# Respostas da Lista 1

# Álgebra Linear


**Iara Cristina Mescua Castro**

**Matrícula: 211704019**


**09/08/2021**

## Sumário

**9**

**Repita o problema acima para a matriz:**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**10**

**10**

**Considere a equação de recorrência** $-x_{i+1} + 2_{xi} - x_{i-1} = i$ **para** $i = 1, 2, 3, 4$ **com** $x_0 = x_5 = 0$**. Escreva essas equações em notação matricial** $Ax = b$ **e ache x.**

**11**

**11**

**(Bônus) Use o seguinte código em numpy para gerar um vetor aleatório: v = numpy.random.normal(size=[3,1]) em** $\mathbb{R}^3$**. Fazendo** $u = v/||v||$ **criamos então um vetor unitário aleatório. Crie 30 outros vetores unitários aleatórios** $u_j$ **(use numpy.random.normal(size=[3,30])). Calcule a média dos produtos internos** $|uu_j|$ **e compare com o valor exato** $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos\theta| d\theta = \frac{2}{\pi}$

**13**

## Questão 1:

**Quais condições para y1, y2 e y3 fazem com que os pontos (0, y1), (1, y2) e (2, y3) caiam numa reta?**

Para três pontos estarem na mesma reta, as coordenadas dos pontos devem cumprir a seguinte condição:

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Substituindo os valores:

$$\det \begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ 1 & y_2 & 1 \\ 2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo a determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ 1 & y_2 & 1 \\ 2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & y_1 \\ 1 & y_2 \\ 2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

$0 + 2y_1 + y_3 - (2y_2 + 0 + y_1)$

$y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$

Então para os pontos $(0, y_1)$, $(1, y_2)$ e $(2, y_3)$ estarem na mesma reta,

eles devem satisfazer a equação: $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$

## Questão 2:

**Se (a, b) é um múltiplo de (c, d) e são todos não-zeros, mostre que (a, c) é um múltiplo de (b, d). O que isso nos diz sobre a matriz**

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Se (a, b) é um múltiplo de (c, d), então:

$$\begin{gathered} (a,b) = x(c,d) \\ a = xc \\ b = xd \\ c = a/x \\ d = b/x \end{gathered}$$

Então se (a, c) é múltiplo de (b, d):

$$(a,c) = y(b,d)$$

Precisamos obter:

$$\begin{gathered} a = yb \\ c = yd \end{gathered}$$

Substituindo $a$ e $b$ em $(a,c) = y(b,d)$:

$$\begin{gathered} (xc,c) = y(xd,d) \\ \cancel{x}c = y\cancel{x}d \\ c = yd \end{gathered}$$

Substituindo $c$ e $d$ em $(a,c) = y(b,d)$:

$$\begin{gathered} (a,a/x) = y(b,b/x) \\ \frac{a}{\cancel{x}} = y\frac{b}{\cancel{x}} \\ a = yb \end{gathered}$$

Se substituirmos $a$, $b$, $c$ e $d$ na matriz e calcularmos sua determinante:

$$A = \begin{bmatrix} xc & xd \\ a/x & b/x \end{bmatrix}$$

Calculando a determinante: $xc.\frac{b}{x} - (\frac{a}{x}.xd) = cb - ad$ Calculando a determinante da matriz original:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$a.d - cb$
Com isso, é possível concluir que:
cb - ad = ad - cb
2cb = 2ad
cb = ad

E assim, podemos concluir que a determinante dessa matriz A é igual a 0, é nulo.

## Questão 3:

**Se w e v são vetores unitários, calcule os produtos internos de**

**(a)** $v$ **e** $-v$**;**
**(b)** $v+w$ **e** $v-w$**;**
**(c)** $v-2w$ **e** $v+2w$

$$\textbf{(a)} < v,-v >= ||v||||-v||\cos 180$$
$$||v|| = 1,\ ||-v|| = 1 \text{ e } \cos 180 = -1, \text{ logo:}$$
$$= (1)(1)(-1)$$
$$= -1$$

$$\textbf{(b)} < v+w, v-w >=< v,v > - < v,w > + < w,v > - < w,w >$$
$$< v,v >= 1,\ < v,w >=< w,v > \text{ e } < w,w >= 1, \text{ logo:}$$
$$= 1+0-1$$
$$= 0$$

$$\textbf{(c)} < v-2w, v+2w >=< v,v > + < v,2w > - < 2w,v > - < 2w,2w >$$
$$< v,v >= 1,\ < v,2w >=< 2w,v > \text{ e } < 2w,2w >= 4 < w,w >= 4, \text{ logo:}$$
$$= 1+0-4$$
$$= -3$$

## Questão 4:

**Se $||v|| = 5$ e $||w|| = 3$, quais são o menor e maior valores possíveis para $||v-w||$? E para $vw$?**

Primeiro vamos provar que: $||v|-|w|| \leq ||v-w||$
Através da desigualdade triangular, $||a|| + ||b|| \geq ||a+b||$, substituímos a = v - w e b = w, formando:

$$||v-w|| + ||w|| \geq ||v-w+w||$$
$$||v-w|| \geq ||v|-|w||$$

Por isso, quando v $\geq$ w $\geq$ 0

$$||v-w|| \geq ||v|-|w||$$
$$||v-w|| \geq |5-3|$$
$$||v-w|| \geq |2|$$
$$||v-w|| \geq 2$$

**2** é o **menor** valor possível de $|v-w|$

E quando v $\geq$ 0 $\geq$ w , ou seja, v = 5 e w = -3

$$||v-w|| = ||5-(-3)||$$
$$||v-w|| \leq ||8||$$
$$||v-w|| \leq 8$$

**8** é o **maior** valor possível de $|v-w|$

Para $v \cdot w$, o menor valor possível seria negativo, ou seja, um dos valores será negativo e o outro positivo.
$v > 0$ e $w < 0$, ou seja, v = 5 e w = -3
Esses valores satisfazem as condições, pois
$||v|| = 5$ e $||5|| = 5$
$||w|| = 3$ e $||-3|| = 3$
Assim, o menor valor para $v \cdot w$ é igual a 5 . (-3) = **-15**

E o maior valor seria positivo, ou seja, os dois valores serão positivos (ou os dois serão negativos).
$v > 0$ e $w > 0$, ou seja, v = 5 e w = 3
Esses valores satisfazem as condições, pois
$||v|| = 5$ e $||5|| = 5$
$||w|| = 3$ e $||3|| = 3$
Assim, o maior valor para $v \cdot w$ é igual a 5 . 3 = **15**

## Questão 5:

**Considere o desenho dos vetores w e v abaixo. Hachure as regiões definidas pelas combinações lineares cv + dw considerando as seguintes restrições: c + d = 1 (não necessariamente positivos), c, d $\in$ [0, 1] e c, d $\geq$ 0 (note que são três regiões distintas).**

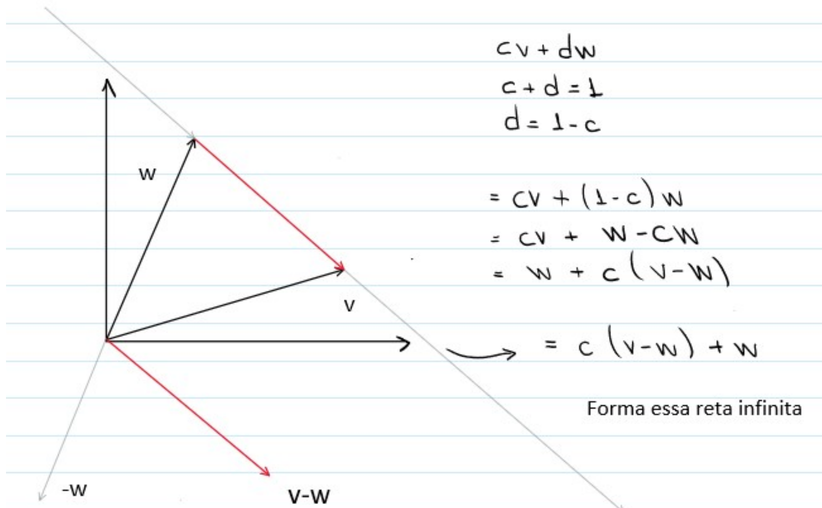


Figura 1:

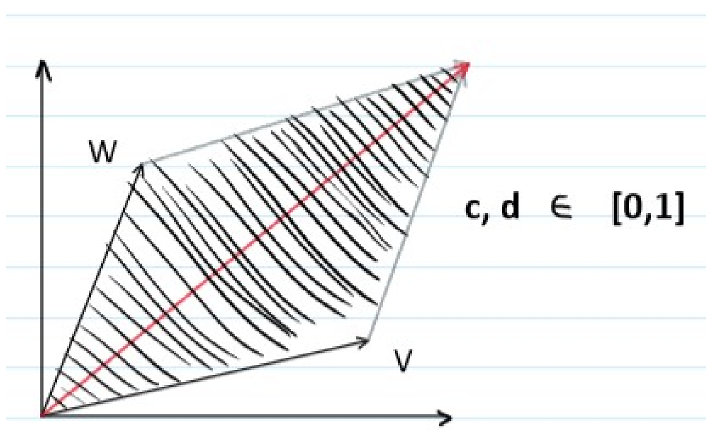


Figura 2: Questão 5, item 2

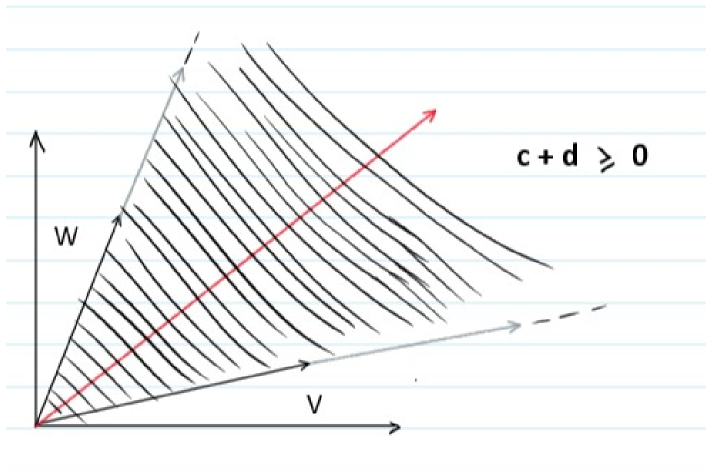


Figura 3: Questão 5, item 3

## Questão 6:

**E possível que três vetores em $\mathbb{R}^2$ tenham $uv < 0$, $vw < 0$ e $uw < 0$?**

**Argumente.**

Sim, é possível. Primeiro, sem perda de generalidade, vamos supor que u, v, w são vetores unitários.

$u.v = cos\measuredangle(u,v) < 0$

Logo, $\measuredangle(u,v) \in (\frac{2\pi}{3}, \pi)$

$v.w = cos(v,w) < 0$

Logo, $\measuredangle(v,w) \in (\frac{2\pi}{3}, \pi)$

$u.w = cos(u,w) < 0$

Logo, $\measuredangle(u,w) \in (\frac{2\pi}{3}, \pi)$

No plano cartesiano, podemos criar a seguinte situação:

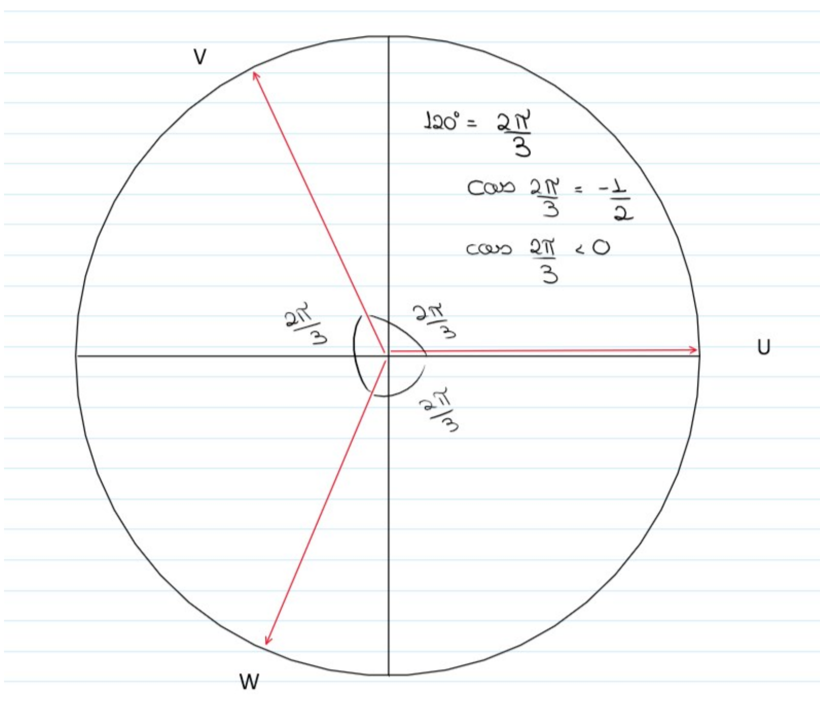


Figura 4: Questão 6

E assim, forma-se 3 vetores (u, v, w) que estão em $\mathbb{R}^2$ e satisfazem essas condições.

## Questão 7:

**Sejam x, y, z satisfazendo x + y + z = 0.**
**Calcule o ângulo entre os vetores (x, y, z) e (z, x, y)**

Primeiro vamos chamar:
u = (x, y, z)
v = (z, x, y)
z = -x -y ou z = -(x+y)

$$cos\measuredangle(u,v) = \frac{(x,y,z).(x,y,z)}{||u||.||v||}$$

$$cos\measuredangle(u,v) = \frac{xz+xy+zy}{||u||.||v||}$$

$$cos\measuredangle(u,v) = \frac{x(z+y)+zy}{||u||.||v||}$$

$$cos\measuredangle(u,v) = \frac{x(-x)+(-x-y)y}{||u||.||v||}$$

$$cos\measuredangle(u,v) = \frac{-x^2-xy+y^2}{||u||.||v||}$$

$$cos\measuredangle(u,v) = \frac{-(x^2+xy+y^2)}{||u||.||v||}$$

Calculando as normas:

$||u|| = \sqrt{x^2+y^2+x^2+2xy+y^2} = \sqrt{2x^2+2xy+2y^2}$
$||v|| = \sqrt{z^2+x^2+y^2} = \sqrt{2x^2+2xy+2y^2}$
$||u||.||v|| = 2x^2+2xy+2y^2 = 2(x^2+2xy+2y^2)$

Substituindo:

$$cos\measuredangle(u,v) = \frac{-(x^2+xy+y^2)}{2(x^2+2xy+2y^2)}$$

$$cos\measuredangle(u,v) = \frac{-1}{2}$$

$$\measuredangle(u,v) = 240°$$

## Questão 8:

**Resolva o sistema linear abaixo:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

**Escreva a solução x como uma matriz A vezes o vetor b.**

Temos o sistema com as equações lineares:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = b_1 \\ 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 = b_2 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = b_3 \end{cases}$$

Por isso,

$$x_1 = b_1$$

$$x_1 + x_2 = b_2$$

$$b_1 + x_2 = b_2$$

$$x_2 = b_2 - b_1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = b_3$$

$$\cancel{b_1} + b_2 \cancel{- b_1} + x_3 = b_3$$

$$x_3 = b_3 - b_2$$

Em outras palavras,

$$\begin{cases} 1b_1 + 0b_2 + 0b_3 = x_1 \\ -1b_1 + 1b_2 + 0b_3 = b_2 \\ 0b_1 + -1b_2 + 1b_3 = x_3 \end{cases}$$

Assim, a solução de x, como uma matriz A vezes o vetor b fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

## Questão 9:

**Repita o problema acima para a matriz:**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Repetindo o processo, temos o sistema com as equações lineares:

$$\begin{cases} -1x_1 + 1x_2 + 0x_3 = b_1 \\ 0x_1 - 1x_2 + 1x_3 = b_2 \\ 0x_1 + 0x_2 + -1x_3 = b_3 \end{cases}$$

Por isso,

$$x_3 = -b_3$$

$$0_1 - 1x_2 + 1x_3 = b_2$$

$$0_1 - 1x_2 - b_3 = b_2$$

$$x_2 = -(b_2 + b_3)$$

$$-x_1 + 1x_2 + 0x_3 = b_1$$

$$-x_1 - (b_2 + b_3) + 0(-b_3) = b_1$$

$$x_1 = -b_2 - b_3 - b_1$$

$$x_1 = -(b_2 + b_3)$$

Em outras palavras,

$$\begin{cases} -1b_1 - 1b_2 - 1b_3 = x_1 \\ 0b_1 - 1b_2 - 1b_3 = x_2 \\ 0b_1 + 0b_2 - 1b_3 = x_3 \end{cases}$$

Assim, a solução de x, como uma matriz A vezes o vetor b fica:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

## Questão 10:

**Considere a equação de recorrência $-x_{i+1} + 2_{xi} - x_{i-1} = i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ com $x_0 = x_5 = 0$. Escreva essas equações em notação matricial $Ax = b$ e ache x.**

Equação

$$-x_{i+1} + 2x_i - x_{i-1} = i$$

Para i = 1:

$$-x_2 + 2x_1 - x_0 = 1$$
$$2x_1 - x_2 + 0 + 0 = 1$$

Para i = 2:

$$-x_3 + 2x_2 - x_1 = 2$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + 0 = 2$$

Para i = 3:

$$-x_4 + 2x_3 - x_2 = 3$$
$$0 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3$$

Para i = 4:

$$-x_5 + 2x_4 - x_3 = 4$$
$$0 + 0 - x_3 3 + 2x_4 = 4$$

Juntando todas as equações em um sistema, obtemos:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 0 + 0 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 0 = 2 \\ 0 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 0 + 0 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Escrevendo essas equações em notação matricial: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Somando:

$$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 10$$
$$x_1 = 10 - x_4$$

Substituindo em $L_1$:

$$2(10 - x_4) - x_2 = 1$$
$$20 - 2x_4 - x_2 = 1$$
$$2x_4 + x_2 = 19$$
$$x_2 = 19 - 2x_4$$

Isolando $x_3$ em $L_4$:

$$2x_4 = 4 + 1x_3$$
$$x_3 = 2x_4 - 4$$

Substituindo tudo em $L_2$:

$$\begin{gathered}
-(10-x_4)+2(19-2x_4)-(2x_4-4)=2 \\
x_4-10++38-4x_4-2x_4+4=2 \\
x_4-10++38-4x_4-2x_4+4=2 \\
-5x_4-10+38+4=2 \\
-5x_4-10+38+4=2 \\
-5x_4=-30 \\
x_4=6
\end{gathered}$$

Substituindo nas equações:

$$\begin{gathered}
x_3=2(6)-4 \\
x_3=8
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
x_2=19-2(6) \\
x_2=7
\end{gathered}$$

$$x_1=4$$

Resultado: $X=\begin{bmatrix}4\\7\\8\\6\end{bmatrix}$

## Questão 11:

**(Bônus) Use o seguinte código em numpy para gerar um vetor aleatório: v = numpy.random.normal(size=[3,1]) em $\mathbb{R}^3$. Fazendo $u = v/||v||$ criamos então um vetor unitário aleatório. Crie 30 outros vetores unitários aleatórios $u_j$ (use numpy.random.normal(size=[3,30])). Calcule a média dos produtos internos $|uu_j|$ e compare com o valor exato $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos\theta| d\theta = \frac{2}{\pi}$**