

# Álgebra Linear - Lista de Exercícios 2

Yuri F. Saporito

1. Ache a matriz de eliminação  $E$  que reduz a matriz de Pascal em uma menor:

$$E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual matriz  $M$  reduz a matriz de Pascal à matriz identidade?

2. Use o método de Gauss-Jordan para achar a inversa da matriz triangular inferior:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Para quais valores de  $a$  o método de eliminação não dará 3 pivôs?

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{bmatrix}.$$

4. Verdadeiro ou falso (prove ou forneça um contra-exemplo):

- (a) Se  $A^2$  está bem definida, então  $A$  é quadrada.
- (b) Se  $AB$  e  $BA$  estão bem definidas, então  $A$  e  $B$  são quadradas.
- (c) Se  $AB$  e  $BA$  estão bem definidas, então  $AB$  e  $BA$  são quadradas.
- (d) Se  $AB = B$ , então  $A = I$ .

5. Mostre que se  $BA = I$  e  $AC = I$ , então  $B = C$ .

6. Ache uma matriz não-zero  $A$  tal que  $A^2 = 0$  e uma matriz  $B$  com  $B^2 \neq 0$  e  $B^3 = 0$ .

7. Ache as inversas de

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Verifique que a inversa de  $M = I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T$  é dada por  $M^{-1} = I + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 - \mathbf{v}^T\mathbf{u}}$ . Verifique também que a inversa de  $N = A - U\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}$  é dada por  $N^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(\mathbf{W} - \mathbf{V}A^{-1}U)^{-1}\mathbf{V}A^{-1}$ .

9. Sabemos que a matriz de diferenças tem a seguinte inversa

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Use essa propriedade (e sua versão triangular superior) para achar a inversa de

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Dica: escreva  $T$  como produto de duas matrizes.*

10. Mostre que  $I + BA$  e  $I + AB$  são ambas invertíveis ou singulares. Relacione a inversa de  $I + BA$  com a inversa de  $I + AB$ , caso elas existam.
11. (Bônus) Mostre que se  $\alpha_k A^k + \alpha_{k-1} A^{k-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$ , com  $\alpha_0 \neq 0$ , então  $A$  é invertível