Álgebra Linear - Lista de Exercícios 9

Iara Cristina Mescua Castro

29 de novembro de 2021

1. Seja B uma matriz 3×3 com autovalores 0, 1 e 2. Com essa informação, ache:
   - (a) o posto de B;
   - (b) o determinante de $B^T B$;
   - (c) os autovalores de $B^T B$;
   - (d) os autovalores de $(B^2 + I)^{-1}$.

   Resolução:

   a) 2
   $B \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1 = 0$, pois $\lambda_1 = 0$
   $B \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2$
   $B \cdot v_3 = \lambda_3 \cdot v_2$
   Então $v_1 \; \varepsilon \; N(B)$ e $v_2, v_3 \; \varepsilon \; C(B)$

   Então o posto de B é 3 - 1 = 2.

   b) 0

   $\det B = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$
   $\det B = 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0$

   $\det B^T B = \det B^T \det B = 0$

   c) Não há informações o suficiente para determinar os autovalores de $B^T B$

   d) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$

   Sabendo que:
   $Bv = \lambda v$
   $v = B^{-1} \lambda \, v$
   $\frac{1}{\lambda} v = B^{-1} v$
   Em outras palavras, se λ é um autovalor para A, então $\frac{1}{\lambda}$ é um autovalor para B^{-1}.
   Então os autovalores de $(B^2 + I)^{-1}$, sabendo que $\lambda_1, \lambda_2, \cdot \lambda_3 = 0, 1, 2$ serão:

   $\frac{1}{0^2+1} = 1$
   $\frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$
   $\frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{5}$

2. Ache os autovalores das seguintes matrizes

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

   Resolução:

   a)

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda) = 0$$

Então os autovalores são: 1, 4 e 6

$b)$

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 0-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = (-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) - ((1)(2-\lambda)(3)) = 0$$

$$\det(B - \lambda I) = \lambda^2(2-\lambda) - (6-3\lambda) = 0$$

$$\det(B - \lambda I) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda + 6 = 0$$

$$\det(B - \lambda I) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3) = 0$$

Então os autovalores são: 2, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$

$c)$

$$C - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(C - \lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2$$

$$\det(C - \lambda I) = -\lambda^2 (\lambda - 6\lambda) = 0$$

Então os autovalores são: 6 e 0

3. Descreva todas as matrizes S que diagonalizam as matrizes A e A^{-1}:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = -2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\triangle = 20$$

$$\lambda = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

Os autovalores são: $\lambda_1 = 1 + \sqrt{5}$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{5}$

Então para encontrar os autovetores usando esses valores, teremos:

$$(A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 0-\lambda_1 & 4 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{5} & 4 \\ 1 & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -y - y\sqrt{5} + 4z = 0 \\ y + z + z\sqrt{5} = 0 \end{cases}$$

$y = z(-1-\sqrt{5})$

Então $v_1 = (-1-\sqrt{5}, 1)$ é um autovetor para λ_1

$$(A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 0-\lambda_2 & 4 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{5} & 4 \\ 1 & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -y + \sqrt{5}y + 4z = 0 \\ y + z - \sqrt{5}z = 0 \end{cases}$$

$y = -z + \sqrt{5}z$
$y = z(-1 + \sqrt{5})$
Então $v_2 = (-1 + \sqrt{5}, 1)$ é um autovetor para λ_2
Logo as colunas da matriz S que diagonalizam A são múltiplos não zeros de $(-1-\sqrt{5}, 1)$ e $(-1+\sqrt{5}, 1)$.
Visto que $A^{-1} = S \wedge S^{-1}$, a mesma matriz S pode diagonalizar A^{-1}.

4. Ache Λ e S que diagonalizem A

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.9 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Qual limite de Λ^k quando $k \to +\infty$? E o limite de A^k?

Resolução:
Visto que a soma de ambas colunas é igual a 1. Sabemos que A é uma matriz de Markov, e por isso tem autovalor $\lambda_1 = 1$. A soma da diagonal de A é 0.7, então o outro autovalor é $\lambda_2 = 0.7 - 1 = -0.3$.

Para encontrar os autovetores:

$(A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 0.6 - \lambda_1 & 0.9 \\ 0.4 & 0.1 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.9 \\ 0.4 & -0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} -0.4y + 0.9z = 0 \\ 0.4y - 0.9z = 0 \end{cases}$

$-0.4y + 0.9z = 0$
$0.4y = 0.9z$
Então, $(0.9, 0.4)$ é um autovetor para λ_1

$(A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 0.6 - \lambda_2 & 0.9 \\ 0.4 & 0.1 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 0.9y + 0.9z = 0 \\ 0.4y + 0.4z = 0 \end{cases}$
$y = -z$
Então, $(-1, 1)$ é um autovetor para λ_2
Juntando esses autovetores e sabendo que os autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -0.3$, teremos:

$S = \begin{bmatrix} 0.9 & -1 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix}$ e $\bigwedge = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix}$
Quando $k \to \infty$, $\bigwedge^k \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$A^k = S \bigwedge^k S^{-1}$, quando $k \to \infty$, $\to \begin{bmatrix} 0.9 & -1 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\frac{1}{13}) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.4 & -0.9 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$

5. Seja $Q(\theta)$ a matriz de rotação do ângulo θ em $\mathbb{R}^2$:

$$Q(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Ache os autovalores e autovetores de $Q(\theta)$ (eles podem ser complexos).

Resolução:
$\det Q = (\cos\theta - \lambda)^2 + \text{sen}\,\theta^2 = 0$
$\det Q = \cos\theta^2 - 2\cos\theta + \lambda^2 + \text{sen}\,\theta^2 = 0$
$\det Q = \lambda^2 - 2\cos\theta + 1 = 0$
$\triangle = 4\cos^2\theta$
$\lambda = \dfrac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2}$

$\leftthreetimes = \dfrac{2\cos\theta \pm \sqrt{4(\cos^2\theta - 1)}}{2}$

$\leftthreetimes = \dfrac{2\cos\theta \pm \sqrt{4(-\operatorname{sen}^2\theta)}}{2}$

Autovalores:
$\leftthreetimes_1 = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$
$\leftthreetimes_2 = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$

Autovetores:
$\begin{bmatrix} -i\operatorname{sen}\theta & -sen\theta \\ sen\theta & -isen\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$

$-i\operatorname{sen}\theta x - \operatorname{sen}\theta y = 0$
$\operatorname{sen}\theta - i\operatorname{sen}\theta y = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta x - i\operatorname{sen}\theta y = 0$
$\operatorname{sen}\theta x - i\operatorname{sen}\theta y = 0$

$\begin{bmatrix} iy \\ y \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

Então $v_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

$v_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$

6. Suponha que A e B são duas matrizes $n \times n$ com os mesmo autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e os mesmos autovetores $x_1, \ldots, x_n$. Suponha ainda que $x_1, \ldots, x_n$ são LI. Prove que $A = B$.

Resolução:
Vetores x independentes obtidos de $\leftthreetimes' s$ diferentes Autovetores $x_1, \ldots, x_n$ que correspondam a distintos autovalores (todos diferentes) são LI. Uma matriz $n \times n$ que tenha n diferentes autovalores deve ser diagonalizável. Uma vez que A e B têm n autovetores LI $x_1, \ldots, x_n$, eles são diagonalizáveis.

Então, sabendo que $\leftthreetimes = \begin{bmatrix} \leftthreetimes_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \leftthreetimes_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \leftthreetimes_n \end{bmatrix}$ é o mesmo para A e B.

Uma vez que os autovetores são os mesmos, S também é o mesmo para A e B.
$\leftthreetimes = S^{-1}AS$ e $\leftthreetimes = S^{-1}BS$ então $A = B$

7. Seja $Q(\theta)$ como na Questão 5. Diagonalize $Q(\theta)$ e mostre que

$$Q(\theta)^n = Q(n\theta).$$

Resolução:

$$Q(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Pela questão 5:
$\leftthreetimes_1 = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$
$\leftthreetimes_2 = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$

$\bigwedge = \begin{bmatrix} \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$

Pela fórmula de Euler: Quando $n \to \infty, \bigwedge^n \to \begin{bmatrix} \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta & 0 \\ 0 & \cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta \end{bmatrix}$

$v_1 = (i, 1)$

$v_2 = (-i, 1)$

$S = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Então: $Q(\theta)^n = S \bigwedge^n S^{-1} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta & 0 \\ 0 & \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-i\cos n\theta + \operatorname{sen} n\theta}{2} & \frac{\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta}{2} \\ \frac{i\cos n\theta + \operatorname{sen} n\theta}{2} & \frac{\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\operatorname{sen} n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} = Q(n\theta)$

8. Suponha que G_{k+2} é a média dos dois números anteriores G_{k+1} e G_k. Ache a matriz A que faz com que

$$\begin{bmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix}.$$

   (a) Ache os autovalores e autovetores de A;
   (b) Ache o limite de A^n quando $n \to +\infty$;
   (c) Mostre que G_n converge para $2/3$ quando $G_0 = 0$ e $G_1 = 1$.

Resolução:

a) Temos as equações:

$\begin{cases} G_{k+2} = \frac{1}{2}G_{k+1} + \frac{1}{2}G_k \\ G_{k+1} = G_{k+1} + 0G_k \end{cases}$

Então a matriz A é: $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Calculando os autovalores:

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0.5 - \lambda & 0.5 \\ 1 & 0 - \lambda \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = (0.5 - \lambda) - \lambda - 0.5 = 0$

$\lambda^2 - 0.5\lambda - 0.5 = 0$

$\triangle = 2.25$

$\lambda = \dfrac{0.5 \pm 1.5}{2}$

$\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

Calculando os autovetores:

$(A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 0.5 - \lambda_1 & 0.5 \\ 1 & 0 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -0.5y + 0.5z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

$y = z$

$v_1 = (1, 1)$

$(A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 0.5 - \lambda_2 & 0.5 \\ 1 & 0 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 1y + 0.5z = 0 \\ 1y + 0.5z = 0 \end{cases}$

$v_2 = (-\frac{1}{2}, 1)$ ou $(-1, 2)$

b) Quando $n \to \infty$, $\bigwedge^k \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A^n = S \bigwedge^n S^{-1}$, quando $n \to \infty$, $\to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\frac{1}{3}) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

c) Quando $G_0 = 0$ e $G_1 = 1$ e $n \to \infty$

$\begin{bmatrix} G_n \\ G_{n-1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} G_1 \\ G_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

9. Ache a solução do sistema de EDOs usando o método de diagonalização:

$$\begin{cases} u_1'(t) = 8u_1(t) + 3u_2(t), \\ u_2'(t) = 2u_1(t) + 7u_2(t), \end{cases}$$

onde $u(0) = (5, 10)$.

Resolução:

$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$

$u_1(0) = 2c_1 + 3c_2$
$u_2(0) = 4c_1 - 7c_2$
Sabendo que:
$u_1(0) = 5$ e $u_2(0) = 10$
Temos o sistema:

$\begin{cases} 2c_1 + 3c_2 = 5 \\ 4c_1 - 7c_2 = 10 \end{cases}$

$c_1 = \frac{5}{2}$ e $c_2 = 0$
Encontrando os autovalores:

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 8 - \lambda & 3 \\ 2 & 7 - \lambda \end{bmatrix}$

$det(A - \lambda I) = (8 - \lambda)(7 - \lambda) - 6 = 0$
$56 - 8\lambda - 7\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$
$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$
$\triangle = 25$
$\lambda = \frac{15 \pm 5}{2}$
$\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 5$
Encontrando os autovetores:

$(A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 8 - \lambda_1 & 3 \\ 2 & 7 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -2y + 3z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$

$3z = 2y$
Então $v_1 = (3, 2)$

$(A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 8 - \lambda_2 & 3 \\ 2 & 7 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 3y + 3z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$

$-z = y$
Então $v_2 = (-1, 1)$
A solução é:

$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \frac{5}{2} e^{10t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} e^{10t} \\ 5e^{10t} \end{bmatrix}$

10. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções reais de uma variável real. Considere em $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ o subespaço

$$S := \text{Span}\left\{ e^{2x} \operatorname{sen} x, e^{2x} \cos x, e^{2x} \right\}.$$

e o operador linear $D : S \to S$ definido por $D(f) = f'$. Considere, ainda, as funções $f_1(x) = e^{2x} \operatorname{sen} x, f_2(x) = e^{2x} \cos x$ e $f_3(x) = e^{2x}$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Determine:

(a) a matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Lembre-se de que, dada a base $\mathcal{B}$, podemos enxergar os elementos de como vetores em $\mathbb{R}^3$. Por exemplo:

$$(1,2,3)_{\mathcal{B}} = f_1 + 2f_2 + 3f_3.$$

(b) os autovalores de D e as funções de S que são autovetores de D.

Resolução:

a)

$$D(f_1) = D(e^{2x} sen(x)) = 2e^{2x} sen(x) + e^{2x} cos(x) = 2f_1 + 1f_2 + 0f_3$$
$$D(f_2) = D(e^{2x} cos(x)) = 2e^{2x} cos(x) - e^{2x} sen(x) = -f_1 + 2f_2 + 0f_3$$
$$D(f_3) = D(e^{2x}) = 2e^{2x} = 0f_1 + 0f_2 + 2f_3$$

$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b)

$$(D - \lambda I) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$(2-\lambda)^3 + (2-\lambda) = 0$
$(2-\lambda)[(2-\lambda)^2 + 1] = 0$
$(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$

Autovalores:

$\lambda_1 = 2$

$\triangle = -4$

$\lambda = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$\lambda = \dfrac{4 \pm 2i}{2}$

$\lambda_2 = 2 + i$

$\lambda_3 = 2 - i$

Autovetores:

Para $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 2 + i$:

$$\begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} -iv_1 - v_2 = 0 \\ v_1 - iv_2 = 0 \\ -iv_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow v_1 = iv_2$
$v_3 = 0$

$$v_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iv_2 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_3 = 2 - i$:

$$\begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} iv_1 - v_2 = 0 \\ v_1 + iv_2 = 0 \\ +iv_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow v_1 = -iv_2$
$v_3 = 0$

$$v_3 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -iv_2 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$