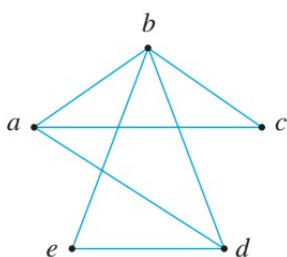


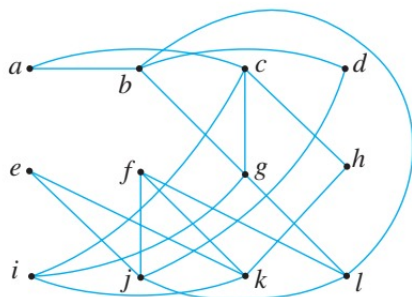
## Lista 8

**Exercício 1** Nos itens a seguir, mostre que o grafo dado é planar redesenhando-o de forma que não haja cruzamento de arestas.

(a)

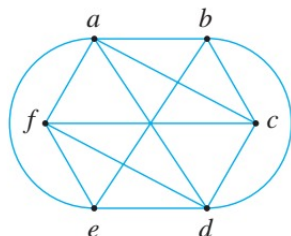


(b)

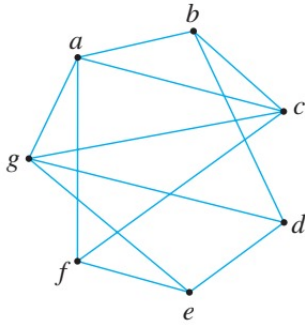


**Exercício 2** Nos itens a seguir, mostre que cada grafo dado **não** é planar encontrando um subgrafo homeomorfo a  $K_5$  ou a  $K_{3,3}$ .

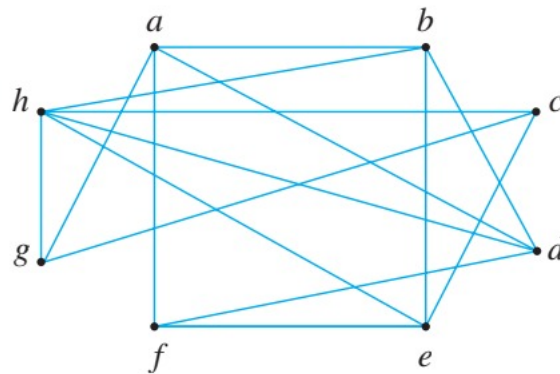
(a)



(b)



**Exercício 3** Determine se o grafo a seguir é planar. Se o grafo for planar, redesenhe-o sem cruzar as arestas; caso contrário, encontre um subgrafo homeomorfo a  $K_5$  ou a  $K_{3,3}$ .



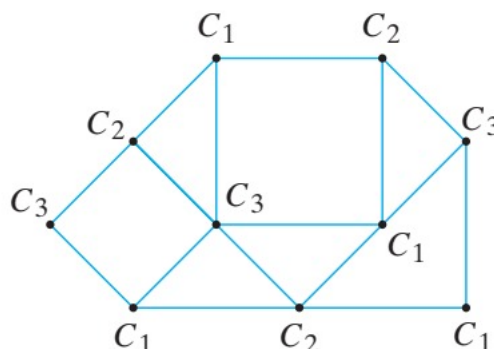
**Exercício 4** Um grafo conexo planar tem nove vértices tendo graus 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2. Quantas arestas esse grafo tem? E quantas faces?

**Exercício 5** Mostre que qualquer grafo tendo 5 ou menos vértices e um vértice de grau 2 é planar.

**Exercício 6** Mostre que em um grafo simples conexo planar vale que  $e \leq 3v - 6$ .

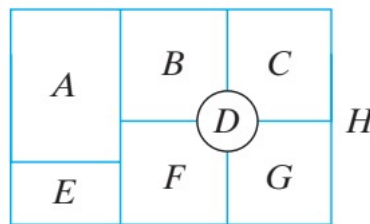
**Exercício 7** Use o Exercício 6 para mostrar que  $K_5$  não é planar.

**Definição.** Uma *coloração* de um grafo  $G$  com cores  $C_1, C_2, \dots, C_n$  associa para cada vértice uma cor  $C_i$  de forma tal que todo vértice tenha uma cor distinta a qualquer vértice adjacente. Por exemplo, o grafo a seguir está colorido com três cores. O restante dos exercícios lidam com colorações de grafos planares.



**Definição.** Um *mapa planar* é um grafo planar onde as faces são interpretadas como regiões, as arestas são interpretadas como fronteiras entre regiões, e os vértices representam as interseções das fronteiras. O problema de colorir um mapa planar  $G$  de forma que não haja regiões com uma fronteira em comum com a mesma cor pode ser reduzido para o problema de colorir um grafo. Primeiro construímos o *grafo dual*  $G'$  da seguinte forma: Os vértices do grafo dual  $G'$  consistem em um ponto de cada face de  $G$ , incluindo a face ilimitada; uma aresta de  $G'$  conecta dois vértices se as faces correspondentes em  $G$  são separadas por uma fronteira. Desse jeito, colorir o mapa  $G$  é equivalente a colorir os vértices do grafo dual  $G'$

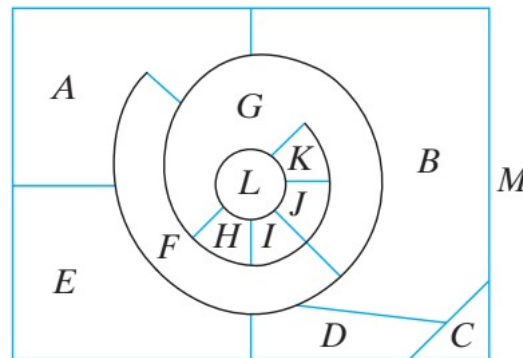
**Exercício 8** Encontre o dual do mapa a seguir.



**Exercício 9** Mostre que o dual de um mapa planar é um grafo planar.

**Exercício 10** Mostre que qualquer coloração do mapa do Exercício 8 excluindo a região ilimitada requer pelo menos três cores.

**Exercício 11** Encontre o dual do seguinte mapa.



**Exercício 12** Mostre que qualquer coloração do mapa do Exercício 11 excluindo a região ilimitada requer pelo menos *quatro* cores.