

Trabalho A2: Sagemath para Superfícies

Iara Cristina e Janaina Neres

Introdução

Para este trabalho, escolhemos criar um caderno de estudo sobre Superfícies, bem como suas aplicações computacionais. Por meio do Sagemath, seremos capazes de compreender e visualizar as propriedades dessas estruturas matemáticas de forma interativa e prática. Apresentaremos uma variedade de exemplos e exercícios que permitirão aprofundar nosso conhecimento e fortalecer nossa compreensão sobre o assunto.

Superfícies

Uma superfície é geralmente representada por um conjunto de equações (ou parametrizações) que descrevem as coordenadas dos pontos na superfície em termos de parâmetros livres. Essas equações ou parametrizações podem ser utilizadas para calcular as derivadas parciais, vetores normais e outras propriedades geométricas. Alguns exemplos conhecidos são: a esfera, o cilindro, o plano, o cone e o toro.

```
u, v = var('u v')
Toro(u,v) = [(4+(3*cos(v))*sin(u)), (4+(3*cos(v))*cos(u)), (4+sin(v))] # Figura 1
X = parametric_plot3d(Toro, (u, 0, 2*pi), (v, 0, 2*pi), color='yellow')

# S = x^2 + y^2 + z == 0 # Figura 2
# X = implicit_plot3d(S, (x,-2,2), (y,-2,2), (z,-2,0), color='lavenderblush')
show(X)
```

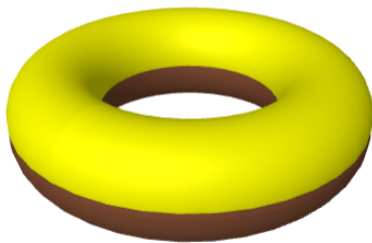


Figura 1: Toro Parametrizado

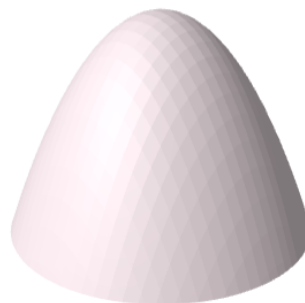


Figura 2: $x^2 + y^2 + z = 0$

Derivadas Parciais

[1] **Definição:** Em coordenadas cartesianas, uma parametrização local $X : U \rightarrow S$ se escreve como

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U,$$

e suas derivadas parciais com respeito a u e a v denotam-se, respectivamente, por X_u e X_v , isto é,

$$X_u(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right)$$

$$X_v(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right)$$

Jacobiano

Definição: Matriz Jacobiana ou Jacobiano de $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ no ponto $x \in S$ é a matriz $m \times n$ dada por:

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

No caso $X : S \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ no ponto $p = X(q) \in S$, temos que a matriz da aplicação linear dX_q nas bases canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 é:

$$dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Exemplo

Se $f(u, v) = (u^2, v^2, uv)$,

$$Jf_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2v \\ v & u \end{pmatrix}, \quad \text{so for example} \quad Jf_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Superfície Parametrizada Regular

Definição: É uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com U aberto de \mathbb{R}^2 , tal que:

1. X é diferenciável de classe C^∞ ;
2. Para todo $q(u, v) \in U$, $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora.

Obs: O item (2) da definição garante a existência de plano tangente $T_q S$ para todos os pontos $q = (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Temos que as superfícies parametrizadas regulares admitem auto-intersecção, isto é, não exigem a unicidade do plano tangente em cada ponto; o que não é o caso das superfícies regulares.

Superfície Regular

[2] **Definição:** Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V em \mathbb{R}^3 e um mapa $x : U \rightarrow V \cap S$ de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ em $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

1. $\forall p \in S, \exists V \subseteq \mathbb{R}^3$ vizinhança de p e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ diferenciável, ou seja, é possível calcular derivadas parciais e definir vetores tangentes em cada ponto da superfície.
2. X é um homeomorfismo entre U e $V \cap S$, ou seja, X possui uma inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que é contínua.
3. Para todo $p \in \mathbb{R}^2$, dX_q é injetiva $\Leftrightarrow dX_q$ tem posto 2 $\Leftrightarrow X_u$ e X_v LI $\Leftrightarrow X_u \times X_v \neq 0$

Obs: O item (3) da definição garante a unicidade do plano tangente $T_q S$.

Exemplo 1

A superfície dada por $X(u, v) = ((2 \cos(u) - 1) \cos(u), (2 \cos(u) - 1) \sin(u), v)$. É um exemplo de superfície parametrizada regular, mas, não é superfície regular.

Temos que, X é diferenciável de classe C^∞ e $\frac{\partial X}{\partial u}(q) \times \frac{\partial X}{\partial v}(q) \neq (0, 0, 0), \forall q \in U$, garantindo a propriedade de injetividade do item 2. Porém, observa-se, que a superfície possui auto intersecção, não garantindo assim a unicidade do plano tangente em cada ponto de uma superfície regular.

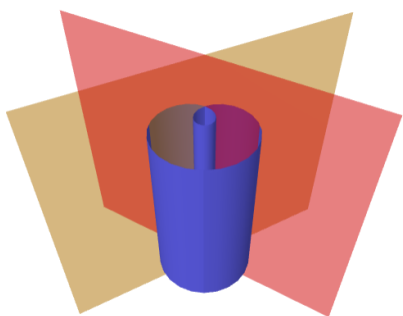


Figura 3: Dois planos tangentes

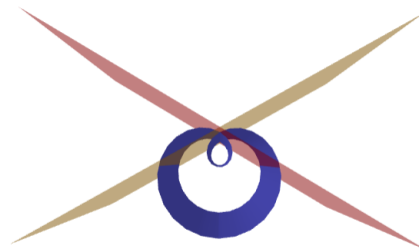


Figura 4: Dois planos tangentes

Exemplo 2

Mostre que, se $f(u, v)$ é uma função real diferenciável, onde $(u, v) \in U$, aberto de \mathbb{R}^2 , então a aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma superfície parametrizada regular, que descreve o gráfico da função f .

Por definição,

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in U \text{ e } z = f(x, y)\}$$

Então, seja $S = \text{Graf}(f)$, a aplicação $X : U \rightarrow S = S \cap \mathbb{R}^3$ dada por $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é diferenciável pois $f(u, v)$ é uma função real diferenciável, cumprindo o item 1. Além disso, X é uma bijeção e $X^{-1} = \pi|_S$ é contínua, onde $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \pi(x, y, z) = (x, y)$, é a projeção sobre o plano-xy. Por último, $dX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo

$(u, v) \in U$, pois

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

cumprindo o item 3. Logo, $S = \text{Graf}(f)$ é uma superfície regular.

Superfície de Revolução

[1] **Definição:** Geometricamente, uma superfície de revolução S é obtida pela rotação de uma curva regular C em torno de uma reta l , em que C e l são disjuntas e contidas em um plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. A curva C é chamada de **geratriz** de S .

A parametrização geral de uma superfície de revolução é dada por:

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

onde u é o ângulo de rotação em torno do eixo, v é o parâmetro ao longo da curva geratriz, e $(f(v), g(v))$ são as coordenadas da curva geratriz.

Para u fixo temos os chamados meridianos de S .

Para v fixo temos os chamados paralelos de S , que são círculos, por construção.

Exemplo

Podemos pegar como exemplo a superfície de revolução: $X(u, v) = ((3 - \sin(\pi v)) \cdot \cos u, (3 - \sin(\pi v)) \cdot \sin u, v)$, onde $f(v) = 3 - \sin(\pi v)$ e $g(v) = v$.

```
# Superficie de Revolucao:
# X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)) = (x, y, z) \in V

# ponto q = (u0, v0)
u0 = 0
v0 = 1.5

f(v) = 3 - sin(pi*v)
g(v) = v

# Revolucao entorn do eixo z
X(u, v) = (f(v)*cos(u), f(v)*sin(u), g(v))
superficie_X = parametric_plot3d(X, (v, 0, 3.5), (u, 0, 2*pi),
    color='lavenderblush', opacity=0.3, frame=False)

meridianos = parametric_plot3d(X.subs(u=u0), (v, 0, 3.5), color = "blue",
    thickness = 3) # u fixo
paralelos = parametric_plot3d(X.subs(v=v0), (u, 0, 2*pi), color = "black",
    thickness = 3) # v fixo

eixox = arrow3d((0, 0, 0), (4, 0, 0), color='black') # Eixo x
eixoy = arrow3d((0, 0, 0), (0, 4, 0), color='black') # Eixo y
eixoz = arrow3d((0, 0, 0), (0, 0, 4), color='black') # Eixo z
eixos = eixox + eixoy + eixoz
show(superficie_X + paralelos + meridianos + eixos)
```

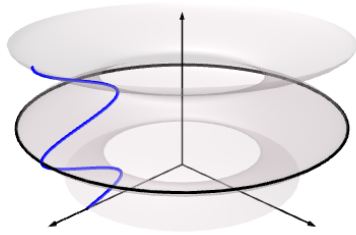


Figura 5: Superfície de Revolução, em azul temos a curva geratriz em torno do eixo z, e em preto temos o paralelo para $v = v_0$.

Figura 6: Animação da Curva Geratriz

Superfície Regrada

Geometricamente, uma superfície regrada S é qualquer superfície gerada por uma reta ℓ que se desloca, possivelmente variando de direção, ao longo de uma curva regular C . Supondo-se que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja uma parametrização de C , e que $w(s) \in \mathbb{R}^3$ seja a direção de ℓ em $s \in I$, tem-se que S é a imagem da aplicação

$$X(s, t) = \alpha(s) + tw(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R}.$$

Nesse caso, dizemos que $w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva direcional de S . A superfície S , então, será regular se, e somente se, X for um difeomorfismo do aberto $I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ sobre S .

As retas $L_t(v) = \alpha(t) + vw(t)$ e a curva $\alpha(t)$ são, respectivamente, as geratrizes e uma diretriz da superfície X . Os pontos $(t_0, v_0) \in I \times J$ tais que $X_t(t_0, v_0) \wedge X_v(t_0, v_0) = \vec{0}$, são chamados pontos singulares da superfície regrada.

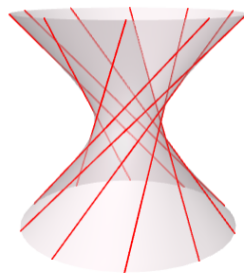


Figura 7: Hiperboloide de uma Folha

Cartas e Atlas

Definição: Um atlas é uma coleção de mapas locais que cobrem toda a superfície.

Cada carta consiste em uma região aberta na superfície, chamada de domínio, e uma função diferenciável que associa pontos no domínio a coordenadas no plano \mathbb{R}^2 . Essas funções permitem a parametrização local da superfície em termos das coordenadas do plano, o que facilita o estudo das propriedades geométricas da superfície.

Exemplo: Esfera

Figura 5: Atlas = $\{X_1, X_2\}$, tal que: $X_1(u, v) = (u, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$ e $X_2(u, v) = (u, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$

Figura 6: Atlas = $\{X_3, X_4\}$, tal que: $X_3(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$ e $X_4(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$

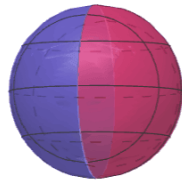


Figura 8: Cartas X_1 e X_2

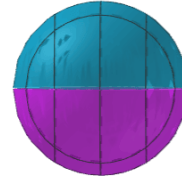


Figura 9: Cartas X_3 e X_4

Mudança de Parâmetro

[2] **Definição:** Se X e Y são parametrizações dadas por:

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

$$Y(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)), \quad (s, t) \in V,$$

então a mudança de coordenadas h , dada por

$$u = u(s, t), \quad v = v(s, t), \quad (s, t) \in Y^{-1}(W)$$

tem a propriedade de que as funções u e v têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens, e o mapa h pode ser invertido, resultando em

$$s = s(u, v), \quad t = t(u, v), \quad (u, v) \in X^{-1}(W),$$

onde as funções s e t também têm derivadas parciais de todas as ordens.

Vetor Normal Unitário

Seja $X_u(u, v)$ e $X_v(u, v)$ as derivadas parciais de uma parametrização X , consideramos o vetor normal unitário em um ponto $X(u, v)$:

$$n(u, v) = \frac{X_u(u, v) \cdot X_v(u, v)}{\|X_u(u, v) \cdot X_v(u, v)\|}$$

Função em Sagemath

```
def obter_normal_unitario(X, u, v):  
    x_u = diff(X, u)  
    x_v = diff(X, v)  
  
    normal = x_u.cross_product(x_v)  
    n = normal / normal.norm()  
    n = n.apply_map(lambda x: x.simplify_full().canonicalize_radical())  
  
    return n
```

Aplicação Normal de Gauss

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientável e N um campo normal unitário diferenciável em S , isto é, $|N(p)| = 1$ para todo $p \in S$, ou seja, N toma valores na esfera unitária centrada na origem S^2 . Nessas condições, $N : S \rightarrow S^2$ é chamada de **aplicação normal de Gauss** de S .

Em outras palavras, a aplicação normal de Gauss, também conhecida como mapa de Gauss, associa a cada ponto de uma superfície uma unidade normal nesse ponto. Em uma superfície parametrizada, o mapa de Gauss é uma função que toma um ponto (u, v) e retorna o vetor normal unitário nesse ponto. Então, a função `obter_normal_unitario` também pode obter a função que faz esse mapeamento.

Plano Tangente

[2] **Definição:** Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S e seja $q \in U$. O subespaço vetorial de dimensão 2, $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$, coincide com o conjunto dos vetores tangentes a S em $\mathbf{x}(q)$. O plano $dX_{\mathbb{R}^2}$, que passa por $x(q) = p$, não depende de X . Esse plano será chamado de **plano tangente à S em p** e será chamado de $T_p S$.

Para plotar o plano tangente, precisamos de um ponto e de um vetor normal ao plano.

- O ponto é o ponto da superfície que queremos plotar o plano tangente.
- O vetor normal n_p é o vetor normal à superfície no ponto p .

A equação do plano tangente ao ponto $p = (u_0, v_0)$ da superfície paramétrica X é:

$$n_p[0] * (x - x_0) + n_p[1] * (y - y_0) + n_p[2] * (z - z_0) = 0$$

Exemplo Epar

$X(u, v) = (u, v, 2u^2 + \frac{2}{9}v^2), u, v \in [-1, 1]$.

```
X(u,v) = (u, v, 2*u^2 + 2/9*v^2)
# Definindo o ponto p = (u0,v0)
u0, v0 = 0, 0
# Vetor Unitario Normal
normal = obter_normal_unitario(X, u, v)
np = normal.subs(u=u0, v=v0)

x0 = X[0].subs(u=u0, v=v0)
y0 = X[1].subs(u=u0, v=v0)
z0 = X[2].subs(u=u0, v=v0)

superficie_X = parametric_plot3d(X, (u,-1,1), (v,-1,1), color='blue')
# Equacao do Plano Tangente
Plano_Tangente(x,y,z) = np[0]*(x-x0) + np[1]*(y-y0) + np[2]*(z - z0) == 0
plano_tangente_X = implicit_plot3d(Plano_Tangente, (x,-2,2), (y,-2,2),
    (z,-2,2), color='aquamarine', opacity=0.5)
show(superficie_X + plano_tangente_X, frame=False)
```



Figura 10: $T_p S$ de Epar ao ponto $p = (u_0, v_0)$

Equações Implícitas

Seja $z = f(x, y)$ a equação de uma superfície S em \mathbb{R}^3 , se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem em uma região em torno de um ponto (a, b) e são contínuas em (a, b) , então o plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ existirá no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Suponha que queremos uma equação do plano tangente T à superfície $z = f(x, y)$ em um ponto $(a, b, f(a, b))$. Sejam L_x e L_y as linhas tangentes às traços da superfície nos planos $y = b$ e $x = a$:

$$X_x = (0, 1, L_x) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial x})$$

$$X_y = (1, 0, L_y) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial y})$$

Como T contém as linhas L_x e L_y , tudo o que precisamos são vetores X_x e X_y que são

paralelos a L_x e L_y , respectivamente, e $n = X_x \times X_y$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_x \times \mathbf{v}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \end{vmatrix}$$

Temos que n é um **vetor normal** ao plano T . Concluimos que a equação do plano tangente para a superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(a, b, f(a, b))$ é:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) - z + f(a, b) = 0$$

$$z = L_x(a, b)(x - a) + L_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

```
f(x,y) = x^2 - y^2
# Definindo o ponto p = (x0,y0, f(x0,y0))
x0, y0 = 0, 0
z0 = f(x0,y0)

Lx = diff(f,x).subs(x=x0, y=y0)
Ly = diff(f,y).subs(x=x0, y=y0)
# Plot do Plano Tangente
plano_tangente = plot3d(Lx*(x-x0) + Ly*(y-y0) + z0, (x,-5,5), (y,-5,5),
    color='aquamarine', opacity=0.5)
superficie = plot3d(f, (x,-5,5), (y,-5,5), color='blue')
show(superficie + plano_tangente, frame=False)
```



Figura 11: Plano Tangente de $f(x, y)$ em $p = (0, 0)$

Curvas Coordenadas

Dada uma parametrização $X(u, v)$:

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$$

de uma superfície regular S e um ponto $p \in S$, temos que as projeções de U sobre os eixos coordenados e_u e e_v são abertos. $I_{e_u}, I_{e_v} \subset \mathbb{R}$. Para cada ponto (u_0, v_0) , definimos as curvas coordenadas de S em $X(u_0, v_0)$ como:

$$u \rightarrow X(u, v_0), u \in I_{e_u}$$

$$v \rightarrow X(u_0, v), v \in I_{e_v}$$

```

X = (4+(3+cos(v))*sin(u), 4+(3+cos(v))*cos(u), 4+sin(v)) # Figura 1
# X = (u,v,u^2-v^2) Figura 2
superficie_X = parametric_plot3d(X, (u,-1,1), (v,-1,1), color='aquamarine')

u0 = 1/2 #definindo ponto u0
v0 = 1/2 #definindo ponto v0

curva_coordenada_1 = parametric_plot3d(X.subs(u=u0), (v,-1,1), color = "black",
    thickness = 3) #fixa v
curva_coordenada_2 = parametric_plot3d(X.subs(v=v0), (u,-1,1), color = "black",
    thickness = 3) #fixa u

show(superficie_X + curva_coordenada_1 + curva_coordenada_2, frame=False)

```

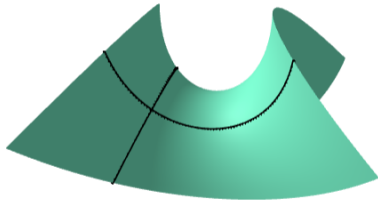


Figura 12: Superfície de Enneper

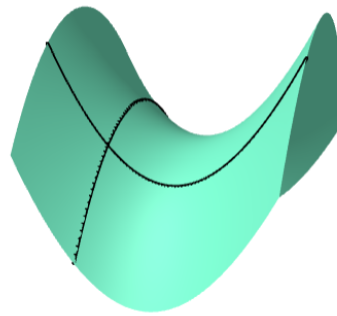


Figura 13: $X(x, y) = (u, v, u^2 - v^2)$

Primeira Forma Fundamental

Definição: O produto interno canônico de \mathbb{R}^3 induz em cada plano tangente $T_p S$ de uma superfície regular S um produto interno. A forma quadrática

$$I_p : T_p S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p$$

é chamada de primeira forma fundamental da superfície regular S em p . Ela permite fazer medidas sobre a superfície, como comprimento de curvas, ângulos de vetores tangentes, áreas de regiões etc.

Para obter a primeira forma fundamental de uma superfície parametrizada

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$$

Primeiro devemos calcular as derivadas direcionais em $p = X(u, v)$.

$$X_u(u, v) = \left(\frac{\partial}{\partial u} x(u, v), \frac{\partial}{\partial u} y(u, v), \frac{\partial}{\partial u} z(u, v) \right)$$

$$X_v(u, v) = \left(\frac{\partial}{\partial v} x(u, v), \frac{\partial}{\partial v} y(u, v), \frac{\partial}{\partial v} z(u, v) \right)$$

E calcular os coeficientes da primeira formula fundamental:

$$E = X_u(u, v) \cdot X_u(u, v)$$

$$F = X_u(u, v) \cdot X_v(u, v)$$

$$G = X_v(u, v) \cdot X_v(u, v)$$

Através dela, encontramos a matriz $I_{X(u,v)}$ com respeito a base $\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$ de $T_{X(u,v)}S$

$$\begin{bmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{bmatrix}$$

E daí,

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$I_{X(u,v)}(w) = a^2 E(u, v) + 2ab F(u, v) + b^2 G(u, v)$$

Exemplo: Primeira Forma Fundamental do Toro

O toro é a imagem do domínio do plano $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ pela parametrização:

$$\varphi(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v)$$

Que é uma superfície de revolução com $f(v) = R + r \cos v$ e $g(v) = r \sin v$.

Os coeficientes da primeira forma fundamental desta parametrização são

$$E(u, v) = (R + r \cos v)^2,$$

$$F(u, v) = 0,$$

$$G(u, v) = (-r \sin v)^2 + (r \cos v)^2 = r^2.$$

Função em Sagemath

```
def coef_primeira_forma(X, u, v):
    x_u = diff(X, u)
    x_v = diff(X, v)

    # Primeira Forma Fundamental
    E = x_u.dot_product(x_u)
    F = x_u.dot_product(x_v)
    G = x_v.dot_product(x_v)

    E = E.full_simplify().canonicalize_radical()
    F = F.full_simplify().canonicalize_radical()
    G = G.full_simplify().canonicalize_radical()
```

```
return E,F,G
```

Área de Superfície

A área de uma região pode ser obtida pelos coeficientes da Primeira Forma Fundamental:

$$A = \int_{X^{-1}(R)} \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv$$

Exemplo: Área do Toro

Continuando o exemplo anterior, temos que:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= (R + r \cos v)^2, \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= (-r \sin v)^2 + (r \cos v)^2 = r^2. \end{aligned}$$

$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r(R + r \cos v)}$, e a área do toro é

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R + r \cos v) du dv \\ &= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r \cos v) dv \\ &= 2\pi r [Rv + r \sin v]_{v=0}^{v=2\pi} \\ &= 4\pi^2 r R. \end{aligned}$$

Função em Sagemath

```
def calcular_area(X, u, v, Intervalo_u, Intervalo_v):
    E, F, G = obter_coef_primeira_forma(X, u, v)
    A = integrate(integrate(sqrt(E * G - F^2), u, Intervalo_u[0],
        Intervalo_u[1]), v, Intervalo_v[0], Intervalo_v[1])

    return A.full_simplify()
```

Segunda Forma Fundamental

Para obter a primeira forma fundamental de uma superfície parametrizada

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$$

Primeiro devemos calcular as derivadas direcionais em $p = X(u, v)$.

$$X_u(u, v) = \left(\frac{\partial}{\partial u} x(u, v), \frac{\partial}{\partial u} y(u, v), \frac{\partial}{\partial u} z(u, v) \right)$$

$$X_v(u, v) = \left(\frac{\partial}{\partial v} x(u, v), \frac{\partial}{\partial v} y(u, v), \frac{\partial}{\partial v} z(u, v) \right)$$

Agora vamos calcular as segundas derivadas:

$$X_{uu}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} X_u(u, v)$$

$$X_{uv}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} X_v(u, v)$$

$$X_{vv}(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} X_v(u, v)$$

Calculamos o Vetor Unitário Normal à Superfície:

$$n = \frac{X_u(u, v) \cdot X_v(u, v)}{\|X_u(u, v) \cdot X_v(u, v)\|}$$

E encontramos os coeficientes da Segunda Forma Fundamental:

$$L = n(u, v) \cdot X_{uu}(u, v)$$

$$M = n(u, v) \cdot X_{uv}(u, v)$$

$$N = n(u, v) \cdot X_{vv}(u, v)$$

Assim como na Primeira Forma, encontramos a matriz $II_{X(u,v)}$ de $T_{X(u,v)}S$

$$\begin{bmatrix} L(u, v) & M(u, v) \\ M(u, v) & N(u, v) \end{bmatrix}$$

E daí,

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$II_{X(u,v)}(w) = a^2 L(u, v) + 2ab M(u, v) + b^2 N(u, v)$$

Exemplo: Segunda Forma Fundamental da Sela de Macaco

A Sela de Macaco é uma superfície dada por: $X(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Primeiramente vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental E , F , e G .

$$X_u = (1, 0, 3u^2 - 3v^2)$$

$$X_v = (0, 1, -6vu)$$

$$X_{uu} = (0, 0, 6u)$$

$$X_{vv} = (0, 0, -6u)$$

$$X_{uv} = (0, 0, -6v)$$

Logo,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + (3u^2 - 3v^2)^2,$$

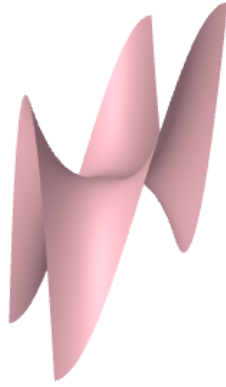


Figura 14: Sela de Macaco

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -6vu(3u^2 - 3v^2),$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + 36v^2u^2.$$

Então,

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}.$$

Agora vamos calcular os coeficientes da segunda forma fundamental [3]:

$$\det(X_u, X_v, X_{uu}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3u^2 - 3v^2 \\ 0 & 1 & -6vu \\ 0 & 0 & 6u \end{vmatrix} = 6u,$$

$$\det(X_u, X_v, X_{uv}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3u^2 - 3v^2 \\ 0 & 1 & -6vu \\ 0 & 0 & -6v \end{vmatrix} = -6v,$$

$$\det(X_u, X_v, X_{vv}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3u^2 - 3v^2 \\ 0 & 1 & -6vu \\ 0 & 0 & -6u \end{vmatrix} = -6u.$$

Logo,

$$L = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{6u}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}},$$

$$M = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{-6v}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}},$$

$$N = \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{-6u}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}.$$

Função em Sagemath

```
def coef_segunda_forma(X, u,v):
    # Derivadas de Primeira e Segunda Ordem
    x_u = derivative(X, u)
```

```

x_v = derivative(X, v)

x_uu = derivative(x_u, u)
x_uv = derivative(x_u, v)
x_vv = derivative(x_v, v)

# Vetor Normal Unitario a Superficie
vetor_N = obter_normal_unitario(X, u, v)

# Segunda Forma Fundamental
L = vetor_N.dot_product(x_uu)
M = vetor_N.dot_product(x_uv)
N = vetor_N.dot_product(x_vv)

L = L.full_simplify().canonicalize_radical()
M = M.full_simplify().canonicalize_radical()
N = N.full_simplify().canonicalize_radical()

return L, M, N

```

Aplicações Lineares Auto-Adjuntas e Formas Quadráticas

Definição: Um operador linear $A : V \rightarrow V$ é auto-adjunto se:

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \quad \forall v, w \in V$$

- V : espaço vetorial real

$$A \text{ simétrica} \leftrightarrow A \text{ auto-adjunta}$$

Matriz Forma

A matriz M é representada por:

$$M = \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}$$

Onde M é matriz de $-dN_{X(u,v)}$ com respeito à base $\{X_u, X_v\}$.

$$M = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} LG - MF & MG - NF \\ ME - LF & NE - MF \end{bmatrix}$$

E com álgebra simples chega-se à expressão das curvaturas Gaussiana (K) e Média (H) utilizando apenas os coeficientes das formas fundamentais:

- $K \circ X = \det(M) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$
- $H \circ X = \frac{1}{2} \text{traço}(M) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2}$

```

def obter_matriz_forma(carta, u, v):
    # Formas Fundamentais
    E, F, G = coef_primeira_forma(carta, u, v)
    L, M, N = coef_segunda_forma(carta, u, v)

```

```

termo_norm = E*G - F^2

# Equacoes de Weingarten
a = (( L*G - M*F ) / termo_norm).full_simplify().canonicalize_radical()
b = (( M*E - L*F ) / termo_norm).full_simplify().canonicalize_radical()
c = (( M*G - N*F ) / termo_norm).full_simplify().canonicalize_radical()
d = (( N*E - M*F ) / termo_norm).full_simplify().canonicalize_radical()

matriz_forma = Matrix([ [a, c], [b, d] ])
return matriz_forma

```

Curvatura de Superfícies

Seja S uma superfície regular orientável com orientação N . Vimos que $-dN_p$ é diagonalizável, ou seja, existem uma base ortonormal w_1, w_2 associada aos autovalores k_1 e k_2 , ou seja: $-dN_p w_1 = k_1 w_1$ e $-dN_p w_2 = k_2 w_2$.

Definimos então:

Curvaturas Principais

O máximo e o mínimo da curvatura normal em um determinado ponto p em uma superfície são chamados de curvaturas principais $\mathbf{k}_1(p)$ e $\mathbf{k}_2(p)$, respectivamente.

Se $k_1(p) = k_2(p) = 0$, p é um ponto planar;

Se $k_1(p) = k_2(p)$, p é um ponto umbílico.

Obs: (Dado um ponto p em uma superfície, as curvaturas principais $k_1(p)$ e $k_2(p)$ são determinadas pelos autovalores da matriz da segunda forma fundamental no ponto p)

Função em Sagemath

```

def curvaturas_principais(X, u, v):
    dNp = matriz_forma(X, u, v)
    k1, k2 = dNp.eigenvalues()

    return k1, k2

```

Direções Principais

As direções principais $\mathbf{w}_1(p)$ e $\mathbf{w}_2(p)$ são os autovetores associados aos autovalores $k_1(p)$ e $k_2(p)$, respectivamente, da matriz $-dN_p$. No ponto p da superfície S , o vetor $w_1(p)$ aponta na direção de máxima curvatura, enquanto $w_2(p)$ aponta na direção de mínima curvatura.

Função em Sagemath

```

def obter_direcoes_principais(cartas, u, v):
    matriz_forma = obter_matriz_forma(cartas, u, v)
    w_1, w_2 = matriz_forma.eigenvectors_right()

```

```
return vector(w_1[1][0]), vector(w_2[1][0])
```

Curvatura de Gauss

A curvatura de Gauss é uma medida da curvatura intrínseca de uma superfície em um determinado ponto. E pode ser representada pela determinante da matriz $-dN_p$, ou por:

$$K(p) = k_1 \cdot k_2$$

Se $K(p) > 0$ (ambos $k_1(p)$ e $k_2(p)$ têm o mesmo sinal), p é um ponto elíptico;

Se $K(p) < 0$ (ambos $k_1(p)$ e $k_2(p)$ têm sinais opostos), p é um ponto hiperbólico;

Se $K(p) = 0$ (com $-dN_p \neq 0$), p é um ponto parabólico.

Função em Sagemath

```
def curvatura_gauss(X, u, v):
    dNp = matriz_forma(X, u, v)
    curv_gauss = dNp.determinant().full_simplify()
    # k1, k2 = curvaturas_principais(X,u,v)
    # curv_gauss = k1.dot_product(k2)

    return curv_gauss
```

Curvatura Média

A curvatura média de S em p é definida como sendo:

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-dN_p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}$$

Função em Sagemath

```
def curvatura_media(X, u, v):
    k1, k2 = curvaturas_principais(X, u, v)
    curv_media = (k1 + k2) / 2

    return curv_media
```

Bônus: Transição entre Superfícies

Para criar uma transição suave entre duas superfícies no Sagemath, existem alguns métodos. Seja $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3)$ as parametrizações das superfícies, podemos criar a parametrização de transição T sendo:

$$T = (\cos(a) * x_1 + \sin(a) * y_1, \cos(a) * x_2 + \sin(a) * y_2, \cos(a) * x_3 + \sin(a) * y_3)$$

Daí, quando $a = 0$, teremos a superfície Y e quando $a = 2\pi$ (ou -2π), teremos a superfície X . Então basta aplicar a função `animate()` com a variando entre 0 e 2π .

Créditos: Pedro Garcia

```

a,u,v,z = var('a u v z')
# Helicoide
Helicoid = ((sinh(u)*cos(v), sinh(u)*sin(v), v))
# Catenoide
Catenoid = ((-cosh(u)*sin(v), cosh(u)*cos(v), u))
# Transicao
X(u,v) = (cos(a)*Helicoid[0] + sin(a)*Catenoid[0], cos(a)*Helicoid[1] +
          sin(a)*Catenoid[1], cos(a)*Helicoid[2] + sin(a)*Catenoid[2])
figura = parametric_plot3d(X.subs(a=i), (u, -4,4), (v, -4, 4)) for i in
          xrange(-2*pi, 0,0.3)
animacao = animate(figura)
show(animacao)

```

Figura 15: Transição 1 suave entre
Helicoide e Catenoide

Figura 16: Transição 1 suave entre
Helicoide e Hiperboloide

Analogamente, há a alternativa de utilizar $(1 - a)$ em vez de $\cos(a)$ e a em vez de $\sin(a)$.

$$T = ((1 - a) * x_1 + a * y_1, (1 - a) * x_2 + a * y_2, (1 - a) * x_3 + a * y_3)$$

Daí, quando $a = 0$, teremos a superfície X e quando $a = 1$, teremos a superfície Y . Então basta aplicar a função `animate()` com a variando entre 0 e 1.

```

# Helicoide
Helicoid = ((v*cos(u), v*sin(u), u))
# Hiperboloide de uma folha
Hiperboloid = ((cos(u) - v*sin(u), sin(u) + v*cos(u), v))
# Transicao
X(u,v) = ((1-a)*Helicoid[0] + a*Hiperboloid[0], (1-a)*Helicoid[1] +
          a*Hiperboloid[1], (1-a)*Helicoid[2] + a*Hiperboloid[2])

figura = parametric_plot3d(X.subs(a=i), (u, -2*pi,0), (v, -2, 2)) for i
          in xrange(0, 1,0.1)
animacao = animate(figura)
show(animacao)

```

Figura 17: Transição 2 suave entre
Helicoide e Catenoide

Figura 18: Transição 2 suave entre
Helicoide e Hiperboloide

Bônus: Como inserir Gifs em PDF usando o pacote **Animate**

O pacote `animate` permite incluir animações controladas por JavaScript em um pdf criado com LaTeX. Isso pode ser particularmente útil para apresentações beamer. A maior ressalva antecipada: as animações são suportadas apenas por alguns leitores de pdf (AcrobatReader, PDF-XChange, acroread e Foxit Reader). Leia sobre: <https://texblog.org/2018/03/05/the-animate-package/>

Passo a Passo:

- Instalar e importar o pacote "animate".
- Gravar sua animação em gif.
- Crie uma pasta para seus frames.
- Converta seu gif para png ou jpg. Existem alguns programas que fazem isso, como o "Magick" que é recomendado na página do pacote `animate`. Mas também há um site online que o faz muito bem: <https://image.online-convert.com/convert/gif-to-png>
- Coloque os frames na pasta criada, seus nomes devem ser iguais, apenas com um número final para distingui-los. Por exemplo, chamaremos o primeiro de "frame-1.png", o segundo de "frame-2.png", etc.
- Por último, basta inseri-lo no seu Tex.

```
\animategraphics[options]{frame rate}{file basename}{first}{last}
```

Exemplo prático:

```
\begin{figure}[H]
  \centering
  \animategraphics[autoplay,loop,width=6cm]{5}{gif/frame-}{0}{20}
  \caption{"Caption Aqui!"}
\end{figure}
```

Nesse exemplo, o gif terá 20 frames que estão enumerados de 0 a 20 na pasta "gif". Na visualização teremos 5 frames por segundo. Caso o "frame rate" seja um número menor que 1, teríamos o mesmo frame por mais de um segundo.

Bibliografia

- [1] Ronaldo Freire de Lima. *Introducao a geometria diferencial*. 2016.
- [2] Manfredo P Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*. Courier Dover Publications, 2016.
- [3] Bruna Nunes. *Geometria Diferencial de Superfícies e o Teorema de Gauss-Bonnet*. [Accessed 28-Jun-2023].