91

3) Suponha que a proporção p de itens defeituosos em um grande população de itens é desconhecida, e que se deseja testar para as seguintes hipóteses:

$H_0: \ p = 0.2$

$H_1: \ p \neq 0.2$

Suponha que uma amostra de 20 itens é extraída da população. Seja Y o número de itens defeituosos na amostra e considere δ o teste tal que a região crítica contém resultados para $Y \geq 7$, ou $Y \leq 1$.

a) Determine o valor da função potência $\pi(p|\delta)$ nos pontos $p = 0, \ 0{,}1, \ 0{,}2, \ 0{,}3, \ 0{,}4, \ 0.5, \ 0{,}6, \ 0{,}7, \ 0.8, \ 0{,}9, \ 1$. Esboce a função potência.

b) Determine o tamanho do teste.

a)

$n = 20$

$$\delta = \begin{cases} \text{rejeita } H_0, \text{ se } Y \leq 1 \text{ ou } Y \geq 7 \\ \text{não rejeita } H_0, \text{ se } 1 < Y < 7 \end{cases}$$

$\Omega_0 = \{0.2\}$ $\qquad Y \sim Bin(20, p)$

$\Omega_1 = (0,1) \setminus \{0.2\}$

$$\pi(p|\delta) = \underbrace{P(Y \leq 1)}_{P(Y=0)+P(Y=1)} + \underbrace{P(Y \geq 7)}_{P(Y=7)+\dots P(Y=20)}$$

$$= \sum_{i=0}^{1} p^i (1-p)^{20-i} + \sum_{i=7}^{20} p^i(1-p)^{20-i}$$

$\pi(0|\delta) = 1$ $\quad \pi(0{,}1|\delta) = 0.3941$ $\quad \pi(0.2|\delta) = 0.1558$ $\quad \pi(0.3|\delta) = 0.39$

$\pi(0.4|\delta) = 0.75$ $\quad \pi(0.5|\delta) = 0.94$ $\quad \pi(0.6|\delta) = 0.9935$ $\quad \pi(0.7|\delta) = 0.9984$

$\pi(0.8|\delta) = 1$ $\quad \pi(0.9|\delta) = 1$ $\quad \pi(1|\delta) = 1.$

b) $\alpha(\delta) = \sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta|\delta) = \sup_{p \in 0.2} \pi(0.2|\delta) = 0.1558.$

8) Assuma que $X_1, \ldots, X_n$ são i.i.d com dist normal que tem média μ e variância 1. Suponha que queremos testar a hipótese:

$H_0: \mu \leq \mu_0$
$H_1: \mu > \mu_0$

$\delta \begin{cases} \text{rejeita } H_0 & \text{se } Z \geq c \\ \text{não rejeita } H_0 & \text{se } Z < c \end{cases}$

a) Mostre que $Pr(Z \geq c|\mu)$ é uma função crescente de μ.
b) Encontre c que faça o teste ter tamanho α_0.

a)

$Z = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma = 1}$ $\qquad X_i \sim N(\mu, 1)$ $\quad$ μ desc.

$\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{1}{n})$

$Z \sim N(\sqrt{n}(\mu - \mu_0), 1)$

$Pr(Z \geq c|\mu) = Pr\left(\overbrace{\dfrac{Z - \sqrt{n}(\mu-\mu_0)}{1}}^{\sim(0,1)} \geq c - \sqrt{n}(\mu - \mu_0)\right)$

$= 1 - \Phi\left(\underbrace{c - \sqrt{n}(\mu - \mu_0)}\right)$

Quando $\mu \uparrow$, $\downarrow$, $\Phi \downarrow$, $Pr \uparrow$

b)

$\pi(\theta|\delta) = P(Z \geq c)$

$\alpha(\delta) = \sup_{\mu = \mu_0} \pi(\mu_0|\delta) = 1 - \Phi(c - \sqrt{n}\cancel{(\mu_0 - \mu_0)}^{0})$

$\alpha(\delta) = 1 - \Phi(c) = \alpha_0$

inversa

$c = \Phi^{-1}(1 - \alpha_0)$

(13) $X \sim Poisson(\theta)$

$H_0: \theta \leq 1.0$

$H_1: \theta > 1.0$

$\delta_c \begin{cases} \text{Rejeita } H_0 \text{ se } X \geq c \\ \text{Não rejeita } H_0 \text{ se } X < c \end{cases}$

Encontre c que faça o tamanho de δ_c o mais próximo de 0.1 sem que seja maior que 0.1

$\rightarrow P(X=c) + \dots$

$$\pi(\theta \mid \delta_c) = P(X \geq c) = P\left(\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} \geq c\right)$$

$$= \sum_{x=c}^{\infty} \left(\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}\right)$$

$\sup \sum_{x=c}^{\infty} \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}$ → testar para c=2, c=3, c=4

19) Retorne para a situação descrita no Exemplo 9.1.17

Suponha:

$H_0: \mu \geq \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$

no nível α_0. Faz sentido rejeitar H_0 se $\bar{X}_n$ é pequeno. Construa um intervalo de confiança (coeficiente $1-\alpha_0$) unilateral para μ que rejeite H_0 se μ_0 não está no intervalo

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0) \sim N(0,1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 = \chi^2(n-1)$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\underbrace{\sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1}}}_{\hat{\sigma}'}} \sim T_{n-1} \qquad \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\hat{\sigma}'} \leq T_{1-\alpha_0, n-}$$

$$\delta \begin{cases} \text{rejeitar } H_0 \text{ se } \bar{X}_n \leq Y \\ \text{não rejeitar } H_0 \text{ se } \bar{X}_n > Y \end{cases}$$

$$\alpha(\delta) = \sup_{\mu \geq \mu_0} \pi(\mu|\delta) = \sup_{\mu \geq \mu_0} P(\bar{X}_n \leq Y)$$

$$= \sup P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma'} \leq \frac{\sqrt{n}(Y-\mu)}{\sigma'}\right)$$

$$= T_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}(Y-\mu_0)}{\sigma'}\right)$$

$$Y \leq \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0) + \mu_0 \text{, no máx, } Y = \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0) + \mu_0$$

$$\bar{X}_n \leq Y \Rightarrow \bar{X}_n \leq \mu_0 + \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0)$$

$$\Leftrightarrow \mu_0 \geq \bar{X}_n - \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} T_{n-1}^{-1}(\alpha_0)$$

(21) Retorne para as situações descritas em 9.1.17 e 19) Queremos comparar os resultados do teste de hipóteses em 9.1.22 no nível α_0 e os resultados do teste de hipótese em 9.1.27 no nível α_0.

a) Seja $\alpha_0 < 0.5$, prove que não há conjunto possível de dados tal que rejeite ambas hipóteses nulas simultaneamente. Ou seja, para cada possível $\bar{x}_n$ e σ' devemos rejeitar pelo menos uma hipótese nula.

$H_A \quad \mu \leq \mu_0$

$H_B \quad \mu > \mu_0$

$H_A = H_0$

$$\mu_0 > \bar{X}_n - T_{n-1}^{-1}(1-\alpha_0)\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$$

$H_B = H_0$

$$\mu_0 < \bar{X}_n + T_{n-1}^{-1}(1-\alpha_0)\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$$

$\underbrace{T_{n-1}^{-1}}_{\text{crescente}}(1-\alpha_0) < 0 \Rightarrow 1-\alpha_0 < T_{n-1}(0)$

$$1-\alpha_0 < 0.5$$

$$\alpha_0 > 0.5$$

Para $\alpha_0 < 0.5$ não há conj de dados tal que restringe ambas hipóteses simultaneamente.