Mostre que T é suficiente.

(7.7) $X_1, X_2, \ldots X_n$ formam uma amostra aleatória

4) A distribuição Normal para qual a média μ é conhecida e a variância $\sigma^2 > 0$ é desconhecida. $T = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$

$$f(x;\theta) = u(x)\, v[r(x), \theta]$$

$$f(\bar{x}; \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\, \sigma^n}\, e^{\frac{-\sum (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \qquad v[r(x); \sigma^2] = \frac{e^{\frac{-\sum (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{(\sigma^2)^{n/2}}$$

7) " Beta com parâmetros α e β, onde α é desconhecido e β é conhecido

$T = \overline{X_n}$

$$f(x, \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}$$

$$f(\bar{x}, \alpha) = \underbrace{\frac{1}{\Gamma^n(\beta)} \left[\prod_{i=1}^{n} (1-x_i)\right]^{\beta-1}}_{u(x)}\ \underbrace{\frac{\Gamma^n(\alpha+\beta)}{\Gamma^n(\alpha)} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}}_{v[r(x), \alpha]}$$

13) Suponha que $X_1, X_2, \dots X_n$ formem uma amostra aleat. de uma distrib para qual a fdp é $f(x|\theta)$, $\theta \in \Omega$

$T = r(X_1, X_2, \dots, X_n)$ } injetora
$T' = r'(X_1, \dots, X_n)$

T' é suficiente para θ <=> T é suficiente para θ

$f(x|\theta)$ pode ser fatorado como

$$f(x;\theta) = u(x)\ v[r(x);\theta]$$

$\hookrightarrow x = (x_1, x_2, \dots x_n)$

E $r(x)$ é uma função de $r'(x)$, então o teorema se mantém.

16) Seja θ um parametro com espaço Ω igual a um intervalo de números reais
X tem a fdp condicional $f_n(x|\theta)$ em θ. Seja $T = r(x)$ uma estatística. T é suficiente. Prove que para toda fdp a priori possível, para θ, a fdp a posteriori de θ dado $X = x$ depende de x somente através de $r(x)$

T é suficiente para θ

$$f(x,\theta) = u(x)\ v[r(X), \theta)$$

$$\xi(\theta|\bar{x}) = \frac{\xi(\theta) \prod f(x_i|\theta)}{\int \xi(\theta) \prod f(x_i|\theta)\, d\theta} = \frac{v[r(X;\theta]\cdot \xi(\theta)}{\int v[r(X);\theta]\ \xi(\theta)\, d\theta}$$

6) // Gamma com parâmetros α e β, $\underline{\beta}$ conhecido e $\underline{\alpha}$ desconhecido $T = \prod X_i$

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$$

$$f_n(\bar{x}|\theta) = \underbrace{\frac{1}{\Gamma^n(\alpha)} \overbrace{\prod_{i=1}^{n} x_i}^{T}{}^{\alpha-1}} \underbrace{e^{-\beta \Sigma x_i}}$$

$$u(x) = e^{-\beta \Sigma x_i}$$

$$v[r(x); \alpha] = \frac{1}{\Gamma^n(\alpha)} T^{\alpha-1}$$

1) // Bernoulli com parâmetro p desconhecido.

$$f(x\,p) = p^{x} (1-p)^{1-x}$$

$$f_n(\bar{x}\,p) = \underbrace{p^{t} (1-p)^{n-t}}_{v[r(x);\, p]} \qquad u(x) = 1$$