Álgebra Linear - Lista de Exercícios 5

Yuri F. Saporito

30 de agosto de 2021

1. Explique porque essas afirmações são falsas

   (a) A solução completa é qualquer combinação linear de x_p e x_n.

   (b) O sistema $Ax = b$ tem no máximo uma solução particular.

   (c) Se A é inversível, não existe nenhuma solução x_n no núcleo.

2. Sejam
$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$
   Use a eliminação de Gauss-Jordan para reduzir as matrizes $[U\ 0]$ e $[U\ c]$ para $[R\ 0]$ e $[R\ d]$. Resolva $Rx = 0$ e $Rx = d$

3. Suponha que $Ax = b$ e $Cx = b$ tenham as mesmas soluções (completas) para todo b. Podemos concluir que $A = C$?

4. Ache o maior número possível de vetores linearmente independentes dentre os vetores:
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. Ache uma base para o plano $x - 2y + 3z = 0$ em $\mathbb{R}^3$. Encontre então uma base para a interseção desse plano com o plano xy. Ache ainda uma base para todos os vetores perpendiculares a esse plano.

6. Ache (na sua forma mais simples) a matriz que é o produto das matrizes de posto 1 $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ e $\mathbf{w}\mathbf{z}^T$? Qual seu posto?

7. Suponha que a coluna j de B é uma combinação linear das colunas anteriores de B. Mostre que a coluna j de AB é uma combinação linear das colunas anteriores de AB. Conclua que posto$(AB) \leq$ posto(B).

8. O item anterior nos dá posto$(B^T A^T) \leq$ posto(A^T). É possível concluir que posto$(AB) \leq$ posto(A)?

9. Suponha que A e B são matrizes quadradas e $AB = I$. Prove que posto$(A) = n$. Conclua que B precisa ser a inversa (de ambos lados) de A. Então, $BA = I$.

10. (*Bônus*) Dado um espaço vetorial real V, definimos o conjunto
$$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ é linear}\}.$$
    Ou seja, V^* é o conjunto de todas as funções lineares entre V e $\mathbb{R}$. Relembramos que uma função $f : E \to F$, onde E e F são espaços vetoriais, é dita *linear* se para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ e $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$. Chamamos V^* de *espaço dual* de V.

    (a) Mostre que V^* é um espaço vetorial.

    (b) Agora, seja $V = \mathbb{R}^n$. Mostre que existe uma bijeção $\varphi : V^* \to V$ tal que , para toda $f \in V^*$ e para todo $\mathbf{v} \in V$, tenhamos
$$f(\mathbf{v}) = \langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle.$$
    Dica: Utilize a dimensão finita de $\mathbb{R}^n$ para expandir $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos vetores da base canônica e aplique a linearidade de f.

    Em dimensão infinita, esse resultado é conhecido como Teorema da Representação de Riesz.