infty$: $(\ln(x))^\alpha = o(x^\beta)$.
    - au voisinage de 0+: $|\ln(x)|^\alpha = o(\frac{1}{x^\beta})$.
  - Comparaison puissance et exponentielle :
    - au voisinage de $+\infty$: $x^\beta = o(e^{\gamma x})$
    - au voisinage de $+\infty$: $x^\beta = o(a^x)$ si $a > 1$.
    - au voisinage de $-\infty$: $e^{\gamma x} = o(\frac{1}{x^\beta})$ si $\beta \in \mathbb{N}$.

Proposition

- Opérations sur les relations de comparaisons
  1. $f = o(g), g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$ cad (transitivité) la même chose avec O
  2. $f_1 = o(g), f_2 = o(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(g)$ cad $o(g) + o(g) = o(g)$ la même chose avec O
  3. $f_1 = o(g_1), f_2 = o(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$ cad $o(g_1)o(g_2) = o(g_1 g_2)$ la même chose avec O
  4. $f = o(g) \Rightarrow hf = o(hg)$ cad $ho(g) = o(hg)$ la même chose avec O
  5. $f = o(\lambda g)(\lambda \in \mathbb{R}^*) \Rightarrow f = o(g)$ cad $o(\lambda g) = o(g)$ la même chose avec O

- Caractérisation de l'équivalence de deux fonctions

  On a au voisinage d'un point a :

  $$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$$

  Cela sera particulieremet utile lorsqu'on souhaitera remplacer une expression par un équivalent dans une égalité
- Lien entre les relations de comparaison

On se place au voisinage d'un point a. - Si $f(x) \sim g(x)$ alors $f(x) = O(g(x))$. - Si $f(x) \sim g(x)$ et $f(x) = o(h(x))$ alors $g(x) = o(h(x))$. - Si $f(x) \sim g(x)$ et $h(x) = o(f(x))$ alors $h(x) = o(g(x))$
- Calculs avec des équivalents
  1. si $f(x) \underset{x \to a}{\to} l$ et $l \neq 0$ alors $f \underset{a}{\sim} l$
  2. si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$ et $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
  3. si $f \underset{a}{\sim} g$ et f et g sont positive alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème (Les équivalents de références)

Les limites usuelles en 0, nous donnent les équivalents suivants au voisinage de 0 :
- $\sin x \sim x$
- $\arcsin x \sim x$
- $shx \sim x$
- $\tan x \sim x$
- $\arctan x \sim x$
- $thx \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
- $1 - chx \sim \frac{x^2}{2}$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $e^x - 1 \sim x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Plus généralement, au voisinage de a lorsque $f(x) \underset{x \to a}{\to} 0$, on a :
- $\sin f(x) \sim f(x)$
- $\arcsin f(x) \sim f(x)$
- $shf(x) \sim f(x)$
- $\tan f(x) \sim f(x)$
- $\arctan f(x) \sim f(x)$
- $thx \sim f(x)$
- $1 - \cos f(x) \sim \frac{f(x)^2}{2}$
- $1 - chf(x) \sim \frac{f(x)^2}{2}$
- $\ln(1 + f(x)) \sim f(x)$
- $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$
- $(1 + f(x))^\alpha - 1 \sim \alpha f(x)$

Théorème (calcul avec les equivalence)

1. Si $f(x) \underset{x \to a}{\to} l$ et $l \neq 0$ alors $f \underset{a}{\sim} l$.
2. Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$ et $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et f et g sont positives alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Proposition (Un équivalent donne localement le signe de la fonction)

Soient deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ et un point $a \in \bar{I}$. Si au voisinage du point a, $f \sim g$ alors, il existe un voisinage V de a sur lequel f et g ont même signe.

Proposition (Un équivalent donne la limite)

Soient deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ et un point $a \in \bar{I}$.

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

0.5.2 Dévelopements limités

Une méthode usuelle pour étudier des fonctions et de les approcher par des fonctions plus simples. Les fonctions polynômes forment une classe de fonctions élémentaires qui se manipulent facilement vis à vis des opérations usuelles (dérivation, somme, produit, intégration, dérivation,...). Ainsi, il est naturel d'essayer d'approcher les fonctions par des polynômes.

Les développements limités correspondent à une mise en oeuvre locale de ce programme. Chercher un développement limité d'une fonction f au voisinage d'un point a, c'est chercher un polynôme qui, au voisinage de a, se comporte comme f. Voici un site qui donne le dévelopement limité d'une fonction. Voici un site qui donne la courbe d'une fonction et la courbe du polynôme de son développement limité.

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité d'ordre n en a (ou un $DL_n(a)$) lorsqu'il existe un polynôme T de degré au plus n tel que :

$$f(x) = T(x-a) + \underset{a}{o}((x-a)^n)$$

Si c'est le cas, alors le polynôme $T(x-a)$ est appelé partie régulière et la partie $\underset{a}{o}((x-a)^n)$ est appelé reste du $DL_n(a)$.

Exemple

On a $\sin x \underset{0}{\sim} x$ donc par définition $\sin x = x + \underset{0}{o}(x)$. C'est un $DL_1(0)$ de $\sin x$.

Formule de Taylor

Théorème(Théorème de Taylor-Young)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, $(n \in \mathbb{N}$, et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to a$.

On peut aussi écrire:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{a}{o}((x-a)^n)$$

Exercice

Soit $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définit par $f(x) = \ln(1+x)$.

On a f est infiniment dérivable. Appliquons la formule de Taylor-Young à la fonction f au voisinage de 0, soit T_n la fonction polynômiale associée à chaque n, pour cela on calcule d'abord $f^{(k)}(0)$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$.

- $f(0) = 0$
- $f'(0) = 1$
- $f''(0) = -1$
- $f^{(3)}(0) = 2, \ldots$

Montrer par récurrence que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n}$ et alors $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

Voici donc les premiers polynômes de Taylor:

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = x - \frac{x^2}{2}, \quad T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Les formules de Taylor nous disent que les restes sont de plus en plus petits lorsque n croît. Sur le dessins les graphes des polynômes T_0, T_1, T_2, T_3 s'approchent de plus en plus du graphe de f. Attention ceci n'est vrai qu'autour de 0.

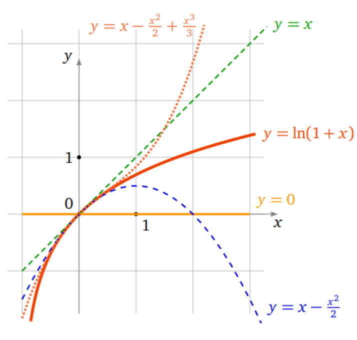


FIG. 1 – Approximation

Cas particulier : Formule de Taylor-Young au voisinage de 0. On se ramène souvent au cas particulier où $a = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow$.

On écrit souvent cette formule avec la notation dite "petit o"

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Développements limités au voisinage d'un point

Définition et existence

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

Definition

Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un **développement limité (DL)** au point a et à l'ordre n, s'il existe des réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ de sorte que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

— L'égalité précédente s'appelle un DL de f au voisinage de a à l'ordre n.
— Le terme $c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n$ est appelé **la partie polynomiale du DL**.
— Le terme $(x-a)^n\varepsilon(x)$ est appelé **le reste du DL.**

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir immédiatement des développements limités en posant $c_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$.

Remarque

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage d'un point 0, un DL en 0 à l'ordre n est l'expression:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

2. Si f admet un DL en un point a à l'ordre n alors elle en possède un pour tout $k \leq n$. En effet

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &\quad + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Unicité

Proposition

Si f admet un DL alors ce DL est unique.

Preuve: En exercice (supposer l'existence de deux DL, puis utiliser la propriété d'un polynôme nul.)

Corollaire

Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Remarque

Si f admet un DL en un point a à l'ordre $n \geq 1$, alors f est dérivable en a et on a $c_0 = f(a)$ et $c_1 = f'(a)$. Par conséquent $y = c_0 + c_1(x-a)$ est l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a.

DL des fonctions usuelles à l'origine

Les DL suivants en 0 proviennent de la formule de Taylor-Young.

$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$

$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$

$shx = 1 + \frac{x}{1!}\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$

$shx = 1 + \frac{x}{1!}\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^n\varepsilon(x)$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$

Généralement, pour $\alpha \neq -1$, on a:

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a:

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + ... + (-1)^n\frac{1.3.5....(2n-3)}{2^n n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$

DL des fonctions en un point quelconque

La fonction f admet un DL au voisinage d'un point a si et seulement si la fonction $x \mapsto f(x+a)$ admet un DL au voisinage de 0. Souvent on ramène donc le problème en 0 en faisant le changement de variables $h = x - a$.

Exercice

DL de $f(x) = \exp x$ en 1.

On pose $h = x - 1$. Si x est proche de 1 alors h est proche de 0. Nous allons nous ramener à un DL de $\exp h$ en $h = 0$. On note $e = \exp 1$.

$$\begin{aligned} \exp x &= \text{exp(1+(x-1))} = \exp(1)\exp(x-1) = e\exp h \\ &= e(1 + h + \frac{h^2}{2} + ... + \frac{h^n}{n!} + h^n\varepsilon(h)) \\ &= e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + ... + \frac{(x-1)^n}{n!} + (x-1)^n\varepsilon(x-1))) \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to1} \varepsilon(x-1) = 0$

Opérations sur les développements limités

Somme et produit

On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des DL en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = d_0 + d_1 x + ... + d_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$$

Proposition

— $f + g$ admet un DL en 0 l'ordre n qui est:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + (c_0 + d_0)x^2 + ... + (c_n + d_n)x^n + x^n \varepsilon(x)\end{aligned}$$

— $f \times g$ admet un DL en 0 l'ordre n qui est:

$$\begin{aligned}(f \times g)(x) &= f(x) \times g(x) \\ &= T_n(x) + x^n \varepsilon(x)\end{aligned}$$

où $T_n(x)$ est le polynôme $(c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n) \times (d_0 + d_1 x + ... + d_n x^n)$ tronqué à l'ordre n.

Exercice

Calculer le DL de $\cos x \times \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2,

On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)$ et $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon_2(x)$.

Donc:

$$\begin{aligned}\cos x \times \sqrt{1+x} &= (1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)) \times (1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon_2(x)) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)\end{aligned}$$

Composition

Soient $f(x) = C(x) + x^n \varepsilon_1(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n + x^n \varepsilon_1(x)$ et $g(x) = D(x) + x^n \varepsilon_2(x) = d_0 + d_1 x + ... + d_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$

Proposition

Si $g(0) = 0$ (c'est-à-dire $d_0 = 0$) alors la fonction $f \circ g$ admet un DL en 0 à l'ordre n dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre n de la composition $C(D(x))$.

Exercice

Soit $h(x) = \sqrt{\cos x}$, On cherche le DL de h en 0 à l'ordre 4. On pose $f(u) = \sqrt{1+u}$, alors on a $f(u) = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + u^2 \varepsilon(u)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2, et si on pose $u(x) = \cos x - 1$, alors $h(x) = f(u(x))$, et $u(0) = 0$, D'autre part le

DL de $u(x)$ en $x=0$ à l'ordre 4 est: $u=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon(x)$, en appliquant la prop .., on a $u^2=\frac{1}{4}x^4+x^4\varepsilon(x)$. D'où,

$$\begin{aligned}h(x)=f(u)=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+u^2\varepsilon(u) &= 1+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4)-\frac{1}{8}(\frac{1}{4}x^4)+x^4\varepsilon(x)\\ &= 1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{48}x^4-\frac{1}{32}x^4+x^4\varepsilon(x)\\ &= 1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{96}x^4+x^4\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Division

Soit à déterminer le DL de f/g, quitte à multiplier le DL de f par celui de $1/g$, il suffier de trouver le DL de ce dernier, en posant $f(x)=c_0+c_1x+...+c_nx^n+x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x)=d_0+d_1x+...+d_nx^n+x^n\varepsilon_2(x)$

cherchons le DL de $1/g$, pour cela on utilise le DL de $\frac{1}{1+u}$,

1. Si $d_0=1$, $u=d_1x+...+d_nx^n+x^n\varepsilon(x)$,
2. Si d_0 est quelconque avec $d_0\neq 0$ alors on se ramène au cas précédent en écrivant $\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{d_0}\frac{1}{1+\frac{d_1}{d_0}x+...+\frac{d_n}{d_0}x^n+\frac{x^n\varepsilon_2(x)}{d_0}}$
3. Si $d_0=0$ alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener aux cas précédents.

Exercice

DL de $\frac{1+x}{2+x}$ en 0 à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{2+x} &= (1+x)\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\\ &= \frac{1}{2}(1+x)(1-\frac{x}{2}+(\frac{x}{2})^2-(\frac{x}{2})^3+(\frac{x}{2})^4+x^4\varepsilon(x))\\ &= \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{x^4}{32}+x^4\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Applications des développements limités, Calculs de limites

Les DL sont très efficaces pour calculer des limites ayant des formes indéterminées ! Il suffit juste de remarquer que si $f(x)=c_0+c_1(x-a)+...$ alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c_0$

Limite en 0 de $\frac{\ln(1+x)-\tan x+\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2\sin^2 x}$

Notons $\frac{f(x)}{g(x)}$ cette fraction.

En 0,

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(1+x)-\tan x+\frac{1}{2}\sin^2 x\\ &= (x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4))-(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4))+\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2\\ &= \frac{5}{12}x^4+o(x^4)\\ g(x) &= 3x^2\sin^2 x\\ &= 3x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

Ainsi $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-\frac{5}{12}x^4+o(x^4)}{3x^4+o(x^4)} = \frac{-\frac{5}{12}+o(1)}{3+o(1)}$.

D'où,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{5}{36}$$

0.5.3 Exercices

Exercice 1

Quels sont les équivalents corrects parmi les propositions suivantes?

1. $n \sim_{+\infty} n+1$ **2**. $n^2 \sim_{+\infty} n^2+n$ **3**. $\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(10^6 n)$
4. $\exp(n) \sim_{+\infty} \exp\left(n+10^{-6}\right)$ **5**. $\exp(n) \sim_{+\infty} \exp(2n)$ **6**. $\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(n+1)$.

Exercice 2

Trouver un équivalent le plus simple possible aux suites suivantes :

1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ **2**. $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $w_n = \frac{n^3-\sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2}$ **4**. $z_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

Exercice 3

Déterminer un équivalent le plus simple possible des fonctions suivantes :

1. $x+1+\ln x$ en 0 et en $+\infty$ **2**. $\cos(\sin x)$ en 0
3. $\cosh(\sqrt{x})$ en $+\infty$ **4**. $\dfrac{\sin x\ln(1+x^2)}{x\tan x}$ en 0
5. $\ln(\sin x)$ en 0 **6**. $\ln(\cos x)$ en 0

Exercice 4

Classer les suites suivantes par ordre de "négligeabilité" :

$$a_n = \frac{1}{n} \quad b_n = \frac{1}{n^2} \quad c_n = \frac{\ln n}{n} \quad d_n = \frac{e^n}{n^3}$$
$$e_n = n \quad f_n = 1 \quad g_n = \sqrt{ne^n}.$$

Exercice 5

Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en $+\infty$

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \exp(x),\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = 2,\ f_5(x) = \ln(x),\ f_6(x) = \sqrt{x}\ln x,\ f_7(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 6

1. Démontrer que
$$\ln(1+x)+x^2 \sim_0 x \text{ et } x^2+x^3 \sim_0 x^2.$$
En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)+x^2}{x^2+x^3}$
2. Démontrer que
$$\sin(2x) \sim_0 2x \text{ et } \tan(3x) \sim_0 3x.$$
En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(2x)}{\tan(3x)}$

Exercice 7

En utilisant (éventuellement) des équivalents, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$

4. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x}$

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{4x+1}\ln\left(1-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-\exp\left(\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)\arctan x}{x\tan x}$

Exercice 8

Comparer les fonctions suivantes :

1. $x\ln x$ et $\ln(1+2x)$ au voisinage de 0.
2. $x\ln x$ et $\sqrt{x^2+3x}\ln(x^2)\sin x$ au voisinage de $+\infty$.

Étudier si les fonctions suivantes sont dérivables et C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$$

Exercice 9

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x}-e^x$ à l'ordre 3 en 0

2. $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0

3. $\sin x\cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0

4. $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0

5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0

6. $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

Exercice 10

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0
2. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0
3. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0
4. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 11

1. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0
2. $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0
3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0
4. $x(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0.

0.6 Intégration

Le présent Chapitre contiendra :
- Définition de l'intégration
- Premitive et intégrale des fonctions continues
- Methodes de calcul des premitives
- Exercices

0.6.1 Intégrale des fonctions en escalier

a et b désignent deux réels tels que $a < b$. Toutes les fonctions sont supposées définies sur $[a, b]$ et a valeurs réelles. Le but de l'intégration est de définir un nombre qui, pour une fonction f positive sur un segment $[a, b]$, mesure l'aire délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Ce nombre sera appelé intégrale de f sur $[a, b]$ et notée :

$$\int_a^b f(x)dx$$

Subdivision d'un segment

Définition 1
- On appelle subdivision de $[a, b]$ toute famille $u = (x_i)_{i=0}^n$ telle que $n \in \mathbb{N}^\star$ et
$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$
- On appelle pas ou module de la subdivision $u = (x_i)_{i=0}^n$, le reel
$$\delta(u) = \max_{i\in[1,n]} (x_i - x_{i-1})$$

Exemple

Une subdivision $(x_i)_{i=0}^n$ ou n un entier naturel non nul est dite a pas constant si:

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, x_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

Son module est $\dfrac{b-a}{n}$

Définition 2

Si u et v sont deux subdivisions de $[a, b]$, on dit que u est plus fine que v si tout élément de v est élément de u.

Proposition 1

Pour toutes subdivisions u et v de $[a, b]$ il existe une subdivision plus fine que u et v.

Fonctions en escalier

Définition 3

Une fonction φ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite en escalier si l'on peut trouver une subdivision $u = (x_i)_{i=0}^n$ de $[a, b]$ telle que φ soit constante sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[, (1 \leq i \leq n)$. La subdivision u est dite adaptée à la fonction φ.

Exemples

- Une fonction constante sur l'intervalle $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.
- La fonction *partie entière* est une fonction en escalier sur segment $[a, b]$ (pensez à une subdivision adaptée!).

Remarques :

1. Une fonction en escalier prend un nombre fini de valeurs. En particulier, elle est bornée.
2. Si u est une subdivision adaptée à une fonction φ en escalier, alors toute subdivision plus fine que u est adaptée à φ.
3. Si φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur $[a.b]$, alors il existe une subdivision adaptée à φ et ψ.

Proposition 2

L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies sur $[a, b]$

Démonstration

Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Soient λ et μ deux réels.

D'après la proposition 1 il existe une subdivision $u = (x_i)_{i=0}^n$ adaptées à φ et ψ. Donc les deux fonctions sont constantes sur $]x_{i-1}, x_i[$ Il en est de même pour $\lambda\varphi + \mu\psi$ (constante sur $]x_{i-1}, x_i[$). Donc, u est une subdivision adaptée pour $\lambda\varphi + \mu\psi$ qui est par la suite une fonction en escalier.

Les autres conditions sont faciles à vérifier !

Intégrale d'une fonction en escalier

Proposition 3

Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $u = (x_i)_{i=0}^n$ une subdivision adaptées à φ. Soit c_i la valeur prise par φ sur $]x_{i-1}, x_i[$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ (i.e $\varphi(x) = c_i$ pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$). Alors la quantité

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

ne dépend pas de la subdivision choisie.

Cette quantité s'appelle `l'intégrale` de φ sur $[a, b]$ et on le note:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_{[a,b]} \varphi$$

Démonstration

Pour toute u une subdivision adaptée à la fonction φ, on note

$$I(\varphi, u) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

Le but est de montrer que $\forall u, v$ subdivision adaptée à φ, $I(\varphi, u) = I(\varphi, v)$

— Si v est plus fine que u, Elle est obtenue en rajoutant un nombre fini d'éléments à la subdivision u. Pour démontrer que $I(\varphi, u) = I(\varphi, v)$, il suffit de le démontrer dans le cas où v a un élément de plus que u.

Soit donc $u = (x_i)_{i=0}^n$ et $v = (x_1, \dots, x_p, y, x_{p+1}, \dots, x_n)$

Il est claire que la fonction φ sur $]x_p, y[$ et $]y, x_{p+1}[$. Donc :

$$I(\varphi, v) = \sum_{i=1}^{p-1} c_i(x_i - x_{i-1}) + c_p(y - x_p) + c_p(x_{p+1} - y) + \sum_{i=p+2}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = I(\varphi, u)$$

— Dans le cas général:

D'après la proposition 1, il existe une subdivision w plus fine que u et v, cette subdivision est aussi adaptée à φ (remarque 2). Donc on aura d'une part $I(\varphi, w) = I(\varphi, u)$ et d'autre part $I(\varphi, w) = I(\varphi, v)$.

Par conséquent,

$$I(\varphi, v) = I(\varphi, u)$$

Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition 4

Montrer que :

1- pour toutes fonctions en escalier sur $[a, b]$ φ et ψ, et pour tous réels α et β nous avons:

$$\int_{[a,b]} \alpha\varphi + \beta\psi = \alpha \int_{[a,b]} \varphi + \beta \int_{[a,b]} \psi$$

2- une fonction en escalier positive a une intégrale positive.

3- si φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ alors:

$$\varphi \leq \psi \Rightarrow \int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$$

Démonstration

1-

Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et α et β deux réels.

Soit $u = (x_i)_{i=0}^n$ une subdivision adaptée à φ et ψ. Si, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, c_i et d_i sont respectivement les valeurs prises par φ et ψ sur $]x_{i-1}, x_i[$ alors $\alpha\varphi + \beta\psi$ est une fonction en escalier qui prend $\alpha c_i + \beta d_i$ sur $]x_{i-1}, x_i[$.

Nous avons donc,

$$\int_{[a,b]} \alpha\varphi + \beta\psi = \sum_{i=1}^{n} (\alpha c_i + \beta d_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) + \alpha \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \alpha \int_{[a,b]} \varphi + \beta \int_{[a,b]} \psi$$

2-

Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ qui est positive et $u = (x_i)_{i=0}^n$ une subdivision adaptée à φ. Puisqu'elle est positive, les valeurs c_i prise par φ sont positives. D'autre part, puisque pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_{i-1} \leq x_i$ (par définition de la subdivision) alors $\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0$.

3-

La fonction $\varphi - \psi$ est une fonction en escalier positive donc son intégral est positive.

Proposition 5

Une fonction φ est en escalier sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $c \in]a, b[$, ses restrictions sur $]a, c[$ et $]c, b[$ le sont. Le cas échéant,

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]}$$

Démonstration

— $\Rightarrow$ Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ et u une subdivision adaptée à φ. On ajoutant c a la subdivision u on obtient un subdivision $v = (x_i)_{i=0}^n$ qui est encore adaptée à φ. Soit p l'entier naturel tel que $c = x_p$. Alors nous avons :

  — $(x_1, \dots, x_p)$ une subdivision de $[a, c]$ et puisque φ est constante sur chaque $]x_{i-1}, x_i[$ donc $\varphi_{|[a,c]}$ est fonction en escalier sur $[a, c]$. Nous avons donc :

$$\int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} = \sum_{i=1}^{p} c_i(x_i - x_{i-1})$$

  — $(x_{p+1}, \dots, x_n)$ une subdivision de $[c, b]$ et puisque φ est constante sur chaque $]x_{i-1}, x_i[$ donc $\varphi_{|[c,b]}$ est fonction en escalier sur $[c, b]$. Nous avons donc :

$$\int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]} = \sum_{i=p+1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

Par suite :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{p} c_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=p+1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]}$$

— $\Leftarrow$ Supposons que $\varphi_{|[a,c]}$ et $\varphi_{|[c,b]}$ sont en escalier sur $[a, c]$ et $[c, b]$ respectivement.

Soit $u = (x_i)_{i=0}^p$ (respectivement $v = (x_i)_{i=0}^q$) une subdivision de $[a, c]$ (respectivement de $[c, b]$) adaptée à $\varphi_{|[a,c]}$ (respectivement q $\varphi_{|[c,b]}$).

Alors, $(x_0, \dots, x_{p-1}, x_p = c = y_1, \dots, y_q)$ est une subdivision $[a, b]$. De plus φ est constante sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ et $]y_{i-1}, y_i[$. Donc φ est en escalier sur $[a, b]$.

0.6.2 Fonctions continues par morceaux

Définition, exemples

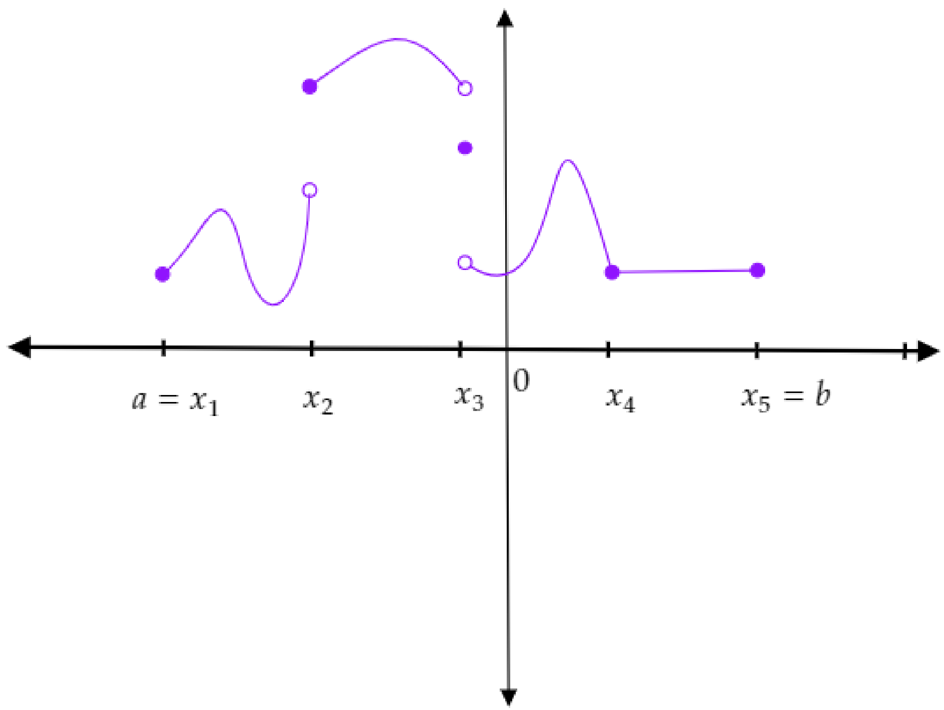
Définition 4

Une application f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $u = (x_i)_{i=0}^n$ de $[a, b]$ telle que pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ soit continue et admette des limites finies en x_{i-1} et x_i.

La subdivision u est dite adaptée à la fonction f.

L'exemple suivant donne une illustration graphique d'une fonction continue par morceaux.

Illustration avec un exemple graphique :



Exemples

- Toute fonction en escalier est continue par morceaux.
- Toute fonction continue est continue par morceaux.
- La fonction f définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$$

n'est pas continue par morceaux, car elle n'a pas de limite finie à droite et à gauche de 0.

Remarques

Comme pour les fonctions en escalier, on peut vérifier que :

- si u est une subdivision adaptée à une fonction f continue par marceaux, alors toute subdivision plus fine que u est adaptée à f,
- si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, alors il existe une subdivision adaptée à f et g.

Proposition 6

Une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.

Démonstration

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $u = (x_i)_{i=0}^{n}$ une subdivision adaptée à f.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ admet des limites finies en x_{i-1} et x_i. Donc la restriction de f sur $]x_{i-1}, x_i[$ admet un prolongement par continuité sur $[x_{i-1}, x_i]$ qui donc borne. Par suite, f est bornée sur $]x_{i-1}, x_i[$. Soit $M_i = \sup_{]x_{i-1}, x_i[} |f|$

En prenant $M = max(M_1, M_2, \dots, M_n, |f(x_0)|, \dots, |f(x_0)|)$, nous aurons $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M$.

Par suite, f est bornée sur $[a, b]$.

Proposition 7

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. Les assertions suivantes sont correctes :

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f + \mu g$ est continue par morceaux.
- fg est continue par morceaux.

Démonstration

Soit $u = (x_i)_{i=0}^n$ une subdivision adaptée à f et g.

Les restrictions des fonctions f et g à chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ sont continues et admettent des limites finies en x_{i-1} et x_i, donc il en est de même pour $\lambda f + \mu g$ et fg. Les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg sont donc continues par morceaux sur $[a, b]$.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Théorème (admis)

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Pour tout réel $\epsilon > O$:

- il existe une fonction en escalier θ telle que $|f - \theta| \leq \epsilon$
- il existe des fonctions en escalier φ et ψ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi - \varphi \leq \epsilon$$

Notations : Dans ce qui suit, pour une fonction continue par morceaux f nous allons adopte les notations suivantes :

- $\mathcal{E}^+(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier plus grandes que f.
- $\mathcal{E}^-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier plus petites que f.

Proposition 8

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Alors :

- $\left\{\int_{[a,b]} \varphi | \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$ admet une borne supérieure,
- $\left\{\int_{[a,b]} \psi | \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$ admet une borne inferieure,

de plus,

$$sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi | \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\} = inf\left\{\int_{[a,b]} \psi | \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$$

Démonstration

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Donc $\{f(x) | x \in [a, b]\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ bornée donc admet une borne supérieure et une borne inferieure. Soit $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$.

- Les deux fonctions constantes m et M sur $[a,b]$ sont aussi continues par morceaux sur $[a,b]$. $\left\{\int_{[a,b]}\varphi|\varphi\in\mathcal{E}^-(f)\right\}$ est donc une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée (par $M(b-a)$). Alors, elle possède une borne supérieure (α). De même, $\left\{\int_{[a,b]}\psi|\psi\in\mathcal{E}^+(f)\right\}$ une partie de $\mathbb{R}$ non vide minorée donc possède une borne inferieure (β).
- Toute fonction $\varphi\in\mathcal{E}^-(f)$ est inférieure à toute fonction $\psi\in\mathcal{E}^+(f)$. Par suite :

$$\int_{[a,b]}\varphi\leq\int_{[a,b]}\psi$$

Fixons $\psi\in\mathcal{E}^+(f)$. L'ensemble $\left\{\int_{[a,b]}\varphi|\varphi\in\mathcal{E}^-(f)\right\}$ est majoreé par $\int_{[a,b]}\psi$. Alors nous avons forcement $\alpha\leq\int_{[a,b]}\psi$ et ça pour tout $\psi\in\mathcal{E}^+(f)$. Donc α est un minorant de $\left\{\int_{[a,b]}\psi|\psi\in\mathcal{E}^+(f)\right\}$. Par conséquent, $\alpha\leq\beta$.

Donc

$$\alpha\leq\beta$$

- soit $\epsilon>0$. En utilisant le théorème précédant, il existe deux fonctions en escalier $\varphi\in\mathcal{E}^-(f)$ et $\psi\in\mathcal{E}^+(f)$ tel que $\psi-\varphi\leq\epsilon$.

Donc $\int_{[a,b]}\psi-\int_{[a,b]}\varphi\leq\int_{[a,b]}\epsilon=\epsilon(b-a)$

donc $0\leq\beta-\alpha\leq\epsilon(b-a)$

Et ca pour tout $\epsilon\geq 0$.

Donc $\alpha=\beta$.

Définition

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$.

On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le réel

$$\int_{[a,b]}f=sup\left\{\int_{[a,b]}\varphi|\varphi\in\mathcal{E}^-(f)\right\}=inf\left\{\int_{[a,b]}\psi|\psi\in\mathcal{E}^+(f)\right\}$$

Question : Comparer l'intégrale d'une fonction en escalier avec son intégral en tant que fonction continue par morceaux.

Indications pour la réponse

- Une fonction en escalier est continue par morceaux ;
- si f est une fonction en escalier, alors $f\in\left\{\int_{[a,b]}\varphi|\varphi\in\mathcal{E}^-(f)\right\}$ et $f\in\left\{\int_{[a,b]}\psi|\psi\in\mathcal{E}^+(f)\right\}$.

Nous avons vu que si f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, alors f est bornée. Soient $m=inf\{f(x)|x\in[a,b]\}$ et $M=sup\{f(x)|x\in[a,b]\}$. m et M sont donc des fonctions en escalier sur $[a,b]$. Leurs intégrales sont respectivement $m(b-a)$ et $M(b-a)$.

Et puisque $m\leq f\leq M$, nous avons $m(b-a)\leq\int_{[a,b]}f\leq M(b-a)$.

Donc, la quantité $\dfrac{1}{b-a}\int_{[a,b]}f$ est comprise entre m et M.

Définition

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. La quantité $\dfrac{1}{b-a}\int_{[a,b]}f$ s'appelle **la valeur moyenne** de f.

0.6.3 Propriétés de l'intégrale

Proposition (linéarité)

Soient f_1, f_2 deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_{[a,b]} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2$$

On dit que l'intégrale est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Démonstration

— Soient $\epsilon > 0$ et f est une fonction continue par morceaux, alors il existe θ est fonction en escalier telle que $|f-\theta| \leq \epsilon$. On a $\theta - \epsilon \leq f \leq \theta + \epsilon$. Alors

$$\int_{[a,b]} (\theta - \epsilon) \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} (\theta + \epsilon)$$

et donc

$$\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta \right| \leq (b-a)\epsilon$$

— Maintenant, soient f_1 et f_2 deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, ainsi que λ_1, λ_2 deux réels. Pour $\epsilon > 0$ quelconque, il existe θ_1, θ_2 deux fonctions en escalier telles que :

$$|f_1 - \theta_1| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad |f_2 - \theta_2| \leq \epsilon$$

Ce qui entraine

$$\left| \int_{[a,b]} f_1 - \int_{[a,b]} \theta_1 \right| \leq (b-a)\epsilon$$

et

$$\left| \int_{[a,b]} f_2 - \int_{[a,b]} \theta_2 \right| \leq (b-a)\epsilon$$

Donc

$$|\lambda_1| \left| \int_{[a,b]} f_1 - \int_{[a,b]} \theta_1 \right| \leq |\lambda_1|(b-a)\epsilon$$

et

$$|\lambda_2| \left| \int_{[a,b]} f_2 - \int_{[a,b]} \theta_2 \right| \leq |\lambda_2|(b-a)\epsilon$$

Donc (puisque l'intégrale sur les fonctions en escalier est linéaire)

$$\left| \lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 - \int_{[a,b]} \lambda_1 \theta_1 \right| \leq |\lambda_1|(b-a)\epsilon$$

et

$$\left| \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2 - \int_{[a,b]} \lambda_2 \theta_2 \right| \leq |\lambda_2|(b-a)\epsilon$$

Par suite

$$\left|\lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2 - \left(\int_{[a,b]} \lambda_1\theta_1 + \int_{[a,b]} \lambda_2\theta_2\right)\right| \leq (|\lambda_1| + |\lambda_2|)(b-a)\epsilon$$

On pose

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \quad \text{et } \theta = \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2$$

On a

$$|f - \theta| \leq |\lambda_1||f_1 - \theta_1| + |\lambda_2||f_2 - \theta_2| \leq (|\lambda_1| + |\lambda_2|)\epsilon$$

Et par suite

$$\left|\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta\right| \leq (b-a)(|\lambda_1| + |\lambda_2|)\epsilon$$

On pose

$$I = \int_{[a,b]} \theta = \int_{[a,b]} \lambda_1\theta_1 + \int_{[a,b]} \lambda_2\theta_2$$

et

$$\Delta = \left|\int_{[a,b]} f - \left(\lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2\right)\right|$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Delta = & \quad \left|\int_{[a,b]} f - I + I - \left(\lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2\right)\right| \\
\leq & \quad \left|\int_{[a,b]} f - I\right| + \left|I - \left(\lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2\right)\right| \\
\leq & \quad 2(b-a)(|\lambda_1| + |\lambda_2|)\epsilon
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\forall \epsilon > 0, \Delta \leq 2(b-a)(|\lambda_1| + |\lambda_2|)\epsilon$$

Ce qui prouve que $\Delta = 0$ et donc

$$\left|\int_{[a,b]} f = \lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2\right|$$

Deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a.b]$ qui sont égales sauf en un nombre fini de points ont la même intégrale car leur différence, qui est nulle sauf en un nombre fini de points, est une fonction en escalier dont l'intégrale est nulle.

Proposition (relation de Chasles)

Soit $c \in [a,b]$ et f une fonction définie sur $[a,b]$.

La fonction f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si, et seulement si, ses restrictions à $[a,c]$ et à $[c,b]$ sont continues par morceaux, et l'on a alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$$

Démonstration

Soit $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ (une fonction en escalier plus petite que f).

On a $\varphi_{|[a,c]} \in \mathcal{E}^-(f_{|[a,c]})$ et $\varphi_{|[c,b]} \in \mathcal{E}^-(f_{|[c,b]})$.

Par suite

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} \varphi = & \int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]} \\ \leq & \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}\end{aligned}$$

Le réel $\int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$ est un majorant de de $\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$.

Donc il est plus grands que sa borne supérieure ($\int_{[a,b]} f$). Ce qui donne

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$$

En applique les mêmes étapes pour $-f$

Soit $\varphi \in \mathcal{E}^-(-f)$ (une fonction en escalier plus petite que $-f$).

On a $\varphi_{|[a,c]} \in \mathcal{E}^-(-f_{|[a,c]})$ et $\varphi_{|[c,b]} \in \mathcal{E}^-(-f_{|[c,b]})$.

Par suite

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} \varphi = & \int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]} \\ \leq & \int_{[a,c]} -f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} -f_{|[c,b]}\end{aligned}$$

Le reel $\int_{[a,c]} -f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} -f_{|[c,b]}$ est un majorant de de $\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(-f)\right\}$.

Donc il est plus grands que sa borne supérieure ($\int_{[a,b]} -f$). Ce qui donne

$$\int_{[a,b]} -f \leq \int_{[a,c]} -f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} -f_{|[c,b]}$$

Et d'après la linéarité de l'intégrale nous avons

$$\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$$

En fin

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$$

Remarque :

Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, et $u = (x_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une subdivision adaptée à f. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, notons f_i la fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ tel que $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, f_i(x) = f(x)$. Alors d'après la relation de Chasles :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} f_i$$

Quelques inégalités

Proposition

- Une fonction positive et continue par morceaux à une intégrale positive.
- Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ alors:
$$f \leq g \Rightarrow \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$$

Démonstration

- Si f est une fonction continue par morceaux et positive alors la fonction nulle (qui constante donc en escalier) appartient à $\mathcal{E}^-(f)$. Donc son intégrale (qui vaut 0) est inférieure à l'intégrale de f. Par suite $\int_{[a,b]} f \geq 0$.
- On applique le résultat précèdent à $g - f$ puis on utilise la linéarité de l'intégrale.

Théorème

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors $|f|$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et:

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

Démonstration

Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $u = (x_i)_{i=0}^{n}$ une subdivision adaptée à f. Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ la restriction de f sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ est continue et admet des limites finies en x_{i-1} et x_i. Il en est de même pour $|f|$ d'après les propriétés des limites. Donc $|f|$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

Nous avons $-|f| \leq f \leq |f|$ donc

$$-\int_{[a,b]} |f| \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} |f|$$

Ce qui veut dire

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

Proposition (Inégalité de la moyenne)

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, alors:

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$$

Démonstration

Soit $M = sup_{[a,b]}|f|$. Nous avons

$$\forall x \in [a, b], |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M|g(x)|$$

Donc

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \int_{[a,b]} |fg| \leq \int_{[a,b]} M|g| = M \int_{[a,b]} |g|$$

Corollaire

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, alors:

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq (b - a) \sup_{[a,b]} |f|$$

Démonstration

En pose $g = 1$ est on applique l'inégalité de la moyenne.

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, alors:

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leq \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

Démonstration

On pose

$$P(\lambda) = \int_{[a,b]} (f + \lambda g)^2 = \lambda^2 \int_{[a,b]} g^2 + 2\lambda \int_{[a,b]} fg + \int_{[a,b]} f^2$$

P est donc une fonction polynomiale de degré au plus égale à 2 qui est positive pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

— Si $\int_{[a,b]} g^2 = 0$, alors la fonction P ne peut pas changer de signe (car elle est positive) donc ne peut pas être de degré 1. On en déduit $\int_{[a,b]} fg = 0$

Donc $\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 = 0 = \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$

— Sinon, P est polynôme de degré 2 qui positif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Son discriminent

$$\Delta = 4\left(\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 - \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2\right)$$

est donc negatif. Ce donne

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leq \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

On peut écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz comme suit :

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \left(\int_{[a,b]} f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{[a,b]} g^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cas des fonctions continues

Théorème

Une fonction **continue et positive** sur $[a, b]$ est nulle si, et seulement si, son intégrale sur $[a, b]$ est nulle.

Démonstration

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

Si f est nulle alors son intégrale est nulle.

Montrons maintenant, que si l'intégrale de f est nulle alors f est la fonction nulle.

Par absurde, on suppose que f n'est pas nulle. Donc il existe (au moins) $c \in [a, b]$ tel que $f(c) \neq 0$ et puisque f est positive $f(c) > 0$.

1- Si $c \in]a, b[$. Puisque la fonction est continue en c alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [a, b],\ \ |x - c| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x)| \leq \epsilon$.

On pose $\epsilon = \dfrac{f(x)}{2}$

alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b],\ \ x \in]c - \alpha, c + \alpha[\Rightarrow f(x) \leq f(c) - \epsilon > 0$.

On pose $\beta = max(\dfrac{a+c}{2}, c - \alpha), \gamma = max(\dfrac{b+c}{2}, c + \alpha)$. On a

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,\beta]} f + \int_{[\beta,\gamma]} f + \int_{[\gamma,b]} f$$

$$\geq \int_{[\beta,\gamma]} f$$

$$\geq (\gamma - \beta)\frac{f(c)}{2} > 0$$

2- Si $c = a$ ou $c = b$. La fonction f est continue en c et $f(c) > 0$. Donc elle est strictement positive au voisinage de c. Ceci dit, il existe un réel $d \in]a, b[$ tel f(d)>0. On répète les mêmes étapes précédentes mais cette fois avec d et on aboutit a $\int_{[a,b]} f > 0$

Ce qui est absurde.

Donc f est nulle.

Avertissement: Les deux hypothèses (continuité et positivité) sont nécessaires pour que le résultat soit vrai.

Corollaire

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$, alors:

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 = \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

Si et seulement si, f et g sont proportionnelles.

Démonstration

- Si f et g sont proportionnelles, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda g$ où $g = \lambda f$. Supposons par exemple que $f = \lambda g$.

Alors,

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 = \lambda^2 \left(\int_{[a,b]} g^2\right)^2 = \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

Supposons maintenant que

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 = \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

On pose

$$P(\lambda) = \int_{[a,b]} (f + \lambda g)^2 = \lambda^2 \int_{[a,b]} g^2 + 2\lambda \int_{[a,b]} fg + \int_{[a,b]} f^2$$

- *si* $\int_{[a,b]} g^2 = 0$ alors g^2 est nulle (puisqu'elle est continue est positive avec intégrale nulle) donc g est nulle. Donc $g = 0 \times f$. Par suite f et g sont proportionnelles.
- sinon, le polynôme P a un discriminent nul. Donc il existe λ_0 tel que $P(\lambda_0) = 0$.

Donc $P(\lambda_0) = \int_{[a,b]} (f + \lambda_0 g)^2 = 0$. La fonction $(f + \lambda_0 g)^2$ est continue et positive avec intégrale nulle donc elle est nulle. Par suite $f = \lambda_0 g$. Les deux fonctions sont proportionnelles.

Invariance par translation

Proposition

Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et α un réel. La fonction f_α définie sur $[a + \alpha, b + \alpha]$ par $f_\alpha(x)f(x - \alpha)$ est continue par morceaux sur $[a + \alpha, b + \alpha]$. De plus :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a+\alpha,b+\alpha]} f_\alpha$$

Démonstration

On va dabord montrer le resultat pour une fonction en escalier pouis, pour une fonction continue par morceaux.

— Si f est une fonction en escalier sur $[a, b]$:

soit $u = (x_i)_{i=0}^n$ une subdivision adaptee a f. Alors on peut facilement montrer que la famille $(y_i)_{i=0}^n$ avec $y_i = x_i + \alpha$ est une subdivision de $[a + \alpha, b + \alpha]$.

Si f prend la valeur c_i sur $]x_{i-1}, x_i[$ alors f_α vaut aussi c_i sur $]x_{i-1} + \alpha, x_i + \alpha[$. Donc f_α est une fonction en escalier sur $[a + \alpha, b + \alpha]$.

De plus,

$$\int_{[a+\alpha,b+\alpha]} f_\alpha = \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{i-1})c_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})c_i = \int_{[a,b]} f$$

Maintenant si f est continue par morceaux,

soit $u = (x_i)_{i=0}^n$ une subdivision adaptee a f. La famille $(y_i)_{i=0}^n$ avec $y_i = x_i + \alpha$ est une subdivision de $[a + \alpha, b + \alpha]$.

f est continue sur $]x_{i-1}, x_i[$ est admet des limites finies en x_{i-1} et x_i. Donc, f_α est continue sur $]y_{i-1}, y_i[=]x_{i-1} + \alpha, x_i + \alpha[$ est admet des limites finies en y_{i-1} et y_i. Donc f_α est continue par morceaux sur $[a + \alpha, b + \alpha]$.

si $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ donc $\varphi \leq f$ donc $\varphi_\alpha \leq f_\alpha$

donc $\{\varphi_\alpha \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\} \subset \mathcal{E}^-(f_\alpha)$

D'autre part, si $\psi \in \mathcal{E}^-(f_\alpha)$ donc il existe $\phi \in \mathcal{E}^-(f)$ telle que $\psi = \varphi_\alpha$.

Donc, $\mathcal{E}^-(f_\alpha) = \{\varphi_\alpha \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\}$

Par suite

$$\int_{[a+\alpha,b+\alpha]} f_\alpha = sup\left\{\int_{[a+\alpha,b+\alpha]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^-(f_\alpha)\right\}$$

$$= sup\left\{\int_{[a+\alpha,b+\alpha]} \varphi_\alpha \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$$

$$= sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\} = \int_{[a,b]} f$$

Soient $T > 0$ et f une fonction T-périodique et continue par morceaux sur une période et donc sur tout segment de $\mathbb{R}$. Nous avons :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_{[a,a+T]} f = \int_{[0,T]} f$$

0.6.4 Fonctions continue par morceaux sur un intervalle

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition

Soit f une fonction définie sur I. On dit que f est continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment de I ($[a, b]$ avec $a, b \in I$ et $a < b$).

Exemples

1- Une fonction continue sur I est continue par morceaux sur I. 2- La fonction $x \to x - E(x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. 3- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$$

n'est pas continue morceaux sur $\mathbb{R}$ puisque elle n'est pas continue par morceaux sur $[-1, 1]$. Cependant, elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ car elle continue sur chacun de ces intervalles.

Notations

Soient f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I, ainsi que a et b deux éléments de I (a partir de maintenant, on a pas nécessairement $a < b$) On adopte les notations suivantes:

— si $a < b$, $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f$

— si $a > b$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_{[b,a]} f$

— si $a = b$, $\int_a^b f(x)dx = 0$

Avertissement: Le résultat :

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

n'est pas valide que lorsque $a \leq b$.

Proposition (Relation de Chasles)

Si f est continue par morceaux sur un intervalle I, alors :

$$\forall a, b, c \in I, \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Démonstration

Nous allons traiter le cas ou $a = b = c$, $a < c < b$ et $a < b < c$. Les autres casd ($b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$ et $c < b < a$) sont similaire aux deux premiers cas.

— si $a = b = c$ chaque intégrale vaut 0, le résultat est donx trivial.

— si $a < c < b$, c'est le cas qu'on a vu dans la proposition de la Relation de Chasles pour le cas d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

— si $a < b < c$, on applique la même proposition (Relation de Chasles) pour f qui est continue par morceaux sur $[a, c]$.

Donc

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Or $\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$. Donc

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

Et par suite

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Proposition

Si f est continue par morceaux et bornée sur I, on :

$$\forall a, b \in I, \quad \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq |b-a| sup_I |f|$$

Démonstration

Nous avons 3 cas : $a = b$, $a < b$ et $a > b$.

1- si $a = b$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = 0|, le résultat est immédiat.

2- si $a < b$, la fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$. Donc, nous avons $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq (b-a) sup_{[a,b]} |f|$

Donc $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a) sup_{[a,b]} |f|$

Or $sup_{[a,b]} |f| \leq sup_I |f|$

Donc, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a) sup_I |f|$

3- si $a > b$, en applique les mêmes étapes précédentes pour la fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$ et on reçoit $\left|\int_b^a f(x)dx\right| \leq (b-a) sup_I |f|$

Et puisque $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ donc $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|-\int_b^a f(x)dx\right| = \left|\int_b^a f(x)dx\right|$.

En fin, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a) sup_I |f|$

0.6.5 Primitive et intégrale des fonctions continues

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

Définition

Soit f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ continue sur I. On appelle primitive de f sur I toute fonction de I dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I et dont la dérivée est f.

Proposition

Soit f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ continue sur I.

Si F est une primitive de f sur I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions $F + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Les fonctions $F + \lambda$ sont dérivables sur I est leurs dérivées valent f. Donc $F + \lambda$ sont des primitives de f.

Soit G une primitive de f donc $G - F$ a une dérivée nulle sur I. Donc $G - F$ est une constante sur I.

Primitives usuelles

Les deux tableaux suivants contiennent les primitives des fonctions usuelles :

Fonction	Primitive	Domaine de définition
e^{ax} avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$
x^α avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
x^n avec $n \in \mathbb{Z}$ $n < -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
x^n avec $n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$\ln \cosh x$	$\mathbb{R}$
$\coth x = \frac{1}{\tanh x}$	$\ln \lvert \sinh x \rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sinh^2 x} = \coth^2 x - 1$	$-\coth x$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln \lvert \cos x \rvert$	$x \in \mathbb{R}$ $x \neq \frac{\pi}{2}$ $\mathbf{mod}$ π
$\text{cotan } x = \frac{1}{\tan x}$	$\ln \lvert \sin x \rvert$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$x \in \mathbb{R}$ $x \neq \frac{\pi}{2}$ $\mathbf{mod}$ π
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \text{cotan }^2 x$	$-\text{cotan } x$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$

Fonction	Primitive	Domaine de définition
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1;1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|$	$\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2-1}\right\|$	$]-\infty;-1[\cup;]1;+\infty[$

Exemple

Les primitives d'une fonction polynomiale de la forme

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

sont de la forme $F+\lambda$ avec:

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}x^{k+1} \quad \text{et } \lambda\in\mathbb{R}$$

Théorème fondamental

Proposition

Soient f une fonction continue par morceaux sur I et a un point de I. La fonction F_a définie par :

$$F_a(x)=\int_a^x f(t)dt$$

est continue sur I

Théorème

Soient F une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et a un point de I. La fonction F_a définie par :

$$F_a(x)=\int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur I. C'est l'unique primitive qui s'annule en a.

Corollaire

Soient f une fonction continue sur I, ainsi que α et β deux fonctions dérivables sur un intervalle J et a valeurs dans I. La fonction définie sur J par :

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$$

est dérivable sur J et sa dérivée est:

$$\varphi^{'}(x) = \beta^{'}(x)f(\beta(x)) - \alpha^{'}(x)f(\alpha(x))$$

Exemple

— Si f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T, alors:

$$g(x) = \int_{x}^{x+T} f(t)dt$$

est indépendante de x (constante), car:

$$g'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$$

Proposition

Soient f une fonction continue par morceaux sur I et a un point de I. Si F est une primitive de f sur I, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Exemple

—

$$\int_a^b e^{2x}dx = \frac{1}{2}(e^{2b} - e^{2a})$$

—

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$

— Soit $f(x) = \alpha x + \beta$. Une primitive de f est $x \mapsto \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x$, donx:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2) + \beta(b-a) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Corollaire

Si $f \in \mathcal{C}(I)$(dérivable et sa dérivée est continue), alors pour $a, x \in I$ on a:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f^{'}(t)dt$$

Notations :

— Dans ce qui suit, on va noter la différence de la fonction F entre a et b : $[F(x)]_a^b$. Ceci dit,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

— Lorsque f est une fonction continue, la notation $\int f(x)dx$ représente une primitive quelconque de la fonction f ($\int f(x)dx = F(x) = Cst$).

0.6.6 Méthodes de calcul des primitives

Intégration par parties

Proposition

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$, on a:

$$\int_a^b u(t)v^{'}(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u^{'}(t)v(t)dt$$

Démonstration

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, alors uv est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

Donc

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b (uv)^{'}(t)dt = \int_a^b u(t)v^{'}(t)dt + \int_a^b u^{'}(t)v(t)dt$$

Remarque : Dans un calcul de primitive, la formule d'intégration par parties s'écrit:

$$\int u(x)v^{'}(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u^{'}(x)dx$$

La formule d'intégration par parties est en général utilisée pour:
— éliminer une fonction transcendantes dont la dérivée est plus simple comme par exemple les fonctions ln, arcsin, arctan, ...
— calculer une intégrale par récurrence.

Exemples

1- sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\int \ln x dx = \int (x)^{'} \ln x dx = x \ln x - \int x\frac{1}{x} = x \ln x = x + Cst$$

2- Sur $\mathbb{R}$ on a:

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + Cst$$

3 - Pour calculer $\int x^2e^xdx$, on peut intégrer l'exponentielle et dériver le polynôme:

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\int xe^xdx$$

puis recommencer:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

ce qui donne:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + Cst$$

Changement de variable

Proposition

Soient I et J deux intervalle de $\mathbb{R}$, ainsi que f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans I. Si α et β sont deux éléments de J, on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi^{'}(u)du$$

Démonstration

Comme f est continue sur I, elle possède une primitive F et l'on a:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F \circ \varphi(\beta) - F \circ \varphi(\alpha)$$

D'autre part, puisque les deux fonctions F et $varphi$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc $F \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$

Donc on peut écrire : $F \circ \varphi(\beta) - F \circ \varphi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)^{'}(u)du.$

Par suite :

$$F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)^{'}(u)du$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} F^{'}(\varphi(u))\varphi^{'}(u)du$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi^{'}(u)du$$

Remarques :

- la formule de changement de variable n'est que la formule de dérivation d'une fonction composée lue à l'envers.
- Quand on utilise la formule de changement de variable avec les notations vues dans la proposition, on dit que l'on effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$ (d'où l'appellation changement de variable). On remplace alors t par $\varphi(u)$ et dt par la différentielle $\varphi^{'}(u)du$, ce qui rend le calcul assez naturel.
- il faut faire attention lors de l'application de cette méthode, les bornes de l'intégral doivent être changées.

Exemples

1- Pour calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \cos u du$$

On pose $t = \sin u$, donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 u \cos u du = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

2- Pour calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{2} \sqrt{4-u^2} u du$$

On pose $t = u^2$, donc :

$$\int_{-1}^{2} \sqrt{4-u^2} u du = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{4-t} dt = [-\frac{1}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}]_1^4 = \sqrt{3}$$

0.6.7 Exercices

Exercice 1

Trouver les primitives suivantes :
- a) $\int (2x^2 + 3x - 5)dx$
- b) $\int (x-1)dx$
- c) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx$
- d) $\int \frac{x+3}{x+1} dx$

Exercice 2

Calculer :
- a) $\int x\sqrt{1+x} dx$
- b) $\int x^3 e^{2x} dx$
- c) $\int x^2 ln(x) dx$

Exercice 3

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x)$$

Montrer que :

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$

Exercice 4

En utilisant la reconnaissance de forme déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

— $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

— $g(x) = \dfrac{e^{3x}}{1+e^{3x}}$

— $h(x) = \dfrac{ln(x)}{x}$

— $k(x) = cos(x)sin^2(x)$

— $l(x) = \dfrac{1}{xln(x)}$

— $m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}$

Exercice 5

— Calculer $I_n = \int ln^n(x)dx$ pour $n = 0; 1; 2$.

— Calculer I_n en fonction de I_{n-1}.

Exercice 6

Calculer avec deux méthodes (reconnaissance de la forme et changement de variable) les primitives de la fonction suivantes :

— $f(x) = cos^{1234}(x)sin(x)$

— $g(x) = \dfrac{1}{xln(x)}$

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

— $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin(x)dx$ (par parties)

— $\int_0^1 \dfrac{e^x}{\sqrt{e^x}+1}$ (changement de variable)