8.1

1) Suponha uma dist. aleatória $X_1, \ldots, X_n$ seja retirado da dist uniforme $[0, \theta]$, onde θ é desconhecido. Quão grande uma amostra deve ser tomada para que

$$Pr(|\underbrace{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}_{Y} - \theta| \leq 0.1\,\theta) \geq 0.95$$

$\forall\, \theta$ possível?

$$F(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(\max\{X_1, \ldots, X_n\} < y)$$

acumulat

$$\mathbb{P}(X_1 \leq y \cap X_2 \leq y \cap \ldots \underbrace{X_n \leq y}_{\frac{X}{\theta}}) = \frac{X^n}{\theta^n}$$

$$= (F(X_1 < y))^n$$

$$F(y) = \begin{cases} 0 \\ \frac{y-a}{b-a} \\ 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ (y/\theta)^n & , 0 < y < \theta \\ 1 & , y > \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Pr(|Y - \theta| \leq 0.1\theta) &= Pr(-0.1\theta \leq Y - \theta \leq 0.1\theta) \\ &= Pr(0.9\theta \leq Y) \\ &= Pr(Y \geq 0.9\theta) \\ &= 1 - \underbrace{Pr(Y < 0.9\theta)} \end{aligned}$$

$$1 - \left(\frac{0.9\cancel{\theta}}{\cancel{\theta}}\right)^n = 1 - 0.9^n$$

$$1 - 0.9^n \geq 0.95$$
$$0.9^n \leq 0.05$$

$$n \log 0.9 \geq \log 0.05$$
$$n \geq \frac{\log 0.05}{\log 0.9} = 28.43$$

$$n \geq 29$$

tilibra

② Suponha que uma amostra aleatória é retirada de uma distribuição normal com média desconhecida θ e desvio-padrão 2. $N(\theta, 2)$. Quão grande deve ser a amostra para que:

$$E_\theta\left(|\bar{X}_n - \theta|^2\right) \leq 0.1$$

$\forall \theta$ possível?

$$E[X] = \mu = \theta$$
$$Var[X] = \sigma^2 = 4$$

$$X_n = \frac{1}{n} \sum x_i \qquad E[X_n] = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \theta \cancel{n} = \theta$$

$$Var[X_n] = \frac{1}{n^n} \sum_1^n 2^2 = \frac{4}{n}$$

$$E_\theta\left(|\bar{X}_n - \theta|^2\right) = E_\theta\left(|\bar{X}_n - E(X_n)|^2\right)$$
$$= Var_\theta(\bar{X}_n) = \frac{4}{n}$$

$$E_\theta\left(|X_n - \theta|^2\right) = \frac{4}{n} \leq 0.1$$

$$n \geq 40$$

③ Para as condições do exercício 2. Quão grande deve ser a amostra para que:

$$E_\theta(|\bar{X}_n - \theta|) \leq 0.1$$

$$E[X_n] = \theta \qquad Var[X_n] = \frac{4}{n} \qquad \sigma[X_n] \sqrt{\frac{4}{n}}$$

$$= E_\theta(|\bar{X}_n - \theta|) = E_\theta(|\bar{X}_n - E(X_n)|)$$

$$E_\theta[Z] = E_\theta\left(\left|\frac{\bar{X}_n - E(X_n)}{\sqrt{4/n}}\right|\right) \qquad Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z \sim N(0,1)$$

$$= E_\theta[Z] \frac{2}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$$

$$E_\theta[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z e^{-z^2/2} dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}$$

$$2\sqrt{\frac{2}{n\pi}} \leq 0.1$$

$$\sqrt{\frac{2}{n\pi}} \leq 0.05 \Leftrightarrow \frac{2}{n\pi} \leq 0.0025$$

$$n \geq \frac{2}{\pi \cdot 0.0025} \Leftrightarrow n \geq 255$$

⑨ Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma exponencial com parâmetro θ. Encontre a c.d.f para o E.M.V de θ.

cumulative density function

$$\hat{\theta} = \frac{n}{T}$$

$$F(x) = \mathbb{P}(\hat{\theta} \leq x)$$

$$= Pr\left(\frac{n}{T} \leq x\right) = \mathbb{P}r\left(T \geq \frac{n}{t}\right)$$

$$F(x) = 1 - Pr\left(T < \frac{n}{t}\right)$$