Chapter 1

Respostas dos Exercícios do Capítulo 1

Ex. 1 *Note, estamos pedindo apenas espaços amostrais, não estamos pedindo probabilidades:*
a) $S = \{KKK, KKC, KCK, CKK, CCK, CKC, KCC, CCC\}$
b) $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
c) $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
d) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\} = \mathbb{N}^*$
e) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 100\}$
f) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
g) $S = \{$*Flamengo*$\}$ *:) :) :) Tá bom,* $S = \{$*Flamengo, Fluminense, Botafogo, Vasco, ..., São Caetano*$\}$
h) $S = [0, 24]$ *(onde marquei o tempo em horas)*
i) $S = [0, 45]$ *(em Graus Celsius)*
Num mundo de moedas e dados justos, lançamentos independentes e times que não fazem pré-temporada, apenas (a) é eqüiprovável.

Ex. 2 *a) Como* A *e* $\bar{A}$ *são disjuntos:*

$$\Pr\left(A \cup \bar{A}\right) = \Pr(A) + \Pr\left(\bar{A}\right)$$

Mas $A \cup \bar{A} = S$ *e* $\Pr(S) = 1$.
b) Como $\emptyset = \bar{S}$ *e* $\Pr(S) = 1$ *usando o item anterior,* $\Pr(\emptyset) = 1 - \Pr(S) = 0$.
c) Faça um diagrama. Como $B - A$ *e* A *são mutuamente excludentes:*

$$\Pr((B - A) \cup A) = \Pr(B - A) + \Pr(A)$$

Mas a união do lado esquerdo é $A \cup B$*, isto é:*

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B - A)$$

Agora, como $B - A$ *e* $A \cap B$ *são mutuamente excludentes,*

$$\Pr((B - A) \cup (A \cap B)) = \Pr(B - A) + \Pr(A \cap B)$$

e a união do lado esquerdo é B*, Então:*

$$\Pr(B) = \Pr(B - A) + \Pr(A \cap B)$$

Tire $\Pr(B - A)$ *daqui e substitua na outra para acabar o problema.*
d) Vimos ali em cima que

$$\Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

Como, neste caso, $A \subseteq B$*, temos* $A \cap B = A$*, isto é*

$$\Pr(B) - \Pr(A) = \Pr(B - A) \geq 0$$

pois toda probabilidade é maior ou igual a 0*. Acabou.*

Ex. 3 *Desenhe um diagrama de Venn – há 7 pedaços excludentes para* $A \cup B \cup C$*. Escreva cada termo da expressão do lado direito em função destes 7 pedaços, some tudo e veja que, depois de cortar muita coisa, cada pedaço aparece representado apenas uma vez, dando* $A \cup B \cup C$*.*

Ex. 4 *A princípio, temos* $\Pr(A \cap C) = 0$*,* $\Pr(C) = 0.3$*,* $\Pr(A \cap B) = 0.3$*,* $\Pr(B \cap C) = 0.1$*:*

	AB	$A\bar{B}$	$\bar{A}B$	$\bar{A}\bar{B}$	*Total*
C	0	0	0.1		0.3
$\bar{C}$					
Total	0.3				

Como $\Pr(A) = 0.4$ *e* $\Pr(B) = 0.5$*, conseguimos completar dois novos totais:*

	AB	$A\bar{B}$	$\bar{A}B$	$\bar{A}\bar{B}$	*Total*
C	0	0	0.1		0.3
$\bar{C}$					
Total	0.3	$0.4 - 0.3 = 0.1$	$0.5 - 0.3 = 0.2$		

Agora virou Sudoku:

	AB	$A\bar{B}$	$\bar{A}B$	$\bar{A}\bar{B}$	*Total*
C	0	0	0.1	0.2	0.3
$\bar{C}$	0.3	0.1	0.1	0.2	0.7
Total	0.3	0.1	0.2	0.4	1

a) 0 *b)* 0.5 *c)* 0.3 *d)* 0.1 *e)* 0.8

Ex. 5 *Entre* 0.1 *e* 0.6*.*

Ex. 6 *Fazendo* $S = \{CCC, CCK, CKC, KCC, KKC, KCK, CKK, KKK\}$ *é razoáve usar um modelo eqüiprovável.*
Como $A = \{CCC, CCK, KKC, KKK\}$*,* $B = \{KCC, KCK, KKC, KKK\}$ *e* $C = \{KKK, CCK, CKC, KCC, KKC, KCK, CK$
temos:
$\Pr(A) = \frac{4}{8}$*;* $\Pr(B) = \frac{4}{8}$*.* $\Pr(C) = \frac{7}{8}$
$\bar{A}$ *:dois primeiros resultados diferentes, probabilidade* $\frac{4}{8}$
$\bar{C}$ *:nenhuma cara, todas são coroas, probabilidade* $\frac{1}{8}$
$A \cap B$*: duas caras nos dois primeiros lançamentos,* $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
$B \cap C$*: o primeiro é cara, que é* B *de novo, com* $\frac{4}{8}$ *de chance.*
$B \cup C$*: basta uma cara, que é* C *de novo, com* $\frac{7}{8}$ *de chance.*
$A \cup B$*: cara de primeira ou duas coroas nas duas primeiras,* $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ *de chance.*

Ex. 7 *É quase igual ao anterior, mas* CCC *e* CCK *viram simplesmente* CC*, enquanto* KKC *e* KKK *viram simplesmente* KK *(pois o jogo acaba dois a zero). Agora* $A = \{CC, KK\}$*,* $B = \{KK, KCK, KCC\}$ *e* $C = \{KK, CCK, CKC, KCC, KCK\}$ *(note como* CCK *some daqui, pois esta última coroa não exisitirá). As probabilidades que envolvem* A *e* B *não mudam, mas* C *mudou:* $\Pr(C) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$*,* $\Pr(\bar{C}) = \frac{1}{4}$*,* $\Pr(B \cup C) = \Pr(C) = \frac{6}{8}$ *e* $\Pr(B \cap C) = \Pr(B) = \frac{4}{8}$*.*

Ex. 8 *Probabilidade* $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$*, que não se altera se os dados forem da mesma cor.*

Ex. 9 $\frac{5}{11}$

Ex. 10 $\frac{2}{n-1}$

Ex. 11 $\frac{2}{n}$

Ex. 12 *a)* $\frac{1}{2}$ *b)* $\frac{4950}{10000} = 49.5\%$

Ex. 13 *Não. Podia ser* $\Pr(ABC) = \Pr(BCA) = \Pr(CAB) = \frac{1}{3}$ *e as outras três ordens impossíveis, por exemplo.*

Ex. 14 *Serão mutuamente excludentes quando* $b-a<1$ *ou* $b-a>6$.

Ex. 15 ([EXCEL]) *Pense na probabilidade de NÃO haver par algum de aniversário repetidos, depois use a lei do complemento. A probabilidade de HAVER uma coincidência é:*

$$1-\frac{365.364.363....(365-n+1)}{365^n}$$

Surpreendentemente, $n=23$ *já dá mais de* 50% *de chance.*

Ex. 16 (*) *a) Jogando tudo duma vez,* $\Pr(\text{prêmio})=\frac{10}{100}=10\%$. *JOgando uma vez por semana, a chance de não ganhar nada é* $\left(\frac{99}{100}\right)^{10}=90.4382\%$, *então a chance de ganhar alguma coisa é*

$$1-\left(\frac{99}{100}\right)^{10}=9.5618\%<10\%$$

Se você só quer ganhar ALGUMA coisa, melhor jogar tudo de uma vez.
b) Use cálculo, encontre o mínimo de $f(x)$ *em* $(-1,\infty)$, *que será* $f(0)=0$.
c) Agora as probabilidades de ganhar são

$$\begin{aligned}\textit{Jogando tudo de uma vez} &: \frac{n}{N}\\ \textit{Jogando em } n \textit{ sorteios} &: 1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\end{aligned}$$

Mas, tomando $x=-\frac{1}{N}$ *no item (b), conclui-se que*

$$f\left(-\frac{1}{N}\right)=\left(1-\frac{1}{N}\right)^n-\left(1-\frac{n}{N}\right)\geq 0$$

isto é

$$1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\leq\frac{n}{N}$$

Melhor jogar tudo de uma vez!

Ex. 17 $\frac{1}{6}$

Ex. 18 *Árvore. Dá* $\frac{8}{68}$.

Ex. 19 *Tá errado pra caramba. Se fossem* 60% *das mulheres e* 55% *dos homens, seriam* 115% *dos brasileiros? Não se somam laranjas com bananas assim! Faríamos o problema com uma média ponderada de* 12% *e* 35%, *ponderada pela quantidade de homens e mulheres no Brasil. Se for meio a meio, então seria*

$$\frac{12+35}{2}\%=23.5\%$$

dos brasileiros.

Ex. 20 *Ambas as probabilidades são* 50%. *São independentes, mas não são mutuamente excludentes.*

Ex. 21 *Agora as probabilidades são* 78.4% *para Kuerten vencer o jogo;* 58% *de acabar em dois sets. E, sabido que acabou em dois sets, Kuerten sobe para* $\frac{49}{58}=84.483\%$ *de chance de vencer, então estes eventos não são independentes. Também não são mutuamente excludentes – Kuerten pode vencer* 2 *a* 0.

Ex. 22 $\Pr(A)=\frac{7}{27}$; $\Pr(B)=\frac{2}{3}$; $\Pr(A \text{ e } B)=\frac{2}{27}$; $\Pr(A|B)=\frac{2/27}{2/3}=\frac{1}{9}$. *Não são independentes, nem excludentes.*

Ex. 23 *Tabela começa assim:*

	R	$\bar{R}$	
M			0.2
$\bar{M}$		0.2	
	0.7		1.0

Complete a la Sudoku:

	R	$\bar{R}$	
M	0.1	0.1	0.2
$\bar{M}$	0.6	0.2	0.8
	0.7	0.3	1.0

Como $\Pr(Ralph) = 0.7 \neq \Pr(Ralph|Morgado) = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$ *os eventos não são independentes.*

Ex. 24 *Não se somam probabilidades de eventos que não são mutuamente excludentes! A resposta correta é*

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} = 51.77\%$$

Ex. 25 *Agora, a probabilidade é*

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 49.14\%$$

Ex. 26 *Seja* n *o número de lançamentos. A probabilidade de não obter um* 6 *é*

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Queremos

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0.1 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 0.1}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 12.629$$

Então $n = 13$ *lançamentos serve.*

Ex. 27 (Bertrand´s Box) $\frac{2}{3}$

Ex. 28 (Monty Hall) *Troque, pois a chance da outra porta ter o prêmio é* $\frac{2}{3}$.

Ex. 29 $\frac{2}{3}$ *de novo (é igual ao da caixa acima).*

Ex. 30 *Tabela em milhões:*

	Brancos	*Negros*	*Outros*	*Total*
Supervisão	3.4	2.15	0.95	6.5
Livre	$170 - 3.4 = 166.6$	$23.89 - 2.15 = 21.74$	$73.08 - 0.95 = 72.13$	260.47
Total	$\frac{3.4}{0.02} = 170$	$\frac{2.15}{0.09} = 23.89$	$\frac{0.95}{0.013} = 73.08$	266.97

a) $\frac{6.5}{266.97} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{266.97}{6.5} = 41.072$
b) Dados do problema! São 9% *e* 2%*, respectivamente.*
c) $\frac{2.15}{6.5} = 33.08\%$ *para negros e* $\frac{3.4}{6.5} = 52.31\%$ *para brancos*
d) $\frac{21.74}{260.47} = 8.35\%$ *e* $\frac{166.6}{260.47} = 63.96\%$
e) Não. $\Pr(Supervisão|Branco) = 2\% < \frac{6.5}{266.97} = 2.434\% = \Pr(Supervisão)$

Ex. 31 *Dá* 49% *e uns quebrados.*

Ex. 32 *Sim, sim, sim e não.*

Ex. 33

$$\begin{aligned} \Pr(A|B) &= \Pr(A) \Rightarrow \Pr(B|A) = \Pr(B) \Rightarrow 1 - \Pr\left(\bar{B}|A\right) = 1 - \Pr\left(\bar{B}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Pr\left(\bar{B}|A\right) = \Pr\left(\bar{B}\right) \Rightarrow \Pr\left(A|\bar{B}\right) = \Pr(A) \end{aligned}$$

Ex. 34 (*) *Difícil este, leia com MUITO cuidado: eu jogo $n+1$ moedas, você joga n. Note que eu tenho mais coroas* ***ou*** *mais caras com (pois eu tenho mais moedas), mas não ambos (porque eu só tenho UMA moeda a mais, não dá para eu ganhar em caras e em coroas também). Por simetria, a chance de eu ter mais caras é igual à chance de eu ter mais coroas. Assim, a probabilidade é $\frac{1}{2}$.*

Ex. 35 *a) Sim*

$$A \downarrow B \Rightarrow \Pr(B|A) < \Pr(B) \Rightarrow \Pr(A \text{ e } B) < \Pr(A)\Pr(B) \Rightarrow \Pr(A|B) < \Pr(A) \Rightarrow B \downarrow A$$

b) Falso. Por exemplo, se $A = C$, está obviamente errado.
c) Falso. Por exemplo, se $\Pr(ABC) = 10\%$ e $\Pr\left(A\bar{B}\bar{C}\right) = \Pr\left(\bar{A}B\bar{C}\right) = \Pr\left(\bar{A}\bar{B}C\right) = 30\%$, note que A repele B e que C repele B, mas A e C juntos ATRAEM B.

1.1 Exercícios de Provas

Ex. 36 (A1 2004.2) $S = \{VVV, VVA, VAV, AVV, AAV, AVA, VAA, AAA\}$ *com probabilidades respectivamente de* $\frac{1}{27}$, $\frac{2}{27}$, $\frac{2}{27}$, $\frac{2}{27}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{4}{27}$ *e* $\frac{8}{27}$.
a) $\Pr(X?X) = \frac{1+2+4+8}{27} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$
b) $\Pr(XXX|XX?) = \frac{1+8}{1+2+4+8} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

Ex. 37 (A1 2004.2) *a) Mais provável de ter 0 filhos, com 29% de chance.*
b) Mais provável é 1 filho, com $\frac{0.22}{1-0.29} = \frac{22}{71} = 30.99\%$ *de chance.*
c) Supondo uma amostra fictícia de 100 mulheres, são

$$(29)(0) + (16)(1) + (22)(2) + (15)(3) + (8)(4) + (4)(5) + (3)(6) + 7 + 8 + 9 = 199 \text{ filhos}$$

A chance de ser filho único é $\frac{16}{199} = 8.04\%$

Ex. 38 (AS 2004.2) *a)* $\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 40.19\%$
b) $\frac{5}{6}\frac{4}{6}\frac{3}{6}\frac{2}{6} = 9.26\%$
c) 5 provas no mesmo dia com chance $\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$
4 provas num dia e uma no outro: há 5 opções para a "outra prova". As outras 4 caem juntas com $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ *de chance, e sobram* $\frac{5}{6}$ *para a prova singular. Total:*

$$5\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{25}{1296}$$

Total: $\frac{26}{1296} = 2.01\%$

Ex. 39 (AS 2005.2) *Gemigemi é Kuerten e Xarapova é Ralph do problema acima. Então:*
a) $\Pr(\textit{Berrando vencer}) = 78.4\%$
b) $\Pr(\textit{2 sets}) = 58\%$
c) $\Pr(\textit{Berrando 2 a 0}) = 49\%$
d) $\Pr(\textit{2 a 0} \mid \textit{Berrando venceu}) = \frac{49}{78.4} = 62.5\%$

Chapter 2

Respostas dos Exercícios do Capítulo 2

Ex. 1

$$\begin{aligned}
\Pr(X_1=0) &= \frac{6}{10}\frac{5}{9}=\frac{30}{90}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}\\
\Pr(X_1=1) &= 2\left(\frac{24}{90}\right)=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}\\
\Pr(X_1=2) &= \frac{4}{10}\frac{3}{9}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}
\end{aligned}$$

Ex. 2

$$\begin{aligned}
\Pr(X_2=0) &= \frac{6}{10}\frac{5}{9}\frac{4}{8}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}\\
\Pr(X_2=1) &= 3\left(\frac{6}{10}\frac{5}{9}\frac{4}{8}\right)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}\\
\Pr(X_2=2) &= 3\left(\frac{6}{10}\frac{4}{9}\frac{3}{8}\right)=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}\\
\Pr(X_2=3) &= \frac{4}{10}\frac{3}{9}\frac{2}{8}=\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

Ex. 3

$$\begin{aligned}
\Pr(Cara) &= 80\%\\
\Pr(X_3=0) &= (0.2)^4=0.0016\\
\Pr(X_3=1) &= 4(0.2)^3(0.8)=0.0256\\
\Pr(X_3=2) &= 6(0.2)^2(0.8)^2=0.1536\\
\Pr(X_3=3) &= 4(0.2)(0.8)^3=0.4096\\
\Pr(X_3=4) &= (0.8)^4=0.4096\\
\Pr(1\le X_3<3) &= 0.0256+0.1536=0.1792
\end{aligned}$$

Ex. 4 *A cada set, o vencedor pode ser K ou C (como no capítulo anterior). Sabemos que* $\Pr(KK)=\Pr(CC)=\frac{1}{4}$*, portanto* $\Pr(X_4=2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$*. A outra única opção é 3 sets, isto é,* $\Pr(X_4=3)=\frac{1}{2}$ *também. A distribuição é:*

x_3	2	3
$p(x_3)$	0.5	0.5

Ex. 5 *a) As marginais estão às margens da tabela:*

$Y_5 \backslash X_5$	*1*	*2*	*3*	*Marginal de* Y_5
0	0.1	0.2	0.3	0.6
1	0.3	0	0.1	0.4
Marginal de X_5	0.4	0.2	0.4	

b) Dado que $Y_5 = 1$*, temos*

x	1	2	3
$\Pr(X_5 = x \vert Y_5 = 1)$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

c)

$$\begin{aligned} \Pr(X_5 \geq 2) &= 0.6 \\ \Pr(Y_5 = 0 \ e \ X_5 \geq 2) &= 0.5 \\ \Pr(Y_5 = 0 \mid X_5 \geq 2) &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

d) Não, pois, $\Pr(X_5 = 2 \mid Y_5 = 1\ ) = 0 \neq \Pr(X_5 = 2) = 20\%$*, por exemplo.*
e) Calcule o valor de Z_5 *em cada uma das "células" acima. Eles variam de* $Z_5 = 1$ *(quando* $X_5 = 2$ *e* $Y_5 = 1$*) até* $Z_5 = 6$ *(para* $(X_5, Y_5) = (3, 0)$*).*

z	1	2	3	4	5	6
$\Pr(Z_5 = z)$	0.3	0.1	0	0.2	0.1	0.3

ou seja,

z	1	2	4	5	6
$\Pr(Z_5 = z)$	0.3	0.1	0.2	0.1	0.3

Ex. 6 *a)*

$X_6 \setminus Y_6$	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

b)

x	0	1
$\Pr(X_6 = x \vert Y_6 = 1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

c)

x	0	1
$\Pr(X_6 = x \vert Y_6 \leq 4)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

d) Sim. Note como $\Pr(X_6 = i; Y_6 = j) = \Pr(X_6 = i)\Pr(Y_6 = j)$ *para todo* $i \in \{0, 1\}$ *e* $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*.*
e) Calculando o valor de Z_6 *em cada célula:*

z	0	1	2	3	4	5	6
$\Pr(Z_6 = z)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Ex. 7 *a) Há* 25 *pares possíveis. Monte a tabela com todas as opções e veja os valores de* X_7 *e* Y_7 *em cada opção.*

$Y_7 \downarrow \quad X_7 \rightarrow$	-2	-1	0	1	2
-2	0.04	0	0	0	0
-1	0.08	0.04	0	0	0
0	0.08	0.08	0.04	0	0
1	0.08	0.08	0.08	0.04	0
2	0.08	0.08	0.08	0.08	0.04

b) Somando por colunas, temos a distribuição marginal de X_7

x	-2	-1	0	1	2
$\Pr(X_7 = x)$	0.36	0.28	0.20	0.12	0.04

c) Note que $\Pr(Y_7 = 0) = 0.08 + 0.08 + 0.04 = 0.2$*. Dividindo* ***aquela*** *linha por este valor, encontramos na distribuição condicional pedida:*

x	-2	-1	0	1	2
$\Pr(X = x \mid Y = 0)$	0.40	0.40	0.20	0.00	0.00

d)

$$\begin{aligned}\Pr(X_7 \le 0 \text{ e } Y_7 = \pm 1) &= (0.08)(4) + (0.04) = 0.36 \\ \Pr(Y_7 = \pm 1) &= \Pr(Y_7 = 1) + \Pr(Y_7 = -1) = 0.40 \\ \Pr\left(X_7 \le 0 \mid (Y_7)^2 = 1\right) &= \frac{0.36}{0.40} = 90\%\end{aligned}$$

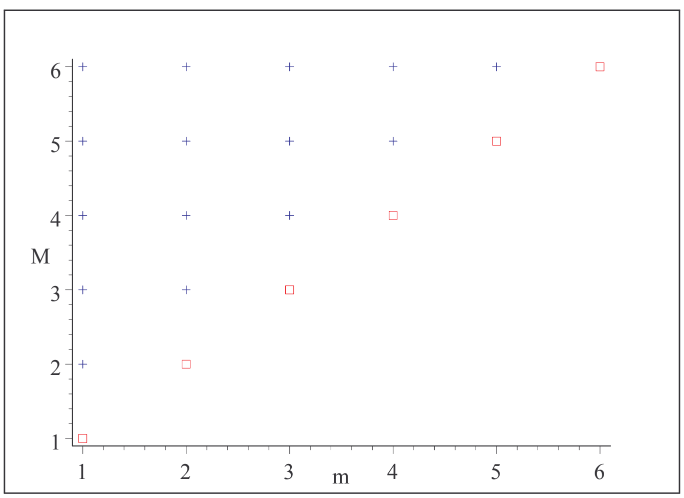
e)

x	0	1	2	3	4
$\Pr(Y_7 - X_7 = x)$	0.20	0.32	0.24	0.16	0.08

Ex. 8 *A distribuição conjunta (com as marginais nas margens) é:*

$M \downarrow \ m \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	Marginal de M
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{3}{36}$
3	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{7}{36}$
5	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{9}{36}$
6	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{36}$
Marginal de m	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

O diagrama de dispersão é algo assim (cruzes são $\frac{2}{26}$*, quadrados são* $\frac{1}{36}$*):*



Ex. 9 *Basta notar que os eventos* $X \in (a, b]$ *e* $X \in (-\infty, a)$ *são mutuamente excludentes e sua união é* $(-\infty, b]$*. Então*

$$\Pr(a < X \le b) + \Pr(X < a) = \Pr(X \le b)$$

como queríamos demonstrar.

Ex. 10 *Este exige criatividade. Em primeiro lugar, convença-se de que o mínimo e o máximo são iguais se, e somente se, os dois números são iguais, isto é:*

$$M = m = a \Leftrightarrow X = Y = a$$

Segundo, pelo menos um dentre máximo e mínimo é a se, e somente se, pelo menos um dos X e Y é a:

$$(M = a \text{ ou } m = a) \Longleftrightarrow (X = a \text{ ou } Y = a)$$

A parte difícil está nas linhas de cima, leia-as com calma. Depois, é só calcular a probabilidade deste último evento (que pode ser escrita de dois jeitos):

$$\Pr(M = a \text{ ou } m = a) = \Pr(X = a \text{ ou } Y = a)$$

Use a lei da adição dos dois lados:

$$\Pr(M = a) + \Pr(m = a) - \Pr(M = m = a) = \Pr(X = a) + \Pr(Y = a) - \Pr(X = Y = a)$$

Mas os eventos dentro das probabilidades subtraídas são idênticos! Corte-os:

$$\Pr(M = a) + \Pr(m = a) = \Pr(X = a) + \Pr(Y = a)$$

como queríamos demonstrar.

Ex. 11 *Faça cada caso no braço. A tabela a seguir mostra cada caso de n e a distribuição correspondente de X (colocamos cada linha no mesmo denominador):*

	$\Pr(X=0)$	$\Pr(X=1)$	$\Pr(X=2)$	$\Pr(X=3)$	$\Pr(X=5)$	$\Pr(X=5)$
$n=1:$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
$n=2:$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$			
$n=3:$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		
$n=4:$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	
$n=5:$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

O padrão ***parece*** *ser: numeradores são números binomais; denominadores são potências de 2. Parece que*

$$\Pr(X = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{C_n^k}{2^n} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{2^n}$$

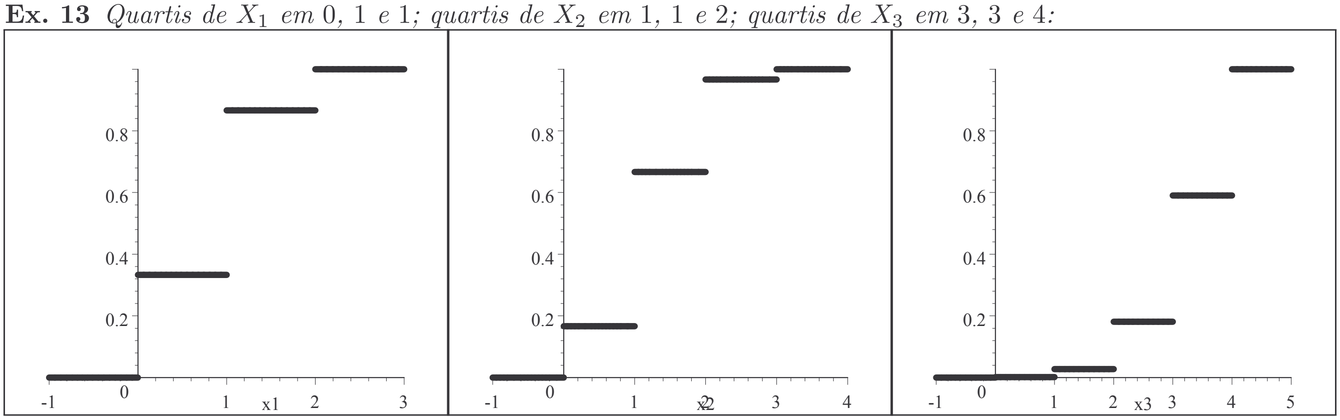
Você consegue justificar isto?
a) A resposta final será dada no próximo capítulo:

$$\Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

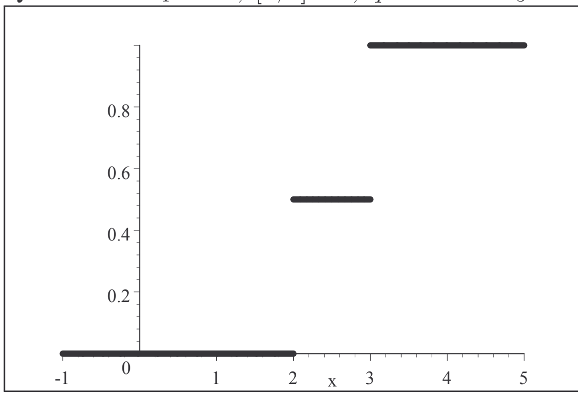
Ex. 12 *Se a primeira cara foi no lançamento g, então tivemos $g-1$ coroas (cada uma tem probabilidade $1-p$ de acontecer) e, em seguida, uma cara (probabilidade p). Esta seqüência de coroas cara tem probabilidade:*

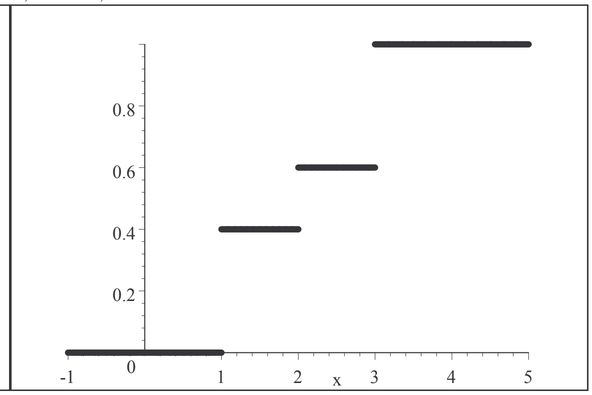
$$\Pr(G = g) = (1-p)^{g-1}\, p$$

Ex. 13 *Quartis de X_1 em 0, 1 e 1; quartis de X_2 em 1, 1 e 2; quartis de X_3 em 3, 3 e 4:*

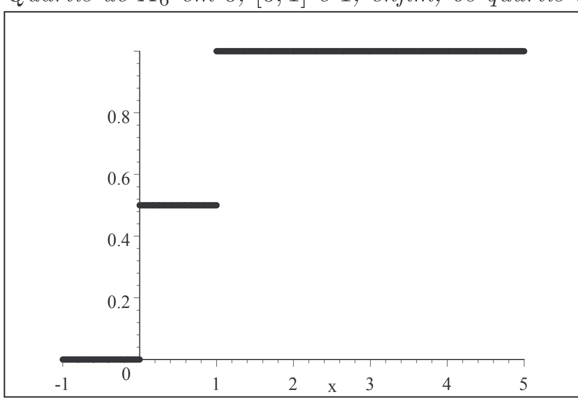


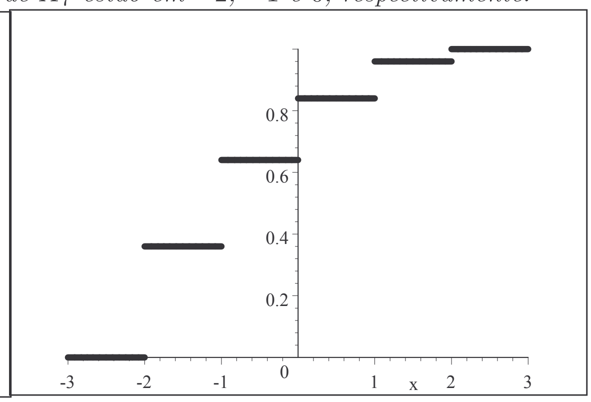
Quartis de X_4 em 2, $[2,3]$ e 3; quartis de X_5 em 1, 2 e 3;





Quartis de X_6 em 0, $[0,1]$ e 1; enfim, os quartis de X_7 estão em -2, -1 e 0, respectivamente:





Ex. 14 *Tínhamos, para $g > 0$,*

$$\Pr(G = g) = (1-p)^{g-1} p$$

Portanto, para $n \in \mathbb{N}$ positivo,

$$F(n) = \sum_{g=1}^{n} (1-p)^{g-1} p$$

que é a soma dos termos de uma P.G. de razão $(1-p)$. Assim:

$$F(n) = p\frac{(1-p)^{n-1} - 1}{(1-p) - 1} = 1 - (1-p)^{n-1}$$

Seu q-quantil satisfaz:

$$\begin{aligned} F(n) &= 1 - (1-p)^{n-1} \geq q \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1-p)^{n-1} \leq 1 - q \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (n-1)\ln(1-p) \leq \ln(1-q) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n - 1 \geq \frac{\ln(1-q)}{\ln(1-p)} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(1-q)}{\ln(1-p)} + 1 \end{aligned}$$

Isto é, o q-quantil será

$$n = \left\lfloor \frac{\ln(1-q)}{\ln(1-p)} \right\rfloor + 2$$

onde $\lfloor x \rfloor$ representa a parte inteira de x. Se por acaso $\frac{\ln(1-q)}{\ln(1-p)}$ for inteiro, então o quantil será o intervalo fechado

$$\left[\frac{\ln(1-q)}{\ln(1-p)} + 1, \frac{\ln(1-q)}{\ln(1-p)} + 2\right]$$

Ex. 15 *Qualquer variável aleatória cuja função acumulada passe direto de < 0.25 para > 0.75 serve. Para exagerar de vez, seja $X = 5$ com 100% de chance – todos os quartis de X são 5.*

Ex. 16 *Note como a distribuição de X_4 é a distribuição de $X_6 + 2$, e portanto suas variâncias são iguais:*

i	1	2	3	4	5	6	7
$E(X_i)$	$\frac{8}{10} = 0.8$	$\frac{12}{10} = 1.2$	$\frac{16}{5} = 3.2$	$\frac{5}{2} = 2.5$	2	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{-4}{5} = -0.8$
$E(X_i^2)$	$\frac{16}{15} = 1.0667$	2	$\frac{272}{25} = 10.88$	$\frac{13}{2} = 6.5$	$\frac{24}{5} = 4.8$	$\frac{1}{2} = 0.5$	2
$Var(X_i)$	$\frac{32}{75} = 0.4267$	$\frac{14}{25} = 0.56$	$\frac{16}{25} = 0.64$	$\frac{1}{4} = 0.25$	$\frac{4}{5} = 0.8$	$\frac{1}{4} = 0.25$	$\frac{34}{25} = 1.36$
$\sigma(X_i)$	$\frac{4\sqrt{6}}{15} = 0.6532$	$\frac{\sqrt{14}}{5} = 0.7483$	$\frac{4}{5} = 0.8$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{2\sqrt{5}}{5} = 0.8944$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{\sqrt{34}}{5} = 1.1662$
$DM(X_i)$	$\frac{8}{15} = 0.5333$	$\frac{3}{5} = 0.6$	$\frac{2048}{3125} = 0.65536$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{4}{5} = 0.8$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{122}{125} = 0.976$

Ex. 17

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= Var(X) + (E(X))^2 = 7 + 25 = 32 \\ E\left(X^2 + 2X + 5\right) &= E\left(X^2\right) + 2E(X) + E(5) = 32 + 10 + 5 = 47 \\ Var(2X + 5) &= 2^2 Var(X) = 28 \end{aligned}$$

Ex. 18 $E(Z) = 0$ *e* $Var(Z) = 1$.

Ex. 19 *a) Jogo A: $E(X) = \$50$ mil; $Var(X) = 2.5 \times 10^9 (\$)^2$; $\sigma(X) = \$50$ mil.*
Jogo B: $E(X) = \$45$ milhões; $Var(X) = 3.025 \times 10^{15} (\$)^2$; $\sigma(X) = \$55$ milhões.
b) Esta resposta é pessoal, mas eu prefiro o jogo A pois não tenho como pagar \$10 milhões nunca (bom, partindo do pressuposto que serei ***forçado*** *a pagar até meu último centavo!).*
c) Aí eu arrisco o jogo B. A chance de eu sair no prejuízo é tão pequena, que eu resolvo arriscar (para ser exato, aprenderemos mais tarde a calcular a chance de sair no prejuízo no jogo B; a chance é de 1.66×10^{-18}, isto é, 0.000000000000000166%).

Ex. 20 *a) $E(X) = \$\frac{-2}{38} = -\$0.05263$; $Var(X) = \frac{360}{361} = 0.99723 (\$)^2$ e $\sigma(X) = \frac{6\sqrt{10}}{19} = \$0.9986$.*
b) Isto seria uma péssima idéia. Você ganha \$0 com $\frac{36}{38}$ de chance, e perde \$2 com $\frac{2}{38}$ de chance. O valor esperado é $\frac{-2}{19} = \$ - 0.10526$, a variância é $0.19945 (\$)^2$ e o desvio-padrão é \$0.4466.
c) O lucro esperado é o mesmo de apostar no vermelho: $-\frac{2}{38} = -\$0.05263$. Mas esta aposta é mais arriscada, e sua variância é maior: $33.2078 (\$)^2$ ou desvio-padrão de \$5.7626.
d) Para a letra a, temos

$$E(X) = -\frac{1}{37} = -\$0.02703;\ Var(X) = \frac{1368}{1369} = 0.9993 (\$)^2;\ \sigma(X) = \frac{6\sqrt{38}}{37} = \$0.999634\,7$$

Para a letra b, a idéia ainda é bem ruim:

$$E(X) = -\frac{2}{37} = -\$0.05405;\ Var(X) = 0.20760 (\$)^2;\ \sigma(X) = \$0.45564$$

Enfim, para a letra (c), temos

$$E(X) = -\frac{1}{37} = -\$0.02703;\ Var(X) = 34.08035 (\$)^2 \text{ e } \sigma(X) = \$5.8378$$

Ex. 21 *a)*

x	0	1	2
$p(x)$	$(0.2) + (0.3)(0.6) + (0.5)(0.6)^2 = 56\%$	$(0.3)(0.4) + 2(0.5)(0.4)(0.6) = 36\%$	$(0.5)(0.4)^2 = 8\%$

b)

$$E(X) = 0.52 \text{ vendas};\ E\left(X^2\right) = 0.68 \text{ vendas}^2;\ Var(X) = 0.4096 \text{ vendas}^2;\ \sigma(X) = 0.64 \text{ vendas}$$

Ex. 22 *a)* $S = \{KKK, KKC, KCK, CKK, KCC, CKC, CCK, CCC\}$ *(espaço eqüiprovável)*
b) Primeiro note os valores de X *em cada caso acima. Respectivamente, os valores de* X *são* 1, 2, 3, 2, 2, 3, 2 *e* 1*. Assim, a função de probabilidade de* X *é*

x	1	2	3
$p(x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

Portanto

$$E(X) = 2;\ E\left(X^2\right) = \frac{9}{2} = 4.5;\ Var(X) = 0.5$$

Ex. 23 *Se acreditar*

$$E(ganho) = ap - b(1-p)$$

Se não acreditar

$$E(ganho) = -cp$$

O valor esperado do ganho seria maior no primeiro caso sempre que

$$ap - b(1-p) > -cp$$

ou seja, se e somente se,

$$p > \frac{b}{a+b+c}$$

A idéia de Pascal era que a *e* c *eram muito grandes, enquanto* b *era "pequeno", e portanto valeria a pena acreditar em Deus. Note que isto não é um argumento que prova que Deus existe – é apenas um argumento para acreditar em Deus! Também note que o argumento nada diz sobre as pessoas que acreditam em Deus apenas para aumentar o valor esperado de seu ganho (será que o valor de* a *mudaria neste caso?).*

Ex. 24 *Seja* a *o número de tortas a serem levadas e* Y *o número de tortas vendidas. Então*

$$Y = \begin{cases} X, \text{ se } X \leq a \\ a, \text{ caso } X > a \end{cases}$$

O lucro será

$$R = 50Y - 20a$$

Segue abaixo a distribuição de Y *para cada caso, seu valor esperado e* $E(L) = 50E(Y) - 20a$*:*

$a \backslash Y$	0	1	2	3	$E(Y)$	$E(L)$
0	1	0	0	0	0	\$0
1	0.2	0.8	0	0	0.8	\$20
2	0.2	0.3	0.5	0	1.3	\$25
3	0.2	0.3	0.3	0.2	1.5	\$15

Para maximizar $E(L)$*, devemos levar 2 tortas por dia (e esperamos então \$25 de lucro por dia, na média).*

Ex. 25

$$f(t) = E\left((X-t)^2\right) = E\left(t^2 - 2tX + E\left(X^2\right)\right) = t^2 - 2E(X)t + E\left(X^2\right)$$

que é uma função quadrática em t *com coeficiente 1 em* t^2 *(parábola voltada para cima). O mínimo será atingido quando*

$$t = -\frac{b}{2a} = \frac{2E(X)}{2} = E(X)$$

e, neste caso, este mínimo será

$$f(E(X)) = E\left((X - E(X))^2\right) = Var(X)$$

Ex. 26 *Como X e Y são independentes:*

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \alpha E(X) + (1-\alpha)E(Y) = \alpha\mu + (1-\alpha)\mu = \mu \\ Var(Z) &= Var(\alpha X) + Var((1-\alpha)Y) = \alpha^2 Var(X) + (1-\alpha)^2 Var(Y) = \left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\alpha^2 - 2\sigma_2^2\alpha + \sigma_2^2 \end{aligned}$$

cujo valor mínimo se dá quando

$$\alpha = -\frac{-2\sigma_2^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \frac{Var(Y)}{Var(X)+Var(Y)}$$

Fazendo muitas contas, a variância de Z para este α será:

$$Var(Z) = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

Por exemplo, se as variâncias forem iguais, então $\alpha = \frac{1}{2}$ e fazemos simplesmente a média de X e Y. Neste caso, $Var(Z) = \frac{\sigma_1^2}{2}$! Se X for exata (isto é, $\sigma_1 = 0$), use $\alpha = 1$, isto é, use $Z = X$ e ignore Y. Se Y for exata, use $\alpha = 0$, fazendo $Z = Y$ e ignorando X.

Ex. 27

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1+2+3+...+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2} \\ E\left(X^2\right) &= \frac{1^2+2^2+...+n^2}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \\ Var(X) &= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

Ex. 28

$$E(X) = E\left(X^2\right) = p;\ Var(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

Ex. 29

$$\begin{aligned} a)\ E(X_i) &= \frac{1}{5}(4) - \frac{4}{5}(1) = 0;\ Var(X_i) = 4 pontos^2 \\ b)\ E(Total) &= E(X_1) + ... + E(X_{80}) = 0;\ Var(Total) = Var(X_1) + ... + Var(X_{80}) = 320\ pontos^2 \end{aligned}$$

Ex. 30 *Em ambos os jogos, $E(\text{prêmio}) = \$350$, mas no primeiro caso $Var(\text{prêmio}) = \frac{875}{3} = 291.6667\,(\$)^2$ enquanto no segundo caso $Var(\text{prêmio}) = 29166.67\,(\$)^2$ (cem vezes maior!). A preferência é pessoal – se você gosta de arriscar para tentar ganhar até \$600, vá com a segunda opção. Se você quiser garantir seus \$350, fique com a primeira.*

Ex. 31 *Seja p o prêmio por sorteio. Em ambos os casos, $E(total) = 0.1p$. Só que, no primeiro caso, a variância é $0.09p^2$ e no segundo é um tanto maior: $0.099p^2$. Ou seja, se você prefere garantir o prêmio, compre tudo de uma vez; se você topa arriscar um pouco mais (e, quem sabe, ganhar mais de um prêmio), compre um de cada vez.*

Ex. 32 $E(S) = 4E(X) = 14$ *e* $Var(S) = 4Var(X) = \frac{35}{3}$.

Ex. 33 $E\left(\bar{X}\right) = E(X) = 3.5$ *e* $Var\left(\bar{X}\right) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{35}{12n}$.

Ex. 34

$$\begin{aligned} E(S) &= n\mu;\ Var(S) = n\sigma^2 \\ E\left(\bar{X}\right) &= \mu;\ Var\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Ex. 35 $E(X) = 50$ *e* $Var(X) = 25$.

Ex. 36 $E(L) = -\frac{N}{3}$ *e* $Var(L) = \frac{50N}{9}$.

Ex. 37 *a)* $E(X) = \frac{1}{2}(0+2) = 1$ *b)* $E(X) = \frac{1}{6}(3+1+1+1+0+0) = 1$

Ex. 38 *a)* $\Pr(X_i = 1) = \frac{1}{n}$ *e* $\Pr(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. *Então* $E(X_i) = \frac{1}{n}$.
b) Note que $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ *Então* $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) = n\frac{1}{n} = 1$.

Ex. 39 *a)* $E(L) = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{5} = -\$0.20$
b) Para 2 bolas, $E(L) = -\$0.40$*; para 3 bolas,* $E(L) = -\$0.60$*; para 4 bolas,* $E(L) = -\$0.80$. *Enfim, retirando todas as bolas teremos* $L = -\$1$ *e, portanto,* $E(L) = -\$1$.
c) Faça uma árvore. Os caminhos, suas probabilidades e os valores de L serão:

Caminho	*BBBPP*	*BBPBP*	*BBPP*	*BPBBP*	*BPBP*	*BPP*	*P*
Probabilidade	$\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3} = 0.1$	$\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = 0.1$	$\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = 0.1$	$\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = 0.1$	$\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = 0.1$	$\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3} = 0.1$	$\frac{2}{5} = 0.4$
Lucro	-1	-1	0	-1	0	$+1$	$+1$

Assim, $E(L) = -0.3 + 0.5 = \$0.20$ *(positivo!).*

Ex. 40 *Como na demonstração da desigualdade de Chebyshev, usemos* $P = (\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$ *Para que a igualdade valha na desigualdade de Chebyshev, devemos ter*

$$\begin{aligned} \sum_{x \in P} (x-\mu)^2 p(x) &= 0 \\ \sum_{x \notin P} (x-\mu)^2 p(x) &= k^2\sigma^2 \sum_{x \notin P} p(x) \end{aligned}$$

Assim, X pode assumir apenas o valor μ *em P, e apenas os valores* $\mu - k\sigma$ *e* $\mu + k\sigma$ *fora de P. Em outras palavras, tentaremos uma função de probabilidade do tipo:*

x	$\mu - k\sigma$	μ	$\mu + k\sigma$
$p(x)$	p	$1-p-q$	q

Mas então

$$E(X) = p(\mu - k\sigma) + (1-p-q)\mu + q(\mu + k\sigma) = \mu + k\sigma(q-p)$$

Como devemos ter $E(X) = \mu$*, concluímos que* $p = q$. *Nossa distribuição fica assim:*

x	$\mu - k\sigma$	μ	$\mu + k\sigma$
$p(x)$	p	$1-2p$	p

Agora

$$Var(X) = p(k\sigma)^2 + 0 + p(k\sigma)^2 = 2pk^2\sigma^2$$

Como devemos ter $Var(X) = \sigma^2$*, concluímos que* $p = \frac{1}{2k^2}$. *Enfim, chegamos ao exemplo pedido!*

x	$\mu - k\sigma$	μ	$\mu + k\sigma$
$p(x)$	$\frac{1}{2k^2}$	$1 - \frac{1}{k^2}$	$\frac{1}{2k^2}$

De fato, note que $\Pr(|X-\mu| \geq k\sigma) = \Pr(X = \mu - k\sigma) + \Pr(X = \mu + k\sigma) = \frac{1}{k^2}$*, como desejávamos.*

Ex. 41 *Pela desigualdade de Chebyshev,*

$$\Pr(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

ou seja, neste caso,

$$\Pr(|X| < k) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Para garantir que o lado direito seja pelo menos 99%*, basta tomar* $1 - \frac{1}{k^2} \geq 99\%$*, isto é,* $k \geq 10$. *Ou seja,* $k = 10$ *é suficiente. Note que o* $\leq$ *do enunciado não atrapalha, pois*

$$\Pr(|X| \leq 10) \geq \Pr(|X| < 10) \geq 1 - \frac{1}{10^2} = 99\%$$

como desejávamos.

Ex. 42 *Pela desigualdade de Chebyshev*

$$\Pr\left(|X-5|<3k\right)\geq 1-\frac{1}{k^2}$$

Queremos garantir que o lado direito é pelo menos 75%. *Para tanto, basta garantir que*

$$1-\frac{1}{k^2}\geq 75\% \Leftrightarrow k\geq 2$$

Ou seja, tome $k=2$ *e temos*

$$\Pr\left(|X-5|<6\right)\geq 75\%$$

isto é, devemos tomar $a=6$.

Ex. 43 *Sejam* D_1 *e* D_2 *os dois dados. Então* $S=D_1+D_2$ *e* $D=D_1-D_2$, *portanto*

$$Cov\left(S,D\right)=Cov\left(D_1+D_2,D_1-D_2\right)=Cov\left(D_1,D_1\right)-Cov\left(D_2,D_2\right)=Var\left(D_1\right)-Var\left(D_2\right)=0$$

No entanto, é fácil ver que S *e* D *não são independentes. Por exemplo, em geral, não é verdade que* $D=0$; *mas, dado que* $S=12$ *sabemos com certeza que ambos os dados rolaram* 6 *e, portanto,* $D=0$*! Isto é:*

$$\Pr\left(D=0\mid S=12\right)=100\%\neq\Pr\left(D=0\right)$$

Ex. 44

$$\begin{aligned}
E\left(2X-3Y\right) &= 2E\left(X\right)-3E\left(Y\right)=-4\\
Var\left(2X-3Y\right) &= 4Var\left(X\right)+9Var\left(Y\right)-12Cov\left(X,Y\right)=29\\
Cov\left(2X-3Y,X+Y\right) &= 2Var\left(X\right)-3Var\left(Y\right)-Cov\left(X,Y\right)=2
\end{aligned}$$

Ex. 45 *A distribuição de* m *e* M *está no exercício* 8. *Daquela tabela, tiramos que:*

$$\begin{aligned}
E\left(m+M\right) &= E\left(D_1+D_2\right)=7\\
Var\left(m\right) &= Var\left(M\right)=\frac{2555}{1296}=1.97145\\
E\left(mM\right) &= E\left(D_1D_2\right)=E\left(D_1\right)E\left(D_2\right)=\frac{49}{4}=12.25\\
Cov\left(m,M\right) &= E\left(mM\right)-E\left(m\right)E\left(M\right)=\frac{49}{4}-\frac{91}{36}\frac{161}{36}=\frac{1225}{1296}=0.94522\\
Var\left(m+M\right) &= Var\left(D_1+D_2\right)=Var\left(D_1\right)+Var\left(D_2\right)=\frac{35}{6}=5.8333\\
\rho\left(m,M\right) &= \frac{Cov\left(m,M\right)}{\sigma\left(m\right)\sigma\left(M\right)}=\frac{\frac{1225}{1296}}{\frac{2555}{1296}}=\frac{35}{73}=0.479452
\end{aligned}$$

2.1 Exercícios de Provas

Ex. 46 *Faça uma árvore. Sejam* X *a primeira jogada vencedora e seja* L *o lucro. A distribuição de* X *é a seguinte (com valores de* L *calculados):*

x	1	2	3	4	5	*Perda total*
L	1	$-1+2=1$	$-1-2+4=1$	$-1-2-4+8=1$	$-1-2-4-8+16=1$	$-1-2-4-8-16=$
$\Pr\left(X=x\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

Então a distribuição de L *é simplesmente*

l	1	-31
$\Pr\left(L=l\right)$	$\frac{31}{32}$	$\frac{1}{32}$

e, portanto, $E\left(L\right)=\frac{31}{32}-\frac{31}{32}=0$.

Ex. 47 *Temos* $E(X) = \$1.2$ *enquanto* $E(Y) = E(Z) = \$1.6$. *Para escolher dentre estes dois últimos, calculamos*

$$\begin{aligned} E\left(Y^2\right) &= 8.2 \Rightarrow Var(Y) = 8.2 - (1.6)^2 = 5.64 \\ E\left(Z^2\right) &= 3.4 \Rightarrow Var(Z) = 3.4 - (1.6)^2 = 0.84 \end{aligned}$$

Portanto, dos que têm maior valor esperado, Z *é o menos arriscado e deveria ser escolhido.*

Ex. 48 *Um espaço amostral eqüiprovável é* $S = \{KKK, KKC, KCK, CKK, KCC, CKC, CCK, CCC\}$. *a) Calculando os valores de* X *e* Y *em cada caso e colocando tudo numa tabela, temos a distribuição conjunta de* X *e* Y*:*

$Y\backslash X$	0	1	2	*Total*
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
Total	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

b) A marginal de X *é a última linha da tabela acima. Dado que* $Y = 1$, *a condicional de* X *é idêntica à marginal –* $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ *e* $\frac{1}{4}$. *No entanto,* X *e* Y *não são independentes – basta notar que* $\Pr(X = 0|Y = 2) = 0 \neq \Pr(X = 0) = \frac{1}{4}$.
c)

$$\begin{aligned} E(XY) &= (1)\frac{2}{8} + (2)\frac{1}{8} + (2)\frac{1}{8} + (4)\frac{1}{8} = \frac{5}{4} \\ Cov(X,Y) &= \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \\ \rho(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0.5 \end{aligned}$$

Ex. 49 *a) Somando por colunas, temos a distribuição marginal de* X

x	-2	-1	0	1	2
$\Pr(X = x)$	0.36	0.28	0.20	0.12	0.04

Assim, $E(X) = -0.72 - 0.28 + 0 + 0.12 + 0.08 = -0.8$ *e* $Med(X) = -1$ *(pois* $\Pr(X < -1) = 0.36 < 0.5 < 0.64 = \Pr(X \leq -1)$*).*
b) Note que $\Pr(Y = 0) = 0.08 + 0.08 + 0.04 = 0.2$. *Dividindo aquela linha por este valor, encontramos na distribuição condicional pedida:*

x	-2	-1	0	1	2
$\Pr(X = x\|Y = 0)$	0.40	0.40	0.20	0.00	0.00

c) Note que $Y - X = k$ *é uma das diagonais da tabela, isto é,* $\Pr(Z = k)$ *será um somatório de probabilidades em uma das diagonais. Usando este método, é fácil ver que* $\Pr(Z = 0) = 0.04 * 5 = 0.20$, $\Pr(Z = -1) = 0.08 * 4 = 0.32$, *e assim por diante. Resumindo*

z	-4	-3	-2	-1	0
$\Pr(Z = z)$	0.08	0.16	0.24	0.32	0.20

Daqui, temos $E(Z) = -0.32 - 0.48 - 0.48 - 0.32 + 0 = -1.6$.

Ex. 50 *a) Lendo as colunas de cima para baixo e ignorando as entradas onde* $XY = 0$ *temos:*

$$\begin{aligned} E(XY) = 4(0.04) + 2(0.08) - 2(0.08) - 4(0.08) + 1(0.04) \\ - 1(0.08) - 2(0.08) + 1(0.04) + 2(0.08) + 4(0.04) = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.64$$
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{0.64}{1.36} = \frac{8}{17} = 0.47059$$

b) Temos

$$Var(Y-X) = Var(Y) + Var(X) - 2Cov(X,Y) = 1.36 + 1.36 - 2(0.64) = 1.44$$

c) Temos

$$Cov(Y-X, Y+X) = Cov(Y,Y) - Cov(X,X) = Var(Y) - Var(X) = 0$$

d) Não. Note que $\Pr(X+Y=0) = 0.20$, *mas* $\Pr(X+Y=0 \mid Y-X=4) = 100\%$ *(pois teria de ser* $Y=2$ *e* $X=-2$*).*

Ex. 51 *a) As distribuições marginais estão na tabela acima. Da tabela, temos*

$$\Pr(X \leq 0 \mid Y = \pm 1) = \frac{0.17+0.04+0.11+0.16}{0.30+0.30} = \frac{0.48}{0.60} = 80\%$$

b) Temos

$$\begin{aligned} E(X) &= -0.30 + 0 + 0.30 = 0 \\ E(Y) &= -0.30 + 0 + 0.30 = 0 \\ E(XY) &= 0.03 + 0.17 - 0.09 - 0.11 = 0 \end{aligned}$$

Assim, $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$. *No entanto,* X *e* Y *não são independentes, já que*

$$\Pr(X=Y=0) = 0.20 \neq (0.4)^2 = \Pr(X=0)\Pr(Y=0)$$

c) Temos que

$$\begin{aligned} Cov(X, 3X+4Y) &= 3Cov(X,X) + 4Cov(X,Y) = 3Var(X) \\ Var(3X+4Y) &= 9Var(X) + 16Var(Y) + 24Cov(X,Y) = 25Var(X) \end{aligned}$$

já que X *e* Y *têm a mesma distribuição, portanto* $Var(X) = Var(Y)$. *Enfim*

$$\rho(X, 3X+4Y) = \frac{Cov(X,3X+4Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(3X+4Y)}} = \frac{3Var(X)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{25Var(X)}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Ex. 52 *a) A soma das probabilidades tem de ser* 1, *isto é*

$$\sum_{k=1}^{9} \Pr(X=k) = 1 \Rightarrow c\sum_{k=1}^{9} \ln(k+1) - \ln(k) = 1 \Rightarrow c\ln(10) - c\ln(1) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\ln 10}$$

já que aquela soma é telescópica.
b) A distribuição acumulada é simplesmente

$$F(k) = \Pr(X \leq k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\ln 10}(\ln(i+1) - \ln i) = \frac{\ln(k+1)}{\ln 10}$$

novamente, pela soma telescópica. A mediana será o primeiro valor (inteiro) de k *tal que esta soma passa de* $\frac{1}{2}$, *isto é*

$$\frac{\ln(k+1)}{\ln 10} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \ln(k+1) \geq \frac{\ln 10}{2} \Rightarrow k+1 \geq e^{\frac{\ln 10}{2}} = 10^{1/2} = \sqrt{10} \Rightarrow k \geq \sqrt{10} - 1 = 2.162$$

Assim, $Med(X) = 3$.
c) Seja x *o número procurado. Se a distribuição de Benford também se aplicar para as cidades entre* 1000 *e* 10000 *habitantes (e ignorando a remotíssima probabilidade de que alguma cidade tenha exatamente* 6000 *ou*

10000 *habitantes), então a proporção esperada de cidades entre* 5000 *e* 6000 *habitantes (do universo de cidades de* 5000 *a* 10000*) deve ser aproximadamente*

$$\begin{aligned}\frac{x}{1309} &= \Pr\left(X = 5 \mid 5 \leq X \leq 9\right) = \frac{\Pr\left(X = 5\right)}{\Pr\left(5 \leq X \leq 9\right)} = \\ &= \frac{F\left(5\right) - F\left(4\right)}{F\left(9\right) - F\left(4\right)} = \frac{c\left(\ln 6 - \ln 5\right)}{c\left(\ln 10 - \ln 5\right)} = \frac{\ln 1.2}{\ln 2} = 0.26303\end{aligned}$$

Portanto, $x = 344.30627$*, isto é, esperamos aproximadamente* 344 *municípios com* 5000 *a* 6000 *habitantes.*
Nota: Note como este número é muito diferente de $\frac{1}{5}1309 = 261.8$ que seria o número esperado caso a distribuição do primeiro dígito fosse uniforme. O número real, tirado dos dados do IBGE, é 341 municípios entre 5000 e 6000 habitantes.

Chapter 3

Respostas dos Exercícios do Capítulo 3

Ex. 1 *Seja X o número de usinas que falham este ano. $X \sim Bin\,(100, 0.001)$. Então:*

$$\Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X = 0) = 1 - (0.999)^{100} = 9.52\%$$

Ex. 2 *Seja X o número de "seis". Então $X \sim Bin\left(30, \frac{1}{6}\right)$ e*

$$\Pr(X = 5) = \text{BinomialDen}\left(5, 30, \frac{1}{6}\right) = \binom{30}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^{25} = 19.21\%$$

Ex. 3 *Seja X o número de flechas no alvo. Então $X \sim Bin\,(5, 0.2)$. Assim:*

$$\begin{aligned}
\Pr(X = 4) &= \text{BinomialDen}\,(4, 5, 0.2) = \binom{5}{4}(0.2)^4(0.8) = 0.64\% \\
\Pr(X \geq 2) &= 1 - \Pr(X \leq 1) = 1 - \text{BinomialDist}\,(1, 5, 0.2) = 26.27\%
\end{aligned}$$

Ex. 4 *Seja X o número de parafusos defeituosos dentre os 5. Então $X \sim Bin\,(5, 0.1)$.*

$$\begin{aligned}
\Pr(X = 0) &= \text{BinomialDen}\,(0, 5, 0.1) = \binom{5}{0}(0.1)^0(0.9)^5 = 59.049\% \\
\Pr(X = 1) &= \text{BinomialDen}\,(1, 5, 0.1) = \binom{5}{1}(0.1)^1(0.9)^4 = 32.805\% \\
\Pr(X = 2) &= \text{BinomialDen}\,(2, 5, 0.1) = \binom{5}{2}(0.1)^2(0.9)^3 = 7.29\% \\
\Pr(X \leq 2) &= 59.049\% + 32.805\% + 7.29\% = 99.144\%
\end{aligned}$$

Ex. 5 *Seja X_i o número de sets que eu ganho em i sets jogados. Então $X_i \sim Bin\,(i, 0.3)$. Assim*

$$\begin{aligned}
\Pr(X_3 \geq 2) &= 1 - \text{BinomialDist}\,(1, 3, 0.3) = 21.6\% \\
\Pr(X_5 \geq 3) &= 1 - \text{BinomialDist}\,(2, 5, 0.3) = 16.308\% \\
\Pr(X_7 \geq 5) &= 1 - \text{BinomialDist}\,(3, 7, 0.3) = 12.604\%
\end{aligned}$$

Note como a chance de eu ganhar o jogo vai diminuindo à medida que aumentamos o número de sets.

Ex. 6 *Seja X o número de gols. Então $X \sim Bin\,(4, 0.3)$. Assim*

$$\begin{aligned}
\Pr(X=0) &= \text{BinomialDen}(0,4,0.3) = \binom{4}{0}(0.3)^0(0.7)^4 = 24.01\% \\
\Pr(X=1) &= \text{BinomialDen}(1,4,0.3) = \binom{4}{1}(0.3)^1(0.7)^3 = 41.16\% \\
\Pr(X=2) &= \text{BinomialDen}(2,4,0.3) = \binom{4}{2}(0.3)^2(0.7)^2 = 26.46\% \\
\Pr(X=3) &= \text{BinomialDen}(3,4,0.3) = \binom{4}{3}(0.3)^3(0.7)^1 = 7.56\% \\
\Pr(X=4) &= \text{BinomialDen}(4,4,0.3) = (0.3)^4 = 0.81\%
\end{aligned}$$

Ex. 7

$$\begin{cases} E(X) = np = 30 \\ Var(X) = npq = 20 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3} \Rightarrow n = 90$$

Ex. 8 *Cada passageiro pode aparecer (sucesso, $p = 0.96$) ou não (falha, $q = 0.04$). Se supusermos que os passageiros vêm ou não independentemente uns dos outros, então o número X de passageiros que vêm satisfaz $X \sim Bin\,(100, 0.96)$. A pergunta consiste em descobrir $\Pr(X \le 98)$, a saber*

$$\Pr(X \le 98) = \text{BinomialDist}(98, 100, 0.96) = 91.28\%$$

ou, no braço

$$\Pr(X \le 98) = 1 - \Pr(X=99) - \Pr(X=100) = 1 - \binom{100}{99}(0.96)^{99}(0.04)^1 - (0.96)^{100} = 91.28\%$$

Ex. 9 *a) Seja X o número de questões que ele acerta. Então $X \sim Bin\,(50, 0.5)$. Então:*

$$\begin{aligned}
\Pr(Nota \ge 8,0) &= \Pr(X \ge 40) = 1 - \text{BinomialDist}(39, 50, 0.5) = 0.001193\% \\
\Pr(Nota \ge 6,0) &= \Pr(X \ge 30) = 1 - \text{BinomialDist}(29, 50, 0.5) = 0.101319\%
\end{aligned}$$

b) Seja Y o número de estudantes que, escolhendo ao acaso, conseguem 80% ou mais. Cada estudante é uma "prova" com probabilidade 0.001193% de conseguir "sucesso". Então $Y \sim Bin\left(100, 1.193 \times 10^{-6}\right)$ e portanto

$$\Pr(Y \ge 1) = 1 - \Pr(Y=0) = 1 - (1 - 0.00001193)^{100} = 0.1192\%$$

ou seja, mesmo com 100 estudantes, tirar $8,0$ ou mais por acaso é bem raro. Algum estudante tirar $6,0$ ou mais ao acaso é mais fácil, mas ainda improvável – se Z é o número de estudantes dentre 100 que tira $6,0$ ou mais, então $Z \sim Bin\,(100, 0.00101319)$:

$$\Pr(Z \ge 1) = 1 - (1 - 0.00101319)^{100} = 9.64\%$$

c) Agora fica ainda mais difícil se dar bem por acaso. De fato, $X \sim Bin\,(50, 0.2)$. Então:

$$\begin{aligned}
\Pr(X \ge 40) &= 1 - \text{BinomialDist}(39, 50, 0.2) = 1.2908 \times 10^{-19} \text{ (virtualmente zero)} \\
\Pr(X \ge 30) &= 1 - \text{BinomialDist}(29, 50, 0.2) = 6.9367 \times 10^{-10} \text{ (virtualmente zero)}
\end{aligned}$$

Note que até o Excel terá dificuldade em calcular números tão pequenos! Para os outros itens, temos $Y \sim Bin\left(100, 1.291 \times 10^{-19}\right)$ e $Z \sim Bin\left(100, 6.9367 \times 10^{-10}\right)$, portanto:

$$\begin{aligned}
\Pr(Y \ge 1) &= 1 - \left(1 - 1.291 \times 10^{-19}\right)^{100} \approx 1 - \left(1 - 1.291 \times 10^{-17}\right) = 1.291 \times 10^{-17} \\
\Pr(Z \ge 1) &= 1 - \left(1 - 6.9367 \times 10^{-10}\right)^{100} \approx 1 - \left(1 - 6.9367 \times 10^{-8}\right) = 6.9367 \times 10^{-8}
\end{aligned}$$

(usamos a aproximação da série binomial: $(1-x)^{100} \approx 1 - 100x$ quando x é pequeno) ou seja, se você espera tirar nota boa no vestibular chutando tudo, vai ter de esperar muito.

Ex. 10 *Seja X o número de cartas que o (para)normal acerta. Então $X \sim Bin\,(10, 0.2)$. Assim*

$$\Pr(X \geq 8) = 1 - \text{BinomialDist}\,(8, 10, 0.2) = 7.79264 \times 10^{-5}$$

ou seja, seria muito improvável que você conseguisse acertar 8 ou mais por acaso. Porém, testando 1000 pessoas, cada uma tem 7.79264×10^{-5} de probabilidade de sucesso. Assim, o número de pessoas que conseguirá acertar 8 ou mais é Y onde $X \sim Bin\left(1000, 7.79264 \times 10^{-5}\right)$ e então

$$\Pr(Y \geq 0) = 1 - \Pr(Y = 0) = 1 - \left(1 - 7.79264 \times 10^{-5}\right)^{1000} = 7.497\%$$

ou seja, este evento raríssimo não é mais tão raro com 1000 pessoas. Só para comparar, com 10000 pessoas testadas e Z que conseguiriam o feito notável de adivinhar 8 ou mais cartas, temos:

$$\Pr(Z \geq 0) = 1 - \left(1 - 7.79264 \times 10^{-5}\right)^{10000} = 54.127\%$$

ou seja, teste 10000 pessoas deste jeito e eu aposto que você arrumar pelo menos uma pessoa que adivinhará as 8 ou mais cartas. Aí você pode ir ao Fantástico e dizer que esta pessoa notável tinha 7.79264×10^{-5} de chance de conseguir fazê-lo por acaso, e você enganará a todos convencendo-os que esta pessoa é paranormal.

Ex. 11 *Seja X o número de vezes em que deu 13. Note que jogamos 50 vezes, e a probabilidade de sucesso a cada vez é $\frac{1}{37}$. Assim $X \sim Bin\left(50, \frac{1}{37}\right)$. O enunciado esqueceu de mencionar o tamanho das apostas – vamos supor \$1 por rodada. Lembremos que lucramos \$35 a cada sucesso, mas perdemos \$1 a cada fracasso. Então:*

$$L = 35X - (50 - X) = 36X - 50$$

Assim

$$\Pr(L \geq 0) = \Pr(36X - 50 \geq 0) = \Pr\left(X \geq \frac{50}{36}\right) = \Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X = 0) = 1 - \left(\frac{36}{37}\right)^{50} = 74.59\%$$

isto é, 75% das pessoas que adotam esta estratégia saem felizes do cassino, saindo de lá com mais dinheiro do que entraram. Porém:

$$E(L) = E(36X - 50) = 36E(X) - 50 = 36\left(\frac{50}{37}\right) - 50 = -\$1.35$$

ou seja, o lucro esperado é negativo.

Ex. 12 *a)*

$$\frac{\text{BinomialDen}\,(k+1; n, p)}{\text{BinomialDen}\,(k; n, p)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-(k+1)}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} = \frac{n!k!\,(n-k)!}{(k+1)!\,(n-k-1)!n!} \frac{p}{q} = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{q}$$

b) Sabemos que

$$\frac{\Pr(X = 5)}{\Pr(X = 4)} = \frac{\text{BinomialDen}\,(4+1; 10, p)}{\text{BinomialDen}\,(4; 10, p)} = \frac{10-4}{4+1} \frac{p}{1-p}$$

Como o problema diz que isto é 2, temos

$$\frac{6}{5} \frac{p}{1-p} = 2 \Rightarrow \frac{p}{1-p} = \frac{5}{3} \Rightarrow p = \frac{5}{8}$$

c) Note que

$$\Pr(X = k+1) \geq \Pr(X = k) \Longleftrightarrow \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{1-p} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{k+1}{n-k} \leq \frac{p}{1-p} \Leftrightarrow \frac{k+1}{n+1} \leq p \Leftrightarrow k \leq np + p - 1$$

Assim, a probabilidade aumenta com k até o valor $k_{MAXIM} = \lfloor np + p \rfloor$, e a partir dali diminui. Em outras palavras, a moda de X é $\lfloor np + p \rfloor$. Nos raros casos em que $np + p$ é um inteiro, há um empate entre $k = np + p - 1$ e $k + 1 = np + p$. Note como a moda $\lfloor np + p \rfloor$ está sempre próxima do valor esperado np.

Ex. 13 *Sendo X o número de acertos, temos $X \sim Bin\left(9, \frac{1}{4}\right)$. Então*

$$E(X) = \frac{9}{4} = 2.25 \text{ e } Var(X) = \frac{9}{4}\frac{3}{4} = \frac{27}{16}$$

A nota (se for de 0 a 10) será $N = \frac{10X}{9}$. Então

$$E(N) = \frac{10E(X)}{9} = 2.5 \text{ e } Var(N) = \frac{10^2}{9^2} Var(X) = \frac{25}{12}$$

A probabilidade de obter 4 acertos é

$$\Pr(X = 4) = \text{BinomialDen}\left(4; 9, \frac{1}{4}\right) = \binom{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^5 = 11.68\%$$

e, enfim, o número mais provável de acertos é $\lfloor np + p \rfloor = \left\lfloor \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \right\rfloor = 2$. Só para confirmar

$$\underbrace{\text{BinomialDen}\left(1; 9, \frac{1}{4}\right)}_{0.225} \leq \underbrace{\text{BinomialDen}\left(2; 9, \frac{1}{4}\right)}_{0.300} \geq \underbrace{\text{BinomialDen}\left(3; 9, \frac{1}{4}\right)}_{0.234}$$

Ex. 14 *Seja X o número de tortas de maçã pedidas. Então $X \sim Bin(10, 0.6)$, e o número de tortas de chocolate vendidas será $Y = 10 - X$. Os estoques m de tortas de maçã e c de tortas de chocolate devem satisfazer:*

$$\Pr(X \leq m \text{ e } Y \leq c) \geq 0.95$$

isto é, queremos encontrar números m e c tais que

$$\Pr(10 - c \leq X \leq m) \geq 0.95$$

Há várias opções para conseguir satisfazer esta desigualdade – por exemplo, colocando $c = 10$ e $m = 10$ certamente serve, mas nos parece custoso demais! Observando a tabela da função acumulada da binomial de parâmetros $n = 10$ e $p = 0.6$, encontramos uma boa opção para intervalos com pelo menos 95% de probabilidade assim:

$$\Pr(2 \leq X \leq 8) = \text{BinomialDist}(8; 10, 0.6) - \text{BinomialDist}(1; 10, 0.6) = 95.20\%$$

Note que não adianta aumentar o limite inferior de X para 3 (pois então, mesmo tomando $3 \leq X \leq 10$, não chegamos a 95% de probabilidade) nem adianta diminuir de 8 para 7 (pois $\Pr(0 \leq X \leq 7) = 83.27\%$ é menor que 95%). Assim, tomaremos $10 - c = 2$ e $m = 8$, isto é, traga 8 tortas de chocolate e 8 de maçã. A probabilidade de atender todos os clientes é de 95.20% (mas 6 tortas ficarão para o dia de amanhã).

Ex. 15 *Como ganha quem fizer 10 pontos, podemos fingir que A e B jogam um total de 19 partidas, e quem ganhar mais partidas vence a série. Como eles já jogaram 10 partidas (A está vencendo 6×4), faltam 9 partidas para jogar. Seja X o número de partidas destas 9 que A vencerá. Então*

$$X \sim Bin(9, 0.4)$$

O jogo será vencido por B se A só conseguir vencer 3 ou menos (pois já venceu 6). Assim

$$\Pr(B \text{ ganhar série}) = \Pr(X \leq 3) = \text{BinomialDist}(3; 9, 0.4) = 48.26\%$$

Ex. 16 *Sejam X o número de bolas brancas e Y o número de bolas pretas sacadas. Temos $X \sim Bin\left(5, \frac{3}{10}\right)$. Então*

$$\begin{aligned}
\Pr(X = 3) &= \text{BinomialDen}(3; 5, 0.3) = \binom{5}{3}(0.3)^3(0.7)^2 = 13.23\% \\
\Pr(X \geq 3) &= 1 - \text{BinomialDist}(2; 5, 0.3) = 16.308\% \\
\Pr(X = 2 \text{ e } Y = 2) &= \Pr(X = 2) . \Pr(Y = 2 \mid X = 2)
\end{aligned}$$

Agora, note que, dado que $X = 2$ (foram exatamente 2 bolas brancas), temos que a distribuição de Y será binomial com parâmetros $n = 3$ (as que restam) e $p = \frac{3}{7}$ (dentre as bolas que restam). Assim

$$\begin{aligned}\Pr(X = 2 \text{ e } Y = 2) &= \Pr(X = 2).\Pr(Y = 2 \mid X = 2) = \\ &= \text{BinomialDen}(2; 5, 0.3)\,\text{BinomialDen}\left(2; 3, \frac{3}{7}\right) = 9.72\%\end{aligned}$$

(note que se $X = 2$ e $Y = 2$, autmaticamente teremos uma bola vermelha).

Ex. 17 *Como $X \sim Bin(10, 0.05)$, temos*

$$\Pr(X = 0) = (0.95)^{10} = 59.87\%$$

Ex. 18 *Se X é o número de sucessos em m experimentos de um processo de Bernoulli, e Y é o número de sucessos em outros experimentos independentes (todos com a mesma probabilidade p), então $Z = X + Y$ será o número de sucessos nos $m + n$ experimentos. Assim, $Z \sim Bin(m + n, p)$.*
Se você preferir uma demonstração algébrica, vai ter de fazer

$$\begin{aligned}\Pr(Z = k) &= \sum_{j=0}^{k} \Pr(X = j \text{ e } Y = k - j) = \sum_{j=0}^{k} \Pr(X = j)\Pr(Y = k - j) = \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} p^j q^{m-j} \binom{n}{k-j} p^{k-j} q^{n-k+j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} p^k q^{m+n-k} = \\ &= p^k q^{m+n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k} p^k q^{m+n-k}\end{aligned}$$

onde usamos a identidade $\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}$, que pode ser provada combinatoriamente: para escolher k elementos dentre $m + n$, escolha j dentre os m primeiros e $k - j$ dentre os n últimos, e some para todas as possibilidades em j.

Ex. 19 *Seja X o número de folhetos recebidos na sua quadra. Então $X \sim Bin\left(10000, \frac{1}{2000}\right)$.*

$$\begin{aligned}\Pr(X = 0) &= \text{BinomialDen}\left(0; 10000, \frac{1}{2000}\right) = \left(\frac{1999}{2000}\right)^{10000} = 0.6730\% \\ \Pr(X = 5) &= \text{BinomialDen}\left(5, 10000, \frac{1}{2000}\right) = \binom{10000}{5}\left(\frac{1}{2000}\right)^5 \left(\frac{1999}{2000}\right)^{9995} = 17.551\% \\ \Pr(X = 10) &= \text{BinomialDen}\left(10, 10000, \frac{1}{2000}\right) = \binom{10000}{10}\left(\frac{1}{2000}\right)^{10} \left(\frac{1999}{2000}\right)^{9990} = 1.812\%\end{aligned}$$

Mais tarde veremos como simplificar estas contas usando Poisson.

Ex. 20 *Sabemos que $T \sim Geom\left(\frac{1}{6}\right)$. Então:*

$$\begin{aligned}\Pr(T > 6) &= \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 33.49\% \\ \Pr(T > 4) &= \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 48.23\% \\ \Pr(T > 6 \mid T > 2) &= \frac{\Pr(T > 6)}{\Pr(T > 2)} = \frac{(5/6)^6}{(5/6)^2} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 48.23\%\end{aligned}$$

Ex. 21 *O enunciado devia ter dito que a e b são inteiros positivos. Neste caso:*

$$\Pr(X > a + b \mid X > a) = \frac{\Pr(X > a + b)}{\Pr(X > a)} = \frac{q^{a+b}}{q^a} = q^b = \Pr(X > b)$$

Ex. 22 *Seja X o número de tentativas. Então $X \sim Geom\,(0.9)$. O lucro é $L = 100 - 10\,(X-1) = 110 - 10X$. Então*

$$\begin{aligned} E\,(X) &= \frac{1}{0.9} = \frac{10}{9} = 1.1111... \\ \Pr\,(X > 2) &= (0.1)^2 = 1\% \\ E\,(L) &= E\,(110 - 10X) = 110 - 10E\,(X) = \$98.89 \end{aligned}$$

Ex. 23 *Seja X o número de tentativas. Então $X \sim Geom\,(0.4)$ e*

$$\begin{aligned} E\,(X) &= \frac{1}{0.4} = 2.5 \\ \Pr\,(X > 3) &= (0.6)^3 = 21.6\% \end{aligned}$$

O lucro é dado por

$$L = \begin{cases} 90, \text{ se } X = 1 \\ 80, \text{ se } X = 2 \\ 95 - 5X, \text{ se } X \geq 3 \end{cases}$$

Você pode montar uma tabela com a distribuição de L e calcular $E\,(L)$ usando somatórios. Mais espertamente, note que o custo da primeira tentativa é inevitável; seja Y o número de sucessos na PRIMEIRA tentativa – ou seja, $Y \sim Bin\,(1, 0.4) = Be\,(0.4)$. O lucro será de 100, descontados 5 por tentativa, menos 5 extra inevitáveis da primeira tentativa e 5 extra da segunda tentativa caso ela exista (isto é, caso $Y = 0$). Assim:

$$\begin{aligned} L &= 100 - 5X - 5 - 5\,(1 - Y) \\ L &= 90 - 5X + 5Y \end{aligned}$$

Portanto

$$E\,(L) = E\,(90 - 5X + 5Y) = 90 - 5E\,(X) + 5E\,(Y) = 90 - \frac{5}{0.4} + 5\,(0.4) = 79.5$$

Ex. 24 *Note que $Y = X - 1$. Como $X \in \{1, 2, 3, ...\}$, temos que $Y \in \{0, 1, 2, ...\}$. A função de probabilidade de Y é*

$$p_Y\,(k) = \Pr\,(Y = k) = \Pr\,(X = k + 1) = q^k p \text{ para } k = 0, 1, 2, ...$$

A esperança e variância são

$$\begin{aligned} E\,(Y) &= E\,(X) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p} \\ Var\,(Y) &= Var\,(X - 1) = Var\,(X) = \frac{q}{p^2} \end{aligned}$$

Ex. 25 *Veja a seção 3.3.4: seja Y o número de sucessos nos primeiros $k-1$ lançamentos e Z o número de sucessos no k-ésimo lançamento. Então $Y \sim Bin\,(k-1, p)$ e $Z \sim Be\,(p)$. Note que o r-ésimo sucesso acontece no k-ésimo lançamento se, e somente se, $Y = r - 1$ e $Z = 1$, isto é*

$$X = k \Leftrightarrow (Y = r - 1 \text{ e } Z = 1)$$

Como Y e Z são independentes (pois tratam de lançamentos distintos):

$$\Pr\,(X = k) = \Pr\,(Y = r - 1)\,.\Pr\,(Z = 1) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{k-r}.p = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$$

Enfim, seja X_1 o número de lançamentos até o primeiro sucesso, X_2 o número de lançamentos dali até o segundo sucesso (sem contar o lançamento do primeiro, mas contando o segundo), e assim por diante. Então note que

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_r$$

e cada um dos X_i é uma variável com distribuição geométrica de parâmetro p. Então

$$\begin{aligned} E\,(X) &= rE\,(X_1) = \frac{r}{p} \\ Var\,(X) &= rVar\,(X_i) = \frac{rq}{p^2} \end{aligned}$$

onde, para a variância, usamos que os X_i são independentes entre si.

Ex. 26 *Seja X o número de campeonatos ganhos pelo Vasco nos próximos 10 anos. Então $X \sim Bin\,(10, 0.2)$ e*

$$\Pr(X > 1) = 1 - \text{BinomialDist}\,(1; 10, 0.2) = 1 - (0.8)^{10} - 10\,(0.8)^9\,(0.2) = 62.42\%$$

Agora, seja Y o número de campeonatos ganhos nos próximos 5 anos. Então $Y \sim Bin\,(5, 0.2)$ e

$$\Pr(Y \geq 2) = 1 - \text{BinomialDist}\,(1; 5, 2) = 1 - (0.8)^5 - 10\,(0.8)^4\,(0.2) = 62.42\%$$

Enfim, a última pergunta é, de fato,

$$\Pr(X \leq 1) = \text{BinomialDist}\,(1; 10, 0.2) = (0.8)^{10} + 10\,(0.8)^9\,(0.2) = 37.58\%$$

Ex. 27 *Temos $Y = X - r$. Como $X \in \{r, r+1, r+2, ...\}$ temos $Y \in \{0, 1, 2, ...\}$. A função de probabilidade é*

$$p_Y(k) = \Pr(Y = k) = \Pr(X = k + r) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k$$

enquanto a esperança e variância são

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X) - r = \frac{r}{p} - r = \frac{rq}{p} \\ Var(Y) &= Var(X - r) = Var(X) = \frac{rq}{p^2} \end{aligned}$$

Ex. 28 *Sejam Y o número de filhos homens dentre os n filhos não-gêmeos (então $Y \sim Bin\,(n, p)$) e $Z = 1$ se os gêmeos são homens e 0 caso contrário. Então*

$$X = k \Leftrightarrow (Y = k \text{ e } Z = 0) \text{ ou } (Y = k - 2 \text{ e } Z = 1)$$

Como os eventos dos dois lados do "ou" são disjuntos e Y e Z são independentes:

$$\begin{aligned} \Pr(X = k) &= \Pr(Y = k \text{ e } Z = 0) + \Pr(Y = k - 2 \text{ e } Z = 1) = \\ &= \Pr(Y = k)\Pr(Z = 0) + \Pr(Y = k - 2)\Pr(Z = 1) = \\ &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} q + \binom{n}{k-2} p^{k-2} q^{n-k+2} p = \\ &= p^{k-1} q^{n-k+1} \left(\binom{n}{k} p + \binom{n}{k-2} q \right) \end{aligned}$$

De fato, note que $X = Y + 2Z$ com Y e Z independentes. Então:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Y) + 2E(Z) = np + 2p = (n+2)\,p \\ Var(X) &= Var(Y) + Var(2Z) = Var(Y) + 4Var(Z) = npq + 4pq = (n+4)\,pq \end{aligned}$$

Ex. 29 *No exemplo do texto, vimos que, quando $X \sim Poi\,(\mu)$, temos*

$$\frac{p(k+1)}{p(k)} = \frac{\Pr(X = k+1)}{\Pr(X = k)} = \frac{\mu}{k+1}$$

ou seja, as probabilidades vão aumentando com k enquanto $k + 1 < \mu$. No caso, $\mu = 4$, e portanto

$$p(1) < p(2) < p(3) = p(4) > p(5) > p(6) > ...$$

ou seja, há duas modas: $X = 3$ e $X = 4$.

Ex. 30 *A probabilidade de não haver erro em uma página é*

$$e^{-0.2} \frac{(0.2)^0}{0!} = e^{-0.2}$$

Portanto, a probabilidade de não haver erros em 10 páginas seguidas (independentes) será

$$\left(e^{-0.2}\right)^{10} = e^{-2} = 13.53\%$$

Ex. 31 *Sendo X o número de clientes que chegam, temos que $X \sim Poi(2)$. A probabilidade de haver clientes não atendidos é*

$$\begin{aligned}\Pr(X>3) &= 1-\Pr(X=0)-\Pr(X=1)-\Pr(X=2)-\Pr(X=3) = \\ &= 1-e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}\right)=1-\frac{19}{3e^2}=14.29\%\end{aligned}$$

Seja Y o número de clientes atendidos por dia. A distribuição de Y é

$$\begin{aligned}\Pr(Y=0) &= \Pr(X=0)=e^{-2}\\ \Pr(Y=1) &= \Pr(X=1)=2e^{-2}\\ \Pr(Y=2) &= \Pr(X=2)=2e^{-2}\\ \Pr(Y=3) &= \Pr(X\geq 3)=1-5e^{-2}\end{aligned}$$

Portanto

$$E(Y)=0+2e^{-2}+4e^{-2}+3\left(1-5e^{-2}\right)=3-9e^{-2}=1.7820 \text{ clientes por dia}$$

Enfim, queremos encontrar o 0.94 quantil da distribuição de Poisson de parâmetro 2, isto é, queremos encontrar k tal que

$$\Pr(X>k)\leq 0.06, \text{ ou seja, } \Pr(X\leq k)\geq 0.94$$

Usando uma tabela com a função acumulada de Poisson, encontramos

$$\Pr(X\leq 3)=85.7\%<94\%<94.74\%=\Pr(X\leq 4)$$

Assim, basta aumentar a capacidade de atendimento para 4 clientes por dia.

Ex. 32 *Seja X o número de ganhadores. A princípio, cada apostador pode ganhar ou não com a mesma probabilidade $p=\frac{1}{50\,063\,080}$, então $X\sim Bin\left(50\,063\,080,\frac{1}{50\,063\,080}\right)$. Mas fazer os cálculos com estes números é horrível até com um computador! Como n é grande e p é pequeno, podemos aproximar por uma distribuição de Poisson: $X\sim Poi\left(50063080\frac{1}{50063080}\right)=Poi(1)$ Então:*

$$\begin{aligned}\Pr(X=0) &= e^{-1}=36.79\%\\ \Pr(X=1) &= e^{-1}=36.79\%\\ \Pr(X=2) &= \frac{e^{-1}}{2!}=18.39\%\end{aligned}$$

Ex. 33 *Seja X o número de afogamentos num ano para cada 200000 habitantes. É razoável usar $X\sim Poi(6)$. Então*

$$\begin{aligned}\Pr(X>3) &= 1-p(0)-p(1)-p(2)-p(3)=1-e^{-6}\left(1+6+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}\right)=84.88\%\\ \Pr(X<3) &= p(0)+p(1)+p(2)=e^{-6}\left(1+6+\frac{6^2}{2!}\right)=25e^{-6}=6.197\%\end{aligned}$$

Ex. 34 *Como $X\sim Poi(0.8)$ então*

$$\begin{aligned}\Pr(X=0) &= e^{-0.8}=44.93\%\\ \Pr(X>2) &= 1-p(0)-p(1)-p(2)=4.74\%\end{aligned}$$

Ex. 35 *Seja X o número de erros em uma página. Então a probabilidade de uma página não ter erros é*

$$\Pr(X=0)=e^{-1.5}=0.223$$

Como há 800 páginas no livro, o número de páginas sem erros é uma variável Y com distribuição $Bin(800,0.223)$. Seu valor esperado será

$$E(Y)=800e^{-1.5}=178.5$$

ou seja, estimamos cerca de 178 páginas sem erros.

Ex. 36 *Seja X o número de vítimas dentre os 5000 assegurados. Temos $X \sim Bin\left(5000, 0.008\%\right)$. Como n é grande e p é pequeno, preferimos usar a aproximação $X \sim Poi\left(\left(5000\right)\left(0.008\right)\%\right) = Poi\left(0.4\right)$. Daqui:*

$$\Pr\left(X \geq 3\right) = 1 - p\left(0\right) - p\left(1\right) - p\left(2\right) = 1 - e^{-0.4}\left(1 + 0.4 + \frac{\left(0.4\right)^2}{2!}\right) = 0.7926\%$$

apenas. Um número excessivo assim de acidentes merece uma investigação especial.

Ex. 37 *Seja X o número de acidentes num dia nos 300 km. Como $E\left(X\right) = 2\frac{300}{100} = 6$, usaremos $X \sim Poi\left(6\right)$. Então*

$$\Pr\left(X = 5\right) = e^{-6}\frac{6^5}{5!} = 16.06\%$$

Agora, seja Y o número de acidentes em 250 km. Usaremos $Y \sim Poi\left(5\right)$. Agora:

$$\Pr\left(Y \geq 3\right) = 1 - e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{5^2}{2!}\right) = 87.53\%$$

Ex. 38 *Sejam X o número de partículas emitidas. Então $X \sim Poi\left(\lambda\right)$. Seja Y o número de partículas detectadas. Dado que $X = n$, Y terá distribuição binomial de parâmetros n e p, isto é:*

$$\Pr\left(Y = k \mid X = n\right) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Assim

$$\Pr\left(Y = k \text{ e } X = n\right) = \Pr\left(Y = k \mid X = n\right).\Pr\left(X = n\right) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Para encontrar a marginal de Y, temos de fazer o somatório das probabilidades acima para $n = k, k+1, k+2, ...$

$$\begin{aligned}
\Pr\left(Y = k\right) &= \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\lambda p\right)^k \sum_{n=k}^{\infty}\frac{\left(\lambda q\right)^{n-k}}{\left(n-k\right)!} = \frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\lambda p\right)^k \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda q\right)^i}{i!} = \\
&= \frac{\left(\lambda p\right)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda q} = e^{\lambda p}\frac{\left(\lambda p\right)^k}{k!}
\end{aligned}$$

que representa uma distribuição de Poisson de parâmetro λp.

Ex. 39 *Temos que $X\tilde{}Hip\left(5, 2, 8\right)$. Então para $k = 0, 1, 2$:*

$$\Pr\left(X = k\right) = \frac{\binom{5}{k}\binom{3}{2-k}}{\binom{8}{2}}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X = 0\right) &= \frac{\binom{5}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28} \\
\Pr\left(X = 1\right) &= \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28} \\
\Pr\left(X = 2\right) &= \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}
\end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned}
E\left(X\right) &= 2\frac{5}{8} = \frac{10}{8} = 1.25 \\
Var\left(X\right) &= 2\left(\frac{5}{8}\right)\frac{3}{8}\frac{8-2}{8-1} = \frac{45}{112}
\end{aligned}$$

Ex. 40 *Jogando m dezenas, o número de dezenas sorteadas será uma variável aleatória com distribuição $Hip\,(m;6;60)$. Então*[1]*:*

$$\begin{aligned}
6 \text{ dezenas} &: \quad E\,(L) = \frac{\binom{6}{6}\binom{54}{0}}{\binom{60}{6}}18000000 + \frac{\binom{6}{5}\binom{54}{1}}{\binom{60}{6}}18000 + \frac{\binom{6}{4}\binom{54}{2}}{\binom{60}{6}}240 - 1.5 = -0.921 \\
10 \text{ dezenas} &: \quad E\,(L) = \frac{\binom{10}{6}\binom{50}{0}}{\binom{60}{6}}18000000 + \frac{\binom{10}{5}\binom{50}{1}}{\binom{60}{6}}18000 + \frac{\binom{10}{4}\binom{50}{2}}{\binom{60}{6}}240 - 315 = -233.73 \\
15 \text{ dezenas} &: \quad E\,(L) = \frac{\binom{15}{6}\binom{45}{0}}{\binom{60}{6}}18000000 + \frac{\binom{15}{5}\binom{45}{1}}{\binom{60}{6}}18000 + \frac{\binom{15}{4}\binom{45}{2}}{\binom{60}{6}}240 - 7507.5 = -5652.93
\end{aligned}$$

Para que a aposta básica valesse a pena (por valor esperado), o prêmio x deveria satisfazer:

$$\frac{\binom{6}{6}\binom{54}{0}}{\binom{60}{6}}x + \frac{\binom{6}{5}\binom{54}{1}}{\binom{60}{6}}18000 + \frac{\binom{6}{4}\binom{54}{2}}{\binom{60}{6}}240 - 1.5 = 0 \Rightarrow x = \$64\ 112\ 190$$

Ex. 41 *Temos que $X \sim Hip\,(1000, 10000, 100000)$. Então*

$$\begin{aligned}
E\,(X) &= 100\left(\frac{10000}{100000}\right) = 10 \\
Var\,(X) &= 1000\left(\frac{10000}{100000}\right)\left(\frac{90000}{100000}\right)\left(\frac{100000-1000}{100000-1}\right) = 89.100891
\end{aligned}$$

Ex. 42 *A probabilidade de sacarmos k bolas pretas é*

$$p\,(k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{15}{6}} = \frac{10!5!6!9!}{k!\,(10-k)!\,(6-k)!\,(k-1)!15!}$$

Note que

$$\frac{p\,(k+1)}{p\,(k)} = \frac{k!\,(10-k)!\,(6-k)!\,(k-1)!}{(k+1)!\,(9-k)!\,(5-k)!k!} = \frac{(10-k)\,(6-k)}{(k+1)\,k}$$

Assim, a função $p\,(k)$ é crescente enquanto

$$\frac{(10-k)\,(6-k)}{(k+1)\,k} \geq 1 \Leftrightarrow 60 - 16k + k^2 \geq k^2 + k \Leftrightarrow k \leq \frac{60}{17} = 3.53$$

Isto é

$$p\,(2) \leq p\,(3) \leq p\,(4) \geq p\,(5) \geq p\,(6)$$

E, portanto, 4 bolas pretas é o mais provável.

3.1 Exercícios de Provas

Ex. 43 *Seja X o número de componentes que não falham. Então $X \sim Bin\,(5, 0.9)$. Portanto*

$$\begin{aligned}
\Pr\,(X \leq 2) &= p\,(0) + p\,(1) + p\,(2) = \\
&= \binom{5}{0}(0.9)^0(0.1)^5 + \binom{5}{1}(0.9)^1(0.1)^4 + \binom{5}{2}(0.9)^2(0.1)^3 = 0.856\%
\end{aligned}$$

[1] Tecnicamente, isto não está bem correto; quando você ganha a mega-sena com o volante de 10 dezenas, a CEF paga, além do prêmio da sena, várias quinas e quadras, de maneira que uma aposta de 10 dezenas é completamente equivalente a $\binom{10}{6}$ apostas de 6. Assim, os valores $E\,(L) = \binom{10}{6}(-0.921) = -193.41$ para 10 dezenas e $E\,(L) = \binom{15}{6}(-0.921) = -4609.60$ para 15 dezenas estão mais próximos da realidade.

Ex. 44 *Temos*

$$\frac{p(k+1)}{p(k)} = \frac{\binom{k}{r-1}p^r q^{k+1-r}}{\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}} = \frac{kq}{k-r}$$

Portanto, a função de probabilidade é crescente enquanto

$$\frac{kq}{k-r} \geq 1 \Leftrightarrow k \leq \frac{r}{p}$$

Neste caso, a função é crescente enquanto $k \leq \frac{6}{0.8} = 7.5$*, isto é*

$$... \leq p(6) \leq p(7) \leq p(8) \geq p(9) \geq ...$$

Ou seja, a moda é $X = 8$*. Enfim, seja* Y *o número de sucessos nos* 9 *primeiros experimentos. Então* $Y \sim Bin(9, 0.8)$ *e*

$$\begin{aligned} \Pr(X < 10) &= \Pr(Y \geq 6) = \Pr(Y = 6) + \Pr(Y = 7) + \Pr(Y = 8) + \Pr(Y = 9) = \\ &= \text{BinomialDist}(9; 9, 0.8) - \text{BinomialDist}(6; 9, 0.8) = 73.82\% \end{aligned}$$

Ex. 45 *Para que* $X = k$ *sejam sacadas, devemos ter* $p-1$ *bolas pretas nas primeiras* $k-1$ *extrações (probabilidade dada por uma hipergeométrica) e, enfim, a última bola preta na próxima retirada (probabilidade* $\frac{1}{b+p-k+1}$ *pois ainda há* $b + p - k + 1$ *bolas na urna). Em suma, para* $k = p,\ p+1,\ ...,\ b+p$*, temos:*

$$\Pr(X = k) = \frac{\binom{p}{p-1}\binom{b}{k-p}}{\binom{b+p}{k-1}} \frac{1}{b+p-k+1} = p\frac{b!}{(b+p)!}\frac{(k-1)!}{(k-p)!}$$

Ex. 46 *Seja* X *o número de lançamentos até o sucesso de tirar um* 1 *ou um* 6*. Então* $X \sim Geom\left(\frac{1}{3}\right)$*. Note que* $L = 40 - 15X$ *(pois os* \$10 *extra da primeira rodada são inevitáveis e podem ser debitados do prêmio inevitável de* \$50*). Então:*

$$\begin{aligned} \Pr(L < 0) &= \Pr(40 - 15X < 0) = \Pr(X > 2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \\ E(L) &= 40 - 15E(X) = 40 - \frac{15}{1/3} = -5 \end{aligned}$$

Ex. 47 *Se* X *é o número de pedidos em um mês, então* $X \sim Poi((0.2)(30))$*. Assim,* $E(X) = 6$*.*
Se Y *é o número de pedidos em uma semana, então* $Y \sim Poi(1.4)$*. Então*

$$\Pr(Y = 0) = e^{-1.4} = 24.66\%$$

Enfim, se Z *é o número de pedidos em um dia, então* $Z \sim Poi(0.2)$ *e a probabilidade de haver ao menos um conserto num dia é*

$$\Pr(Z > 0) = 1 - e^{-0.2} = 18.127\%$$

Se W *é o número de dias "com conserto" numa semana. Então* $W \sim Bin\left(7, 1 - e^{-0.2}\right)$ *e*

$$E(W) = 7\left(1 - e^{-0.2}\right) = 1.269 \textit{ dias por semana com pedidos}$$

Ex. 48 *Seja* X *o número de lançamentos. Então* $X \sim Geom(p)$*. O lucro é* $L = 75 - 12X$*.*
a) Se $p = 0.3$

$$\begin{aligned} E(L) &= E(75 - 12X) = 75 - 12E(X) = 75 - \frac{12}{0.3} = 35 \textit{ milhões} \\ Var(L) &= Var(75 - 12X) = 144Var(X) = (144)\frac{0.7}{(0.3)^2} = 1120 \ (\textit{\$milhões})^2 \end{aligned}$$

b) Para ter lucro esperado positivo

$$E(L) = 75 - \frac{12}{p} \geq 0 \Leftrightarrow p \geq \frac{12}{75} = 16\%$$

Ex. 49 *a)* $X\tilde{}Geom(0.4)$ *b)* $X\tilde{}Poi\,(20/365)$ *c)* $X\tilde{}Bin\,(70, 0.2)$
d) $X\tilde{}Hip\,(10, 6, 60)$ *ou* $X\tilde{}Hip\,(6, 10, 60)$ *e)* $X\tilde{}Bin\,(2141, 1/365)$ *ou aprox.* $X\tilde{}Poi\,(2141/365)$
f) $X\tilde{}Hip\,(4, 4, 22)$

Ex. 50 *Seja X o número de acidentes em um dia. Então* $X \sim Poi\left(\frac{18}{30}\right) = Poi\,(0.6)$. *Portanto*

$$\Pr(Bom) = \Pr(X = 0) = \frac{(0.6)^0}{0!}e^{-0.6}$$

Seja Y o número de dias bons. Então $Y \sim Bin\left(30, e^{-0.6}\right)$. *Assim*

$$E\,(Y) = 30e^{-0.6} = 16.464 \text{ dias bons}$$

Ex. 51 *Seja X o número de vezes em que você joga. Então* $X \sim Geom\left(p = \frac{1}{37}\right)$. *O lucro será*

$$L = 350 - 10\,(X - 1) = 360 - 10X$$

a)

$$E\,(L) = 360 - 10E\,(X) = 360 - 10\frac{1}{p} = 360 - 370 = -\$10$$
$$Var\,(L) = 100Var\,(X) = 100\frac{q}{p^2} = 100\frac{36/37}{1/37^2} = 100\,(36)\,(37) = 133200\,(\$)^2$$

b)

$$\Pr(L > 0) = \Pr(X < 36) = 1 - q^{35} = 1 - \left(\frac{36}{37}\right)^{35} = 61.67\%$$

Ex. 52 *a) Cada dia é uma prova de Bernoulli com probabilidade de sucesso (ação subir)* 70%. *Assim,* $Z \sim Bin\,(90, 0.7)$.
b) O lucro é

$$L = 2Z - 4\,(90 - Z) = 6Z - 360$$

Assim, seu valor esperado é

$$E\,(L) = E\,(6Z - 360) = 6E\,(Z) - 360 = 6\,(90)\,(0.7) - 360 = \$18$$

c) Temos

$$\Pr(L \geq 50) = \Pr(6Z - 360 \geq 50) = \Pr\left(Z \geq \frac{410}{6}\right) = \Pr(Z \geq 68.33) = \Pr(Z \geq 69)$$

Usando uma tabela[2]

$$\Pr(Z \geq 69) = 1 - \text{BinomialDist}\,(68; 90, 0.7) = 10.10\%$$

Ex. 53 *a) A distribuição de Poisson é dada por*

$$\Pr(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Neste caso

$$\Pr(X < 2) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) = e^{-7.1}\,(1 + 7.1) = 0.6683\%$$

[2] Mais tarde, aprenderemos a usar uma *aproximação normal à binomial*:

$$\Pr(Z \geq 69) \approx \int_{a^*}^{\infty} \phi\,(x)\,dx = 1 - \text{NormalDist}\,(1.265) = 10.29\%$$

onde $a^* = \frac{68.5-63}{\sqrt{90(0.7)(0.3)}} = 1.265$.

b) Seja Y o número de dias até o primeiro "sucesso" (onde sucesso é $X < 2$). Então Y tem uma distribuição geométrica com $p = 0.6683\%$. O valor esperado de Y é

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.6683\%} = 149.633$$

ou seja, o valor esperado é de 149.6 dias.
c) Basta calcular

$$\Pr(Y \leq 90) = 1 - q^{90} = 1 - (0.993\,317)^{90} = 45.31\%$$

Alternativas: não ter comemoração significa que cada dia destes 90 é um "fracasso", isto é, a probabilidade de não ter comemoração é q^{90}. Assim, "algum sucesso" nos próximos 90 dias ocorre com probabilidade $1 - q^{90}$.
Outra opção é criar a variável Z (número de dias de sucesso). Então Z é binomial com parâmetros $n = 90$ e $p = 0.6683\%$. Portanto

$$\Pr(Z > 0) = 1 - \Pr(Z = 0) = 1 - \binom{90}{0} p^0 q^{90} = 1 - q^{90}$$

Chapter 4

Respostas dos Exercícios do Capítulo 4

Ex. 1 $k = 2$; $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ x^2, \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$; *moda:* 1; *quartis:* $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ex. 2 $k = \frac{1}{2}$; $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ \frac{1-\cos x}{2}, \text{ se } 0 \leq x \leq \pi \\ 1, \text{ se } x > \pi \end{cases}$; *moda:* $\frac{\pi}{2}$; *quartis:* $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ *e* $\frac{2\pi}{3}$.

Ex. 3 $k = \alpha A^{\alpha}$; *mediana:* $A.2^{1/\alpha}$; *A seria a "riqueza mínima" na população.*

Ex. 4 *a) Y é uniforme em* $[0, 1]$: $F_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{ se } y < 0 \\ y, \text{ se } 0 \leq y \leq 1 \\ 1, \text{ se } y > 1 \end{cases}$ *e* $f_Y(y) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$

b) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, \text{ se } z < 0 \\ \frac{\sqrt{z}}{12}, \text{ se } 0 \leq z \leq 144 \\ 1, \text{ se } z > 144 \end{cases}$ *e* $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{24\sqrt{z}}, \text{ se } 0 \leq z \leq 144 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$

c) $F_W(w) = \begin{cases} 0, \text{ se } w < 0 \\ \frac{\sqrt{w}}{6}, \text{ se } 0 \leq w \leq 36 \\ 1, \text{ se } w > 36 \end{cases}$ *e* $f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{12\sqrt{w}}, \text{ se } 0 \leq z \leq 36 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$

Ex. 5 $F_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{ se } y < -1 \\ 1 - \frac{\arccos y}{\pi}, \text{ se } -1 \leq y \leq 1 \\ 1, \text{ se } y > 1 \end{cases}$ *e* $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, \text{ se } -1 \leq y \leq 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$

$F_Z(z) = \begin{cases} 0, \text{ se } z < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\arcsin z}{\pi}, \text{ se } -1 \leq z \leq 1 \\ 1, \text{ se } z > 1 \end{cases}$ *e* $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-z^2}}, \text{ se } -1 \leq z \leq 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$

Como $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, *as distribuições de Y e Z são de fato idênticas.*

Ex. 6 *Y é uniforme em* $[0, 1]$ *em ambos os itens.*

Ex. 7 *O q-quantil é* $x_q = \sqrt[a]{1 - \sqrt[b]{1-q}}$; *assim, os quartis são* $\sqrt[a]{1 - \sqrt[b]{\frac{3}{4}}}$, $\sqrt[a]{1 - \sqrt[b]{\frac{1}{2}}}$ *e* $\sqrt[a]{1 - \sqrt[b]{\frac{1}{4}}}$. *A f.d.p. é* $f(x) = abx^{a-1}(1-x^a)^{b-1}$. *Derive a f.d.p. e iguale a zero para encontrar candidatos à moda no intervalo* $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ab\left((a-1)x^{a-2}(1-x^a)^{b-1} - (b-1)ax^{a-1}x^{a-1}(1-x^a)^{b-2}\right) = \\ &= abx^{a-2}(1-x^a)^{b-2}((a-1)(1-x^a) - (b-1)ax^a) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x^a = \frac{a-1}{ab-1} \end{aligned}$$

Assim, a moda será 0, 1 ou $x_3 = \sqrt[a]{\frac{a-1}{ab-1}}$. *Se* $a > 1$ *e* $b > 1$ *(o que o enunciado deveria ter dito), então* $f(0) = f(1) = 0$ *e portanto a moda deverá ser* x_3. *Nos casos em que* $a \leq 1$ *ou* $b \leq 1$ *a moda pode perfeitamente ser 0 ou 1 dependendo dos valores exatos de a e b.*

Ex. 8 *Os quartis são* $-\ln 3$, 0 *e* $\ln 3$. *A f.d.p. é* $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1}{e^x+e^{-x}+2}$. *Para encontrar a moda, é mais fácil encontrar o mínimo de* $e^x + e^{-x}$, *que se dá para* $x = 0$.

Ex. 9

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x(2x)\,dx = \frac{2}{3} \\ E\left(X^2\right) &= \int_0^1 x^2(2x)\,dx = \frac{1}{2} \\ Var(X) &= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Ex. 10 *Lembre como calcular estas integrais:*

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x dx}_{dv} &= -x\cos x + \int \cos x dx = \sin x - x\cos x \\ \int x^2 \sin x dx &= -x^2\cos x + \int 2x\cos x dx = -x^2\cos x + \left(2x\sin x - \int 2\sin x dx\right) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\pi \frac{x\sin x}{2}dx = \frac{\pi}{2} \\ E\left(X^2\right) &= \int_0^\pi \frac{x^2\sin x}{2}dx = \frac{\pi^2}{2} - 2 \\ Var(X) &= \left(\frac{\pi^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

Ex. 11 *Desde que* $\alpha > 1$, *temos*

$$E(X) = \int_A^\infty x\alpha A^\alpha x^{-\alpha-1}dx = \alpha A^\alpha \int_A^\infty x^{-\alpha}dx = \alpha A^\alpha \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_A^\infty = -\alpha A^\alpha \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{\alpha A}{\alpha - 1}$$

Se $\alpha \leq 1$, *isto é,* $1 - \alpha \geq 0$, *a integral diverge em* $+\infty$. *Analogamente*

$$E\left(X^2\right) = \int_A^\infty x^2\alpha A^\alpha x^{-\alpha-1}dx = \alpha A^\alpha \int_A^\infty x^{1-\alpha}dx = \alpha A^\alpha \left[\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_A^\infty = -\alpha A^\alpha \frac{A^{2-\alpha}}{2-\alpha} = \frac{\alpha A^2}{\alpha - 2}$$

desde que $\alpha > 2$ *(caso contrário, a integral diverge). Então:*

$$Var(X) = \frac{\alpha A^2}{\alpha - 2} - \left(\frac{\alpha A}{\alpha - 1}\right)^2 = \frac{\alpha A^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

Ex. 12 *De fato, fazendo a substituição* $y = 1 + x^2$:

$$\int x\frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{2y}dy = \frac{\ln y}{2} + C = \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2} + C$$

Então

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A x\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{A\to\infty} \frac{\ln\left(1+A^2\right)}{2\pi}$$

que diverge! Assim, a integral do valor esperado diverge.

Ex. 13 *Note que* t *não é uma variável aleatória! Então:*

$$f(t) = E\left((X-t)^2\right) = t^2 - 2tE(X) + E\left(X^2\right)$$

que é uma função qudrática em t *com concavidade para cima; seu valor mínimo será obtido para*

$$t = -\frac{-2E(X)}{2} = E(X)$$

Ex. 14 *Esta é um pouco pior. Afinal*

$$g(t) = E(|X-t|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-t| f(x)\,dx$$

Divida esta integral em dois pedaços, $x > t$ e $x < t$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{t} (t-x) f(x)\,dx + \int_{t}^{+\infty} (x-t) f(x)\,dx = \\ &= t\left(\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx - \int_{t}^{\infty} f(x)\,dx\right) - \int_{-\infty}^{t} x f(x)\,dx + \int_{t}^{\infty} x f(x)\,dx \end{aligned}$$

Agora, seja F a distribuição acumulada de X, isto é

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = F(t)$$

Então

$$\int_{t}^{\infty} f(x)\,dx = 1 - F(t)$$

Note também que a SOMA das duas integrais mais à direita é exatamente $\mu = E(X)$, isto é

$$\int_{t}^{\infty} x f(x)\,dx = \mu - \int_{-\infty}^{t} x f(x)\,dx$$

Substituindo isto tudo:

$$\begin{aligned} g(t) &= t(F(t) - (1 - F(t))) + \mu - 2\int_{-\infty}^{t} x f(x)\,dx = \\ &= t(2F(t) - 1) - 2\int_{-\infty}^{t} x f(x)\,dx + \mu \end{aligned}$$

A derivada de g é:

$$g'(t) = (2F(t) - 1) + t(2f(t)) - 2tf(t) = 2F(t) - 1$$

Assim, o único pontos crítico de g satisfaz $2F(t) - 1 = 0$, isto é, $F(t) = \frac{1}{2}$, ou seja, é a mediana.

Ex. 15 *Lembre que*

$$\Pr(X > t) = \int_{t}^{\infty} f(x)\,dx$$

Então

$$\int_{0}^{\infty} \Pr(X > t)\,dt = \int_{0}^{\infty}\int_{t}^{\infty} f(x)\,dxdt$$

A integral dupla à direita é feita na região $0 < t < \infty$ e $t < x < \infty$, ou seja, a região do plano xt à direita da reta $x = t$ e acima da reta $x = 0$. Inverta a ordem de integração:

$$\int_{0}^{\infty} \Pr(X > t)\,dt = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{x} f(x)\,dtdx = \int_{0}^{\infty} f(x)\left(\int_{0}^{x} dt\right)dx = \int_{0}^{\infty} x f(x)\,dx = E(X)$$

pois, para $x < 0$, $f(x) = 0$.

Ex. 16 *a) Seja $Y = (X-\mu)^2$. Como $Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 \geq 0$, temos $E\left((X-\mu)^4\right) \geq \left(E\left((X-\mu)^2\right)\right)^2 = (Var(X))^2 = \sigma^4$. Em suma, $E\left((X-\mu)^4\right) \geq \sigma^4$ e o coeficiente de curtose é maior ou igual a 1.*
b) Note que o coeficiente de curtose não se modifica se trocarmos X por $X + c$ onde c é uma constante qualquer.

Assim, ao invés de trabalhar com a distribuição uniforme em $[a,b]$, *vamos trabalhar com a distribuição uniforme* $[-c,c]$ *onde* $c=\frac{b-a}{2}$. *Aqui, temos* $\mu=0$ *e:*

$$\begin{aligned} E\left((X-\mu)^4\right) &= \int_{-c}^{c} x^4\frac{1}{2c}dx = \left[\frac{x^5}{10c}\right]_{-c}^{c} = \frac{c^4}{5} \\ Var\left(X\right) &= \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{c^2}{3} \Rightarrow \sigma^4 = \frac{c^4}{9} \end{aligned}$$

Então o coeficiente de curtose é

$$\frac{E\left((X-\mu)^4\right)}{\sigma^4} = \frac{c^4/5}{c^4/9} = \frac{9}{5}$$

4.1 Exercícios de Provas

Ex. 17 *a) A densidade é*

$$f\left(y\right) = \begin{cases} 20000y^{-3}, \ se\ y \geq 100 \\ 0, \ se\ y < 100 \end{cases}$$

b)

$$\Pr\left(Y>200\right) = 1-F\left(200\right) = 1-\left(1-\left(\frac{100}{200}\right)^2\right) = \frac{1}{4}$$

c)

$$E\left(Y\right) = \int_{100}^{+\infty} y\left(20000y^{-3}\right)dy = \int_{100}^{+\infty} 20000y^{-2}dy = \left(-\frac{20000}{y}\right]_{100}^{\infty} = -0+200 = 200$$

Chapter 5

Respostas dos Exercícios do Capítulo 5

Ex. 1 *a)*

$$F(a) = \begin{cases} 0, \text{ para } a < 2 \\ a - 2, \text{ para } 2 \leq a \leq 3 \\ 1, \text{ para } a > 3 \end{cases} \qquad f(a) = \begin{cases} 1, \text{ para } 2 \leq a \leq 3 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \qquad E(A) = \frac{5}{2} \quad Var(A) = \frac{1}{12}$$

b)

$$F(b) = \begin{cases} 0, \text{ para } b < 0 \\ \sqrt[3]{b}, \text{ para } 0 \leq b \leq 1 \\ 1, \text{ para } b \geq 1 \end{cases} \qquad f(b) = \begin{cases} \frac{1}{3b^{2/3}}, \text{ para } 0 \leq b \leq 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \qquad E(B) = \frac{1}{4} \quad Var(B) = \frac{9}{112}$$

c)

$$F(c) = \begin{cases} 0, \text{ para } c < \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{1}{c}, \text{ para } \frac{1}{2} \leq c \leq 1 \\ 1, \text{ para } c > 1 \end{cases} \qquad f(c) = \begin{cases} \frac{1}{c^2}, \text{ para } \frac{1}{2} \leq c \leq 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \qquad E(C) = \ln 2 \quad Var(C) = \frac{1}{2} - \ln^2 2$$

d)

$$F(d) = \begin{cases} 0, \text{ se } d < 0 \\ e^d - 1, \text{ se } 0 \leq d \leq \ln 2 \\ 1, \text{ se } d > \ln 2 \end{cases} \qquad f(d) = \begin{cases} e^d, \text{ se } 0 \leq d \leq \ln 2 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \qquad E(D) = 2\ln 2 - 1 \quad Var(D) = 1 - 2\ln^2 2$$

e) Esta variável terá distribuição uniforme em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$*, isto é:*

$$F(e) = \begin{cases} 0, \text{ para } e < 0 \\ 2e, \text{ para } 0 \leq e \leq \frac{1}{2} \\ 1, \text{ para } e > \frac{1}{2} \end{cases} \qquad f(e) = \begin{cases} 2, \text{ para } 0 \leq e \leq \frac{1}{2} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \qquad E(E) = \frac{1}{4} \quad Var(E) = \frac{1}{48}$$

f) Aqui vamos usar x *como variável:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ para } x < 0 \\ 2\sqrt{x}, \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 1, \text{ para } x > \frac{1}{4} \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \qquad E(F) = \frac{1}{12} \quad Var(F) = \frac{1}{180}$$

Ex. 2

$$\Pr\left(25U^2 - 16U \geq 0\right) = \Pr\left(U \leq 0 \text{ ou } U \geq \frac{16}{25}\right) = 1 - \frac{16}{25} = 36\%$$

Ex. 3 *Para* $(c,d) = \left(\frac{1}{b-a}, \frac{-a}{b-a}\right)$ *ou* $(c,d) = \left(\frac{-1}{b-a}, \frac{b}{b-a}\right)$.

Ex. 4

$$F(y) = \begin{cases} 1 - e^{-5(y-4)/3}, \text{ para } y \geq 4 \\ 0, \text{ para } y < 4 \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} -\frac{5}{3}e^{5(y-4)/3}, \text{ para } y \geq 4 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \qquad E(Y) = \frac{23}{5} \quad Var(Y) = \frac{9}{25}$$

Ex. 5

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2t}, \text{ se } t \geq 0 \\ 0, \text{ se } t < 0 \end{cases} \qquad R(t) = \begin{cases} e^{-2t}, \text{ se } t \geq 0 \\ 1, \text{ c.c.} \end{cases} \qquad E(T) = \sigma(T) = \frac{1}{2} \quad \text{Quartis:} \ln 2 - \frac{\ln 3}{2}; \frac{\ln 2}{2}; \ln 2$$

Ex. 6 *Seja T o tempo de vida (em horas). Então $T \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$. Queremos que t (o tempo de garantia) seja o 0.01-quantil, pois:*

$$R(t) = \Pr(T > t) = 1 - F(t) = e^{-0.001t} = 0.99 \Rightarrow t = -1000 \ln 0.99 = 10.050336$$

Ou seja, a garantia tem de ser apenas 10 horas (e alguns minutos).

Ex. 7 *Seja T o tempo de vida em horas. Então $T \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$. O lucro é uma variável discreta com apenas dois valores possíveis:*

$$\begin{aligned} \Pr(L = 1000) &= \Pr(T > 800) = e^{-800/1000} = e^{-0.8} \\ \Pr(L = -500) &= \Pr(T \leq 800) = 1 - e^{0.8} \end{aligned}$$

Assim

$$E(L) = 1000e^{-0.8} - 500\left(1 - e^{0.8}\right) = 1500e^{-0.8} - 500 = 173.99$$

Ex. 8 *Se $n \geq 1$, temos:*

$$E\left(T^{n+1}\right) = \int_0^\infty \underbrace{t^{n+1}}_{u} \underbrace{e^{-t}dt}_{dv} = \left(\frac{-t^n e^{-t}}{n}\right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty -e^{-t}(n+1)t^n dt = 0 + (n+1)\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = (n+1)E(T^n)$$

Então

$$E(T^n) = nE\left(T^{n-1}\right) = n(n-1)E\left(T^{n-2}\right) = ... = n(n-1)(n-2)...2E(T) = n!$$

pois $E(T) = 1$.

Ex. 9 *a) Da mesma forma que fizemos para a distribuição geométrica:*

$$\Pr(T > r + s \mid T > r) = \frac{\Pr(T > r + s \text{ e } T > r)}{\Pr(T > r)} = \frac{\Pr(T > r + s)}{\Pr(T > r)} = \frac{e^{-\lambda(r+s)}}{e^{-\lambda r}} = e^{-\lambda s} = \Pr(T > s)$$

b) Sim, é possível. Afinal, se o tempo de vida da bateria tiver uma distribuição exponencial, então sua estória passada não influi no tempo da próxima falha. Assim, se T é o tempo da próxima falha a partir de agora:

$$\Pr(T \leq 24 \mid \text{estória passada}) = \Pr(T \leq 24) = 1 - e^{-24/500} = 4.6866\%$$

Ex. 10 *Como visto no problema anterior, na distribuição exponencial, a estória passada não influi no tempo de ocorrência do próximo evento. Assim, mesmo que já tenham se passado 60 minutos, o tempo de espera pelo próximo ônibus seria de (mais) 30 minutos*[1]*. Isto não parece estar correto – de fato,* ***o modelo de Poisson não é adequado para eventos que ocorrem de maneira tão regular quanto horários de ônibus.*** *No horário do ônibus, o fato do ônibus ter passado diminui a probabilidade de ele passar de novo em seguida, e o fato do ônibus não ter passado aumenta a probabilidade de ele estar chegando: intervalos de tempo disjuntos* não são independentes *por causa da (suposta) regularidade do horário, quebrando uma das hipóteses do modelo de Poisson.*

Ex. 11 *Temos que $Z \sim Exp(1)$. Fazendo a experiência no EXCEL, a média das 1000 amostras estará bem perto de $E(Z) = 1$, entre 0.905 e 1.095 (ao menos que você dê* ***muito azar****; mais tarde, veremos que a chance desta média* ***não cair*** *entre 0.905 e 1.095 é de aproximadamente 0.27%).*

[1] *Havia um erro tipográfico no enunciado original: devia ser $Exp\left(\frac{1}{30}\right)$ para que $E(T) = 30$. Do jeito que estava antes, $T \sim Exp(30)$, eram 30 ônibus por minuto!*

Ex. 12 *Como as lâmpadas são independentes*[2]*:*

$$\Pr(T_1 \geq 1 \text{ e } T_2 \geq 1) = \Pr(T_1 \geq 1)\Pr(T_2 \geq 1) = e^{-1/4}e^{-1/3} = e^{-7/12} = 55.80\%$$

Para 3 *meses, fazemos*

$$\Pr(T_1 \geq 3 \text{ e } T_2 \geq 3) = \Pr(T_1 \geq 3)\Pr(T_2 \geq 3) = e^{-3/4}e^{-1} = e^{-7/4} = 17.38\%$$

Sendo $T = \min(T_1, T_2)$*, é fácil ver que*

$$\Pr(T \geq t) = \Pr(T_1 \geq t \text{ e } T_2 \geq t) = e^{-t/4}e^{-t/3} = e^{-7t/12}$$

ou seja, a distribuição de T *também é exponencial com parâmetro* $\lambda = 7/12$*.*

Ex. 13 *Seja* $x \in [0,1]$*. Então, como* X *é o maior dentre* U *e* V *e estes são independentes:*

$$\Pr(X \leq x) = \Pr(U \leq x \text{ e } V \leq x) = \Pr(U \leq x)\Pr(V \leq x) = x.x = x^2$$

Assim:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ x^2, \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, \text{ se } x > 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases} \qquad E(X) = \frac{2}{3}$$

Ex. 14 *O método é o mesmo dos últimos problemas:*

$$\Pr(T \geq t) = \Pr(T_1 \geq t \text{ e } T_2 \geq t) = \Pr(T_1 \geq t)\Pr(T_2 \geq t) = e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

que é a f.d.a. de uma exponencial de parâmetro $\lambda_1 + \lambda_2$*.*

Ex. 15 *a) Para* $t \geq 0$*:*

$$\Pr(X \geq 2) = 1 - \Pr(X = 0) - \Pr(X = 1) = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$$

b) $(T \leq t)$ *significa "segundo evento ocorre em* $[0,t]$*"*
$(X \geq 2)$ *siginifica "ocorreram pelo menos* 2 *eventos em* $[0,t]$*"*
As frases são equivalentes! Assim, $\Pr(T \leq t) = \Pr(X \geq 2)$*.*
c) Para $t \geq 0$*, a f.d.a. de* T *é*

$$F(t) = \Pr(T \leq t) = \Pr(X \geq 2) = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$$

Derivando

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}(1 + \lambda t) - e^{-\lambda t}(\lambda) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

para $t \geq 0$*, e claramente* $f(t) = 0$ *caso contrário.*

Ex. 16

$$\Gamma(1.5) = (0.5)\Gamma(0.5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad \Gamma(2.5) = (1.5)\Gamma(1.5) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

Ex. 17

$$\Gamma(3.4) = (2.4)(1.4)(0.4)\Gamma(0.4) = 1.344\,\Gamma(0.4) = 2.981 \text{ (entre } 2! \text{ e } 3!\text{)}$$

[2] Na primeira versão que estava no site, havia um outro erro tipográfico; trocamos λ por $\frac{1}{\lambda}$ e as lâmpadas duravam em média menos de 10 dias! Com o enunciado antigo, as respostas eram:

$$\begin{aligned} \Pr(T_1 \geq 1 \text{ e } T_2 \geq 1) &= \Pr(T_1 \geq 1)\Pr(T_2 \geq 1) = e^{-1/4}e^{-1/3} = e^{-7/12} = 0.09119\% \\ \Pr(T_1 \geq 3 \text{ e } T_2 \geq 3) &= \Pr(T_1 \geq 3)\Pr(T_2 \geq 3) = e^{-12}e^{-9} = e^{-21} = 7.583 \times 10^{-10} \\ \Pr(T \geq t) &= e^{-3t}e^{-4t} = e^{-7t} \Rightarrow T \sim Exp(7) \end{aligned}$$

Ex. 18 *Seja T_2 o tempo (em minutos) em que o segundo gol ocorre. Então T_2 tem distribuição Gama de parâmetros $\alpha = 2$ e $\lambda = \frac{2.89}{90}$. A moda de T_2 é*

$$Moda\,(T_2) = \frac{\alpha - 1}{\lambda} = \frac{90}{2.89} = 31.141$$

Então eu apostaria no minuto 31 do jogo como o momento do segundo gol. Analogamente, $T_3 \sim \Gamma(3, \lambda)$ tem moda

$$Moda\,(T_3) = \frac{2\,(90)}{2.89} = 62.282$$

Então o minuto mais provável para o terceiro gol é o minuto entre os $17'$ e $18'$ do segundo tempo.

Ex. 19 *Faça uma figura e usa a simetria da distribuição normal. Note que A só faz sentido se $z > 0$. Então:*

$$\begin{aligned} F(z) &= 1 - R(z) \text{ ou } R(z) = 1 - F(z) \\ A(z) + R(z) &= \frac{1}{2} \text{ (para } z > 0\text{)} \\ F(z) &= 1 - \left(\frac{1}{2} - A(z)\right) = \frac{1}{2} + A(z) \text{ ou } A(z) = F(z) - \frac{1}{2} \text{ (para } z > 0\text{)} \end{aligned}$$

Ex. 20 *Seja $Z = \frac{X-10}{4}$. Então:*
a) $\Pr(X \le 10) = \Pr(Z \le 0) = \frac{1}{2}$.
b) $\Pr(X \le 18) = \Pr(Z \le 2) = 97.72\%$
c) $\Pr(X > 13) = \Pr\left(Z > \frac{3}{4}\right) = 1 - \Pr\left(Z \le \frac{3}{4}\right) = 22.66\%$
d) $\Pr(13 \le X \le 18) = \Pr\left(\frac{3}{4} \le Z \le 2\right) = \Pr(Z \le 2) - \Pr\left(Z \le \frac{3}{4}\right) = 20.39\%$
e) $\Pr(6 \le X \le 14) = \Pr(-1 \le Z \le 1) = 68.27\%$
f) $\Pr(X \le 0) = \Pr\left(Z \le -\frac{5}{2}\right) = 0.6210\%$
g) $\Pr(9 \le X \le 11) = \Pr\left(-\frac{1}{4} \le Z \le \frac{1}{4}\right) = 19.74\%$
h) $\Pr(X > -4) = \Pr\left(Z > \frac{7}{2}\right) = 99.977\%$

Ex. 21 *a)* $a = \text{NormalInv}(0.95) = 1.6445$
b) $a = \text{NormalInv}(0.975) = 1.9600$
c) $a = \text{NormalInv}(0.995) = 2.5758$
d) $a = \text{NormalInv}(0.25) = -0.6745$
e) $a = \text{NormalInv}(0.81) = 0.8779$

Ex. 22 *Seja X a altura (em cm) de um estudante, e seja $Z = \frac{X-172}{5}$. Então*

$$\Pr(X > 180) = \Pr\left(Z > \frac{8}{5}\right) = 1 - \text{NormalDist}(1.6) = 5.4799\%$$

Agora, seja Y o número de estudantes que têm altura superior a 180cm. Então $Y \sim Bin(1000, 5.4799\%)$. Assim:

$$E(Y) = 1000\,(5.4799\%) = 54.799 \text{ alunos}$$

Enfim, a probabilidade de alguém ter 2m de altura ou mais seria:

$$\Pr(X > 200) = \Pr\left(Z > \frac{28}{5}\right) = 1 - \text{NormalDist}(5.6) = 1.072 \times 10^{-8}$$

ou seja, muito muito raro.

Ex. 23 *Sejam $Z_A = \frac{X_A-30}{6}$ e $Z_B = \frac{X_B-34}{3}$. Ambos Z_A e Z_B têm distribuição $N(0,1)$. Então*

$$\Pr(X_A > 34) = \Pr\left(Z_A > \frac{4}{6}\right) \text{ mas } \Pr(X_B > 34) = \Pr(Z_B > 0)$$

Mesmo sem calcular nada, a segunda probabilidade é maior (pois $0 < \frac{4}{6}$*). Assim, preferimos B para a missão de* 34 *horas.*
Analogamente

$$\Pr(X_A > 40) = \Pr\left(Z_A > \frac{5}{3}\right) \text{ mas } \Pr(X_B > 40) = \Pr(Z_B > 2)$$

e, como $\frac{5}{3} < 2$*, agora A tem mais chance de sobreviver à missão!*

Ex. 24 *Seja X a nota de um aluno, e* $Z = \frac{X-6}{2}$ *a nota normalizada. Como* $Z \sim N(0,1)$*, podemos ler os quantis* 0.2, 0.45, 0.85 *de uma tabela. São eles:*

$$\begin{aligned} Z_{0.2} &= \text{NormalInv}(0.2) = -0.8416 \\ Z_{0.45} &= \text{NormalInv}(0.45) = -0.1256 \\ Z_{0.85} &= \text{NormalInv}(0.85) = 1.0364 \end{aligned}$$

Calculando os $X = 2Z + 6$ *correspondentes:*

$$\begin{aligned} X_{0.2} &= 2\,\text{NormalInv}(0.2) + 6 = 4.317 \\ X_{0.45} &= 2\,\text{NormalInv}(0.45) + 6 = 5.748 \\ X_{0.85} &= 2\,\text{NormalInv}(0.85) + 6 = 8.073 \end{aligned}$$

Ou seja, as notas de corte devem ser aproximadamente 8 *(para nota A),* 5.75 *(para nota B) e* 4.32 *(entre C e D).*

Ex. 25 *Se* $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$*, então* $Z \sim N(0.1)$*. Os quartis de Z são*

$$\begin{aligned} Z_{0.25} &= \text{NormalInv}(0.25) = -0.6745 \\ Z_{0.5} &= 0 \\ Z_{0.75} &= \text{NormalInv}(0.75) = 0.6745 \end{aligned}$$

Assim, os quartis correspondentes de X são $\mu - 0.6745\sigma$*,* μ *e* $\mu + 0.6745\sigma$ *respectivamente.*

Ex. 26 *Comecemos pela distrbuição normal padrão. Temos:*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Derivando duas vezes, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} f'(z) &= -ze^{-z^2/2} \\ \sqrt{2\pi} f''(z) &= \left(-1 + z^2\right) e^{-z^2/2} \end{aligned}$$

que se anula se, e somente se, $z = \pm 1$*.*
Agora, a distribuição normal geral é

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Derivando duas vezes com relação a x:

$$\begin{aligned} \sigma g'(x) &= \frac{1}{\sigma} f'\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ \sigma g''(x) &= \frac{1}{\sigma^2} f''\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

ou seja, os zeros de g'' *são os zeros de* f''*, que vimos acima serem*

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = \pm 1 \Rightarrow x = \mu \pm \sigma$$

Assim, os pontos de inflexão de $g(x)$ *estão em* $x \pm \sigma$*.*

Ex. 27 *a) Como $X = e^Y$ é uma função crescente, podemos usar a fórmula de mudança de variáveis para a nova f.d.p. de X*

$$g(x) = \frac{f(y)}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{e^y}$$

Agora, substituindo $x = e^y$:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma} \exp\left(\frac{(\ln x - \mu)}{2\sigma^2}\right)$$

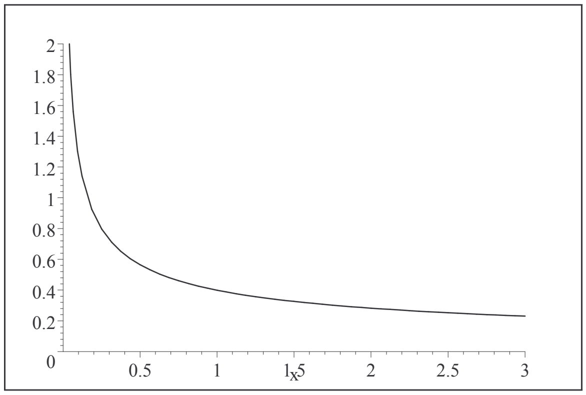


Gráfico da lognormal padrão ($\mu = 0$ e $\sigma = 1$)

b) Como $Y = \ln X \sim N(1.5, 1)$, então $Z = Y - 1.5 \sim N(0,1)$ e então:

$$\Pr(X > 2) = \Pr(Y > \ln 2) = \Pr(Z > \ln 2 - 1.5) = 1 - \text{NormalDist}(\ln 2 - 1.5) = 79.01\%$$

5.1 Exercícios de Provas

Ex. 28 *a) Como $X > 0$, podemos usar que $Y = X^2$ é uma função crescente. A fórmula de mudança de variáveis dá (para $x > 0$)*

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\frac{dy}{dx}} = \frac{2axe^{-ax^2}}{2x} = ae^{-ax^2} = ae^{-ay}$$

que é a densidae de uma distribuição exponencial de parâmetro a.
b) Usando $Y = X^2$, sabemos que $Y \sim Exp(0.01)$. Então:

$$\Pr(X > 20) = \Pr(Y > 400) = e^{-400(0.01)} = e^{-4} = 1.832\%$$

c) Note que, para $x > 0$:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \Pr\left(Y \leq x^2\right) = 1 - e^{-ax^2}$$

Então:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{0.02xe^{-0.01x^2}}{e^{-0.01x^2}} = 0.02x$$

d) As probabilidades de pequenos intervalos são aproximadamente proporcionais ao valores das densidades nestes intervalos. Assim, basta comparar

$$\begin{aligned} f(10) &= 0.2e^{-1} = 7.358\% \\ f(20) &= 0.4e^{-2} = 5.413\% \end{aligned}$$

Como a primeira é maior, é mais provável que o equipamento falhe no primeiro dia do décimo mês do que no primeiro dia do vigésimo mês.
e) A taxa de falhas é $\lambda(x) = 0.02x$ (falhas por mês). Como a taxa de falhas é menor para $x = 10$ do que para $x = 20$, eu preferiria usar o equipamento com 10 meses de uso.

Ex. 29 *a) Se T é exponencial, a estória passada não influencia na estória futura. Assim*

$$E(T) = 30 \text{ meses}$$

isto é, (30 meses a partir de agora).
b) Se T é uniforme e $E(T) = 30$, então T é uniforme em $[0, 60]$. Como já se passaram 24 meses sem falha, temos para $t \in [24, 60]$:

$$\Pr(T \leq t \mid T \geq 24) = \frac{\Pr(24 \leq T \leq t)}{\Pr(T \geq 24)} = \frac{\frac{t-24}{60}}{\frac{36}{60}} = \frac{t-24}{36}$$

ou seja, a nova distribuição de T (dado que $T \geq 24$) é uniforme em $[24, 60]$. Assim, o valor esperado de T é $E(T) = \frac{24+60}{2} = 42$ meses (ou seja, daqui a 18 meses).
c) Se $T \sim N(30, 10^2)$ então, tomando $Z = \frac{T-30}{10}$:

$$\Pr(T \geq 24 + 16 \mid T \geq 24) = \frac{\Pr(T \geq 40 \text{ e } T \geq 24)}{\Pr(T \geq 24)} = \frac{\Pr(T \geq 40)}{\Pr(T \geq 24)} = \frac{\Pr(Z \geq 1)}{\Pr(Z \geq -0.6)} = \frac{0.1586}{0.7257} = 21.86\%$$

Ex. 30 *a) Note que $X \sim Poi(2t)$, portanto*

$$\Pr(X \geq 2) = 1 - \Pr(X = 0) - \Pr(X = 1) = 1 - \frac{(2t)^0}{0!}e^{-2t} - \frac{(2t)^1}{1!}e^{-2t} = 1 - (1 + 2t)e^{-2t}$$

Note que os eventos $X \geq 2$ e $T \leq t$ são equivalentes, pois resolver pelo menos 2 questões em t horas significa que o tempo de resolver as 2 questões é menos de t horas. Assim

$$\Pr(T \leq t) = \Pr(X \geq 2) = 1 - (1 + 2t)e^{-2t} \text{ (desde que } t > 0)$$

b) A f.d.a. foi calculada no item anterior

$$F(t) = 1 - (1 + 2t)e^{-2t}$$

Derivando, temos a f.d.p.

$$f(t) = -2e^{-2t} + (1 + 2t)2e^{-2t} = 4te^{-2t} \text{ para } t \geq 0$$

Uma alternativa é perceber que simplesmente esta é a definição da distribuição Gama, isto é, T segue uma distribuição Gama com parâmetros $\alpha = 2$ e $\lambda = 2$ Então

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-\lambda t} = 4te^{-2t} \text{ para } t \geq 0$$

c) Para a distribuição Gama, sabemos que $E(T) = \alpha/\lambda = 1$ e $Var(T) = \alpha/\lambda^2 = 0.5$. Se você não lembra destas fórmulas, terá que fazer

$$\begin{aligned}
E(T) &= \int_0^\infty 4t^2e^{-2t}dt = \int_0^\infty u^2e^{-u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\Gamma(3) = \frac{1}{2}2! = 1 \\
E(T^2) &= \int_0^\infty 4t^3e^{-2t}dt = \int_0^\infty \frac{u^3}{2}e^{-u}\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\Gamma(4) = \frac{3!}{4} = \frac{3}{2} \\
Var(T) &= E(T^2) - (E(T))^2 = 0.5
\end{aligned}$$

d) Terminar a prova é ter $T \leq 1.5$, o que acontece com probabilidade:

$$\Pr(T \leq 1.5) = 1 - 4e^{-3} = 80.09\%$$

Então esta é a porcentagem esperada de alunos que terminará a prova antes de 1 hora e meia.

Ex. 31 *a) Sejam* $Z_A = \frac{X_A - 991}{4}$ *e* $Z_B = \frac{X_B - 988}{14}$. *Então* $Z_A \sim N(0,1) \sim Z_B$. *Temos*

$$\Pr(X_A < 995) = \Pr\left(Z_A < \frac{995 - 991}{4}\right) = \Pr(Z_A < 1) = 84.134\%$$
$$\Pr(X_B < 995) = \Pr\left(Z_B < \frac{995 - 988}{14}\right) = \Pr(Z_B < 0.5) = 69.146\%$$

Assim, a máquina B é melhor, com 69.146% de pacotes rejeitados.
b) Seja L o lucro de um pacote. A distribuição de L é simplesmente

l	\$0.40	\$0.25
$\Pr(L = l)$	30.854%	69.146%

Então $E(L) = (0.40)(0.30854) + (0.25)(0.69146) = 0.296281 \sim \$0.30$ *por pacote.*
c) O novo Z_A *é dado por* $\frac{Z_A - \mu}{4}$. *Queremos*

$$\Pr(X < 995) = \Pr(Z < z) = 0.33$$

Na tabela, procuramos por $(-)\,0.17$ *e encontramos* $z = \mathrm{NormalInv}(0.33) = (-)\,0.44$. *Então*

$$\frac{995 - \mu}{4} = -0.44 \Rightarrow \mu = 996.76g$$

é a nova média pedida.

Ex. 32 *a) Como* $X = e^{-\lambda T}$ *é decrescente, podemos usar:*

$$f_X(x) = \frac{f_T(t)}{-\frac{dx}{dt}} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{\lambda e^{-\lambda t}} = 1$$

que é válida para $t > 0$ *(que corresponde a* $0 < e^{-\lambda t} < 1$*). Assim, X é uniforme em* $[0,1]$ *e, portanto,* $E(X) = \frac{1}{2}$.
b) Fazendo $u = \lambda t$, *temos:*

$$E(T^n) = \int_0^\infty t^n \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty \frac{u^n}{\lambda^n} \lambda e^{-u} \frac{du}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^n} \int_0^\infty u^n e^{-u} du = \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^n} = \frac{n!}{\lambda^n}$$

pois n é natural.
c) Do item anterior, temos

$$E(T) = \frac{1}{\lambda};\ E\left(T^2\right) = \frac{2}{\lambda^2};\ E\left(T^3\right) = \frac{6}{\lambda^3}$$
$$Var(T) = E\left(T^2\right) - (E(T))^2 = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma(T) = \frac{1}{\lambda}$$

Subsituindo tudo na expressão de $Sk(T)$, *temos*

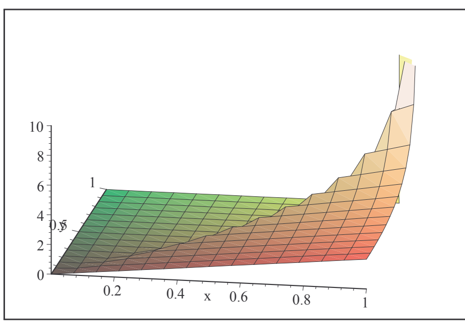
$$Sk(T) = \frac{\frac{6}{\lambda^3} - 3\frac{1}{\lambda}\frac{2}{\lambda^2} + 2\frac{1}{\lambda^3}}{\frac{1}{\lambda^3}} = 2$$

Chapter 6

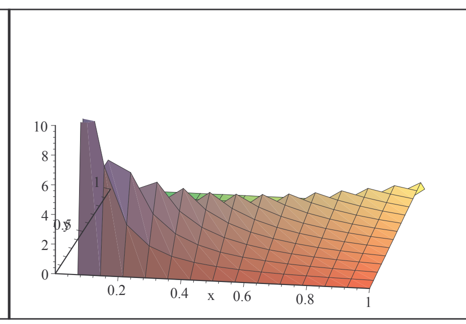
Respostas dos Exercícios do Capítulo 6

Ex. 1 *a)* $k=4$
b) $f_X(x)=\begin{cases}2x, & se\ 0\le x\le 1\\ 0, & caso\ contrário\end{cases}$; $f_Y(y)=\begin{cases}2y, & se\ 0\le y\le 1\\ 0, & caso\ contrário\end{cases}$
c) Sim; portanto $Cov(X,Y)=0$.
d) $\Pr(X+Y\le 1)=\frac{1}{6}$ *e* $\Pr\left(X+Y\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{96}$
e) Para $0\le x\le 1$: $f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)=\begin{cases}2y, & se\ 0\le y\le 1\\ 0, & caso\ contrário\end{cases}$; $E[Y|x]=E(Y)=\frac{2}{3}$.

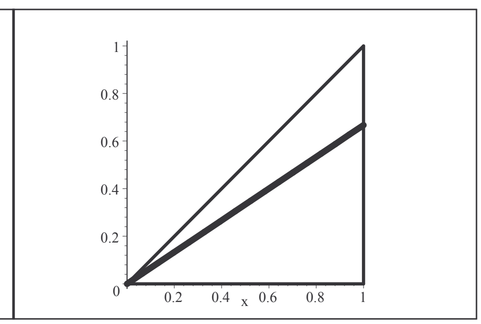
Ex. 2 *a)* $k=8$
b) $f_X(x)=\begin{cases}4x^3, & se\ 0<x<1\\ 0, & caso\ contrário\end{cases}$; $f_Y(y)=\begin{cases}4y\left(1-y^2\right), & se\ 0<y<1\\ 0, & caso\ contrário\end{cases}$
c) Não; $Cov(X,Y)=\frac{4}{225}$
d) $\Pr(X+Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_y^{1-y}8xy\,dx\,dy=\frac{1}{6}$ *e* $\Pr\left(X+Y\le\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{4}}\int_y^{\frac{1}{2}-y}8xy\,dx\,dy=\frac{1}{96}$
e) Para $0\le x\le 1$: $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{2y}{x^2}, & se\ 0\le y\le x\\ 0, & caso\ contrário\end{cases}$; $E[Y|x]=\frac{2x}{3}$.



2) $f_{X|Y}$



2e) $f_{Y|X}$



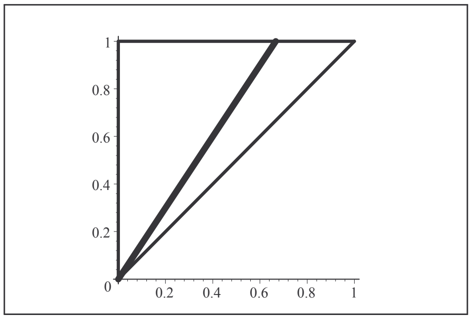
2e) Suporte de $f(x,y)$ e $E[Y|x]=\frac{2x}{3}$.

Ex. 3 *Note que* $f(x,y)=1$ *em* $[0,1]\times[0,1]$ *(e 0 caso contrário). Então:*

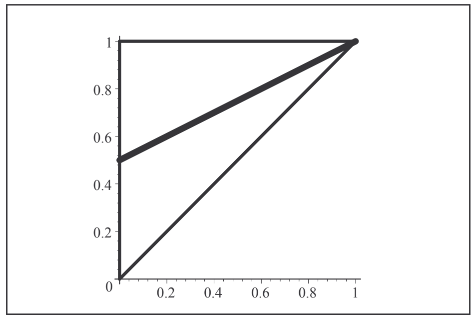
$$E\left(X^Y\right)=\int_0^1\int_0^1 x^y dxdy=\int_0^1\left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1}dy=\int_0^1\frac{1}{y+1}dy=\left(\ln(y+1)\right]_0^1=\ln 2$$

Ex. 4

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_0^y 6xdx=3y^2\ para\ 0\le y\le 1\\ f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{6x}{3y^2}=\frac{2x}{y^2}\\ E(X|Y=y) &= \int_0^y x\frac{2x}{y^2}dx=\left(\frac{2x^3}{3y^2}\right]_{x=0}^{x=y}=\frac{2y}{3}\end{aligned}$$



4) Suporte de $f(x,y)$ e $E[X|y] = \frac{2y}{3}$.



4) Para cada x fixo, $Y \sim U[x,1]$. Assim, $E[Y|x] = \frac{x+1}{2}$.

Ex. 5 *Os dados do problema são*

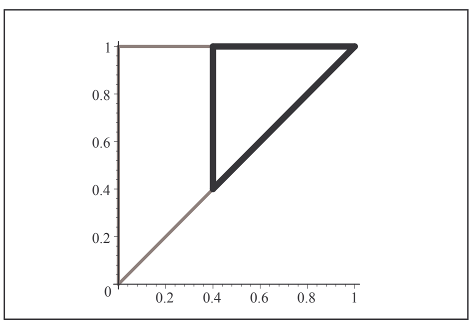
$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{1}{y} \text{ para } 0 \leq x \leq y \text{ (e 0 caso contrário)} \\ f_Y(y) &= 1 \text{ para } 0 \leq y \leq 1 \text{ (e 0 caso contrário)} \end{aligned}$$

então

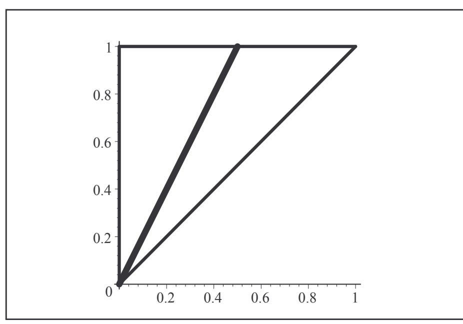
$$f(x,y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = \frac{1}{y} \text{ para } 0 \leq x \leq y \leq 1 \text{ (e 0 c.c.)}$$

e assim

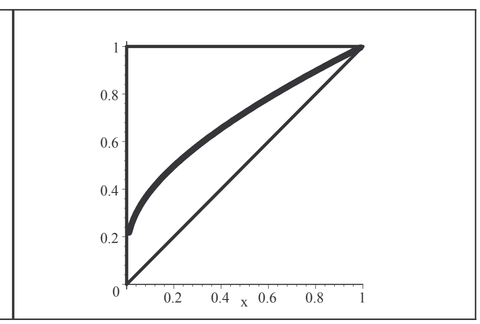
$$\begin{aligned} \Pr(X > 0.4) &= \int_{0.4}^{1} \int_{0.4}^{y} \frac{1}{y} dx dy = 0.6 + 0.4 \ln(0.4) = 0.2335 \\ Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$



5) A região $x > 0.4$ dentro do suporte de f.



5) Curva de regressão: $E[X|y] = \frac{y}{2}$.



5) Curva de regressão: $E[Y|x] = \frac{x-1}{\ln x}$.

Ex. 6 *Note que este não é propriamente um problema de duas variáveis, mas a idéia é a mesma da distribuição condicional. Dado que $X > \alpha$, a nova densidade de X é*

$$f(x \mid X > \alpha) = \begin{cases} \frac{f(x)}{\Pr(X>\alpha)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{\lambda \alpha}} = \lambda e^{\lambda(\alpha - x)} \text{ para } x \geq \alpha \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Então, fazendo $y = x - \alpha$:

$$E[X \mid X > \alpha] = \int_{\alpha}^{\infty} x \left(\lambda e^{\lambda(\alpha - x)}\right) dx = \int_{0}^{\infty} (\alpha + y) \lambda e^{-\lambda y} dy = \alpha + \frac{1}{\lambda}$$

Ex. 7 *Escrevendo $E[X|y] = g(y)$, fica fácil de ver o que está acontecendo. Afinal:*

$$E(E(X|Y)) = E(g(Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f_Y(y) dy$$

onde f_Y é a densidade marginal de Y. Porém, sabemos que

$$g(y) = E[X|y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x f(x,y)}{f_Y(y)} dx$$

Subsituindo esta fórmula acima:

$$E\left(E\left(X|Y\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xf\left(x,y\right)}{f_{Y}\left(y\right)}dx\right)f_{Y}\left(y\right)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf\left(x,y\right)dxdy=E\left(X\right)$$

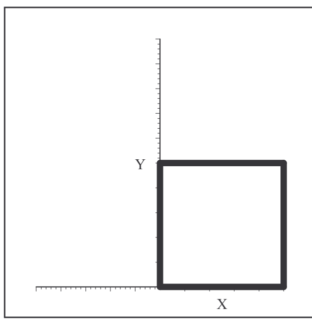
Ex. 8 *a)* $f_{Z,W}\left(z,w\right)=\begin{cases} ze^{-z},\ se\ z\geq 0\ e\ 0\leq w\leq 1\\ 0,\ caso\ contrário\end{cases}$

bc) Note que Z *e* W *são independentes! Então* $f_{Z}\left(z\right)=\begin{cases} ze^{-z},\ se\ z\geq 0\\ 0,\ caso\ contrário\end{cases}$; $f_{W}\left(w\right)=\begin{cases} 1,\ se\ 0\leq w\leq 1\\ 0,\ caso\ contrário\end{cases}$, *ou seja,* $Z\sim\Gamma(2,1)$ *e* $W\sim U\left[0,1\right]$.

Ex. 9 *Pelo método do Jacobiano, calculamos a densidade conjunta de* W *e* Z*:*

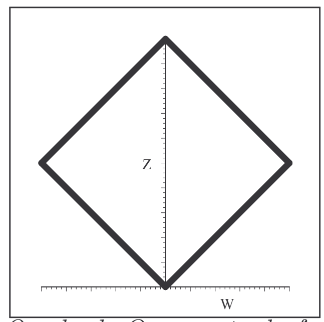
$$f_{W,Z}\left(w,z\right)=\begin{cases} \frac{z^{2}-w^{2}}{2},\ se\ \left(W,Z\right)\in Q\\ 0,\ caso\ contrário\end{cases}$$

onde Q *é o quadrado de vértices* $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ *e* $(-1,1)$.



O suporte de $f_{X,Y}$.

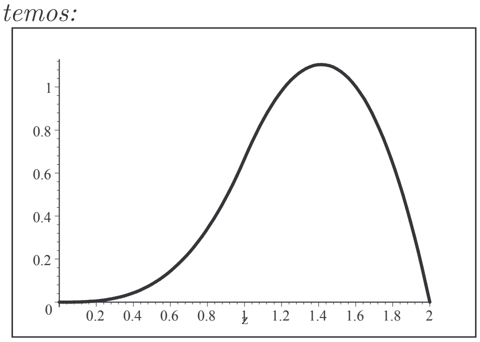
$\overset{T(x,y)=(x+y,x-y)}{\rightsquigarrow}$



O Quadrado Q*, suporte de* $f_{W,Z}$.

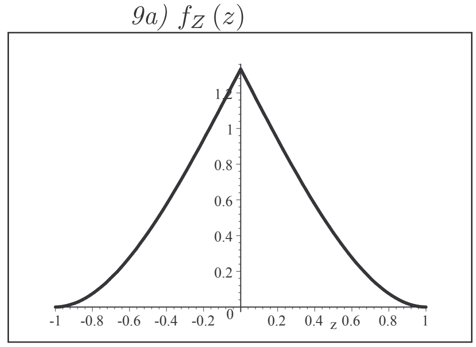
Integrando para encontrar as marginais, temos:

a) $f_{Z}\left(z\right)=\begin{cases} \frac{2z^{3}}{3},\ se\ 0\leq z\leq 1\\ 4z-\frac{2z^{3}+8}{3},\ se\ 1\leq z\leq 2\\ 0,\ caso\ contrário\end{cases}$



9a) $f_{Z}\left(z\right)$

b) $f_{W}\left(w\right)=\begin{cases} \frac{4-2w^{3}}{3}+2w,\ se\ -1\leq w\leq 0\\ \frac{4+2w^{3}}{3}-2w,\ se\ 0\leq w\leq 1\\ 0,\ caso\ contrário\end{cases}$



9b) $f_{W}\left(w\right)$

c) Não há necessidade de usar a densidade conjunta de W *e* Z*. Basta fazer*

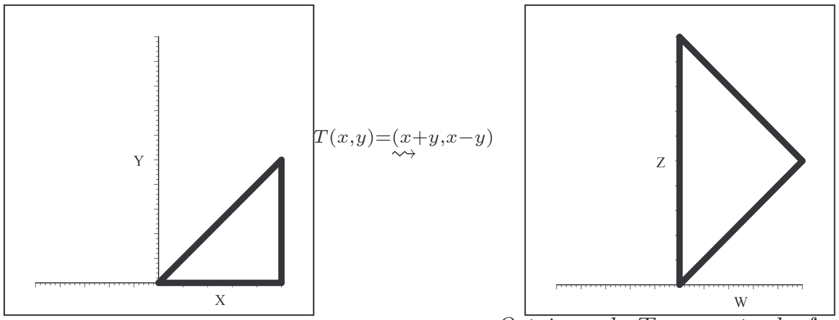
$$Cov\left(Z,W\right)=Cov\left(X+Y,X-Y\right)=Var\left(X\right)-Var\left(Y\right)$$

Mas é fácil ver que X e Y são independentes com a mesma densidade marginal cada, a saber, $f_X(x) = 2x$ para $x \in [0,1]$ (e 0 caso contrário). Assim, $Var(X) = Var(Y)$ e $Cov(Z,W) = 0$ e $\rho(Z,W) = 0$. No entanto, Z e W claramente não são independentes, pois o suporte de $f_{W,Z}$ não tem lados paralelos aos eixos.

Ex. 10 *A densidade conjunta de W e Z é*

$$f_{W,Z}(w,z) = \begin{cases} z^2 - w^2, \text{ se } (W,Z) \in T \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

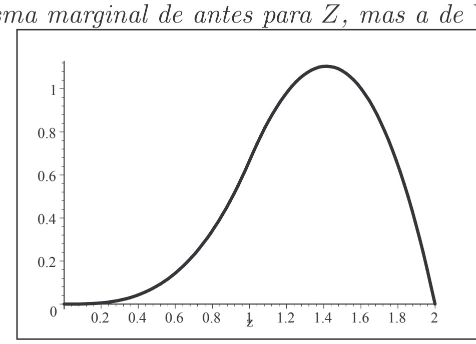
onde T é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(0,2)$.



O suporte de $f_{X,Y}$. *O triangulo T, suporte de $f_{W,Z}$.*

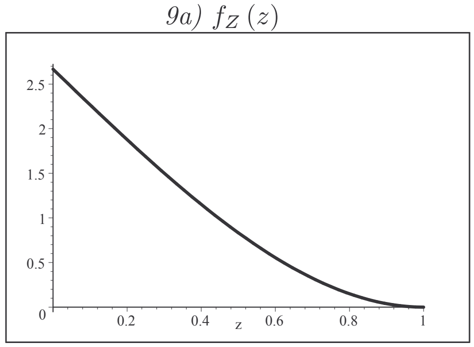
Integrando corretamente, obtemos a mesma marginal de antes para Z, mas a de W muda um pouco:

a) $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2z^3}{3}, \text{ se } 0 \le z \le 1 \\ 4z - \frac{2z^3+8}{3}, \text{ se } 1 \le z \le 2 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$



9a) $f_Z(z)$

b) $f_W(w) = \begin{cases} \frac{8+4w^3}{3} - 4w, \text{ se } 0 \le w \le 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$



9b) $f_W(w)$

c) Vamos calcular diretamente $Cov(W,Z)$. Afinal:

$$\begin{aligned}
E(WZ) &= \int\int_T wz\left(z^2-w^2\right)\, dA = \int_0^1 \int_w^{2-w} wz\left(z^2-w^2\right) dzdw = \frac{1}{3} \\
E(W) &= \int\int_T w\left(z^2-w^2\right)\, dA = \int_0^1 \int_w^{2-w} w\left(z^2-w^2\right) dzdw = \frac{4}{15} \\
E(Z) &= \int\int_T w\left(z^2-w^2\right)\, dA = \int_0^1 \int_w^{2-w} z\left(z^2-w^2\right) dzdw = \frac{4}{3} \\
Cov(W,Z) &= E(WZ) - E(W)E(Z) = \frac{1}{3} - \frac{4}{15}\frac{4}{3} = -\frac{1}{45}
\end{aligned}$$

Ex. 11 *A densidade conjunta de X e Y será*

$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda x-\lambda y}, \text{ se } x,y\geq 0\\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases}$$

Seja $z\geq 0$. Então:

$$\begin{aligned}F(z) &= \Pr(Z\leq z)=\Pr(X-Y\leq z)=\\ &= \int_0^\infty\int_0^{y+z}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}dxdy=1-\frac{1}{2}e^{-\lambda z}\end{aligned}$$

Assim

$$f(z)=F'(z)=\frac{\lambda e^{-\lambda z}}{2}$$

Como X e Y tem a mesma distribuição, por simetria temos que $f(z)=f(-z)$. Assim

$$f(z)=\frac{\lambda e^{-\lambda|z|}}{2}$$

para z real.
Se as taxas fossem diferentes, teríamos a densidade

$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}, \text{ se } x,y\geq 0\\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases}$$

e então, para $z\geq 0$:

$$\begin{aligned}F(z) &= \Pr(Z\leq z)=\Pr(X-Y\leq z)=\\ &= \int_0^\infty\int_0^{y+z}\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}dxdy=1-\frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 z}}{\lambda_1+\lambda_2}\end{aligned}$$

Assim, para $z\geq 0$, temos:

$$f(z)=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\lambda_1 z}$$

Trocar $Z=X-Y$ por $-Z=Y-X$ é o mesmo que trocar X por Y (isto é, λ_1 por λ_2):

$$f(z)=\begin{cases}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\lambda_1 z}, \text{ se } z\geq 0\\ \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}e^{\lambda_2 z}, \text{ se } z\leq 0\end{cases}$$

Ex. 12 *A densidade de X e Y será $f(x)g(y)$. A partir daqui, há dois métodos de ataque.*
a) Pela acumulada de Z, temos:

$$\Pr(Z\leq z)=\Pr(X+Y\leq z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x}f(x)g(y)\,dydx$$

Para a integral de dentro, f é constante. A integral indefinida que sobra é $G(y)$ (a f.d.a. de Y), mas calculada em $z-x$, isto é

$$\Pr(Z\leq z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)G(z-x)\,dx$$

Derivando com relação a z:

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)G'(z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(z-x)\,dx$$

b) Usando o Jacobiano, note que a densidade conjunta de X e Z será simplesmente

$$f(x,z)=f(x,y)\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,z)}=\frac{f(x)g(y)}{\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}}=f(x)g(y)=f(x)g(z-x)$$

Para encontrar a densidade marginal de Z, integramos com relação a x:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(z-x)\, dx$$

Ex. 13 *Usando o resultado do exercício anterior*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(z-t)\, dt$$

onde $f(t) = 1$ apenas para $0 \leq t \leq 1$ e $g(u) = 1$ apenas para $u \in [0,1]$. Então:

$$f_Z(z) = \int_0^1 g(z-t)\, dt = \int_{z-1}^{z} g(u)\, du$$

Para $0 \leq z \leq 1$, esta integral se anula exceto por

$$\int_0^z g(u)\, du = \int_0^z 1du = z$$

Já para $1 \leq z \leq 2$:

$$\int_{z-1}^{1} g(u)\, du = \int_{z-1}^{1} 1du = 2 - z$$

Caso contrário ($z \leq 0$ ou $z \geq 2$) a integral toda se anula pois não há interseção entre $[z-1, z]$ e o suporte de $g(u)$ (que é $[0,1]$).

Ex. 14 *Seja $g(\alpha)$ a função densidade de $X+Y$ encontrada no item anterior, isto é*

$$g(\alpha) = \begin{cases} \alpha, \text{ se } \alpha \in [0,1] \\ 2-\alpha, \text{ se } \alpha \in [1,2] \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Como Z e $X+Y$ são independentes, podemos usar a convolução de f com g onde f é a densidade uniforme em $[0,1]$. Assim, a densidade de W será:

$$h(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(w-t)\, dt = \int_0^1 g(w-t)\, dt = \int_{w-1}^{w} g(u)\, du$$

pois $f(t) = 1$ em $[0,1]$ e tomamos $u = w - t$. Note que há vários casos a considerar:

$$\begin{aligned}
\text{Se } w &\leq 0 \text{ ou } w \geq 3,\ g = 0 \text{ em todo o intervalo de integração} \\
\text{Se } 0 &\leq w \leq 1,\ \int_{w-1}^{w} g(u)\, du = \int_0^w g(u)\, du = \int_0^w u du = \frac{w^2}{2} \\
\text{Se } 1 &\leq w \leq 2,\ \int_{w-1}^{w} g(u)\, du = \int_{w-1}^{1} u du + \int_1^w (2-u)\, du = -w^2 + 3w - \frac{3}{2} \\
\text{Se } 2 &\leq w \leq 3,\ \int_{w-1}^{w} g(u)\, du = \int_{w-1}^{2} (2-u)\, du = \frac{9}{2} - 3w + \frac{1}{2}w^2
\end{aligned}$$

Ex. 15 *A densidade conjunta de X e Y é o produto das marginais:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}, \text{ caso } x, y \geq 0 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Então a densidade conjunta de X e $Z = X + Y$ será

$$f_{X,Z}(x,z) = f(x,y) \underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,z)}}_{1} = \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 (z-x)} \text{ caso } 0 \leq x \leq z \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Integrando com relação a x obtemos a marginal de Z:

$$f_Z(z) = \int_0^z \lambda_1\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} e^{-\lambda_2 z} dx = \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)z}-1}{\lambda_2-\lambda_1} = \lambda_1\lambda_2 \frac{e^{-\lambda_1 z}-e^{-\lambda_2 z}}{\lambda_2-\lambda_1}$$

desde que $z \geq 0$.
Agora, defina $g(\lambda) = e^{-\lambda z}$. Então a fração é a taxa de variação média $\frac{\Delta g}{\Delta \lambda}$ quando λ varia de λ_1 até λ_2 (exceto por um sinal negativo). Assim, se λ_1 e λ_2 se aproximam de λ, a fração se aproxima de

$$-g'(\lambda) = ze^{-\lambda z}$$

e a densidade de Z se aproxima de $f_Z(z) = \lambda^2 ze^{-\lambda z}$ (que é exatamente a fórmula da distribuição gama de parâmetros 2 e λ, como era de se esperar).

Ex. 16 *A densidade conjunta de X e Y será o produto das marginais*

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right)$$

Usando o Jacobiano, a densidade conjunta de W e Z é então

$$f_{W,Z}(w,z) = \frac{f(x,y)}{\left|\frac{\partial(w,z)}{\partial(x,y)}\right|} = \frac{f(x,y)}{\left|\begin{array}{cc} a & b \\ b & -a \end{array}\right|} = \frac{f(x,y)}{a^2+b^2}$$

Para trocar aquele x^2+y^2, note que

$$W^2+Z^2 = (aX+bY)^2 + (bX-aY)^2 = \left(a^2+b^2\right)\left(X^2+Y^2\right)$$

então

$$f_{W,Z}(w,z) = \frac{1}{2\pi(a^2+b^2)}\exp\left(\frac{-w^2-z^2}{2(a^2+b^2)}\right)$$

Como esta função é separável, isto é

$$f_{W,Z}(w,z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(a^2+b^2)}}\exp\left(\frac{-w^2}{2(a^2+b^2)}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(a^2+b^2)}}\exp\left(\frac{-z^2}{2(a^2+b^2)}\right)\right)$$

Concluímos que W e Z são independentes. Aliás, as suas marginais estão aqui em cima, e correspondem claramente a distribuições normais de parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma^2 = a^2+b^2$. Em suma, provamos que

$$\left.\begin{array}{c} X \sim N(0,1) \\ Y \sim N(0,1) \\ X \text{ e } Y \text{ são independentes} \end{array}\right\} \Rightarrow W = aX+bY \sim N\left(0, a^2+b^2\right)$$

ou seja, combinações lineares de variáveis normais-padrão independentes são também normais.

Ex. 17 *Novamente, a densidade conjunta é*

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right)$$

Tomando as novas variáveis X e W, temos $Y = XW$ e então:

$$f_{X,W}(x,w) = f(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,w)}\right| = f(x,y)\left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ w & x \end{array}\right| = \frac{|x|}{2\pi}\exp\left(\frac{-x^2-x^2w^2}{2}\right)$$

Integrando com relação a x e fazendo $u = x^2$:

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|x|\exp\left(\frac{-x^2-x^2w^2}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} x\exp\left(\frac{-x^2-x^2w^2}{2}\right)dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\exp\left(-u\frac{1+w^2}{2}\right)\frac{du}{2} = -\frac{1}{2\pi}\frac{2}{1+w^2}\left(\exp\left(-u\frac{1+w^2}{2}\right)\right]_{u=0}^{u=\infty} = \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+w^2} \end{aligned}$$

Ou seja, W tem distribuição de Cauchy!

Ex. 18 *a) Se $\rho = 0$, a densidade conjunta é separável:*

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\exp\left(\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\right)$$

então X e Y são independentes. A separação evidencia as marginais, que são as densidades de $N\left(0,\sigma_x^2\right)$ e $N\left(0,\sigma_y^2\right)$, respectivamente.
b) Mudando de X,Y para X,Z temos o Jacobiano

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\rho}{\sigma_x} & \frac{1}{\sigma_y} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma_Y}$$

Então a nova densidade conjunta é

$$f_{X,Z}(x,z) = \frac{f(x,y)}{\left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(x,y)}\right|} = \sigma_Y f(x,y)$$

Ainda temos que substituir y em função de x e z. Isto fica mais fácil se completarmos os quadrados:

$$\frac{y^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} = \left(\frac{y}{\sigma_y} - \rho\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 - \rho^2\frac{x^2}{\sigma_x^2} = z^2 - \rho^2\frac{x^2}{\sigma_x^2}$$

Assim

$$f_{X,Z}(x,z) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{z^2}{2(1-\rho^2)} - \frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Note que esta função é separável, assim X e Z são independentes. De fato, a separação em marginais é

$$f(x,z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{z^2}{2(1-\rho^2)}\right)\right)$$

que correspondem a duas distribuições normais, sendo a primeira $N\left(0,\sigma_x^2\right)$ e a segunda $N\left(0,1-\rho^2\right)$.
c) Note que $Y = \sigma_Y Z + \rho\sigma_Y\frac{X}{\sigma_X}$. Então

$$Cov(X,Y) = \sigma_Y Cov(X,Z) + \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}Cov(X,X) = \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}\sigma_X^2$$

pois X e Z são independentes. Assim

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \rho$$

justificando o símbolo que estamos usando para esta constante.
d) Uma curva de nível é simplesmente uma curva onde o expoente é constante, isto é

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} = k$$

Esta é uma forma quadrática cujo discrimante é

$$\Delta = \left(\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y}\right)^2 - \frac{1}{\sigma_x^2}\frac{1}{\sigma_y^2} = \frac{\rho^2-1}{\sigma_x^2\sigma_y^2} < 0$$

Portanto, esta curva é uma elipse.

Ex. 19 *No exercício anterior, vimos que X e $Z = Y - \rho X$ são independentes e $E(Z) = 0$. Então*

$$E[Y|\,X=x] = E[Z+\rho X \mid X=x] = E[Z|X=x] + E[\rho X|X=x] = E(Z) + \rho x = \rho x$$

Ex. 20 *a) Como a densidade é uniforme,* $k = \frac{1}{Área(T)} = \frac{1}{2}$.
b) Para $x \in [0,2]$ *podemos integrar a densidade com relação a y:*

$$f_X(x) = \int_0^{2-x} \frac{1}{2} dy = 1 - \frac{x}{2} \text{ para } x \in [0,2]$$

Assim

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, \text{ se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

c)

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^2 \int_0^{2-x} xy\frac{1}{2} dydx = \frac{1}{3} \\ E(X) &= \int_0^2 \int_0^{2-x} x\frac{1}{2} dydx = \frac{2}{3} \quad E(Y) = \int_0^2 \int_0^{2-x} y\frac{1}{2} dydx = \frac{2}{3} \\ Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\frac{2}{3} = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

d) Por simetria, a marginal de Y *é análoga à de* X:

$$f_Y(y) = \int_0^{2-y} \frac{1}{2} dx = 1 - \frac{y}{2} \text{ para } y \in [0,2]$$

Então a condicional de X *dado* $Y = y$ *é:*

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1/2}{1 - y/2} = \frac{1}{2-y} \text{ para } x \in [0, 2-y]$$

Ou seja, dado que $Y = y$, X *é uniforme em* $[0, 2-y]$, *como era de se esperar. Em particular, para* $Y = 1$, X *é uniforme em* $[0,1]$. *Assim:*

$$\Pr\left(X \geq \frac{1}{2} \mid Y = 1\right) = \Pr\left(X \geq \frac{1}{2} \mid X \sim U[0,1]\right) = \frac{1}{2}$$

Ex. 21 *Note que a densidade é separável*

$$f(x,y) = \begin{cases} (e^{-x})(3e^{-3y}), \text{ para } x, y \geq 0 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Assim, X *e* Y *são independentes. Aliás, é fácil identificar as distribuições exponenciais de* X *e* Y *acima. Assim:*
a) $X \sim Exp(1)$, *isto é,* $f(x) = e^{-x}$ *para* $x \geq 0$.
b) Como X *e* Y *são independentes, a condicional de* X *dado* $Y = y$ *também é* $f(x) = e^{-x}$ *para* $x \geq 0$; *também,* $Cov(X,Y) = 0$.
c)

$$\Pr(X \geq Y) = \int_0^\infty \int_0^x 3e^{-x-3y} dydx = \int_0^\infty \left(-e^{-4x} + e^{-x}\right) dx = \frac{3}{4}$$

d)

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 1 \text{ ou } Y \geq 1) &= 1 - \Pr(X \leq 1 \text{ e } Y \leq 1) = 1 - \Pr(X \leq 1)\Pr(Y \leq 1) = \\ &= 1 - \left(1 - e^{-1}\right)\left(1 - e^{-3}\right) = e^{-3} + e^{-1} - e^{-4} = 39.94\% \end{aligned}$$

Ex. 22 *a) As retas que limitam o triângulo são* $x = 0$, $y = 2x - 2$ *e* $y = x$. *É fácil ver que* $f \geq 0$ *pois* $x > 0$ *em* T. *Assim, basta verificar se:*

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x,y)\, dA = \int \int_T f(x,y)\, dA = 1$$

ou seja,

$$\int_0^2 \int_{2x-2}^{x} \frac{3x}{4}\, dy\, dx = \frac{3}{4}\int_0^2 x\left((x)-(2x-2)\right) dx = \frac{3}{4}\int_0^2 \left(2x-x^2\right)\, dx = \frac{3}{4}\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{4}\frac{4}{3} = 1$$

A densidade marginal de X é

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{2x-2}^{x} \frac{3x}{4} dy = \frac{3x}{4}(2-x) = \frac{3}{4}\left(2x-x^2\right) & \text{para } 0<x<2 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

b) Temos

$$\Pr(Y \le 0 \text{ e } X \le 1) = \int_0^1 \int_{2x-2}^{0} \frac{3x}{4} dy dx = \frac{3}{4}\int_0^1 x(2-2x)\, dx = \frac{3}{4}\left(x^2-\frac{2x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(X \le 1) = \frac{3}{4}\int_0^1 2x - x^2\, dx = \frac{3}{4}\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{3}{4}\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

Assim

$$\Pr(Y \le 0 \mid X \le 1) = \frac{1/4}{1/2} = 50\%$$

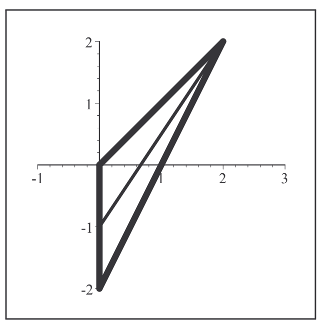
c) A condicional de Y dado $X = x$ só faz sentido para $0 < x < 2$. Neste caso:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{3x/4}{3x(2-x)/4} = \frac{1}{2-x} \text{ para } 2x-2<y<x$$

ou seja, a distribuição condicional de Y dado $X = x$ é uniforme no intervalo $[2x-2, x]$. Portanto

$$E[Y|x] = \frac{(2x-2)+x}{2} = \frac{3x}{2} - 1$$

cuja curva de regressão é



d) Precisamos calcular $E(X)$. Temos

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^2 \frac{3}{4}\left(2x^2-x^3\right) dx = \frac{3}{4}\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)_0^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{16}{3}-4\right) = 1$$

Assim,

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$$

$$Var(Y) = E\left(Y^2\right) - (E(Y))^2 = \frac{4}{5} - \frac{1}{4} = \frac{11}{20}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{3/10}{\sqrt{\frac{1}{5}\frac{11}{20}}} = \frac{3\sqrt{11}}{11} \cong 0.9045$$

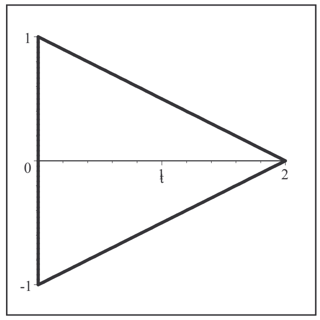
X e Y não são independentes, pois o suporte de $f(x,y)$ *não é retangular (ou, pois* $Cov(X,Y) \neq 0$*).*
e) Temos

$$\left|\det \frac{\partial(X,Z)}{\partial(X,Y)}\right| = \left|\left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right|\right| = 1$$

Assim, a densidade conjunta de X e Z será idêntica à original exceto pelo suporte:

$$f_{X,Z}(x,z) = \begin{cases} \frac{3x}{4} \ \textit{para} \ (x,z) \in R \\ 0, \ \textit{caso contrário} \end{cases}$$

onde R é o triângulo delimitado pelos pontos $(x,z) = (0,-1)$, $(0,1)$ *e* $(2,0)$*:*



Enfim,

$$Cov(X,Z) = Cov\left(X, Y - \frac{3X}{2} + 1\right) = Cov(X,Y) - \frac{3}{2}Var(X) = \frac{3}{10} - \frac{3}{2}\frac{1}{5} = 0$$

Ex. 23 *a) Para* $0 \leq y \leq 1$*, temos*

$$f_Y(y) = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

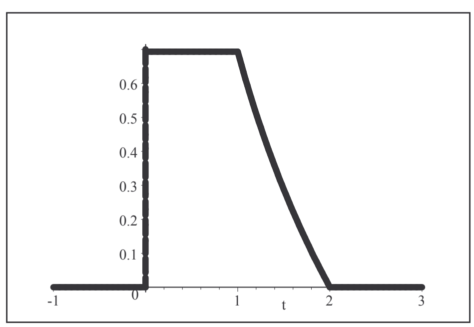
Para $1 \leq y \leq 2$*, temos:*

$$f_Y(y) = \int_y^2 \frac{1}{x}dx = \ln 2 - \ln y$$

Juntando tudo:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \ln 2, \ \textit{para} \ 0 \leq y \leq 1 \\ \ln 2 - \ln y, \ \textit{para} \ 1 \leq y \leq 2 \\ 0, \ \textit{caso contrário} \end{cases}$$

cujo gráfico é



b) O determinante Jacobiano é

$$\frac{\partial(X,Z)}{\partial(X,Y)} = \left|\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{Y}{X^2} & \frac{1}{X} \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{X}$$

Portanto

$$f_{X,Z}(x,z) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{1/x} = 1 \text{ em seu suporte}$$

Para encontrar o suporte, transformamos cada lado do trapézio: $X = 1$ *e* $X = 2$ *continuam sendo as retas* $X = 1$ *e* $X = 2$ *no plano* XZ; *a reta* $X = Y$ *torna-se* $Z = \frac{Y}{X} = 1$; *a reta* $Y = 0$ *torna-se* $Z = \frac{Y}{X} = 0$.
Assim, o novo suporte é simplesmente o retângulo $1 \leq X \leq 2$ *e* $0 \leq Z \leq 1$. *A distribuição de* X *e* Z*é uniforme neste retângulo. Portanto,* X *e* Z *são independentes, e as marginais serão também uniformes:* $X \sim U[1,2]$ *e* $Z \sim U[0,1]$. *Daqui, tiramos rapidamente* $E(X) = 1.5$, $E(Z) = 0.5$ *e* $Var(X) = Var(Z) = \frac{1}{12}$. *Enfim*

$$E\left(X^2\right) = Var(X) + (E(X))^2 = \frac{1}{12} + \frac{9}{4} = \frac{7}{3}$$
$$E\left(Z^2\right) = Var(Z) + (E(Z))^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

c) Como X *e* Z *são independentes,*

$$E(Y) = E(XZ) = E(X)E(Z) = \frac{3}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$
$$E\left(Y^2\right) = E\left(X^2Z^2\right) = E\left(X^2\right)E\left(Z^2\right) = \frac{7}{3}\frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$
$$Var(Y) = E\left(Y^2\right) - (E(Y))^2 = \frac{7}{9} - \frac{9}{16} = \frac{31}{144}$$

d) Note que

$$\Pr(Y \geq 1) = \int_1^2 \int_1^x \frac{1}{x}\, dy\, dx = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx = \int_1^2 1 - \frac{1}{x} dx = (x - \ln x]_1^2 = 1 - \ln 2$$

Assim, $W \sim Bin(100, 1 - \ln 2)$. *Usando uma tabela ou computador*

$$\Pr(W \geq 40) = 1 - \text{BinomialDist}(39; 100, 1 - \ln 2) = 3.001\%$$

e) Temos

$$\Pr\left(X \geq \frac{3}{2} \text{ e } Y \geq 1\right) = \int_{1.5}^2 \int_1^x \frac{1}{x}\, dy\, dx = \int_{1.5}^2 \frac{x-1}{x}\, dx = (1 - \ln x]_{1.5}^2 = 0.5 - \ln 2 + \ln 1.5 = 0.212$$
$$\Pr(Y \geq 1) = 1 - \ln 2 \text{ (do item anterior)}$$
$$\Pr\left(X \geq \frac{3}{2} \mid Y \geq 1\right) = \frac{0.5 - \ln 2 + \ln 1.5}{1 - \ln 2} = 69.2\%$$

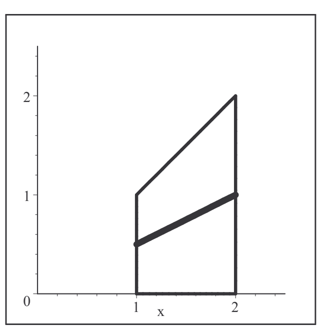
f) Alternativa 1: Como X *e* Z *são independentes*

$$E[Y|x] = E[XZ|X = x] = E[xZ|X = x] = xE[Z|X = x] = xE[Z] = \frac{x}{2}$$

Alternativa 2: Para cada $X = x$ *fixo, note que a distribuição de* Y *é uniforme em* $[0, x]$. *De fato*

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{x} \text{ para } y \in [0, x]$$

Assim, $E[Y|X = x] = \frac{x}{2}$ *(média da uniforme em* $[0, x]$*). O desenho da curva de regressão é a reta mais forte abaixo:*



Ex. 24 *a) Encontremos a distribuição conjunta de X e Z. Em primeiro lugar, o determinante Jacobiano é*

$$\frac{\partial(X,Z)}{\partial(X,Y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2X & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Assim, substituindo $y = z + x^2$, encontramos a nova densidade

$$f_{X,Z}(x,z) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{1} = \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

cuja região suporte é $0 < x < 1$ e $x^2 < z + x^2 < x^2 + 1$, isto é, $0 < x < 1$ e $0 < z < 1$. Como esta densidade pode ser expressa como uma função e x (a saber, 1) vezes uma função de z (a saber, $\frac{1}{2\sqrt{z}}$) e seu suporte é retangular, concluímos que X e Z são independentes.
b) Da observação acima, vemos claramente que X é uniforme em $[0,1]$, e portanto

$$E(X^n) = \int_0^1 x^n dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Observação: se você tiver alguma dúvida, volte à distribuição original

$$f_X(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}} dy = \frac{1}{2}\int_{x^2}^{x^2+1} \left(y - x^2\right)^{-1/2} dy = \left(\left(y - x^2\right)^{1/2}\right]_{x^2}^{x^2+1} = 1 - 0 = 1$$

para $0 < x < 1$ (e $f_X(x) = 0$ caso contrário).
c) A maneira mais rápida é fazer

$$Cov(X,Y) = Cov\left(X, Z + X^2\right) = Cov(X,Z) + Cov\left(X, X^2\right)$$

O primeiro termo é nulo pois X e Z são independentes. O segundo pode ser calculado assim

$$Cov\left(X, X^2\right) = E\left(X.X^2\right) - E(X)E\left(X^2\right) = E\left(X^3\right) - E(X)E\left(X^2\right)$$

Com o auxílio do item anterior:

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

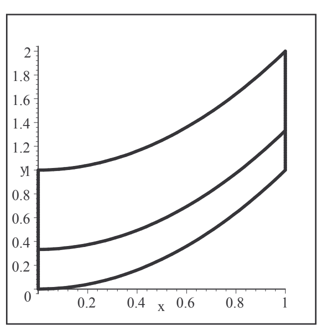
d) A maneira mais rápida é fazer

$$E[Y|x] = E\left[Z + X^2|x\right] = E[Z|x] + E\left[X^2|x\right]$$

Como X e Z são independentes, $E[Z|x] = E[Z]$. O outro termo é simples: se $X = x$, então $X^2 = x^2$, isto é, $E\left[X^2|x\right] = x^2$. Só falta calcular $E[Z]$:

$$E[Z] = \int_0^1 z\frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \left(\frac{z^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Então, $E[Y|x] = x^2 + \frac{1}{3}$ (para $0 < x < 1$), cuja curva de regressão se encontra no gráfico abaixo:



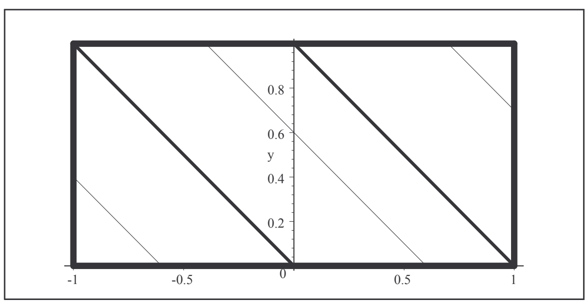
Chapter 7

Respostas do Capítulo 7

Ex. 1 *A densidade conjunta é*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ se } -1 \leq x_1 \leq 1 \text{ e } 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

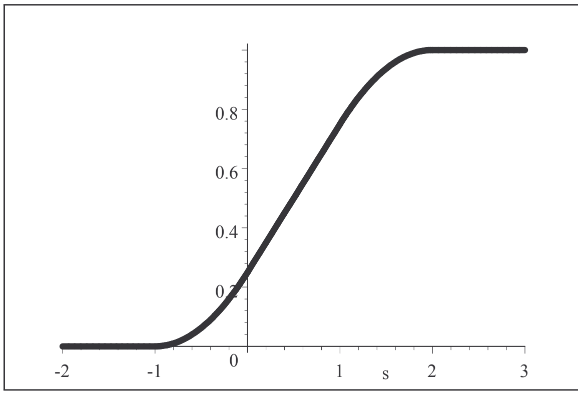
Observando as áreas dos vários triângulos abaixo, obtemos a acumulada de S:



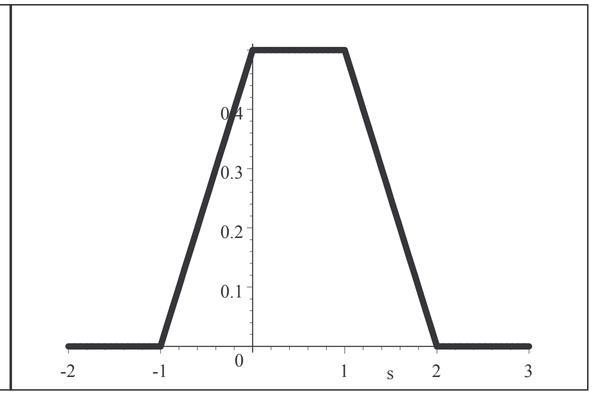
$$\begin{aligned} \text{Para } -1 &\leq s \leq 0 : \Pr(S \leq s) = \frac{(1+s)^2}{4} \\ \text{Para } 0 &\leq s \leq 1 : \Pr(S \leq s) = \frac{1}{4} + \frac{s}{2} \\ \text{Para } 1 &\leq s \leq 2 : \Pr(S \leq s) = 1 - \frac{(2-s)^2}{4} = s\left(1 - \frac{s}{4}\right) \end{aligned}$$

A f.d.p. será então a derivada:

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1+s}{2}, \text{ se } -1 \leq s \leq 0 \\ \frac{1}{2}, \text{ se } 0 \leq s \leq 1 \\ \frac{2-s}{2}, \text{ se } 1 \leq s \leq 2 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$



F.D.A. de S



F.D.P. de S

Ex. 2 *A densidade conjunta é*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x_1}, \text{ se } x_1 \geq 0 \text{ e } 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Tome $S = X_1 + X_2$ *e* X_1 *(o Jacobiano é 1). Note que* $0 \leq x_2 \leq 1$ *se, e somente se,* $0 \leq s - x_1 \leq 1$*, isto é:*

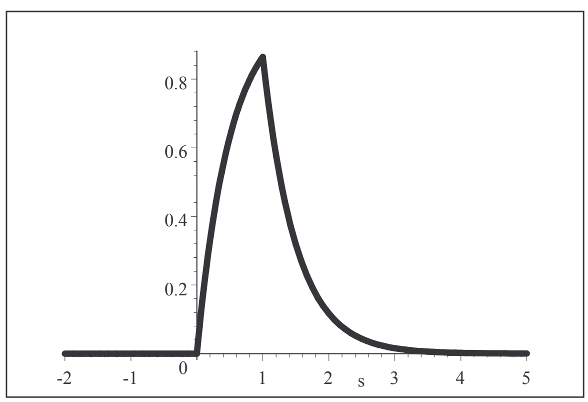
$$f(x_1, s) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x_1}, \text{ se } 0 \leq x_1 \text{ e } s - 1 \leq x_1 \leq s \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Devemos integrar em x_1 *para encontrar a marginal de* S*. Há dois casos a considerar:*

$$\begin{aligned} \text{Se } 0 &\leq s \leq 1, \text{ então } f_S(s) = \int_0^s \lambda e^{-\lambda x_1} dx_1 = 1 - e^{-\lambda s} \\ \text{Se } 1 &\leq s, \text{ então } f_S(s) = \int_{s-1}^s \lambda e^{-\lambda x_1} dx_1 = e^{-\lambda(s-1)} - e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

Juntando tudo

$$f(s) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda s}, \text{ se } 0 \leq s \leq 1 \\ e^{-\lambda s}\left(e^{\lambda} - 1\right), \text{ se } 1 \leq s \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$



F.D.P. de S (caso $\lambda = 2$*): tubarão!*

Ex. 3 *Como* $\bar{X} = \frac{S_n}{n}$ *é crescente (como função de* S_n*), temos que* $g(\bar{x})\,d\bar{x} = f(s)\,ds$*, isto é*

$$g(\bar{x}) = nf(n\bar{x})$$

ou, usando as letras do enunciado

$$g(y) = nf(nx)$$

Ex. 4 *a) Faça uma tabela para X_1 e X_2 (e marque S em cada célula):*

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	*Total*
1	$\frac{1}{16}; S_2 = 2$	$\frac{1}{16}; S_2 = 3$	$\frac{2}{16}; S_2 = 4$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}; S_2 = 3$	$\frac{1}{16}; S_2 = 4$	$\frac{2}{16}; S_2 = 5$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{2}{16}; S_2 = 4$	$\frac{2}{16}; S_2 = 5$	$\frac{4}{16}; S_2 = 6$	$\frac{2}{4}$
Total	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	

Assim, as funções de probabilidade de $S_2 = X_1 + X_2$ e de $\bar{X} = S_2/2$ são:

s	2	3	4	5	6
x	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$\Pr(S_2 = s) = \Pr(\bar{X} = x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$

b) Como S_2 e X_3 são independentes, a tabela de S_2 e X_3 será:

$X_3 \backslash S_2$	2	3	4	5	6	*Total*
1	$\frac{1}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{2}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{10}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{2}{4}$
Total	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	1

Então a função de probabilidade de $S_3 = S_2 + X_3$ (e de $\bar{X}$ para $n = 3$) é:

s	3	4	5	6	7	8	9
x	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	3
$\Pr(S_3 = s) = \Pr(\bar{X} = x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{13}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{8}{64}$

c) Analogamente, achamos a função de $S_4 = S_3 + X_4$ e $\bar{X}$ (para $n = 4$):

s	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5	2.75	3
$\Pr(S_4 = s) = \Pr(\bar{X} = x)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{4}{256}$	$\frac{14}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{49}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{32}{256}$	$\frac{16}{256}$

d) Para fazer os histogramas, use a planilha TCL.xls na página do site do curso. Coloque os valores 0.25 para $x = 1$ e $x = 2$ e a probabilidade 0.50 para $x = 3$ (não se esqueça de zerar as outras probabilidades para $x = 4, 5, 6, ..., 10$ e $x = 0$). Mude o valor de n no gráfico e veja os histogramas.

Ex. 5 *Se X e Y são independentes, o suporte de Z é $[a + c, b + d]$ (por exemplo, note que $F_Z(a + c + \varepsilon) = \Pr(Z \leq a + c + \varepsilon) \geq \Pr\left(X \leq a + \frac{\varepsilon}{2}\right) . \Pr\left(Y \leq c + \frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$, então $f_Z(z) \neq 0$ para $z = a + c + \varepsilon$). Se X e Y não forem independentes, a resposta pode mudar – imagine por exemplo que o suporte de $f(x, y)$ é um quadrado de vértices $(0, 0), (1, 1), (0, 2)$ e $(-1, 1)$. Então o suporte de X é $[-1, 1]$ o suporte de Y é $[0, 2]$ mas o suporte de $Z = X + Y$ é apenas $[0, 2]$ ao invés de $[-1, 3]$.*

Ex. 6 *Seja $Z = X - \mu$. Então $Z \sim N(0, 1)$ e*

$$\Pr(-1 < X - \mu < 1) = \Pr(-1 < Z < 1) = 68.269\%$$

Agora, outra variável normal padrão é $Z_2 = \frac{\bar{X} - \mu}{1/\sqrt{16}}$. Então

$$\Pr\left(-1 < \bar{X} - \mu < 1\right) = \Pr(-4 < Z_2 < 4) = 99.99367\%$$

Em outras palavras, $\bar{X}$ fica perto da média μ ***muito mais provavelmente*** *do que X.*

Ex. 7 *Basta usar repetidas vezes o teorema que diz que, se $X \sim N(3, 4)$ e $Y \sim N(7, 1)$ forem independentes, então $aX + bY \sim N\left(3a + 7b, 4a^2 + b^2\right)$ Assim:*
a) $5X \sim N(15, 100)$ *b)* $X + Y \sim N(10, 5)$ *c)* $-X \sim N(-3, 4)$
d) $X - Y \sim N(-4, 5)$ *e)* $2Y - 3X \sim N(5, 40)$

Ex. 8 *Sabemos que* $Z = \frac{X-100}{10} \sim N(0,1)$ *Então*

$$\Pr(95 \le X \le 105) = \Pr\left(-\frac{1}{2} \le Z \le \frac{1}{2}\right) = 38.29\%$$

Por outro lado, $Z_2 = \frac{\bar{X}-100}{10/\sqrt{10}} \sim N(0,1)$. *Então*

$$\Pr\left(95 \le \bar{X} \le 105\right) = \Pr\left(-\frac{\sqrt{10}}{2} \le Z \le \frac{\sqrt{10}}{2}\right) = 2\,\mathrm{NormalDist}(1.58) - 1 = 88.615\%$$

Novamente, note como $\bar{X}$ *quase certamente fica "perto" da média (muito mais certamente do que* X *pelo menos). Mudando o* n*, teremos* $Z = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}-100}{10}\right) \sim N(0,1)$. *Então*

$$\Pr\left(95 \le \bar{X} \le 105\right) = \Pr\left(\sqrt{n}\frac{95-100}{10} \le Z \le \sqrt{n}\frac{105-100}{10}\right) = \Pr\left(|Z| \le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

Se quisermos que isto seja 95%, *devemos tomar*

$$\frac{\sqrt{n}}{2} = \mathrm{NormalInv}(0.975) = 1.9600 \Rightarrow n = 4(1.96)^2 = 15.366$$

Assim, devemos tomar pelo menos $n = 16$ *amostras.*

Ex. 9 *A massa de cada figo é* $X \sim N(60, 64)$. *Então a massa de* 12 *figos será* S_{12} *onde* $E(S_{12}) = 12E(X) = 720$ *e* $Var(S_{12}) = 12Var(X) = 768$*, isto é,* $S_{12} \sim N(720, 768)$. *Normalizando, temos* $Z = \frac{S_{12}-720}{\sqrt{768}} \sim N(0,1)$ *e então*

$$\Pr(S_{12} \ge 750) = \Pr\left(Z \ge \frac{750-720}{\sqrt{768}}\right) = 1 - \mathrm{NormalDist}(1.0825) = 13.951\%$$

Ex. 10 *Seja* $\bar{X} = \frac{P_1+P_2+P_3}{3}$. *Supondo que as três provas são independentes, podemos afirmar que a distribuição de* $\bar{X}$ *é normal, a saber,* $\bar{X} \sim N\left(\frac{7+6+5}{3}, \frac{1+2+2.76}{9}\right) = N(6, 0.64)$. *Normalizando,* $Z = \frac{\bar{X}-6}{0.8}$ *e então*

$$\begin{aligned}\Pr\left(\bar{X} \ge 6\right) &= \Pr(Z \ge 0) = 50\% \\ \Pr\left(\bar{X} \ge 7\right) &= \Pr\left(Z \ge \frac{1}{0.8}\right) = \Pr(Z \ge 1.25) = 10.56\%\end{aligned}$$

Seja $X = P_1 + P_2 - 2P_3$. *Note que* $X \sim N(7 + 6 - 2(5), 1 + 2 + 4(2.76)) = N(3, 14.04)$. *Assim:*

$$\Pr\left(P_3 \le \frac{P_1+P_2}{2}\right) = \Pr(P_1 + P_2 - 2P_3 \ge 0) = \Pr(X \ge 0) = \Pr\left(Z \ge \frac{0-3}{\sqrt{14.04}}\right) = 78.833\%$$

Ex. 11 *a) Com a notação usual,* $S_7 \sim N(560, 700)$, $S_8 \sim N(640, 800)$ *e* $S_9 \sim N(720, 900)$. *Então*

$$\begin{aligned}\Pr(S_7 \ge 800) &= \Pr\left(Z \ge \frac{800-560}{\sqrt{700}}\right) = 1 - \mathrm{NormalDist}\left(\frac{800-560}{\sqrt{700}}\right) = 5.8885 \times 10^{-20} \\ \Pr(S_8 \ge 800) &= \Pr\left(Z \ge \frac{800-640}{\sqrt{800}}\right) = 1 - \mathrm{NormalDist}\left(\frac{800-640}{\sqrt{800}}\right) = 7.7086 \times 10^{-9} \\ \Pr(S_9 \ge 800) &= \Pr\left(Z \ge \frac{800-720}{\sqrt{900}}\right) = 1 - \mathrm{NormalDist}\left(\frac{800-720}{\sqrt{900}}\right) = 3.8303 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

Só para comparar, note que $\Pr(S_{10} \ge 800) = \Pr\left(Z \ge \frac{800-800}{\sqrt{1000}}\right) = 50\%$.

b) Do calculado acima, vê-se que o número máximo é 9 *mesmo (probabilidade de exceder a capacidade ainda é menor que* 1%*). Se quiséssemos este número diretamente, faríamos*

$$\begin{aligned}\Pr(Z \le a) &= 0.99 \Rightarrow a = \mathrm{NormalInv}(0.99) = 2.3263 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{800-80n}{\sqrt{100n}} = 2.3623 \Rightarrow 80 - 8n = 2.3623\sqrt{n} \Rightarrow 8n + 2.3623\sqrt{n} - 80 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{-2.3623 \pm \sqrt{(2.3623)^2 + 4(80)(8)}}{2(8)} \Rightarrow \sqrt{n} = 3.0202 \Rightarrow n = 9.1217\end{aligned}$$

Portanto, $n = 9$ passageiros ainda dá mais do que 99% de chance do elevador aguentar.
c) Se quisermos que o eleveador suporte n passageiros com p de chance, basta fazer

$$\frac{C - 80n}{\sqrt{100n}} = \text{NormalInv}(p) = z_p \Rightarrow C = 80n + \sqrt{100n}\,\text{NormalInv}(p)$$

O elevador já aguentava 9 passageiros com 99% de chance. De fato, a capacidade poderia ser ***reduzida*** *para*

$$C_9 = 80(9) + \sqrt{900}\,\text{NormalInv}(0.99) = 789.79Kg$$

Se quiséssemos 10 passageiros com 99% de chance, aí sim precisaríamos aumentar para

$$C_{10} = 80(10) + \sqrt{1000}\,\text{NormalInv}(0.99) = 873.565Kg$$

E, para 11 e 12 passageiros:

$$\begin{aligned} C_{11} &= 880 + \sqrt{1100}\,\text{NormalInv}(0.99) = 957.156Kg \\ C_{12} &= 960 + \sqrt{1200}\,\text{NormalInv}(0.99) = 1040.587Kg \end{aligned}$$

Note como, para cada passageiro extra, o aumento da capacidade necessária para manter os 99% de confiança é um pouco maior do que $80Kg$!

Ex. 12

$$\Pr\left(\bar{X} \leq 995g\right) = \Pr\left(Z \leq \frac{995 - 1000}{5/\sqrt{10}}\right) = \text{NormalDist}(-3.162) = 7.827 \times 10^{-4}$$

Ou seja, é muito improvável que isto aconteça – é mais verossímil que a empacotadora esteja mentindo.

Ex. 13 *Sabemos que*

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{m}\right) \text{ e } \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n}\right)$$

Então

$$D = \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}\right)$$

Ex. 14 *a) Seja S o salário de um funcionário. Pelo Teorema de Bayes*

$$\Pr(H \mid S > 610) = \frac{\Pr(S > 610 \mid H)\Pr(H)}{\Pr(S > 610 \mid H)\Pr(H) + \Pr(S > 610 \mid M)\Pr(M)}$$

Mas

$$\begin{aligned} \Pr(S > 610 \mid H) &= \Pr(H > 610) = \Pr\left(Z > \frac{610 - 600}{10}\right) = \Pr(Z > 1) = 15.8655\% \\ \Pr(S > 610 \mid M) &= \Pr(M > 610) = \Pr\left(Z > \frac{610 - 590}{10}\right) = \Pr(Z > 2) = 2.2750\% \end{aligned}$$

Enfim, tomando $\Pr(H) = \Pr(M) = 50\%$ (o que é verdadeiro pelo menos dentro da amostra):

$$\Pr(H \mid S > 610) = \frac{15.8655\%}{15.8655\% + 2.2750\%} = 87.459\%$$

b) Como vimos no problema anterior, $D = \bar{H} - \bar{M} \sim N\left(10, \frac{100}{25} + \frac{100}{25}\right) = N(10, 8)$. Assim

$$\begin{aligned} \Pr(D \geq 0) &= \Pr\left(Z \geq \frac{0 - 10}{\sqrt{8}}\right) = 1 - \text{NormalDist}(-3.536) = 99.9797\% \\ \Pr(D \geq 2) &= \Pr\left(Z \geq \frac{2 - 10}{\sqrt{8}}\right) = 1 - \text{NormalDist}(-2.828) = 99.7661\% \\ \Pr(D \geq 10) &= \Pr\left(Z \geq \frac{10 - 10}{\sqrt{8}}\right) = 50\% \end{aligned}$$

c) Se as médias fossem iguais, $D \sim N(0,8)$ e então

$$\begin{aligned}
\Pr(D \geq 0) &= \Pr\left(Z \geq \frac{0}{\sqrt{8}}\right) = 50\% \\
\Pr(D \geq 2) &= \Pr\left(Z \geq \frac{2}{\sqrt{8}}\right) = 1 - \text{NormalDist}(0.7071) = 23.975\% \\
\Pr(D \geq 10) &= \Pr\left(Z \geq \frac{10}{\sqrt{8}}\right) = 1 - \text{NormalDist}(3.536) = 2.035 \times 10^{-4}
\end{aligned}$$

Ex. 15 *Como 15 são $k = 3$ desvios-padrão, a desigualdade de Chebyshev diz que*

$$\Pr(35 \leq S_{100} \leq 65) \geq 1 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9} = 88.89\%$$

Por outro lado, $S_{100} \sim Bin(100, 0.5)$, então

$$\Pr(35 \leq S_{100} \leq 65) = \text{BinomialDist}(65; 100, 0.5) - \text{BinomialDist}(34; 100, 0.5) = 99.82\%$$

Ou seja, mais uma vez, a desigualdade de Chebyshev é muito "fraca".

Ex. 16 *A desigualdade de Chebyshev garante que, para qualquer k positivo:*

$$\Pr(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Tomando $k = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ obtemos uma outra versão equivalente da desigualdade:

$$\Pr(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

Neste caso, usaremos esta desigualdade para a v.a. $\bar{X}$. Note que $E(\bar{X}) = E(X) = \frac{1}{2}$ e que $Var(\bar{X}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{1}{12n}$. Então

$$\Pr\left(\left|\bar{X} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{12n\varepsilon^2}$$

Em particular, tomando $\varepsilon = 0.1$ e vários valores de n, temos:

$$\begin{aligned}
\textit{Para } n &= 100\text{: } \Pr\left(\left|\bar{X} - \frac{1}{2}\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{1}{12(100)(0.1)^2} = \frac{1}{12} \\
\textit{Para } n &= 1000\text{: } \Pr\left(\left|\bar{X} - \frac{1}{2}\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{1}{12(1000)(0.1)^2} = \frac{1}{120} \\
\textit{Para } n &= 10000\text{: } \Pr\left(\left|\bar{X} - \frac{1}{2}\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{1}{12(10000)(0.1)^2} = \frac{1}{1200}
\end{aligned}$$

Ex. 17 *Este problema é idêntico ao anterior, mas agora $Var(X) = \frac{(2h)^2}{12} = \frac{h^2}{3}$. Mesmo assim, usando a nova versão de Chebyshev com $Var(\bar{X}) = \frac{h^2}{3n}$:*

$$\Pr\left(\left|\bar{X} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{h^2}{3n\varepsilon^2}$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
\textit{Para } n &= 100\text{: } \Pr\left(\left|\bar{X} - \frac{1}{2}\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{h^2}{3(100)(0.1)^2} = \frac{h^2}{3} \\
\textit{Para } n &= 1000\text{: } \Pr\left(\left|\bar{X} - \frac{1}{2}\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{h^2}{3(1000)(0.1)^2} = \frac{h^2}{30} \\
\textit{Para } n &= 10000\text{: } \Pr\left(\left|\bar{X} - \frac{1}{2}\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{h^2}{3(10000)(0.1)^2} = \frac{h^2}{300}
\end{aligned}$$

Ex. 18 *Tomando $h = 1$ e $\varepsilon = 0.1$ no problema anterior, temos:*

$$\Pr\left(\left|\bar{X} - \mu\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{100}{3n}$$

Para garantir que esta probabilidade é menor que 5%, devemos tomar

$$\frac{100}{3n} \leq 0.05 \Rightarrow n \geq \frac{2000}{3} = 666.66...$$

ou seja, pelo menos 667 amostras. Se quisermos ao invés $\varepsilon = 0.01$, então

$$\frac{10000}{3n} \leq 0.05 \Rightarrow n \geq \frac{200000}{3} = 66666.66...$$

ou seja, apenas com as ferramentas que estamos utilizando, parece que precisamos de $n = 66667$ amostras (mais tarde veremos como usar o TCL para diminuir estes números de amostras).

Ex. 19 *Chebyshev diz que*

$$\Pr\left(|X - \mu| < k\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

No caso em questão, tudo está pronto, pois $\mu = 0$ e $\sigma = 1$:

$$\Pr\left(|X| < k\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Basta então garantir que $1 - \frac{1}{k^2} > 99\%$, isto é, $k = 10$. Assim, Chebyshev garante que pelo menos 99% da probabilidade de uma distribuição está a menos de 10 desvios-padrão de sua média.
No caso normal, teríamos $Z = X \sim N(0, 1)$, então:

$$\Pr\left(-k \leq Z \leq k\right) = 99\% \Rightarrow k = \mathrm{NormalInv}\left(0.995\right) = 2.5756$$

Ou seja, 2.5756 desvios-padrão já seriam suficientes.

Ex. 20 *Note que $X \sim Be(p)$. Usemos Chebyshev, lembrando que*

$$\begin{aligned} E\left(\bar{X}\right) &= E\left(X\right) = p \\ Var\left(\bar{X}\right) &= \frac{Var\left(X\right)}{n} = \frac{pq}{n} \end{aligned}$$

Então

$$\Pr\left(\left|\bar{X} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var\left(\bar{X}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

Como $pq = p(1-p)$ assume valor máximo quando $p = \frac{1}{2}$:

$$\Pr\left(\left|\bar{X} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Em particular, para ter 95% de certeza de que $\Pr\left(\left|\bar{X} - p\right| \leq 0.1\right)$, basta tomar

$$\frac{1}{4n\left(0.1\right)^2} = 0.05 \Rightarrow n = 500$$

ou seja, tome 500 amostras de $X \sim Be(p)$ e a média destes 500 valores estará a 0.1 ou menos do valor real de p com pelo menos 95% de confiança.

Ex. 21 *A distribuição conjunta de X_1 e X_2 é*

$$f\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{1 + x_1^2} \frac{1}{1 + x_2^2}$$

Tomando $\bar{X} = \frac{X_1+X_2}{2}$ *e* $W = \frac{X_1-X_2}{2}$, *temos* $X_1 = \bar{X} + W$ *e* $X_2 = \bar{X} - W$. *Portanto*

$$\left|\frac{\partial (X_1, X_2)}{\partial (\bar{X}, W)}\right| = \left|\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right|\right| = 2$$

e a densidade conjunta de $\bar{X}$ *e* W *será*

$$f(x,w) = \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{1+(x+w)^2}\frac{1}{1+(x-w)^2}$$

Agora é só integrar com relação a w *para encontrar a marginal de* $\bar{X}$. *A conta é muito feia, mas um Sistema Computacional Algébrico ajuda:*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{1+(x+w)^2}\frac{1}{1+(x-w)^2}dw = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

que, surpreendentemente, é uma distribuição de Cauchy! Analogamente, se tomarmos a média de 4 *variáveis com distribuição de Cauchy:*

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = \frac{X_1+X_2}{2} \sim Cauchy \\ Y_2 = \frac{X_3+X_4}{2} \sim Cauchy \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{Y_1+Y_2}{2} = \frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4} = \bar{X} \sim Cauchy$$

Analogamente, por indução, é fácil ver que a média de $n = 2^k$ *variáveis de Cauchy também será uma variável com distribuição de Cauchy. Assim,*

$$\Pr\left(\left|\bar{X}\right| < \varepsilon\right) = \Pr(|X| < \varepsilon)$$

não se aproxima de 0 *à medida que* n *cresce!*

Ex. 22 *Note que* $S_{100} \sim Bin(100, 0.5)$, *com* $E(S_{100}) = 50$ *e* $Var(S_{100}) = 25$. *Usando a aproximação normal:*

$$\Pr(35 \leq S_{100} \leq 65) \approx \Pr\left(\frac{34.5-50}{5} \leq Z \leq \frac{65.5-50}{5}\right) = \text{NormalDist}(3.1) - \text{NormalDist}(-3.1) = 99.806\%$$

enquanto a resposta exata é

$$\Pr(35 \leq S_{100} \leq 65) = \text{BinomialDist}(65; 100, 0.5) - \text{BinomialDist}(34; 100, 0.5) = 99.82\%$$

Ex. 23 *Sabemos que* $E\left(\bar{X}\right) = 0.5$ *e* $Var\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{12n} = \frac{1}{1200}$. *Usando uma aproximação normal* $Z = \sqrt{1200}\left(\bar{X} - 0.5\right) \sim N(0,1)$:

$$\Pr\left(\left|\bar{X} - 0.5\right| \geq 0.1\right) \approx \Pr\left(|Z| \geq \frac{0.1}{\frac{1}{\sqrt{1200}}}\right) = 2\,\text{NormalDist}\left(-2\sqrt{3}\right) = 5.3201 \times 10^{-4}$$

que é razoavelmente próxima da probabilidade exata de 5.0131×10^{-4}.

Ex. 24 *a) Pelo TCL, a distribuição de* $\bar{X}$ *será aproximadamente normal*

$$\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{1}{3n}\right)$$

ou, normalizando, $Z = \sqrt{3n}\left(\bar{X} - \mu\right) \approx N(0,1)$. *Mas*

$$\Pr(|Z| \leq a) = 0.95 \Rightarrow a = \text{NormalInv}(0.975) = 1.9600$$

Este intervalo deve corresponder a $\left|\bar{X} - \mu\right| \leq \varepsilon = 0.1$, *isto é*

$$\Pr\left(\left|\bar{X} - \mu\right| \leq 0.1\right) = \Pr\left(|Z| \leq 0.1\sqrt{3n}\right) = 0.95 \Rightarrow 1.9600 = 0.1\sqrt{3n} \Rightarrow n = 128.053\,33$$

Assim, $n = 129$ *amostras seriam suficientes!*
b) Basta trocar $\varepsilon = 0.1$ *por* $\varepsilon = 0.01$ *no raciocínio acima (o* 1.9600 *se mantém):*

$$n = \left(\frac{1.9600}{0.01}\right)^2 \frac{1}{3} = 12805.33$$

Assim, bastam 12806 *amostras para obter* μ *com margem de erro de* 0.01 *(com* 95% *de confiança).*

Ex. 25 *a) Cada eleitor é uma variável de Bernoulli* $X \sim Be(p)$*. A proporção de eleitores na amostra será* $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$*. Pelo TCL, a distribuição de* $\bar{X}$ *é praticamente normal:*

$$\bar{X} \approx N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

Para obter 95% *de confiança (que é o utilizado quando se fala em "margem de erro"), precisamos tomar* $z_{0.95} = 1.9600$ *desvios-padrão ao redor da média, isto é*

$$\Pr\left(p - 1.9600\sqrt{\frac{pq}{n}} \leq \bar{X} \leq p + 1.9600\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = 95\%$$

A margem de erro (para 95% *de confiança) é, portanto*

$$\varepsilon = 1.9600\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Sem saber o valor de p*, não podemos saber* ε *exatamente. No entanto, note que o valor máximo de* pq *é* $\frac{1}{4}$ *(quando* $p = \frac{1}{2}$*). Assim, uma estimativa "conservadora" é:*

$$\varepsilon = \frac{0.98}{\sqrt{n}}$$

No caso, temos $n = 1500$*, então a margem de erro (conservadora) é*

$$\varepsilon = \frac{0.98}{\sqrt{1500}} = 0.0253$$

ou seja, de uns 2.5 *pontos percentuais.*
b) Queremos $\varepsilon = 0.005$*. Então devemos tomar*

$$\frac{0.98}{\sqrt{n}} = 0.005 \Rightarrow n = \left(\frac{0.98}{0.005}\right)^2 = 38416$$

ou seja, quase 40000 *entrevistados! Talvez seja melhor declarar o empate técnico mesmo...*

Ex. 26 *Este não é um problema de distribuição normal – é um problema sobre distribuição binomial. Afinal, a probabilidade de o instituto acertar a porcentagem é de* 0.95 *em cada estado. Supondo que os estados são independentes entre si, o número de estados (mais DF) em que o instituto vai acertar é*

$$X \sim Bin(27, 0.95)$$

Assim

$$\begin{aligned}\Pr(X \leq 24) &= \text{BinomialDist}(24; 27, 0.95) = 15.049\% \\ \Pr(X \leq 22) &= \text{BinomialDist}(22; 27, 0.95) = 1.002\%\end{aligned}$$

Ou seja, é perfeitamente imaginável que este instituto acerte menos de 24 *estados, e improvável (mas possível) que erre em* 5 *ou mais estados.*
Nota: se você desejar usar uma aproximação normal à binomial:

$$\begin{aligned}\Pr(X \leq 24) &\approx \Pr\left(Z \leq \frac{24.5 - 27(0.95)}{\sqrt{27(0.95)(0.05)}}\right) = \text{NormalDist}(-1.015) = 15.49\% \\ \Pr(X \leq 22) &= \Pr\left(Z \leq \frac{22.5 - 27(0.95)}{\sqrt{27(0.95)(0.05)}}\right) = \text{NormalDist}(-2.782) = 0.2705\%\end{aligned}$$

Note como a primeira aproximação é razoável, enquanto a segunda é um tanto ruim. Como $n = 27$ é pequeno, não esperávamos aproximações muito boas mesmo!

Ex. 27 *Seja X o número de seis obtidos. Sabemos que $X \sim Bin\left(30, \frac{1}{6}\right)$. A probabilidade exata é*

$$\Pr(X=5) = \text{BinomialDen}\left(5; 30, \frac{1}{6}\right) = \binom{30}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^{25} = 19.211\%$$

enquanto a aproximação normal por áreas nos dá

$$\Pr(X=5) = \Pr\left(\frac{4.5-5}{\sqrt{30\frac{1}{6}\frac{5}{6}}} \leq Z \leq \frac{5.5-5}{\sqrt{30\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) = 2\,\text{NormalDist}(0.245) - 1 = 19.354\%$$

Nada mal, considerando que $n = 30$ nem é tão grande assim.
Nota: neste caso, poderíamos dispensar o uso da tabela usando a aproximação pontual

$$\Pr(X=5) = \text{BinomialDen}\left(5; 30, \frac{1}{6}\right) \approx \frac{\phi\left(\frac{5-5}{\sqrt{npq}}\right)}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{6}}} = 19.544\%$$

Ex. 28 *a) O número de questões que ele acerta é $X \sim Bin(50, 0.5)$. Usando a aproximação normal:*

$$\begin{aligned}
\Pr(X \geq 40) &\approx \Pr\left(Z \geq \frac{39.5-25}{\sqrt{50(0.5)(0.5)}}\right) = 1 - \text{NormalDist}(4.101) = 2.055 \times 10^{-5} \\
\Pr(X \geq 30) &\approx \Pr\left(Z \geq \frac{29.5-25}{\sqrt{50(0.5)(0.5)}}\right) = 1 - \text{NormalDist}(1.273) = 10.155\%
\end{aligned}$$

Compare com as respostas exatas:

$$\begin{aligned}
\Pr(X \geq 40) &= 1 - \text{BinomialDist}(39; 50, 0.5) = 1.193 \times 10^{-5} \\
\Pr(X \geq 30) &= 1 - \text{BinomialDist}(29; 50, 0.5) = 10.132\%
\end{aligned}$$

b) O número de estudantes que acerta 40 ou mais questões é $Y \sim Bin(100, p)$ onde p é a probabilidade calculada acima. Assim, a probabilidade exata é

$$\Pr(Y \neq 0) = 1 - (1-p)^{100} = 1 - \text{BinomialDist}(39; 50, 0.5)^{100} = 1.1923 \times 10^{-3}$$

Uma aproximação seria usar a aproximação de p do item anterior

$$\Pr(Y \neq 0) = 1 - (1-p)^{100} \approx 1 - (\text{NormalDist}(4.101))^{100} = 2.053 \times 10^{-3}$$

que tem a mesma ordem de grandeza, mas é bem diferente...
c) Com 5 alternativas, temos $X \sim Bin(50, 0.2)$. A aproximação normal dá as probabilidades microscópicas:

$$\begin{aligned}
\Pr(X \geq 40) &\approx \Pr\left(Z \geq \frac{39.5-10}{\sqrt{50(0.2)(0.8)}}\right) = 1 - \text{NormalDist}(10.430) = 9.061 \times 10^{-26} \\
\Pr(X \geq 30) &\approx \Pr\left(Z \geq \frac{29.5-10}{\sqrt{50(0.2)(0.8)}}\right) = 1 - \text{NormalDist}(6.894) = 2.707 \times 10^{-12}
\end{aligned}$$

Compare com as respostas "exatas":

$$\begin{aligned}
\Pr(X \geq 40) &= 1 - \text{BinomialDist}(39; 50, 0.2) = 1.291 \times 10^{-19} \\
\Pr(X \geq 30) &= 1 - \text{BinomialDist}(29; 50, 0.2) = 6.937 \times 10^{-10}
\end{aligned}$$

Note como a aproximação normal erra até a ordem de grandeza nestes casos extremos!

Ex. 29 *O número de cartas que o paranormal acerta é $X \sim Bin\,(10, 0.2)$. Sabemos que a resposta correta é*

$$\Pr\left(X \geq 8\right) = \sum_{i=8}^{10} \mathrm{BinomialDen}\left(i; 10, 0.2\right) = 7.793 \times 10^{-5}$$

enquanto a aproximação normal nos daria

$$\Pr\left(X \geq 8\right) = \Pr\left(Z \geq \frac{7.5 - 2}{\sqrt{10\,(0.2)\,(0.8)}}\right) = 1 - \mathrm{NormalDist}\left(4.348\right) = 6.865 \times 10^{-6}$$

ou seja, nem a ordem de grandeza está correta (note que $n = 10$ é pequeno demais, e, ainda por cima, trata-se de um caso extremo).

Ex. 30 *O número de folhetos é $X \sim Bin\left(10000, \frac{1}{2000}\right)$. As respostas exatas são*

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X = 0\right) &= \mathrm{BinomialDen}\left(0; 10000, \frac{1}{2000}\right) = \left(\frac{1999}{2000}\right)^{10000} = 0.6730\% \\
\Pr\left(X = 5\right) &= \mathrm{BinomialDen}\left(5, 10000, \frac{1}{2000}\right) = \binom{10000}{5}\left(\frac{1}{2000}\right)^{5}\left(\frac{1999}{2000}\right)^{9995} = 17.551\% \\
\Pr\left(X = 10\right) &= \mathrm{BinomialDen}\left(10, 10000, \frac{1}{2000}\right) = \binom{10000}{10}\left(\frac{1}{2000}\right)^{10}\left(\frac{1999}{2000}\right)^{9990} = 1.812\%
\end{aligned}$$

A aproximação normal pontual dá

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X = 0\right) &= \frac{\phi\left(\frac{0-5}{\sqrt{10000\left(\frac{1}{2000}\right)\left(\frac{1999}{2000}\right)}}\right)}{\sqrt{10000\left(\frac{1}{2000}\right)\left(\frac{1999}{2000}\right)}} = \frac{\mathrm{NormalDen}\left(-2.236\,627\,2\right)}{2.235\,508\,9} = 1.463\% \\
\Pr\left(X = 5\right) &= \frac{\phi\left(\frac{5-5}{\sqrt{10000\left(\frac{1}{2000}\right)\left(\frac{1999}{2000}\right)}}\right)}{\sqrt{10000\left(\frac{1}{2000}\right)\left(\frac{1999}{2000}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{10000\left(\frac{1}{2000}\right)\left(\frac{1999}{2000}\right)}} = 17.846\% \\
\Pr\left(X = 10\right) &= \frac{\phi\left(\frac{10-5}{\sqrt{10000\left(\frac{1}{2000}\right)\left(\frac{1999}{2000}\right)}}\right)}{\sqrt{10000\left(\frac{1}{2000}\right)\left(\frac{1999}{2000}\right)}} = \frac{\mathrm{NormalDen}\left(2.236\,627\,2\right)}{2.235\,508\,9} = 1.463\%
\end{aligned}$$

Novamente, apesar de o $n = 10000$ ser bem grande, a aproximação pontual falha nos casos extremos (longe da média). Já a aproximação por áreas dá:

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X = 0\right) &\approx \mathrm{NormalDist}\left(\frac{0.5 - 5}{\sqrt{npq}}\right) - \mathrm{NormalDist}\left(\frac{-0.5 - 5}{\sqrt{npq}}\right) = 1.512\% \\
\Pr\left(X = 5\right) &\approx \mathrm{NormalDist}\left(\frac{5.5 - 5}{\sqrt{npq}}\right) - \mathrm{NormalDist}\left(\frac{4.5 - 5}{\sqrt{npq}}\right) = 17.698\% \\
\Pr\left(X = 10\right) &\approx \mathrm{NormalDist}\left(\frac{10.5 - 5}{\sqrt{npq}}\right) - \mathrm{NormalDist}\left(\frac{9.5 - 5}{\sqrt{npq}}\right) = 1.512\%
\end{aligned}$$

Ex. 31 *a) Seja $X \sim N\left(500, 100\right)$ o peso de um pacote. Então*

$$\Pr\left(X \leq 490\right) = \Pr\left(Z \leq \frac{490 - 500}{10}\right) = \Pr\left(Z \leq -1\right) = 15.866\%$$

b) Temos $\bar{X} \sim N\left(500, \frac{100}{n}\right)$ *Normalizando,* $Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-500}{10}$ *deve satisfazer*

$$\begin{aligned} \Pr\left(\bar{X} \geq 495\right) &= 0.99 \Rightarrow \Pr\left(Z \leq \sqrt{n}\frac{495-500}{10}\right) = 0.01 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{-5\sqrt{n}}{10} = \text{NormalInv}\,(0.01) = -2.326 \Rightarrow n = 21.648 \end{aligned}$$

Ou seja, para que a probabilidade de não levar multa seja 99%*, você precisa de que o fiscal amostre pelo menos* 22 *pacotes.*
c) Queremos

$$\Pr\left(Z \leq z_{0.01}\right) = 0.01 \Rightarrow z_{0.01} = \text{NormalInv}\,(0.01) = -2.326$$

Mas lembremos que

$$Z = \frac{X-p}{10} \Rightarrow z_{0.01} = \frac{490-p}{10} \Rightarrow p = 490 - 10z_{0.01} = 490 + 23.26 = 513.26g$$

Ou seja, a máquina deveria ser ajustada para uma média p *de* 513.26 *gramas.*

Ex. 32 *a) A cada giro, o prêmio é* $X \sim U[0, 100]$*. Assim,* $E(X) = 50$ *e* $Var(X) = \frac{100^2}{12}$ *Portanto:*

$$\begin{aligned} E\left(S_{24}\right) &= 24E(X) = \$1200 \\ Var\left(S_{24}\right) &= 24Var(X) = 20000\,(\$)^2 \end{aligned}$$

b) Encontrar a distribuição exata de S_{24} *é muito difícil. Ao invés, vamos usar uma aproximação normal:*

$$S_{24} \approx N\,(1200, 20000)$$

Então

$$\Pr\left(S_{24} \geq 1400\right) \approx \Pr\left(Z \geq \frac{1400-1200}{\sqrt{20000}} = \sqrt{2}\right) = \Pr\left(Z \geq 1.4142\right) = 7.865\%$$

Ex. 33 *a) Seja* X *um resultado. Temos que* $X \sim U[0, 10]$*, então* $E(X) = 5$ *e* $Var(X) = \frac{10^2}{12}$*. Então:*

$$\begin{aligned} E\left(S_n\right) &= nE(X) = 5n \\ Var\left(S_n\right) &= nVar(X) = \frac{100n}{12} \end{aligned}$$

b) Como é difícil encontrar a distribuição exata de S_n*, vamos usar uma aproximação normal (garantida pelo TCL). Assim:*

$$S_{48} \approx N\,(240, 400) \;\; e \; S_{54} \approx N\,(270, 450)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Pr\left(240 \leq S_{48} \leq 270\right) &\approx \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{270-240}{\sqrt{400}}\right) = \Pr\left(0 \leq Z \leq 1.5\right) = 0.4332 \\ \Pr\left(240 \leq S_{54} \leq 270\right) &\approx \Pr\left(\frac{240-270}{\sqrt{450}} \leq Z \leq 0\right) = \Pr\left(-1.414 \leq Z \leq 0\right) = 0.4214 \end{aligned}$$

Nem era necessário consultar a tabela – pela simetria da distribuição normal, a probabilidade de cima é maior pois $1.5 > \sqrt{2} = 1.414$*. Assim, é melhor rodar a roleta* 48 *vezes apenas (a diferença no valor esperado do prêmio é de* $100\,(0.4332 - 0.4214) = \$1.18$*).*
c) Temos ainda mais razão para acreditar que rodar menos é melhor! Apenas para confirmar, vejamos o valor esperado do lucro em cada opção:

$$\begin{aligned} \textit{Rodando 48 vezes} &: \; E(L) = 100\,(0.4332) - (0.5)\,(48) = 19.32 \\ \textit{Rodando 54 vezes} &: \; E(L) = 100\,(0.4214) - (0.5)\,(54) = 15.14 \end{aligned}$$

Então a primeira opção é uns \$4 *melhor que a segunda agora!*

Ex. 34 *a) Cada dia é uma prova de Bernoulli com probabilidade de sucesso (ação subir)* 70%. *Assim,* $Z \sim Bin\,(90, 0.7)$.
b) O lucro é

$$L = 2Z - 4\,(90 - Z) = 6Z - 360$$

Assim, seu valor esperado é

$$E\,(L) = E\,(6Z - 360) = 6E\,(Z) - 360 = 6\,(90)\,(0.7) - 360 = \$18$$

c) Temos

$$\Pr\,(L \geq 50) = \Pr\,(6Z - 360 \geq 50) = \Pr\left(Z \geq \frac{410}{6}\right) = \Pr\,(Z \geq 68.33) = \Pr\,(Z \geq 69)$$

Usando a aproximação normal à binomial, temos:

$$\Pr\,(Z \geq 69) \approx \int_{a^*}^{\infty} \phi\,(x)\,dx = 1 - \mathrm{NormalDist}\,(1.265) = 10.29\%$$

pois $a^* = \frac{68.5-63}{\sqrt{90(0.7)(0.3)}} = 1.265$.
Observação: a resposta exata é

$$\Pr\,(Z \geq 69) = 1 - \mathrm{BinomialDist}\,(68; 90, 0.7) = 10.10\%$$

Chapter 8

Respostas do Capítulo 8

Ex. 1 *Seja* $q = 1 - p$.
a) $E(\hat{p}_1) = E(X_3) = p$ *e* $Var(\hat{p}_1) = Var(X_3) = pq$. *Assim,* $EQM(\hat{p}_1) = pq$.
b) $E(\hat{p}_2) = E(\bar{X}) = p$ *e* $Var(\hat{p}_2) = Var(\bar{X}) = \frac{pq}{n}$. *Assim,* $EQM(\hat{p}_2) = \frac{pq}{n}$.
c) Como os X_i *são* 0 *ou* 1*, a distribuição de* $\hat{p}_3$ *só assume três valores:*

$$\begin{aligned} \Pr(\hat{p}_3 = 0) &= \Pr(X_1 = X_2 = ... = X_n = 0) = q^n \\ \Pr(\hat{p}_3 = 1) &= \Pr(X_1 = X_2 = ... = X_n = 1) = p^n \end{aligned}$$

Em qualquer outro caso, $\hat{p}_3 = \frac{1}{2}$. *Então:*

$$\Pr\left(\hat{p}_3 = \frac{1}{2}\right) = 1 - p^n - q^n$$

Assim

$$\begin{aligned} E(\hat{p}_3) &= \frac{1 - p^n - q^n}{2} + p^n = \frac{1 + p^n - q^n}{2} \\ E(\hat{p}_3^2) &= \frac{1 - p^n - q^n}{4} + p^n = \frac{1 + 3p^n - q^n}{4} \\ Var(\hat{p}_3) &= \frac{1 + 3p^n - q^n}{4} - \left(\frac{1 + p^n - q^n}{2}\right)^2 = \frac{p^n + q^n - (p^n - q^n)^2}{4} \end{aligned}$$

Portanto

$$EQM(\hat{p}_3) = Viés(\hat{p}_3) + Var(\hat{p}_3) = \left(\frac{1 + p^n - q^n}{2} - p\right) + \frac{p^n + q^n - (p^n - q^n)^2}{4}$$

Conclusão: $\hat{p}_1$ *e* $\hat{p}_2$ *são não-tendenciosos, mas* $\hat{p}_3$ *tem viés (a menos, é claro, que* $p = 0.5$*, mas se soubéssemos disto não precisaríamos de estimadores). Dentre os dois primeiros, claramente* $\hat{p}_2$ *é mais eficiente (menor variância); em geral, para* n *grande,* $\hat{p}_3$ *será mais eficiente ainda (pois* p^n *vai para* 0 *mais rápido do que* $\frac{pq}{n}$*), mas, como* $\hat{p}_3$ *"mira no lugar errado", isto é inútil. De fato, a menos que* $p = 0.5$*, note que o viés de* $\hat{p}_3$ ***não se aproxima de*** 0 ***quando*** $n \to \infty$*:*

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{p}_3) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + p^n - q^n}{2} = \frac{1}{2}$$

Assim, para n *grande*

$$EQM(\hat{p}_2) \leq EQM(\hat{p}_1) \leq EQM(\hat{p}_3)$$

pois os dois primeiros se aproximam de 0.
d) Note que $\hat{p}_4 = \frac{S_n - 2\hat{p}_3}{n-2}$. *Assim*

$$E(\hat{p}_4) = \frac{E(S_n) - 2E(\hat{p}_3)}{n - 2} = \frac{np - (1 + p^n - q^n)}{n - 2}$$

A variância de $\hat{p}_4$ é horrível de calcular

$$Var\left(\hat{p}_4\right) = \frac{1}{(n-2)^2}\left(Var\left(S_n\right) + 4Var\left(\hat{p}_3\right) - 4Cov\left(S_n, \hat{p}_3\right)\right)$$

As variâncias estão feitas, mas a covariância tem de ser feita no braço. Note que

$$\begin{aligned}
\hat{p}_3 &= 0 \Leftrightarrow S_n = 0 \\
\hat{p}_3 &= 1 \Leftrightarrow S_n = n \\
\hat{p}_3 &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow S_n \in \{1, 2, ..., n-1\}
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
E\left(S_n \hat{p}_3\right) &= \sum_{k,j} kj \Pr\left(S_n = k; \hat{p}_3 = j\right) = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} k\frac{1}{2} \Pr\left(S_n = k\right) + n\Pr\left(S_n = n\right) = \\
&= \frac{E\left(S_n\right)}{2} + \frac{n}{2}\Pr\left(S_n = n\right) = \frac{np}{2} + \frac{np^n}{2}
\end{aligned}$$

Portanto

$$Cov\left(S_n, \hat{p}_3\right) = E\left(S_n \hat{p}_3\right) - E\left(S_n\right)E\left(\hat{p}_3\right) = \frac{np + np^n}{2} - np\frac{1 + p^n - q^n}{2} = \frac{np^n(1-p) + npq^n}{2} = \frac{npq}{2}\left(p^{n-1} + q^{n-1}\right)$$

Enfim

$$Var\left(\hat{p}_4\right) = \frac{npq + 4\left(\frac{p^n + q^n - (p^n - q^n)^2}{4}\right) - 4npq\left(\frac{p^{n-1} + q^{n-1}}{2}\right)}{(n-2)^2}$$

Só vale a pena ver o que acontece quando $n \to \infty$. Neste caso, os termos em p^n e q^n rapidamente se aproximam de 0, e então

$$Var\left(\hat{p}_4\right) \approx \frac{npq}{(n-2)^2}$$

que é uma variância maior do que a de $\hat{p}_2$. Assim, $\hat{p}_2$ é mais eficiente e não tem viés; quando $n \to \infty$, $\hat{p}_2$ terá um EQM menor do que $\hat{p}_4$.

Ex. 2 *Sua resposta dependerá do critério que você decidir usar. Por exemplo, como*

$$E\left(\hat{\theta}_1\right) = \theta \text{ e } E\left(\hat{\theta}_2\right) = \theta - 1$$

então $\hat{\theta}_1$ é não-tendencioso, enquanto $\hat{\theta}_2$ tem um viés de -1. Por outro lado, note que

$$Var\left(\hat{\theta}_1\right) = 25 \text{ e } Var\left(\hat{\theta}_2\right) = 4$$

então $\hat{\theta}_2$ é mais eficiente (apesar de mirar no lugar errado). Por fim, poderíamos comparar os EQM:

$$\begin{aligned}
EQM\left(\hat{\theta}_1\right) &= 0^2 + 25 = 25 \\
EQM\left(\hat{\theta}_2\right) &= 1^2 + 4 = 5
\end{aligned}$$

Por este critério, $\hat{\theta}_2$ (apesar de tendencioso) é melhor.

Ex. 3 *a) Como*

$$E(T) = aE\left(\hat{\theta}_1\right) + bE\left(\hat{\theta}_2\right) = (a+b)\theta$$

para que T seja não-tendencioso, precisamos tomar $a + b = 1$ (a menos, é claro, que $\theta = 0$, mas se soubéssemos disto, porque procurar estimadores de θ?).
b) Temos

$$Var(T) = a^2 Var\left(\hat{\theta}_1\right) + b^2 Var\left(\hat{\theta}_2\right) + 2abCov\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$$

Como $a+b=1$, temos

$$Var\,(T)=a^2Var\left(\hat{\theta}_1\right)+(1-a)^2\,Var\left(\hat{\theta}_2\right)+2a\,(1-a)\,Cov\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$$

Isto é uma função quadrática em a, cujo mínimo será atingido quando

$$a=\frac{Var\left(\hat{\theta}_2\right)-Cov\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)}{Var\left(\hat{\theta}_1\right)+Var\left(\hat{\theta}_2\right)-2Cov\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)}$$

Dividindo numerador e denominador por $\sigma_1=\sqrt{Var\left(\hat{\theta}_1\right)}$ *e* $\sigma_2=\sqrt{Var\left(\hat{\theta}_2\right)}$*:*

$$a=\frac{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-\rho}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-2\rho}\ \text{ e } b=\frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}-\rho}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-2\rho}$$

mostrando que a resposta depende apenas da correlação e da razão entre as variâncias de ambos os estimadores. Sem saber mais, é impossível terminar o problema; por outro lado, se supusermos que $\rho=0$ (por exemplo, se os estimadores forem independentes):

$$a=\frac{Var\left(\hat{\theta}_2\right)}{Var\left(\hat{\theta}_1\right)+Var\left(\hat{\theta}_2\right)}=\frac{1}{3}\ \text{ e } b=\frac{2}{3}$$

Ou seja, é preferível montar o estimador

$$T=\frac{1}{3}\hat{\theta}_1+\frac{2}{3}\hat{\theta}_2$$

Ex. 4 *a) Sabemos que $E\left(\bar{X}\right)=E\,(X)=\lambda$ (sem viés) e $Var\left(\bar{X}\right)=\frac{Var(X)}{n}=\frac{\lambda}{n}$. Assim:*

$$EQM\left(\bar{X};\lambda\right)=\frac{\lambda}{n}$$

b) Sabemos que $E\left(S^2\right)=\sigma^2=\lambda$ (sem viés) e

$$Var\left(S^2\right)=\frac{(n-1)\,\mu_4-(n-3)\,\sigma^4}{n\,(n-1)}=\frac{(n-1)\left(\lambda+3\lambda^2\right)-(n-3)\,\lambda^2}{n\,(n-1)}=\frac{2\lambda^2}{n-1}+\frac{\lambda}{n}$$

Assim,

$$EQM\left(S^2;\lambda\right)=\frac{\lambda}{n}+\frac{2\lambda^2}{n-1}$$

c) Como ambos são não-viesados mas S^2 tem variância maior, então não há dúvida: $\bar{X}$ é melhor do que S^2.

Ex. 5 *Temos*

$$E\,(X)=\int_{-1}^{1}x\left(ax+\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{ax^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1}=\frac{2a}{3}$$

Assim, $a=\frac{3E(X)}{2}$. Isto sugere o uso do estimador $\hat{a}=\frac{3\bar{X}}{2}$ para o parâmetro a. De fato:

$$E\,(\hat{a})=\frac{3E\left(\bar{X}\right)}{2}=\frac{3E\,(X)}{2}=a$$

A variância deste estimador é

$$Var\,(\hat{a})=\frac{9}{4}Var\left(\bar{X}\right)=\frac{9}{4}\frac{Var\,(X)}{n}$$

Onde

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \int_{-1}^{1} x^2\left(ax+\frac{1}{2}\right)dx = \left(\frac{ax^4}{4}+\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \\ Var\left(X\right) &= E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2 = \frac{1}{3}-\left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{3-4a^2}{9} \end{aligned}$$

Juntando tudo

$$Var\left(\hat{a}\right) = \left(\frac{3}{4}-a^2\right)\frac{1}{n}$$

Note que $\hat{a}$ é consistente (pois é não-viesado e $Var\left(\hat{a}\right)\to 0$ quando $n\to\infty$).

Ex. 6 *Como $E\left(\bar{X}\right)=E\left(X\right)=a$, o estimador é não-viesado. Como $Var\left(\bar{X}\right)=\frac{Var(X)}{n}=\frac{4a^2}{3n}\to 0$ quando $n\to\infty$, então $\bar{X}$ é consistente. Enfim*

$$EQM\left(\bar{X}\right) = Var\left(\bar{X}\right) = \frac{4a^2}{3n}$$

Ex. 7 *a) Note que (para $0\le m\le a$):*

$$\begin{aligned} \Pr\left(M\le m\right) &= \Pr\left(\max\left(X_1,X_2,...,X_n\right)\le 2m\right) = \Pr\left(X_1\le 2m \text{ e } X_2\le 2m ... \text{e } X_n\le 2m\right) = \\ &= \Pr\left(X_1\le 2m\right)\Pr\left(X_2\le 2m\right)...\Pr\left(X_n\le 2m\right) = \left(\frac{2m}{2a}\right)^n \end{aligned}$$

Assim, a acumulada de M é

$$F\left(m\right) = \frac{m^n}{a^n}$$

e a densidade é obtida derivando com relação a m:

$$f\left(m\right) = \begin{cases} \frac{nm^{n-1}}{a^n} \text{ se } 0\le m\le a \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Portanto

$$E\left(M\right) = \int_0^a m\frac{nm^{n-1}}{a^n}dm = \left(\frac{n}{a^n}\frac{m^{n+1}}{n+1}\right]_{m=0}^{m=a} = \frac{n}{n+1}a$$

ou seja, M é viesado com viés $Viés\left(M\right)=-\frac{a}{n+1}$. Por outro lado

$$\begin{aligned} E\left(M^2\right) &= \int_0^a m^2\frac{nm^{n-1}}{a^n}dm = \left(\frac{n}{a^n}\frac{m^{n+2}}{n+2}\right]_{m=0}^{m=a} = \frac{n}{n+2}a^2 \\ Var\left(M\right) &= \frac{n}{n+2}a^2-\left(\frac{n}{n+1}a\right)^2 = \frac{na^2}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)^2} \end{aligned}$$

Como tanto o viés como a variância têm limite 0 quando $n\to\infty$, o estimador M é consistente. O EQM é

$$EQM\left(M;a\right) = \left(-\frac{a}{n+1}\right)^2+\frac{na^2}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)^2} = \frac{2a^2}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$$

b) Para consertar o viés de M, podemos tomar

$$M_2 = \frac{n+1}{n}M$$

então

$$\begin{aligned} E\left(M_2\right) &= \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1}a = a \\ Var\left(M_2\right) &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 Var\left(M\right) = \frac{a^2}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)} \end{aligned}$$

O novo EQM é

$$EQM\left(M_2;a\right)=Var\left(M_2\right)=\frac{a^2}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$$

Como a variância de M_2 tem limite 0 quando $n\to\infty$ (e M_2 não tem viés), então M_2 é consistente.
c) Comparando M_2 com $\bar{X}$, note que ambos não têm viés, mas M_2 é mais eficiente, pois

$$Var\left(M_2\right)=\frac{a^2}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\leq\frac{a^2}{\frac{3}{4}n}=Var\left(\bar{X}\right)$$

já que $n+1>n$ e $n+2>\frac{3}{4}$, por exemplo.
Já a briga entre M e M_2 é boa – M_2 tem menor variância, mas mira no lugar errado (tem viés). Usando o EQM para decidir, vê-se que

$$EQM\left(M_2;a\right)=\frac{a^2}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\leq\frac{2a^2}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}=EQM\left(M;a\right)$$

ou seja, o EQM de M_2 é a metade do EQM de M. Ficamos com M_2!

Ex. 8 *a) Seja $\hat{p}=\frac{r-1}{X-1}$. Então lembrando a função de probabilidade de $X\sim NegBin\left(r,p\right)$:*

$$\begin{aligned}E\left(\hat{p}\right)&=E\left(\frac{r-1}{X-1}\right)=\sum_{x=r}^{\infty}\frac{r-1}{x-1}\Pr\left(X=x\right)=\sum_{x=r}^{\infty}\frac{r-1}{x-1}.\binom{x-1}{r-1}p^rq^{x-r}=\\&=p\sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-2}{r-2}p^{r-1}q^{x-r}=p\sum_{y=r-1}^{\infty}\binom{y-1}{r-2}p^{r-1}q^{y-(r-1)}=p\sum_{y=r-1}^{\infty}\Pr\left(Y=y\right)\end{aligned}$$

onde estamos inventando a variável $Y\sim NegBin\left(r-1,p\right)$. Como o somatório abrange todas as possibilidades de valores de Y, aquela soma de probabilidades dá 1. Assim:

$$E\left(\hat{p}\right)=p$$

ou seja, $\hat{p}$ é não-viesado.
b) No primeiro caso, $r=5$ e $X=13$. Nossa estimativa não-viesada é $\hat{p}=\frac{5-1}{13-1}=\frac{1}{3}$ (e não $\frac{5}{13}$ como alguns diriam). Na segunda experiência, $r=5$ e $X=10$, então nossa estimativa não-viesada é $\hat{p}=\frac{4}{9}$ (e não é 50%). Para que a estimativa fosse $\hat{p}=50\%$, deveríamos ter $X=9$, isto é, $\hat{p}=\frac{5-1}{9-1}$. Uma tal seqüência seria $CKCKCKCKK$.

Ex. 9 *Sabemos que $E\left(\bar{X}\right)=E\left(X\right)=\frac{1}{\lambda}$ e $Var\left(\bar{X}\right)=\frac{Var(X)}{2}=\frac{1}{2\lambda^2}$.*
Quanto ao segundo estimador, note que

$$E\left(G\right)=E\left(\sqrt{X_1X_2}\right)=E\left(\sqrt{X_1}\right)E\left(\sqrt{X_2}\right)$$

pois X_1 e X_2 são independentes. Agora:

$$E\left(\sqrt{X}\right)=\int_0^{\infty}\sqrt{x}\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{\infty}\frac{u^{1/2}}{\sqrt{\lambda}}e^{-u}du$$

onde tomamos $u=\lambda x$. Enfim:

$$E\left(\sqrt{X}\right)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$$

e então

$$E\left(G\right)=\frac{\pi}{4\lambda}$$

A variância de G é mais fácil:

$$\begin{aligned}E\left(G^2\right)&=E\left(X_1X_2\right)=E\left(X_1\right)E\left(X_2\right)=\frac{1}{\lambda^2}\Rightarrow\\&\Rightarrow Var\left(G\right)=\frac{1}{\lambda^2}-\left(\frac{\pi}{4\lambda}\right)^2=\left(1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right)\frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

Agora vamos comparar $\bar{X}$ com G:

$$E\left(\bar{X}\right) = \mu = \frac{1}{\lambda} \text{ e } E\left(G\right) = \frac{\pi}{4}\mu$$

Assim, $\bar{X}$ tem menos viés, enquanto G tem um pequeno viés negativo de

$$Viés\left(G;\mu\right) = \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)\mu$$

Quanto às variâncias,

$$Var\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{2\lambda^2} \text{ e } Var\left(G\right) = \left(1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right)\frac{1}{\lambda^2}$$

Como $1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 0.383 < 0.5$, G é mais eficiente!
Enfim

$$EQM\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{2\lambda^2} \text{ e } EQM\left(G\right) = \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)^2\frac{1}{\lambda^2} + \left(1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right)\frac{1}{\lambda^2} = \frac{4-\pi}{2\lambda^2}$$

Como $\frac{4-\pi}{2} \approx 0.4292 < 0.5$, pelo critério do EQM a média geométrica G é um estimador melhor!

Ex. 10 *De fato*

$$E\left((X-\mu)^2\right) = \sigma^2$$

Então

$$E\left(Y\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} E\left((X_i-\mu)^2\right)}{n} = \frac{\sigma^2+\sigma^2+...+\sigma^2}{n} = \sigma^2$$

então Y não tem viés. Por outro lado, como $X_1-\mu$, $X_2-\mu$, ..., $X_n-\mu$ são independentes, temos

$$\begin{aligned} Var\left(Y\right) &= \frac{Var\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right)}{n^2} = \frac{nVar\left((X-\mu)^2\right)}{n^2} = \frac{E\left((X-\mu)^4\right) - \left[E\left((X-\mu)^2\right)\right]^2}{n} = \\ &= \frac{\mu_4-\sigma^4}{n} \end{aligned}$$

Assim

$$EQM\left(Y;\sigma^2\right) = \frac{\mu_4-\sigma^4}{n}$$

Em particular, se X é normal, sabemos que $\mu_4 = 2\sigma^4$. Assim:

$$EQM\left(Y;\sigma^2\right) = \frac{\sigma^4}{n}$$

Ex. 11 *Feito no texto.*

Ex. 12 *Feito no texto.*

Ex. 13 *Sejam $Z_1 = \frac{X_1}{\sigma}$ e $Z_2 = \frac{X_2}{\sigma}$. Então $Z_1 \sim N\left(0,1\right)$ e $Z_2 \sim N\left(0,1\right)$. Assim:*

$$\Pr\left(X_1^2+X_2^2 \le \sigma^2\right) = \Pr\left(\frac{X_1^2}{\sigma^2}+\frac{X_2^2}{\sigma^2} \le 1\right) = \Pr\left(Z_1^2+Z_2^2 \le 1\right)$$

Mas, como Z_1 e Z_2 são normais-padrão independentes, $Y = Z_1^2+Z_2^2$ é qui-quadrado com 2 graus de liberdade (veja o exercício anterior). Assim:

$$\Pr\left(X_1^2+X_2^2 \le \sigma^2\right) = \Pr\left(Y \le 1\right) = \text{ChiSquareDist}\left(1;2\right) = 39.347\%$$

Ex. 14 *É só ler a tabela na linha $n = 5$ graus de liberdade, fazendo as interpolações necessárias. Com o auxílio de um computador, é possível conseguir uma resposta mais exata:*

$$\Pr\left(2 < X < 4\right) = \text{ChiSquareDist}\left(4;5\right) - \text{ChiSquareDist}\left(2;5\right) = 45.058\% - 15.085\% = 29.973\%$$

Ex. 15 *Como retiramos* 1 *amostras, sabemos que*

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2\,(9) \Rightarrow \frac{9S^2}{9} \sim \chi^2\,(9)$$

Assim, da tabela ou do computador,

$$\Pr\left(S^2 \leq 10\right) = \text{ChiSquareDist}\,(10; 9) = 64.951\%$$

O outro valor sai da tabela mais fácil, sem interpolação:

$$\Pr\left(S^2 \leq a\right) = 0.05 \Rightarrow a = \text{ChiSquareInv}\,(0.05; 9) = 3.3251$$

(na tabela, 3.33*).*

Ex. 16 *É só lhar na tabela ou usar um computador para ter mais precisão. A resposta é*

$$\begin{aligned} P_5 &= \text{ChiSquareInv}\,(0.05; 10) = 3.9403 \\ P_{95} &= \text{ChiSquareInv}\,(0.95; 10) = 18.307 \end{aligned}$$

Ex. 17 *Usando* $Z = \sqrt{2Y} - \sqrt{2n-1} = \sqrt{2Y} - 9$*, temos*

$$\begin{aligned} \Pr\,(Y \geq 50) &\approx \Pr\left(Z \geq \sqrt{2\,(50)} - 9\right) = \Pr\,(Z \geq 1) = 1 - \text{NormalDist}\,(1) = 15.866\% \\ \Pr\,(Y \leq 18) &\approx \Pr\left(Z \leq \sqrt{2\,(18)} - 9\right) = \Pr\,(Z \leq -3) = \text{NormalDist}\,(-3) = 0.1350\% \end{aligned}$$

Compare-os com os valores exatos:

$$\begin{aligned} \Pr\,(Y \geq 50) &= 1 - \text{ChiSquareDist}\,(50; 41) = 15.824\% \\ \Pr\,(Y \leq 18) &= \text{ChiSquareDist}\,(18; 41) = 0.06848\% \end{aligned}$$

Como na aproximação normal à binomial, note que as aproximações são muito melhores em casos não-extremos. Enfim, usando aproximação normal:

$$\Pr\,(Z \geq a) = 5\% \Rightarrow a = \text{NormalInv}\,(0.95) = 1.6449 \Rightarrow \sqrt{2b} - 9 = 1.6449 \Rightarrow b = 56.656$$

Isto é,

$$\Pr\,(Y \geq 56.656) \approx 0.05$$

Compare com a resposta exata

$$\text{ChiSquareInv}\,(0.95; 41) = 56.942$$

Ex. 18 *Se* $X \sim t\,(n)$*, pela definição da distribuição* t *de Student podemos escrever* $X = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$ *onde* $Z \sim N\,(0,1)$ *e* $Y \sim \chi^2\,(n)$ *são independentes. Então* $X^2 = \frac{Z^2}{Y/n}$*, onde* $Z^2 \sim \chi^2\,(1)$ *e* $Y \sim \chi^2\,(n)$ *são independentes. Assim, pela definição da distribuição* F*:*

$$X^2 = \frac{Z^2/1}{Y/n} = \frac{\chi^2\,(1)\,/1}{\chi^2\,(n)\,/n} \sim F\,(1,n)$$

Ex. 19 $\Pr\,(X < 4) = \text{FDist}\,(4; 5, 2) = 78.80\%$.

Ex. 20 $\Pr\,(X > 2) = 1 - \text{TDist}\,(2; 5) = 5.097\%$.

Ex. 21 *Para* $F\,(3,5)$*, os percentis são*

$$a = \text{FInv}\,(0.05, 3, 5) = 0.1109 \text{ e } b = \text{FInv}\,(0.95; 3, 5) = 5.409$$

enquanto para $F\,(5,3)$*, os percentis são os inversos (trocando a ordem):*

$$\text{FInv}\,(0.05, 5, 3) = 0.185 = \frac{1}{b} \text{ e } \text{FInv}\,(0.95, 5, 3) = 9.013 = \frac{1}{a}$$

Ex. 22 *Temos*

$$
\begin{aligned}
P_{0.05} &= \text{TInv}\,(0.05, 5) = -2.015 \\
P_{0.95} &= \text{TInv}\,(0.95, 5) = 2.015
\end{aligned}
$$

Pela simetria da distribuição t de Student, sabemos que $P_{0.05} = -P_{0.95}$.

Ex. 23 *A densidade de* $F\,(m,n)$ *é feia*

$$f\,(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{m/2} n^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{x^{(m/2)-1}}{(n+mx)^{(m+n)/2}}$$

mas apenas a parte final depende de x. *Assim, um ponto crítico de* f *será um ponto onde a derivada de*

$$\frac{x^{(m/2)-1}}{(n+mx)^{(m+n)/2}}$$

se anula. Mas

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = 0 \Rightarrow u'v - uv' = 0$$

ou seja, o ponto crítico satisfaz

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{m}{2} - 1\right) x^{(m/2)-2}.\,(n+mx)^{(m+n)/2} - x^{(m/2)-1}.\left(\frac{m+n}{2}\right)(n+mx)^{(m+n)/2-1} m = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow x^{(m/2)-2}\,(n+mx)^{(m+n)/2-1}\left(\left(\frac{m-2}{2}\right)(n+mx) - x\left(\frac{m+n}{2}\right)m\right) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow -mx\,(n+2) + n\,(m-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{n+2}\frac{m-2}{m}
\end{aligned}
$$

que será a moda desta distribuição se $m \geq 3$ *de fato, note que o sinal da derivada muda de* $+$ *para* $-$ *neste ponto). Caso* $m \leq 2$, *note que a fração tem o sinal do termo da esquerda, isto é, de*

$$n\,(m-2) - m\,(n+2)\,x$$

que é negativo para $x > 0$ *(pois* $m, n > 0$*). Assim, a função* $f\,(x)$ *será decrescente e, portanto,* $x = 0$ *será a moda.*

Ex. 24 *a) Como* $\bar{X}$ *e* S^2 *são independentes, a probabilidade condicional é simplesmente*

$$\Pr\left(\bar{X} > \mu + 2\sigma\right) = \Pr\left(\sqrt{15}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} > 2\sqrt{15}\right) = \Pr\left(Z > 2\sqrt{15}\right) = 1 - \text{NormalDist}\,(7.746) = 4.743 \times 10^{-15}$$

b) Agora devemos usar a variável $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{15}} \sim t\,(14)$*:*

$$\Pr\left(\bar{X} - \mu > 2S\right) = \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{15}} > 2\sqrt{15}\right) = \Pr\left(T > 2\sqrt{15}\right) = 1 - \text{TDist}\,(7.746; 14) = 9.948 \times 10^{-7}$$

c) Usamos T *novamente:*

$$\Pr\left(\bar{X} - \mu > aS\right) = \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{15}} > a\sqrt{15}\right) = 0.95 \Rightarrow a\sqrt{15} = \text{TInv}\,(0.05; 14) = -1.761 \Rightarrow a = -0.455$$

d) Novamente, usamos T *e a simetria de sua distribuição:*

$$\Pr\left(-bS < \bar{X} - \mu < bS\right) = 0.95 \Rightarrow \Pr\left(-b\sqrt{15} < T < b\sqrt{15}\right) = 0.95 \Rightarrow b\sqrt{15} = \text{TInv}\,(0.975; 14) \Rightarrow b = 0.554$$

Portanto,

$$\mu \in \left[\bar{X} - 0.554S, \bar{X} + 0.554S\right]$$

com 95% de confiança (ao tomarmos 15 amostras).

Ex. 25 *Sabemos que*

$$F = \frac{S_Y^2}{S_X^2}\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \sim F\left(6, 14\right)$$

Como estamos supondo $\sigma_Y = 2\sigma_X$, temos

$$S_X \geq S_Y \Leftrightarrow \frac{S_Y}{S_X} \leq 1 \Leftrightarrow F = \frac{S_Y^2}{S_X^2}\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \leq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = \frac{1}{4}$$

Assim

$$\Pr\left(S_X \geq S_Y\right) = \Pr\left(F \leq \frac{1}{4}\right) = \mathrm{FDist}\left(\frac{1}{4}; 6, 14\right) = 4.875\%$$

Ou seja, é improvável que $S_X \geq S_Y$ (afinal a variância de Y é o dobro da variância de X), mas ainda assim é possível que isto aconteça.

Ex. 26 *a) A densidade de Y é*

$$f\left(y\right) = F'\left(y\right) = \begin{cases} \frac{ny^{n-1}}{a^n} \text{ para } 0 \leq y \leq a \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Assim

$$E\left(Y\right) = \int_0^a y\frac{ny^{n-1}}{a^n}dy = \frac{n}{a^n}\left(\frac{y^{n+1}}{n+1}\right]_0^a = \frac{n}{n+1}a$$
$$E\left(Y^2\right) = \int_0^a y^2\frac{ny^{n-1}}{a^n}dy = \frac{n}{a^n}\left(\frac{y^{n+2}}{n+2}\right]_0^a = \frac{n}{n+2}a^2$$
$$Var\left(Y\right) = E\left(Y^2\right) - \left(E\left(Y\right)\right)^2 = \frac{n}{n+2}a^2 - \left(\frac{n}{n+1}a\right)^2 = \frac{n}{\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)}a^2$$

b) Note que

$$E\left(Z\right) = \frac{n+1}{n}E\left(Y\right) = a$$

Portanto, Z é não-viesado, isto é, $Viés\left(Z\right) = 0$.
Por outro lado

$$EQM\left(Z; a\right) = Var\left(Z\right) + \left(Viés\left(Z\right)\right)^2 = Var\left(\frac{n+1}{n}Y\right) = \frac{a^2}{n\left(n+2\right)}$$

c) Sim. Note que

$$\lim_{n\to\infty} E\left(Y\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}a = a \quad e \quad \lim_{n\to\infty} Var\left(Y\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)}a^2 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} E\left(Z\right) = \lim_{n\to\infty} a = a \quad e \quad \lim_{n\to\infty} Var\left(Z\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a^2}{n\left(n+2\right)} = 0$$

Ex. 27 *Se $n = 2$, a densidade de $\chi^2\left(n\right)$ é dada por*

$$f\left(t\right) = Ke^{-t/2}$$

(onde K não depende de t) que é uma função decrescente, então a moda é $t = 0$.
Caso contrário, a distribuição $\chi^2\left(n\right)$ tem densidade dada por

$$f\left(t\right) = Kt^{\frac{n}{2}-1}e^{-t/2}$$

Para maximizar $f\left(t\right)$, basta derivar e igualar a 0:

$$f'\left(t\right) = K\left(\left(\frac{n}{2} - 1\right)t^{\frac{n}{2}-2}e^{-t/2} - \frac{1}{2}t^{\frac{n}{2}-1}e^{-t/2}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\left(\frac{n}{2} - 1\right) - \frac{t}{2}\right)t^{\frac{n}{2}-2}e^{-t/2} = 0$$

Agora, se $n > 2$, então $t = 0$ certamente não é a moda, pois ali teríamos $f(0) = 0$ Como $e^{-t/2} > 0$, só nos resta a opção

$$\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{t}{2} \Rightarrow t = n - 2$$

que deve ser a moda de $\chi^2(n)$. Note que esta fórmula vale até mesmo no caso $n = 2$.
Obs.: Tecnicamente, ainda temos que provar que este é um máximo local de $f(t)$; no entanto, como $f(0) = 0$; $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ e $f(t) > 0$ para todo $t \in (0, \infty)$, e f é contínua, então f deve ter um máximo em $(0, \infty)$. Como o único candidato é $t = n - 2$, esta deve ser a moda.

Ex. 28 *a) Sabemos que*

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{9S^2}{10^2} \sim \chi^2(9)$$

Então

$$\Pr\left(S^2 < 163.16\right) = \Pr\left(Y < \frac{9(163.16)}{100}\right) = \text{ChiSquareDist}(14.6844; 9) = 90.00\%$$

b) Temos

$$\begin{aligned}\frac{9a}{100} &= \text{ChiSquareInv}(0.05; 9) = 3.325 \Rightarrow a = 36.946\\ \frac{9b}{100} &= \text{ChiSquareInv}(0.95; 9) = 16.919 \Rightarrow b = 187.989\end{aligned}$$

c) Agora precisamos usar a variável

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{10}} \sim t(9)$$

Assim, lembrando que a distribuição t é simétrica

$$\Pr\left(\left|\bar{X} - \mu\right| < cS\right) = \Pr\left(|T| < c\sqrt{10}\right) = 90\% \Rightarrow c\sqrt{10} = \text{TInv}(0.95; 9) = 1.833 \Rightarrow c = 0.580$$

Ex. 29 *a) Seja $Z = \frac{X-1005}{10}$. Então $Z \sim N(0,1)$, e da tabela*

$$\Pr(X < 1000) = \Pr\left(Z < \frac{1000 - 1005}{10}\right) = \Pr(Z < -0.5) = \text{NormalDist}(-0.5) = 30.854\%$$

b) Sabemos que $S_9 = \sum_{i=1}^{9} X_i$ tem distribuição $N\left(9\mu, 9\sigma^2\right)$. Assim, tomando $Z = \frac{S_9 - 9045}{30} \sim N(0,1)$, temos

$$\Pr(S_9 < 9000) = \Pr\left(Z < \frac{9000 - 9045}{30}\right) = \Pr(Z < -1.5) = \text{NormalDist}(-1.5) = 6.681\%$$

Alternativa: use $\bar{X} \sim N\left(1005, \frac{100}{9}\right)$. Então $Z = \frac{\bar{X} - 1005}{10/3}$ e

$$\Pr(S < 9000) = \Pr\left(\bar{X} < 1000\right) = \Pr\left(Z < \frac{-5}{10/3}\right) = \Pr(Z < -1.5) = 6.681\%$$

c) Sabemos que $\frac{8S^2}{100} \sim \chi^2(8)$. Então

$$\Pr\left(S^2 > 100\right) = \Pr\left(\frac{8S^2}{100} > 8\right) = 1 - \text{ChiSquareDist}(8; 8) = 43.35\%$$

Observação: interpolação linear a partir da tabela (que tem apenas os valores correspondentes a 50% e 30%) nos dá 43.982%.
d) Sabemos que $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{9}\right)$. Então $Z = 3\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ e, portanto

$$\Pr\left(\left|\bar{X} - \mu\right| > 0.5\sigma\right) = \Pr(|Z| > 1.5) = 1 - 86.64\% = 13.36\%$$

Por outro lado, $t = 3\frac{\bar{X}-\mu}{S} \sim t(8)$. Assim:

$$\Pr\left(\left|\bar{X} - \mu\right| > 0.5S\right) = \Pr(|t| > 1.5) = 2\,\text{TDist}(-1.5; 8) = 17.20\%$$

(A aproximação linear a partir da tabela daria 17.78%). *Assim, $\Pr\left(\left|\bar{X} - \mu\right| > 0.5\sigma\right)$ é um pouco menor do que $\Pr\left(\left|\bar{X} - \mu\right| > 0.5S\right)$.*

Ex. 30 *a) Note que $G = 2aZ$. Então*

$$E(G) = 2aE(Z) = \frac{8a}{9}$$
$$Var(G) = 4a^2 Var(Z) = \frac{17}{81}a^2$$

Assim, G é viesado, com viés $Viés(G) = \frac{8a}{9} - a = -\frac{a}{9}$. Também

$$EQM(G;a) = (Viés(G))^2 + Var(G) = \frac{a^2}{81} + \frac{17a^2}{81} = \frac{2}{9}a^2$$

b) Da tabela, temos que

$$\Pr(0.143 < Z < 0.767) = 80\%$$

Isto é

$$\Pr\left(0.143 < \frac{G}{2a} < 0.767\right) = 80\%$$

Assim

$$\Pr\left(\frac{G}{2(0.767)} < a < \frac{G}{2(0.143)}\right) = 80\%$$

isto é, o intervalo de confiança pedido é

$$IC(a;80\%) = \left(\frac{G}{1.534}, \frac{G}{0.286}\right)$$

Neste caso específico, temos $G = 2.47$, então:

$$IC(a;80\%) = (1.61, 8.64)$$

que, convenhamos, é um intervalo bem ruinzinho (também pudera, apenas duas amostras!).
Alternativa: se você não fizer questão de um intervalo centrado, pode também tomar

$$\Pr(0.224 < Z < 1) = 80\%$$

para obter

$$IC(a;80\%) = \left(\frac{G}{2}, \frac{G}{0.448}\right) = (1.24, 5.51)$$

que é um intervalo bem menor do que o anterior.