Álgebra Linear - Lista de Exercícios 11 - Simulado

Iara Cristina Mescua Castro

1. Verdadeiro ou falso (prove ou dê um contra-exemplo):

   (a) Se A é singular, então AB também é singular.

   (b) O determinante de A é sempre o produto de seus pivôs.

   (c) O determinante de $A - B$ é $\det A - \det B$.

   (d) AB e BA tem o mesmo determinante.

   Resolução:

   (a) Verdadeiro.
   Podemos dividir em duas situações:
   1) Se A é singular e B também é singular: Para algum $x \neq 0$: $Bx = 0$. Então: $(AB)x = A(Bx) = 0$ e podemos concluir que AB também é singular.
   2) Se A é singular e B não é singular: Para algum $y \neq 0$: $Ay = 0$
   Então a partir de $Bz = y$, temos que $z \neq 0$ pois $y \neq 0$. Logo, $(AB)z = A(Bz) = Ay = 0$ e novamente podemos concluir que AB também é singular.

   (b) Falso.
   Contra-exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
   $\det A = 0 - 1 = -1$
   Mas seus pivôs são 1 e 1. Então o determinante de A nem sempre é o produto de seus pivôs.

   (c) Falso.
   Contra-exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
   $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   Sabendo que $\det(A) = 0$ e $\det(B) = 0$, então $\det(A) - \det(B) = 0 - 0 = 0$ mas ao calcular $\det(A - B)$ note que seu determinante é 1. Então $\det(A - B) \neq \det(A) - \det(B)$

   (d) Verdadeiro. Para **matrizes quadradas** que terão matrizes AB e BA, suas determinantes são iguais.
   $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(BA)$
   Ps: $\det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A)$ são iguais por comutatividade.

2. Sejam u e v vetores ortonormais em $\mathbb{R}^2$ e defina $A = uv^T$. Calcule A^2 para descobrir os autovalores de A. Verifique que o traço de A é $\lambda_1 + \lambda_2$.

   Resolução:

   $A = uv^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 \\ u_2v_1 & u_2v_2 \end{bmatrix}$

   $A^2 = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 \\ u_2v_1 & u_2v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 \\ u_2v_1 & u_2v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1v_1)^2 + (u_1v_2)(u_2v_1) & (u_1v_1)(u_1v_2) + (u_1v_2)(u_2v_2) \\ (u_2v_1)(u_1v_1) + (u_2v_2)(u_2v_1) & (u_2v_1)(u_1v_2) + (u_2v_2)^2 \end{bmatrix}$

   $= \begin{bmatrix} (u_1v_1)^2 + u_1u_2v_1v_2 & u_1^2v_1v_2 + u_1u_2v_2^2 \\ v_1^2u_1u_2 + u_2^2v_1v_2 & u_1u_2v_1v_2 + (u_2v_2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1v_1)(u_1v_1 + u_2v_2) & u_1v_2(u_1v_1 + u_2v_2) \\ u_1v_2(u_1v_1 + u_2v_2) & (u_1v_1 + u_2v_2)(u_2v_2) \end{bmatrix}$

   Seja $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ vetores ortonormais, então: $u^Tv = 0 \iff u_1v_1 + u_2v_2 = 0$, $u_1^2 + u_2^2 = 1$ e $v_1^2 + v_2^2 = 1$.

Então $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Os autovalores de A^2 são 0, e por isso os autovalores de A são 0 também. Pois se autovalores de A são λ, autovalores de A^2 são λ^2.

3. A matriz B tem autovalores 1 e 2, C tem autovalores 3 e 4 e D tem autovalores 5 e 7 (todas são matrizes 2×2). Ache os autovalores de A:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Resolução:
Sabendo que B, C e D são matrizes 2×2. Podemos supor que:

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ para que seus autovalores sejam 1 e 2.

$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ para que seus autovalores sejam 3 e 4.

$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ para que seus autovalores sejam 5 e 7.

Então:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(5 - \lambda)(7 - \lambda)$$

Note que seus autovalores serão $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ e $\lambda_4 = 7$. Em outras palavras, os autovalores de A são os autovalores de B e D.

4. Seja D uma matriz $n \times n$ só com 1's em suas entradas. Procure a inversa da matriz $A = I + D$ dentre as matrizes $I + cD$ e ache o número c correto.

Resolução:
Supondo que $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{-1}{3}$$

Supondo que $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{-1}{4}$$

Em outras palavras, note que A sempre será uma matriz de 1's com 2 na sua diagonal. Então, ao calcular a sua inversa, teremos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{-1}{n+1} & \frac{-1}{n+1} & \cdots \\ \frac{-1}{n+1} & \frac{n}{n+1} & \frac{-1}{n+1} & \cdots \\ \frac{-1}{n+1} & \frac{-1}{n+1} & \frac{n}{n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Então $c = \frac{-1}{n+1}$.

5. Vamos resolver uma EDO de segunda ordem usando o que aprendemos. Considere $y'' = 5y' + 4y$ com $y(0) = C_1$ e $y'(0) = C_2$. Defina $u_1 = y$ e $u_2 = y'$. Escreva $\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t)$ e ache a solução da equação.

Resolução:
$u_1 = y$
$u_1' = y'$
$u_1' = y' = 0u_1 + u_2$

$u_2 = y'$
$u_2' = y''$
$y'' = 5y' + 4y$
$u_2' = y'' = 5u_2 + 4u_1$

$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

$u(0) = \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$

$u_1(0) = y(0) = C1$
$u_2(0) = y'(0) = C2$

$u' = Au \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Achando os autovalores de A:

$$\det(A - \leftthreetimes I) = \det \begin{bmatrix} -\leftthreetimes & 1 \\ 4 & 5 - \leftthreetimes \end{bmatrix} = (\leftthreetimes^2 - 5\leftthreetimes) - 4 = 0$$

$\leftthreetimes^2 - 5 \leftthreetimes - 4 = 0$

$\triangle = 25 + 16 = 41$

$\leftthreetimes = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$

Achando os autovetores de A:

$$\begin{bmatrix} \frac{-5-\sqrt{41}}{2} & 1 \\ 4 & \frac{5-\sqrt{41}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-(\frac{5+\sqrt{41}}{2})x_1 + x_2 = 0$$

$$4x_1 + (\frac{5-\sqrt{41}}{2})x_2 = 0$$

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5+\sqrt{41}}{2} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \frac{-5+\sqrt{41}}{2} & 1 \\ 4 & \frac{5+\sqrt{41}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-(\frac{5-\sqrt{41}}{2})x_1 + x_2 = 0$$

$$4x_1 + (\frac{5+\sqrt{41}}{2})x_2 = 0$$

$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5-\sqrt{41}}{2} \end{bmatrix}$

A solução com as condições: $u(t) = B_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$

$u(0) = B_1 v_1 + B_2 v_2 = \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$

$u(0) = B_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5+\sqrt{41}}{2} \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5-\sqrt{41}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$

$B_1 + B_2 = C_1$

$B_1 \frac{5+\sqrt{41}}{2} + B_2 \frac{5-\sqrt{41}}{2} = C_2$

6. Se A é simétrica e todos seus autovalores são iguais a λ. O que podemos dizer sobre A?

   Resolução:
   Se todos seus autovalores são iguais a λ, então A é uma matriz diagonal, cujo essa diagonal tem suas entradas iguais a λ. Pois então: $\det(A - \alpha I) = (\lambda - \alpha)^n = 0$ e $\alpha = \lambda$.

7. Suponha que C é positiva definida e que A tenha as colunas LI. Mostre que $A^T CA$ é positiva definida.

   Resolução:
   Em álgebra linear, uma matriz A é positiva definida se $v^T Av > 0$ para todos v em R. Então basta provar que $x^T(A^T CA)x > 0$:

   $x^T(A^T CA)x = (x^T A^T)C(Ax) = (Ax)^T C(Ax)$

   Visto que A tem colunas independentes, tem classificação completa e logo, é invertível. Para qualquer x, podemos encontrar um y tal que $Ax = y$ tomando $x = A^{-1}y$.

   Então supondo que $Ax = y$, então: $x^T(A^T CA)x = y^T Cy$

   $y^T Cy$ é positiva para qualquer y pois C é positiva definida. Portanto, $A^T CA$ é positiva definida.

8. Quais são os autovalores de A se ela for similar a A^{-1}?

   Resolução:
   Se A for similar a A^{-1} todos os autovalores de A serão 1 ou -1.

   Isso acontece pois, visto que A e A^{-1} são similares, então elas terão os mesmos autovalores. Se um dos autovalores de A é λ, o autovalor de seu inverso será $\frac{1}{\lambda}$. Mas sabemos que eles são iguais, então:

$$\lambda = \frac{1}{\lambda}$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda = \pm 1$$

9. Suponha que A é quadrada, mostre que $\sigma_1 \geq |\lambda|$, para qualquer autovalor λ de A, onde σ_1 é o primeiro valor singular de A.

Resolução:

A norma de uma matriz é definida por $||A|| = max_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$

1. $||A|| \geq |\curlywedge|$, $\curlywedge$ é autovalor de A.

Prova:

Se $\curlywedge$ é autovalor de A e v é autovetor de A, $Av = \curlywedge v$

$||A|| = max_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \geq \frac{||Av||}{||v||} = \frac{||\curlywedge v||}{||v||} = \frac{|\curlywedge|||v||}{||v||} = |\curlywedge|$

$$||A|| \geq |\curlywedge|$$

2. $||AB|| \leq ||A||||B||$

Prova:

$||A|| = max_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \Rightarrow ||A|| \geq \frac{||Ax||}{||x||}$, para algum $x \neq 0$.

$||Ax|| \leq ||A||||x||$

Por outro lado, $||A|| \geq \frac{||A(Bx)||}{||Bx||} = \frac{||ABx||}{||Bx||}$

$||ABx|| \leq ||A||||Bx|| = ||A||||B||||x||$

$\frac{||ABx||}{||x||} = ||A||||B||$, $\forall$ todo x.

$$\Rightarrow ||AB|| \leqslant ||A||||B||$$

3. $\sigma_1 \geq |\lambda|$

Prova:

$A = U \sum V^T \Rightarrow ||A|| = ||U \sum V^T||$

U e V^T são ortogonais e tem norma 1.

$$||U|||| \sum ||||V^T|| = || \sum || = \sigma_1$$

$$||A|| = \sigma_1$$

Conclusão:

Sabendo que $||A|| \geq |\curlywedge|$ e $||A|| = \sigma_1$, então:

$$\sigma_1 \geq |\curlywedge|$$

10. Ache a decomposição SVD da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Encontrando os autovalores de $A^T A$:

$\det(A^T A - \lambda I) = (\lambda^2 - 2\lambda)^2 = (\lambda(\lambda - 2))^2 = 0$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$ e $\lambda_4 = 0$

Encontrando os autovetores de $A^T A$:

$v_1 = (1,0,1,1)$, $v_2 = (0,1,0,1)$, $v_4 = (-1,0,1,0)$, $v_4 = (0,-1,0,1)$

Encontrando as raízes quadradas dos autovalores diferentes de zero (σi) :

$\sigma_1 = \sqrt{2}$

$\sigma_2 = \sqrt{2}$

Então a matriz $\sum = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

As colunas da matriz V são os vetores normalizados (unitários), então a matriz $V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Por último,

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} \cdot A \cdot v_1$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} \cdot A \cdot v_2$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Em síntese, nossa decomposição SVD é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$