Trabalho I: Análise bayesiana no caso Normal.

Disciplina: Inferência Estatística
Aluno: Iara Cristina Mescua Castro

24 de agosto de 2022

Data de Entrega: 24 de Agosto de 2022.

Questão 1: Escreva a distribuição conjunta condicional dos dados sob a nova parametrização
Resposta:

$$f_n(\underline{x}|\phi) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\phi) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau(x-\mu)^2}{2}}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\tau}{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

É possível desconsiderar a constante $(\sqrt{2\pi})^n$:

$$f_n(\underline{x}|\phi) \propto \left(\sqrt{\tau}\right)^n e^{-\frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

Questão 2: A partir da densidade do item anterior, deduza que a distribuição a priori conjugada conjunta para $\phi = (\mu, \tau)$ da forma

$$\tau \sim \ Gama(\alpha_0, \beta_0)$$

$$\mu|\tau \sim \ Normal(m_0, \lambda_0\tau)$$

Resposta:

A priori de τ:

$$\xi(\tau) \quad \propto \quad \tau^{\alpha_0-1}e^{-\beta_0\tau}$$

A priori conjunta de $\mu|\tau$

$$\xi(\mu|\tau) \quad \propto \quad \sqrt{\tau}\, e^{-\frac{\lambda_0\tau}{2}(\mu-m_0)^2}$$

$$\xi(\mu|\tau) = \frac{\xi(\mu,\tau)}{\xi(\tau)} \Leftrightarrow \xi(\phi) = \xi(\mu,\tau) = \xi(\mu|\tau)\xi(\tau)$$

$$\xi(\phi) = \xi(\mu,\tau) = (\sqrt{\tau}\, e^{-\frac{\lambda_0\tau}{2}(\mu-m_0)^2}) * (\tau^{\alpha_0-1}e^{-\beta_0\tau})$$

$$\xi(\phi) \propto (\tau^{\alpha_0-1}e^{-\beta_0\tau}) * (\sqrt{\tau}\, e^{-\frac{\lambda_0\tau}{2}(\mu-m_0)^2})$$

$$\xi(\phi) \propto \tau^{\alpha_0-1}e^{-\beta_0\tau}\sqrt{\tau}e^{-\frac{\tau}{2}(\lambda_0(\mu-m_0)^2)}$$

Fórmula para posteriori conjunta:

$$\xi(\mu,\tau|\underline{x}) \propto \xi(\mu,\tau) \cdot f_n(\underline{x}|\mu,\tau)$$

$$\xi(\phi|\underline{x}) \propto \xi(\phi) \cdot f_n(\underline{x}|\phi)$$

$$\xi(\phi|\underline{x}) \propto \left(\tau^{\alpha_0 - 1} e^{-\beta_0 \tau} \sqrt{\tau} e^{-\frac{\tau}{2}(\lambda_0(\mu - m_0)^2}\right) \left(\left(\sqrt{\tau}\right)^n e^{-\frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}\right)$$

$$\xi(\phi|\underline{x}) \propto \tau^{\alpha_0 + \frac{n}{2} - 1} e^{-\beta_0 \tau} \sqrt{\tau} e^{-\frac{\tau}{2}(\lambda_0(\mu - m_0)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2)}$$

Agora precisamos arrumar essa expressão para encontrar uma conjunta de distribuição gama e normal:

Vamos rearranjar os índices da segunda exponencial: $e^{-\frac{\tau}{2}(\lambda_0(\mu - m_0)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2)}$
Abrindo os quadrados:

$$-\frac{\tau}{2}(\lambda_0(\mu^2 - 2\mu + m_0^2) + \sum_{i=1}^n xi^2 - 2\sum_{i=1}^n x_i \mu + \sum_{i=1}^n \mu^2)$$

Agora vamos colocar μ^2 e -2μ em evidência. ps.: $\sum_{i=1}^n \mu^2 = n\mu^2$

$$-\frac{\tau}{2}(\mu^2(\lambda_0 + n) - 2\mu(\lambda_0 m_0 + \sum_{i=1}^n x_i) + \sum_{i=1}^n xi^2 + \lambda_0 m_0^2)$$

Colocando $(\lambda_0 + n)$ em evidência em toda a expressão:

$$-\frac{\tau}{2}((\lambda_0 + n)(\mu^2 - 2\mu\left(\frac{\lambda_0 m_0 + \sum_{i=1}^n x_i}{\lambda_0 + n}\right) + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda_0 + n} + \frac{\lambda_0 m_0^2}{\lambda_0 + n}))$$

Agora é possível completar quadrados de forma que $\omega = \frac{\lambda_0 m_0 + \sum_{i=1}^n x_i}{\lambda_0 + n}$:

$$-\frac{\tau}{2}((\lambda_0 + n)((\mu - \omega)^2 - \omega^2 + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda_0 + n} + \frac{\lambda_0 m_0^2}{\lambda_0 + n})$$

Concluímos que:

$$\xi(\phi|\underline{x}) \propto \tau^{\alpha_0 + \frac{n}{2} - 1} e^{-\beta_0 \tau - \frac{\tau}{2}(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \lambda_0 m_0^2 - \cancel{\lambda_0 + n}\left(\frac{(\lambda_0 m_0 + \sum_{i=1}^n x_i)^2}{(\lambda_0 + n)^{\cancel{2}}}\right))} \sqrt{\tau} e^{-\frac{\tau}{2}(\lambda_0 + n)(\mu - \omega)^2}$$

$$\xi(\phi|\underline{x}) \propto \tau^{\alpha_0 + \frac{n}{2} - 1} e^{-\beta_0 \tau - \frac{\tau}{2}(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \lambda_0 m_0^2 - \frac{(\lambda_0 m_0 - \sum_{i=1}^n x_i)^2}{\lambda_0 + n}} \sqrt{\tau} e^{-\frac{\tau}{2}(\lambda_0 + n)(\mu - \omega)^2}$$

$$\xi(\phi|\underline{x}) \propto \tau^{(\alpha_0 + \frac{n}{2}) - 1} e^{-\tau(\beta_0 + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \lambda_0 m_0^2 - \frac{(\lambda_0 m_0 - \sum_{i=1}^n x_i)^2}{\lambda_0 + n})} \sqrt{\tau} e^{-\frac{\tau}{2}(\lambda_0 + n)(\mu - \omega)^2}$$

Note que a primeira parte depende apenas de τ, enquanto a segunda parte (a partir de $\sqrt{\tau}$) depende de μ e τ.
Sabendo que $\xi(\mu, \tau) = \xi(\tau)\xi(\mu|\tau) \Leftrightarrow \xi(\phi) = \xi(\tau)\xi(\mu|\tau)$

$$\xi(\phi|\underline{x}) = \xi(\tau|\underline{x})\xi(\mu|\tau, \underline{x})$$

Podemos concluir que:

$$\xi(\tau|\underline{x}) = \tau^{(\alpha_0 + \frac{n}{2} - 1)} e^{-\tau(\beta_0 + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \lambda_0 m_0^2 - \frac{(\lambda_0 m_0 - \sum_{i=1}^n x_i)^2}{\lambda_0 + n})}$$

$$\xi(\mu|\tau, \underline{x}) = \sqrt{\tau} e^{-\frac{\tau}{2}(\lambda_0 + n)(\mu - \omega)^2}$$

Questão 3: A partir dos itens anteriores, derive a distribuição a posteriori conjunta de μ e τ e a distribuição conjunta de μ dado τ, assim como a distribuição marginal a posteriori de τ .
A partir da questão anterior, obtemos que:

$$\xi(\phi|\underline{x}) \propto \underbrace{\tau^{(\alpha_0+\frac{n}{2})-1}e^{-\tau(\beta_0+\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n x_i^2+\lambda_0 m_0^2-\frac{(\lambda_0 m_0-\sum_{i=1}^n x_i)^2}{\lambda_0+n})}}_{1}\underbrace{\sqrt{\tau}e^{-\frac{\tau}{2}(\lambda_0+n)(\mu-\omega)^2}}_{2}$$

É proporcional às duas distribuições:
1) $\xi(\tau|\overline{x}) = Gama(\alpha_1, \beta_1)$, onde:

$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{n}{2}$ e $\beta_1 = \beta_0 + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \lambda_0 m_0^2 - \frac{(\lambda_0 m_0-\sum_{i=1}^n x_i)^2}{\lambda_0+n})$

2) $\xi(\mu|\tau, \overline{x}) = Normal(m_1, \lambda_1)$, onde:

$m_1 = \omega = \frac{\lambda_0 m_0+\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda_0+n}$ e $\lambda_1 = \lambda_0 + n$

——-

Questão 4: Interprete as expressões obtidas no item anterior; o que as formas funcionais obtidas revelam sobre a interação entre os hiperparâmetros e os dados? .

Elas revelam que devido o λ_0 em uma pequena quantidade de amostras, faz a distribuição ser mais espalhada já que a variância aumenta. Isso se dá por ser inversamente proporcional à $\xi(\mu|\tau, \overline{x})$. Enquanto em uma grande quantidade de amostras ocorre o contrário, a variância é menor e a distribuição se torna mais concentrada.
Vale ressaltar também que:

$$m_1 = \frac{\lambda_0 m_0 + n\overline{x}}{\lambda_0 + n} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + n}m_0 + \frac{n}{\lambda_0 + n}\overline{x}$$

Então m_1 é uma média ponderada da média a priori y da média amostral

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + n} + \frac{n}{\lambda_0 + n} = 1$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 + n \Rightarrow \quad \underbrace{\tau\lambda_1}_{precisao\ condicional} = \underbrace{t\lambda_0}_{precisao\ priori} + \underbrace{\tau n}_{precisao\ amostral}$$

Questão 5: Derive a distribuição marginal a posteriori de τ (Dica: leia o capítulo 8.4 de De Groot) .

A distribuição marginal a posteriori de τ:

$$\int_a^b \xi(\mu, \tau|\underline{x})\, d\mu = \int_a^b \xi(\tau|\underline{x})\xi(\mu|\tau, \underline{x})\, d\mu$$

Como já foi calculado:

$$= \int_0^\infty \tau^{\alpha_1-1}e^{-\tau\beta_1}\sqrt{\tau}e^{-\frac{\tau}{2}(\lambda_1)(\mu-m_1)^2}d\tau$$

$$= \int_0^\infty \tau^{\alpha_1+\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{\tau}{2}(2\beta_1+(\lambda_1)(\mu-m_1)^2)}d\tau$$

$$= \int_0^\infty \tau^{\alpha_1+\frac{1}{2}-1}e^{-\tau(\beta_1+\frac{(\lambda_1)}{2}(\mu-m_1)^2)}d\tau$$

——-

A partir da função Gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}$$

$$\beta x = y \Longleftrightarrow x = \frac{y}{\beta} \Longleftrightarrow \beta dx = dy$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \int_0^\infty \frac{y}{\beta}^{z-1} e^{-y} \frac{1}{\beta} dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\beta^\alpha} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}$$

——-

Então:

$$= \int_0^\infty \tau^{\overbrace{(\alpha_1 + \frac{1}{2})}^{\alpha_2} - 1} e^{-\tau \overbrace{(\beta_1 + \frac{(\lambda_1)}{2}(\mu - m_1)^2)}^{\beta_2}} d\tau = \int_0^\infty \tau^{\alpha_2 - 1} e^{-\beta_2 \tau} d\tau$$

$$\frac{\Gamma(\alpha_1 + \frac{1}{2})}{(\beta_1 + \frac{(\lambda_1)}{2}(\mu - m_1)^2)^{(\alpha_1 + \frac{1}{2})}} \propto (\beta_1 + \frac{(\lambda_1)}{2}(\mu - m_1)^2)^{-(\alpha_1 + \frac{1}{2})}$$

$$\xi(\mu|\underline{x}) \propto (\beta_1 + \frac{(\lambda_1)}{2}(\mu - m_1)^2)^{-(\alpha_1 + \frac{1}{2})}$$

$$\xi(\mu|\underline{x}) \propto (1 + \frac{(\lambda_1)}{2\beta_1}(\mu - m_1)^2)^{-(\frac{2\alpha_1 + 1}{2})}$$

Podemos representá-la na forma da distribuição de T-Student, com os parâmetros de locação m_1, escala $\frac{2\beta}{\lambda_1}$ e $2\alpha_1 = 2\alpha_0 + n$ graus de liberdade.
Em outras palavras:

$$\xi(\mu|\underline{x}) \sim \ T - Student(v, \mu, \sigma)$$

$$\xi(\mu|\underline{x}) \sim \ T - Student(2\alpha_1, m_1, \frac{2\beta_1}{\lambda_1})$$

$$\xi(\mu|\underline{x}) \sim \ T - Student(2\alpha_0 + n, \frac{\lambda_0 m_0 + \sum_{i=1}^n x_i}{\lambda_0 + n}, \frac{2\beta_1}{\lambda_1})$$

Onde $\beta_1 = \beta_0 + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \lambda_0 m_0^2 - \frac{(\lambda_0 m_0 - \sum_{i=1}^n x_i)^2}{\lambda_0 + n})$ e $\lambda_1 = \lambda_0 + n$

Questão 6: Palmirinha anda preocupada com a concentração de amido em sua pamonha. Ela pede para Valciclei, seu assistente, amostrar n = 10 pamonhas e medir sua concentração de amido. Ele, muito prestativo, rapidamente faz o experimento, mas, porque comeu todas as amostras depois que foram medidas, precisou fazer uma visita de emergência ao banheiro. Desta feita, apenas teve tempo de anotar em um papel a média e variância amostrais, $\overline{x_n} =$ 8.307849 e $\overline{s_n}^2 =$ 7.930452. Palmirinha tem uma reuni ao com investidores em pouco tempo, então decide voltar aos seus tempos de bayesiana old school e analisar os dados utilizando prioris conjugadas. Ela supõe que a concentração de amido segue uma distribuição normal com parâmetros μ e τ e que as observações feitas por Valciclei são independentes entre si. Ela suspeita que a concentra ção de amido na pamonha
que em torno de 10 mg/L, com desvio padrão de 2 mg/L. Com sua larga experiência na confecção de pamonhas, ela suspeita ainda que o coe
ciente de variação da concentração de amido seja em torno de 1=2. Palmirinha tem um quadro em seu escritório, que diz

$$\text{cv} = \frac{\sigma}{\mu}.$$

Agora,
a) Elicite uma distribuição a priori conjugada consistente com as suspeitas de Palmirinha. Para isso, interprete-as como valores esperados a priori dos parâmetros[1] – isto é, $\mathbb{E}[\mu] = 10$, $\text{Var}(\mu) = 4$ e $\mathbb{E}[\sqrt{\tau}\mu] = 2$ – e compute os hiperparâmetros β_0, m_0 e λ_0 da Equação(1). Suponha também que $\alpha_0 = 2$.
b) Com os dados anotados por Valciclei, é possível computar a distribuição *a posteriori* de μ e τ? Justifique.
c) Em caso afirmativo, ajude Palmirinha a encontrar $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ de modo que $\Pr(\mu \in (a, b) \mid \boldsymbol{x}) = 0.95$.

——-

a) $\alpha_0 = 2$, $\beta_0 =?$, $m_0 = 10$ e $\lambda_0 =?$
$E[\mu] = 10$, $Var(\mu) = 4$ e $E[\sqrt{\tau}\mu] = 2$

$$E[X] = E[E[X|Y]]$$
$$Var(X) = Var(E[X|Y]) + E[Var(X|Y)]$$

$$\mu|\tau \sim\ N(m_0, \lambda_0\tau)$$

$$E[\mu|\tau] = m_0$$
$$E[\mu] = E[E[\mu|\tau]] = E[m_0] = m_0$$
$$m_0 = 10$$

$$Var(\mu) = Var(E[\mu|\tau]) + E[Var(\mu|\tau)]$$
$$= \cancel{Var(m_0)} + E[\frac{1}{\lambda_0\tau}] = \frac{1}{\lambda_0}E[\frac{1}{\tau}]$$

$$\tau \sim\ Gamma(\alpha_0, \beta_0)$$
$$\frac{1}{\tau} \sim\ GammaInverse(\alpha_0, \beta_0)$$

$$= \frac{1}{\lambda_0}\frac{\beta_0}{\alpha_0 - 1} = \frac{\beta_0}{(2-1)\lambda_0} = 4$$

$$\beta_0 = 4\lambda_0$$

[1] As leis de esperança e de variância totais podem ser adequadas; veja [?, Seção 9.6].

———-

$$E[E[\sqrt{\tau}\mu|\tau]] = E[\sqrt{\tau}E[\mu|\tau]] = m_0 E[\sqrt{\tau}] = 2$$

———-

$$E[\sqrt{\tau}] = \int_0^\infty \sqrt{\tau}E[\tau]d\tau$$

$$= \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^\infty \tau^{\frac{1}{2}}\tau^{\alpha_0 - 1}e^{-\beta_0\tau}d\tau$$

$$= \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^\infty \underbrace{\tau^{(\alpha_0+\frac{1}{2})-1}e^{-\beta_0\tau}}_{gamma(\alpha_0+\frac{1}{2},\beta_0)}d\tau$$

$$= \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \frac{\Gamma(\alpha_0+\frac{1}{2})}{\beta^{\alpha_0+\frac{1}{2}}}$$

Sabendo que $\alpha_0 = 2$:

$$= \frac{1}{\beta_0^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(2+\frac{1}{2})}{\Gamma(2)}$$

$\Gamma(2) = (2-1)! = 1$

$$= \Gamma(\tfrac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \frac{3}{4}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{3\pi}{4}$$

———-

$$E[E[\sqrt{\tau}\mu|\tau]] = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\frac{m_0}{\beta_0^{\frac{1}{2}}} = 2$$

Sabendo que $m_0 = 10$:

$$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\frac{10}{\sqrt{\beta_0}} = 2$$

$$\frac{3\sqrt{\pi}}{2}\frac{5}{\sqrt{\beta_0}} = 2$$

$$15\sqrt{\pi} = 4\sqrt{\beta_0} \Leftrightarrow \beta_0 = \frac{225\pi}{16}$$

$$\beta_0 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{225\pi}{64}$$

———-

b) Sim, para calcular as distribuições a posteriori, precisamos além dos hiper-parâmetros, a média e a variança, que foram dadas.

———-

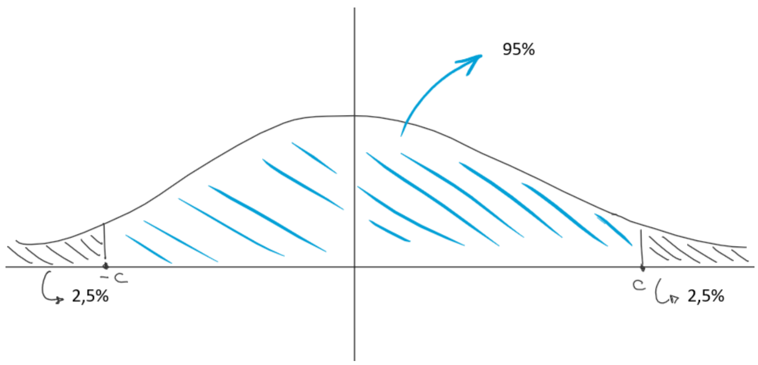
c) $\mu_{\overline{x}} \sim \ t - student(v, M, \sigma)$

$T/\sqrt{\sigma} + M = \mu_{\overline{x}}$

$T = (\mu_{\overline{x}} - M)\sqrt{\sigma} \sim \ t(v)$

$$P(a < \mu < b|\underline{x}) = 0.95$$

$$P(a - M)\sqrt{\sigma} < \underbrace{\overbrace{(\mu - M)}^{T}\sqrt{\sigma}}_{t-student(v)} < (b - M)\sqrt{\sigma}$$



$$(a - M)\sqrt{\sigma} = CumulativeInverse\, t - Student(v)[2,5\%]$$
$$(b - M)\sqrt{\sigma} = CumulativeInverse\, t - Student(v)[97,5\%]$$

$$a = \frac{t_{2,5}}{\sqrt{\sigma}} + M$$

$$b = \frac{t_{97,5}}{\sqrt{\sigma}} + M$$

Visto que $\alpha_0 = 2$ e $n = 10$:

$$v = 2\alpha_0 + n = 2 * 2 + 10 = 14$$

$$M = \frac{\lambda_0 m_0 + n\overline{x}}{\lambda_0 + n}$$

Visto que $\overline{x_n} = 8.307849$, $\lambda_0 = \frac{225\pi}{64}$

$$M = \frac{\frac{225\pi}{64} * 10 + 10 * 8.307849}{\frac{225\pi}{64} + 10}$$

$$M = \frac{11.04466 * 10 + 83.07849}{11.04466 + 10} = \frac{193,52509}{21.04466} \approx 9.19$$

$$\sigma^2 = \frac{\beta}{(\lambda_0 + n)(\alpha_0 + \frac{n}{2})}$$

Como foi visto na questão 2:

$$\beta = \beta_0 + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda_0 m_0^2 - \frac{(\lambda_0 m_0 - \sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{\lambda_0 + n}) = \beta_0 + \frac{1}{2}s_n^2(n-1) + \frac{n\lambda_0(\overline{x} - m_0)^2}{2(\lambda_0 + n)}$$

Substituindo os valores:

$$\beta = \frac{225\pi}{16} + \frac{7.930452 * 9}{2} + \frac{10\frac{225\pi}{64}(8.307849 - 10)^2}{2(21.04466)}$$

$$\beta = 44.1786 + 35.687034 + \frac{\frac{2250\pi}{64}(2.8633)}{42.08932} = 44.1786 + 3.965226 + \frac{316.25}{42.08932}$$

$$\beta = 44.1786 + 35.687034 + \frac{316.25}{42.08932} = 44.1786 + 3.965226 + 7.5137 \approx 87.379334$$

$$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{87.379334}{(\frac{225\pi}{64} + 10)(2+5)} = \frac{87.379334}{(21.04466)(7)} = \frac{87.379334}{147.31262} \approx 0.5931$$

$$\frac{1}{\sigma} \approx 0.77$$

Então temos uma distribuição $t \sim\ T - Student(14, 9.19, \frac{1}{0.77})$
Pela tabela da distribuição t-student, $t_{2.5}$ e $t_{97.5}$ para v = 14 é: 2.14479:
Agora podemos calcular a e b:

$$a \approx -2.14479 * 0.77 + 9.19 = -2.7854 + 9.19 = 7.5385$$

$$b \approx 2.14479 * 0.77 + 9.19 = 2.7854 + 9.19 = 10.841$$

1 Referência Bibliográfica

Degroot, Schervish. Probability and Statistics 4th Edition, 2011.