8.7

4) $X \sim \text{Geom}(p)$

Encontre $\delta(X)$ não-viesado de $\frac{1}{p}$

$$E(\delta(X)) = g(\theta)$$

$$E[X] = \frac{1-p}{p} \quad \text{então} \quad \delta(X) = X+1$$

$$= \frac{1}{p} - 1$$

6) $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \qquad \sigma_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

$$T = c \cdot \Sigma (X_i - X_n)^2$$

$$\left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right) \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{T}{\sigma^2 c} = \Sigma\left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

$$E[T] = c \cdot \sigma^2 (n-1)$$
$$Var[T] = c^2\sigma^4(2(n-1))$$
$$MSE[T] = E[(T-\sigma^2)^2] = E[T^2] - 2\sigma^2 E[T] + (\sigma^2)^2$$
$$= Var[T] + E[T]^2 - 2\sigma^2 E[T] + \sigma^4$$
$$= \sigma^4((n^2-1)c^2 - 2(n-1)c + 1)$$

minimizar o erro:

$$\hat{c} = \text{argmin } (n^2-1)c^2 - 2(n-1)c + 1 = \frac{1}{n+1}$$

11) Animais A $\mu_A = \mu_B$ $E[A] = E[B] = \theta$

B $VAR[A] = 4\, Var[B]$

a) Para que valores de α, m, n $\hat{\theta}$ é não-viesado uno.

$$\hat{\theta} = \alpha \bar{X}_m + (1-\alpha)\bar{Y}_n$$

$$E[\hat{\theta}] = \alpha E[\bar{X}_m] + (1-\alpha) E[\bar{Y}_n]$$

$$\alpha E[X_1] + (1-\alpha) E[Y_1 = X_1]$$

$$E[\hat{\theta}] = \alpha \cdot \theta + (1-\alpha)\theta = \cancel{\alpha\theta} + \theta - \cancel{\alpha\theta}$$

$$E[\hat{\theta}] = \theta \quad \text{não viesado. } \forall m, n$$

b) Para valores fixos de m, n que valor de α tem um estimador não-viesado com variância mínima

$$Var(\hat{\theta}) = \alpha^2 Var[\bar{X}_m] + (1-\alpha)^2 Var[\bar{Y}_n]$$

$$\alpha^2 \frac{1}{m^2} m\, Var[X_1] + (1-\alpha)^2 \frac{1}{n^2} n\, Var[Y_n]$$

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{\alpha^2}{m} 4\, Var[Y_1] + \frac{(1-\alpha)^2}{n} Var[Y_1]$$

$$Var[Y_1]\left(\frac{4\alpha^2}{m} + \frac{(1-\alpha)^2}{n}\right)$$

$$-2\alpha + 2$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Var[\hat{\theta}] = \underbrace{\left(\frac{8\alpha}{m} - \frac{2(1-\alpha)}{n}\right)}_{0} Var[Y_1] = 0$$

$$\cancel{8}^{4}\alpha n = -\cancel{2}\alpha m + \cancel{2}m$$

$$\alpha(m + 4n) = m$$

$$\boxed{\alpha = \frac{m}{m+4n}}$$

13) $X_1, X_2, \ldots X_n$ $\qquad X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

a) $\delta(X)$ é um estimador não-viesado, $E_\theta[\delta(X)|T]$ não depende de θ

$E(\delta(X)) = g(X)$ $\qquad$ T é suficiente

a) Mostre que $\delta_0(T)$ é um estimador não viesado de θ

$$E[E(\delta(X)|T)] = E[\delta_0(T)]$$

$$\delta_0(t) = E(\delta(X)|T)$$

$$E[\delta(X)] = E[\underbrace{E(\delta(X)|T)}_{\theta}]$$

$$E[\delta_0(T)] = \theta$$

b) Mostre que $Var_\theta(\delta_0) \leq Var_\theta(\delta)$ $\quad \forall \theta$

Teorema: $Var_\theta(\delta(X)) = Var_\theta(\delta_0(X)) + E_\theta\, Var(\delta(X)|T) \geq 0$

$$Var(\delta(X)) \geq Var_\theta(\delta_0(X))$$