Álgebra Linear - Lista de Exercícios 7

Iara Cristina Mescua Castro

28 de novembro de 2021

1. Se $AB = 0$, as colunas de B estão em qual espaço fundamental de A? E as linhas de A estão em qual espaço fundamental de B? É possível que A e B sejam 3×3 e com posto 2?

Resolução:
Já que $AB = 0$, então:

$$\begin{bmatrix} L_1 & \cdots & \cdots \\ L_2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_n & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 & \cdots & L_1C_p \\ L_2C_1 & L_2C_2 & \cdots & L_2C_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_nC_1 & L_nC_2 & \cdots & L_nC_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, se pegarmos a primeira coluna da matriz resultante: $\begin{bmatrix} L_1C_1 \\ L_2C_1 \\ \vdots \\ L_nC_1 \end{bmatrix}$

É o mesmo que AC_1, e é igual a 0. Sendo assim, C_1 faz parte do núcleo de A. Ao analisar todas as colunas, teremos AC_2, AC_3, até AC_p e já que todas são iguais a 0, podemos concluir que as colunas de B fazem parte de N(A).

Analogamente, se calcularmos a transposta de $AB = 0$, que é $B^TA^T = 0$, e repetindo o mesmo processo, teremos que as colunas de B (que agora são as linhas), vezes as linhas de A (que agora são colunas), são iguais a 0. Então ao ver as colunas da matriz resultante, podemos concluir que as linhas de A fazem parte de $N(B^T)$. Representando essa situação:

$$\begin{bmatrix} C_1 & \cdots & \cdots \\ C_2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_p & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1L_1 & C_1P_2 & \cdots & C_1L_n \\ C_2L_1 & C_2P_2 & \cdots & C_2L_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_pL_1 & C_pL_2 & \cdots & C_nL_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

2. Se $Ax = b$ e $A^Ty = 0$, temos $y^Tx = 0$ ou $y^Tb = 0$?

Resolução:
Fazendo a transposta da equação $Ax = b$, teremos:
$x^TA^T = b^T$
Multiplicando a equação por y:
$x^TA^T \cdot y = b^T \cdot y$
$x^T(A^Ty) = b^Ty$
Sabendo que $A^Ty = 0$:
$0 = b^Ty$
Calculando a transposta da equação, confirmamos que: $y^Tb = 0$

3. O sistema abaixo não tem solução:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 9 \end{cases}$$

Ache números y_1, y_2, y_3 para multiplicar as equações acima para que elas somem $0 = 1$. Em qual espaço fundamental o vetor y pertence? Verifique que $y^Tb = 1$. O caso acima é típico e conhecido como a *Alternativa de Fredholm*: ou $Ax = b$ ou $A^Ty = 0$ com $y^Tb = 1$.

Resolução:
Supondo que $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ e $y_3 = -1$, multiplicando as equações acima e depois somando:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5(1) \\ 2x + 2y + 3z = 5(1) \\ 3x + 4y + 5z = 9(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 5 \\ -3x - 4y - 5z = -9 \end{cases}$$

$(x + 2x - 3x) + (2y + 2y - 4y) + (2z + 3z - 5z) = 5 + 5 - 9$
$0 = 1$
$y = (1, 1, -1)$ está no espaço nulo a esquerda, $N(A^T)$, pois:

$$A^T \cdot y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y^T \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 - 1 \cdot -9 \end{bmatrix} = 1$$

4. Mostre que se $A^T Ax = 0$, então $Ax = 0$. O oposto é obviamente verdade e então temos $N(A^T A) = N(A)$.

   Resolução:
   Se $A^T Ax = 0$, então multiplicando por x^T:

   $$x^T A^T \cdot Ax = 0$$

   Sabendo que $x^T A^T$ é o mesmo que $(Ax)^T$, então:

   $$(Ax)^T \cdot (Ax) = 0$$
   $$\|Ax\|^2 = 0$$
   $$Ax = 0$$

5. Seja A uma matriz 3×4 e B uma 4×5 tais que $AB = 0$. Mostre que $C(B) \subset N(A)$. Além disso, mostre que posto(A) + posto$(B) \leq 4$.

   Resolução:
   Para provar que $C(B) \subset N(A)$: Seja c_b o conjunto de 5 matrizes 4×1 que são colunas de B, e $c_b \subset C(B)$. A partir de $AB = 0$, teremos:

   $$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 & L_1C_3 & L_1C_4 & L_1C_5 \\ L_2C_1 & L_2C_2 & L_2C_3 & L_2C_4 & L_2C_5 \\ L_3C_1 & L_3C_2 & L_3C_3 & L_3C_4 & L_3C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Sendo assim, $L_i \cdot c_b = 0 \Rightarrow A \cdot c_b = 0$, sendo L_i as linhas de A e por isso o espaço de colunas de B está contido no espaço nulo de A, ou seja, $C(B) \subset N(A)$. E isso implica que $posto(B) = dim(col(B)) \leq dim N(A)$. Pelo teorema do Posto-Nulidade:

   $$posto(B) + posto(A) \leq dim N(A) + posto(A) = n$$

   Neste caso, $n = 4$, então: posto(A) + posto$(B) \leq 4$.

6. Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vetores não-zeros de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Quais são as condições sobre esses vetores para que cada um possa ser, respectivamente, base dos espaços $C(A^T)$, $N(A)$, $C(A)$ e $N(A^T)$ para uma dada matriz A que seja 2×2. *Dica: cada espaço fundamental vai ter somente um desses vetores como base.*

   Resolução:
   Há ortogonalidade entre a base de $C(A)$ e $N(A)$ e entre $N(A^T)$ e $C(A^T)$. Então:
   $b \cdot c = 0$ e $a \cdot d = 0$

(b) Qual seria uma matriz A possível?

Resolução:
Desde que A seja uma matriz de posto 1, pois as bases são vetores não-zeros, então A pode ser:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

7. Ache $S^{\perp}$ para os seguintes conjuntos:

   (a) $S = \{0\}$
   (b) $S = span\{[1, 1, 1]\}$
   (c) $S = span\{[1, 1, 1], [1, 1, -1]\}$
   (d) $S = \{[1, 5, 1], [2, 2, 2]\}$. Note que S não é um subespaço, mas $S^{\perp}$ é.

   Resolução:

   (a) $S^T = E$

   (b) $S^T = span\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$
   Explicação:
   $DimS = 1$
   $DimS^{\perp} = 3 - 1 = 2$
   $(a, b, c) \in S^{\perp} \iff (a, b, c)^{\perp}(1, 1, 1) = 0$
   $a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b$
   $(a, b, c) = (a, b, -a - b) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1)$

   (c) $S^T = span\{(1, -1, 0)\}$
   Explicação:
   $(a, b, c) \in S^{\perp} \Rightarrow$
   $(a, b, c)^{\perp}(1, 1, 1) = 0$
   $(a, b, c)^{\perp}(1, 1, -1) = 0$

   $a + b + c = 0$
   $a + b - c = 0$
   $a + b = 0$
   $b = -a$ e $c = 0$
   $(a, b, c) = (a, -a, 0) = a(1, -1, 0)$

   (d) S^T está no espaço nulo de A $= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, então é formado por $(-1, 0, 1)$

8. Seja A uma matriz 4×3 formada pela primeiras 3 colunas da matriz identidade 4×4. Projeta o vetor $b = [1, 2, 3, 4]$ no espaço coluna de A. Ache a matriz de projeção P.

   Resolução:
   $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
   $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$
   $(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$
   Quando há projeção em C(A): $P = A(A^T A)^{-1} A^T$, então:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A \cdot I \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projetando o vetor b:

$$p = Pb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. Se $P^2 = P$, mostre que $(I - P)^2 = I - P$. Para a matriz P do exercício anterior, em qual subespaço a matriz $I - P$ projeta?

Resolução:

$(I - P)^2 = (I - P)(I - P) = I - PI - PI + P^2 = I - P - P + P^2$,

Substituindo $P^2 = P$, obtemos:

$= I - P \cancel{- P} \cancel{+ P} = I - P$

A partir de:

$(P\vec{x}) \cdot ((I - P)\vec{x})$

$(P\vec{x})^T \cdot (I - P)\vec{x} = \vec{x}^T P^T (I - P)\vec{x}$

Visto que $P^T = P$ pois é simétrica:

$\vec{x}^T P(I - P)\vec{x}$

$\vec{x}^T (P - P^2)\vec{x}$

Visto que $P^2 = P$:

$\vec{x}^T (P - P)\vec{x}$

$\vec{x}^T 0\vec{x} = 0$

O produto entre $(P\vec{x})^T$ e $(I - P)\vec{x}$ é 0, então espera-se ortogonalidade entre $P\vec{x}$ e $(I - P)\vec{x}$.

$P\vec{x}$ está em $C(P)$, enquanto $(I - P)\vec{x}$ está em $N(P^T)$. Por isso a matriz $(I - P)$ projeta no espaço nulo a esquerda.