Definição

O número cromático de G é o menor número de cores das possíveis colorações de G e ele é denotado com $\chi(G)$.

Diz-se que G é $\chi(G)$-cromático.

Exemplo: No exemplo das rotas, G é 3-colorível. E dado que $k3$ é um subgrafo de G, não existe coloração com menos de 3 cores, logo, G é 3-cromático?

Número Cromático de G: $\chi(G)$ tal que G é $\chi(G)$-colorível, mas não é $(\chi(G)-1)$-colorível.

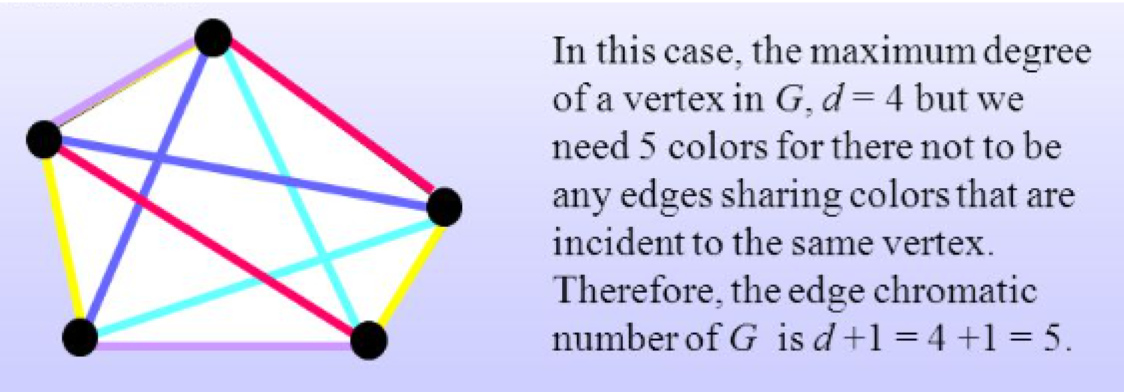
Teorema de Vizing

Se G é um grafo simples, então:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$$

Dem/ Não será aberta neste curso. Referências no livro do Wilson: "Introduction to Graph Theory".
Observação: Não existe uma caracterização dos grafos cujo número cromático p.a é $\Delta(G)$ (ou $\Delta(G)+1$)

Exemplo



Teorema 2-Cromático

> Proposição: Um grafo conexo não-trivial é 2-cromático se e somente se ele é bipartido.

2-Cromático $\Leftrightarrow$ Grafo conexo não trivial Bipartido.
Fonte: Livro do Wilson "Introduction to Graph Theory"

ps:. Grafo trivial: K_1

Prova

$\Leftarrow$) $G=(V,E)$ conexo bipartido não trivial.

$V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \phi$

E toda aresta de G é incidente num vértice de V_1 e num vértice V_2.

Dado $C = \{c_1, c_2\}$ consideramos a coloração:

$$f : V \to C$$

$$v \to f(v) = \begin{cases} c_1 \text{ se } v \in V_1 \\ c_2 \text{ se } v \in V_2 \end{cases}$$

Se v_i e v_j são adjacentes, necessariamente:

$$f(v_i) \neq f(v_j)$$

Então f é uma 2-coloração. Concluímos que G é 2-cromático.

(⇒) Rascunho:

$$f : V \to C = \{c_1, c_2\}$$

Definimos:

$V_1 = f^{-1}(c_1)$
$V_2 = f^{-1}(c_2)$

(pré-imagem)

$f^{-1}(c_1) = \{v \in V, f(v) = c_1\} \subseteq V, i = 1, 2, \ldots$
$f^{-1}(c_1) = f^{-1}(c_1)$

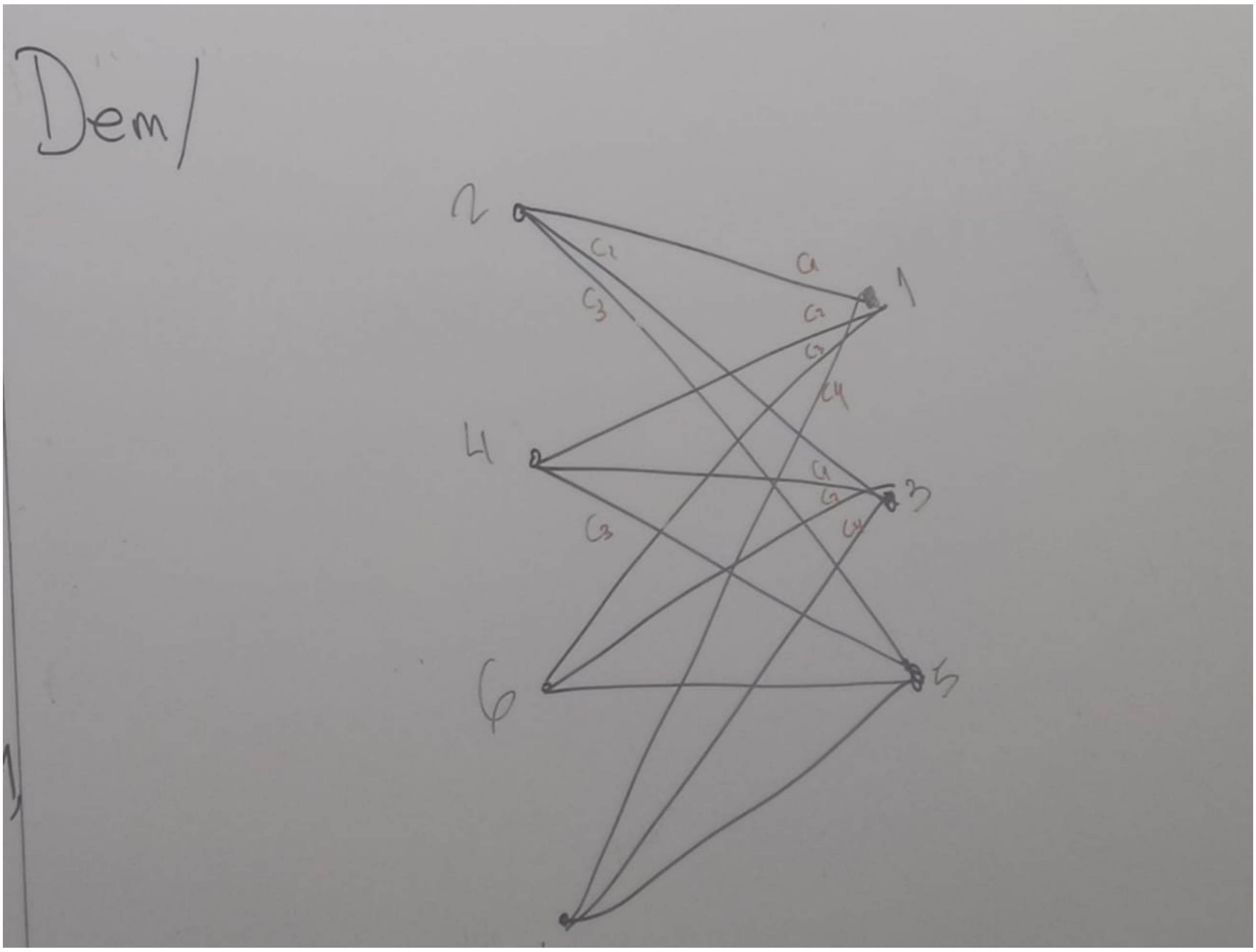
$f^{-1}(c)$ é um subconjunto de c.

Teorema G bipartido $\Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$

(Kong, 1916)
Teorema: Se G é bipartido, então:

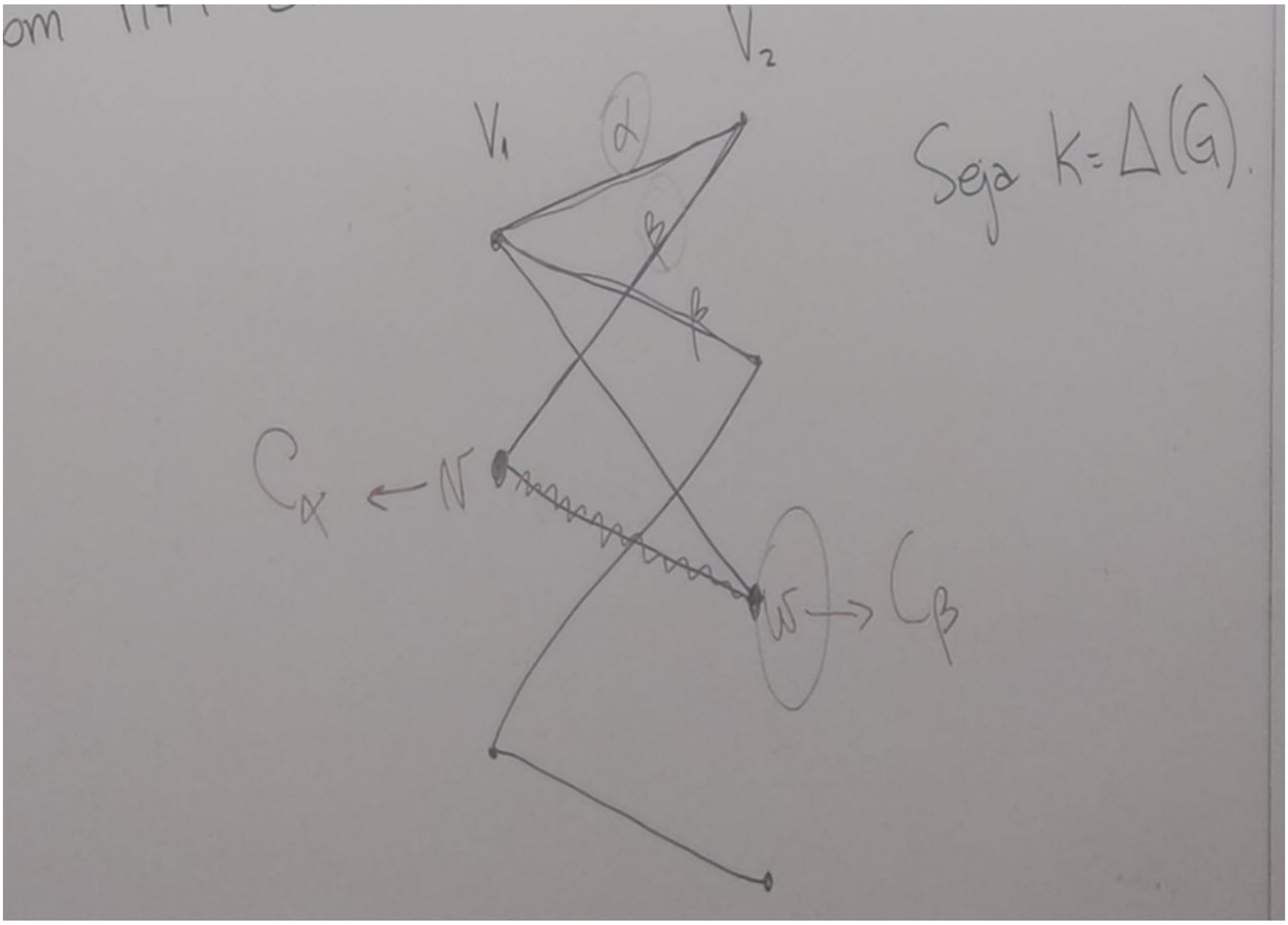
$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

Prova



A prova é por indução no número de arestas. Se G é bipartido com 1 aresta, a tese vale trivialmente.

Supomos que a tese vale para todo grafo bipartido com no máximo n arestas, e seja G bipartido com $n+1$ arestas.



Seja G' p grafo obtido removendo a aresta $\{v, w\}$.
Consideramos uma coloração de arestas de G' com $K = \Delta(G)$ cores.

Dado que o grau v em G' é menor a $K = \Delta(G)$, então há uma cor c_α que não está sendo usada nas arestas incidentes em v. De forma análoga, seja c_β uma cor não usada nas arestas de wl.

Se $c_\alpha = c_\beta$, então podemos obter uma coloração p/ G a partir da coloração escolhida de G' e pintado $\{v, w\}$ com $c_\alpha (= c_\beta)$.

Se $c_\alpha \neq c_\beta$, consideramos o subgrafo conexo $H_{\beta\alpha}$ que consiste nos caminhos que começam em v e alteram as cores c_β e c_α. Observemos que $H_{\beta\alpha}$ não contém o vértice w. Em $H_{\alpha\beta}$ trocamos c_α por c_β, e c_β por c_α, e pintamos $\{v, w\}$ com c_β. Obtemos assim uma coloração com k p/G.

Colorário:

$$\chi'(G) = \max\{r, s\}$$