Autovalores e Autovetores

by: iara

16 de fevereiro de 2023

1 Autovalores

Definição: λ é um autovalor de A, se existe um vetor $x \neq 0$, tal que $Ax = \lambda x$.

2 Autovetores

Definição: Nessa equação x é autovetor de A, associado ao autovalor λ). Além disso, x têm a mesma direção de Ax. Então por linearidade, o mesmo é verdade para αx.

3 Propriedades

· Se 0 é um autovalor de A, os autovetores associados serão elementos de $N(A)$.
· A é invertível (ou singular) se e somente se 0 é autovalor de A.
· Se A for a matriz identidade, todos os vetores são autovetores de A e todos os autovalores são $\lambda = 1$.
· Polinômico característico $p(\lambda) = \det(A\lambda - I) = 0$
· $p(\lambda) = \det(A\lambda - I)$ é chamado de polinômio característico de A e os autovalores são as raízes desse polinômio. Tem grau n.

4 Calculando Autovalores e Autovetores

Caso geral:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

$$\lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{Tr(A)}\lambda + \underbrace{ad-bc}_{\det(A)} = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$

$$= \lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = Tr(A) \\ \lambda_1\lambda_2 = \det(A) \end{cases}$$

5 Tipos de Autovalores

5.1 Distintos

Nesse caso, cada autovalor é distinto, onde $v_1, v_2, ..., v_n$ são autovetores de A. Encontre os autovalores e autovetores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 0,8-\lambda & 0,3 \\ 0,2 & 0,7-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{2})$$

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Para $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,3x_2 = x_1 \\ 0,2x_1 + 0,7x_2 = x_2 \end{cases}$$

$$0,2x_1 = 0,3x_2$$
$$v_1 = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,3x_2 = \frac{1}{2}x_1 \\ 0,2x_1 + 0,7x_2 = \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

$$-0,3x_1 = 0,3x_2$$
$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.2 Iguais

Ao contrário dos distintos, para autovalores repetidos nem sempre é possível obter $\bar{A}$ na forma diagonal. Por exemplo, considere uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 5$$

Mas e os autovetores? só teríamos:

$$(A - I\lambda) \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podemos concluir que **não** é possível calcular dois autovetores LI. Não é possível encontrar uma transformação Q que descreva uma representação diagonal para A.

5.3 Complexos

Para autovalores complexos, uma parte da solução é imaginária. Por exemplo, considere:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico é dado por $f(\lambda) = \lambda^3 - k^2 - 1$ Igualando a 0, temos 1 autovalor real e 2 imaginários.
$\lambda_1 = 1.46$
$\lambda_2 = -0.23 + 0.79i$
$\lambda_3 = -0.23 - 0.79i$

6 Matrizes Semelhantes

Definição: Duas matrizes $n \times n$ A e B são semelhantes se existe uma matriz invertível Q $n \times n$ tal que $A = Q^{-1}BQ$.

6.1 Propriedades

Duas matrizes semelhantes tem:
· o mesmo traço.
· a mesma determinante.
· o mesmo polinômio característico.
· os mesmos autovalores.

7 Matrizes Diagonalizáveis

Definição: Uma matriz A é diagonalizável se é semelhante a uma matriz diagonal. Pode ser escrito na forma $D = PAP^{-1}$. A matriz A é diagonalizável, se e somente se, A tiver n autovetores LI.

$$Q^T AQ = D \rightleftarrows \text{A é simétrica}$$

As seguintes condições são equivalentes pra uma matriz P $n \times n$:
1) P é invertível e $P^{-1} = P^T$.
2) As linhas de P são ortonormais.
3) As colunas de P são ortonormais.

7.1 Teorema

Se uma matriz A $n \times n$ tem autovalores distintos, então A é diagonalizável.
Para diagonalizar uma matriz A $n \times n$ com autovalores distintos:
1) Encontre o polinômio característico. $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
2) Encontre os autovalores.
3) Encontre os autovetores.
4) Escreva a matriz Q com as colunas iguais aos autovetores.
5) Calcule Q^{-1}.
6) $D = Q^{-1}AQ$ é uma matriz diagonal com os autovalores na diagonal.

Também temos a propriedade a seguir:

$$A^k = QD^kQ^{-1} = Q \begin{vmatrix} (\lambda_1)^k & ... & 0 \\ \vdots & (\lambda_2)^k & \vdots \\ 0 & ... & \ddots \end{vmatrix} Q^{-1}$$

7.2 Diagonalização Ortogonal

$A = QDQ^{-1}$ implica $Q^T AQ = D$. Esse processo é chamado de diagonalização ortogonal.

Para encontrar a matriz Q que diagonaliza ortogonalmente, usamos o processo de Gram-Schmidt.