Problem1:

Dans ce problème, R est un corps (R peut être considérée un R-espace vectoriel)

R est totalement ordonné, c’est-à-dire pour tout couple (x,y) \in R^2 nous avons soit x\leq y soit y \leq x.

R vérifie la propriété de la borne supérieure. Ceci dit, toute partie de R non vide majorée admet une borne supérieure.

Rappelons (**encore une fois**) que si l est une borne supérieure d’une partie A de R alors

Pour tout epsilon>0, il existe x \in A tel que l-\epsilon < x<l

1. Montrer que la valeur absolue est une norme sur R.
2. Préciser la distance (notée dorénavant d) associée à la valeur absolue. (R, d) est donc un espace métrique.
3. ok
4. R\Q est l’ensemble des nombre irrationels, c’est-à-dire les nombres réels qui ne sont pas rationnels (racine (2), \pi, e, … sont des éléments de R\Q mais 0, 1\2 ne le sont pas). L’ensemble R\Q étant un sous-ensemble de R, est-il un espace métrique avec la distance définie dans la question 2 ? justifier votre réponse.
5. Montrer que les intervalles de la forme ]a, b[ ou a, b \in RU{-\infty, +infty} sont des ouverts de (R, d) (pour le cas a=b ]a, b[ est l’ensemble vide).
6. Ok
7. ok
8. Soit (a\_n) la suite définie par a\_n = 1/n racine (2) pour tout n. Cette suite considérée come suite d’éléments de R est-elle convergente ? est-elle convergente si elle considérée dans R\ Q ?
9. En déduire que (R\Q, d\_e) n’est pas un espace métrique complet.
10. Monter que si une suite d’éléments de R qui n’admet pas une sous suite croissante alors elle admet une sous-suite décroissante.
11. En déduit alors que toute suite de R admet une sous suite monotone (soit croissante soit décroissante)
12. Montrer que toute croissante majorée est convergente.

Le résultat de la question précédant est aussi valide pour une suite décroissante minorée. Vous pouvez utilisez lorsqu’il est nécessaire.

1. En déduire que toute suite réelle bornée admet une valeur d’adhérence
2. Montrer que (R, d\_e) est une espace métrique complet.

Exercice

1. Soit (E, ||.||) un espace vectoriel, montrer que B(x,r)= x+rB(0,1)

Avec x+rB(0,1) ={x+ry, y \in B(0,1))