7.5

1) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ distintos

Y variável aleatória

$$f(y) = \begin{cases} 1/m, & y \in x_1, x_2, \ldots x_m \\ 0, & c.c \end{cases}$$

Prove que:

$$Var(Y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2$$

$$V(X) = \sum_{x \in S} (x-\mu)^2 \cdot p(x) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

$$E(X) = \mu \cdot x = \sum_{x \in S} x \cdot p(x)$$

$$E[g(x)] = \mu g(x) = \sum_{x \in S} g(x)\, p(x)$$

$$V(x) = \sum_{x \in S} (x-\mu)^2 \cdot p(x) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

$$E(Y) = \sum_{y \in S} y\, p(y) = \frac{1}{m} x_1 + \frac{1}{m} x_2 + \ldots + \frac{1}{m} x_m = \overline{x_m}$$

$$g(Y) = Y^2$$

$$E(Y^2) = \sum_{y \in S} y \cdot p(y) = \frac{1}{m} x_1^2 + \frac{1}{m} x_2^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i^2$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$= \frac{1}{m} \sum (x_i - \overline{x_m})^2$$

4) Supanha que $X_1, \ldots, X_m$ formem uma amostra aleatória da distribuição de Bernoulli com parâmetro θ, que é desconhecido, mas sabe-se que θ está no intervalo aberto $0 < \theta < 1$. Mostre que o EMV de θ não existe se todo valor observado for 0 ou se todo valor observado for 1.

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m ; p) = p^{\sum x_i} (1-p)^{m - \sum x_i}$$

Se todo valor observado for 0 ou 1, supomos que $\sum_{i=1}^{m} x_i = 0$

$$f(x_1, \ldots, x_m ; p) = (1-p)^m$$

que é uma função decrescente. $\theta = p$ encontra-se em um intervalo aberto $(0,1)$, o que significa que não pode ser igual a 0, que maximiza a função de verossimilhança. Conclui-se que nesse caso não há E.M.V

Agora se todo valor for 1 : $\sum_{i=1}^{m} x_i = m$ $\quad f(x_1, \ldots x_m ; p) = p^m$

que é uma função crescente. $\theta = p$ encontra-se em um intervalo aberto $(0,1)$, o que significa que não pode ser igual a 1, que maximiza a função de verossimilhança. Conclui-se que nesse caso não há E.M.V.

7.5

9) Suponha que $X_1, \dots, X_n$ formem uma amostra aleatória de uma distribuição para qual a fdp $(x|\theta)$ é a seguinte:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & \text{para } 0<x<1 \\ 0, & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

θ desconhecido, $\theta > 0$

Encontre o EMV de θ.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m; \theta) = \theta^m \left[\prod_{i=1}^{m} x_i\right]^{\theta-1}$$

$$L(\theta) = \log f(x_1, x_2, \dots, x_m; \theta) = m \log \theta + (\theta - 1) \log \prod_{i=1}^{m} x_i$$

$$\frac{d}{d\theta} L(\theta) = \frac{m}{\theta} + \log \prod_{i=1}^{m} x_i = \frac{m}{\theta} + \sum_{i=1}^{m} \log x_i$$

$$\frac{m}{\theta} + \sum_{i=1}^{m} \log x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \log x_i = -\frac{m}{\theta}$$

$$\hat{\theta} = -\frac{m}{\sum_{i=1}^{m} \log x_i}$$

$\log a \cdot b = \log a + \log b$

10) Suponha que $x_1, \ldots, x_m$ formem uma amostra aleatória de uma distribuição para qual a fdp $f(x|\theta)$ é

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|} \qquad -\infty < x < \infty$$

θ desconhecido, $-\infty < \theta < \infty$

Encontre o EMV de θ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m | \theta) = \frac{1}{2^m} e^{-\sum_{i=1}^{m} |x_i - \theta|} \qquad 2^{-m}$$

$$L(\theta) = \log f(x_1, x_2, \ldots x_m | \theta) = -m \cdot \log 2 - \sum_{i=1}^{m} |x_i - \theta|$$

maximizar $L(\theta)$ $\qquad -L(\theta) = m \log 2 + \sum_{i=1}^{m} |x_i - \theta|$

ou minimizar $-L(\theta)$

θ que minimiza $\sum_{i=1}^{m} |x_i - \theta|$ é a média

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} |x_i - \theta|}{m} \to \mu$$