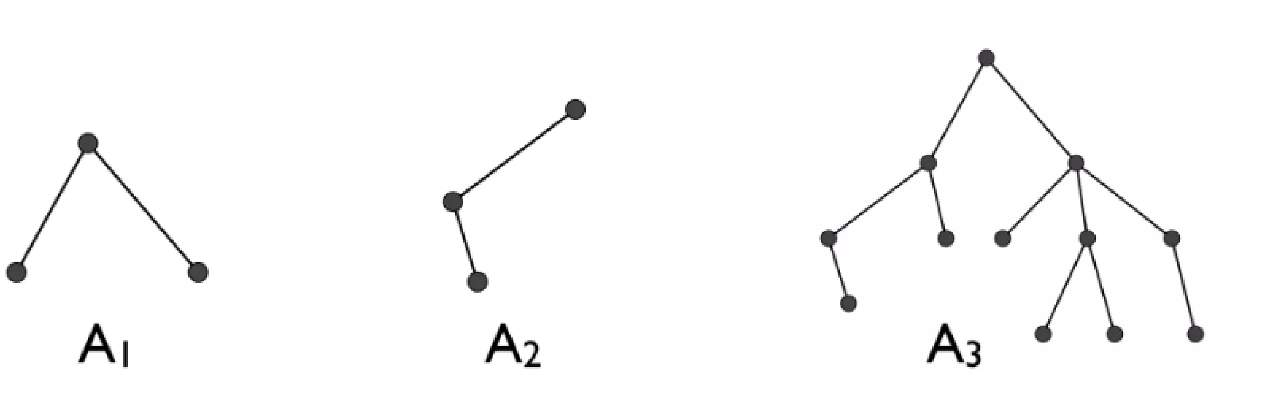
Definição

Uma **árvore (livre)** T é um grafo simples tal que para todo par de vértices v e w, existe um único caminho de v a w. Um **árvore com raiz** é uma árvore com um vértice designado como raiz.

Exemplo



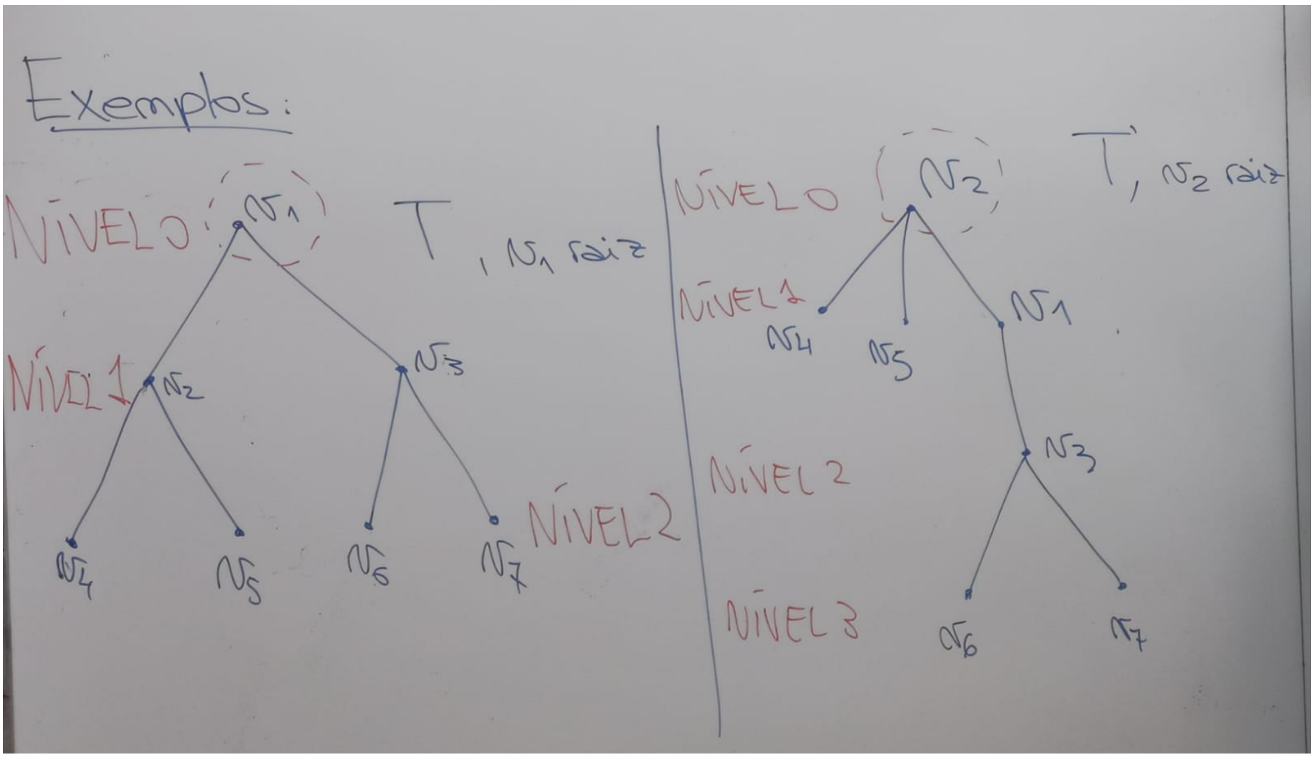
- Chaves da semifinal-final-campeã

Nível de um Vértice

> Definição: Numa árvore T com raiz v , diz-se que o **NÍVEL** de um vértice w é K, se K é a distância da raiz v a w.

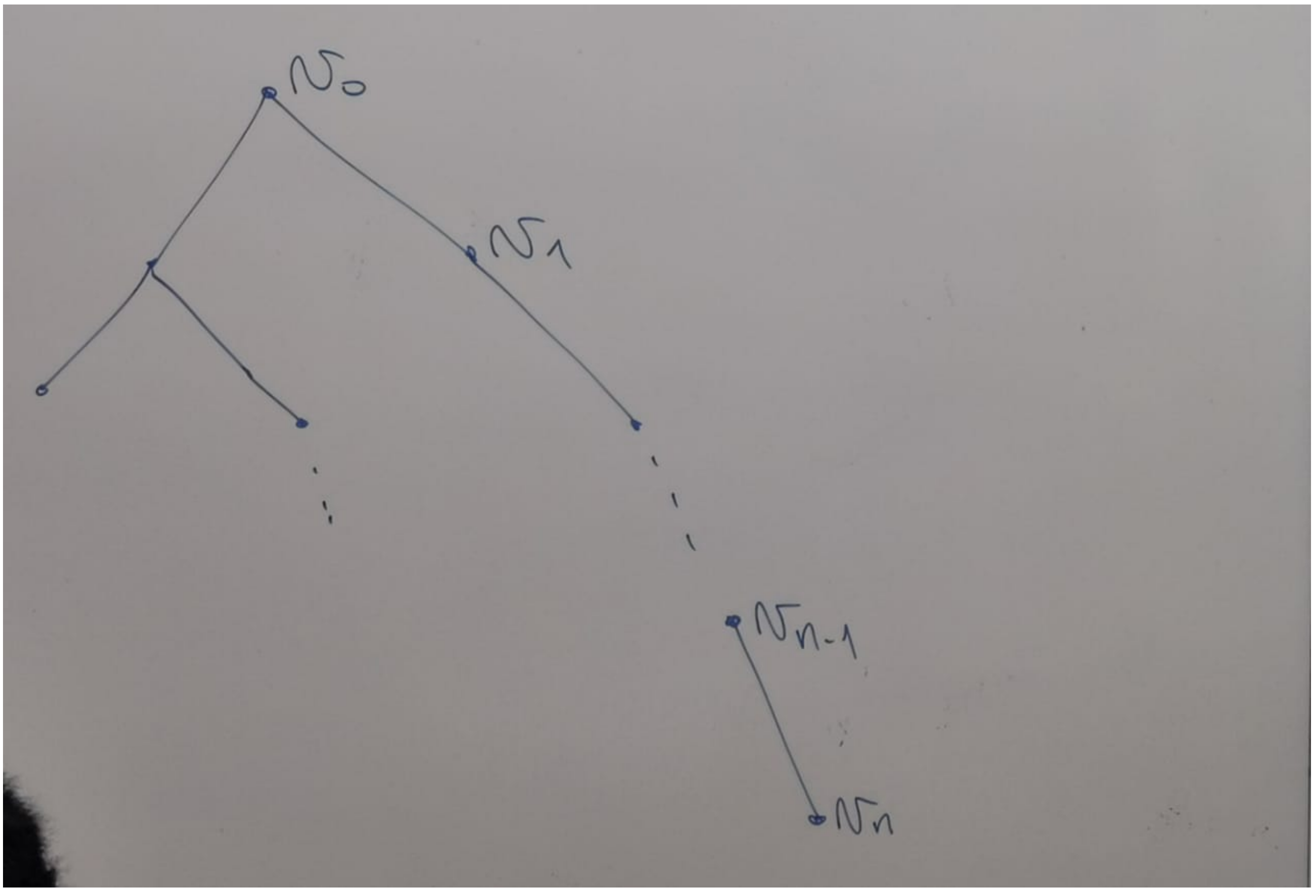
Altura de uma Árvore

> Definição: A altura de T é o valor do máximo nível



Propriedades

> Definicão: Seja T uma árvore com raiz v_0. Sejam x, y, z vértices de T e $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ um caminho simples em T.



Então:

(a) v_{n-1} é o **pai** de v_n.

(b) $v_0, \ldots, v_{n-1}$ são **antecessores** de v_n.

(c) v_n é **filho** de v_{n-1}.

(d) se x é antecessor de y, então y é **descendente** de x.

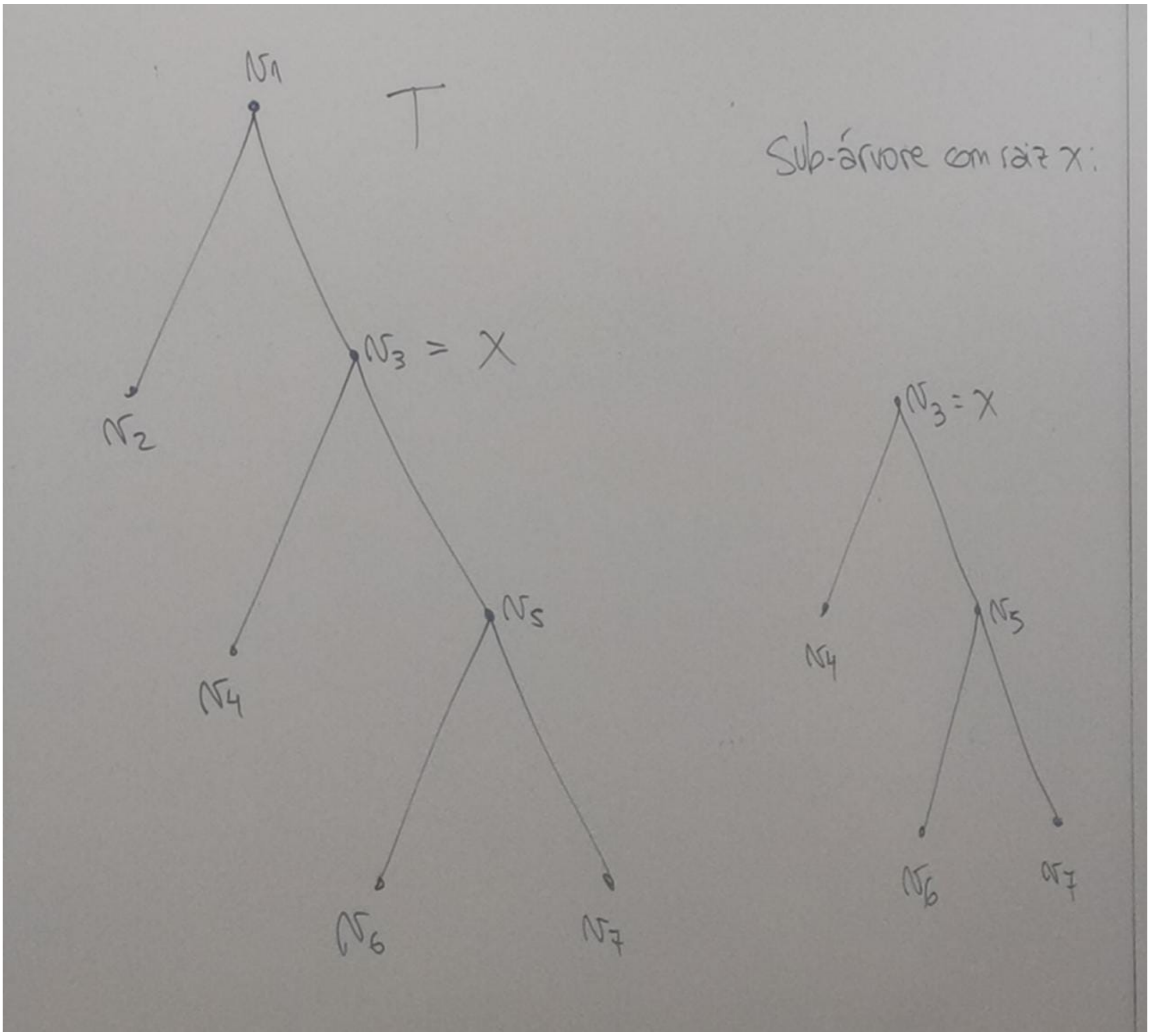
(e) se x e y são filhos de z, então x e y são irmãos.

(f) se x não tem filhos, x é um **vértice terminal** ou **folha**.

(g) se x não é termninal, ele é **vértice interno** ou **vértice tronco**.

(h) a **sub-árvore** de T com raiz x é o grafo com conjunto de vértices V e conjunto de arestas E, onde V. contém x e todos seus descendentes e

$$E := \{\text{e/ e é aresta em algum caminho simples de x a algum vértice de V}\}$$



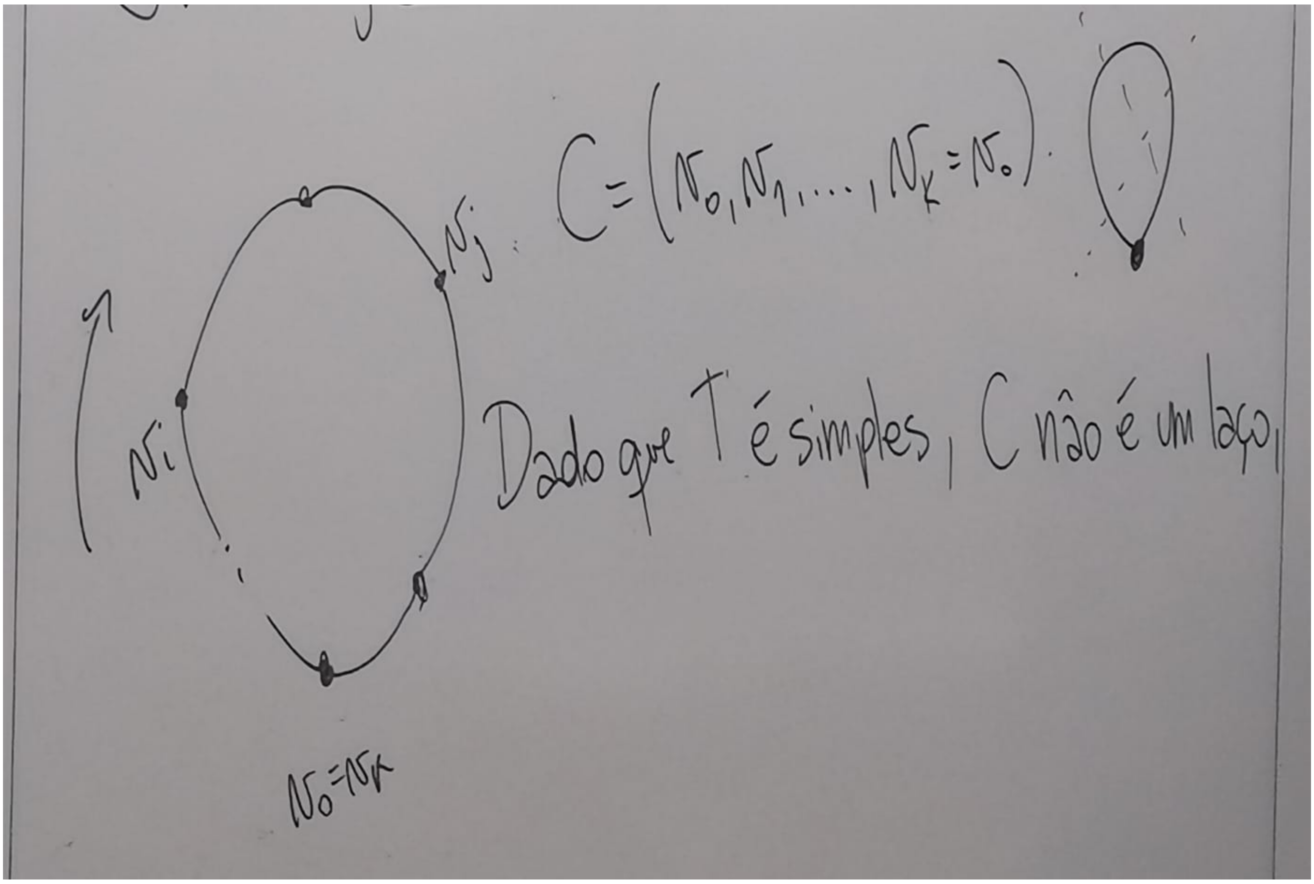
Afirmações

Teorema: Seja T um grafo com n vértices.
Então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) T é uma árvore.
(b) T é conexo e acíclico (não contém ciclos).
(c) T é conexo e tem (exatamente) $n-1$ arestas.
(d) T é acíclico e tem (exatamente) $n-1$ arestas.

Prova $(a) \Rightarrow (b)$

Seja T uma árvore, então T é conexo porque todos os vértices estão conectados entre si.
Vamos provar que T não contém ciclos.
Supomos pelo contrário que T contém um ciclo C'. Seja C um ciclo simples contido em C'.



Logo C visita pelo menos dois vértices diferentes v_i e v_j, com $i < j$. Então:

$$(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j) \quad \text{e} \quad (v_i, v_{i-1}, \ldots, v_0 = v_k, \ldots, v_j)$$

São dois caminhos diferentes de v_i a v_j. Isto contradiz a definição de árvore. Concluímos que T é acíclico.

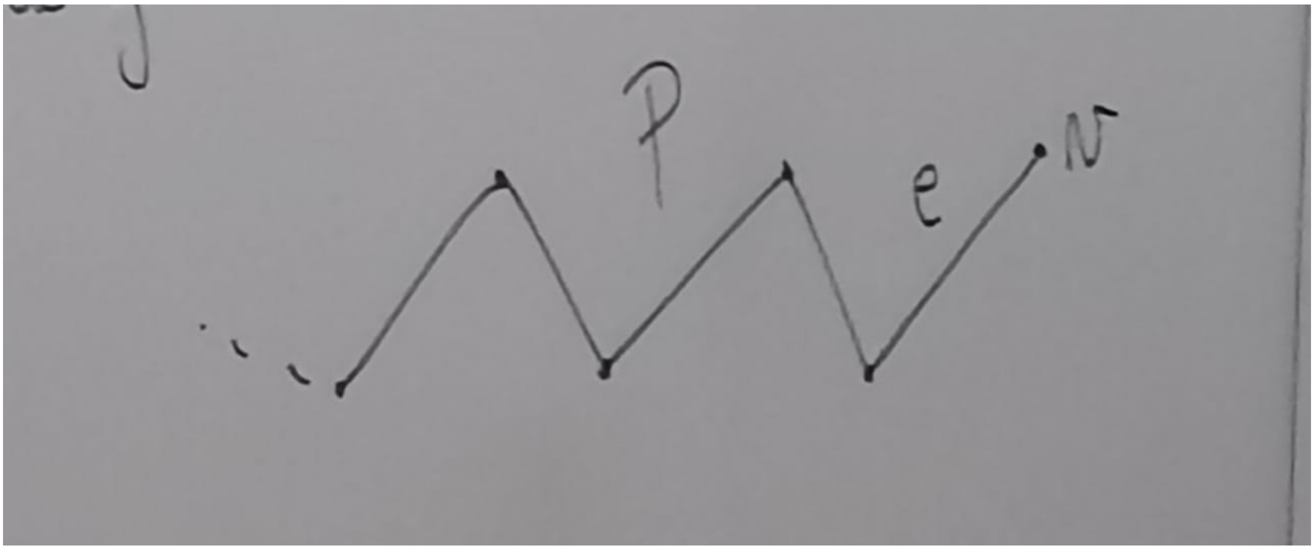
Prova $(b) \Rightarrow (c)$

Seja T conexo e acíclico (com n vértices). Vamos provar por indução em n.

Para $n = 1$:
· (sim, é um ponto)

Tem e = 0 = n - 1 arestas

Supomos que a tese vale para $n = k$, e seja T conexo e acíclico com $k + 1$ vértices. Seja P um caminho em T de cumprimeto máximo, sem arestas repetidas. Dado que T é acíclico, P acaba em um vértice v de grau 1.



Chamamos de e a última aresta visitada.
Consideramos o subgrafo T^* obtido de T removendo v e e. Logo T^* tem k vértice, é conexo e acíclico. Então por hipótese indutiva T^* tem $k-1$ arestas. Concluímos que tem k arestas.

Prova $(c) \Rightarrow (d)$

- Exercício 😔

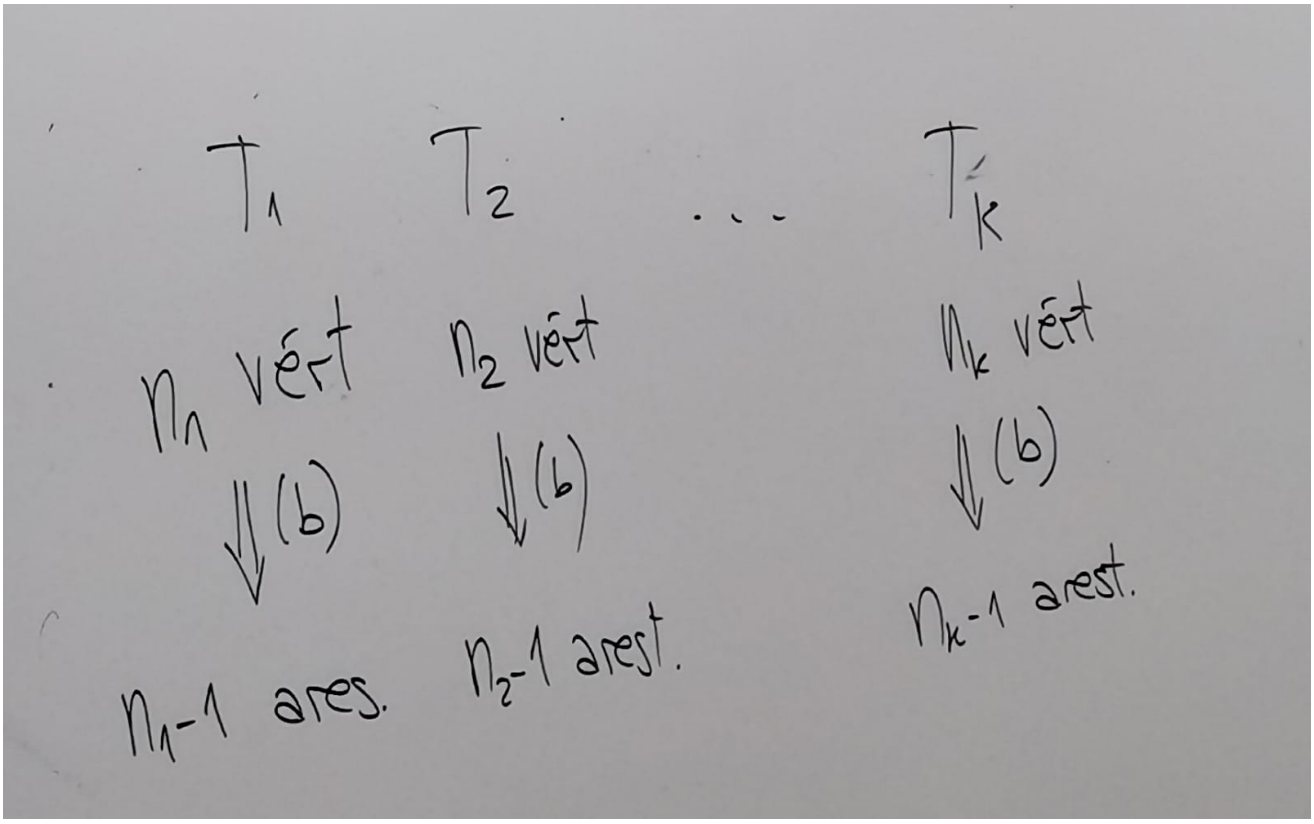
Prova $(d) \Rightarrow (a)$

Seja T acíclico com (n vértices e) $n-1$ arestas.

T acíclico $\Rightarrow$ T simples
T acíclico $\Rightarrow$ não existem dois caminhos entre nenhum par de vértices.

Só falta provar que T é conexo.

Sejam $T_1, \dots, T_k$ componentes conexas de T.



$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ vért.

Arestas: $n_1 - 1 + \ldots + n_k - 1 = n - k$ arestas
Dado que T tem $n-1$ arestas, necessariamente $k = 1$.

Aplicações

- Modelagem de estruturar hierárquicas
- Sistemas de arquivos no computador (directory tree)
  Exemplo: Home $\to$ Program Files $\to$
  $\to$ Users $\to$
  $\to$ Windows $\to$
- Códigos de Huffman: representações com caract. com cadeias de bits com comprimentos variáveis.
  Exemplo: ASCII $\to$ 7-bits representações

Descrição:
Input(dados):
$A = (a_1, \ldots, a_n)$ alfabeto (a ser representado)
$W = (w_1, \ldots, w_n)$ peso (frequência)
$w_i = \text{weight}(a_i)$, $i = 1, \ldots, n$

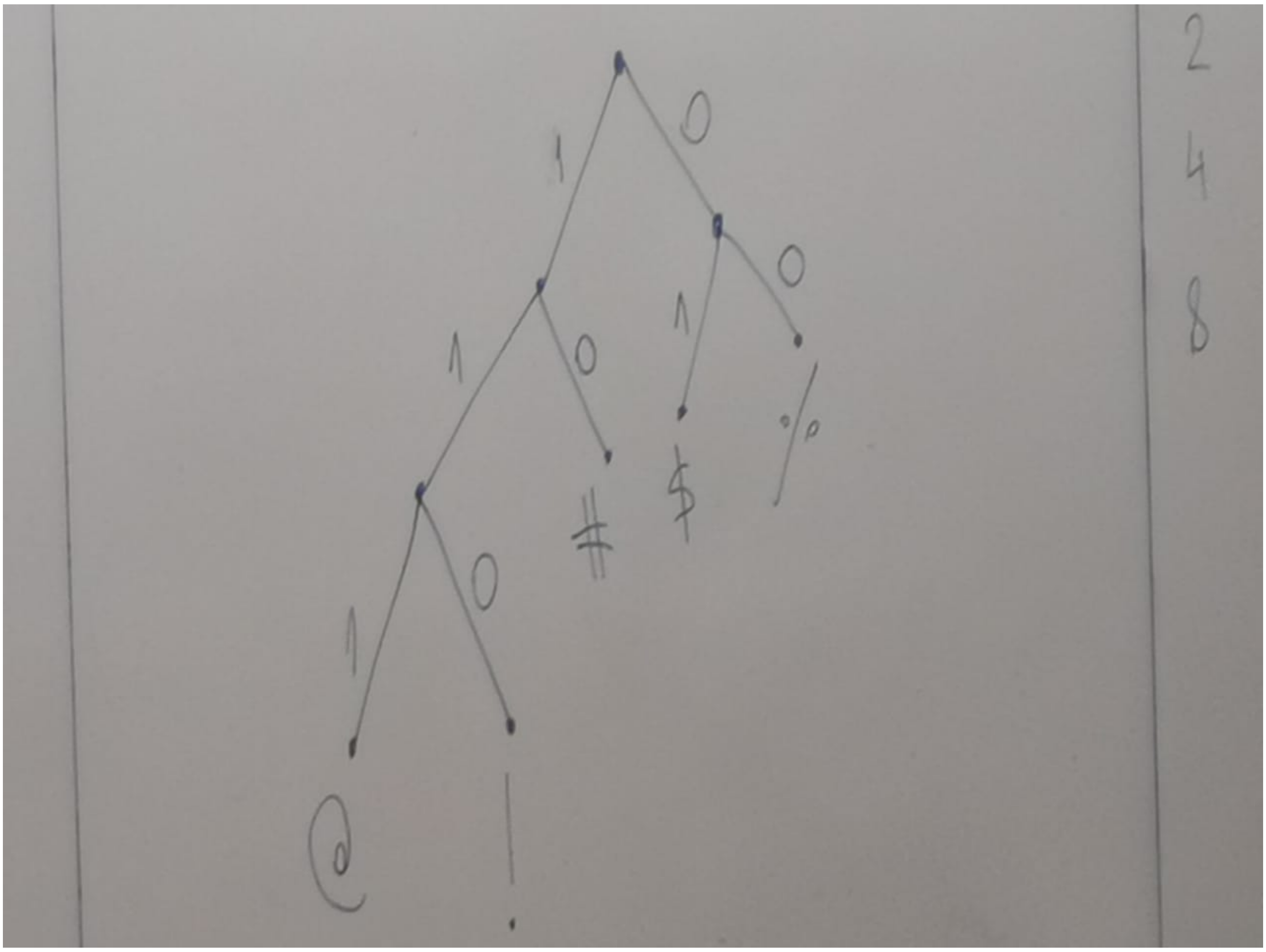
Objetivo: achar um código
$C(W) = (c_1, \ldots, c_n) \to \text{output}$
oned cada c_i é uma cadeia de 0 e 1 tal que:

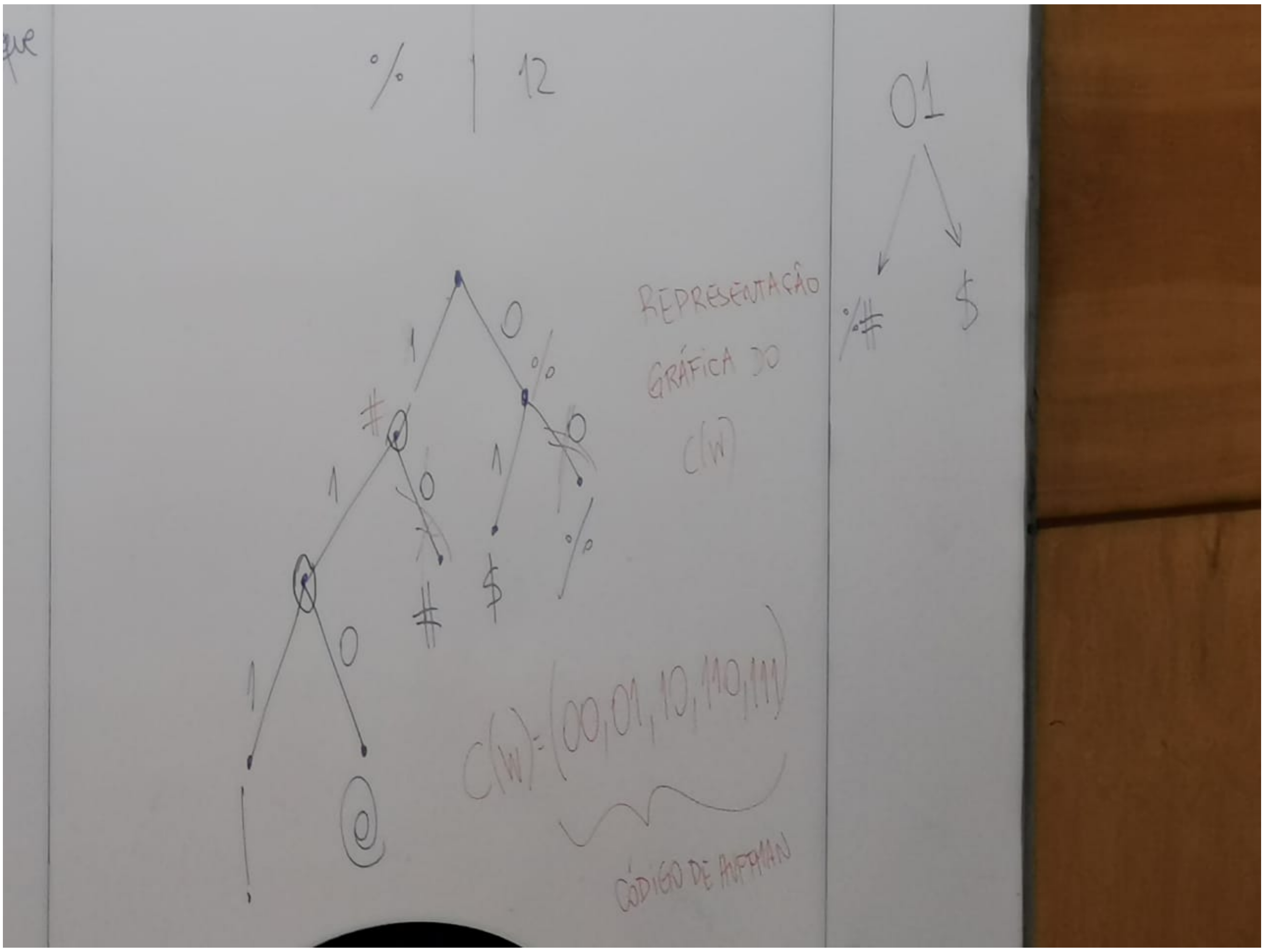
$$L(C(w)) = \sum_{i=1}^{n} w_i \,\text{length}(c_i)$$

seja minimizado.

caracteres	frequêcias
!	2
@	3
#	7
$	8
%	12

$$W = (12, 8, 7, 3, 2)$$




% | 12
01
%# $
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO C(W)
C(W) = (00, 01, 10, 110, 111)
CÓDIGO DE HUFFMAN