(7.6) $g(\theta) \rightarrow g(\hat{\theta})$ EMV de $g(\theta)$

$\theta \rightarrow \hat{\theta}$ EMV de θ

3) Suponha que $X_1, \ldots, X_m$ formam uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial para a qual o valor do parâmetro β é desconhecido. Determine o EMV da mediana da distribuição

$$F(X \leq m) = \frac{1}{2}$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$\int_0^m \theta e^{-\theta x} dx = \frac{1}{2}$$

$$F^{-1}(p; \lambda) = \frac{-\ln(1-p)}{\lambda}$$

$$F^{-1}(1/2, \lambda) = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$\text{mediana} = g(\theta) = \frac{\ln 2}{\theta}$$

EMV da mediana vai ser $g(\hat{\theta})$

$$f_m(X|\theta) = \theta^m e^{-\theta \Sigma x_i}$$

$$L(\theta) = \log f_m(X|\theta) = m \log \theta - m\theta \Sigma x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta) = \frac{m}{\theta} - m \Sigma x_i$$

$$\frac{m}{\theta} - m\Sigma x_i = 0$$

$$m\Sigma x_i = \frac{m}{\theta} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{\Sigma x_i}$$

$$\overline{X_m}$$

$$g(\hat{\theta}) = \frac{\ln 2}{1/\overline{X_m}} = \overline{X_m} \log 2$$

(5) Suponha que $x_1, \dots, x_n$ formem uma amostra aleatória da distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$

Encontre o EMV da média dessa distribuição

$$\mu = \frac{a+b}{2} \qquad \hat{\mu} = \frac{\hat{a}+\hat{b}}{2} \qquad f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$f_n(x \mid \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}$$

⊳ maximizado quando $\theta_2 - \theta_1$ é mínimo

$$\theta_2 = \min\{x_1, x_2, \dots x_n\}$$
$$\theta_1 = \max\{x_1, x_2, \dots x_n\}$$

$$g(\theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \Rightarrow g(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}{2}$$

$$g(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{\max\{x_1, x_2, \dots x_n\} + \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}}{2}$$

(11) Suponha que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formem uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição uniforme no intervalo $[0, \theta]$ é desconhecido. Mostre que a sequência de EMV de θ é uma sequência consistente.

$$f_n(x|\theta) = \frac{1}{(\theta-0)^n} = \frac{1}{\theta^n}$$

↳ maximizado quando θ é máximo

$\theta = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$\hat{\theta} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

Definição de consistência

$\hat{\theta}$ é consistente se e apenas se para todo $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| < \epsilon) \to 0, \quad n \to \infty$$

ou $\hat{\theta}_n \to \theta$, $n \to \infty$.

$$\lim P(\hat{\theta} > \theta - \varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n = 1$$

$\hat{\theta} \to \theta$, é consistente

7.6

20) Prove que o método dos momentos estimador da média de uma distribuição de Poisson é o EMV.

$\mu(\theta) = \theta$
$m = \overline{X}_n$

$\hat{\theta} = \overline{X}_n$

$$f(x|\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta x}}{x!}$$

$$f_n(x|\theta) = \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{\prod x_i!}$$

$$L(\theta) = \log(f_n(x|\theta)) = y \log\theta - n\theta - \log \prod x_i!$$

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{y}{\theta} - n = 0 \Rightarrow \theta = \frac{y}{n} = \overline{x}_n$$

22) Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleat da distrib. uniforme no intervalo $[0, \theta]$

a. Encontre o EMM de θ

$\mu_1(\theta) = \frac{\theta}{2}$

$m_1 = \overline{X}_n$

$\frac{\theta}{2} = \overline{X}_n \qquad \theta = 2\overline{X}_n$

b. Mostre que o EMM não é o EMV

$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} \mathbb{I}(x \leq \theta) \qquad f_n(x|\theta) = \frac{1}{\theta^n} \cdot \mathbb{I}(\{x_1, \dots, x_n\} \leq \theta)$

$\hat{\theta} = \max(\underset{\sim}{x})$

23) Mesma coisa que a 22) mas para distribuição beta

$$\theta = (\alpha, \beta) \qquad E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

a. Encontre o EMM de θ

$$\mu_1(\theta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \mu_2(\theta) = E[X^2] = Var(X) + (E[X])^2$$

$$= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} + \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha\beta + \alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \alpha\beta + \alpha^2(\alpha+\beta) + \alpha^2$$

$$= \frac{\alpha(\cancel{\alpha+\beta}) + \alpha^2(\cancel{\alpha+\beta})}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = m_1 \quad / \quad \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} = m_2$$

$$\frac{m_1(\alpha+1)}{\alpha+\beta+1} = m_2 \Rightarrow m_1\alpha + m_1 = \alpha m_2 + \beta m_2 + m_2$$

$$m_1\alpha - \alpha m_2 = m_2(\beta+1) - m_1$$

$$\alpha = \frac{m_2(\beta+1) - m_1}{(m_1 - m_2)}$$

$$\beta = \frac{m_1(\alpha+1) - m_2(\alpha+1)}{m_2}$$

$$\beta = \frac{(\alpha+1)(m_1 - m_2)}{m_2}$$