Álgebra Linear - Lista de Exercícios 2

Iara Cristina Mescua Castro

1. Ache a matriz de eliminação E que reduz a matriz de Pascal em uma menor:

$$E\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}.$$

Qual matriz M reduz a matriz de Pascal à matriz identidade?

Resolução:
Para a matriz de Pascal chegar **em uma menor**, devemos fazer as seguintes operações:

$L_2 - 1 \cdot L_1$ ou $E_{21(1)}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{bmatrix}$$

$L_3 - 1 \cdot L_1$ ou $E_{31(1)}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&1&0\\1&3&3&1\end{bmatrix}$$

$L_4 - 1 \cdot L_1$ ou $E_{41(1)}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&1&0\\1&3&3&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&1&0\\0&3&3&1\end{bmatrix}$$

$L_4 - 1 \cdot L_3$ ou $E_{43(1)}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&1&0\\0&3&3&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}$$

$L_3 - 1 \cdot L_2$ ou $E_{32(1)}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}$$

Então,

$$E = E_{32(1)} \cdot E_{43(1)} \cdot E_{41(1)} \cdot E_{31(1)} \cdot E_{21(1)}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=E$$

$$E_{31(1)} \cdot E_{21(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{41(1)} \cdot (E_{31(1)} \cdot E_{21(1)})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{43(1)} \cdot (E_{41(1)} \cdot E_{31(1)} \cdot E_{21(1)})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{32(1)} \cdot (E_{43(1)} \cdot E_{41(1)} \cdot E_{31(1)} \cdot E_{21(1)}) = E$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = E$$

Para a matriz de Pascal chegar na **matriz identidade**, repetimos o mesmo procedimento até $E_{41(1)}$:

$L_2 - 1 \cdot L_1$ ou $M_{21(1)}$
$L_3 - 1 \cdot L_1$ ou $M_{31(1)}$
$L_4 - 1 \cdot L_1$ ou $M_{41(1)}$

E continuamos: $L_3 - 2 \cdot L_2$ ou $M_{32(2)})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$L_4 - 3 \cdot L_2$ ou $M_{42(3)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$L_4 - 3 \cdot L_3$ ou $M_{43(3)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então,

$$M = M_{43(3)} \cdot M_{42(3)} \cdot M_{32(2)} \cdot M_{41(1)} \cdot M_{31(1)} \cdot M_{21(1)}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M$$

$$M_{32(2)} \cdot (M_{41(1)} \cdot M_{31(1)} \cdot M_{21(1)})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{42(3)} \cdot (M_{32(2)} \cdot M_{41(1)} \cdot M_{31(1)} \cdot M_{21(1)})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{43(3)} \cdot (M_{42(3)} \cdot M_{32(2)} \cdot M_{41(1)} \cdot M_{31(1)} \cdot M_{21(1)}) = M$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = M$$

2. Use o método de Gauss-Jordan para achar a inversa da matriz triangular inferior:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 - a \cdot L_2$ ou $U_{12(a)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b - c \cdot a & | & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & c & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 - (b - c \cdot a) \cdot L_3$ ou $U_{13(b-c\cdot a)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -a & -b + c \cdot a \\ 0 & 1 & c & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 - c \cdot L_3$ ou $U_{23(c)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -a & -b + c \cdot a \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Inversa de U} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -b + c \cdot a \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Para quais valores de a o método de eliminação não dará 3 pivôs?

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{bmatrix}.$$

Resolução:
$L_2 - L_1$ e $L_3 - L_1$

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 0 & a-2 & a-3 \end{bmatrix}$$

$L_3 - L_2$

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 \end{bmatrix}$$

Se $a = 2$, $a = 0$ ou $a = 4$, não terá 3 pivôs.

4. Verdadeiro ou falso (prove ou forneça um contra-exemplo):
   (a) Se A^2 está bem definida, então A é quadrada.
   (b) Se AB e BA estão bem definidas, então A e B são quadradas.
   (c) Se AB e BA estão bem definidas, então AB e BA são quadradas.
   (d) Se $AB = B$, então $A = I$.

   Resolução:

   (a) Verdadeiro. O produto de duas matrizes será definido se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz. Então, se A^2 ou $A \cdot A$ está bem definido, o número de colunas da primeira matriz A é igual ao número de linhas da segunda matriz A, então concluímos que o número de colunas de A = o número de linhas de A. Por isso, A é quadrada.
   (b) Falso. $A_{2\cdot 3}B_{3\cdot 2}$ e $B_{3\cdot 2}A_{2\cdot 3}$, AB e BA são matrizes $2 \cdot 2$ e $3 \cdot 3$, mas A e B não são quadradas.
   (c) Verdadeiro. O produto de duas matrizes será definido se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz. Então, se $A \cdot B$ está bem definida, o número de colunas de A = o número de linhas de B. Se $B \cdot A$ está bem definida, o número de colunas de B = o número de linhas de A. Em outras palavras, $A_{m\cdot n}$ e $B_{n\cdot m} \to A_{m\cdot n} \cdot B_{n\cdot m} = AB_{m\cdot m}$ e $B_{n\cdot m} \cdot A_{m\cdot n} = BA_{n\cdot n}$
   (d) Verdadeiro. Pois $B = BI = IB$, substituindo em $AB = B$, obtemos: $AB = IB \to A = I$

5. Mostre que se $BA = I$ e $AC = I$, então $B = C$.

   Resolução:

   Dados:
   I = AC
   BA = I
   B = BI (Propriedade do elemento neutro da multiplicação de matrizes)
   C = CI (Propriedade do elemento neutro da multiplicação de matrizes)
   Substituindo **I = AC** em B = BI:
   B = B(AC)
   B = B(AC) = (BA)C
   Substituindo **BA = I** em (BA)C:
   B = (BA)C = IC = C
   Logo, B = C

6. Ache uma matriz não-zero A tal que $A^2 = 0$ e uma matriz B com $B^2 \neq 0$ e $B^3 = 0$.

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pois, $A^2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pois, $B^2 \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E $B^3 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Ache as inversas de

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 \longleftrightarrow \frac{L_1}{3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & | & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 - 4 \cdot L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & | & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & | & \frac{-4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \longleftrightarrow \frac{L_3}{6}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & | & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & | & \frac{-4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & | & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_4 - 7 \cdot L_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{-7}{6} & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 - 2 \cdot L_2$
$L_3 - 5 \cdot L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{-7}{6} & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 - 2 \cdot L_2$
$L_3 - 5 \cdot L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & 6 \end{array}\right)$$

$$\textbf{Inversa de} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \longleftrightarrow L_4$
$L_2 \longleftrightarrow L_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \longleftrightarrow \frac{L_2}{5}$
$L_3 \longleftrightarrow \frac{L_3}{3}$
$L_4 \longleftrightarrow \frac{L_4}{2}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\textbf{Inversa de} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Verifique que a inversa de $M = I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ é dada por $M^{-1} = I + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{u}}$. Verifique também que a inversa de $N = A - UW^{-1}V$ é dada por $N^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$.

Resolução:
Primeira Parte:
Vamos mostrar isso a partir da propriedade de inversas, que diz que $M \cdot M^{-1} = I$

$= (I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T)(I + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{u}})$

$= I + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{u}} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \mathbf{u}\mathbf{v}^T(\frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{u}})$

$= I + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{u}} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{u}(\mathbf{v}^T\mathbf{u})\mathbf{v}^T}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{u}}, < v, u > \in \mathbb{R}$

$= I + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{u}} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{u}}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{u}}\mathbf{u}\mathbf{v}^T$

$= I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T(\frac{1}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{u}}I - I - \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{u}}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{u}}I)$

$= I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T(\frac{(1-\mathbf{v}^T\mathbf{u})}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{u}}I - I)$

$= I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T(0)$

$M \cdot M^{-1} = I$

Segunda Parte:
Vamos mostrar isso a partir da propriedade de inversas, que diz que $N \cdot N^{-1} = I$ ou $N^{-1} \cdot N = I$

$= [A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}](A - UW^{-1}V)$

$= A^{-1}(A - UW^{-1}V) + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}(A - UW^{-1}V)$

$= I - AUW^{-1}V + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}V(I - A^{-1}UW^{-1}V)$

Vamos usar:

$$B(I - AB) = (I - BA)B$$

Provamos isso a partir de $B(I - AB) = B - BAB = (I - BA)B$

Aplicando isso na equação de forma que: $V = B$ e $A^{-1}UW^{-1} = A$
Formamos:
$= (I - AUW^{-1}V) + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}(I - VA^{-1}UW^{-1})V$

Tirando o W^{-1}:
$= (I - AUW^{-1}V) + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}(W - VA^{-1}U)W^{-1}V$

Sabendo que: $(W - VA^{-1}U)^{-1}(W - VA^{-1}U) = I$

$= (I - AUW^{-1}V) + A^{-1}UW^{-1}V$

$N^{-1} \cdot N = I$

9. Sabemos que a matriz de diferenças tem a seguinte inversa

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Use essa propriedade (e sua versão triangular superior) para achar a inversa de

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dica: escreva T como produto de duas matrizes.

Resolução:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e sua versão triangular superior:

$$L^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então:

$$(L^T)^{-1} = (L^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar a inversa de T:

$$T = L \cdot L^T$$

$$T^{-1} = (L^T)^{-1} \cdot L^{-1}$$

Ou seja:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Mostre que $I + BA$ e $I + AB$ são ambas invertíveis ou singulares. Relacione a inversa de $I + BA$ com a inversa de $I + AB$, caso elas existam.

    Resolução:
    $I + AB$ e $I + BA$

    $B(I + AB) = B + BAB$

    $B(I + AB) = (I + BA)B$

    $M = (I + AB)^{-1} = I - B(I + AB)^{-1}A$

    Sabendo que $B(I + AB) = (I + BA)B$ e $A(I + BA) = (I + AB)A$

    $= (I - B(I + AB)^{-1}A)(I + BA)$

    $= (I + BA) - B(I + AB)^{-1}A(I + BA)$

    $= B(I + AB)^{-1}(I + AB)A = I = BN(I + AB)A$

    $N = (I + BA)^{-1} = (I - BA)^{-1}A = I - B \cdot M \cdot A$

    $I - A(I + BA)^{-1}B(I + AB) = I + AB - A(I + BA)^{-1}B(I + AB)$

11. (Bônus) Mostre que se $\alpha_k A^k + \alpha_{k-1} A^{k-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$, com $\alpha_0 \neq 0$, então A é invertível

Resolução: