7.4.1

(2) Propagação θ de itens defeituosos em uma grande remessa seja desconhecida e que a distribuição a priori seja:

$$\theta \sim \text{Beta}(\overset{\alpha}{5}, \overset{\beta}{10})$$

N = 20 itens relacionado

Um deles tem defeito

$X \sim \text{Bin}(20, \theta)$, observamos $X = 1$

$$f(X=1 \mid \theta) = \binom{20}{1} \theta^{1} (1-\theta)^{19}$$

$$= 20\, \theta (1-\theta)^{19}$$

$$\xi(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} = \theta^{4} (1-\theta)^{9}$$

$$\xi(\theta \mid X) \propto \xi(\theta) \cdot f(X \mid \theta)$$

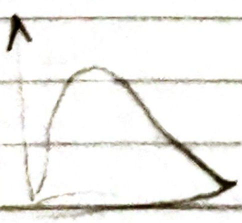
$$\propto \theta^{1} (1-\theta)^{19}\, \theta^{4} (1-\theta)^{9}$$

$$\underbrace{\theta^{5} (1-\theta)^{28}}$$

$$\text{Beta}(\overset{\alpha}{6}, \overset{\beta}{29})$$

estimador

$$\hat{\theta}_{BAYES} = \frac{6}{6+29} = \frac{6}{35}$$



④ Suponha que $x_1, \dots, x_m$

$X \sim Ber(\theta)$

$\theta \sim Beta(\alpha, \beta)$, $\underline{E[\theta] = \mu_0}$

Mostre que $E[\theta | \underline{x}] = \gamma_m \bar{X}_m + (1 - \gamma_m)\mu_0$

$x_1, \dots, x_m$

$f(x_1, \dots, x_m | \theta) = \theta^{s} (1-\theta)^{m-s}$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = S = m\bar{x}_n$

$x_i = \begin{cases} 1, \text{ se cara} \\ 0, \text{ se coroa} \end{cases}$

$(1, 1, 0, 0, 1, \dots, 0, 1) = \theta^{s} (1-\theta)^{n-s}$

$\theta \, \theta \, (1-\theta) \dots (1-\theta)\theta$

$\xi(\theta | X) \propto \xi(\theta) \, f_m(x_1, \dots, x_m | \theta)$

$\propto \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} \theta^{m\bar{x}_m} (1-\theta)^{m - m\bar{x}_m}$

$= \underbrace{\theta^{(\alpha + m\bar{x}_m) - 1} (1-\theta)^{(\beta + m - m\bar{x}_m) - 1}}_{Beta(\alpha + m\bar{x}_m, \; \beta + m - m\bar{x}_m)}$

$E[\theta | \underline{X}] = \dfrac{\alpha + m\bar{x}_m}{\beta + m - \cancel{m\bar{x}_m} + \alpha + \cancel{m\bar{x}_m}}$

$= \dfrac{(\alpha+\beta)\dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)} + m\bar{x}_m}{\alpha + \beta + m}$

$$\underbrace{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+n}}_{1-\gamma_n}\mu_0 + \underbrace{\frac{n}{\alpha+\beta+n}}_{\gamma_n} \qquad \overline{X_n} = \gamma_n \overline{X_n} + (1-\gamma_n)\mu_0$$

$\gamma_n \to 1$

⑦ $X_1, \dots, X_n$

$X_n \sim \text{Poisson}(\theta)$

$\theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, $\cancel{\mathbb{E}[\theta]} = \mu_0$

Mostre que o estimador de Bayes é consistente.

$$\xi(\theta|X) \propto \xi(\theta) \cdot f_n(X|\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}}{\prod (x_i)!}$$

$$\propto e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}$$

$$\xi(\theta|x) \propto \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} e^{-n\theta} \theta^{\sum x_i} = \underbrace{\theta^{(\alpha+\sum x_i)-1} e^{-(\beta+n)\theta}}_{\text{Gamma}(\alpha+\sum x_i,\ \beta+n)}$$

$$\hat{\theta}_{BAYES} = \frac{\alpha+\sum x_i}{\beta+n} \cdot \frac{1/n}{1/n} = \frac{\frac{\alpha}{n}\to 0 + \frac{\sum x_i}{n}}{\frac{\beta}{n}\to 0 + 1} \longrightarrow \mathbb{E}[X]$$

$\frac{\sum x_i}{n} \to \mathbb{E}[X]$

11) Suponha que uma amostra aleatória de tamanho n seja retirada de uma distribuição exponencial

θ desconhecido $\qquad \theta \sim GAMA(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta > 0$

θ deve ser estimado usando a função de perda de erro quadrática. Mostre que os estimadores de Bayes, para $n = 1, 2, \ldots$, formam uma sequência consistente de estimadores de θ.

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n \qquad \theta \text{ desc} > 0$$

Sobre a posterior de θ

$$X_1 = x, \quad X_2 = x_2, \ldots, \quad X_n = x_n$$

$$\alpha_1 = \alpha + n$$

$$\beta_1 = \beta + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Média de X: $\quad E[X] = \dfrac{\alpha}{\beta} \qquad$ Var de X: $\quad Var(X) = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$

Função de perda de erro quad.

$$L(\theta, a) = (\theta, a)^2$$

Estimador de Bayes

$$E(\theta|x) = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha + n}{\beta + \sum x_i} = \frac{\alpha + n}{\beta + n\bar{X}_n} = \frac{1 + \alpha/n}{\bar{X}_n + \beta/n}$$

Pela lei dos grandes números

$$\overline{X_n} \to \frac{1}{\theta}, \quad n \to \infty$$

$n \to \infty$

$$\frac{1 + \alpha/n}{\overline{X_n} + \beta/n} \to \frac{1}{1/\theta} = \theta$$

Com isso podemos concluir que os estimadores de Bayes são consistentes.

1.4

(14) Supomha que $X_1, \ldots, X_n$ formam uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial para a qual o valor do parâmetro θ é desconhecido $(\theta > 0)$. Seja $\xi(\theta)$ denotando a fdp a priori de θ, e seja $\hat{\theta}$ estimador de Bayes de θ em relação à fdp a priori $\xi(\theta)$ quando a função de perda de erro quadrático é usada. Seja $\psi = \theta^2$, e suponha que em vez de estimar θ, se deseja estimar o valor de $\psi = \theta^2$, e supomha que em vez de estimar θ, se deseja estimar o valor de ψ sujeito à seguinte função de perda de erro quadrático.

$$L(\psi, a) = (\psi - a)^2, \quad \text{para } \psi > 0, \quad a > 0$$

Seja $\hat{\psi}$ estimador de Bayes de ψ. Explique por que $\hat{\psi} > \hat{\theta}^2$

* Podemos encontrar a posterior de $\psi = \theta^2$ usando a posterior de θ.

$$\hat{\psi} = E(\psi | X) = E(\theta^2 | X)$$

$\hat{\theta}$ é a média da posterior distrib de θ.

$$\hat{\psi} = E(\psi | X) = E(\theta^2 | X) \geq [E(\theta | X)]^2 = \hat{\theta}^2$$

$$E(\hat{\theta} | X) \geq [E(\theta | X)]^2$$