Álgebra Linear - Lista de Exercícios 6

Iara Cristina Mescua Castro

20/09/2021

1. Seja A uma matriz $m \times n$ com posto r. Suponha que existem $\mathbf{b}$ tais que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não tenha solução.

   (a) Escreva todas as desigualdade ($<$ e $\leq$) que os números m, n e r precisam satisfazer.

   Resolução:
   Já que não há soluções, é possível obter uma linha preenchida com zeros no lado esquerdo da equação e diferente de zero no lado direito ($b_n \neq 0$), o que significa: $r < m$ e $n \leq m$.

   (b) Como podemos concluir que $A^T\mathbf{x} = 0$ tem solução fora $\mathbf{x} = 0$?

   Resolução:
   Se a equação dada tiver uma solução diferente de zero, isso significa que o núcleo esquerdo não deve ser um espaço vazio, então deve ter vetores não-zeros nele. E já que a expressão da dimensão $N(A^T)$ é dada por m - r, concluímos que $A^T\mathbf{x} = 0$ tem solução fora $\mathbf{x} = 0$ se $m - r > 0$, ou seja, $m > r$.

2. Sem calcular A ache uma bases para os quatro espaços fundamentais:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução:
Sabendo que as duas matrizes representam A na forma $A = L \cdot U$

Uma base para $N(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, pois $N(A) = N(U)$, e calculando N(U):

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

x_4 é a variável livre, pois não tem pivô na quarta coluna, então para uma solução especial $x_4 = 1$, e fazendo retrosubstituição:

$$\begin{cases} x_3 + 2 = 0 \Rightarrow x_3 = -2 \\ x_2 + 2(-2) + 3(1) = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \\ x_1 + 2(1) + 3(-2) + 4(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \end{cases}$$

Já a base para o núcleo esquerdo $N(A^T)$ é vazia, pois a dimensão da base de $N(A^T)$ é calculada por (m - r), onde m é o número de linhas e r é o posto, que neste é caso é 3 - 3 = 0.

Uma base do espaço da coluna ($C(A)$): (1, 6, 9), (0, 1, 8), (0, 0, 1), pois a dimensão de ($C(A)$) é a mesma de ($C(U)$), que neste caso é 3. Então uma base pode ser os espaços colunas de L.

A base do espaço de linha ($C(A^T)$): pode ser as linhas diferentes de zero de U: (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3), (0, 0, 1, 2).

---

3. Explique porque $v = (1, 0, -1)$ não pode ser uma linha de A e estar também no seu núcleo.

   Resolução:
   Assumindo que $v = (1, 0, -1)$ seja uma linha de A e esteja no seu núcleo, então, para qualquer matriz A que contenha o vetor v, $A \cdot v = 0$.

   Representando isso:

$$Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_4 - x_6 & 2 \end{bmatrix}$$

   Por isso, é possível visualizar que $Ax \neq 0$, então não é possível.

4. A equação $A^T\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tem solução quando $\mathbf{w}$ está em qual dos quatro subespaços? Quando a solução é única (condição sobre algum dos quatro subespaços)?

   Resolução:
   Em $C(A^T)$. Espaço linha de A, ou seja, espaço coluna de A^T.
   Seja A uma matriz m x n, A^T é uma matriz n x m
   $C(A^T) = \{A^T \cdot x \in \mathbb{R}^n; x \in \mathbb{R}^m\}$
   Então se $u, v \in C(A^T)$ e α, $\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in C(A^T)$, pois se
   $u \in C(A^T) \iff \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $u = Ax$
   $v \in C(A^T) \iff \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $v = Ax$
   Por isso, se w estiver em $C(A^T)$ ele será a combinação das colunas de A^T e x existirá tal que, $A^T\mathbf{x} = \mathbf{w}$.

5. Seja M o espaço de todas as matrizes 3×3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   e note que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Quais matrizes $X \in M$ satisfazem $AX = 0$?

   Resolução:
   Sabendo que X é uma matriz 3×3:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_7 & x_2 - x_8 & x_3 - x_9 \\ -x_1 + x_4 & -x_2 + x_5 & -x_3 + x_6 \\ -x_4 + x_7 & -x_5 + x_8 & -x_6 + x_9 \end{bmatrix}$$

   Então se a matriz x = 0, logo: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9$

$$X = c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde c é uma constante qualquer em $\mathbb{R}$.

(b) Quais matrizes $Y \in M$ podem ser escritas como $Y = AX$, para algum $X \in M$?

Resolução:
Sabendo que Ax = Y pode ser representado como:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_7 & x_2 - x_8 & x_3 - x_9 \\ -x_1 + x_4 & -x_2 + x_5 & -x_3 + x_6 \\ -x_4 + x_7 & -x_5 + x_8 & -x_6 + x_9 \end{bmatrix}$$

Em outras palavras:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_7 & x_8 & x_9 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}$$

Visto que a segunda matriz é uma permutação da primeira, Y pode ser escrito como:
$X - X \cdot K$, onde $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. Sejam A e B matrizes $m \times n$ com os mesmos quatro subespaços fundamentais. Se ambas estão na sua forma escalonada reduzida, prove que F e G são iguais, onde:

$$A = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B \begin{bmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:
Sabendo que A e B tem dimensões $m \times n$ e estão em sua forma escalonada reduzida R:

$$\begin{bmatrix} I_{r\times r} & F_{r\times n-r} \\ 0_{m-r\times r} & 0_{m-r\times n-r} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} I_{r\times r} & G_{r\times n-r} \\ 0_{m-r\times r} & 0_{m-r\times n-r} \end{bmatrix}$$

Então, sabendo que $C(A^T) = C(B^T)$, A e B tem as mesmas dimensões, a primeira linha de A é igual à combinação das linhas de B, e a única combinação possível é 1 (linha 1 de B) já que ambas tem a matriz I ali, e para as outras linhas diferentes de 0 acontece o mesmo, logo, F = G.