EST

المدرسة العليا للتكنولوجيا
جامعة الحسن الثاني الدار البيضاء

Ecole Supérieure de Technologie
Université Hassan II de Casablanca

Cours de Probabilités

Iaousse Mbarek

oct. 23, 2023

Table des matières

Le domaine des probabilités, se situant au croisement des mathématiques, de la logique et de la philosophie, a façonné la compréhension moderne du monde aléatoire. Qu'il s'agisse d'analyser des tendances financières, de prédire des phénomènes météorologiques ou de comprendre les principes de base de la génétique, les probabilités jouent un rôle fondamental.

Aperçu du Cours :

1. **Chapitre 1 : Introduction et Concepts de Base** - Il abordera les sections Ensembles et Opérations, Concepts Fondamentaux, Dénombrement, et Probabilités et Dénombrement.
2. **Chapitre 2 : Axioms des proba** - Immersion dans les distributions probabilistes courantes et leurs implications.
3. **Chapitre 2 : Variables Aléatoires et Distributions** - Immersion dans les distributions probabilistes courantes et leurs implications.
4. **Chapitre 3 : Théorèmes Limite et Convergence** - Approfondissement des principaux théorèmes et de leurs conséquences.
5. …(Ajoutez autant de chapitres que nécessaire).

Méthodologie Pédagogique :

- **Cours Magistraux** : Exposition théorique et démonstrations mathématiques pour établir des bases solides.
- **Travaux Dirigés** : Application des notions à travers des exercices et cas pratiques.
- **Études de Cas** : Analyses de scénarios réels où les probabilités sont essentielles.

Ce cours est conçu pour offrir à la fois une solide base théorique et encourager une réflexion critique, tout en mettant l'accent sur l'application de ces compétences à des situations concrètes. La maîtrise des probabilités est essentielle dans de nombreux domaines professionnels, et ce cours représente une étape essentielle vers l'acquisition de cette expertise.

0.1 Introduction et Concepts de Base

Les probabilités, une branche fondamentale des mathématiques, jouent un rôle crucial dans divers domaines, allant des sciences naturelles à la sociologie. Elles offrent une structure permettant de quantifier l'incertitude et de traduire l'aléatoire en termes mathématiques. Ce chapitre jette un regard approfondi sur la théorie des probabilités, commençant par une exploration de ses racines historiques et de sa signification intrinsèque. Il se penche ensuite sur les bases des ensembles et les opérations qui y sont associées, mettant en lumière les concepts centraux des probabilités. Le chapitre conclut avec une étude approfondie du dénombrement, montrant comment il se relie étroitement à la probabilité et offre des méthodes robustes pour aborder des problèmes complexes.

Histoire des Probabilités

À la base, les probabilités servent à quantifier l'incertitude. Elles offrent une manière de donner une valeur numérique à la probabilité d'occurrence d'un événement. Historiquement liées aux jeux de hasard et à l'univers des paris, ce sont des personnalités telles que Blaise Pascal et Pierre de Fermat qui ont contribué à la formalisation de ce domaine, en traitant des problèmes tels que les jeux de dés ou le partage équitable des enjeux. Au fil du temps, l'impact des probabilités s'est étendu, touchant de vastes domaines scientifiques et devenant un élément essentiel pour prendre des décisions basées sur des données présentant une part d'incertitude.

Dans ce chapitre, l'accent est mis sur les origines des probabilités et leur définition, tout en soulignant leur pertinence dans la vie quotidienne et les applications professionnelles. Le chapitre explore en détail plusieurs éléments clés :

- **Ensembles et Opérations**, où l'on examine les fondements des ensembles et comment différentes opérations peuvent être effectuées sur ces derniers.
- **Concepts Fondamentaux**, qui pose les bases de la théorie des probabilités et décrit les éléments essentiels qui la sous-tendent.
- **Dénombrement**, qui introduit les méthodes et techniques utilisées pour compter et énumérer divers éléments ou combinaisons.
- Enfin, **Probabilités et Dénombrement** illustre comment les techniques de dénombrement peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes complexes en probabilités.

0.1.1 Théorie des Ensembles

0.1.2 Cours sur la Théorie des Ensembles

Chapitre 1: Introduction à la Théorie des Ensembles

1.1 Définition

Un **ensemble** est une collection d'objets distincts considérés comme un objet global.

Exemple :
— L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

1.2 Notation

Pour décrire les ensembles, on peut utiliser:
— La notation en extension: $A = \{1, 2, 3\}$.
— La notation en compréhension: $B = \{x | x \text{ est impair et } x < 10\}$.

Chapitre 2: Opérations sur les Ensembles

2.1 Union

L'**union** de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.

Exemple :
— Si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 3\}$.

2.2 Intersection

L'**intersection** de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

Exemple :
— Si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$, alors $A \cap B = \{2\}$.

2.3 Différence

La **différence** de deux ensembles A et B, notée $A - B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B.

Exemple :
— Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4\}$, alors $A - B = \{1, 2\}$.

2.4 Complémentaire

Le **complémentaire** d'un ensemble A par rapport à un ensemble universel U, noté A' ou A^c, est l'ensemble des éléments de U qui ne sont pas dans A.

Exemple :
— Si $A = \{1, 2\}$ et $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, alors le complémentaire de A est $\{3, 4, 5\}$.

Chapitre 3: Propriétés et Théorèmes

3.1 Propriétés de base

1. **Loi réflexive** : $A = A$
2. **Loi symétrique** : Si $A = B$, alors $B = A$
3. **Loi transitive** : Si $A = B$ et $B = C$, alors $A = C$

3.2 Propriétés des opérations

1. **Idempotence** :
   — $A \cup A = A$
   — $A \cap A = A$
2. **Loi commutative** :
   — $A \cup B = B \cup A$
   — $A \cap B = B \cap A`
3. **Loi associative** :
   — $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   — $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. **Loi distributive** :
   — $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   — $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3.3 Théorèmes Fondamentaux

Théorème de De Morgan

— $(A \cup B)' = A' \cap B'$
— $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Théorème des ensembles complémentaires

— $A \cup A' = U$
— $A \cap A' = \emptyset$

Chapitre 4: Théorèmes Avancés et Démonstrations

4.1 Théorème de l'ensemble Vide

Théorème : Pour tout ensemble A,
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$

Démonstration :

1. Tout élément de $A \cup \emptyset$ est soit dans A soit dans $\emptyset$. Mais $\emptyset$ n'a aucun élément. Donc, $A \cup \emptyset = A$.
2. Aucun élément ne peut être à la fois dans A et dans $\emptyset$ (car $\emptyset$ n'a pas d'éléments). Donc, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

4.2 Théorème des Ensembles Disjoints

Théorème : Si $A \cap B = \emptyset$, alors A et B sont dits **disjoints**.

Démonstration : La définition est directement donnée par le théorème. Si l'intersection de deux ensembles est vide, cela signifie qu'ils n'ont aucun élément en commun.

4.3 Loi d'Absorption

Théorème : Pour tous ensembles A et B,
- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

Démonstration :

1. Pour le premier point: Tout élément de $A \cup (A \cap B)$ est soit dans A soit dans $A \cap B$. Mais tout élément de $A \cap B$ est également dans A. Donc, tous les éléments de $A \cup (A \cap B)$ sont dans A, et $A \cup (A \cap B) = A$.
2. Pour le second point: Tout élément de $A \cap (A \cup B)$ appartient à la fois à A et à $A \cup B$. Tout élément de $A \cup B$ est dans A ou B ou les deux. Donc, tous les éléments de $A \cap (A \cup B)$ appartiennent à A, et $A \cap (A \cup B) = A$.

4.4 Loi du Double Complémentaire

Théorème : Pour tout ensemble A, $(A')' = A$.

Démonstration : Le complémentaire d'un ensemble contient tous les éléments qui ne sont pas dans cet ensemble. Si nous prenons le complémentaire du complémentaire de A, cela nous ramène à A. Donc, $(A')' = A$.

0.1.3 Univers

L'univers (souvent noté (\Omega)) est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Exemple

Pour l'expérience aléatoire de lancer un dé, l'univers est: [\Omega = {1, 2, 3, 4, 5, 6}]

0.1.4 Événements

Un événement est un sous-ensemble de l'univers. Il représente un groupe de résultats possibles que nous pourrions trouver intéressants.

Exemple

Considérons à nouveau l'expérience aléatoire de lancer un dé. L'événement (A) que le résultat est un nombre pair peut être représenté comme: [A = {2, 4, 6}]

0.1.5 Axiomes de Probabilité

Pour définir formellement la probabilité, nous nous appuyons sur trois axiomes principaux:

1. **Axiome 1** : La probabilité d'un événement est toujours un nombre positif ou nul, et ne peut jamais être négative. [P(A) \geq 0]
2. **Axiome 2** : La probabilité de l'univers (l'ensemble de tous les résultats possibles) est 1. [P(\Omega) = 1]
3. **Axiome 3** : Pour tout ensemble d'événements mutuellement exclusifs (événements qui ne peuvent pas se produire en même temps), la probabilité de l'union de ces événements est égale à la somme de leurs probabilités individuelles. [P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots]

Ces axiomes forment la base de la théorie des probabilités moderne.

0.2 Concepts de Base 2

Dans ce chapitre, nous introduirons les concepts fondamentaux qui sous-tendent la théorie des probabilités. Ces concepts incluent les expériences aléatoires, l'univers, les événements et les axiomes de la probabilité. Chacun de ces éléments est essentiel pour comprendre comment nous modélisons et interprétons les phénomènes aléatoires.

0.2.1 Expériences Aléatoires

0.2.2 Expériences Aléatoires

Une expérience ou une action est dite aléatoire si elle peut produire plus d'un résultat possible et si nous ne pouvons pas prédire avec certitude quel résultat particulier se produira.

Exemple

Lancer un dé équilibré est une expérience aléatoire car le résultat peut être l'un des six nombres de 1 à 6, et nous ne pouvons pas prédire quel nombre apparaîtra à un lancer particulier.

0.2.3 Axiomes de Probabilité

Pour définir formellement la probabilité, nous nous appuyons sur trois axiomes principaux:

1. **Axiome 1** : La probabilité d'un événement est toujours un nombre positif ou nul, et ne peut jamais être négative. [P(A) \geq 0]
2. **Axiome 2** : La probabilité de l'univers (l'ensemble de tous les résultats possibles) est 1. [P(\Omega) = 1]
3. **Axiome 3** : Pour tout ensemble d'événements mutuellement exclusifs (événements qui ne peuvent pas se produire en même temps), la probabilité de l'union de ces événements est égale à la somme de leurs probabilités individuelles. [P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots]

Ces axiomes forment la base de la théorie des probabilités moderne.

0.3 Concepts de Base 3

Dans ce chapitre, nous introduirons les concepts fondamentaux qui sous-tendent la théorie des probabilités. Ces concepts incluent les expériences aléatoires, l'univers, les événements et les axiomes de la probabilité. Chacun de ces éléments est essentiel pour comprendre comment nous modélisons et interprétons les phénomènes aléatoires.