

Álgebra Linear - Lista de Exercícios 3

Yuri F. Saporito

1. Ache a decomposição LU da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Ache a decomposição LU da matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Qual condição para a, b, c, d para que A ter quatro pivots?

3. Ache a uma matriz de permutação P tal que:

- (a) P é 3x3, $P \neq I$ e $P^3 = I$.
- (b) S é 4x4 e $S^4 \neq I$

4. Seja A uma matriz 4x4. Quantas entradas de A podem ser escolhidas independentemente caso A seja

- (a) simétrica ($A^T = A$)?
- (b) anti-simétrica ($A^T = -A$)?

5. Suponha que A já é triangular inferior com 1's na diagonal. Mostre que $U = I$.

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Qual é o número c que leva o segundo pivô a ser 0? O que podemos fazer para resolver tal problema? Ainda é válido $A = LU$?
- (b) Qual é o número c que leva o terceiro pivô a ser 0? É possível resolver esse problema?

7. Se A e B são simétricas, quais dessas matrizes são também simétricas:

- (a) $A^2 - B^2$;
- (b) $(A + B)(A - B)$;
- (c) ABA ;
- (d) $ABAB$.

8. Prove que é sempre possível escrever $A = B + C$, onde B é simétrica e C anti-simétrica. *Dica: B e C são combinações simples de A e A^T .*

9. Seja A uma matriz em blocos:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde cada A_{ii} é quadrada $n \times n$ com A_{11} invertível. Ache L e U em blocos tal que $A = LU$:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix},$$

onde L_{11} , L_{22} são triangulares inferiores com 1's na diagonal e U_{11} , U_{22} são triangulares superiores.