Álgebra Linear - Lista de Exercícios 7

Yuri F. Saporito

1. Se $AB = 0$, as colunas de B estão em qual espaço fundamental de A? E as linhas de A estão em qual espaço fundamental de B? É possível que A e B sejam 3×3 e com posto 2?

2. Se $Ax = b$ e $A^T y = 0$, temos $y^T x = 0$ ou $y^T b = 0$?

3. O sistema abaixo não tem solução:
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 9 \end{cases}$$
Ache números y_1, y_2, y_3 para multiplicar as equações acima para que elas somem $0 = 1$. Em qual espaço fundamental o vetor y pertence? Verifique que $y^T b = 1$. O caso acima é típico e conhecido como a *Alternativa de Fredholm*: ou $Ax = b$ ou $A^T y = 0$ com $y^T b = 1$.

4. Mostre que se $A^T A x = 0$, então $Ax = 0$. O oposto é obviamente verdade e então temos $N(A^T A) = N(A)$.

5. Seja A uma matriz 3×4 e B uma 4×5 tais que $AB = 0$. Mostre que $C(B) \subset N(A)$. Além disso, mostre que posto(A) + posto$(B) \leq 4$.

6. Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vetores não-zeros de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Quais são as condições sobre esses vetores para que cada um possa ser, respectivamente, base dos espaços $C(A^T)$, $N(A)$, $C(A)$ e $N(A^T)$ para uma dada matriz A que seja 2×2. *Dica: cada espaço fundamental vai ter somente um desses vetores como base.*
   (b) Qual seria uma matriz A possível?

7. Ache $S^\perp$ para os seguintes conjuntos:
   (a) $S = \{0\}$
   (b) $S = span\{[1, 1, 1]\}$
   (c) $S = span\{[1, 1, 1], [1, 1, -1]\}$
   (d) $S = \{[1, 5, 1], [2, 2, 2]\}$. Note que S não é um subespaço, mas $S^\perp$ é.

8. Seja A uma matriz 4×3 formada pela primeiras 3 colunas da matriz identidade 4×4. Projeta o vetor $b = [1, 2, 3, 4]$ no espaço coluna de A. Ache a matriz de projeção P.

9. Se $P^2 = P$, mostre que $(I - P)^2 = I - P$. Para a matriz P do exercício anterior, em qual subespaço a matriz $I - P$ projeta?