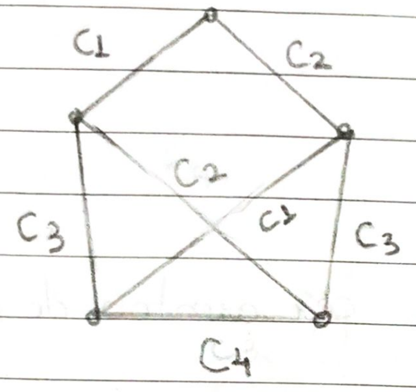
Lista 9

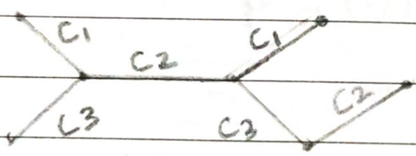
1) Encontre o número cromático por arestas em cada grafo a seguir.

a)



G é 4- cromático

b)



G é 3- cromático

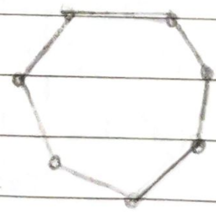
2) Compare os limites inferiores e superiores para o número cromático por arestas pelo teorema de Vizing com o valor correto para os grafos:

(i) G grafo ciclo C_7

(ii) G grafo completo K_8

(iii) G grafo completo bipartido $K_{4,6}$

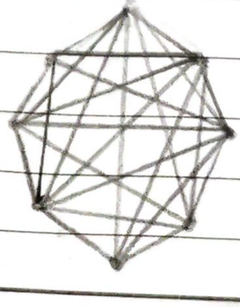
(i) $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$



$\Delta(G) = 2$

c.i = 2

c.s = 3



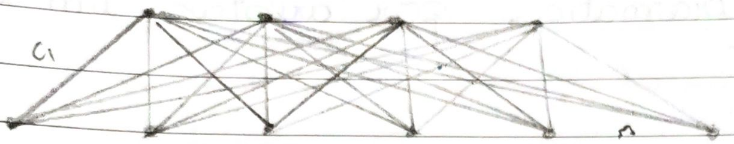
(ii) $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

c.i = 7

$\Delta(G) = 7$

c.s = 8

(iii) Grafo completo bipartido $K_{4,6}$



$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$

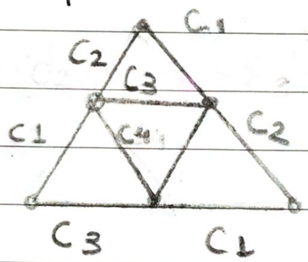
$\Delta(G) = 6$

c.i = 6

c.s = 7

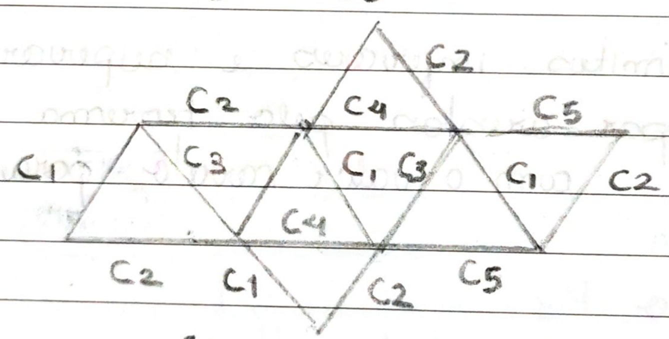
3) Qual é o numero cromático por arestas de cada um dos grafos platônicos.

tetraedro



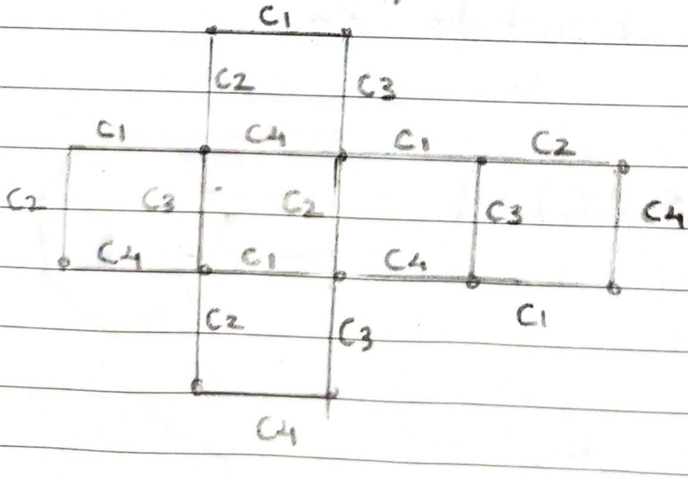
$\chi'(G) = 4$

octaedro:



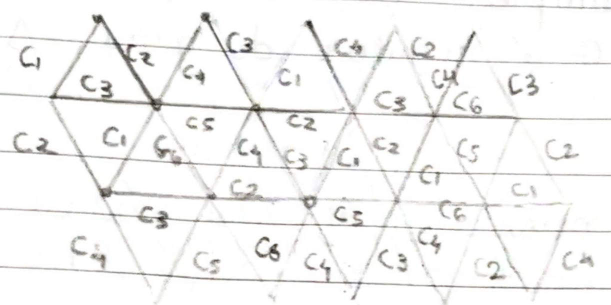
$\chi'(G) = 5$

cubo



$\chi'(G) = 4$

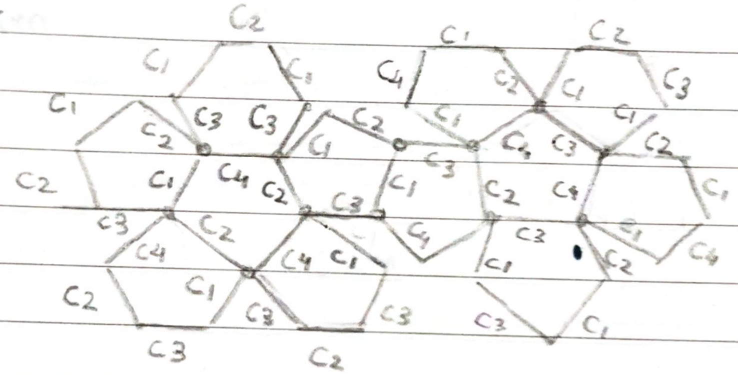
icosaedro



$\Delta(G) = 6$

$\chi(G) = 6$

dodecaedro



$\Delta(G) = 4$

$\chi'(G) = 4$

4) Prove que $\chi'(K_{r,s}) = \max(r, s)$ exibindo uma coloração explícita para as arestas de $K_{r,s}$.

```
M = max(r, s)
m = min(r, s)
a = menor subset // grau M em cada vértice
b = maior subset // grau m em cada vértice
i, j = 1
for i = 1 to m   // para cada v de 'a'
    curr_color = i        // primeira cor
        for j = 1 to M   // para cada v de 'b'
            aresta (ai, bj) -> c(curr_color)
            curr_color ± 1
            if curr_color > M:
                curr_color = 1
```

5) Seja G um grafo simples com um número ímpar de vértices. Prove que se G é regular de grau Δ, então $\chi'(G) = \Delta + 1$

G simples com número ímpar de vértices. G regular de grau Δ $(\delta(v) = \Delta \text{ p.t. } v) \Rightarrow \chi'(G) = \Delta + 1$

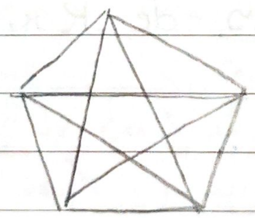
$\underbrace{\sum_{v \in V} \delta(v)}_{|V|\Delta} = 2|E| \Rightarrow \Delta$ par

$\underbrace{|V|}_{\text{ímpar}} \Delta$

$\Delta = 2K$

Supomos que existe G com $\Delta = 2K$ e $\chi'(G) = 2K$

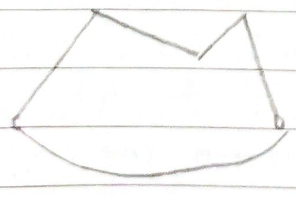
$K \geq 2$



$G' \leq G$

$\Delta = 2$

$\chi'(G') = 2$



$\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$

Pelo teorema de Vizing $\chi'(G)$ tem que ser Δ ou $\Delta + 1$. Se não é Δ, então é $\Delta + 1$.