Álgebra Linear - Lista de Exercícios 6

Yuri F. Saporito

1. Seja A uma matriz $m \times n$ com posto r. Suponha que existem $\mathbf{b}$ tais que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não tenha solução.
   (a) Escreva todas as desigualdade ($<$ e $\leq$) que os números m, n e r precisam satisfazer.
   (b) Como podemos concluir que $A^T\mathbf{x} = 0$ tem solução fora $\mathbf{x} = 0$?

2. Sem calcular A ache uma bases para os quatro espaços fundamentais:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Explique porque $v = (1, 0, -1)$ não pode ser uma linha de A e estar também no seu núcleo.

4. A equação $A^T\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tem solução quando $\mathbf{w}$ está em qual dos quatro subespaços? Quando a solução é única (condição sobre algum dos quatro subespaços)?

5. Seja M o espaço de todas as matrizes 3×3. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
e note que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Quais matrizes $X \in M$ satisfazem $AX = 0$?
   (b) Quais matrizes $Y \in M$ podem ser escritas como $Y = AX$, para algum $X \in M$?

6. Sejam A e B matrizes $m \times n$ com os mesmos quatro subespaços fundamentais. Se ambas estão na sua forma escalonada reduzida, prove que F e G são iguais, onde:
$$A = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B \begin{bmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$