Álgebra Linear - Lista de Exercícios 10

Iara Cristina Mescua Castro

27 de novembro de 2021

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Ache b tal que A tenha um autovalor negativo.

   Resolução:
   $P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & b \\ b & 1-\lambda \end{bmatrix}$
   $(1-\lambda)^2 - b^2 = 0$
   $\lambda^2 - 2\lambda + (1-b^2) = 0$
   $\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(1-b^2)}}{2}$
   Então para ter um autovalor negativo:
   $4 - 4(1-b^2) > 2^2$
   $-4(1-b^2) > 0$
   $1 - b^2 < 0$
   $b^2 > 1$
   Resposta: $b > 1$ ou $b < -1$

   (b) Como podemos concluir que A precisa ter um pivô negativo?

   Resolução:
   Os pivôs têm os mesmos sinais que os autovalores. Visto que a matriz A tem um autovalor negativo, então podemos concluir que A precisa ter um pivô negativo.

   (c) Como podemos concluir que A não pode ter dois autovalores negativos?

   Resolução:
   Como dito anteriormente, para um autovalor negativo: $b > 1$ ou $b < -1$ Se escolhermos $b > 1$, então λ_1 será positivo enquanto λ_2 será negativo. Alternativamente, se escolhermos $b < -1$, então λ_1 será negativo enquanto λ_2 será positivo. Portanto, essa matriz não pode ter dois autovalores negativos.

2. Em quais das seguintes classes as matrizes A e B abaixo pertencem: invertível, ortogonal, projeção, permutação, diagonalizável, Markov?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Quais das seguintes fatorações são possíveis para A e B? LU, QR, $S\Lambda S^{-1}$ ou $Q\Lambda Q^T$?

   Resolução:
   A é uma matriz de permutação, invertível, ortogonal, diagonalizável e de Markov.

   A é uma matriz de permutação, pois é uma matriz quadrada obtida da mesma matriz de identidade de tamanho por uma permutação de linhas, nesse caso: $L_1 \longleftrightarrow L_3$.

   A é uma matriz invertível, pois toda matriz de permutação elementar é invertível.

   A é uma matriz ortogonal, pois toda matriz de permutação elementar é ortogonal.

A é uma matriz diagonalizável, pois é simétrica ($A = A^T$) e toda matriz simétrica é diagonalizável.

A é uma matriz de Markov, pois ao somar cada coluna você terá 1 como resultado. $(1 + 0 + 0)$

B é uma matriz diagonalizável e de Markov.

B é uma matriz diagonalizável, pois é simétrica ($A = A^T$) e toda matriz simétrica é diagonalizável.

B é uma matriz de Markov, pois ao somar cada coluna você terá 1 como resultado. $(1/3 + 1/3 + 1/3)$

A não pode ser escrito na forma LU, pois é preciso permutar suas linhas para ser fatorável.

B pode ser escrito na forma LU: $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Complete a matriz A abaixo para que seja de Markov e ache o autovetor estacionário. Sua conclusão é válida para qualquer matriz simétrica de Markov A? Por quê?

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Encontrando os autovalores de A:

$$\det(A - \lambda I)\begin{bmatrix} 0.7-\lambda & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6-\lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5-\lambda \end{bmatrix}$$

Um vetor estacionário tem autovalor $\lambda = 1$, então:

$$\det(A - \lambda I)\begin{bmatrix} 0.7-1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6-1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Calculando os autovetores:

$\begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & -0.5 \end{bmatrix} v = 0$

$\begin{cases} -0.3x + 0.1y + 0.2z = 0 \\ 0.1x - 0.4y + 0.3z = 0 \\ 0.2x + 0.3y - 0.5z = 0 \end{cases}$

$x = y = z$

$v = (1, 1, 1)$

O vetor estacionário pra uma matriz simétrica de Markov sempre será $v = (1, 1, 1)$, pois as Matrizes de Markov sempre tem um autovalor igual a 1, e por ela ser simétrica ao resolver o sistema, você terá $x = y = z$ com um vetor estacionário $v = (1, 1, 1)$.

4. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um grupo de matrizes invertíveis se $A, B \in \mathcal{M}$ implica $AB \in \mathcal{M}$ e $A^{-1} \in \mathcal{M}$. Quais dos conjuntos abaixo é um grupo?

   (a) O conjunto das matrizes positivas definidas;

   (b) o conjunto das matrizes ortogonais;

   (c) o conjunto $\{e^{tC} \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$, para uma matriz C fixa;

(d) o conjunto das matrizes com determinante igual a 1.

Resolução:

(a) Não é um grupo.
Contra-exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tem autovalores $(1, 3)$ e $\det A = 3 > 0$

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tem autovalores $(11, 1)$ e $\det B = 11 > 0$

$$AB = \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Supondo que $x^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$
e $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
Então $x^T \cdot AB \cdot x$ deveria ser maior que 0, mas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

É negativo então AB não é positiva-definida.

(b) É um grupo.
Se A e B são ortogonais, então:
$A^T B = I_n$ e $B^T B = I_n$
Temos que mostrar que AB é ortogonal, ou seja: $(AB)^T (AB) = I_n$
Começamos com:
$(AB)^T = B^T A^T$
Multiplicando toda a equação por AB:
$(AB)^T (AB) = B^T A^T AB$
$(AB)^T (AB) = B^T (A^T A) B$
$(AB)^T (AB) = B^T I B$
$(AB)^T (AB) = B^T B$
$(AB)^T (AB) = I$
Agora temos que mostrar que A^{-1} é ortogonal, ou seja: $(A^{-1})^T (A^{-1}) = I_n$
Sabendo que A é uma matriz ortogonal, então:
$A^{-1} = A^T$
Fazendo a transposta de toda a equação:
$(A^{-1})^T = (A^T)^T = A$
Substituindo $(A^{-1})^T = A$ na equação:
$(A^{-1})^T (A^{-1}) = I_n$
$A(A^{-1}) = I_n$ que é verdade.

(c) É um grupo.
$e^{tC} \cdot e^{tB} = e^{t(C+B)}$

(d) É um grupo.
Se $\det A = 1$ e $\det B = 1$, então $\det AB = \det A \times \det B = 1$.
Se $\det A = 1$ então $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1$

5. Sejam A e B matrizes simétricas e positivas definidas. Prove que os autovalores de AB são positivos. Podemos dizer que AB é simétrica e positiva definida?

Resolução:
Supondo que $A*$ seja a transposta conjugada de A. De acordo com a definição, uma matriz definida positiva é necessariamente hermitiana.
Como A é positiva definida, existe invertível $\sqrt{A}$ tal que $A = \sqrt{A}\sqrt{A}$
Como B é definida positiva, existe B invertível $\sqrt{B}$ tal que $B = \sqrt{B}\sqrt{B}$
Visto que, $(\sqrt{A})* = \sqrt{A}$ e $(\sqrt{B})* = \sqrt{B}$
Seja $\curlywedge$ um autovalor de AB e v um autovetor de AB. Seja $u = \sqrt{A}^{-1}v$. (Então, $v = \sqrt{A}u$)
$ABv = \curlywedge v \iff (\sqrt{A}\sqrt{A})B(\sqrt{A}u) = \curlywedge\sqrt{A}u$
Multiplicando toda a equação por $\sqrt{A}^{-1}$:
$\sqrt{A}^{-1}(\sqrt{A}\sqrt{A}B\sqrt{A}u) = \sqrt{A}^{-1}(\sqrt{A}\curlywedge u) \iff \sqrt{A}B\sqrt{A}u = \curlywedge u$
Portanto, AB e $\sqrt{A}B\sqrt{A}$ têm os mesmos autovalores.
Agora vamos provar que os autovalores de $\sqrt{A}B\sqrt{A}$ são positivos (e por isso, os autovalores de AB também são):
Usando propriedades de produto interno:
$\curlywedge\langle u, u\rangle = \langle \curlywedge u, u\rangle = \langle \sqrt{A}B\sqrt{A}u, u\rangle = \langle (\sqrt{A}\sqrt{B})(\sqrt{B}\sqrt{A})u, u)\rangle$
$= \langle (\sqrt{B}\sqrt{A})u, (\sqrt{A}\sqrt{B}) * u)\rangle$
$= \langle \sqrt{B}\sqrt{A}u, \sqrt{B} * \sqrt{A} * u\rangle$
$= \langle \sqrt{B}\sqrt{A}u, \sqrt{B}\sqrt{A}u\rangle > 0$
Então, $\curlywedge\langle u, u\rangle 0 \Rightarrow \curlywedge > 0$

Não é possível dizer que AB é simétrica e positiva definida. Na questão anterior (letra a)) há um contra-exemplo demostrando que nem toda matriz positiva definida e simétrica A e B tem um produto AB positivo definido.

6. Ache a forma quadrática associada à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$. Qual o sinal dessa forma quadrática? Positivo, negativo ou ambos?

Resolução:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + 5y \\ 7x + 9y \end{bmatrix}$$

$$= x^2 + 12xy + 9y^2$$

Ambos, a função quadrática é positiva e negativa dependendo do valor de x e y. Por exemplo, se $x = 1$ e $y = 1$ a função é igual a 22. Já se $x = 1$ e $y = -1$, a função é igual a -2.

7. Prove os seguintes fatos:

(a) Se A e B são similares, então A^2 e B^2 também o são.

Resolução:
Se A e B são similares:
$A = PBP^{-1}$
$A^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1})$

$A^2 = (PB)(P^{-1}P)(BP^{-1})$
$A^2 = PBIBP^{-1}$
$A^2 = PB^2P^{-1}$
Então A^2 e B^2 também são similares.

(b) A^2 e B^2 podem ser similares sem A e B serem similares.
Contra-exemplo para "Se A^2 e B^2 são similares, então A e B são similares":
Supondo que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
A^2 e B^2 são similares, pois:
$A^2 = PB^2P^{-1} \longrightarrow A^2P = PB^2$
$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Visto que $A^2 = B^2 = I$,
$A^2 = PB^2P^{-1} \longrightarrow I = PIP^{-1}$ é satisfeito, e P pode ser qualquer matriz invertível.
Por outro lado, A e B:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Não são similares, pois $\det A = 1$ e $\det B = -1$.
Por isso, A^2 e B^2 podem ser similares sem A e B serem similares.

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ é similar à $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução:
Sabendo que $A = PBP^{-1}$, ao multiplicar tudo por P: $AP = PB$
$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 4c & 4d \end{bmatrix}$$

$$PB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & a+4b \\ 3c & c+4d \end{bmatrix}$$

Igualando:
$$\begin{cases} 3a = 3a \longrightarrow a = 1 \\ 3b = a + 4b \longrightarrow b = -1 \\ 4c = 3c \longrightarrow c = 0 \\ 4d = c + 4d \longrightarrow d = 1 \end{cases}$$

ps: a poderia ser 0, mas colocamos 1 pois P precisa ser uma matriz invertível, então a determinante não pode ser 0.
Logo:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P satisfaz $A = PBP^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, A e B são similares.

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ não é similar à $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Resolução:

8. Ache os valores singulares (como na decomposição SVD) da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Resolução:
$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A^T A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$$

$= 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 1 = 0$
$= \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$
$\triangle = 9 - 4 = 5$
$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$
$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
$\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
Então os valores singulares serão:
$\sigma_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$
$\sigma_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

9. Suponha que as colunas de A sejam $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ que são vetores ortogonais com comprimentos $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Calcule $A^T A$. Ache a decomposição SVD de A.

Resolução:
Usando um caso particular para visualizar essa situação: $w_1 = (2, 0, 0)$ e $w_2 = (0, 3, 0)$

w_1 e w_2 representam os vetores ortogonais, com comprimentos $\sigma_1 = 2$ e $\sigma_2 = 3$

$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\det(AA^T - \lambda I) = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(4-\lambda)(9-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 0$

$(A - \lambda I)x = \begin{bmatrix} 4-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 9-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$

$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

Observa-se que os autovalores não-nulos de de AA^T e $A^T A$ são os mesmos.

$\det(A^T A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 9-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(9-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$

Consequentemente, os autovetores são $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$

$V = V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 0 \\ 0 & \sqrt{9} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Então, concluímos que a decomposição SVD de A é:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 0 \\ 0 & \sqrt{9} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

De uma forma mais geral, w_1 e w_2 podem ter qualquer σ_1 e σ_2, além de estar em outra dimensão.

Supondo que A é uma matriz $m \times n$:

$$\text{Então } AA^T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times m} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

$$\det(AA^T - \lambda I) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 - \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 - \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Autovalores: $\lambda_1 = \sigma_1^2$, $\lambda_2 = \sigma_2^2$ ... $\lambda_n = 0$

Autovetores: $v_1 = (1,0,0...0_m)$, $v_2 = (0,1,0...0_m)$, ... $v_n = (0,0,0...1_m)$

$U = I_{m\times m}$

$$A^TA = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times m} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\det(A^TA - \lambda I) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Autovalores: $\lambda_1 = \sigma_1^2$, $\lambda_2 = \sigma_2^2$ ... $\lambda_n = \sigma_n$

Autovetores: $v_1 = (1,0,0...0_n)$, $v_2 = (0,1,0...0_n)$, ... $v_n = (0,0,0...1_n)$

$V = V^T = I_{n\times n}$

Por último:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$