Álgebra Linear - Lista de Exercícios 5

Iara Cristina Mescua Castro

06/09/2021

1. Explique porque essas afirmações são falsas

   (a) A solução completa é qualquer combinação linear de x_p e x_n.

   Resolução:
   Para ser uma solução completa Ax = b.

   $x = x_p + x_n$

   Seja x solução completa, onde $x = x_p + x_n$

   Isto é,

   $A \cdot x_p = b$

   $A \cdot x_n = 0$

   Com a combinação linear $0 \cdot x_p + \alpha x_n \Rightarrow A(x_n + \alpha \cdot x_p) = A \cdot x_n + \alpha \cdot A \cdot x_p = \alpha \cdot b \neq b$

   Logo, $x_n + \alpha \cdot x_p$ não é solução completa.

   (b) O sistema $Ax = b$ tem no máximo uma solução particular.

   Resolução:
   Seja x_p uma solução particular e $x_n \in N(A)$ tal que, $x_n \neq 0$

   $A \cdot x_p = b$

   $A \cdot x_n = 0$

   Defino $x_{p_2} = x_p + x_n$. Logo, x_{p_2} é outra solução particular:

   $A \cdot x_{p_2} = A(x_p + x_n) = b$

   (c) Se A é inversível, não existe nenhuma solução x_n no núcleo.

   Resolução:
   Se A é inversível $\Rightarrow N(A) = \varnothing$

   Seja $x_n \in N(A)$, tal que $A \cdot x_n = 0$

   Para A inversível, então:

   $A^{-1} \cdot A \cdot x_n = A^{-1} \cdot 0$

   $x_n = 0$

   0 pertence ao núcleo.

2. Sejam

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

   Use a eliminação de Gauss-Jordan para reduzir as matrizes $[U\ 0]$ e $[U\ c]$ para $[R\ 0]$ e $[R\ d]$. Resolva $Rx = 0$ e $Rx = d$

Resolução:
Primeira Parte:

$$[U\ 0] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftrightarrow L_2 \div 4$

$$[U\ 0] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftrightarrow L_1 - 3 \cdot L_2$

$$[U\ 0] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = [R\ 0]$$

$$\begin{cases} x_1 = -2 \cdot x_2 \\ x_2 \in R \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Visto isso x_2 é uma variável livre então uma solução especial pode ser:

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R \cdot x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Segunda Parte:

$$[U\ c] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftrightarrow L_2 \div 4$

$$[U\ c] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftrightarrow L_1 - 3 \cdot L_2$

$$[U\ c] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} = [R\ d]$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 2 \cdot x_2 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Então a solução é:

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$R \cdot x = d$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Suponha que $Ax = b$ e $Cx = b$ tenham as mesmas soluções (completas) para todo b. Podemos concluir que $A = C$?

Resolução:
Sim.

Pelo fato das soluções serem completas então $x \neq 0$,

Para verificar que A = C como matrizes, é suficiente verificar que Ay = Cy pois para todos os vetores y do tamanho correto (ou apenas para os vetores de base padrão, uma vez que a multiplicação por eles "escolhe as colunas ").

Portanto, seja y qualquer vetor de tamanho correto e definindo b = Ay. Então y é uma solução para $A \cdot x = b$, e assim, também deve ser uma solução para $C \cdot x = b$.

Em outras palavras, Cy = b = Ay e A = C.

4. Ache o maior número possível de vetores linearmente independentes dentre os vetores:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Resolução:
O maior número possível de vetores linearmente independentes dentre os vetores é 3, pois:

Checando v_1 e v_2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 0 \\ -c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

Já que $c_1 = c_2 = 0$, v_1 e v_2 são LI.

Adicionando v_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ -c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 0 \\ -c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0 \\ -c_3 = 0 \rightarrow c_3 = 0 \end{cases}$$

Já que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, v_1, v_2 e v_3 são LI.

Adicionando v_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \to c_1 = -c_2 \\ -c_1 + c_4 = 0 \to c_1 = c_4 \\ -c_2 - c_4 = 0 \to c_2 = -c_4 \\ -c_3 = 0 \to c_3 = 0 \end{cases}$$

Essa solução não é válida **apenas** para $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ então podemos concluir que v_1, v_2, v_3 e v_4 não são LI.

Adicionando v_5 à v_1, v_2 e v_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \to c_1 = -c_3 \\ -c_1 + c_4 = 0 \to c_1 = c_4 \\ -c_2 = 0 \to c_2 = 0 \\ -c_3 - c_4 = 0 \to c_3 = c_4 \end{cases}$$

Essa solução não é válida **apenas** para $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ então podemos concluir que v_1, v_2, v_3 e v_5 não são LI.

Adicionando v_6 à v_1, v_2 e v_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \to c_2 = -c_3 \\ -c_1 = 0 \to c_1 = 0 \\ -c_2 + c_4 = 0 \to c_2 = c_4 \\ -c_3 - c_4 = 0 \to c_3 = -c_4 \end{cases}$$

Essa solução não é válida **apenas** para $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ então podemos concluir que v_1, v_2, v_3 e v_6 não são LI.

Sendo assim, o maior número de vetores LI entre eles é 3.

5. Ache uma base para o plano $x - 2y + 3z = 0$ em $\mathbb{R}^3$. Encontre então uma base para a interseção desse plano com o plano xy. Ache ainda uma base para todos os vetores perpendiculares a esse plano.

Resolução:
Vamos chamar:

$P = \{(x, y, z)/x - 2y + 3z = 0\}$

$x = 2y - 3z$, então:

$P = \{(2y - 3z, y, z)/y, z \in R\}$

$P = \{(2y, y, 0) + (-3z, 0, 1)/y, z \in R\}$

$P = \{y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)/y, z \in R\}$

$P = span\{(2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$

$(2, 1, 0), (-3, 0, 1)$

é LI pois:

$\theta(2, 1, 0) + \beta(-3, 0, 1) = 0$

$\beta = 0$

$\theta = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uma base para a interseção desse plano com o plano xy:

z = 0, então agora:

$P = \{(x, y)/x - 2y = 0\}$

Por isso, $x = 2y$

$P = \{y(2, 1, 0)/y \in R\}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por último, uma base para todos os vetores perpendiculares a esse plano:

Usamos a normal N = (1, -2, 3) como base.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6. Ache (na sua forma mais simples) a matriz que é o produto das matrizes de posto 1 $\mathbf{uv}^T$ e $\mathbf{wz}^T$? Qual seu posto?

Resolução:
Sabendo que A = $\mathbf{uv}^T$ e B = $\mathbf{wz}^T$
$(u \cdot v^T)(w \cdot z^T) = u \cdot z^T \cdot v^T \cdot w$
E $v^T \cdot w$ é escalar,
Então vemos que a matriz AB tem posto 1 a menos que o produto interno $v^T \cdot w = 0$

7. Suponha que a coluna j de B é uma combinação linear das colunas anteriores de B. Mostre que a coluna j de AB é uma combinação linear das colunas anteriores de AB. Conclua que posto(AB) $\leq$ posto(B).

Resolução:
Podemos pensar na matriz AB como:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \cdot B \\ a_2 \cdot B \\ \vdots \\ a_m \cdot B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \cdot b_1 & A \cdot b_2 & \cdots & A \cdot b_n \end{bmatrix}$$

Onde $a_i = 1, ..., m$ e $a_j = 1, ..., n$ Então, toda coluna de AB é combinação linear das colunas de A e toda linha de AB é combinação linear das linhas de B.

Por isso, a dimensão do espaço feito pela combinação linear de vetores **coluna** de A não pode ser maior do que a dimensão do espaço feito pela combinação linear desses mesmos vetores em AB, logo: $p(AB) \leq p(A)$

Paralelamente, a dimensão do espaço feito pela combinação linear de vetores **linha** de B não pode ser maior do que a dimensão do espaço feito pela combinação linear desses mesmos vetores em AB, logo: $p(AB) \leq p(B)$

8. O item anterior nos dá posto$(B^T A^T) \leq$ posto(A^T). É possível concluir que posto$(AB) \leq$ posto(A)?

Resolução:
Sim, se sabemos que $posto(B^T \cdot A^T) \leq posto(A^T)$, sabendo que o posto permanece para as transpostas, temos $posto(AB) \leq posto(A)$.

9. Suponha que A e B são matrizes quadradas e $AB = I$. Prove que posto$(A) = n$. Conclua que B precisa ser a inversa (de ambos lados) de A. Então, $BA = I$.

Resolução:
$AB = I$, que tem posto n. Então sabendo que $posto(AB) \leq posto(A)$, logo $posto(A) = n$. A é uma matriz n x n então o posto não pode ser maior que n: $posto(A) \leq n$.

Assim, A é invertível e tem inverso único, e já que AB = I também é válido e o inverso é B.
O B inverso à direita também é inverso à esquerda: $BA = I$ e $B = A^{-1}$

10. (*Bônus*) Dado um espaço vetorial real V, definimos o conjunto

$$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ é linear}\}.$$

Ou seja, V^* é o conjunto de todas as funções lineares entre V e $\mathbb{R}$. Relembramos que uma função $f : E \to F$, onde E e F são espaços vetoriais, é dita *linear* se para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ e $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$. Chamamos V^* de *espaço dual* de V.

(a) Mostre que V^* é um espaço vetorial.

Resolução:

(b) Agora, seja $V = \mathbb{R}^n$. Mostre que existe uma bijeção $\varphi : V^* \to V$ tal que , para toda $f \in V^*$ e para todo $\mathbf{v} \in V$, tenhamos

$$f(\mathbf{v}) = \langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle.$$

Dica: Utilize a dimensão finita de $\mathbb{R}^n$ para expandir $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos vetores da base canônica e aplique a linearidade de f.

Resolução:

Em dimensão infinita, esse resultado é conhecido como Teorema da Representação de Riesz.