Espaços Vetoriais e Subespaços Fundamentais

by: iara

5 de janeiro de 2023

1 Definição: Espaço Vetorial

E é um espaço vetorial se
(i) $v, u \in E \Rightarrow v + u \in E$
(ii) $v \in E$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v \in E$

$\cdot$ $x, y \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in E$

1.1 Propriedades

$\cdot$ Todo espaço vetorial contém 0.
Prova: $u \in E$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in E$ Tome $\alpha = 0$, então $0 = 0 \cdot u \in E \Rightarrow 0 \in E$

$\cdot$ Se E e W são espaços vetoriais, $E \cap W$ também é, mas $E \cup W$ não é.
Prova: Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$u, v \in E \cap W \Rightarrow \begin{cases} u \in E, u \in W \\ v \in E, v \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha u + \beta v \in E \\ \alpha U + \beta v \in W \end{cases} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in E \cap W$$

$\cdot$ Se $S = \{v_1, ...v_k\}$ é um conjunto de elementos de V, definimos

$$span(S) = \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k; \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

$\cdot$ $span(S)$ é o menor espaço vetorial contendo S.

2 Definição: Subespaço Vetorial

$F \subseteq E$ é um subespaço vetorial se F é fechado para combinações lineares.
$u, v \in F, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in F$

3 Definição: Transformação Linear

$T : E \to F$, onde E e F são espaços vetoriais, é uma transformação linear se:
(i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$
(ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

4 Espaço Coluna: $C(A)$

Definição: O espaço das colunas consiste em todas as combinações lineares das colunas. As combinações são todos os possíveis vetores Ax. Estes preenchem o espaços das colunas $C(A)$. Ou seja, o sistema $Ax = b$ só é resolvível quando b está em $C(A)$.

Seja A ($A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) uma matriz $m \times n$, definimos espaço coluna como

$$C(A) = \{Ax \in \mathbb{R}^m; x \in \mathbb{R}^n\}$$

$C(A)$ é um (sub)espaço vetorial: $u, v \in C(A)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in C(A)$
Prova:

$$u \in C(A) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q } u = Ax$$
$$v \in C(A) \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}^n \text{ t.q } v = Ay$$

$$\alpha u + \beta v = \alpha Ax + \beta Ay = A(\alpha x + \beta y)$$
$$\Rightarrow \alpha u + \beta v \in C(A)$$

Exemplo:

$$Ax = b$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Neste caso, b é uma combinação das colunas de A.

5 Espaço Núcleo: $N(A)$

Definição: Seja $x \in \mathbb{R}^n$. O espaço núcleo consiste em todas soluções de $Ax = 0$. Ou seja, cada solução está contida em $N(A)$.

Seja A ($A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) uma matriz $m \times n$, definimos espaço nulo como

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n ; x \in \mathbb{R}^n ; Ax = 0\}$$

$\cdot$ $0 \in N(A)$
Prova: $A \times 0 = 0$

$\cdot$ Para matrizes invertíveis, 0 é a única solução. $N(A) = \{0\}$
$\cdot$ Para $x, y \in N(A)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in N(A)$
Prova: Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$x, y \in N(A) \Rightarrow \begin{cases} Ax = 0 \\ Ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha Ax + \beta Ay = 0 \Rightarrow \begin{cases} A(\alpha x + By) = 0 \\ \alpha x + By \in N(A) \end{cases}$$

Exemplo:

$$Ax = 0$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso, A é invertível e a única solução é $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.

6 Espaço Linha: $C(A^T)$

Definição: O espaço das linhas consiste em todas as combinações lineares das linhas. É o espaço das colunas de A^T.
Seja A^T ($A^T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$) uma matriz $m \times n$, definimos espaço linha como

$$C(A^T) = \{A^T y \in \mathbb{R}^n ; y \in \mathbb{R}^m\}$$

7 Espaço Nulo à Esquerda: $N(A^T)$

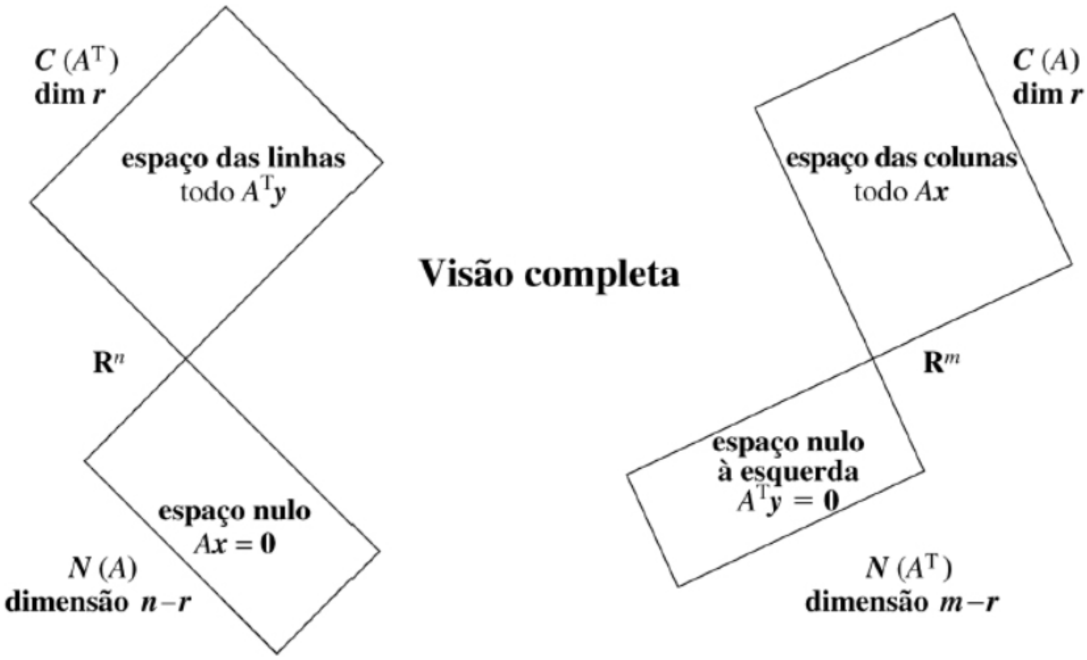
Definição: O espaço nulo à esquerda consiste em em todas soluções de $A^T y = 0$. Ou seja, cada solução está contida em $N(A^T)$.

Seja A^T ($A^T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$) uma matriz $m \times n$, definimos espaço linha como

$$N(A^T) = \{y \in \mathbb{R}^m ; A^T y = 0\}$$

$\cdot$ É importante saber que $A^T y = (y^T A)^T$

8 Conclusão



$C(A^T)$
dim r
espaço das linhas
todo $A^T y$
Visão completa
$C(A)$
dim r
espaço das colunas
todo Ax
$\mathbf{R}^n$
$\mathbf{R}^m$
espaço nulo
$Ax = 0$
$N(A)$
dimensão $n-r$
espaço nulo
à esquerda
$A^T y = 0$
$N(A^T)$
dimensão $m-r$