Independência, Base e Dimensão

by: iara

5 de janeiro de 2023

1 Linearmente Independentes

Definição 1: As colunas de A são linearmente independentes quando a única solução de $Ax = 0$ for $x = 0$. Nenhuma outra combinação de Ax produz o vetor nulo.

Definição 2: Seja E um espaço vetorial. Diremos que $v_1, ...v_n$ são linearmente independentes (LI) se

$$x_1v_1 + ... + x_nv_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = ... = x_n = 0$$

$$x_1v_1 + .. + x_nv_n = \begin{bmatrix} | & ... & | \\ v_1 & ... & v_n \\ | & ... & | \end{bmatrix} x = 0$$

1.1 Linearmente Dependentes

Definição: Se $v_1, ..., v_n$ não são LI diremos que eles são linearmente dependentes (LD).
$\exists\ x_1, ..x_n \in \mathbb{R}$, **nem todos nulos**, tal que $x_1v_1 + ... + x_nv_n = 0$.

2 Gerador (Span)

Definição: Os vetores $v_1, ..., v_n$ geram E se $span(\{v_1, ..., v_n\}) = E$

3 Base

Definição: O conjunto de vetores $\{v_1, ..., v_n\}$ é uma base para E se
· $v_1, ..., v_n$ são linearmente independentes (LI).
· $v_1, ..., v_n$ geram E.

$\forall u \in E$, $\exists$ únicos $x_1, ..., x_n$ tal que

$$u = x_1v_1 + ... + x_nv_n = \sum_{i=1}^{n} x_iv_i$$

Prova de Unicidade: Seja $u \in E$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ e $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u = x_1v_1 + ... + x_nv_n \\ u = y_1v_1 + ... + y_nv_n \end{cases} \Rightarrow u - u = 0 = x_1v_1 + ... + x_nv_n - (y_1v_1 + ...y_nv_n)$$

$$= (x_1 - y_1)v_1 + ...(x_n - y_n)v_n$$

Concluímos que os coeficientes $x_1 - y_1, ..., x_n - y_n$ precisam ser 0. Por ser LI, serão 0.

$$x_1 - y_1 = ... = x_n - y_n = 0 \Rightarrow x_1 = y_1, ..., x_n = y_n$$

Exemplo: $\mathbb{R}^3$: base canônica (e_1, e_2, e_3)

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3 \text{ (Gera } \mathbb{R}^3\text{)}$$

4 Dimensão

Definição: A dimensão de um espaço é o número de vetores em todas as bases. Se $\{v_1, ..., v_n\}$ é uma base de E, chamaremos n de dimensão de E, onde $dim\ E = n$.

Exemplo: O espaço vetorial M contém todas as matrizes 2×2. A dimensão desse espaço é 4. Uma base é

$$A_1, A_2, A_3, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.1 Teorema da Dimensão

Se $\{v_1, ..., v_n\}$ e $\{u_1, ..., u_k\}$ são bases de E, então $n = k$.