Álgebra Linear - Lista de Exercícios 8

Iara Cristina Mescua Castro

2 de março de 2022

1. Escreva as 3 equações para a reta $b = C + Dt$ passar pelos pontos $(-1, 7)$, $(1, 7)$, $(2, 21)$. Ache a solução de mínimos quadrados $\hat{x}$ e a projeção $p = A\hat{x}$.

   Resolução:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} C - D = 7 \\ C + D = 7 \\ C + 2D = 21 \end{cases}$$

   Para a solução dos mínimos quadrados $\hat{x}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 42 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3C + 2D = 35 \\ 2C + 6D = 42 \end{cases}$$

   $C = 9$ e $D = 4$, então: $\hat{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$

   $p = A\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix}$

2. Dado o problema acima, quais dos quatro subespaços fundamentais contêm o vetor erro $e = b - p$? E o vetor p? E o vetor $\hat{x}$? Qual é o núcleo de A?

   Resolução:

   $e = b - p = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$, uma vez que o vetor de erro e é ortogonal ao espaço da coluna C(A), ele está no o espaço nulo esquerdo $N(A^T)$.

   A projeção p está em $C(A)$, porque é a projeção no espaço coluna.

   Uma vez que o espaço de linha $C(A^T)$ e o espaço nulo $N(A)$ abrangem todo o espaço, e sempre podemos modificar o vetor $\hat{x}$ por um vetor em $N(A)$ (o que não afeta a projeção $A\hat{x}$). Portanto, podemos escolher $\hat{x}$ para estar no espaço de linha $C(A^T)$.

   $N(A) = \{0\}$, contém apenas o vetor nulo.

3. Ache a melhor reta que se ajusta aos pontos $t = -2, -1, 0, 1, 2$ e $b = 4, 2, -1, 0, 0$.

   Resolução:

$$C + Dt = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 10C = -10 \to C = -1 \\ 5D = 5 \to D = 1 \end{cases}$$

A melhor reta que se ajusta a esses pontos é: $b = 1 - t$

4. Dados os vetores

$$v_1 = [1\ \ -1\ 0\ 0],\ v_2 = [0\ 1\ \ -1\ 0] \text{ e } v_3 = [0\ 0\ 1\ \ -1],$$

use o método de Gram-Schmidt para achar uma base ortonormal que gera o mesmo espaço de v_1, v_2, v_3.

Resolução:

$u_1 = v_1 = (1\ \ -1\ 0\ 0)$
$u_2 = v_2 - \frac{(u_1^T v_2)}{u_1^T u_1} u_1 = (0\ 1\ \ -1\ 0) + \frac{1}{2}(1\ \ -1\ 0\ 0) = (\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \ -1\ 0)$
$u_3 = v_3 - \frac{(u_1^T v_3)}{u_1^T u_1} u_1 - \frac{(u_2^T v_2)}{u_2^T u_2} u_2 = (0\ 0\ 1\ \ -1) + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \ -1\ 0) = (\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 0)$

5. Se os elementos de cada linha de uma matriz A somam zero, ache uma solução para $Ax = 0$ e conclua que $\det A = 0$. Se esses elementos somam 1, conclua que $\det(A - I) = 0$.

Resolução:

Supondo que x seja uma matriz: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$, ao fazer Ax, seus componentes serão a soma das linhas de A.

Visto que os elementos de cada linha de uma matriz A somam zero, então Ax = 0. Como A tem espaço nulo diferente de zero, ele não é invertível e $detA = 0$.

Se os elementos de cada linha de A somam 1, então os elementos de cada linha de (A - I) soma zero. Portanto, (A - I) tem um espaço nulo diferente de zero e $det(A - I) = 0$.

6. Use as propriedades do determinante (e não suas fórmulas) para mostrar que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$

Resolução:

Pela propriedade: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \alpha c & b - \alpha d \\ c & d \end{bmatrix}$

$(L_2 - L_1)$ $(L_3 - L_2)$

$$\det\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\1 & b-a & b^2-a^2\\1 & c-b & c^2-b^2\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}b-a & b^2-a^2\\c-b & c^2-b^2\end{bmatrix}$$

$$= (b-a)(c^2-b^2) - (b^2-a^2)(c-b)$$

$$= (b-a)(c-b)(c+b) - (b-a)(b+a)(c-b)$$

$$= (b-a)((c-b)(c+b) - (b+a)(c-b))$$

$$= (b-a)(c-b)(c+b-b-a)$$

$$= (b-a)(c-b)(c-a)$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

7. Calcule

$$\det\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Resolução:
$DetA = -1$

$$DetA = Det\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= -Det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}(L_1 \leftrightarrow L_2) = Det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}(L_2 \leftrightarrow L_3) = -Det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}(L_3 \leftrightarrow L_4) = -1$$

8. Use o fato de que

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3 & 4\\1 & 3 & 6 & 10\\1 & 4 & 10 & 20\end{bmatrix} = 1$$

para mostrar que

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3 & 4\\1 & 3 & 6 & 10\\1 & 4 & 10 & \mathbf{19}\end{bmatrix} = 0.$$

Resolução:

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3 & 4\\1 & 3 & 6 & 10\\1 & 4 & 10 & 19\end{bmatrix} = 1cof(1) + 4cof(4) - 10cof(10) + 19cof(19)$$

Visto que $20cof(20) = 20cof(19)$:

$$= 1cof(1) + 4cof(4) - 10cof(10) + 20cof(20) - 1cof(20)$$

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3 & 4\\1 & 3 & 6 & 10\\1 & 4 & 10 & 20\end{bmatrix} = 1cof(1) + 4cof(4) - 10cof(10) + 20cof(20) = 1$$

Substituindo:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 19 \end{bmatrix} = 1 - 1cof(20)$$

$$1cof(20) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Sabendo que essa matriz é uma matriz de Pascal simétrica, ela possui determinante igual a 1, então:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 19 \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0$$

9. Ache o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

usando cofatores. O que acontece quando mudamos o valor 4 para 100?

Resolução:
Pela regra dos cofatores:

$$detA = det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 1 \cdot det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + 4 \cdot det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$detA = 6 - 3 + 0$$

$$detA = 3$$

Caso mudemos o valor de 4 para 100, a determinante continua a mesma, pois $det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 0$, então poderia ser qualquer valor que a determinante de A continuaria 3.