Chi-Square

8.2

4) Suponha que um ponto (X, Y) seja escolhido ao acaso no plano xy, onde X e Y são aleatórias independentes variáveis e cada uma tem a distribuição normal padrão. Se um círculo é desenhado no ~~ponto~~ plano xy com seu centro na origem qual é o raio do menor círculo que pode ser escolhido para a que haja probabilidade 0,99 de que o ponto (x, y) estará dentro do círculo?

$$Z = X^2 + Y^2 \qquad X_i^2,\ i = 1, 2, \dots, n$$

$$X^2 + Y^2 = r^2 \qquad \sim \chi^2(1)$$

Se P está no círculo: $X^2 + Y^2 \leq r^2$

$$P_r(Z \leq r^2) = 0.99$$

$$Z \sim \chi^2(2)$$

$$r^2 \geq 9210 \rightarrow r = \sqrt{9210}$$

7) Suponha que variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$ são independentes, e cada variável X_i tem f.d.c contínua F_i. $Y = -2\sum_{i=1}^{n} \log F_i(X_i)$

Mostre que Y tem distribuição $\sim \chi^2(2n)$

$n = 1 \qquad Y = -2 \log F_1(X_1)$

$$\mathbb{P}(Y < c) = \mathbb{P}(-2 \log F_1(c_1) < c)$$

$$= \mathbb{P}\left(\log F_1(X_1) > -\frac{c}{2}\right) = \mathbb{P}\left(F_1(X_1) > e^{-\frac{c}{2}}\right)$$

$$1 - \mathbb{P}(F_1(X_1) \leq e^{-c/2})$$

$$1 - \mathbb{P}(X_1 \leq F_1^{-1}(e^{-c/2})) = 1 - F_1(F_1^{-1}(e^{-c/2})) = 1 - e^{-c/2}$$

$$Y \sim \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Gamma}(1, 1/2)$$

$$\sim \chi^2(2)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{-2\log(F_1(x_i))}_{\chi^2(2)} \sim \chi^2(2n)$$

(10) Suponha que 6 variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_6$ formam uma amostra aleatória de uma dist normal padrão.

$$Y = (\underbrace{X_1 + X_2 + X_3}) ^2 + (\underbrace{X_4 + X_5 + X_6})^2$$

Determine o valor de c tal que a variável aleatória cY tenha uma dist χ^2.

$X_i \sim N(0,1)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}} \sim \chi^2(2)$$

$Var(X_1 + X_2 + X_3) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3)$

$= 1 + 1 + 1 = 3$

$$\frac{X_4 + X_5 + X_6}{\sqrt{3}} \sim \chi^2(2)$$

$E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$

$= 0 + 0 + 0 = 0$

$$= \left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{X_4 + X_5 + X_6}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\frac{Y}{3} = \frac{(X_1 + X_2 + X_3)^2}{3} + \frac{(X_4 + X_5 + X_6)^2}{3}$$

tilibra

$$\frac{Y}{3} = \frac{(X_1+X_2+X_3)^2 + (X_4+X_5+X_6)^2}{3}$$

$X_1, \ldots, X_m$ saõ identicamente independente distribuidas com dist normal, entaõ a soma $X_1^2 + \ldots + X_m^2$ é dist chi-square com m graus de liberdade.

$$\frac{Y}{3} \sim \chi^2(2) \qquad c = \frac{1}{3}$$

(13) Prove que a dist de $\hat{\sigma}_0^2$ no EX. 8.2.1 e 8.2.2 é uma dist gamma $\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2\sigma^2}\right)$

$$Y = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} |X_i - \mu|^2 = \frac{\sigma^2}{K}\sum_{i=1}^{K} Z_i^2$$

$X_i \sim N(0,1) \sim \chi^2(1)$

$$V = \frac{m}{\sigma^2} Y \sim \chi^2(m)$$

$$U = \frac{m}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 \sim \chi^2(m)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{m} \cdot \frac{m}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{m} \cdot U \qquad \sim G\left(\frac{m}{2}, ?\right)$$

$$\frac{1/2}{\sigma^2/m} = \frac{m}{2\sigma^2} \qquad \sim G\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2\sigma^2}\right)$$