



Respostas da Lista 1

Álgebra Linear

Iara Cristina Mescua Castro

Matrícula: 211704019

09/08/2021

Sumário

1

Quais condições para y_1 , y_2 e y_3 fazem com que os pontos $(0, y_1)$, $(1, y_2)$ e $(2, y_3)$ caiam numa reta?

1

2

Se (a, b) é um múltiplo de (c, d) e são todos não-zeros, mostre que (a, c) é um múltiplo de (b, d) . O que isso nos diz sobre a matriz

2

3

Se w e v são vetores unitários, calcule os produtos internos de

(a) v e $-v$;

(b) $v + w$ e $v - w$;

(c) $v - 2w$ e $v + 2w$

3

4

Se $\|v\| = 5$ e $\|w\| = 3$, quais são o menor e maior valores possíveis para $\|v - w\|$? E para vw ?

4

5

Considere o desenho dos vetores w e v abaixo. Hachure as regiões definidas pelas combinações lineares $cv + dw$ considerando as seguintes restrições: $c + d = 1$ (não necessariamente positivos), $c, d \in [0, 1]$ e $c, d \geq 0$ (note que são três regiões distintas).

5

6

É possível que três vetores em \mathbb{R}^2 tenham $uv < 0$, $vw < 0$ e $uw < 0$?

Argumente.

7

7

Sejam x, y, z satisfazendo $x + y + z = 0$.

Calcule o ângulo entre os vetores (x, y, z) e (z, x, y)

8

8

Resolva o sistema linear abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Escreva a solução x como uma matriz A vezes o vetor b .

9

9

Repita o problema acima para a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

10

10

Considere a equação de recorrência $-x_{i+1} + 2x_i - x_{i-1} = i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ com $x_0 = x_5 = 0$. Escreva essas equações em notação matricial $Ax = b$ e ache x .

11

11

(Bônus) Use o seguinte código em numpy para gerar um vetor aleatório: $v = \text{numpy.random.normal(size=[3,1])}$ em \mathbb{R}^3 . Fazendo $u = v/||v||$ criamos então um vetor unitário aleatório. Crie 30 outros vetores unitários aleatórios u_j (use $\text{numpy.random.normal(size=[3,30])}$). Calcule a média dos produtos internos $|uu_j|$ e compare com o valor exato $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos \theta| d\theta = \frac{2}{\pi}$

13

Questão 1:

Quais condições para y_1 , y_2 e y_3 fazem com que os pontos $(0, y_1)$, $(1, y_2)$ e $(2, y_3)$ caiam numa reta?

Para três pontos estarem na mesma reta, as coordenadas dos pontos devem cumprir a seguinte condição:

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Substituindo os valores:

$$\det \begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ 1 & y_2 & 1 \\ 2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo a determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ 1 & y_2 & 1 \\ 2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & y_1 \\ 1 & y_2 \\ 2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$0 + 2y_1 + y_3 - (2y_2 + 0 + y_1)$$

$$y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$$

Então para os pontos $(0, y_1)$, $(1, y_2)$ e $(2, y_3)$ estarem na mesma reta,

eles devem satisfazer a equação: $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$

Questão 2:

Se (a, b) é um múltiplo de (c, d) e são todos não-zeros, mostre que (a, c) é um múltiplo de (b, d) . O que isso nos diz sobre a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Se (a, b) é um múltiplo de (c, d) , então:

$$(a, b) = x(c, d)$$

$$a = xc$$

$$b = xd$$

$$c = a/x$$

$$d = b/x$$

Então se (a, c) é múltiplo de (b, d) :

$$(a, c) = y(b, d)$$

Precisamos obter:

$$a = yb$$

$$c = yd$$

Substituindo a e b em $(a, c) = y(b, d)$:

$$(xc, c) = y(xd, d)$$

$$\cancel{x}c = y\cancel{x}d$$

$$c = yd$$

Substituindo c e d em $(a, c) = y(b, d)$:

$$(a, a/x) = y(b, b/x)$$

$$\frac{a}{\cancel{x}} = y\frac{b}{\cancel{x}}$$

$$a = yb$$

Se substituirmos a, b, c e d na matriz e calcularmos sua determinante:

$$A = \begin{bmatrix} xc & xd \\ a/x & b/x \end{bmatrix}$$

Calculando a determinante: $xc \cdot \frac{b}{x} - (\frac{a}{x} \cdot xd) = cb - ad$ Calculando a determinante da matriz original:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$a.d - cb$$

Com isso, é possível concluir que:

$$cb - ad = ad - cb$$

$$2cb = 2ad$$

$$cb = ad$$

E assim, podemos concluir que a determinante dessa matriz A é igual a 0, é nulo.

Questão 3:

Se w e v são vetores unitários, calcule os produtos internos de

(a) v e $-v$;

(b) $v + w$ e $v - w$;

(c) $v - 2w$ e $v + 2w$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \langle v, -v \rangle &= \|v\| \| -v \| \cos 180 \\ \|v\| &= 1, \| -v \| = 1 \text{ e } \cos 180 = -1, \text{ logo:} \\ &= (1)(1)(-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \langle v + w, v - w \rangle &= \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle - \langle w, w \rangle \\ \langle v, v \rangle &= 1, \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \text{ e } \langle w, w \rangle = 1, \text{ logo:} \\ &= 1 + 0 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \langle v - 2w, v + 2w \rangle &= \langle v, v \rangle + \langle v, 2w \rangle - \langle 2w, v \rangle - \langle 2w, 2w \rangle \\ \langle v, v \rangle &= 1, \langle v, 2w \rangle = \langle 2w, v \rangle \text{ e } \langle 2w, 2w \rangle = 4 \langle w, w \rangle = 4, \text{ logo:} \\ &= 1 + 0 - 4 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Questão 4:

Se $||v|| = 5$ e $||w|| = 3$, quais são o menor e maior valores possíveis para $||v - w||$? E para $v \cdot w$?

Primeiro vamos provar que: $||v| - |w|| \leq ||v - w||$

Através da desigualdade triangular, $||a|| + ||b|| \geq ||a + b||$, substituímos $a = v - w$ e $b = w$, formando:

$$\begin{aligned} ||v - w|| + ||w|| &\geq ||v - w + w|| \\ ||v - w|| &\geq ||v| - |w|| \end{aligned}$$

Por isso, quando $v \geq w \geq 0$

$$\begin{aligned} ||v - w|| &\geq ||v| - |w|| \\ ||v - w|| &\geq |5 - 3| \\ ||v - w|| &\geq |2| \\ ||v - w|| &\geq 2 \end{aligned}$$

2 é o **menor** valor possível de $|v - w|$

E quando $v \geq 0 \geq w$, ou seja, $v = 5$ e $w = -3$

$$\begin{aligned} ||v - w|| &= ||5 - (-3)|| \\ ||v - w|| &\leq ||8|| \\ ||v - w|| &\leq 8 \end{aligned}$$

8 é o **maior** valor possível de $|v - w|$

Para $v \cdot w$, o menor valor possível seria negativo, ou seja, um dos valores será negativo e o outro positivo.

$v > 0$ e $w < 0$, ou seja, $v = 5$ e $w = -3$

Esses valores satisfazem as condições, pois

$$||v|| = 5 \text{ e } ||5|| = 5$$

$$||w|| = 3 \text{ e } ||-3|| = 3$$

Assim, o menor valor para $v \cdot w$ é igual a $5 \cdot (-3) = \mathbf{-15}$

E o maior valor seria positivo, ou seja, os dois valores serão positivos (ou os dois serão negativos).

$v > 0$ e $w > 0$, ou seja, $v = 5$ e $w = 3$

Esses valores satisfazem as condições, pois

$$||v|| = 5 \text{ e } ||5|| = 5$$

$$||w|| = 3 \text{ e } ||3|| = 3$$

Assim, o maior valor para $v \cdot w$ é igual a $5 \cdot 3 = \mathbf{15}$

Questão 5:

Considere o desenho dos vetores w e v abaixo. Hachure as regiões definidas pelas combinações lineares $cv + dw$ considerando as seguintes restrições: $c + d = 1$ (não necessariamente positivos), $c, d \in [0, 1]$ e $c, d \geq 0$ (note que são três regiões distintas).

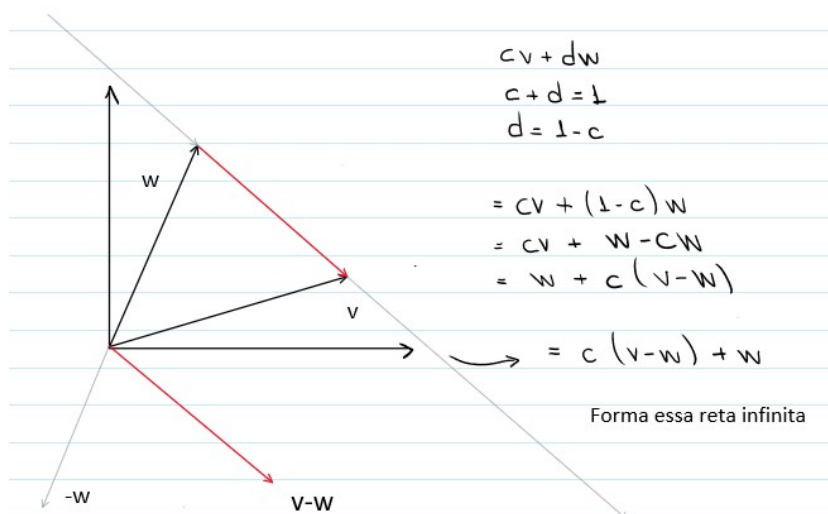


Figura 1:

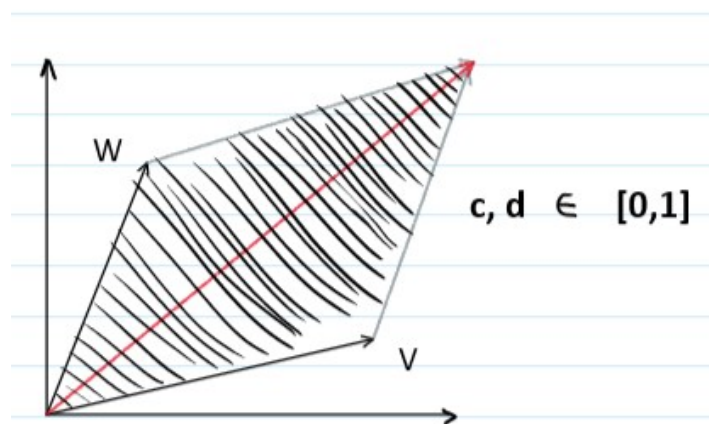


Figura 2: Questão 5, item 2

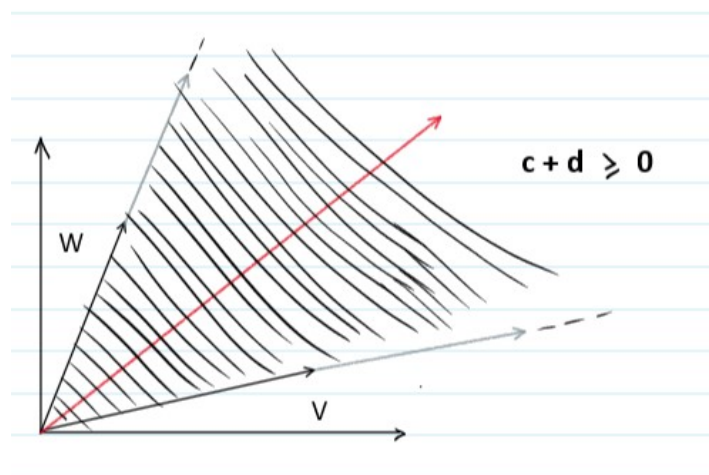


Figura 3: Questão 5, item 3

Questão 6:

E possível que três vetores em \mathbb{R}^2 tenham $uv < 0$, $vw < 0$ e $uw < 0$?

Argumente.

Sim, é possível. Primeiro, sem perda de generalidade, vamos supor que u, v, w são vetores unitários.

$$u \cdot v = \cos \angle(u, v) < 0$$

$$\text{Logo, } \angle(u, v) \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$$

$$v \cdot w = \cos \angle(v, w) < 0$$

$$\text{Logo, } \angle(v, w) \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$$

$$u \cdot w = \cos \angle(u, w) < 0$$

$$\text{Logo, } \angle(u, w) \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$$

No plano cartesiano, podemos criar a seguinte situação:

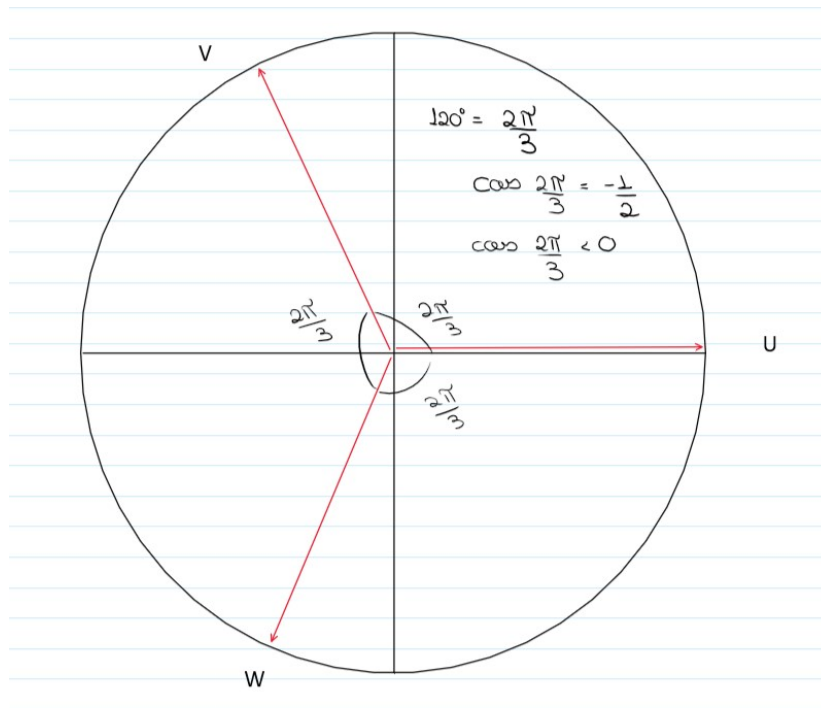


Figura 4: Questão 6

E assim, forma-se 3 vetores (u, v, w) que estão em \mathbb{R}^2 e satisfazem essas condições.

Questão 7:

Sejam x, y, z satisfazendo $x + y + z = 0$.

Calcule o ângulo entre os vetores (x, y, z) e (z, x, y)

Primeiro vamos chamar:

$$u = (x, y, z)$$

$$v = (z, x, y)$$

$$z = -x - y \text{ ou } z = -(x+y)$$

$$\cos \angle(u, v) = \frac{(x, y, z) \cdot (z, x, y)}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$\cos \angle(u, v) = \frac{xz + xy + zy}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$\cos \angle(u, v) = \frac{x(z+y) + zy}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$\cos \angle(u, v) = \frac{x(-x) + (-x-y)y}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$\cos \angle(u, v) = \frac{-x^2 - xy + y^2}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$\cos \angle(u, v) = \frac{-(x^2 + xy + y^2)}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Calculando as normas:

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + y^2} = \sqrt{2x^2 + 2xy + 2y^2}$$

$$\|v\| = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} = \sqrt{2x^2 + 2xy + 2y^2}$$

$$\|u\| \cdot \|v\| = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = 2(x^2 + 2xy + 2y^2)$$

Substituindo:

$$\cos \angle(u, v) = \frac{-(x^2 + xy + y^2)}{2(x^2 + 2xy + 2y^2)}$$

$$\cos \angle(u, v) = \frac{-1}{2}$$

$$\angle(u, v) = 240^\circ$$

Questão 8:

Resolva o sistema linear abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Escreva a solução x como uma matriz A vezes o vetor b .

Temos o sistema com as equações lineares:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = b_1 \\ 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 = b_2 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = b_3 \end{cases}$$

Por isso,

$$x_1 = b_1$$

$$x_1 + x_2 = b_2$$

$$b_1 + x_2 = b_2$$

$$x_2 = b_2 - b_1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = b_3$$

$$\cancel{b_1} + \cancel{b_2} - \cancel{b_1} + x_3 = b_3$$

$$x_3 = b_3 - b_2$$

Em outras palavras,

$$\begin{cases} 1b_1 + 0b_2 + 0b_3 = x_1 \\ -1b_1 + 1b_2 + 0b_3 = b_2 \\ 0b_1 + -1b_2 + 1b_3 = x_3 \end{cases}$$

Assim, a solução de x , como uma matriz A vezes o vetor b fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Questão 9:

Repita o problema acima para a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Repetindo o processo, temos o sistema com as equações lineares:

$$\begin{cases} -1x_1 + 1x_2 + 0x_3 = b_1 \\ 0x_1 - 1x_2 + 1x_3 = b_2 \\ 0x_1 + 0x_2 + -1x_3 = b_3 \end{cases}$$

Por isso,

$$x_3 = -b_3$$

$$0x_1 - 1x_2 + 1x_3 = b_2$$

$$0x_1 - 1x_2 - b_3 = b_2$$

$$x_2 = -(b_2 + b_3)$$

$$-x_1 + 1x_2 + 0x_3 = b_1$$

$$-x_1 - (b_2 + b_3) + 0(-b_3) = b_1$$

$$x_1 = -b_2 - b_3 - b_1$$

$$x_1 = -(b_2 + b_3)$$

Em outras palavras,

$$\begin{cases} -1b_1 - 1b_2 - 1b_3 = x_1 \\ 0b_1 - 1b_2 - 1b_3 = x_2 \\ 0b_1 + 0b_2 - 1b_3 = x_3 \end{cases}$$

Assim, a solução de x , como uma matriz A vezes o vetor b fica:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Questão 10:

Considere a equação de recorrência $-x_{i+1} + 2x_i - x_{i-1} = i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ com $x_0 = x_5 = 0$. Escreva essas equações em notação matricial $Ax = b$ e ache x .

Equação

$$-x_{i+1} + 2x_i - x_{i-1} = i$$

Para $i = 1$:

$$\begin{aligned} -x_2 + 2x_1 - x_0 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 0 + 0 &= 1 \end{aligned}$$

Para $i = 2$:

$$\begin{aligned} -x_3 + 2x_2 - x_1 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 0 &= 2 \end{aligned}$$

Para $i = 3$:

$$\begin{aligned} -x_4 + 2x_3 - x_2 &= 3 \\ 0 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Para $i = 4$:

$$\begin{aligned} -x_5 + 2x_4 - x_3 &= 4 \\ 0 + 0 - x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Juntando todas as equações em um sistema, obtemos:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 0 + 0 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 0 = 2 \\ 0 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 0 + 0 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Escrevendo essas equações em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Somando:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 &= 10 \\ x_1 &= 10 - x_4 \end{aligned}$$

Substituindo em L_1 :

$$\begin{aligned} 2(10 - x_4) - x_2 &= 1 \\ 20 - 2x_4 - x_2 &= 1 \\ 2x_4 + x_2 &= 19 \\ x_2 &= 19 - 2x_4 \end{aligned}$$

Isolando x_3 em L_4 :

$$\begin{aligned} 2x_4 &= 4 + 1x_3 \\ x_3 &= 2x_4 - 4 \end{aligned}$$

Substituindo tudo em L_2 :

$$\begin{aligned}-(10 - x_4) + 2(19 - 2x_4) - (2x_4 - 4) &= 2 \\x_4 - 10 + 38 - 4x_4 - 2x_4 + 4 &= 2 \\x_4 - 10 + 38 - 4x_4 - 2x_4 + 4 &= 2 \\-5x_4 - 10 + 38 + 4 &= 2 \\-5x_4 - 10 + 38 + 4 &= 2 \\-5x_4 &= -30 \\x_4 &= 6\end{aligned}$$

Substituindo nas equações:

$$\begin{aligned}x_3 &= 2(6) - 4 \\x_3 &= 8 \\x_2 &= 19 - 2(6) \\x_2 &= 7 \\x_1 &= 4\end{aligned}$$

$$\text{Resultado: } X = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Questão 11:

(Bônus) Use o seguinte código em numpy para gerar um vetor aleatório: $v = \text{numpy.random.normal(size=[3,1])}$ em \mathbb{R}^3 . Fazendo $u = v/||v||$ criamos então um vetor unitário aleatório. Crie 30 outros vetores unitários aleatórios u_j (use $\text{numpy.random.normal(size=[3,30])}$). Calcule a média dos produtos internos $|uu_j|$ e compare com o valor exato $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos \theta| d\theta = \frac{2}{\pi}$