Álgebra Linear - Lista de Exercícios 4

Iara Cristina Mescua Castro

1. Sejam S e T dois subespaços de um espaço vetorial V.

   (a) Defina $S + T = \{s + t \ ; \ s \in S \text{ e } t \in T\}$. Mostre que $S + T$ é um subespaço vetorial.

   Resolução:

   Visto que $0 \in S + T$, pois $0 \in S$ e $0 \in T$ e $0 + 0 = 0$.
   Vamos supor que a ∈ S + T e b ∈ S + T.
   Dessa forma:

   $$a = s' + t'$$
   $$b = s'' + t''$$

   Onde:

   $$s', s'' \in S$$
   $$t', t'' \in T$$

   Então:

   $$a + b = s' + t' + s'' + t''$$
   Por comutatividade de adição:
   $$= (s' + s'') + (t' + t'')$$

   Lembrando que: $s' + s'' \in S$ e $t' + t'' \in T$ uma vez que S e T são subespaços.
   Assim, a + b ∈ S + T.

   Por último, suponha a ∈ S + T.
   Portanto, $a = s' + t'$.
   Seja c algum escalar, então:

   $$c \times a = c\,(s' + t') = cs' + ct'$$
   $$c \times s' \in S \text{ e } c \times t' \in T$$

   Uma vez que S e T são subespaços. Assim, c × a ∈ S + T.
   Isso prova que S + T é um subespaço.

   (b) Defina $S \cup T = \{x \ ; \ x \in S \text{ ou } x \in T\}$. Argumente que $S \cup T$ não é necessariamente um subespaço vetorial.

   Resolução:

   Isso acontece pois todos os espaços vetoriais e, portanto, também os subespaços, devem ser fechados sob adição e multiplicação escalar. Mas na união dos subespaços S e T, existem novas combinações de vetores, como $v_1 + v_2$ onde $v_1 \in S$ e $v_2 \in T$.

   Contraexemplo:
   Supondo que S é o eixo x e T seja o eixo y, onde ambos são subespaços de $\mathbb{R}^2$.
   Sua união contém os pontos (0,1) e (1,0), cuja soma (1,1), não está na união.

   (c) Se S e T são retas no $\mathbb{R}^3$, o que é $S + T$ e $S \cup T$?

   Resolução:
   $S + T$ é um plano em $\mathbb{R}^3$
   $S \cup T$ são todos os pontos contidos na reta S e na reta T.

2. Como o núcleo $N(C)$ é relacionado aos núcleos $N(A)$ e $N(B)$, onde $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$?

Resolução:

A partir de uma matriz $A_{m \times n}$ e $B_{k \times n}$, onde $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$
$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : A \times x = 0\}$
$N(B) = \{x \in \mathbb{R}^n : B \times x = 0\}$
$N(C) = \{x \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \times x = 0\}$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{array}$$

$$B\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \cdots + b_{kn}x_n = 0. \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} A_{11}x_1 + \quad A_{12}x_2 + \cdots + \quad A_{1n}x_n = 0 \\ A_{21}x_1 + \quad A_{22}x_2 + \cdots + \quad A_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + \quad A_{m2}x_2 + \cdots + \quad a_{mn}x_n = 0. \\ \vdots \\ b_{(k+m)1}x_1 + b_{(k+m)2}x_2 + \cdots + b_{(k+m)n}x_n = 0. \end{array}$$

Se $C \cdot x = 0$, $A \cdot x = 0$ e $B \cdot x = 0$. Assim, $N(C) = N(A)|N(B) =$ interseção.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 11 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Ache a sua forma escalonada reduzida.

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 11 & -3 \end{bmatrix}$$

$L_3 \longleftrightarrow L_3 - 2 \cdot L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -12 & -3 & -21 \end{bmatrix}$$

$L_2 \longleftrightarrow \frac{L_2}{4}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & -12 & -3 & -21 \end{bmatrix}$$

$L_1 \longleftrightarrow L_1 - 5 \cdot L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{23}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & -12 & -3 & -21 \end{bmatrix}$$

$L_4 \longleftrightarrow L_4 + 12 \cdot L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{23}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} I_{2\times 2} & F_{2\times 2} \\ 0_{1\times 2} & 0_{1\times 2} \end{bmatrix}$$

Onde,

$$F = \begin{bmatrix} \frac{23}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

(b) Qual é o posto dessa matriz?

Resolução:
O posto é 2. É o número de linhas não-nulas da matriz na forma escalonada.

(c) Ache uma solução especial para a equação $Ax = 0$.

Resolução:
$Ax = 0 \longleftrightarrow Rx = 0$

Então,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{23}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 \cdot \frac{23}{4} + x_4 \cdot \frac{1}{4} = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + x_3 \cdot \frac{1}{4} + x_4 \cdot \frac{7}{4} = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = 1$ e $x_4 = 0$

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot \frac{23}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{7}{4} = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = \frac{-23}{4}$

$x_2 = \frac{-1}{4}$

$$x \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-23}{4} \\ \frac{-1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Ache a matrizes A_1 e A_2 (não triviais) tais que posto$(A_1B) = 1$ e posto$(A_2B) = 0$ para $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução:
$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Pois, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cujo, posto é 1 pois há 1 linha não-nulas nessa matriz.

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Pois, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cujo, posto é zero pois não há linhas não-nulas nessa matriz.

5. Verdadeiro ou Falso:

(a) O espaço das matrizes simétricas ($A^T = A$) é subespaço.

Resolução:
Verdadeiro.

Para mostrar que um subconjunto S de um espaço vetorial V é um subespaço, precisamos atender que:
1- O vetor zero em V está em S.
2- Para quaisquer dois vetores $u, v \in S$, temos $u + v \in S$
3- Para qualquer escalar c e qualquer vetor $u \in S$, temos $c \cdot u \in S$

Vamos considerar que o conjunto S consiste em todas as matrizes simétricas n $\times$ n.
Então, vamos provar que S é um subespaço de V.

O vetor zero O em V é a matriz zero n $\times$ n e é simétrico. Assim, o vetor zero $O \in S$ e a condição 1 é atendidos.

Para verificar a segunda condição, considere quaisquer $A, B \in S$, ou seja, A e B são matrizes simétricas. Para mostrar que $A + B \in S$, precisamos verificar se a matriz A + B é simétrica.

Nós temos: $(A + B)T = A^T + B^T = A + B$
Uma vez que A, B são simétricos. Assim, A + B também é simétrico, e $A + B \in S$.

Por último, para verificar a condição 3, deixe $A \in S$ e $r \in R$. Mostramos que $r \cdot A \in S$ ou seja, mostramos que $r \cdot A$ é simétrico.

Nós temos: $(r \cdot A) \cdot T = r \cdot A^T = r \cdot A$
Já que A é simétrico. Assim, $r \cdot A$ é simétrico e, portanto, $r \cdot A \in S$ Assim, a condição 3 é atendida.

Pelos critérios de subespaço, o subconjunto S é um subespaço do espaço vetorial V.

(b) O espaço das matrizes anti-simétricas ($-A^T = A$) é um subespaço.

Resolução:
Verdadeiro.

Agora, considerando que o conjunto S consiste em todas as matrizes anti-simétricas n $\times$ n.
E da mesma forma, vamos verificar as 3 condições para provar que S é um subespaço de V.
1- O vetor zero em V está em S.
2- Para quaisquer dois vetores $u, v \in S$, temos $u + v \in S$
3- Para qualquer escalar c e qualquer vetor $u \in S$, temos $c \cdot u \in S$

O vetor zero O em V é a matriz n $\times$ n, e é assimétrico porque: $O^T = O = -O$

Para a segunda condição, considere quaisquer $A, B \in S$, ou seja, A e B são matrizes anti-simétricas.
Sabendo que: $A^T = -A$ e $B^T = -B$
Para mostrar que $A + B \in S$, equivale a mostrar que a matriz A + B é assimétrica.

Nós temos: $(A+B)^T = A^T + B^T = -A + (-B) = -(A+B)$

Por último, consideramos qualquer $A \in S$ e $r \in R$ Mostramos que $r \cdot A$ é assimétrico e, por isso, $r \cdot A \in S$.

Usando o fato de que A é assimétrico (AT = −A), temos:
$(r \cdot A)T = r \cdot A^T = r \cdot (-A) = -r \cdot A$

(c) O espaço das matrizes não-simétricas ($A^T \neq A$) é um subespaço.

Resolução:
Falso.

Contra-exemplo: Temos as matrizes $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Que são matrizes não simétricas, mas sua soma é igual a:
$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Que é igual à matriz identidade, que **não** é uma matriz não-simétrica, e consequentemente, não pertencendo à S.
Assim, acaba não cumprindo a segunda condição.

6. Se A é 4×4 e inversível, descreva todos os vetores no núcleo da matriz $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ (que é 4×8).

Resolução:
Supondo um vetor 8-dimensional $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

onde x e y são dois vetores quadridimensionais. Então v está no núcleo de B se e somente se $B \cdot v = 0$.
Mas, $B \cdot v = \begin{pmatrix} A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot x + A \cdot y = A \cdot (x+y)$
Então $B \cdot v = 0$ apenas se $A \cdot (x+y) = 0$
Sabendo que A é invertível, $x + y = 0$ ou seja, $y = -x$ Sendo assim, o núcleo de B é composto por todos os vetores na forma $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ se x é um vetor quadridimensional.

7. Mostre por contra-exemplos que as seguintes afirmações são falsas em geral:

(a) A e A^T tem os mesmo núcleos.

Resolução:
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ Para resolver $A \cdot x = 0$, começamos reduzindo A:

$L_2 \longleftrightarrow L_2 + 2L_1$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Então: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

x_2 pode ser tomado como a variável livre, e a primeira linha nos dá:
$2x_1 + x_2 = 0$ ou $x_1 = \frac{-1}{2} x_2$
Então qualquer vetor na forma: $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} x \\ x \end{bmatrix}$ satisfaz $A \cdot x = 0$

$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
Para resolver $A^T \cdot x = 0$, começamos reduzindo A:

$L_2 \longleftrightarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1$

$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

x_2 pode ser tomado como a variável livre, e a primeira linha nos dá:

$2x_1 - 4x_2 = 0$ ou $x_1 = 2 \cdot x_2$

Então qualquer vetor na forma: $\begin{bmatrix} 2x \\ x \end{bmatrix}$ satisfaz $A^T \cdot x = 0$

Dessa forma, os núcleos de A e A^T não são iguais.

(b) A e A^T tem as mesmas variáveis livres.

Resolução:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ Então,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Essa matriz tem uma variável livre.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Essa matriz não tem nenhuma variável livre.

(c) Se R é a forma escalonada de A, então R^T é a forma escalonada de A^T.

Resolução:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ Escalonando:

$L_2 \longleftrightarrow L_2 - L_1$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$L_2 \longleftrightarrow -L_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = R$

$R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

Agora a transposta de A:

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ Escalonando:

$L_2 \longleftrightarrow L_2 - 4L_1$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$L_2 \longleftrightarrow -L_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq R^T$

8. Construa uma matriz cujo espaço coluna contenha $(1, 1, 5)$ e $(0, 3, 1)$ e cujo núcleo contenha $(1, 1, 2)$.

Resolução:

A matriz será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 1 & 3 & y_2 \\ 5 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$

Sabendo que o núcleo contém $(1, 1, 2)$, formamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 1 & 3 & y_2 \\ 5 & 1 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + y_1 \cdot 2 = 1 + 2y_1 = 0 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + y_2 \cdot 2 = 4 + 2y_2 = 0 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + y_3 \cdot 2 = 6 + 2y_3 = 0 \end{cases}$$

Então:
$y_1 = \frac{-1}{2}$
$y_2 = -2$
$y_3 = -3$

Substituindo os valores, a matriz será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

9. Construa uma matriz cujo núcleo contenha todos os múltiplos de $(4, 3, 2, 1)$.

Resolução:
A matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Encontrando o núcleo de A é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 4 \cdot x_4 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \cdot x_4 \\ x_2 = 3 \cdot x_4 \\ x_3 = 2 \cdot x_4 \end{cases}$$

Então o núcleo de A $\rightarrow \begin{bmatrix} 4x \\ 3x \\ 2x \\ 1x \end{bmatrix}$, que contém múltiplos de $(4, 3, 2, 1)$.

10. (*Bônus*) Dado um espaço vetorial real V, definimos o conjunto

$$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ é linear}\}.$$

Ou seja, V^* é o conjunto de todas as funções lineares entre V e $\mathbb{R}$. Relembramos que uma função $f : E \to F$, onde E e F são espaços vetoriais, é dita *linear* se para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ e $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$. Chamamos V^* de *espaço dual* de V.

(a) Mostre que V^* é um espaço vetorial.

Resolução:

(b) Agora, seja $V = \mathbb{R}^n$. Mostre que existe uma bijeção $\varphi : V^* \to V$ tal que , para toda $f \in V^*$ e para todo $\mathbf{v} \in V$, tenhamos

$$f(\mathbf{v}) = \langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle.$$

Dica: Utilize a dimensão finita de $\mathbb{R}^n$ para expandir $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos vetores da base canônica e aplique a linearidade de f.

Resolução:

Em dimensão infinita, esse resultado é conhecido como Teorema da Representação de Riesz.