Definições

Seja $(X_1, X_2, ..., X_n)$ um conjunto de variáveis aleatórias de uma distribuição X. Definimos:

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

$$\overline{X} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

Propriedades da Distribuição Normal

Se $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ são independentes, então qualquer combinação linear: $X = aX_1 + bX_2$ também terá distribuição normal.

$$aX_1 + bX_2 \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$$

Se $X_i \sim N(\mu, sigma^2)$

$$S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Se $X_1, X_2, ..., X_n$ são i.i.d com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- Propriedades para S_n

$$E(S_n) = n\mu$$

$$Var(S_n) = n\sigma^2$$

$$\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma$$

- Propriedades para $\overline{X}$

$$E(\overline{X}) = \mu$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Desigualdade de Chebyshev

Se $E(X)=\mu$ e $\sigma(X)=\sigma$, então para qualquer $k>0$:

$$Pr(|x-\mu|>k\sigma)\leq\frac{1}{k^2}$$

Lei dos Grandes Números (LGN)

Quanto maior o número n de variáveis aleatórias, $E(\overline{X})$ permanece constante, mas $Var(\overline{X})$ se aproxima de 0. Então a distribuição de $\overline{X}$ fica cada vez mais concentrada em $E(X)$.

Para qualquer $\epsilon>0$ fixo:

$$Pr(|\overline{X}-\mu|\geq\epsilon)\to 0$$

quando $n\to\infty$

$$Pr(|\overline{X}-\mu|<\epsilon)\to 1$$

Colocando $\overline{X}$ na desigualdade de Chebyshev e substituindo $E(\overline{X})$ por $E(X)=\mu$ e $\sigma(\overline{X})$ por $\sigma/\sqrt{n}$

$$0<Pr(|\overline{X}-\mu\geq\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}|)\leq\frac{1}{k^2}$$

Escolhendo $k=\epsilon\sqrt{n}/\sigma$

$$0<Pr(|\overline{X}-\mu\geq\epsilon)\leq\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

Teorema Central do Limite (TCL)

Sejam $X_1,X_2,\ldots,X_n$ amostras independentes de uma densidade com valor esperado μ e variância σ^2

$$X^*=\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}=\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}Pr(a\leq X^*\leq b)=\int_a^b\phi(x)dx$$

$$\boxed{X\sim Bin\left(n,p\right)\Rightarrow\Pr\left(a\leq X\leq b\right)\simeq\mathrm{NormalDist}\left(\frac{b+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{npq}}\right)-\mathrm{NormalDist}\left(\frac{a-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{npq}}\right)}$$

$$\boxed{\text{Se } n \text{ é grande e } X\sim NegBin\left(n,p\right)\text{, então } X\approx N\left(\frac{n}{p},\frac{nq}{p^2}\right)}$$

$$\boxed{\text{Se } \lambda \text{ é grande e } X\sim Poi\left(\lambda\right)\text{, então } X\approx N\left(\lambda,\lambda\right)}$$

$$\boxed{\text{Se } n \text{ é grande e } X\sim Gamma\left(n,\lambda\right)\text{, então } X\approx N\left(\frac{n}{\lambda},\frac{n}{\lambda^2}\right)}$$