(8.5) intervalos de confiança

(1) Suponha que $X_1, \dots, X_n$ forma uma amostra aleat de uma dist normal com média desconhecida μ e variância conhecida σ^2. Seja Φ a c.d.f de uma dist normal padrão, e Φ^{-1} sua inversa. Mostre que o intervalo a seguir é um coeficiente γ para μ se $\bar{X}_n$ é a média observada dos valores.

queremos provar:

$$Pr\left(\bar{X}_n - \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{\sigma}{n^{1/2}} < \mu < \bar{X}_n + \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{\sigma}{n^{1/2}}\right) = \gamma$$

$$I = \left(\bar{X}_n - \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{\sigma}{n^{1/2}}, \bar{X}_n + \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{\sigma}{n^{1/2}}\right)$$

$\downarrow -\bar{X}_n$

$$= Pr\left[-\Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{\sigma}{n^{1/2}} < \mu - \bar{X}_n < \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{\sigma}{n^{1/2}}\right]$$

$\div \sigma/n^{1/2}$

$$= Pr\left[-\Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) < \frac{\mu - \bar{X}_n}{\sigma/n^{1/2}} < \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\right]$$

$\cdot(-1)$

$$= Pr\left[\Phi\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) > \underbrace{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/n^{1/2}}} > -\Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\right]$$

$$= Pr\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) > \frac{Z}{\sqrt{n}} > -\Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\right]$$

$$\frac{1+\gamma}{\cancel{2}} - \left(1 - \frac{1+\gamma}{\cancel{2}}\right)^{2/2} = 1 + \gamma - 1 = \gamma \;//$$

?

$(\bar{X}_n - 0.005\sigma,\ \bar{X}_n + 0.005\sigma),\ \gamma = 0.95$

4) Suponha que $X_1, \dots, X_n$ forma uma amostra de uma dist normal com média μ desconhecida e variância σ^2. Quão grande deve ser para que o intervalo de confiança para μ tenha coeficiente 0.095 e a largura seja menor que 0.01σ?

$$Pr(A < g(\sigma) < B) = 0.95$$

$$L \quad \gamma$$

$$= \mathbb{P}(\mu \in (\bar{X}_n - 0.005\sigma, \bar{X}_n + 0.005)) = \mathbb{P}(\bar{X}_n - 0.005\sigma < \mu < \bar{X}_n + 0.005\sigma)$$

$$= \mathbb{P}(-0.005\sigma < \mu - \bar{X}_n < 0.005\sigma)$$

$$= \mathbb{P}\left(-\sqrt{n}\,0.005 < \frac{\sqrt{n}(\mu - \bar{X}_n)}{\sigma} < \sqrt{n}\,0.005\right)$$

$$= \Phi(\sqrt{n}\,0.005) - \Phi(-\sqrt{n}\,0.005) = 1 - 2\Phi(-\sqrt{n}\,0.005)$$

$$= 2\Phi(-\sqrt{n}\,0.005) = 0.05$$

$$\Phi(-\sqrt{n}.005) = 0.025 \qquad -\sqrt{n}\,0.005 = \Phi^{-1}(0.025)$$

$$\hookrightarrow n = \left(\frac{0.005}{\Phi(0.025)}\right)^2$$

$$L = B - A = \underbrace{2 \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \iff \frac{3.92\sigma}{\sqrt{n}} < 0.01\sigma$$

$$n \geq 153.665$$

5)

Suponha que $X_1, \dots, X_n$ forma uma amostra aleatória de uma dist normal com média desconhecida μ e variância desconhecida σ^2. Descreva um método para construir um intervalo de confiança para σ^2 com um coeficiente específico γ $(0 < \gamma < 1)$

Dica: encontre c_1 e c_2 tal que

$$Pr\left[c_1 < \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} < c_2 \right] = \gamma$$

$$U = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$Pr(c_1 < U < c_2) = Pr\left(c_1 < \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 < c_2 \right) \quad \cdot \sum (X_i - \bar{X}_n)^2$$

inverte

$$= Pr\left(\underbrace{\frac{1}{c_2} \sum (X_i - \bar{X}_n)^2}_{A} < \sigma^2 < \underbrace{\frac{1}{c_1} \sum (X_i - \bar{X}_n)^2}_{B} \right)$$

$$I = \left(\frac{1}{c_2} \sum (X_i - \bar{X}_n)^2 , \frac{1}{c_1} \sum (X_i - \bar{X}_n)^2 \right)$$

6) Suponha que $X_1, \dots, X_n$ forma uma amostra aleat de dist ~~aleatória~~ exponencial com média desconhecida μ. Descreva um método para construir um intervalo de confiança para μ, com coeficiente específico γ $(0 < \gamma < 1)$

Dica: encontre c_1 e c_2 tal que:

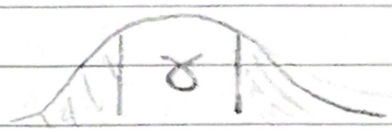
$X_1, \dots, X_n \sim exp(1/\mu)$

$$Pr\left[c_1 < \underbrace{\frac{1}{\mu}\sum X_i}_{U} < c_2\right] = \gamma$$

$$\sum X_i \sim Gamma(n, 1/\mu) \rightarrow \frac{1}{\mu}\sum X_i \sim Gamma(n, 1)$$

$Y \sim Gamma(\alpha, \beta)$

$c \cdot Y \sim Gamma(\alpha, \beta/c)$



$\frac{1-\gamma}{2}$ $\qquad$ $\frac{1-\gamma}{2}$

ψ_n - F.d.a Gamma$(n, 1)$

$$c_1 = \psi_n^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)$$

$$c_2 = \psi_n^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum X_i}{c_2} < \mu < \frac{\sum X_i}{c_1}\right)$$

$$= \left(\frac{\sum X_i}{\psi_n\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}, \frac{\sum X_i}{\psi_n\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}\right) = I$$