Álgebra Linear - Lista de Exercícios 4

Yuri F. Saporito

1. Sejam S e T dois subespaços de um espaço vetorial V.
   (a) Defina $S + T = \{s + t \ ; \ s \in S \text{ e } t \in T\}$. Mostre que $S + T$ é um subespaço vetorial.
   (b) Defina $S \cup T = \{x \ ; \ x \in S \text{ ou } x \in T\}$. Argumente que $S \cup T$ não é necessariamente um subespaço vetorial.
   (c) Se S e T são retas no $\mathbb{R}^3$, o que é $S + T$ e $S \cup T$?

2. Como o núcleo $N(C)$ é relacionado aos núcleos $N(A)$ e $N(B)$, onde $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$?

3. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 11 & -3 \end{bmatrix}.$$
   (a) Ache a sua forma escalonada reduzida.
   (b) Qual é o posto dessa matriz?
   (c) Ache uma solução especial para a equação $Ax = 0$.

4. Ache a matrizes A_1 e A_2 (não triviais) tais que posto$(A_1 B) = 1$ e posto$(A_2 B) = 0$ para $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Verdadeiro ou Falso:
   (a) O espaço das matrizes simétricas é subespaço.
   (b) O espaço das matrizes anti-simétricas é um subespaço.
   (c) O espaço das matrizes não-simétricas ($A^T \neq A$) é um subespaço.

6. Se A é 4×4 e inversível, descreva todos os vetores no núcleo da matriz $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ (que é 4×8).

7. Mostre por contra-exemplos que as seguintes afirmações são falsas em geral:
   (a) A e A^T tem os mesmo núcleos.
   (b) A e A^T tem as mesmas variáveis livres.
   (c) Se R é a forma escalonada de A, então R^T é a forma escalonada de A.

8. Construa uma matriz cujo espaço coluna contenha $(1, 1, 5)$ e $(0, 3, 1)$ e cujo núcleo contenha $(1, 1, 2)$.

9. Construa uma matriz cujo núcleo contenha todos os múltiplos de $(4, 3, 2, 1)$.

10. (*Bônus*) Dado um espaço vetorial real V, definimos o conjunto
$$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ é linear}\}.$$
Ou seja, V^* é o conjunto de todas as funções lineares entre V e $\mathbb{R}$. Relembramos que uma função $f : E \to F$, onde E e F são espaços vetoriais, é dita *linear* se para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ e $f(\alpha \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$. Chamamos V^* de *espaço dual* de V.
   (a) Mostre que V^* é um espaço vetorial.
   (b) Agora, seja $V = \mathbb{R}^n$. Mostre que existe uma bijeção $\varphi : V^* \to V$ tal que , para toda $f \in V^*$ e para todo $\mathbf{v} \in V$, tenhamos
$$f(\mathbf{v}) = \langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle.$$
   Dica: Utilize a dimensão finita de $\mathbb{R}^n$ para expandir $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos vetores da base canônica e aplique a linearidade de f.

Em dimensão infinita, esse resultado é conhecido como Teorema da Representação de Riesz.