Trabalho III: o método Delta.

Disciplina: Inferência Estatística
Aluna: Iara Cristina Mescua Castro

28 de outubro de 2022

Data de Entrega: 26 de Outubro de 2022.

Orientações

- Enuncie e prove (ou indique onde se pode encontrar a demonstração) de todos os resultados não triviais necessários aos argumentos apresentados;
- Lembre-se de adicionar corretamente as referências bibliográficas que utilizar e referenciá-las no texto;
- Equações e outras expressões matemáticas também recebem pontuação;
- Você pode utilizar figuras, tabelas e diagramas para melhor ilustrar suas respostas;
- Indique com precisão os números de versão para quaisquer software ou linguagem de programação que venha a utilizar para responder às questões[1];

Introdução

Algumas vezes estamos interessados em estimar funções de variáveis aleatórias, em particular funções da média amostral. O método Delta permite, sob certas condições, aproximar a distribuição assintótica de funções de variáveis aleatórias. Este resultado é extremamente útil em Estatística porque permite obter aproximações sob condições bastante gerais, muitas vezes quando estimadores explícitos não estão disponíveis em forma fechada.

Questões

1. Enuncie e prove o método Delta;
2. Discuta sob quais condições o método funciona e porque;
3. **Definição 1: transformações estabilizadoras da variância**. Suponha que $E[X_i] = \theta$ é o parâmetro de interesse. O Teorema central do limite diz que

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \theta\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, \sigma^2(\theta)\right), \tag{1}$$

ou seja, a variância da distribuição limite é função de θ. Idealmente, gostaríamos[2] que essa distribuição não dependesse de θ. Podemos utilizar o método Delta para resolver esse problema. Em particular, você demonstrou acima que

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g(\theta)\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, \sigma^2(\theta)g'(\theta)^2\right). \tag{2}$$

O que desejamos então é escolher g de modo que $g'(\theta)\sigma(\theta) = a$ para todo θ. Dizemos que g é uma **transformação estabilizadora da variância**.

[1] Não precisa detalhar o que foi usado para preparar o documento com a respostas. Recomendo a utilização do ambiente LaTeX, mas fique à vontade para utilizar outras ferramentas.

[2] Por razões que ficarão claras mais à frente no curso. Se sua curiosidade não puder esperar, pesquise "estatística ancilar" ou "ancillar statistics".

Aplicação: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra i.i.d. de uma distribuição normal com média $\mu = 0$ e variância σ^2, **desconhecida**. Defina $Z_i = X_i^2$ e $\tau^2 = \text{Var}(Z_i)$.

(i) Mostre que $\tau^2 = 2\sigma^4$.

(ii) É possível mostrar que

$$\sqrt{n}\left(\bar{Z}_n - \sigma^2\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, 2\sigma^4\right). \tag{3}$$

Proponha uma transformação estabilizadora da variância para este problema[3] *Dica*: Encontre g tal que

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{Z}_n) - g(\sigma^2)\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, 2\right).$$

Respostas

1. O método Delta deriva a variância de uma função de uma normal com variáveis aleatórias da seguinte forma: Suponha que $\bar{X}_n$ tenha uma distribuição normal assintótica, tal que:

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \to N(0, \sigma^2)$$

quando $n \to \infty$. Seja g é uma função contínua e derivável em μ, onde $g'(\mu) \neq 0$. Então:

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\text{d}} N(0, (g'(\mu))^2\sigma^2)$$

Prova: A expansão de Taylor permite restaurar uma função diferenciável, g(x), em termos de uma soma infinita das derivadas de g(p).

$$g(x) = g(p) + g'(p)(x-p) + \frac{g''(p)}{2!}(x-p)^2 + \frac{g'''(p)}{3!}(x-p)^3 + ...$$

É possível cortar a expansão após um certo número de termos, para obter uma aproximação de $g(x)$. Cortando a expansão após o segundo termo, e substituindo "p"por μ teremos a aproximação de Taylor de primeira ordem de g sobre o ponto μ, e avaliada na variável aleatória $\bar{X}_n$, que é:

$$g(\bar{X}_n) \approx g(\mu) + g'(\mu)(\bar{X}_n - \mu)$$

Subtraindo $g(\mu)$ dos dois lados:

$$g(\bar{X}_n) - g(\mu) \approx g'(\mu)(\bar{X}_n - \mu)$$

Multiplicando por $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) \approx \sqrt{n}(g'(\mu)(\bar{X}_n - \mu))$$

O Teorema Central do Limite (TCL) diz que:

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)) \to N(0, \sigma^2)$$

Então pelo Teorema de Slutsky:

$$\sqrt{n}(g'(\mu)(\bar{X}_n - \mu)) \xrightarrow{\text{d}} N(0, (g'(\mu))^2\sigma^2)$$

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\text{d}} N(0, (g'(\mu))^2\sigma^2)$$

[3]Note que, como não conhecemos σ^2, g não pode depender de σ^2.

2. Condições: g é derivável e contínuo para a aplicação da expansão de Taylor e $g'(\mu) \neq 0$

   É necessário para que:

$$\frac{\sqrt{n}(g(\bar{X_n}) - g(\mu))}{|g'(\mu)|\sigma} \to N(0,1)$$

   quando $n \to \infty$

3. (i)

$$X \sim (0, \sigma^2)$$
$$\frac{X}{\sigma} \sim N(0,1)$$

   Elevando ao quadrado e substituindo X^2 por Z, temos:

$$\left(\frac{X}{\sigma}\right)^2 = \frac{Z}{\sigma^2}$$

   Visto que $\frac{X}{\sigma} \sim N(0,1)$, então seu quadrado, $\frac{Z}{\sigma^2}$, tem distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade:

$$\frac{Z}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$$

   Sabendo que $Var(\chi^2(m)) = 2m$, então $Var(\chi^2(1)) = 2$:

$$Var\left(\frac{Z}{\sigma^2}\right) = 2$$

   Pela propriedade: $Var(cX) = c^2 Var(X)$:

$$Var\left(\frac{Z}{\sigma^2}\right) = \frac{Var(Z)}{\sigma^4} = 2$$
$$Var(Z) = 2\sigma^4$$
$$\tau^2 = 2\sigma^4$$

   (ii)

$$\sqrt{n}\left(\bar{Z}_n - \sigma^2\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, 2\sigma^4\right). \tag{4}$$

   Demostramos que:

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g(\theta)\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, \sigma^2(\theta) g'(\theta)^2\right). \tag{5}$$

   Então:

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{Z}_n) - g(\sigma^2)\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, 2\right).$$

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g(\theta)\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, 2\sigma^4(\theta) g'(\theta^2)^2\right). \tag{6}$$

   Precisamos resolver a equação diferencial $g'(\sigma^2)$ de forma que:

$$2 = 2\sigma^4 g'(\sigma^2)^2$$
$$g'(\sigma^2)^2 = \frac{1}{\sigma^4}$$
$$g'(\sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2}$$
$$g(\sigma^2) = ln(\sigma^2)$$