

# Trabalho IV: Testes uniformemente mais poderosos.

Disciplina: Inferência Estatística  
Professor: Luiz Max de Carvalho

31 de Outubro de 2022

**Data de Entrega: Junto com a A2.**

## Orientações

- Enuncie e prove (ou indique onde se pode encontrar a demonstração) de todos os resultados não triviais necessários aos argumentos apresentados;
- Lembre-se de adicionar corretamente as referências bibliográficas que utilizar e referenciá-las no texto;
- Equações e outras expressões matemáticas também recebem pontuação;
- Você pode utilizar figuras, tabelas e diagramas para melhor ilustrar suas respostas;
- Indique com precisão os números de versão para quaisquer software ou linguagem de programação que venha a utilizar para responder às questões<sup>1</sup>;

## Introdução

Vimos que os testes de hipótese fornecem uma abordagem matematicamente sólida para traduzir hipóteses científicas sobre o processo gerador dos dados em decisões sobre os dados – isto é, traduzir afirmações sobre partições do espaço de parâmetros,  $\Omega$ , em afirmações testáveis sobre o espaço amostral  $\mathcal{X}^n$ .

Um teste  $\delta(\mathbf{X})$  é uma decisão (binária) de rejeitar ou não uma hipótese nula ( $H_0$ ) sobre  $\theta \in \Omega$  com base em uma amostra  $\mathbf{X}$ . A capacidade de um teste de rejeitar  $H_0$  quando ela é falsa é medida pela função poder,  $\pi(\theta|\delta)$ . Nem todos os testes, no entanto, são criados iguais. Em certas situações, é possível mostrar que um procedimento  $\delta_A$  é *uniformemente* mais poderoso que outro procedimento  $\delta_B$  para testar a mesma hipótese.

Neste trabalho, vamos definir e aplicar o conceito de **teste uniformemente mais poderoso**.

---

<sup>1</sup>Não precisa detalhar o que foi usado para preparar o documento com as respostas. Recomendando a utilização do ambiente LaTeX, mas fique à vontade para utilizar outras ferramentas.

## Questões

Dica: ler o capítulo 9.3 de DeGroot.

1. Defina precisamente o que é um teste uniformemente mais poderoso (UMP) para uma hipótese;
2. Defina precisamente o que é uma razão de verossimilhanças monotônica (RVM);
3. Considere uma hipótese nula da forma  $H_0 : \theta \leq \theta_0$ ,  $\theta_0 \in \Omega$ . Suponha que vale o Teorema da Fatorização e a distribuição de  $\mathbf{X}$  tem razão de verossimilhanças monotônica. Mostre que se existem  $c$  e  $\alpha_0$  tais que

$$\Pr(r(\mathbf{X}) \geq c \mid \theta = \theta_0) = \alpha_0, \quad (1)$$

então o procedimento  $\delta^*$  que rejeita  $H_0$  se  $r(\mathbf{X}) \geq c$  é UMP para  $H_0$  ao nível  $\alpha_0$ ;

### 4. Qual é dessa moeda aí?

Suponha que você encontra o Duas-Caras na rua e ele não vai com a sua... cara. Ele decide jogar a sua famosa moeda para o alto para decidir se te dá um cascudo. Se der cara ( $C$ ), você toma um cascudo. Você, que sabe bem Estatística, pede que ele pelo menos jogue a moeda umas  $n = 10$  vezes antes de tomar a decisão derradeira.

Surpreendentemente, ele concorda. Lança a moeda e obtém

KCKCKCCKKK

Você agora deve decidir se foge, se arriscando a tomar dois cascudos ao invés de um, ou se fica e possivelmente não toma cascudo nenhum. Se  $p$  é a probabilidade de dar cara, estamos interessados em testar a hipótese

$$H_0 : p \leq \frac{1}{2},$$
$$H_1 : p > \frac{1}{2}.$$

- (a) Escreva a razão de verossimilhanças para esta situação;
  - (b) Nesta situação, é do seu interesse encontrar um teste UMP. Faça isso e aplique o teste desenvolvido aos dados que conseguiu arrancar do Duas-Caras.
5. (Bônus) Mostre que, no item anterior, não é possível atingir qualquer nível  $\alpha_0$ , isto é, que  $\alpha_0$  toma um número finito de valores. Proponha uma solução para que seja possível atingir qualquer nível em  $(0, 1)$ . (Dica: Ler a seção 9.2 de DeGroot).