7.2

2) Suponha que a proporção θ de itens defeituosos em um grande lote fabricado seja 0.1 ou 0.2 e a fdp prior de θ seja a seguinte

$$\xi(0.1) = 0.7 \qquad \xi(0.2) = 0.3$$

Suponha também que, quando oito itens são selecionados aleatoriamente do lote, descobre-se que exatamente dois deles são defeituosos.
Determine a fdp a posteriori de θ.

$$f_m(x|\theta) = \theta^{y}(1-\theta)^{m-y}$$

$m=8 \quad y=2$

$$= \theta^{2}(1-\theta)^{6}$$

$\theta = 0.1$

$$\xi(\theta=0.1|x) = P(\theta=0.1|x)$$

$$= \frac{\xi(0.1)\cdot f_m(x|0.1)}{\xi(0.1)\cdot f_m(x|0.1) + \xi(0.2)\cdot f_n(x|0.2)}$$

$$= \frac{0.7 \cdot 0.1^2 \; 0.9^6}{0.7 \cdot 0.1^2 \; 0.9^6 + 0.3 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^6}$$

fdp a posteriori

$$\xi(0.1|x) = 0.5418$$

$$\xi(0.1|x) + \xi(0.2|x) = 1$$

$$\xi(0.2|x) = 1 - 0.5418 = 0.4522$$

tilibra

③ Suponha que o número de defeitos em um rolo de fita magnética tem distrib de Poisson com parâmetro desconhecido θ. A distrib priori

$$\xi(1.0) = 0.4 \qquad \xi(1.5) = 0.6$$

Foram encontrados 3 defeitos em um rolo. Encontre a distrib aposteriori de θ

Poisson $\quad f(x|\theta) = \dfrac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$

$$\xi(\theta | x=3) = \frac{\xi(\theta) \cdot f(x=3|\theta)}{\sum_{\theta} \xi(\theta) \cdot f(x=3|\theta)}$$

$$\xi(\theta=1.0 | x=3) = \frac{0.4 \cdot 1/6e}{0.4 \cdot 1/6e + 0.6 \cdot (1.5)^3/10e^{1.5}}$$

$f(x=3|\theta=1.0)$

$= \dfrac{e^{-1} \, 1^3}{3!} = \dfrac{1}{6e}$

≈ 0.245

$$\xi(\theta=1.5 | x=3) = \frac{0.6 \cdot (1.5)^3/10e^{1.5}}{0.4 \cdot 1/6e + 0.6 \cdot (1.5)^3/10e^{1.5}}$$

$f(x=3|\theta=1.5)$

$= \dfrac{e^{-1.5} \, 1.5^3}{3!} = \dfrac{1.5^3}{10e^{1.5}}$

$\approx 1 - 0.245 \approx 0.754$

7.2 6) Supondo que a proporção θ de itens defeituosos em um grande lote fabricado seja desconhecida

θ a priori é $U[0,1]$

Foram observados 8 itens, 3 defeituosos.
Qual a posteriori de θ?

$\xi(\theta) = 1, \quad \theta \in [0,1]$

$X \sim Bin(8, \theta)$

$\xi(\theta | X) \propto \xi(\theta) f(X|\theta)$

$f(X|\theta) = \binom{8}{X} \theta^{X} (1-\theta)^{8-X}$

$f(X=3|\theta) = \binom{8}{3} \theta^{3} (1-\theta)^{5}$

$\xi(\theta | X) \propto \theta^{3} (1-\theta)^{5}, \quad \theta \in [0,1]$

$\theta | X \sim Beta(4, 6)$

Pro: $Beta(a_0, \beta_0) = x^{a_0 - 1} (1-x)^{\beta_0 - 1}$

7.2

10). Suponha que uma única observação X seja tirada da distrib uniforme $[\theta - 1/2, \theta + 1/2]$. O valor de θ é desconhecido e a distribuição a priori de θ é a distribuição uniforme no intervalo $[10, 20]$. Se o valor observado de X é 12, qual é a distrib a posteriori de θ?

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1, & \theta - 1/2 < x < \theta + 1/2 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

$$\cancel{\theta} - 1/2 - \cancel{\theta} - x < \cancel{x} - \theta - \cancel{x} < \cancel{\theta} + 1/2 - \cancel{\theta} - x$$

$$-x - 1/2 < -\theta < -x + 1/2$$

$$x - 1/2 < \theta < x + 1/2$$

$$\Updownarrow$$

$$\xi(\theta) = \begin{cases} 1/10, & 10 < \theta < 20 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

$$f(x|\theta)\,\xi(x) = 1 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$ (constante, então é uniforme)

$x = 12$

$$12 - 1/2 < \theta < 12 + 1/2$$
$$11.5 < \theta < 12.5$$

$$\theta \sim U[11.5, 12.5]$$