EST

المدرسة العليا للتكنولوجيا
جامعة الحسن الثاني الدار البيضاء

Ecole Supérieure de Technologie
Université Hassan II de Casablanca

Cours de Probabilités

laousse Mbarek

déc. 19, 2023

Table des matières

I Part 3

1 Introduction 5
- 1.1 Fondements et Évolution des Probabilités 5
- 1.2 Application des Probabilités et Compréhension Conceptuelle 6

2 Rapel sur les Ensembles et Applications 7
- 2.1 Définitions de base 7
- 2.2 Opérations sur les ensembles 10
- 2.3 Le Produit Cartésien 17
- 2.4 Applications 19
- 2.5 Ensembles finis, dénombrables et non dénombrables 23
- 2.6 Exercices 24

3 Dénombrement 29
- 3.1 Propriétés du Cardinal 29
- 3.2 Techniques de dénombrement 34
- 3.3 Exercices 37

4 La théorie des probabilités 41
- 4.1 Langage de Probabilités 41
- 4.2 Axiomatisation des probabilités 43
- 4.3 Probabilité Conditionnelle et Independance 49
- 4.4 Exercices 57

5 Variables Aléatoires Réelles 59
- 5.1 Variable Aléatoire Réelle 59
- 5.2 Variables Aléatoires Discrètes 61
- 5.3 Variables Aléatoires Continues 77

II 79

Le domaine des probabilités, se situant au croisement des mathématiques, de la logique et de la philosophie, a façonné la compréhension moderne du monde aléatoire. Qu'il s'agisse d'analyser des tendances financières, de prédire des phénomènes météorologiques ou de comprendre les principes de base de la génétique, les probabilités jouent un rôle fondamental.

Aperçu du Cours :

1. **Introduction**.
2. **Chapitre 1 : Un peu sur la théorie des ensembles** - Il abordera les sections Ensembles et Opérations, Concepts Fondamentaux des ensembles et applications
3. **Chapitre 2 : Dénombrement** - Un apercu sur le denombrement et tirage connus.
4. **Chapitre 3 : Axioms des proba** - un definition regoureuse et mathmatique des probabilites
5. **Chapitre 2 : Variables Aléatoires et Distributions** - Immersion dans les distributions probabilistes courantes et leurs implications.
6. **Chapitre 3 : Théorèmes Limite et Convergence** - Approfondissement des principaux théorèmes et de leurs conséquences.

Méthodologie Pédagogique :

- **Cours Magistraux** : Exposition théorique et démonstrations mathématiques pour établir des bases solides.
- **Travaux Dirigés** : Application des notions à travers des exercices et cas pratiques.
- **Études de Cas** : Analyses de scénarios réels où les probabilités sont essentielles.

Ce cours est conçu pour offrir à la fois une solide base théorique et encourager une réflexion critique, tout en mettant l'accent sur l'application de ces compétences à des situations concrètes. La maîtrise des probabilités est essentielle dans de nombreux domaines professionnels, et ce cours représente une étape essentielle vers l'acquisition de cette expertise.

Première partie

Part

CHAPITRE 1

Introduction

Les probabilités, une branche essentielle des mathématiques, jouent un rôle crucial dans de nombreux domaines allant des sciences naturelles à la sociologie. Elles permettent de quantifier l'incertitude et de modéliser le hasard en termes mathématiques. Ce chapitre examine la théorie des probabilités, débutant par ses origines historiques et son importance fondamentale, puis explore les bases des ensembles et des opérations qui leur sont associées, mettant en évidence les principes clés des probabilités. Le chapitre se clôture par une analyse approfondie des méthodes de dénombrement, essentielles pour relier les concepts de probabilité à la résolution de problèmes complexes.

1.1 Fondements et Évolution des Probabilités

1.1.1 Genèse et Expansion des Probabilités

L'étude des probabilités s'est développée à partir des jeux de hasard et des paris, où des mathématiciens comme Blaise Pascal et Pierre de Fermat ont posé les premiers jalons d'une approche mathématique de l'incertitude. Par leurs réflexions sur des questions simples liées aux jeux de dés, ils ont jeté les bases de ce qui allait devenir un outil essentiel dans des secteurs aussi variés que la finance et l'épidémiologie. Le problème des partis de tennis de Pascal est un exemple notable, ayant contribué à l'émergence de la probabilité conditionnelle.

1.1.2 De la Théorie à la Pratique

Les probabilités modélisent des phénomènes pour refléter la réalité, depuis les prévisions météorologiques jusqu'à l'analyse des risques en ingénierie. Les probabilités se divisent en deux grandes catégories : les probabilités discrètes, qui concernent des événements spécifiques comme le lancer de dés, et les probabilités continues, qui s'appliquent à des variables mesurables telles que le poids ou la température. Par exemple, compter les issues possibles lors du lancer de dés illustre les probabilités discrètes, tandis que l'évaluation des états d'une particule en physique quantique relève des probabilités continues.

1.1.3 Approche Éducative et Structure du Cours

Le cours est structuré pour familiariser les étudiants avec le raisonnement probabiliste, indispensable à l'analyse de données et à la prise de décisions éclairées dans des domaines tels que la statistique, l'actuariat et l'informatique. Dans ce dernier domaine, la probabilité est fondamentale pour comprendre les algorithmes de cryptographie, l'intelligence artificielle, et la théorie de l'information.

1.2 Application des Probabilités et Compréhension Conceptuelle

1.2.1 Définition et Application des Probabilités

Les probabilités fournissent un cadre pour gérer l'incertitude et prendre des décisions éclairées en présence d'informations incomplètes. Par exemple, dans les télécommunications, elles aident à comprendre et à réduire les erreurs de transmission des données. En médecine, elles sont essentielles à la prise de décision clinique et à la planification des essais thérapeutiques.

1.2.2 Fondamentaux et Méthodes de Dénombrement

Les principes des probabilités sont particulièrement pertinents dans la résolution de problèmes de dénombrement, comme déterminer le nombre de façons de chiffrer des données. Le dénombrement est aussi crucial pour développer des algorithmes capables de gérer un large éventail de possibilités, que ce soit pour le routage de réseau ou les requêtes dans les bases de données.

1.2.3 De l'Histoire à l'Avenir des Probabilités

L'histoire des probabilités nous montre que des questions simples peuvent mener à des théories profondes aux applications étendues et influentes. En informatique, la probabilité est devenue fondamentale, en particulier dans l'apprentissage automatique et l'analyse algorithmique. Pour conclure, ce cours vise à inculquer les concepts essentiels des probabilités tout en préparant les étudiants à les appliquer à des problèmes actuels, où l'incertitude est souvent la seule certitude.

CHAPITRE 2

Rapel sur les Ensembles et Applications

La théorie des ensembles est une fondation des mathématiques qui traite des collections d'objets, nommées ensembles.

2.1 Définitions de base

2.1.1 Ensemble

Définition

Un **ensemble** est une collection d'objets, appelés **éléments**. Les ensembles peuvent être représentés par une énumération de leurs éléments entre accolades. Par exemple :

Exemple

— L'ensemble $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ contient 5 éléments.
— L'ensemble $B = \{a\}$ contient un seul élément ; un ensemble contenant un seul élément est dit **singleton**.
— L'ensemble $C = \{1, 2\}$ contient deux éléments ; un ensemble contenant exactement deux éléments est dit **paire**.
— L'**ensemble vide** est l'ensemble qui ne contient aucun élément. Il est dénoté par le symbole $\emptyset$ ou simplement par $\{\}$.

Appartenance

Si un objet a appartient à un ensemble A, on écrit :

$$a \in A$$

Inversement, si b ne fait pas partie de A, on note :

$$b \notin A$$

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$, alors $2 \in A$ mais $4 \notin A$.

Définition: Inclusion (Sous-ensemble)

Un ensemble A est un **sous-ensemble** d'un ensemble B (noté $A \subset B$) si chaque élément de A est aussi un élément de B.

$$A \subset B \iff \forall x (x \in A \implies x \in B)$$

Exemple

Soit $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$. Comme tous les éléments de A sont dans B, A est un sous-ensemble de B, donc $A \subset B$.

Remarque: Appartenance vs Inclusion

La distinction entre **appartenance** et **inclusion** est fondamentale, en particulier lorsque l'on traite d'ensembles d'ensembles.

— **Appartenance ($\in$)** : Un élément appartient à un ensemble.

  Exemple :

  Si $A = \{1, 2, \{3, 4\}\}$, alors:
  — $1 \in A$,
  — $\{3, 4\} \in A$,
  — mais $\{1, 3\} \notin A$.

— **Inclusion ($\subset$)** : Un ensemble est un sous-ensemble d'un autre.

  Exemple :

  Si $A = \{1, 2, \{3, 4\}\}$, alors:
  — $\{1, \{3, 4\}\} \subset A$,
  — et $\{\{3, 4\}\} \subset A$,
  — mais $\{3, 4\} \not\subset A$.

Il faut toujoures faire attention!

Ensembles égaux

Deux ensembles A et B sont dits **égaux** (noté $A = B$) si et seulement si chaque élément de A est un élément de B et vice versa.

Formellement, cette définition peut être exprimée comme:

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B)$$

ou encore

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A$$

2.1.2 Méthodes de Spécification d'un Ensemble

Spécification par extension (ou énumération)

On liste tous les éléments de l'ensemble entre des accolades.

Exemples

— Un ensemble de chiffres et de lettres: $A = \{1, 10, 7, x, y\}$,

— Un ensemble de couleurs: $B = \{\text{rouge, vert, bleu}\}$.

Spécification par compréhension (ou description par une propriété)

On définit un ensemble en spécifiant une propriété caractéristique que tous ses éléments doivent satisfaire. La forme générale est $B = \{x \mid P(x)\}$, où $P(x)$ est une propriété que les éléments x doivent satisfaire.

Exemples

— L'ensemble de tous les nombres pairs: $C = \{x \mid x \text{ est un entier et } x \text{ est pair}\}$

— L'ensemble des nombres réels supérieurs à 10 : $D = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x > 10\}$

Remarque

— Un ensemble ne contient que des éléments **distincts**. C'est-à-dire que chaque élément d'un ensemble est unique et ne peut pas être répété.

Exemple

Considérons un ensemble qui est décrit comme:

$$E = \{2, 4, 6, 6, 8\}$$

Même si le nombre 6 est mentionné deux fois, en réalité, l'ensemble E est simplement :

$$E = \{2, 4, 6, 8\}$$

— **l'ordre** des éléments n'a pas d'importance. Cela signifie qu'un ensemble défini avec les éléments dans un certain ordre est le même que le même ensemble avec les éléments dans un ordre différent.

Exemple

Considérons l'ensemble suivant:

$$F = \{a, b, c, d\}$$

Peu importe comment nous choisissons d'écrire les éléments, l'ensemble reste le même. Ainsi, les ensembles suivants sont tous équivalents à l'ensemble F :

$$F = \{a, c, b, d\}$$

$$F = \{d, c, b, a\}$$

$$F = \{b, a, d, c\}$$

Dans chaque cas, l'ensemble contient exactement les mêmes éléments, donc il est considéré comme identique, indépendamment de l'ordre dans lequel les éléments sont listés.

2.1.3 Ensemble des parties

Définition

Pour un ensemble donné A, l'**ensemble des parties** de A, noté $\mathcal{P}(A)$, est l'ensemble de tous les sous-ensembles possibles de A.

Exemples :

— Soit $A = \{1, 2\}$. Alors :

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

— Considérons un ensemble B dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles : $B = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$. L'ensemble des parties de B est :

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{\{2, 3\}\}, \{\{4, 5, 6\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{1\}, \{4, 5, 6\}\}, \{\{2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}, B\}$$

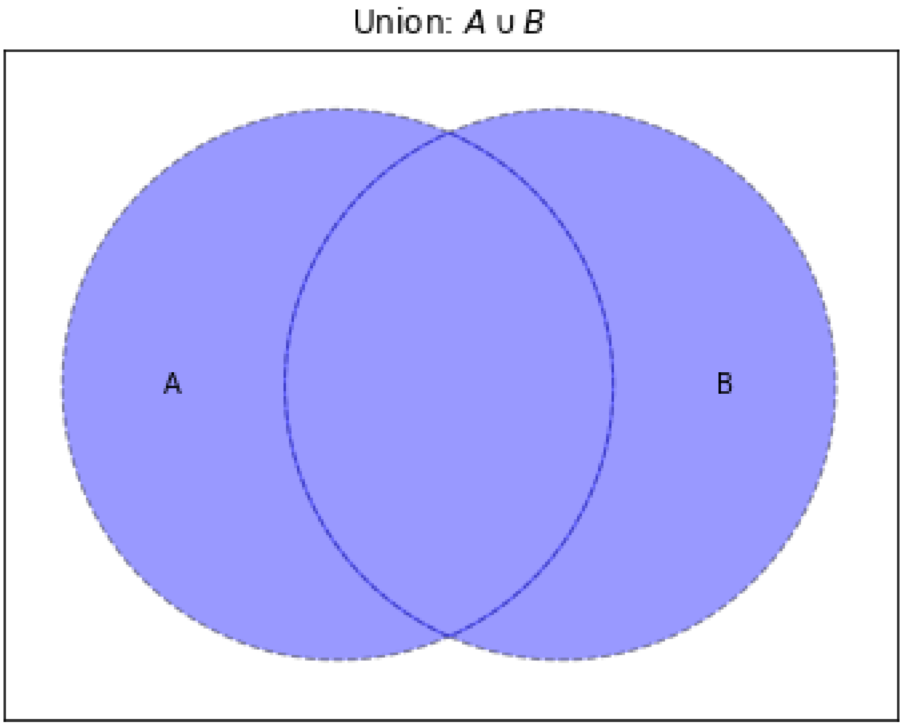
2.2 Opérations sur les ensembles

2.2.1 Union

Définition

L'**union** de deux ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments qui sont dans A, dans B, ou dans les deux.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Exemple

Si $A = \{1, 2, 3, a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, c, d, e\}$

Alors

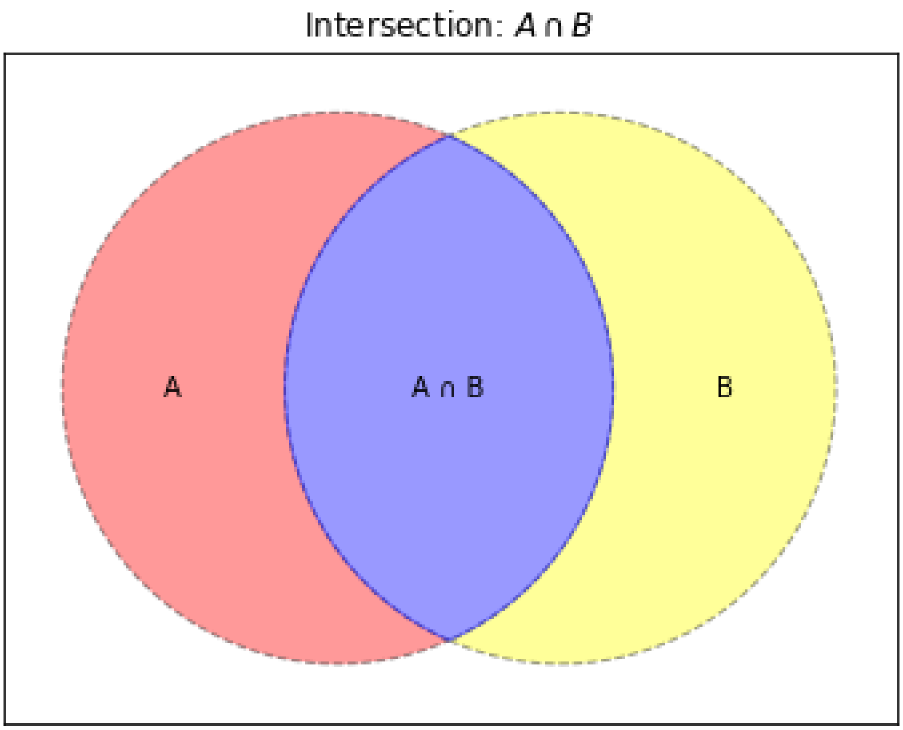
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, a, b, c, d, e\}$$

2.2.2 Intersection

Définition

L'**intersection** de deux ensembles A et B contient tous les éléments qui sont à la fois dans A et dans B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$$



Exemple

Si $A = \{1, 2, 3, a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, c, d, e\}$

Alors

$$A \cap B = \{2, c\}$$

Remarque

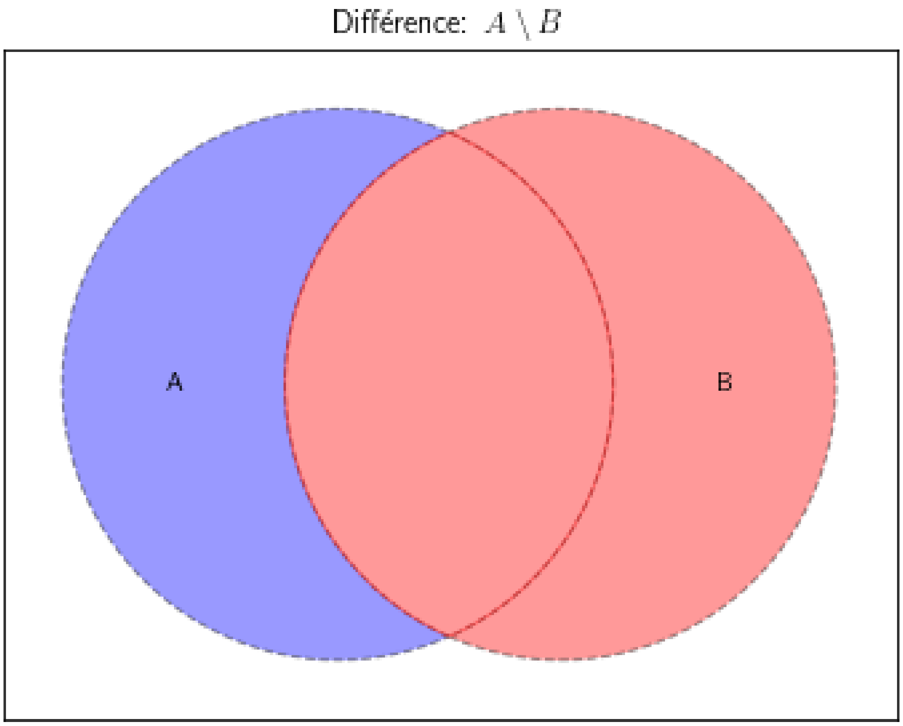
On dit que deux ensembles A et B sont **disjoint** si $A \cap B = \emptyset$. Cette notion va etre necessaire si l'on va parler des evenements dans le Chapitre 3

2.2.3 Différence

Définition

La **différence** entre les ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments qui sont dans A mais pas dans B.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\}$$



Exemple

Si $A = \{1, 2, 3, a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, c, d, e\}$

Alors

$$A \setminus B = \{1, 3, a, b\}$$

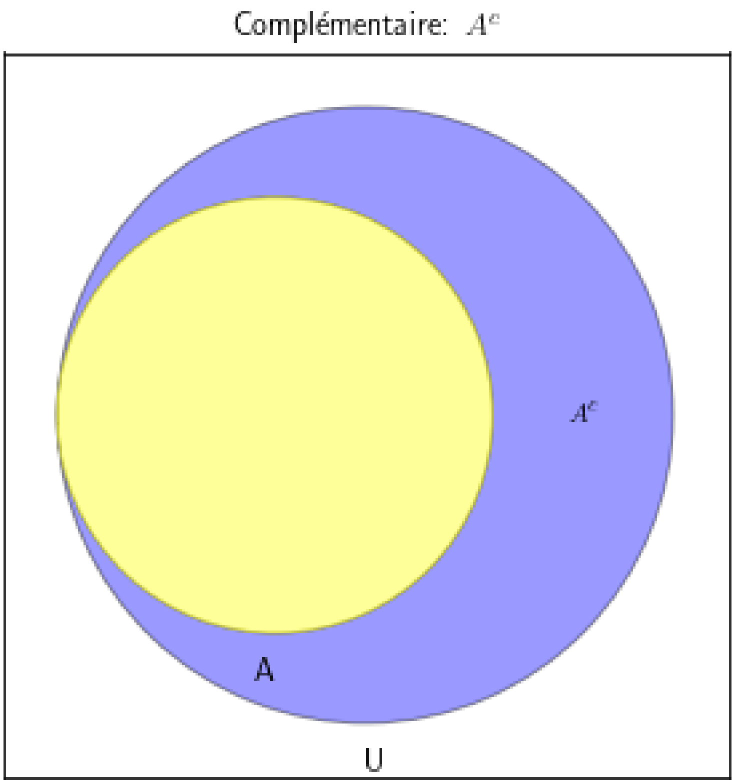
2.2.4 Complémentaire

Définition

Supposons qu'il existe un ensemble universel U qui contient tous les éléments considérés. Le **complémentaire** de l'ensemble A dans U (note A^c ou A^c) est l'ensemble de tous les éléments qui sont dans U mais pas dans A.

$$A^c = U \setminus A$$

Avertissement: Pour désigner le complémentaire d'un ensemble A, nous utiliserons la notation A^c ou A^c selon ce qui nous semble le plus clair dans le contexte. Les deux notations sont équivalentes et couramment utilisées.



Exemple

Si $A = \{1, 2, 3, a, b, c\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, a, b, c, d, e\}$

Alors

$$A^c = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, d, e\}$$

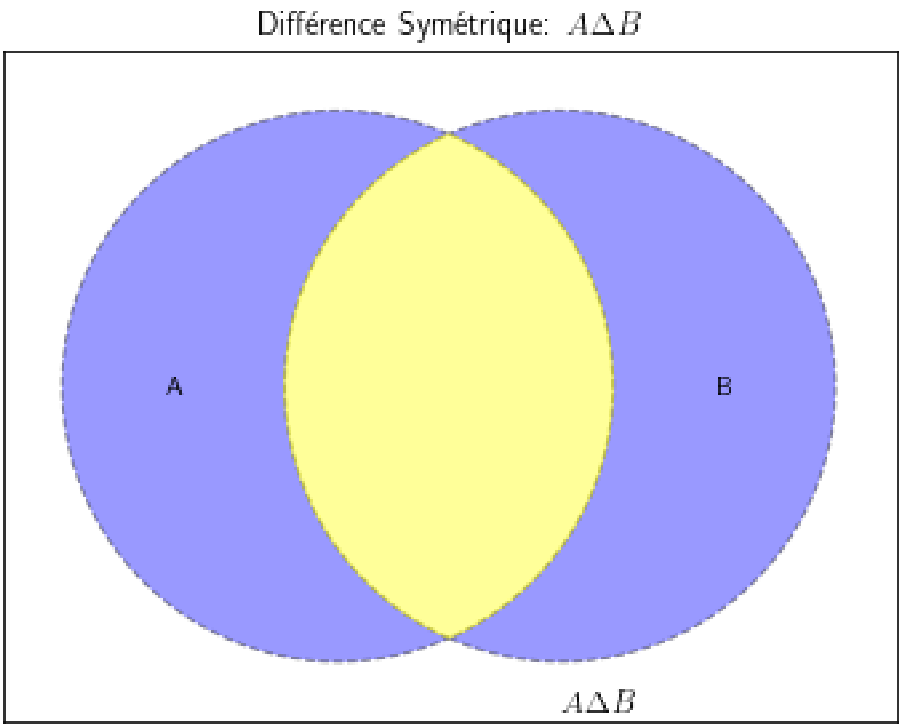
2.2.5 Différence Symétrique

Définition

Soient A et B deux ensembles. La **différence symétrique** de A et B, notée $A\Delta B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B, mais pas à les deux simultanément.

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

En d'autres termes, elle correspond à l'union des différences $A \setminus B$ et $B \setminus A$.



Exemple

Si $A = \{1, 2, 3, a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, c, d, e\}$

Alors

$$A\Delta B = \{1, 3, 4, 6, 8, 10, a, b, d, e\}$$

2.2.6 Propriétés

Complémentaire

1. **Double Complémentaire** :
   —
   $$(A^c)^c = A$$
2. **Complémentaire de l'Union et de l'Intersection** :
   —
   $$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
   —
   $$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Différence

1. **Différence avec soi-même** :
   —
   $$A \setminus A = \emptyset$$
2. **Différence avec l'Ensemble Vide** :
   —
   $$A \setminus \emptyset = A$$
   —
   $$\emptyset \setminus A = \emptyset$$
3. **Différence et Complémentaire** :
   —
   $$A \setminus B = A \cap B^c$$

Différence Symétrique

1. **Propriété Commutative** :
   —
   $$A\Delta B = B\Delta A$$
2. **Propriété Associative** :
   —
   $$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$$
3. **Différence Symétrique avec soi-même** :
   —
   $$A\Delta A = \emptyset$$
4. **Différence Symétrique avec l'Ensemble Vide** :
   —
   $$A\Delta\emptyset = A$$
5. **Relation avec l'Union et l'Intersection** :
   —
   $$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
   —
   $$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B - A)$$

2.3 Le Produit Cartésien

2.3.1 Couple

Définition

Un couple est une paire ordonnée d'éléments. Si a et b sont deux éléments (pas nécessairement distincts), le couple formé par a et b est noté (a, b).

Propriété de l'Ordre

La propriété fondamentale des couples est la suivante :

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ et } b = d$$

Cela signifie que deux couples sont égaux si et seulement si leurs premiers éléments sont égaux entre eux et leurs seconds éléments sont égaux entre eux.

Exemple

Si nous avons deux couples $(1, 2)$ et $(1, 3)$, alors ces deux couples sont différents car leurs seconds éléments sont différents.

2.3.2 Produit Cartésion

Définition

Soient A et B deux ensembles. Le produit cartésien de A et B, noté $A \times B$, est défini par :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$$

Exemples

— Considérons les ensembles $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b\}$, alors :
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

— Considérons les ensembles $A = \{x, y\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$. Le produit cartésien de A et B est :
$$A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$$

Propriété de l'Ordre

Le produit cartésien n'est pas commutatif, c'est-à-dire que $A \times B \neq B \times A$ en général. Ceci est dû au fait que les couples (a, b) et (b, a) sont considérés comme différents à moins que $a = b$.

Exemple

Prenons $A = \{1, 2\}$ et $B = \{x, y\}$. Alors,

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$$

$$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\}$$

Généralisation des Couples et Produits Cartésiens

n-uplet

Un n-uplet est une liste ordonnée de n éléments, où n est un entier positif. Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont n éléments (pas nécessairement distincts), le n-uplet formé par ces éléments est noté $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Produit Cartésien pour n Ensembles

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n ensembles. Le produit cartésien de ces ensembles, noté $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, est défini par :

$$\prod_{i=1}^{n} A_n = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

Exemples

Exemple 1 :

Soient $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{1, 2\}$ et $A_3 = \{x\}$. Le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times A_3$ est :

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(0, 1, x), (0, 2, x)\}$$

Exemple 2 :

Soient $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{a, b\}$ et $A_3 = \{\bullet, \triangle\}$. Le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times A_3$ est :

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(1, a, \bullet), (1, b, \bullet), (2, a, \bullet), (2, b, \bullet), (1, a, \triangle), (1, b, \triangle), (2, a, \triangle), (2, b, \triangle)\}$$

Exemple 3 : Produit Cartésien dans l'espace euclidien n-dimensionnel

Le produit cartésien de n copies de l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$, est noté $\mathbb{R}^n$ et est défini comme suit :

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ pour tout } i = 1, \dots, n\}$$

Chaque élément de $\mathbb{R}^n$ est un n-uplet où chaque composant x_i est un nombre réel. Par exemple :
- Dans $\mathbb{R}^2$, les éléments sont des couples de la forme (x, y), ce qui peut représenter un point dans le plan cartésien.
- Dans $\mathbb{R}^3$, les éléments sont des triplets (x, y, z), pouvant représenter un point dans l'espace tridimensionnel.
- De manière générale, dans $\mathbb{R}^n$, les éléments sont des n-uplets qui peuvent représenter des points dans un espace à n dimensions.

Exemple 4 : Produit Cartésien avec Ensembles Vides

Soient $A_1 = \emptyset$ (l'ensemble vide) et $A_2 = \{1, 2\}$. Le produit cartésien $A_1 \times A_2$ est :

$$A_1 \times A_2 = \emptyset$$

Puisque l'ensemble vide n'a aucun élément, le produit cartésien est également vide.

2.4 Applications

2.4.1 Application

Définition

Soient A et B deux ensembles.

Une **application** f de A dans B est un sous-ensemble $f \subset A \times B$ tel que pour tout $x \in A$, il existe un et un seul $y \in B$ tel que $(x, y) \in f$.

Dans cette définition :

- **Existence :** Pour chaque élément x de l'ensemble de départ A, il doit y avoir au moins un élément y dans l'ensemble d'arrivée B tel que le couple (x, y) appartienne à f.
- **Unicité :** Pour chaque élément x de l'ensemble de départ A, il ne peut y avoir qu'un seul élément y dans l'ensemble d'arrivée B tel que le couple (x, y) appartienne à f. Autrement dit, une valeur de départ x ne peut pas être associée à deux valeurs d'arrivée différentes dans B.

Si f est une application de l'ensemble A dans l'ensemble B et que pour chaque $x \in A$, $f(x)$ est l'image de x dans B, on note:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Exemples

1. Si $A = \{x, y, z\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$:
   - L'ensemble défini par $\{(x, 1), (y, 2), (z, 3)\}$ est une application de A dans B, car chaque élément de A est associé à un et un seul élément de B.
   - L'ensemble défini par $\{(x, 1), (y, 2), (z, 2)\}$ est une application de A dans B.
   - L'ensemble défini par $\{(x, 1), (x, 2), (y, 4), (z, 3)\}$ n'est pas une application de A dans B, car l'élément x de A est associé à plus d'un élément de B (1 et 2), ce qui contredit la définition d'une application.
2. L'opération qui élève chaque nombre réel au carré constitue une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

3. L'association de chaque nombre réel à sa partie entière définit une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

Remarque

— L'ensemble des applications de A dans B est noté B^A.
— Deux applications (f et g) sont dites égales si :

1. Elles ont le même ensemble de départ.
2. Elles ont le même ensemble d'arrivée.
3. Elles associent à chaque élément de l'ensemble de départ le même élément dans l'ensemble d'arrivée, c'est-à-dire que pour tout élément x dans l'ensemble de départ, $f(x) = g(x)$.

2.4.2 Image et antécédent

Définition

Soit $f : A \to B$ une application. Pour un sous-ensemble C de A, l'**image** de C par f est le sous-ensemble de B donné par:

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}$$

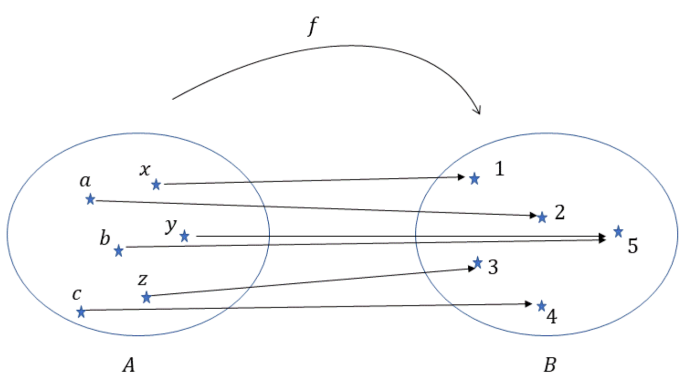
De même, pour un sous-ensemble D de B, l'**antécédent** de D par f est le sous-ensemble de A donné par:

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

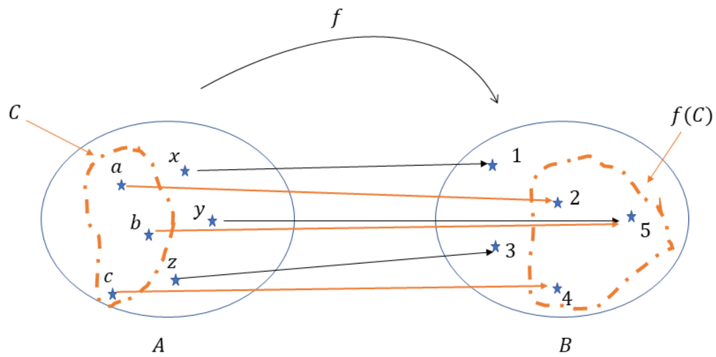
Exemples

— Exemple 1: Soit $A = \{a, b, c, x, y, z\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

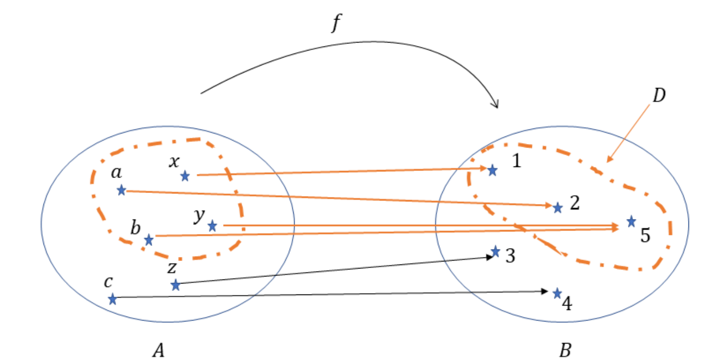
On considere l'application $f : A \to B$ défini par $\{(a, 2), (b, 5), (c, 4), (x, 1), (y, 5), (z, 3)\}$.



— Soit $C \subset A$ defini par $C = \{a, b, c\}$. Alors $f(C) = \{2, 4, 5\}$



— Soit $D \subset B$ defini par $D = \{1, 2, 5\}$. Alors $f(C) = \{a, b, x, y\}$



— Exemple 2: Soit $A = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, B = \mathbb{R}$. la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x+2}$$

— Pour le sous-ensemble $C = \{0, 1, 3\}$ de l'ensemble de départ $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, l'image de C par f est

$$f(C) = \left\{ \frac{1}{0+2}, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{3+2} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \right\}$$

— Considérons maintenant un sous-ensemble $D = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\}$ de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. L'image réciproque de D par f, notée $f^{-1}(D)$, est l'ensemble des éléments x de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ tels que $f(x)$ appartient à D. Donc,

$$f^{-1}(D) = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \mid \frac{1}{x+2} \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\} \right\} = \left\{ 3, 1, -\frac{3}{2} \right\}$$

2.4.3 Application injective (ou injection)

Définition

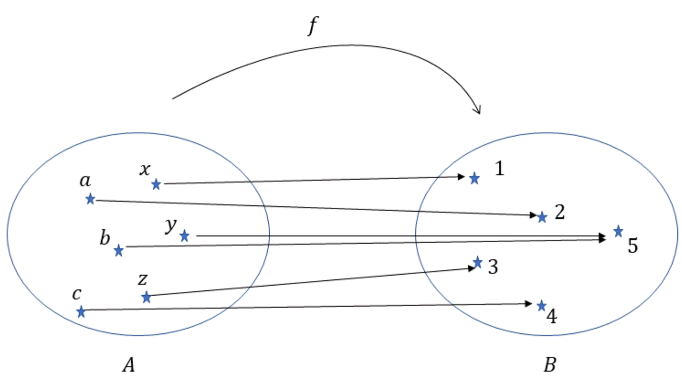
Une application $f : A \to B$ est dite **injective** si tout élément distinct de A a une image distincte dans B.

Autementdit, $\forall x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

Ou encore, $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$.

Exemples

— On considere l'application $f : A \to B$ défini par $\{(a, 2), (b, 5), (c, 4), (x, 1), (y, 5), (z, 3)\}$.



Cette apllication n'est pas injective car b et y sont distincts mais ils ont la meme image 5.

— Considérons $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ défini par $f(x) = 2x$. Cette application est injective car si $x_1 \neq x_2$, alors $2x_1 \neq 2x_2$.

2.4.4 Application surjective (ou surjection)

Définition

Une application $f : A \to B$ est dite **surjective** si chaque élément de B est l'image d'au moins un élément de A.

Autrementdit, $f : A \to B$ est dite **surjective** si $\forall y \in B, \exists x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Exemples

— Considérons l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ où $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des nombres réels positifs, définie par $f(x) = x^2$. Cette application est surjective car pour tout y dans $\mathbb{R}^+$, il existe un x tel que $f(x) = y$ (par exemple, $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$).
— En revanche, l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Cette application n'est pas surjective car les nombres negatifs n'ont pas d'anticidants.

2.4.5 Application bijective (ou bijection)

Définition

Une application $f : A \to B$ est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. Cela signifie qu'il y a une correspondance unique et réciproque entre les éléments de A et les éléments de B.

Exemples

— L'application identite Id_A definie par:

$$Id_A : A \to A$$
$$x \mapsto x$$

est une bijection de A dans A. car chaque element x de A a un et un seul anticidant (lui-meme).

— Considérons l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(x) = x + 1$. Cette application est bijective. En effet, chaque element y de $\mathbb{Z}$ a un et un seul anticidant, $x = y - 1$.

Propriété

Si une application est bijective, il existe une application inverse $f^{-1} : B \to A$ telle que $f^{-1}(f(a)) = a$ pour tout a dans A, et $f(f^{-1}(b)) = b$ pour tout b dans B.

Exemples

Pour l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie précédemment par $f(x) = x + 1$, l'application inverse est $f^{-1}(x) = x - 1$.

2.5 Ensembles finis, dénombrables et non dénombrables

2.5.1 Ensemble Fini

Definition

Un ensemble A est dit **fini** s'il vide ($A = \emptyset$) ou s'il existe un nombre entier $n \geq 1$ et une application bijective $f : A \to \{1, \dots, n\}$. L'entier n est alors dit **cardinal** de A, et on écrit $\#A = n$ ou $card\ A = n$ ou encore $|A| = n$. On dit que A est **infini** s'il n'est pas fini.

Exemples

— L'ensemble des faces d'un dé est fini et a pour cardinal 6.
— L'ensemble des lettres de l'alphabet est fini et a pour cardinal 26 (en considérant l'alphabet anglais).

— Par convention, l'ensemble vide a pour cardinal 0, c'est-à-dire $\#\emptyset = 0$.
— Un Singleton, par exemple $\{a\}$, a pour cardinal 1.

2.5.2 Ensemble Infini Dénombrable

Definition

Un ensemble A est dit **infini dénombrable** (ou tout simplement **dénombrable**) s'il existe une bijection entre A et $\mathbb{N}$.

Exemples

— L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est dénombrable (on considerer l'application identite).
— L'ensemble des entiers naturels pairs $2\mathbb{N}$ est dénombrable (l'application de $\mathbb{N}$ dans $2\mathbb{N}$ definie par $n \mapsto 2n$ est bijective).
— L'ensemble des entiers naturels impairs $2\mathbb{N}+1$ est dénombrable (l'application de $\mathbb{N}$ dans $2\mathbb{N}+1$ definie par $n \mapsto 2n+1$ est bijective).
— L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est dénombrable, même s'il s'étend dans les deux directions à l'infini.
— l'ensemble des rationels $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

2.5.3 Ensemble Infini Non Dénombrable

Definition

Un ensemble A est dit **infini non dénombrable** (ou tout simplement **non dénombrable**) s'il est infini et ne peut être mis en bijection avec les entiers naturels $\mathbb{N}$.

Exemples

— Un exemple classique d'ensemble infini non dénombrable est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
— Tout ensemble qui est en bejiction avec $\mathbb{R}$ est non dénombrable (pourquoi?).

2.6 Exercices

2.6.1 Exercice 1

1. Donner un exemple d'un ensemble qui est un élément d'un autre ensemble.
2. Spécifier l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$ en utilisant la méthode d'extension.
3. Décrire l'ensemble B des entiers pairs plus grands que 3 et inférieurs à 11 en utilisant la méthode de compréhension.
4. Définissez un ensemble en utilisant la méthode de compréhension (ensemble des nombres pairs entre 0 et 10).
5. Écrivez en extension l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et 5.
6. Écrire l'ensemble des parties de $\{1, 2, \{3, 4\}\}$.
7. Donner un exemple d'un ensemble spécifié par une propriété et non par une énumération.

2.6.2 Exercice 2 :

3. Déterminer si $\{1, 2\}$ et $\{1, \{2\}\}$ sont les memes.
4. Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{\{1, 2, 3\}, 4\}$. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :
   — $1 \in A$
   — $A \subset B$
   — $A \in B$
   — $2 \subset A$
5. Soient $X = \{a, \{b, c\}\}$ et $Y = \{\{a\}, \{b, c\}\}$. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :
   — $a \in X$
   — $\{b, c\} \subset X$
   — $\{a\} \in Y$
   — $X \subset Y$
6. Soit $Z = \{5, \{6, 7\}, 8\}$. Répondez :
   — $6 \in Z$ est-il vrai ?
   — Est-il vrai que $\{6\} \subset Z$?
   — Si $W = \{5, 6, 7, 8\}$, $W \subset Z$ est-il vrai ?
   — $\{8\} \in Z$ est-il vrai ?
7. Considérez $E = \{x \mid x \text{ est un nombre pair entre 1 et } 10\}$ et $F = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Vérifiez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :
   — $2 \in E$
   — $F \subset E$
   — $E \in F$
   — $\{4, 6\} \subset E$

2.6.3 Exercice 3 :

1. Trouver l'ensemble des parties de $\{a, b, c\}$.
2. Combien d'éléments contient l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3, 4\}$?
3. Donnez l'ensemble des parties de $\emptyset$.
4. Démontrez que si $A \subset B$, alors $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
5. Démontrez que pour deux ensembles A et B, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(A \cap B)$.
6. Montrez que $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$ pour un ensemble fini A.

2.6.4 Exercice 4 :

On considere l'ensemble universel $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$.

1. Trouver l'union, l'intersection, et la différence, la difference symetrique de A et B.
2. Meme question pour A et C
3. Déterminer le complémentaire A, B, et C.
4. calculer $(A \cup B) \cup C$ et $A \cup (B \cup C)$.

2.6.5 Exercice 5 :

1. Montrez que $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$ (lois commutatives).
2. Prouvez que $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
3. Démontrez que si $A \subset B$, alors $A \cup C \subset B \cup C$ et $A \cap C \subset B \cap C$.
4. Démontrez que si $A \subset B$, alors $B^c \subset A^c$.
5. Montrez que $A \setminus B = A \cap B^c$.
6. Démontrez que si $A \subset B$, alors $B \setminus A$ et $A \cap B$ sont disjoints.
7. Prouvez que $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.
8. Montrez que la différence symétrique est commutative ($A \Delta B = B \Delta A$).
9. Démontrez que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
10. Prouvez que si $A \Delta B = \emptyset$, alors $A = B$.

2.6.6 Exercice 6 :

On considere l'ensemble universel $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Verifier que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ et $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2.6.7 Exercice 7 :

1. Soient A et B deux ensembles. Utilisez les lois de De Morgan pour montrer les équivalences suivantes :
   1. Montrez que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
   2. Montrez que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
2. Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ une collection finie d'ensembles. Utilisez les lois de De Morgan pour montrer les équivalences suivantes :
   1. Montrez que $(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$.
   2. Montrez que $(\bigcap_{i=1}^n A_i)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$.
3. Considérez une collection (dénombrable ou non) d'ensembles $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, où I est un index quelconque. Utilisez les lois de De Morgan pour montrer les équivalences suivantes :
   1. Montrez que $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$.
   2. Montrez que $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$.

2.6.8 Exercice 8 :

1. Construire le produit cartésien $A \times B$ pour $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b\}$.
2. Si $C = \{0, 1\}$ et $D = \{x, y\}$, combien d'éléments contient $C \times D$?
3. Représenter graphiquement le produit cartésien $E \times F$ où $E = \{1, 2\}$ et $F = \{3, 4\}$.

2.6.9 Exercice 9 :

1. Montrez que si A et B sont des ensembles non vides, alors $A \times B$ est non vide.
2. Démontrez que $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
3. Prouvez que si $A \times B = A \times C$ et A est non vide, alors $B = C$.
4. Démontrez que pour tous ensembles A, B, C, $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$.

2.6.10 Exercice 10:

1. Définir ce qu'est une application entre deux ensembles.
2. Donner un exemple de fonction qui n'est pas une application.
3. Si $f : x \mapsto x^2$, trouver l'image de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ par f.
4. Déterminer l'image réciproque de $\{4, 9\}$ par la même fonction f.
5. Expliquer pourquoi l'image réciproque d'un singleton par une fonction peut contenir plusieurs éléments.

2.6.11 Exercice 11 :

Considérons une fonction $f : E \to F$ et des ensembles A, B deux sous-ensembles de E, $A_1, \ldots A_n$ des sous-ensembles de E, et $(A_\alpha)_{\alpha \in I)}$, où I est un index quelconque, une famille de sous-ensembles de E.

Pour A **et** B :

1. Montrez que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, et fournissez un exemple où l'égalité n'est pas vraie.
2. Montrez que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$, et fournissez un exemple où l'égalité n'est pas vraie.
3. Montrez que $f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$, et fournissez un exemple où l'égalité n'est pas vraie.
4. Montrez que $f(A^c)$ n'a pas de relation directe avec $f(A)^c$, et expliquez pourquoi.
5. Montrez que $f(A \triangle B) \subset f(A) \triangle f(B)$, et fournissez un exemple où l'égalité n'est pas vraie.

Pour $A_1, \ldots, A_n$:

1. Montrez que $f\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^n f(A_i)$, et fournissez un exemple où l'égalité n'est pas vraie.
2. Montrez que $f\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^n f(A_i)$, et fournissez un exemple où l'égalité n'est pas vraie.

Pour A_α **(**$\alpha \in I$**)** :

1. Montrez que $f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$, et fournissez un exemple où l'égalité n'est pas vraie.
2. Montrez que $f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$, et fournissez un exemple où l'égalité n'est pas vraie.

2.6.12 Exercice 12:

Considérons une fonction $f : E \to F$ et des ensembles A, B deux sous-ensembles de E, $A_1, \ldots A_n$ des sous-ensembles de E, et $(A_\alpha)_{\alpha \in I)}$, où I est un index quelconque, une famille de sous-ensembles de E.

Pour A **et** B :

1. Montrez que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
2. Montrez que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
3. Montrez que $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.
4. Montrez que $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.
5. Montrez que $f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$.

Pour $A_1, \ldots, A_n$:

1. Montrez que $f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(A_i)$.
2. Montrez que $f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(A_i)$.

Pour A_α **(**$\alpha \in I$**)** :

1. Montrez que $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(A_\alpha)$.
2. Montrez que $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(A_\alpha)$.

2.6.13 Exercice 13:

1. Donner un exemple d'une application qui n'est ni injective ni surjective d'un semble A dans un ensbmle B (les ensembles a donner).
2. Donner un exemple d'une application qui n'est pas surjective mais injective d'un semble A dans un ensbmle B (les ensembles a donner).
3. Donner un exemple d'une application qui n'est pas injective mais surjective d'un semble A dans un ensbmle B (les ensembles a donner).
4. Donner un exemple d'une application qui bijective d'un semble A dans un ensbmle B (les ensembles a donner).
5. Traiter selon les cas ($\#A < \#B$, $\#A > \#B$, et $\#A = \#B$) les types d'applications qu'on peut construire (injections, surjections, bijections).
6. Pour $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b, c\}$ donner toutes les application, les applications injectives, les applications surjective, et les applications bijective de A dans B. quel sera le cas si $\#A = n$?

2.6.14 Exercice 14:

Considérons une fonction $f : E \to F$ et des ensembles $A \subset E$ et $B \subset F$.

1. Montrez que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et fournissez un exemple où l'égalité n'est pas vraie.
2. Montrez que $f^{-1}(f(A)) \supset A$ et fournissez un exemple où l'égalité n'est pas vraie.
3. Si f est injective, montrez que $f^{-1}(f(A)) = A$.
4. Si f est surjective, montrez que $f(f^{-1}(B)) = B$.

2.6.15 Exercice 15:

1. Montrez que l'application $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$ est bijective. En déduire que l'ensemble $2\mathbb{N}$ est dénombrable.
2. Montrez que l'application $g : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} + 1$ définie par $g(n) = 2n + 1$ est bijective. En déduire que l'ensemble $2\mathbb{N} + 1$ est dénombrable.
3. Montrez que l'application $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, qui associe à chaque nombre naturel un entier (par exemple, en alternant positifs et négatifs), est bijective. En déduire que l'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

CHAPITRE 3

Dénombrement

Le dénombrement concerne le comptage des éléments d'un ensemble, en particulier lorsqu'ils sont finis ou dénombrables. Il est essentiel en probabilités, notamment pour étudier les variables aléatoires discrètes et leurs distributions. Le dénombrement offre les outils nécessaires pour compter le nombre de façons dont un événement peut se produire, que l'on s'intéresse à des tirages avec remise, sans remise, à des échantillons ordonnés ou non ordonnés.

3.1 Propriétés du Cardinal

La discussion antérieure a introduit la notion de cardinalité en théorie des ensembles. La présente section se propose de développer une compréhension approfondie des propriétés qui régissent le dénombrement.

3.1.1 Principe de l'addition

La formulation du principe d'addition se présente comme suit :

Principe de l'addition

Si une situation A peut se produire de n_1 façons différentes et une autre situation B de n_2 façons différentes, et que les deux situations ne peuvent pas se présenter en même temps, alors il y a $n_1 + n_2$ manières différentes pour que A ou B se réalise.

Ce principe s'appuie sur les propriétés cardinales de l'union et de l'intersection des ensembles.

Union d'Ensembles

Propriété

— Pour deux ensembles A et B disjoint (i.e $\#A \cap B = \emptyset$) on a:

$$\#A \cup B = \#A + \#B$$

— Plus généralement, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des ensembles deux à deux disjoints (i.e $\#A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$), alors:

$$\#\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \#A_i$$

Remarque

quite a considerer les ensembles $A \setminus B$, $B \setminus A$, et $A \cap B$, on trouve que pour deux ensembles quelconques A et B :

$$\#A \cup B = \#A + \#B - \#A \cap B$$

Exemples

— **Exemple 1** : Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$. Alors, $\#A \cup B = 5$ et $\#A + \#B| - \#A \cup B = 3 + 3 - 1 = 5$.
— **Exemple 2** : Soient $A = \{a, b\}$ et $B = \{1, 2\}$. Ici, A et B sont disjoints, donc $\#A \cup B = \#A + \#B = 2 + 2 = 4$.
— **Exemple 3** : Si nous avons 3 chemises et 4 pantalons différents, le nombre de façons de choisir un article (**une chemise OU un pantalon**) est $3 + 4 = 7$.

Intersection d'Ensembles

Propriété

Pour deux ensembles A et B :

$$\#A \cap B \leq \min(\#A, \#B)$$

Exemples

— **Exemple 1** : Soient $A = \{x, y, z\}$ et $B = \{y, z\}$. Alors, $\#A \cap B = 2$ et $\min(\#A, \#B) = \min(3, 2) = 2$.
— **Exemple 2** : Pour n'importe quel ensemble A, $\#A \cap \emptyset = 0$ car l'intersection de tout ensemble avec l'ensemble vide est l'ensemble vide.

Exemple d'application: Gestion de Stock d'Ordinateurs:

Dans une boutique informatique, on propose à la vente quatre types d'ordinateurs selon le système d'exploitation (OS) installé :

1. Des ordinateurs avec Windows uniquement.
2. Des ordinateurs avec Linux uniquement.
3. Des ordinateurs avec un système dual boot Windows/Linux.
4. Des ordinateurs sans aucun système d'exploitation installé.

On dispose des informations suivantes : - Il y a 120 ordinateurs au total. - 70 ordinateurs ont Windows installé (ce chiffre inclut les ordinateurs avec Windows uniquement et ceux avec dual boot). - 50 ordinateurs ont Linux installé (ce chiffre inclut les ordinateurs avec Linux uniquement et ceux avec dual boot). - 10 ordinateurs n'ont aucun système d'exploitation installé. - 15 ordinateurs ont à la fois Windows et Linux (dual boot). **Questions** : A. Combien y a-t-il d'ordinateurs avec uniquement Windows installé ? B. Combien y a-t-il d'ordinateurs avec uniquement Linux installé ? C. Utilisez les lois de De Morgan pour confirmer le nombre d'ordinateurs qui ont au moins un système d'exploitation installé. Pour répondre à ces quesitons, on va suivre les étapes suivantes :

— Soient les ensembles :
  — W l'ensemble des ordinateurs avec Windows.
  — L l'ensemble des ordinateurs avec Linux.
  — D l'ensemble des ordinateurs avec un système dual boot (Windows et Linux).
  — N l'ensemble des ordinateurs sans aucun système d'exploitation installé.
— On sait que :
  — $\#W = 70$
  — $\#L = 50$
  — $\#D = 15$
  — $\#N = 10$
  — Le total des ordinateurs est $\#(W \cup L \cup N) = 120$.
— La formule de dénombrement pour deux ensembles avec intersection est :

$$\#(W \cup L) = \#W + \#L - \#(W \cap L)$$

— Mais, puisque $\#(W \cap L) = \#D$, on peut réécrire cette formule comme :

$$\#(W \cup L) = \#W + \#L - \#D$$

— Ainsi, le nombre d'ordinateurs avec soit Windows, soit Linux, soit les deux (sans considérer ceux sans OS) est :

$$\#(W \cup L) = 70 + 50 - 15 = 105$$

— À partir de là, on peut répondre aux questions :

  A. Le nombre d'ordinateurs avec uniquement Windows installé est $\#W - \#D$, soit $70 - 15 = 55$.

  B. Le nombre d'ordinateurs avec uniquement Linux installé est $\#L - \#D$, soit $50 - 15 = 35$.

  C. Selon les lois de De Morgan, le complément de l'union de W et L est équivalent à l'intersection des compléments de W et L. Pour trouver le nombre d'ordinateurs qui ont au moins un système d'exploitation installé, on prend le complément de N (les ordinateurs sans OS) dans le total, soit

$$120 - \#N = 120 - 10 = 110$$

3.1.2 Principe de la multiplication

Le principe de la multiplication est connue par **Le principe fondamental de dénombrement**. La formulation du principe de la multiplication se présente comme suit :

principe

Si une situation A peut se produire de n_1 façons différentes et une autre situation B de n_2 façons différentes, alors les deux situations A et B peuvent se produire simultanément de $n_1 \times n_2$ façons.

Ce principe s'appuie sur les propriétés cardinales du produit cartésien des ensembles.

Produit Cartésien d'Ensembles

Propriété

Pour deux ensembles A et B :

$$\#A \times B = \#A \cdot \#B$$

Plus généralement, pour des ensembles $A_1, \dots, A_n$:

$$\#\prod_{i=1}^{n} A_i = \prod_{i=1}^{n} \#A_i$$

Exemples

— **Exemple 1** : Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b\}$. Alors, $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$, donc $\#A \times B = 4 = \#A \cdot \#B$.

— **Exemple 2** : Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \emptyset$, alors $A \times B = \emptyset$ et donc $\#A \times B = 0 = \#A \cdot \#B$.

— **Exemple 3** : Pour le même ensemble de vêtements, le nombre de façons de choisir **une chemise ET un pantalon** est $3 \times 4 = 12$.

Exemple d'application: Capacité des numéros de cartes SIM

Les opérateurs de télécommunications distribuent des numéros de téléphone uniques pour chaque carte SIM. Imaginons qu'un opérateur attribue des numéros commençant par 06, suivis de 8 chiffres aléatoires. Nous souhaitons savoir combien de numéros uniques peuvent être créés et en combien d'années la totalité de ces numéros serait attribuée en prenant en compte la croissance de la population.

Questions :

1. Combien de numéros uniques de cartes SIM de la forme **06XX-XX-XX-XX** sont possibles ?
2. En supposant que la population totale du Maroc est de 40 millions avec un taux de croissance annuel (supposé fixe) de 1.5%, et en considérant que la population évolue selon la formule de croissance exponentielle ci-dessous, et que chaque personne possède exactement une carte SIM, combien d'années faudra-t-il pour que tous les numéros de cartes SIM soient attribués ?

La formule de la croissance exponentielle est :

$$N(t) = N_0 \cdot (1 + r)^t$$

où $N(t)$ est la population totale à l'année t, N_0 est la population initiale (40 millions), r est le taux de croissance annuel (1.5% ou 0.015), et t est le nombre d'années.

Pour résoudre ces questions, nous appliquons le principe de multiplication.

— Pour la question 1, chaque "x" peut prendre une valeur entre 0 et 9, ce qui donne 10 possibilités par "x". Comme il y a 8 emplacements pour les "x", le nombre total de combinaisons de numéros de cartes SIM est :

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^8 = 100,000,000$$

Il y a donc 100 millions de numéros de cartes SIM uniques possibles.

— Pour la question 2, nous supposons que chaque personne a une carte SIM et que la population augmente à un taux constant de 1.5% par an. Nous voulons trouver t lorsque $N(t)$ atteint 100 millions, soit le nombre total de combinaisons possibles pour les numéros de cartes SIM :

$$100,000,000 = 40,000,000 \cdot (1 + 0.015)^t$$

$$\frac{100,000,000}{40,000,000} = (1 + 0.015)^t$$

$$2.5 = (1.015)^t$$

$$t = \frac{\ln(2.5)}{\ln(1.015)}$$

En calculant cette dernière expression, on obtient $t \approx 61.5$. Cela signifie qu'il faudra environ 61 ans et demi avant que tous les numéros de cartes SIM ne soient attribués.

Remrque

Il est important de noter que le calcul ci-dessus repose sur l'hypothèse simplificatrice d'un taux de croissance démographique constant et de l'attribution d'une carte SIM à chaque individu. En réalité, le taux de croissance de la population peut varier et le nombre de personnes possédant une carte SIM est généralement inférieur au nombre total de la population. Par conséquent, le délai réel pour attribuer tous les numéros de cartes SIM pourrait être plus long que l'estimation donnée, ce qui souligne le caractère approximatif de ces calculs.

3.1.3 Cardinal de l'ensemble des Parties

Propriété

Pour un ensemble A :

$$\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$$

Exemples

— **Exemple 1** : Soit $A = \{a, b\}$. L'ensemble des parties de A est $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, donc $\#\mathcal{P}(A) = 4 = 2^2 = 2^{\#A}$.

— **Exemple 2** : Si A est l'ensemble vide, alors $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$ et $\#\mathcal{P}(A) = 1 = 2^0 = 2^{\#A}$.

3.2 Techniques de dénombrement

Dans cette section, nous allons étudier les méthodes permettant de compter et d'énumérer les différentes façons dont des éléments peuvent être combinés, arrangés ou choisis dans diverses situations. Ces techniques sont essentielles pour résoudre une grande variété de problèmes dans des domaines tels que la statistique, la probabilité, la théorie des graphes, l'informatique, et bien d'autres. Il est à noter que toutes ces techniques sont à la base du principe fondamental du dénombrement.

3.2.1 Arrangements

Permutations

Définition

Une permutation est un arrangement de tous les éléments d'un ensemble dans un ordre particulier. En d'autres termes, c'est une manière de réorganiser les éléments d'un ensemble de façon à ce que chaque élément apparaisse exactement une fois dans la nouvelle séquence. Le nombre total de permutations possibles pour un ensemble de n éléments est donné par la factorielle de n, notée n!.

$$n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$$

Exemples

1. Pour un ensemble $\{a, b, c\}$, il existe $3! = 6$ permutations possibles : abc, acb, bac, bca, cab, et cba.
2. On souhaite déterminer combien de nombres de 4 chiffres peuvent être formés en utilisant les chiffres 1, 2, 3 et 4 sans répétition. Il s'agit donc de calculer les 4! = 24 permutations possibles, qui sont les suivantes : 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Arrangement de p éléments parmi n sans répétition

Définition

L'arrangement de p éléments distincts parmi n éléments, sans tenir compte de l'ordre, est appelé arrangement. Le nombre d'arrangements possibles est donné par la formule suivante :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times ... \times p$$

Exemples

1. **Mathématique :** Pour un ensemble $\{a, b, c, d\}$, le nombre d'arrangements possibles de 2 éléments est $A_4^2 = 12$.
2. **Réel :** Lorsqu'on choisit deux cours parmi cinq pour suivre ce semestre, l'ordre dans lequel les cours sont choisis n'a pas d'importance. Les arrangements sont utilisés pour calculer le nombre total de choix possibles.

3. Supposons que nous voulons créer un nombre de trois chiffres distincts en utilisant les chiffres 1, 2, 3 et 4. Nous pouvons utiliser la technique d'arrangement pour déterminer combien de nombres différents nous pouvons former. En utilisant la formule d'arrangement, nous pouvons calculer le nombre d'arrangements possibles de 3 chiffres parmi 4 :

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

Il y a donc 24 façons différentes de choisir trois chiffres distincts parmi 1, 2, 3 et 4. Parmi ces arrangements, nous pouvons former des nombres comme 123, 132, 214, 341, etc.

Arrangement de p éléments parmi n avec répétition

Définition

Lorsque l'on permet la répétition des éléments dans un arrangement, cela signifie qu'un élément peut apparaître plusieurs fois dans la séquence. Le nombre d'arrangements possibles de p éléments parmi n éléments avec répétition est donné par :

$$n^p$$

Exemples

1. Pour un ensemble $\{a, b, c\}$ où la répétition est autorisée, le nombre d'arrangements possibles de 2 éléments est $3^2 = 9$. Ces arrangements sont: $aa, bb, cc, ab, ac, ba, bc, ca, cb$.
2. Lorsqu'on crée un code PIN à quatre chiffres, chaque chiffre peut être choisi parmi les dix chiffres possibles (0-9). Le nombre total d'arrangements possibles est de $10^4 = 10,000$.
3. Le nombre d'applications d'un ensemble A dans un ensemble B que l'on peut former est: $\#B^A = \#B^{\#A}$ (d'où la notation B^A pour l'ensemble des applications de A dans B).

3.2.2 Combinaisons

Combinaison de p éléments parmi n sans répétition

Définition

Une combinaison est une sélection de p éléments parmi n éléments, sans tenir compte de l'ordre. Le nombre de combinaisons possibles est donné par la formule suivante :

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Avertissement: Il convient de noter qu'il existe deux notations couramment utilisées pour représenter les combinaisons : la notation

$$\binom{\text{nombre de cas possibles}}{\text{nombre de cas favorables}} \text{ ou } \binom{n}{p}$$

et la notation

$$C_{\text{nombre de cas possibles}}^{\text{nombre de cas favorables}} \text{ ou } C_n^p$$

Le nombre de cas possibles n correspond au total des résultats ou des éléments dans un ensemble, tandis que le nombre de cas favorables p représente le nombre de résultats ou d'éléments souhaités dans cet ensemble. **Dans la première notation, le nombre de cas possibles est placé en haut et le nombre de cas favorables en bas, tandis que dans la seconde notation, c'est l'inverse**.

Exemples

1. Pour un ensemble $\{a, b, c, d\}$, le nombre de combinaisons possibles de 2 éléments est $\binom{4}{2} = C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$. ces combinaisons sont: ab, ac, ad, bc, bd, cd.
2. Lorsqu'on forme une équipe de 11 joueurs de football parmi 24 joueurs disponibles, l'ordre des sélections n'a pas d'importance. Le nombre d'équipes possibles a former est:

$$\binom{24}{11} = \frac{24!}{11!(24-11)!} = 2496144$$

Propriétés et théorèmes des combinaisons

Soient n et k des entiers naturels (avec $1 \leq k \leq n$),

1. **Propriété symétrique** :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2. **Théorème de Pascal** :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

3. **Formule de binôme** :

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-1}$$

Combinaison de p éléments parmi n avec répétition

Définition

Une combinaison avec répétition est une sélection de p éléments parmi n éléments, où chaque élément peut être choisi plus d'une fois et l'ordre des éléments n'est pas pris en compte. Le nombre de ces combinaisons est donné par la formule :

$$K_n^p = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Exemples

1. Pour un ensemble $\{a, b\}$, le nombre de combinaisons possibles de 2 éléments avec répétition est $K_2^2 = \binom{2+2-1}{2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$. Ces combinaisons sont: aa, ab, bb.
2. Si on a 5 types de fruits et on souhaite choisir 3 fruits avec répétition possible, le nombre de combinaisons serait :

$$K_5^3 = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

Propriétés

Soient n et k des entiers naturels,

1. **Propriété additive** :
   — Lorsque l'on ajoute un nouvel élément à l'ensemble, le nombre de combinaisons avec répétition de k éléments augmente.
2. **Relation avec les combinaisons sans répétition** :
   — Les combinaisons avec répétition de p éléments parmi n sont reliées aux combinaisons sans répétition par la formule suivante :

$$K_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$

Cela revient à choisir p éléments avec répétition dans un ensemble de n éléments en convertissant le problème en un problème de combinaison sans répétition de p éléments parmi n+p-1 éléments.

3.2.3 Synthèse des méthodes de tirage

Le tableau ci-dessous fournit un aperçu détaillé des différents types de tirages en probabilités, en précisant pour chacun la formule mathématique associée et un exemple concret. Vous y trouverez les cas de tirages avec ou sans remise, ainsi que les permutations, avec des explications ordonnées pour une meilleure compréhension des concepts.

Tirages de p éléments parmi n	Ordonnés	Non ordonnés
Sans remise	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
Avec remise	n^p	$K_n^p = \binom{n+p-1}{p}$

Le tableau suivant est une extension du premier, présentant les formules dans le contexte des arrangements d'objets dans des cases, qui suivent les mêmes principes que les tirages présentés précédemment.

Rangement de p objets dans n cases	Discernables	Indiscernables
Un seul dans chaque case	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
Éventuellement plusieurs dans chaque case	n^p	$K_n^p = \binom{n+p-1}{p}$

3.3 Exercices

3.3.1 Exercice 1

Combien de mots de 8 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet si :

1. On ne peut utiliser chaque lettre qu'une seule fois.
2. On peut réutiliser les lettres à volonté.

3.3.2 Exercice 2

Dans une école, il y a 12 enseignants, 10 administratifs et 5 membres du personnel de service. De combien de manières différentes peut-on les organiser pour une réunion si :

1. Ils peuvent se placer librement.
2. Les enseignants souhaitent se tenir ensemble.

3.3.3 Exercice 3

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire les boules une à une et on les place en ligne.

1. Combien y a-t-il de dispositions possibles si les boules sont tirées au hasard?
2. Combien y a-t-il de dispositions possibles si les boules impaires doivent être placées ensemble?

3.3.4 Exercice 4

Dans un jeu de 52 cartes, on tire au hasard 5 cartes (ces cartes constituent une “main”).

1. Quel est le nombre total de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent exactement 2 as et 3 rois ?
3. Combien de mains contiennent au moins 4 figures (Valet, Dame, Roi) ?

3.3.5 Exercice 5

Calculer:

a) $\binom{5}{1}$ b) $\binom{5}{3}$ c) $\binom{9}{3}$ d) $\binom{n}{2}$ e) $\binom{n}{n-2}$ f) $\frac{\binom{11}{3}}{\binom{8}{5}}$ g) $\frac{\binom{24}{4}}{\binom{24}{7}}$

3.3.6 Exercice 6

Dans une classe de 25 élèves, on doit choisir 3 délégués. Combien de façons y a-t-il de les choisir ?

On suppose maintenant que parmi les délégués, il doit y avoir au moins un garçon et une fille. Sachant qu’il y a 15 garçons dans cette classe, combien de façons y a-t-il alors de choisir un tel groupe de délégués ?

3.3.7 Exercice 7

Un domino est une petite planchette dont la face supérieure est divisée en deux parties portant chacune un chiffre de 0 à 5.

a) Une boîte de dominos contient toutes les associations possibles des chiffres entre 0 et 5 (y compris les doubles). Montrer qu’une telle boîte contient 21 dominos.

b) Quelle est la probabilité de tirer au hasard un double dans la boîte ?

3.3.8 Exercice 8

Dans une équipe de handball, 7 joueurs ont été sélectionnés. Pour un match, l'entraîneur choisit au hasard 5 joueurs parmi ceux sélectionnés.

a) Combien l'entraîneur peut-il faire d'équipes différentes ? b) Je suis un des 7 sélectionnés. Montrer que la probabilité que je fasse partie de l'équipe finalement retenue est $\frac{5}{7}$.

3.3.9 Exercice 9

On tire au hasard une main de cinq cartes dans un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants:

a) A : "la main contient exactement trois as" b) B : "la main contient au moins deux dames" c) C : "la main contient au moins un roi" d) D : "la main contient 4 figures" (les figures sont les rois, dames et valets) e) E : "la main contient un as, 3 rois et une dame"

3.3.10 Exercice 10

Montrer que: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k = 4^n$.

3.3.11 Exercice 11

Développer: a) $(4+x)^4$ b) $(2x-3)^5$ c) $(1+i)^6$ d) $(3-i)^4$

CHAPITRE 4

La théorie des probabilités

4.1 Langage de Probabilités

4.1.1 Expérience aléatoire

Définition

Une expérience est dite **aléatoire** si son résultat ne peut pas être prévu à l'avance. Autrement dit, si elle est répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu à des résultats différents.

- Les résultats obtenus lors d'une expérience aléatoire sont dits **réalisations** ou **observations**.
- L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience s'appelle **Univers**, noté Ω. Il peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.
- Un élément ω de Ω est dit **évènement élémentaire**.
- Un sous ensemble de Ω est dit **évènement**.

Exemples

Exemple 1: Lancer d'un dé à six faces

- **Univers** (Ω) : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Réalisations** : le numéro obtenu après avoir lancé le dé.
- **Évènements élémentaires** : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$
- **Évènements** :
  - Obtenir un nombre pair: $\{2, 4, 6\}$
  - Obtenir un nombre impair: $\{1, 3, 5\}$
  - Obtenir un nombre supérieur à 4: $\{5, 6\}$
  - ...

Exemple 2: Tirage d'une carte d'un jeu de 52 cartes

- **Univers** (Ω) : Ensemble des 52 cartes.
- **Réalisations** : La carte spécifique Tirée.
- **Évènements élémentaires** : Chaque carte est un évènement élémentaire.
- **Évènements** :
  - Tirer un as: Tous les as du paquet.
  - Tirer une carte rouge (cœur ou carreau).
  - Tirer une figure (valet, reine, roi).
  - …

Exemple 3: Lancer d'une pièce de monnaie

- **Univers** (Ω) : {Pile, Face}
- **Réalisations** : La pièce montre 'Pile' ou 'Face'.
- **Évènements élémentaires** : {Pile}, {Face}
- **Évènements** :
  - Obtenir Pile.
  - Obtenir Face.

Exemple 4: Mesure de la température quotidienne

- **Univers** (Ω) : L'ensemble des températures possibles.
- **Réalisations** : La température enregistrée à un moment donné.
- **Évènements élémentaires** : Chaque température spécifique mesurée est un évènement élémentaire.
- **Évènements** :
  - Température supérieure à 30°C.
  - Température inférieure ou égale à 0°C (gel).
  - …

Exemple 5: Nombre de clients entrant dans une boutique par jour

- **Univers** (Ω) : $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$ (où n est un nombre maximum estimé de clients par jour)
- **Réalisations** : Le nombre spécifique de clients entrant dans la boutique.
- **Évènements élémentaires** : Chaque nombre spécifique de clients est un évènement élémentaire.
- **Évènements** :
  - Aucun client n'entre dans la boutique.
  - Plus de 50 clients entrent dans la boutique.
  - moins de 20 clients entrent dans la boutique.
  - …

Exemple 6: Réception d'emails dans une heure

- **Univers** (Ω) : $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Réalisations** : le nombre spécifique d'emails reçus après l'expérience.
- **Évènements élémentaires** : Chaque nombre spécifique d'emails reçus est un évènement élémentaire.
- **Évènements** :
  - Recevoir exactement un email.
  - Ne recevoir aucun email.
  - Recevoir plus de 10 emails.
  - …

Definition

Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** (ou **disjoints**) si leur intersection est vide, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$.

Exemples

Exemples d'évènements incompatibles

1. Dans un lancer de dé, $A = \{\text{obtenir un pair}\}$, $B = \{\text{obtenir un impair}\}$. Ici, $A \cap B = \emptyset$.
2. Lors du tirage d'une carte, $A = \{\text{tirer un as}\}$, $B = \{\text{tirer un roi}\}$. Aucune carte ne peut être à la fois un as et un roi, donc $A \cap B = \emptyset$.
3. Dans un lancer de dé, $C = \{\text{obtenir un nombre inférieur à} 4\}$, $D = \{5, 6\}$. Ici, $C \cap D = \emptyset$.

Exemples d'évènements qui ne sont pas incompatibles

1. Dans un lancer de dé, $C = \{\text{obtenir un nombre inférieur à} 4\}$, $D = \{\text{obtenir un nombre pair}\}$. Ici, $C \cap D = \{2\}$ n'est pas vide.
2. Lors du tirage d'une carte, $E = \{\text{tirer un cœur}\}$, $F = \{\text{tirer une carte rouge}\}$. Les cœurs sont rouges, donc $E \cap F = \{\text{toutes les cartes de cœur}\}$ n'est pas vide.

Dans le contexte d'une expérience aléatoire, il peut sembler intuitif de considérer que tous les sous-ensembles de l'espace des résultats possibles, Ω, représentent des événements, c'est-à-dire que l'ensemble des événements est équivalent à l'ensemble de toutes les parties de Ω, noté $\mathcal{P}(\Omega)$. Cependant, il est crucial de reconnaître que, dans certains contextes, il n'est ni approprié ni faisable d'inclure chaque sous-ensemble de Ω comme événement potentiel. Ces cas se présentent fréquemment quand l'espace Ω est d'une complexité excessive ou de taille non-dénombrablement infinie, par exemple pour des résultats continus sur un intervalle ou dans des espaces de dimensions infinies.

Dans ces situations, plutôt que de travailler avec l'ensemble de toutes les parties de Ω, nous nous limitons à une collection spécifique de sous-ensembles de Ω, désignée sous le nom de *tribu* ou *σ-algèbre*. Cette collection est choisie de manière à satisfaire certains critères mathématiques nécessaires à la construction d'une mesure de probabilité cohérente et utile.

Lorsque Ω est fini ou dénombrable à l'infini, il est souvent possible et pratique de définir une mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$, puisque l'ensemble des sous-ensembles est moins problématique à gérer et que chaque sous-ensemble peut se voir attribuer une probabilité de manière bien définie.

4.2 Axiomatisation des probabilités

4.2.1 Tribu ou σ-algèbre

Définition

Soit Ω un ensemble non vide. Une **σ-algèbre** (ou **tribu**) $\mathcal{F}$ sur Ω est une collection de sous-ensembles de Ω répondant aux critères suivants :

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$, alors son complémentaire $A^c \in \mathcal{F}$ aussi.
3. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'ensembles appartenant à $\mathcal{F}$, alors l'union dénombrable $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ appartient a $\mathcal{F}$, c-a-d, $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

Si l'esemble Ω est muni d'une tribu $\mathcal{F}$ alors on dit que le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est un **espace probabilisable**.

Exemples

Exemple 1: Tribu Grossière sur un Ensemble

Soit Ω un ensemble quelconque. La tribu grossière sur Ω est la σ-algèbre la plus simple et est définie par $\mathcal{F}_{\mathrm{g}} = \{\emptyset, \Omega\}$.

- **Condition 1** : Ω est par définition dans $\mathcal{F}_{\mathrm{g}}$ (satisfait).
- **Condition 2** : Le complémentaire de Ω est $\emptyset$ et le complémentaire de $\emptyset$ est Ω ; tous deux sont présents dans $\mathcal{F}_{\mathrm{g}}$ (satisfait).
- **Condition 3** : Les seules unions dénombrables possibles sont $\emptyset$ et Ω eux-mêmes, qui sont déjà dans $\mathcal{F}_{\mathrm{g}}$ (satisfait).

Exemple 2: Tribu Discrète sur Ensemble

Soit Ω un ensemble quelconque. La tribu discrète sur Ω est $\mathcal{F}_{\mathrm{d}} = \mathcal{P}(\Omega)$, où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les parties de Ω (l'ensemble de puissance de Ω).

- **Condition 1** : Ω est un membre de $\mathcal{P}(\Omega)$, donc $\Omega \in \mathcal{F}_{\mathrm{d}}$ (satisfait).
- **Condition 2** : Pour tout sous-ensemble $A \subseteq \Omega$, le complémentaire $A^c = \Omega \setminus A$ est également dans $\mathcal{P}(\Omega)$, donc dans $\mathcal{F}_{\mathrm{d}}$ (satisfait).
- **Condition 3** : Toute union dénombrable d'ensembles de $\mathcal{F}_{\mathrm{d}}$ est un sous-ensemble de Ω et donc appartient à $\mathcal{F}_{\mathrm{d}}$ (satisfait).

Exemple 3:

Si Ω est un ensemble et A est un sous-ensemble de Ω, alors $\{\emptyset; A; \bar{A}; \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

Exemple 4:

Pour l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

1. Considérons la σ-algèbre suivante:

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

   Vérification des conditions :
   - **Condition 1** : L'ensemble total $\Omega = \{1, 2, 3\} \in \mathcal{F}_1$.
   - **Condition 2** : Les complémentaires dans Ω des éléments de $\mathcal{F}_1$ sont :
     - $\{1, 2\}^c = \{3\} \in \mathcal{F}_1$.
     - $\{3\}^c = \{1, 2\} \in \mathcal{F}_1$.
     - $\emptyset^c = \Omega \in \mathcal{F}_1$.
     - $\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{F}_1$.
   - **Condition 3** : Toute union dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}_1$ est déjà dans $\mathcal{F}_1$.

2. Considérons la σ-algèbre suivante:

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

   Vérification des conditions :
   - **Condition 1** : L'ensemble total $\Omega = \{1, 2, 3\} \in \mathcal{F}_2$.
   - **Condition 2** : Les complémentaires dans Ω des éléments de $\mathcal{F}_2$ sont :
     - $\{2\}^c = \{1, 3\}$, qui est déjà dans $\mathcal{F}_2$.

- $\{1,3\}^c = \{2\}$, qui est aussi déjà dans $\mathcal{F}_2$.
- $\emptyset^c = \Omega$, qui est déjà dans $\mathcal{F}_2$.
- $\Omega^c = \emptyset$, qui est déjà dans $\mathcal{F}_2$.
- **Condition 3** : L'union dénombrable est satisfaite car toute union d'ensembles dans $\mathcal{F}_2$ donne soit un ensemble déjà dans $\mathcal{F}_2$, soit Ω lui-même.

Proposition

Si $\mathcal{F}$ est une tribu sur un ensemble Ω, alors:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'ensembles appartenant à $\mathcal{F}$, alors l'intersection dénombrable $\bigcap_{n\geq 1} A_n$ appartient a $\mathcal{F}$, c-a-d $\bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.
- si $A, B \in \mathcal{F}$ alors:
  - $A \cup B \in mathcalF.$
  - $A \cap B \in mathcalF.$
  - $A \setminus B \in \mathcal{F}$
  - $A \Delta B \in \mathcal{F}$

Approfondissons les propriétés structurelles des σ-algèbres, essentielles pour la construction de la notion de tribu engendrée.

Proposition

Soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une collections de tribus sur Ω. Alors, $\mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est une tribu sur Ω.

Remarque

Il est crucial de noter que l'intersection en question est quelconque et, de manière significative, n'est pas restreinte à être dénombrable.

Demonstration

Nous souhaitons démontrer que l'intersection $\mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ d'une famille $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ de σ-algèbres sur un ensemble Ω est elle-même une σ-algèbre sur Ω. Pour cela, nous devons vérifier que $\mathcal{F}$ satisfait aux trois propriétés caractéristiques d'une σ-algèbre.

Première propriété : Présence de Ω

Puisque chaque $\mathcal{F}_i$ est une σ-algèbre, nous avons $\Omega \in \mathcal{F}_i$ pour tout $i \in I$. L'intersection de tous ces ensembles contiendra aussi Ω, car c'est un élément commun à tous les $\mathcal{F}_i$. Donc, nous avons $\Omega \in \mathcal{F}$.

Deuxième propriété : Fermeture par passage au complémentaire

Soit $A \in \mathcal{F}$. Cela signifie que $A \in \mathcal{F}_i$ pour tout $i \in I$. Comme chaque $\mathcal{F}_i$ est une σ-algèbre, le complémentaire de A dans Ω, noté A^c, doit également appartenir à chaque $\mathcal{F}_i$. Par conséquent, le complémentaire A^c appartient à l'intersection $\mathcal{F}$, car il est inclus dans tous les $\mathcal{F}_i$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est fermé sous la formation de compléments.

Troisième propriété : Fermeture par union dénombrable

Considérons maintenant une suite dénombrable d'ensembles $(A_j)_{j\geq 1}$ tels que pour tout $j \geq 1$, $A_j \in \mathcal{F}$. Cela implique que pour tout $j \geq 1$ et pour tout $i \in I$, $A_j \in \mathcal{F}_i$. Étant donné que chaque $\mathcal{F}_i$ est une σ-algèbre, il est fermé sous les unions dénombrables, donc $\bigcup_{j\geq 1} A_j \in \mathcal{F}_i$ pour tout $i \in I$. L'union $\bigcup_{j\geq 1} A_j$ est donc dans l'intersection $\mathcal{F}$, montrant que $\mathcal{F}$ est fermé sous les unions dénombrables.

Puisque $\mathcal{F}$ répond à toutes ces conditions, nous pouvons conclure que $\mathcal{F}$ est une sigma-algèbre sur Ω.

Proposition (Tribu engendrée)

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Il existe une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant $\mathcal{C}$. Cette tribu est appelée tribu engendrée par $\mathcal{C}$ et est notée $\sigma(C)$.

Démonstration

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des tribus sur Ω qui contiennent $\mathcal{C}$. Nous avons $\mathcal{S} \neq \emptyset$ car $\mathcal{P}(\Omega) \in \mathcal{S}$, ce qui est évident puisque l'ensemble des parties de Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$, est une tribu qui contient tout sous-ensemble de Ω, donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Considérons l'intersection de toutes ces tribus, notons-la $\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{T} \in \mathcal{S}} \mathcal{T}$. On obtient $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{T}, \mathcal{T} \text{ est un tribu sur } \Omega, \mathcal{C} \subset \mathcal{T}\}$.

D'après une proposition antérieure (l'intersection de tribus est une tribu), $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω.

De plus, si $\mathcal{G}$ est une tribu sur Ω contenant $\mathcal{C}$, alors, puisque $\mathcal{F}$ est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$, il s'ensuit que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Aussi, puisque $\mathcal{C}$ est inclus dans toutes les tribus considérées, il est inclus dans leur intersection, qui est $\mathcal{F}$. Donc, $\mathcal{F}$ est la plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{C}$.

Nous notons $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$, et nous obtenons ainsi la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, qui est précisément $\sigma(\mathcal{C})$. Formellement, nous avons :

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{T} \in \mathcal{S}} \mathcal{T} = \{A \in \mathcal{T}, \mathcal{T} \text{ est une tribu sur } \Omega \text{ et } \mathcal{C} \subset \mathcal{T}\}$$

Ceci définit la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$, ce qui est, par sa définition, la plus petite tribu par rapport à l'ensemble d'inclusion.

4.2.2 Tribu borélienne

Définition

La **tribu borélienne** sur $\mathbb{R}$ est la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. En d'autres termes, c'est la plus petite tribu contenant tous les intervalles ouverts (intervalles de la forme $]a, b[$; $]-\infty, a[$; $]a, +\infty[$; et $]-\infty, +\infty[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$). Formellement, si nous notons $\mathcal{J}$ l'ensemble de tous les intervalles ouverts dans $\mathbb{R}$, alors la tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, est donnée par:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{J})$$

La **tribu borélienne** est cruciale dans l'analyse des variables aléatoires.

Exemples d'ensembles Boréliens:

1. Tout intervalle de la forme $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$ est un ensemble borélien (Pourquoi?).
2. Tout ensemble singleton $\{x\}$ est borélien (Pourquoi?).
3. L'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$, entier relatifs $\mathbb{Z}$, rationnels $\mathbb{Q}$ sont des boréliens car car ils peuvent être écrits comme une union dénombrable de singletons. L'ensemble des nombres irrationels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un ensemble borélien (pourquoi?)
4. Les intervalles fermés: Pour tout intervalle fermé $[a, b]$ est un borelien (pourquoi?).

5. Les intervalles semi-ouverts: Tout ensemble de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$ est un borelien (pourquoi?).

Définition (Fonction borélienne)

Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite borélienne si si pour tout ensemble $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Cela signifie que l'image réciproque de tout borélien sous f est un Borélien.

Exemple

Toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application borélienne ($\Omega = \mathbb{R}$ dans ce cas). Cela découle du fait que la l'image réciproque de tout ensemble ouvert par une fonction continue est également un ensemble ouvert.

4.2.3 Mesure de Probabilité

La mesure de probabilité est un concept fondamental en théorie des probabilités, qui assigne à chaque événement défini au sein d'une certaine structure, la σ-algèbre, une valeur numérique entre 0 et 1, représentant la "chance" ou la "probabilité" que cet événement se produise.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, c'est-à-dire, Ω est un ensemble d'issues possibles et $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre sur Ω. Une mesure de probabilité (ou tout simplement une probabilité) est une application $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ qui satisfait les conditions suivantes :

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Pour toute suite dénombrable $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ d'ensembles mutuellement exclusifs (c-a-d $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$) dans $\mathcal{F}$, on a :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Un espace probabilisé est alors le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Propriétés

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, A, B deux événements, et $A_1, \ldots, A_n$ des événements deux a deux disjoint, alors:

1. **Probabilité de l'ensemble vide** :

$$P(\emptyset) = 0$$

2. **Probabilité de l'union finis d'événements incompatibles** :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

En particulier, si $A \cap B = \emptyset$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. **Probabilité du complémentaire** :

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

4. **Probabilité de l'union d'événements quelconques** :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. **Inégalité de Boole** (si cette fois les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ ne sont pas deux a deux disjoints) :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

6. **Propriété de la monotonie** : Si $A \subset B$, alors :

$$P(A) \leq P(B).$$

Exemples

quelques exemples

4.2.4 Événement presque sûr, événement négligeable

Definition

Un événement A est dit **presque sûr** si $P(A) = 1$. Il est dit **négligeable** si $P(A) = 0$.

Proprietes

Soient A et B sont deux événements tels que $A \subset B$.
- Si A est presque sûr, alors B est aussi presque sûr.
- Si B est négligeable, alors A est aussi négligeable.
- Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements négligeables, alors $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ est négligeable.

4.2.5 Equiprobabilité

Definition

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque Ω est fini, de cardinal n, et tous les événements simples sont de même probabilité. C'est-à-dire, elles ont la même chance de se réaliser (équiprobables). Dans ce cas : $P(\omega) = \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{n}$ pour tout $\omega \in \Omega$ (Pourquoi?). Le cas echeant, on dit que la probabilité P sur Ω est uniforme.

Si les événements simples sont équiprobables, la probabilité de tout événement $A \subset \Omega$ est donnée par : $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorables à } A}{\text{Nombre de cas possibles}}$ (Pourquoi?).

Exemples

— Le lancer d'un dé **équilibré** est une expérience aléatoire avec un univers fini de cardinal 6. La probabilité de tomber sur un nombre est donc égale à $\frac{1}{6}$. Si A : "Le nombre obtenu est paire" (i.e $A = \{2, 4, 6\}$) alors:

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à } A}{\text{Nombre de cas possibles}} = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

— Le tirage d'une carte d'un jeu de 52 cartes est une expérience aléatoire avec un univers fini de cardinal 52. La probabilité de tirer une carte de pique, de cœur, de carreau ou de trêfle est donc égale à $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Astuce: Indicateurs d'équiprobabilité :

La mention de "pièces non truquées", "dés équilibrés", "tirages de cartes d'un jeu mélangé" ou "sélection de boules dans une urne homogène" dans les énoncés signale une possible équiprobabilité, où chaque issue, telle que face ou pile, un numéro de dé, une carte spécifique ou une couleur de boule, a une chance égale de se produire. Des termes comme "au hasard", "sans biais", "répartition uniforme" et "indistinctement" renforcent cette notion, essentielle pour l'application correcte des principes de probabilité.

4.3 Probabilité Conditionnelle et Independance

En probabilités, le conditionnement et l'indépendance sont deux notions importantes. Le conditionnement ajuste la probabilité d'un événement en fonction des données déjà connues, tandis que l'indépendance caractérise des événements dont les probabilités ne sont pas influencées les uns par les autres. Ces concepts sont fondamentaux pour évaluer les chances d'occurrence d'événements en prenant en compte ou en ignorant les informations disponibles.

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé arbitraire et tous les ensembles considérés sont des événements de la σ-algèbre $\mathcal{F}$.

4.3.1 Probabilité Conditionnelle

Définition

Soit A un événement de probabilité non nulle (i.e $P(A) \neq 0$). Pour tout événement B, la probabilité conditionnelle de B sachant A (notee $P(B/A)$ ou $P_A(B)$) est définie par :

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

L'expression "probabilité de B sachant A" se réfère à la probabilité que l'événement B se produise sous la condition que l'événement A soit déjà advenu. Cela indique que même si l'événement B a généralement une faible probabilité d'occurrence, sa probabilité conditionnelle étant donné A pourrait être élevée, soulignant que la survenue de A a un effet significatif sur la probabilité de B. Inversement, un événement B habituellement probable pourrait s'avérer moins probable dans le contexte où A se produit.

Exemples

Exemple 1: Jeu de cartes

Imaginons un jeu de cartes standard de 52 cartes.

- **Expérience aléatoire** : Tirer une carte d'un jeu de 52 cartes.
- Ω : Ensemble de toutes les cartes du jeu.
- $\mathcal{F}$: $\mathcal{P}(\Omega)$, car chaque ensemble de cartes peut être considérée comme un événement.
- P : Probabilité uniforme où chaque carte a une chance égale d'être tirée, donc $P(\{\text{une carte spécifique}\}) = \frac{1}{52}$.
- **Exemple 1.1**
  - **Événement A** : Tirer un as.
  - **Événement B** : Tirer une carte de cœur.
  - Calcul de $P(B|A)$, la probabilité que la carte soit de cœur sachant qu'on a tiré un as:
    $$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/52}{4/52} = \frac{1}{4}$$
  - **Interprétation** : Si on sait qu'on a tiré un as, la probabilité que cet as soit de cœur est $\frac{1}{4}$.
- **Exemple 1.2**
  - **Événement A** : Tirer un carte de cœur.
  - **Événement B** : Tirer une carte de roi.
  - Calcul de $P(B|A)$, la probabilité de tirer un roi sachant qu'on a tiré une carte de cœur:
    $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13}$$
  - **Interprétation** : Cela signifie que si nous savons déjà que la carte tirée est un cœur, la probabilité que cette carte soit également un roi est $\frac{1}{13}$.

Exemple 2: Lancer de dé

On lance deux dés équilibrés à six faces.

- **Expérience aléatoire** : Lancer deux dés équilibrés à six faces.
- Ω : Ensemble de tous les couples possibles de chiffres obtenus avec les deux dés, soit $\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(6,6)\}$.
- $\mathcal{F}$: L'ensemble des sous-ensembles de Ω.
- P : Probabilité uniforme où chaque résultat des dés a une chance égale, donc $P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}$ pour $i, j \in \{1, \dots, 6\}$.
- **Exemple 2.1**
  - **Événement A** : La somme des dés est 8 ($A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$).
  - **Événement B** : Au moins un dé montre un 3 ($B = \{(3,1),(3,2),\dots,(3,6),(1,3),\dots,(6,3)\}$).
  - Calcul de $P(B|A)$, la probabilité d'obtenir au moins un 3 sachant que la somme est 8:
    $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$$
  - **Interprétation** : Si la somme des dés est 8, la probabilité qu'au moins un dé montre un 3 est de 2 sur 5.
- **Exemple 2.2**
  - **Événement A** : La somme des dés est supérieure ou egale a ($\geq$) à 3 ($A = \Omega \setminus \{(1,1)\}$).
  - **Événement B** : Au moins un dé montre un 2 ($B = \{(1,2),(2,2),\dots,(6,2),(2,1),(2,3)\dots,(2,6)\}$).
  - Calcul de $P(B|A)$, la probabilité d'obtenir au moins un 2 sachant que la somme est supérieure à 3:
    $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{11/36}{35/36} = \frac{11}{35}$$
  - **Interprétation** : Si la somme des dés est supérieure à 3, la probabilité qu'au moins un dé montre un 2 est de 11 sur 35.

La connaissance de la réalisation de l'événement A peut modifier la probabilité de tous les événements subséquents ; par conséquent, une nouvelle probabilité conditionnelle $P_A(\cdot)$ peut être définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Proposition

Soit A un événement de probabilité non nulle (i.e $P(A) \neq 0$). L'application:

$$\begin{aligned} P_A : \mathcal{F} &\to [0,1] \\ B &\mapsto P_A(B) \end{aligned}$$

est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Nous allons maintenant présenter quelques propriétés associées aux probabilités conditionnelles.

Proposition (Inversement des probabilités conditionnelles)

Soient A deux événements de probabilités non nulles (i.e $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).

Alors:

$$P(A/B) = P(B/A) \times \frac{P(A)}{P(B)}$$

Proposition (Formule des probabilités composées)

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements avec leur intersectionnon vide (i.e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$).

Alors:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Definition (Partition)

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des sous-ensembles de Ω. On dit que $(A_i)_{i=1}^{n}$ est une partition de Ω si leur reunion est eggale a Ω et leurs intersections deux-a-deux est vide. Autrementdit, si:

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.
- $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.

Proposition (Formule des probabilités totales)

Soient $(A_i)_{i=1}^{n}$ une suite d'événements qui forment une partition de Ω. Alors pour tout événement B de $\mathcal{F}$ on a:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

Remarque

Dans la pratique, on utilise souvent la formule suivante:

Pour $n = 2$, $A_1 = A$, $A_2 = A^c$ sont deux événements qui forment une partition de Ω. Donc:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$

Exemples

Exemple 1 :

Considérons une urne contenant des boules numérotées qui sont soit rouges soit bleues. Soit B : "tirer une boule avec un numéro pair". Nous cherchons à calculer la probabilité $P(B)$.

Soit A : "Tirer une boule rouge". On suppose que les probabilités suivantes sont connues:
— $P(A) = 0.6$
— $P(B|A) = 0.5$
— $P(B|A^c) = 0.3$
Le théorème des probabilités totales nous dit que :

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)$$

Donc :

$$P(B) = 0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.42$$

La probabilité totale de tirer une boule avec un numéro pair de l'urne est donc de 0.42, ou 42%.

Exemple 2 :

Un patient peut avoir l'un de trois types de grippe: G_1, G_2, et G_3. La probabilité qu'une personne choisisse au hasard ait chacun de ces types de grippe est $P(G_1) = 0.5$, $P(G_2) = 0.3$, $P(G_3) = 0.2$. La probabilité d'avoir un certain symptôme S étant donné ces types de grippe est $P(S|G_1) = 0.4$, $P(S|G_2) = 0.6$, et $P(S|G_3) = 0.7$. La probabilité totale d'avoir le symptôme S est donc:

$$P(S) = P(G_1) \cdot P(S|G_1) + P(G_2) \cdot P(S|G_2) + P(G_3) \cdot P(S|G_3)$$

Calculons:

$$P(S) = 0.5 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.52$$

Donc, la probabilité d'avoir le symptôme S pour une personne prise au hasard est de 0.52.

Une autre formule tres importantes, souvent utilisee, liee a la proposition de l'inversement des probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales. Il s'agit de la **formule de Byes**.

Proposition

Soient $(A_i)_{i=1}^n$ une suite d'événements qui forment une partition de Ω et B un événement. Alors:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B/A_j)P(A_j)}$$

Astuce: Si on considere A, A^c comme partition de Ω, alors pour un événement B on a:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A) + P(B/A^c)P(A^c)}$$

Exemples

Exemple 1 :

Une urne contient des boules rouges et bleues, chacune numérotée de 1 à 10. On tire une boule au hasard. Soit B : “une boule tirée porte un numéro impair”. Nous voulons calculer la probabilité $P(B)$. Soit A : Tirer une boule rouge. On suppose que :

- La répartition des couleurs est équitable.
- Si une boule rouge est tirée, alors la probabilité que le numéro obtenu soit impair est de 0.6.
- Si une boule bleue est tirée, alors la probabilité que le numéro obtenu soit impair est de 0.5.

Alors on a :

- $P(A) = P(A^c) = 0.5$.
- $P(B|A) = 0.6$.
- $P(B|A^c) = 0.5$.

En appliquant le théorème des probabilités totales :

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)$$

Donc :

$$P(B) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.3 + 0.25 = 0.55$$

La probabilité de tirer une boule avec un numéro impair de l’urne est donc de 0.55, ou 55%.

Exemple 2 :

Une clinique vétérinaire diagnostique une maladie chez les chiens. Soit A : “Le chien a la maladie” et B : “Le chien teste positif pour la maladie”. Le test présente les caractéristiques suivantes :

- Sensibilité de 80% (c’est-à-dire que le test est positif à 80% lorsque le chien est réellement malade).
- Spécificité de 90% (c’est-à-dire que le test est négatif à 90% quand le chien est sain). Une enquête réalisée au préalable indique que 10% des chiens sont atteints par cette maladie.

Nous souhaitons calculer la probabilité qu’un chien soit réellement malade sachant que le test est négatif, soit $P(A|B^c)$. Pour ce faire, nous utiliserons la formule de Bayes :

$$P(A|B^c) = \frac{P(B^c|A) \cdot P(A)}{P(B^c)}$$

Nous avons besoin de connaître $P(A)$, $P(B^c|A)$, et $P(B^c)$. Tout d’abord, nous avons :

- $P(A) = 0.1$: La probabilité a priori qu’un chien soit atteint de la maladie.
- $P(B|A) = 0.8$: La probabilité qu’un chien teste positif sachant qu’il est malade.
- $P(B^c|A^c) = 0.9$: La probabilité qu’un chien teste négatif sachant qu’il n’est pas malade.

Avec ces informations, nous procédons aux calculs suivants :

Calcul de $P(B^c|A)$:

$$P(B^c|A) = 1 - P(B|A) = 1 - 0.8 = 0.2$$

Calcul de $P(B^c)$ en utilisant le théorème des probabilités totales :

$$P(B^c) = P(B^c|A) \cdot P(A) + P(B^c|A^c) \cdot (1 - P(A))$$

$$P(B^c) = 0.2 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot (1 - 0.1) = 0.02 + 0.81 = 0.83$$

Finalement, nous appliquons la formule de Bayes pour calculer $P(A|B^c)$:

$$P(A|B^c) = \frac{P(B^c|A) \cdot P(A)}{P(B^c)}$$
$$P(A|B^c) = \frac{0.2 \cdot 0.1}{0.83}$$
$$P(A|B^c) \approx \frac{0.02}{0.83}$$
$$P(A|B^c) \approx 0.0241$$

Ainsi, la probabilité qu'un chien soit malade sachant que le test est négatif est d'environ 2.41%.

4.3.2 Indépendance

Indépendance de deux événements

Définition

Deux événements A et B sont dits indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Proposition

Soient A et B événements avec $P(A) \neq 0$ alors A et B sont indépendants si $P(B/A) = P(B)$. Ceci dit, l'information que l'événement A se realise ne donne aucune information sur la probabilite de la realisation de B.

Exemples

Exemple 1:

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard, et on considère les événements suivants :

- $A =$ "tirage d'un nombre pair"
- $B =$ "tirage d'un multiple de 3"

La probabilité de tirer un nombre pair (événement A) est :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de nombres pairs de 1 à 12}}{\text{Nombre total de boules}} = \frac{6}{12} = 0.5$$

La probabilité de tirer un multiple de 3 (événement B) est :

$$P(B) = \frac{\text{Nombre de multiples de 3 de 1 à 12}}{\text{Nombre total de boules}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

La probabilité de tirer une boule qui est à la fois un nombre pair et un multiple de 3 (intersection de A et B) est :

$$P(A \cap B) = \frac{\text{Nombre de boules qui sont à la fois pairs et multiples de 3}}{\text{Nombre total de boules}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Pour vérifier si A et B sont indépendants, nous vérifions si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Ce qui est égal à $P(A \cap B)$. Par conséquent, les événements A et B sont indépendants.

Exemple 2 :

On reprend le même exemple que précédemment, mais cette fois avec une urne contenant 13 boules.

La probabilité de tirer un nombre pair (événement A) est maintenant :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de nombres pairs de 1 à 13}}{\text{Nombre total de boules}} = \frac{6}{13}$$

La probabilité de tirer un multiple de 3 (événement B) reste la même :

$$P(B) = \frac{1}{3}$$

La probabilité de tirer une boule qui est à la fois un nombre pair et un multiple de 3 (intersection de A et B) est :

$$P(A \cap B) = \frac{\text{Nombre de boules qui sont à la fois pairs et multiples de 3}}{\text{Nombre total de boules}} = \frac{2}{13}$$

Vérifions à nouveau l'indépendance de A et B :

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{6}{13} \cdot \frac{1}{3} \neq \frac{2}{13}$$

Puisque $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$, les événements A et B ne sont pas indépendants lorsque l'urne contient 13 boules.

Proposition

Si A et B sont indépendants, alors il en est de même pour :

— A^c et B^c.

— A^c et B.

— A et B^c.

Indépendance de Plusieurs Évènements

Considérons une séquence d'évènements $(A_n)_{n=1}^{n}$. On dit que ces évènements sont :

— **Indépendants 2 a 2** : Si pour n'importe quelle couple d'indices distincts (i, j), les évènements A_i et A_j sont indépendants.

— **Mutuellement indépendants** : Si pour n'importe quel ensemble fini d'indices distincts $(i_1, ..., i_k)$, la propriété suivante est vérifiée :

$$P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times ... \times P(A_{i_k})$$

Exemples

Exemple 1

Un couple a deux enfants, et on ne sait pas s'ils sont des garçons, des filles ou un de chaque. On considère les événements suivants :

— A : "les deux enfants sont de sexes différents".

— B : "l'aîné est une fille".

— C : "le cadet est un garçon".

On souhaite démontrer que les événements A, B et C sont indépendants deux à deux mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Indépendance deux à deux

Pour deux événements quelconques pour être indépendants, la probabilité que les deux événements se produisent doit être égale au produit de leurs probabilités individuelles.

Indépendance de A et B : La probabilité que l'aîné soit une fille, $P(B)$, est de $1/2$. La probabilité que les deux enfants soient de sexes différents, $P(A)$, est de $1/2$ également, car il y a deux cas favorables (garçon-fille ou fille-garçon) sur quatre cas possibles (garçon-garçon, garçon-fille, fille-garçon, fille-fille).

La probabilité que l'aîné soit une fille et que les enfants soient de sexes différents, $P(A \cap B)$, est de $1/4$ (seul le cas fille-garçon satisfait les deux conditions).

Ainsi, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 1/4$, ce qui montre que A et B sont indépendants.

Indépendance de A et C : La probabilité que le cadet soit un garçon, $P(C)$, est de $1/2$. En suivant une logique similaire à celle ci-dessus, on trouve que $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = 1/4$, ce qui indique que A et C sont indépendants.

Indépendance de B et C : Ici, $P(B \cap C)$ correspond au cas où l'aîné est une fille et le cadet un garçon, ce qui se produit avec une probabilité de $1/4$. Puisque $P(B) = 1/2$ et $P(C) = 1/2$, on a encore $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = 1/4$. Donc, B et C sont également indépendants.

Non indépendance mutuelle

Pour que trois événements soient mutuellement indépendants, en plus d'être indépendants deux à deux, il doit également être vrai que la probabilité que tous les trois événements se produisent ensemble est égale au produit de leurs probabilités individuelles.

Regardons $P(A \cap B \cap C)$. Si l'aîné est une fille et le cadet un garçon, alors ils sont nécessairement de sexes différents, ce qui signifie que $A \cap B \cap C = B \cap C$. La probabilité de $B \cap C$ est $1/4$, comme nous l'avons établi précédemment.

Cependant, le produit $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ serait $(1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/8$, qui est différent de $1/4$. Cela signifie que bien que A, B et C soient indépendants deux à deux, ils ne sont pas mutuellement indépendants.

Exemple 2 :

On dispose de trois pièces de monnaie différentes : une pièce de 1 Dh, une pièce de 5 Dh et une pièce de 10 Dh. On lance chacune de ces pièces une seule fois. On considère les événements suivants :
- A : "La pièce de 1 Dh atterrit sur face."
- B : "La pièce de 5 Dh atterrit sur face."
- C : "La pièce de 10 Dh atterrit sur face."

Les lancers de chaque pièce sont indépendants les uns des autres. La probabilité de chaque événement individuel est de $1/2$, car il y a deux issues possibles pour chaque pièce : face ou pile.

Pour vérifier que A, B et C sont mutuellement indépendants, nous devons vérifier que :

1. A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
2. A et C sont indépendants : $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
3. B et C sont indépendants : $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
4. A, B et C sont mutuellement indépendants : $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Puisque chaque pièce est lancée indépendamment, la probabilité que deux quelconques ou toutes les trois atterrissent sur face est le produit de leurs probabilités individuelles.

Pour A et B :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Pour A et C :

$$P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Pour B et C :

$$P(B \cap C) = P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Et pour les trois événements A, B et C :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Chaque vérification confirme l'indépendance mutuelle. Cela signifie que le résultat d'un lancer de n'importe quelle pièce n'influence pas et n'est pas influencé par le résultat des lancers des autres pièces.

4.4 Exercices

4.4.1 Exercice 1

On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que les deux résultats sont différents ?

4.4.2 Exercice 2

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. Démontrer que:

$$\max(0, P(A) + P(B) - 1) \leq P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$$

4.4.3 Exercice 3

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé. Démontrer que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

4.4.4 Exercice 4

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard, et on considère les événements :

— A = "tirage d'un nombre pair"

— B = "tirage d'un multiple de 3"

Les événements A et B sont-ils indépendants? Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

4.4.5 Exercice 5

Un couple a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les trois événements suivants :
- A = “les deux enfants sont de sexes différents”
- B = “l’ainé est une fille”
- C = “le cadet est un garçon”

Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants. On suppose que la probabilité à la naissance d’avoir une fille (respectivement un garçon) est égale à $\frac{1}{2}$.

4.4.6 Exercice 6

Soit l’expérience aléatoire “jeter une pièce de monnaie trois fois”. On considère les événements suivants :
- A : “Face apparait exactement deux fois”,
- B : “Face apparait au moins deux fois”,
- C : “Face apparait pour la première fois lorsque Pile est apparue au moins une fois”.
- Donner l’ensemble fondamental Ω.
- Donner les éléments de A, B et C.
- Décrire les événements $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ et $\bar{A} \cap C$

4.4.7 Exercice 7

Une maladie atteint 3% d’une population de 20000 individus. On appelle “malade” l’individu atteint de cette maladie et “bien portant” celui qui ne l’est pas. On dispose d’un test pour la détecter. Ce test donne les résultats suivants :
- Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs.
- Chez les individus bien portants, 2% des tests sont positifs.

On note les événements suivants :
- M: “être malade”
- T: “avoir un test positif”
- Calculer $P(T)$, $P(T \cap M)$ et $P(M \cup T)$.
- Sachant que la personne rencontrée est malade, calculer la probabilité que son test soit négatif.
- Sachant que la personne rencontrée a un test positif, calculer la probabilité qu’elle ne soit pas malade.

4.4.8 Exercice 8

Dans un laboratoire, on a fait les mesures suivantes :
- Si une souris porte l’anticorps A, alors 2 fois sur 5 elle porte aussi l’anticorps B ;
- Si une souris ne porte pas l’anticorps A, alors 4 fois sur 5 elle ne porte pas l’anticorps B.
- Notons que 50 % de la population porte l’anticorps A.
- Calculez la probabilité que, si une souris porte l’anticorps B, alors elle porte aussi l’anticorps A.
- Calculez la probabilité que, si une souris ne porte pas l’anticorps B, alors elle ne porte pas l’anticorps A.

4.4.9 Exercice 9

Une station météo A prévoit de la pluie pour demain. Une autre, B, prévoit au contraire du beau temps. Les enregistrements historiques montrent que la station A se trompe dans 25% de ses prévisions, tandis que la station B a un taux d'erreur de 30%. Il est également connu que, en général, 60% des jours sont ensoleillés et 40% sont pluvieux. Étant donné ces informations, évaluez laquelle des deux stations est la plus fiable pour la prévision de demain, et avec quelle probabilité.

4.4.10 Exercice 10

Considérez une tribu $\mathcal{T}$ sur un ensemble E et un sous-ensemble $F \subset E$. Démontrez que $\mathcal{T}_F = \{A \cap F, A \in \mathcal{T}\}$ constitue une tribu sur F (appelée tribu trace de $\mathcal{T}$ sur F).

4.4.11 Exercice 11

Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de Ω. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :

— Seul A se réalise;
— A et B se réalisent, mais pas C ;
— Les trois événements se réalisent;
— Au moins l'un des trois événements se réalise;
— Au moins deux des trois événements se réalisent;
— Aucun ne se réalise.

CHAPITRE 5

Variables Aléatoires Réelles

Lors de l'analyse des résultats d'une expérience aléatoire, l'attention se porte souvent sur certaines fonctions du résultat plutôt que sur le résultat en lui-même. Considérons, par exemple, un jeu de pile ou face offrant une récompense monétaire : 5 dirhams si le résultat est pile, et 0 dirham si c'est face. Dans ce cas, nous sommes en présence d'une fonction f qui associe à pile la valeur 5, $f(\text{pile}) = 5$, et à face la valeur 0, $f(\text{face}) = 0$. Au lieu de se focaliser sur l'issue de chaque lancer, on s'intéresse au gain potentiel, qui est modélisé par la fonction f. Cette dernière représente une variable aléatoire, c'est-à-dire une quantité numérique qui résume les résultats de l'expérience en une seule métrique significative.

En biologie moléculaire, cette méthodologie permet à un scientifique d'analyser une séquence d'ADN en se concentrant sur le comptage d'une séquence spécifique, ou "mot" génétique, plutôt que sur la totalité des nucléotides. Cette approche réduit un problème multidimensionnel à une dimension unique, simplifiant l'analyse et l'interprétation des données.

Cette notion s'applique également à divers autres domaines : en économétrie, une variable aléatoire peut représenter le rendement attendu d'une start-up, intégrant à la fois le risque et l'incertitude. En ingénierie, elle pourrait quantifier la durée de vie estimée d'un composant sous des contraintes variables, influençant la maintenance préventive et la gestion des stocks. En informatique, les variables aléatoires aident à modéliser le temps de réponse d'un système face à des entrées variées, contribuant à l'optimisation des performances. Dans le secteur financier, elles sont essentielles pour estimer la volatilité des actifs, une composante clé dans l'évaluation des options et la gestion du risque. Enfin, dans le domaine du machine learning, les variables aléatoires sont au cœur de l'apprentissage statistique, facilitant la modélisation de la probabilité d'erreur des classificateurs ou l'estimation de la densité d'une distribution sur la base d'échantillons observés.

5.1 Variable Aléatoire Réelle

Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$

Définition (Variable aléatoire réelle)

Une application $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite **Variable Aléatoire Réelle** si pour tout ensemble $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Cela signifie que l'image réciproque de tout ensemble borélien sous X est un événement dans l'espace de départ Ω, mesurable par la tribu $\mathcal{F}$.

Exemples

1. **Fonction de gain d'un jeu de dés** : La fonction de gain $g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \mathbb{R}$, où $g(\omega) = \omega$ pour un lancer de dé, est une variable aléatoire. Chaque résultat est mappé directement à un nombre réel représentant le gain, et comme il existe un nombre fini de résultats, tous les sous-ensembles de l'espace de départ sont mesurables.
2. **Fonction de résultat d'un lancer de pièce de monnaie** : Pour un lancer de pièce de monnaie, la fonction résultat $X : \{\text{'face'}, \text{'pile'}\} \to \{0, 1\}$, où $X(\omega) = 0$ si ω est 'face' et 1 si ω est 'pile', est une variable aléatoire. Tout comme le dé, la pièce de monnaie a un nombre fini de résultats, et ainsi toute fonction en résultant sera une variable aléatoire.
3. Si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors toute application $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire.

   En effet, pour démontrer cela, considérons n'importe quel ensemble borélien $B \subset \mathbb{R}$. La préimage de B par f est définie comme l'ensemble $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\}$. Puisque tout sous-ensemble de Ω est un élément de $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, y compris l'image réciproque de B. Donc f est une variable aléatoire.
4. **Fonction indicatrice d'un événement** : Pour un ensemble $A \subset \Omega$ donné, la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$, définie par $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$, et 0 sinon, est une variable aléatoire (pourquoi?).

Propriétés

Si X et Y sont des variables aléatoires sur Ω, f une application borélienne, et λ est un réel, alors les fonctions suivantes sont également des variables aléatoires sur Ω :

1. **Somme :** $X + Y$ est une variable aléatoire, car la somme de deux fonctions mesurables est mesurable.
$$X + Y : \omega \mapsto X(\omega) + Y(\omega)$$
2. **Multiplication par un scalaire :** λX est une variable aléatoire, car le produit d'une fonction mesurable par un scalaire est mesurable.
$$\lambda X : \omega \mapsto \lambda \cdot X(\omega)$$
3. **Produit :** XY est une variable aléatoire, car le produit de deux fonctions mesurables est mesurable.
$$XY : \omega \mapsto X(\omega) \cdot Y(\omega)$$
4. **Différence :** $X - Y$ est une variable aléatoire, car la différence de deux fonctions mesurables est mesurable.
$$X - Y : \omega \mapsto X(\omega) - Y(\omega)$$
5. **Supremum :** $\sup(X, Y)$ est une variable aléatoire, car le supremum de deux fonctions mesurables est mesurable.
$$\sup(X, Y) : \omega \mapsto \max\{X(\omega), Y(\omega)\}$$
6. **Infimum :** $\inf(X, Y)$ est une variable aléatoire, car l'infimum de deux fonctions mesurables est mesurable.
$$\inf(X, Y) : \omega \mapsto \min\{X(\omega), Y(\omega)\}$$
7. *fonction** : $f(x)$ est une variable aléatoire.
$$f(X) : \Omega \mapsto f(X(\omega))$$

La mesurabilité de ces fonctions est garantie par les propriétés de la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ et la définition de la variable aléatoire.

Notations

Il est usuel et commode d'alléger les notations en variables aléatoires. Si $x, y \in X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ on écrit :

— $\{X = x\}$ au lieu de $X^{-1}(\{x\})$,
— $\{X \leq x\}$ au lieu de $X^{-1}(]-\infty, x])$,
— $\{X < x\}$ au lieu de $X^{-1}(]-\infty, x[)$,
— $\{X \geq x\}$ au lieu de $X^{-1}([x, +\infty[)$,
— $\{X > x\}$ au lieu de $X^{-1}(]x, +\infty[)$,
— $\{x \leq X \leq y\}$ au lieu de $X^{-1}([x, y])$
— ...
— Généralement si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on écrit $\{X \in A\}$ au lieu de $X^{-1}(A)$.

Pour plus d'allégement, on écrit $P(X \in A)$ au lieu de $P(\{X \in A\})$, par exemple $P(X = x)$, ou $P(X < x)$.

Définition

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est définie par l'application (notée P_X) défini par:

$$\begin{aligned} P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\to [0, 1] \\ A \subset \mathbb{R} &\mapsto P_X(A) = P(X \in A) \end{aligned}$$

Ainsi, P_X est une probabilité sur $\mathbb{R}$. En effet :
— $P_X(\mathbb{R}) = P(\Omega) = 1$, et $P_X(\emptyset) = P(\emptyset) = 0$.
— Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de boréliens deux à deux disjoints, on :

$$\begin{aligned} P_X(\bigcup_{n\geq 1} A_n) &= P(X^{-1}(\bigcup_{n\geq 1} A_n)) && (\text{par définition de } P_X) \\ &= P(\bigcup_{n\geq 1} X^{-1}(A_n)) && (\text{l'image réciproque de la réunion est la réunion des images réciproques}) \\ &= \sum_{n\geq 1} P(X^{-1}(A_n)) && (\text{les } A_n \text{ sont 2 à 2 disjoints, les } X^{-1}(A_n) \text{ le sont aussi}) \\ &= \sum_{n\geq 1} P_X(A_n) && (\text{en utilisant la propriété d'additivité des probabilités}) \end{aligned}$$

Remarque

Les variables aléatoires seront notées par des lettres majuscules, telles que $X, Y, ...$. Les valeurs qu'elles prennent pour une issue donnée ω seront notées par des lettres minuscules $(x, y, ...)$. Ainsi, on pourra utiliser x pour représenter $X(\omega)$.

On opère une distinction entre les variables aléatoires discrètes, qui prennent un nombre fini ou dénombrable de valeurs, et les variables aléatoires continues, qui peuvent prendre des valeurs sur un intervalle ou l'ensemble des réels.

5.2 Variables Aléatoires Discrètes

Définition

Une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite **discrète** si l'image de X, notée $X(\Omega)$ ou $Im\ X$, est une partie au plus dénombrable (finie ou dénombrable).

Exemples

— Toute fonction constante est une variable aléatoire discrète, appelée variable aléatoire constante.

— Si A est un événement, alors la fonction $\mathbb{1}_A$ (fonction indicatrice de A) est une variable aléatoire discrète, appelée **variable aléatoire de Bernoulli**.

5.2.1 Loi de Probabilité d'une Variable Aléatoire Discrète

Loi de Probabilité

Remarque

Puisque $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, alors on peut écrire $X(\Omega) = \{x_1, ...\} = \bigcup_{i\geq 1}\{x_i\}$. On a $\forall i, j \in \mathbb{N}^*,\ i \neq j:\ \{x_i\} \cap \{x_j\} = \emptyset$. Avec la deuxième condition de probabilités on a

$$P_X(X(\Omega)) = P(\Omega) = 1$$

$$P_X(X(\Omega)) = P_X(\bigcup_{i\geq 1}\{x_i\}) = \sum_{i\geq 1} P_X(\{x_i\}) = \sum_{i\geq 1} P(X = x_i)$$

Donc $\sum_{i\geq 1} P(X = x_i) = 1$

En particulier pour $A \in X(\Omega)$, $P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{x\in A} P(X = x)$. Ceci dit, **Pour caractériser la loi de** X**, il suffit donc d'expliciter tous les** $P(X = x)$ **pour** $x \in X(\Omega)$.

Exemples

Exemple 1 :

Considérons un lancer de pièce de monnaie équilibrée où X vaut 1 si c'est pile et 0 si c'est face. Alors, $P(X = 1) = P(X = 0) = 0.5$.

Exemple 2 :

— On lance une pièce de monnaie 3 fois. Chaque lancer peut avoir comme résultat pile (noté P) ou face (noté F).
— L'univers Ω de cette expérience est: $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$
— À partir de cet ensemble, nous pouvons définir diverses variables aléatoires dont, par exemple, les variables aléatoires X, Y et Z :
  — X = nombre total de "pile";
  — Y = nombre de "pile" lors des deux premiers essais;
  — Z = nombre de "pile" lors des deux derniers essais. On remarque que X est une variable aléatoire prenant une valeur dans l'ensemble $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Y et Z sont aussi des variables aléatoires définies sur l'ensemble fondamental, qui prennent des valeurs incluses dans l'ensemble $Y(\Omega) = Z(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Evenements	X	Y	Z
PPP	3	2	2
PPF	2	2	1
PFP	2	1	1
FPP	2	1	2
PFF	1	1	0
FPF	1	1	1
FFP	1	0	1
FFF	0	0	0

On peut donc définir la loi de chaque variable aléatoire :

— Pour la variable X :

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

— Pour la variable Y :

x	0	1	2
$P(Y=x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

— Pour la variable Z :

x	0	1	2
$P(Z=x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

Exemple 3 :

On lance un dé équilibré numéroté de 1 à 6. L'univers Ω de cette expérience est: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. On appelle X le numéro obtenu et Y son complément à 6 et $Z = \sup(X,Y)$. On remarque que:

— X est une variable aléatoire prenant des valeurs dans l'ensemble $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$.

— Y est une variable aléatoire prenant des valeurs dans l'ensemble $Y(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$.

— Z est une variable aléatoire prenant des valeurs dans l'ensemble $Z(\Omega) = \{3,4,5,6\}$.

Results	X	Y	Z
1	1	5	5
2	2	4	4
3	3	3	3
4	4	2	4
5	5	1	5
6	6	0	6

On peut donc définir la loi de chaque variable aléatoire :

— Pour la variable X :

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

— Pour la variable Y :

x	0	1	2	3	4	5
$P(Y=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

— Pour la variable Z :

x	3	4	5	5
$P(Z=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Fonction de Répartition

La fonction de répartition est un élément essentiel dans l'étude des variables aléatoires. Elle fournit un moyen complet de décrire la distribution de probabilités d'une variable aléatoire.

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La **fonction de répartition** de X, notée F_X, est définie par :

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto F_X(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

La définition ci-dessus signifie que pour chaque valeur réelle x, $F_X(x)$ représente la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure ou égale à x.

Propriétés

La fonction de répartition d'une variable aléatoire possède plusieurs propriétés clés :

1. **Croissante** : Pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 \leq x_2$, $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.
2. **Normalisée** : $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
3. **Continuité à droite** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{y \downarrow x} F_X(y) = F_X(x)$.
4. **Limite à gauche** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{y \uparrow x} F_X(y) = F_X(x-) \leq F_X(x)$.

Ces propriétés sont valides pour toutes les fonctions de répartition, qu'elles soient issues de variables aléatoires discrètes ou continues.

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, la fonction de répartition présente des caractéristiques spécifiques.

Fonction de Répartition des Variables Discrètes

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète X, la fonction de répartition F_X présente des caractéristiques particulières. Rappelons que X est dite discrète si elle prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable, c'est-à-dire $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ...\}$.

Pour toute valeur réelle x, la fonction de répartition $F_X(x)$ représente la probabilité que X soit inférieure ou égale à x. On peut exprimer cela comme suit :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

Dans le cas discret, cette probabilité peut être décomposée en la somme des probabilités des valeurs individuelles que X peut prendre jusqu'à x. Ainsi, nous avons :

$$F_X(x) = \sum_{\{i : x_i \leq x\}} P(X = x_i)$$

L'expression précédente est obtenue en sommant les probabilités $P(X = x_i)$ pour toutes les valeurs x_i telles que $x_i \leq x$.

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète n'est pas continue à gauche. En effet, si X est une variable aléatoire discrète, alors pour un certain $i \geq 1$ tel que $x_i \in X(\Omega) = \{x_1, ...\}$, la limite de $F_X(x)$ lorsque x tend vers x_i par des valeurs inférieures (c'est-à-dire $\lim_{x \uparrow x_i} F_X(x)$) n'est pas égale à $F_X(x_i)$ car $P(X = x_i) > 0$, donc $F_X(x_i) - F_X(x_i-) = P(X = x_i) > 0$. Alors il existe une discontinuité en x_i. Entre les points de discontinuité, la fonction de répartition reste constante, car il n'y a pas d'augmentation de probabilité pour les valeurs de X qui ne sont pas dans son ensemble de définition.

Exemples

Exemple 1

On considère l'Exemple 1 dans *Exemples* dans la section précédente. Alors, la fonction de répartition de la variable X (lancer de pièce de monnaie équilibrée) est :

— $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$,
— $F_X(x) = 0.5$ pour $0 \leq x < 1$,
— $F_X(x) = 1$ pour $x \geq 1$.

Exemple 2

Reprenons l'Exemple 2 dans *Exemples* sur le triple lancer de pièce. La fonction de répartition des variables X, Y et Z est :

Pour X (nombre total de "pile") :

— $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$,
— $F_X(x) = \frac{1}{8}$ pour $0 \leq x < 1$,
— $F_X(x) = \frac{4}{8}$ pour $1 \leq x < 2$,
— $F_X(x) = \frac{7}{8}$ pour $2 \leq x < 3$,
— $F_X(x) = 1$ pour $x \geq 3$.

Pour Y (nombre de "pile" lors des deux premiers essais) :

— $F_Y(y) = 0$ pour $y < 0$,
— $F_Y(y) = \frac{2}{8}$ pour $0 \leq y < 1$,
— $F_Y(y) = \frac{6}{8}$ pour $1 \leq y < 2$,
— $F_Y(y) = 1$ pour $y \geq 2$.

Pour Z (nombre de "pile" lors des deux derniers essais) :

— $F_Z(z) = 0$ pour $z < 0$,
— $F_Z(z) = \frac{2}{8}$ pour $0 \leq z < 1$,
— $F_Z(z) = \frac{6}{8}$ pour $1 \leq z < 2$,
— $F_Z(z) = 1$ pour $z \geq 2$.

Exemple 3

En reprenant l'Exemple 3 dans *Exemples* du lancer de dé équilibré, la fonction de répartition des variables X, Y et Z est :

Pour X (le numéro obtenu) :

— $F_X(x) = 0$ pour $x < 1$,
— $F_X(x) = \frac{1}{6}$ pour $1 \leq x < 2$,
— $F_X(x) = \frac{2}{6}$ pour $2 \leq x < 3$,
— $F_X(x) = \frac{3}{6}$ pour $3 \leq x < 4$,

— $F_X(x) = \frac{4}{6}$ pour $4 \leq x < 5$,
— $F_X(x) = \frac{5}{6}$ pour $5 \leq x < 6$,
— $F_X(x) = 1$ pour $x \geq 6$.

Pour Y (complément à 6 de X) :
— $F_Y(y) = 0$ pour $y < 0$,
— $F_Y(y) = \frac{1}{6}$ pour $0 \leq y < 1$,
— $F_Y(y) = \frac{2}{6}$ pour $1 \leq y < 2$,
— $F_Y(y) = \frac{3}{6}$ pour $2 \leq y < 3$,
— $F_Y(y) = \frac{4}{6}$ pour $3 \leq y < 4$,
— $F_Y(y) = \frac{5}{6}$ pour $4 \leq y < 5$,
— $F_Y(y) = 1$ pour $y \geq 5$.

Pour Z ($\sup(X, Y)$) :
— $F_Z(z) = 0$ pour $z < 3$,
— $F_Z(z) = \frac{1}{6}$ pour $3 \leq z < 4$,
— $F_Z(z) = \frac{3}{6}$ pour $4 \leq z < 5$,
— $F_Z(z) = \frac{5}{6}$ pour $5 \leq z < 6$,
— $F_Z(z) = 1$ pour $z \geq 6$.

5.2.2 Loi de Probabilité d'un Couple de Variables Aléatoires

L'étude des couples de variables aléatoires permet de comprendre les relations et interactions entre deux phénomènes aléatoires. Dans cette section, nous explorons les concepts de lois marginales et lois conditionnelles. Un couple de variables aléatoires (X, Y) sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est un couple où X et Y sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Définition Générale

La **loi de probabilité** d'un couple de variables aléatoires (X, Y) est une application qui associe à chaque $A \times B$ où A et B sont des boreliens dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ une probabilité. Cette loi est définie par :

$$P_{XY} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$$
$$A \times B \mapsto P_{XY}(A \times B) = P(X \in A, Y \in B)$$

Note: Le produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une triby sru $\mathbb{R}^2$. C'est exactement la tribu borilienne de $\mathbb{R}^2$. C'est la tribu engendrée par les pavés de la forme $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$ où $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq +\infty$ pour $i = 1, 2$. Elle contient tous les pavés fermés, ouverts et semi-ouverts.

Couple de Variables Discrètes

Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires discrètes, les ensembles de valeurs qu'elles peuvent prendre, notés $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ...\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, ...\}$, sont au plus dénombrables. Ainsi, la loi de probabilité du couple (X, Y)

peut être exprimée comme l'ensemble des probabilités conjointes pour chaque paire de valeurs :

$$P_{XY}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

pour tous i, j. Cela décrit la probabilité que X prenne la valeur x_i et Y la valeur y_j simultanément.

Pour illustrer les probabilités conjointes d'un couple de variables aléatoires discrètes, nous pouvons utiliser le tableau suivant :

X	y_1	y_2	...	y_{n_y}	...
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n_y}	...
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n_y}	...
$\vdots$	...	...	...	...	...
x_{n_x}	p_{n_x1}	p_{n_x2}	...	$p_{n_xn_y}$	...
$\vdots$	...	...	...	...	...

Dans ce tableau, $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ représente la probabilité que X prenne la valeur $x_i \in X(\Omega)$ et Y prenne la valeur $y_j \in Y(\Omega)$.

Proposition

Si X et Y sonde deux variables discretes de loi de porbabilite conjoint definit par $p_{ij} = P_{XY}(x_i, y_j)$ pour $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$. Alors on a:

$$\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} p_{ij} = \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} p_{ij} = 1$$

Exemple

Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire successivement deux boules avec remise et on note X_1 et X_2 les nombres obtenus. Soient les variables aléatoires $X = X_1$ et $Y = X_1 - X_2$.

- L'espace d'échantillonnage Ω pour chaque tirage est $\{1, 2, 3, 4\}$.
- Les ensembles de valeurs possibles pour les variables aléatoires X_1, X_2, X et Y sont :
  - $X_1(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ (le résultat du premier tirage),
  - $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ (le résultat du deuxième tirage),
  - $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ (car $X = X_1$),
  - $Y(\Omega) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ (car $Y = X_1 - X_2$).

La probabilité de chaque résultat est uniforme, car chaque boule a la même chance d'être tirée. Ainsi, la probabilité P pour chaque résultat individuel est $\frac{1}{4}$.

Table de Loi du Couple (X_1, X_2) :

X_1 \ X_2	**1**	**2**	**3**	**4**
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Table de Loi du Couple (X, Y) :

Y \ X	1	2	3	4
-3	$\frac{1}{16}$	0	0	0
-2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0
-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	0	$\frac{1}{16}$

Dans ces tables, chaque entrée représente la probabilité conjointe $P_{XY}(x_i, y_j)$ de tirer un certain couple de résultats (x_i, y_j). Pour que ces distributions soient valides, les probabilités doivent satisfaire la condition suivante :

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} P_{X_1 X_2}(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=-3}^{3} P_{XY}(x_i, y_j) = 1$$

Lois Marginales

Définition

La **loi marginale** d'une variable X au sein d'un couple de variables aléatoires (X, Y) est la probabilité que cette variable prenne certaines valeurs, indépendamment de l'autre variable. Dans le cas de variables aléatoires discrètes X et Y, la loi marginale de X est donnée par :

$$P(X = x_i) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(X = x_i, Y = y_j)$$

pour chaque $x_i \in X(\Omega)$. Une formule similaire s'applique pour la loi marginale de Y.

Exemple

En considérant l'*Exemple* précédent, nous allons déterminer les lois marginales des variables X_1, X_2, X et Y.

Loi Marginale de X_1 **et** X_2 **:** Puisque les tirages sont uniformes et indépendants, la probabilité de chaque valeur pour X_1 et X_2 est la même. Par exemple, pour X_1 :

$$P(X_1 = x_i) = \sum_{j=1}^{4} P(X_1 = x_i, X_2 = j) = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

De même, la loi marginale de X_2 est identique à celle de X_1.

Loi Marginale de X **:** La loi marginale de X est identique à celle de X_1 car $X = X_1$. Donc, $P(X = x_i) = \frac{1}{4}$ pour chaque i.

Table de Probabilités Marginales pour X_1, X_2 et X :

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Loi Marginale de Y : Calculons la loi marginale de Y en sommant les probabilités conjointes où Y prend une valeur spécifique. Par exemple, pour $Y = 0$:

$$P(Y = 0) = \sum_{i=1}^{4} P(X = i, Y = 0) = \sum_{i=1}^{4} P(X_1 = i, X_1 - X_2 = 0) = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

En effectuant des calculs similaires pour les autres valeurs de Y, on obtient les probabilités marginales pour toutes les valeurs possibles de Y. **Table de Probabilités Marginales pour Y :**

y	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(Y = y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Loi Conditionnelle

La loi conditionnelle est un concept fondamental en probabilités, utilisé pour décrire le comportement d'une variable aléatoire en présence d'informations supplémentaires.

Loi Conditionnelle de X Sachant un Événement A

Définition

La **loi conditionnelle** de la variable aléatoire X sachant l'événement $A \in \mathcal{F}$ (avec $P(A) > 0$) est la probabilité que X prenne certaines valeurs, donné que l'événement A s'est produit. Elle est définie par :

$$P(X \in B|A) = \frac{P(X \in B \cap A)}{P(A)}$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Cas de Variable Discrète

Dans le cas où X est une variable aléatoire discrète et A un événement, la loi conditionnelle de X sachant A est donnée par :

$$P(X = x|A) = \frac{P(X = x \cap A)}{P(A)}$$

pour chaque valeur $x \in X(\Omega)$.

Loi Conditionnelle de X Sachant Y

Définition

Pour deux des variables aléatoires discrètes X et Y, la loi conditionnelle de X sachant Y est donnée pour chaque paire de valeurs $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ par :

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

Exemple

Pour reprendre l'*exemple précédent* des tirages de boules, calculons la loi conditionnelle de X sachant $(Y = 3)$:

- Pour $x = 1$ ($P(X = 1|Y = 3)$) : D'après la table de la loi conjointe, $P(X = 1, Y = 3) = 0$. La probabilité marginale $P(Y = 3) = \frac{1}{16}$. Ainsi, $P(X = 1|Y = 3) = \frac{0}{\frac{1}{16}} = 0$.
- Pour $x = 2$: De même, $P(X = 2, Y = 3) = 0$, donc $P(X = 2|Y = 3) = 0$.
- Pour $x = 3$: De même, $P(X = 3, Y = 3) = 0$, donc $P(X = 3|Y = 3) = 0$.
- Pour $x = 4$: Ici, $P(X = 4, Y = 3) = \frac{1}{16}$. Ainsi, $P(X = 4|Y = 3) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}} = 1$.

Ainsi, la table de loi de $P(X = x|Y = 3)$ est :

X	1	2	3	4
$P(X = x\|Y = 3)$	0	0	0	1

Examinons maintenant la loi conditionnelle de X sachant $(Y = -2)$:

- Pour $x = 1$: $P(X = 1, Y = -2) = \frac{1}{16}$. La probabilité marginale $P(Y = -2) = \frac{2}{16}$. Ainsi, $P(X = 1|Y = -2) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{2}{16}} = \frac{1}{2}$.
- Pour $x = 2$: De même, $P(X = 2, Y = -2) = \frac{1}{16}$, donc $P(X = 2|Y = -2) = \frac{1}{2}$.
- Pour $x = 3$ et $x = 4$: $P(X = x, Y = -2) = 0$, donc $P(X = x|Y = -2) = 0$.

Ainsi, la table de loi de $P(X = x|Y = -2)$ est :

X	1	2	3	4
$P(X = x\|Y = -2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0

Indépendance

Définition

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P_{XY}(A \times B) = P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Cas de Variable Discrète

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tous $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Exemple

Reprenant l'*exemple précédent* des tirages de boules, vérifions l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 puis X et Y :

Pour X_1 et X_2 :

- Les valeurs de $P(X_1 = x_1)$ et $P(X_2 = x_2)$ sont $\dfrac{1}{4}$ pour toutes x_1 et x_2.
- Pour chaque combinaison (x_1, x_2), $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \dfrac{1}{16}$.

X_1	X_2	$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$	$P(X_1 = x_1)$	$P(X_2 = x_2)$	Comparaison
1	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
1	2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
1	3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
1	4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
2	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
2	2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
2	3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
2	4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
3	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
3	2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
3	3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
3	4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
4	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
4	2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
4	3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
4	4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$

On a $\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ pour toutes les paires (x_1, x_2), ce qui indique que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Astuce: ON DOIT AVOIR L'EGALITE POUR TOUT COUPLE DE VALEURS POUR DIRE QUE LES VARAIBLES SONT INDEPENDANTES

Pour X et Y :

— X prend les valeurs $\{1, 2, 3, 4\}$ et Y prend les valeurs $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

— Calculons $P(X = x, Y = y)$, $P(X = x)$ et $P(Y = y)$ pour chaque paire (x, y) et comparons-les.

X	Y	$P(X = x, Y = y)$	$P(X = x)$	$P(Y = y)$	Comparaison
1	-2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16} \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{8}$
2	-2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16} \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{8}$
3	-2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$0 \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{8}$
4	-2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$0 \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{8}$

Donc, X, et Y ne sont pas indépendantes.

Astuce: UNE SEULE COMPARAISON MONTRANT $\neq$ EST SUFFISENTE POUR DIRE QUE LES DEUX

VARIABLE NE SONT PAS INDEPANDANTE.

Loi de la Somme

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. La loi de $X + Y$ est définie par la probabilité :

$$P(X+Y=z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x, Y=z-x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=z-y, Y=y)$$

où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ représentent l'ensemble des valeurs que X et Y peuvent respectivement prendre.

Cas de Variables Indépendantes

Si X et Y sont indépendantes, la loi de $X + Y$ peut être simplifiée en utilisant la propriété d'indépendance :

$$P(X+Y=z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)P(Y=z-x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=z-y)P(Y=y)$$

Exemple

En reprenant l'*exemple précédent* des tirages de boules, calculons les lois de $Z = X_1 + X_2$ et $W = X + Y$ (où $X = X_1$ et $Y = X_1 - X_2$). On a $(Z(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $W(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Loi de $Z = X_1 + X_2$

Étapes de calcul pour Z :

— Pour $z = 2$: Seule la combinaison $(1, 1)$ donne $Z = 2$.

Puisque X_1, X_2 sont independants, on utilise la formule:

$$P(X_1 + X_2 = 2) = \sum_{x \in X_1(\Omega)} P(X_1 = x)P(X_2 = z - x)$$

$$P(X_1 + X_2 = 2) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 2-1) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 2-2) + P(X_1 = 3)P(X_2 = 2-3) + P(X_1 = 4)P(X_2 = 2$$

Donc, $P(Z = 2) = \dfrac{1}{16}$.

— Pour $z = 3$: Les combinaisons $(1, 2)$ et $(2, 1)$ donnent $Z = 3$.

Donc, $P(Z = 3) = \dfrac{2}{16}$.

— De même, nous calculons pour $z = 4, 5, 6, 7, 8$.

Table de loi de Z :

z	2	3	4	5	6	7	8
$P(Z = z)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Loi de $W = X + Y$

Étapes de calcul pour W :

— Pour $w = -2$: Seule la combinaison $(1, -3)$ donne $w = -2$.

$$P(W = -2) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = (-2) - x)$$

$P(W = -2) = P(X = 1, Y = -2 - 1) + P(X = 2, Y = -2 - 2) + P(X = 3, Y = -2 - 3) + P(X = 4, Y = -2 - 4) = P(X =$

Donc, $P(W = -2) = \frac{1}{16}$.

— Pour $w = -1$: La combinaison $(2, 3)$ donne $w = -1$. Donc, $P(W = -1) = \frac{1}{16}$.

— De même, nous calculons pour $w = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Table de loi de W :

w	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(W = w)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Loi du Produit

Définition

La loi du produit de deux variables aléatoires discrètes X et Y est la probabilité de chaque paire de valeurs (x, y) que peuvent prendre ces variables, multipliée ensemble.

5.2.3 Moments

Espérance Mathématique

Définition

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète X est la somme des produits de chaque valeur que X peut prendre par sa probabilité, soit $E[X] = \sum_x xP(X = x)$.

Moments d'ordre n

Définition

Le n-ième moment (ou moment d'ordre n) d'une variable aléatoire discrète X est défini par $E[X^n]$.

Variance, Écart-Type, Covariance, Corrélation

Définition

- **Variance** : $Var(X) = E[(X - E[X])^2]$
- **Écart-Type** : $\sqrt{Var(X)}$
- **Covariance** : $Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$
- **Corrélation** : $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$

5.2.4 Exemples de Lois de Probabilités Discrètes

Loi Uniforme

Définition

Dans une loi uniforme discrète, chaque événement possible a la même probabilité de se produire.

Loi de Bernoulli

Définition

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli si elle ne prend que deux valeurs : 1 (avec probabilité p) et 0 (avec probabilité $1 - p$).

Loi Binomiale

Définition

Une variable aléatoire suit une loi binomiale $B(n, p)$ si elle compte le nombre de succès dans une série de n épreuves de Bernoulli indépendantes, avec probabilité de succès p.

---

ffffffffffffffffff

5.2.5 Couple de Variables Aléatoires Discrètes

Un couple (X, Y) est une paire de variables aléatoires discrètes dont la loi conjointe est définie par les probabilités $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

Lois Marginales

Pour chaque variable X et Y dans le couple, les lois marginales sont obtenues en sommant les probabilités conjointes sur toutes les valeurs possibles de l'autre variable.

Lois Conditionnelles

La probabilité conditionnelle $P(X = x_i|Y = y_j)$ est calculée par:

$$P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

Indépendance

Les variables X et Y sont indépendantes si: $\$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)\$$

pour tous les i, j.

Loi de la Somme et du Produit

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, la variable $Z = X + Y$ a pour loi de probabilité la convolution des lois de X et Y.

Moments

Les moments d'une variable aléatoire donnent des informations sur sa distribution.

- **Espérance** (premier moment) : $E(X) = \sum x_i p_i$
- **Variance** (second moment centré) : $\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = \sum (x_i - E(X))^2 p_i$

Exemple

Pour un dé équilibré, $E(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = 3.5$ et $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{6} (i - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6}$. Chaque section de ce cours peut être développée avec des exemples spécifiques, des problèmes résolus, et des discussions pour illustrer et consolider la compréhension des concepts introduits.

- Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète
  - Loi de probabilité
  - Fonction de répartition
- Loi de probabilité d'un couple de v.a
  - Lois marginales
  - Lois conditionnelles
  - Indépendance
  - Loi de la somme
  - Loi de produit
- Moments
  - Espérance mathématique
  - Moments
  - Variance - Ecart-type - Covariance - Corrélation
- Exemples de lois de probabilités discrètes
  - Loi uniforme
  - Loi de Bernoulli

— Loi Binomiale
— Loi multinômiale
— Loi hypergéométrique
— Loi de poisson
— Loi géométrique
— Loi binomiale négative
— Tableaux des lois de probabilités discrètes

5.3 Variables Aléatoires Continues

Deuxième partie