Definição

> Seja G um grafo dirigido, bipartido, com conjunto de vértices patricionado nos subconjuntos V e W, e tal que toda aresta de G vao de V a W.
> (Propriedade $(*)$)

- Um *MATCHING* em G é um subconjunto de arestas sem vértices em comum.
- Um *MATCHING MAXIMAL* é um matching com o máximo número possível de arestas.
- Um *MATCHING COMPLETO* é um matching *M* tal que, p.t $v \in V$, existe $w \in W$ com $(v, w) \in M$.

Exemplo

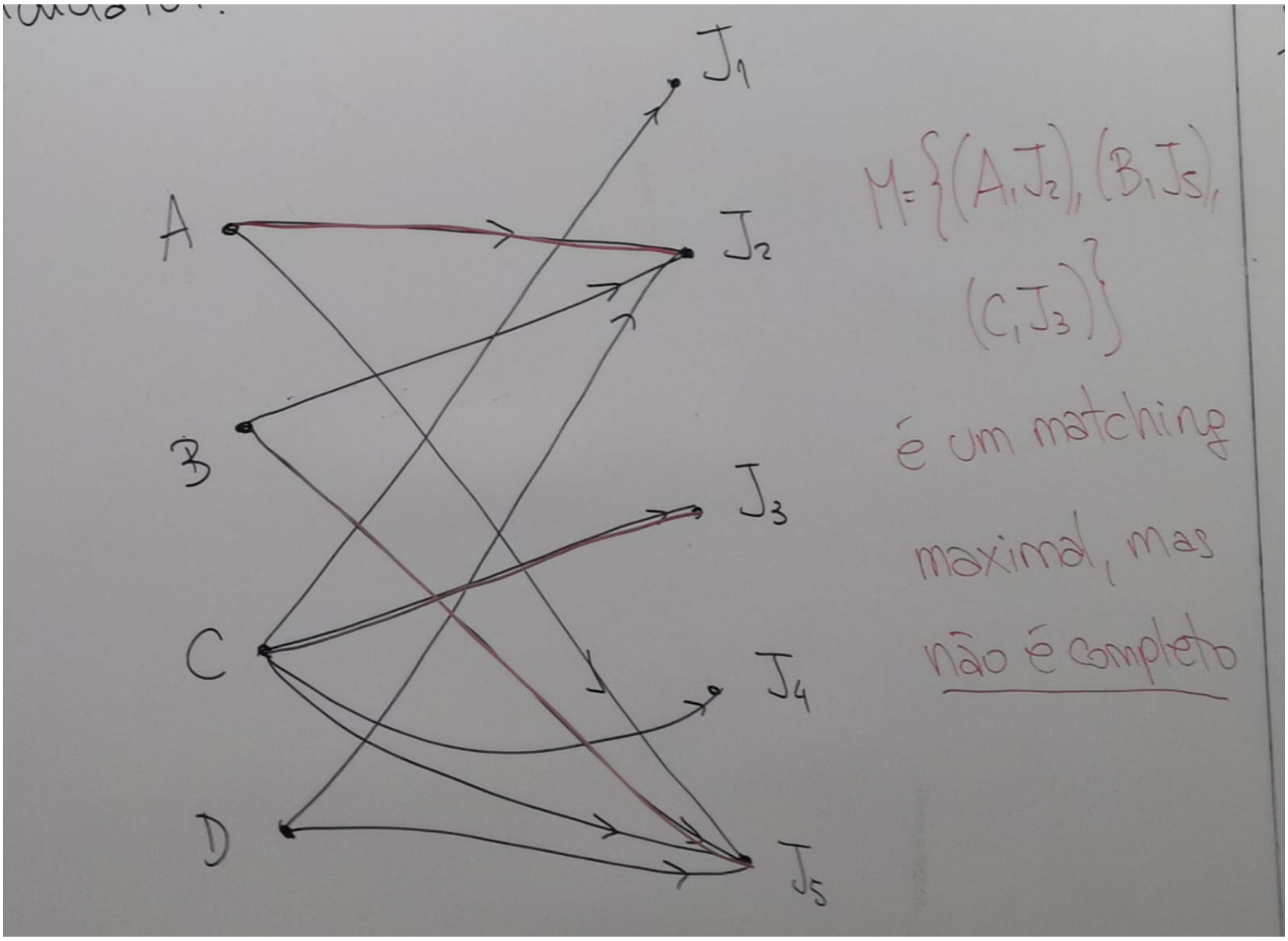
Quatro pessoas: A, B, C, D.
Aplicam p/os trabalhos: J_1, J_2, J_3, J_4, J_5

É sabido que:

- A é qualificada p/J_2 e J_5.
- B é qualificada p/J_2 e J_5.
- C é qualificada p/J_1, J_3, J_4 e J_5.
- D é qualificada p/J_2 e J_5.

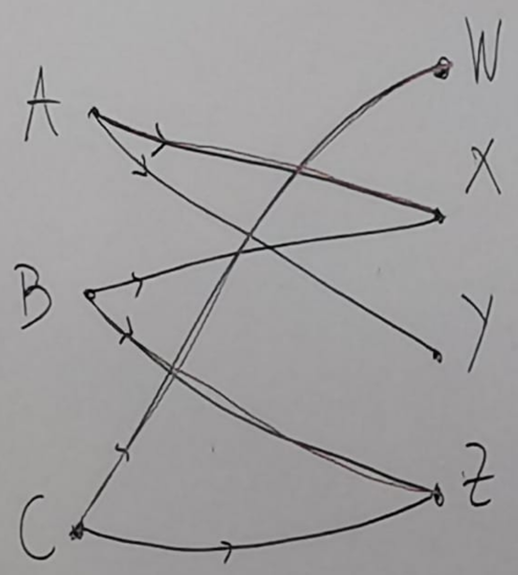
Pergunta

É possível assignar um trabalho a cada candidato?



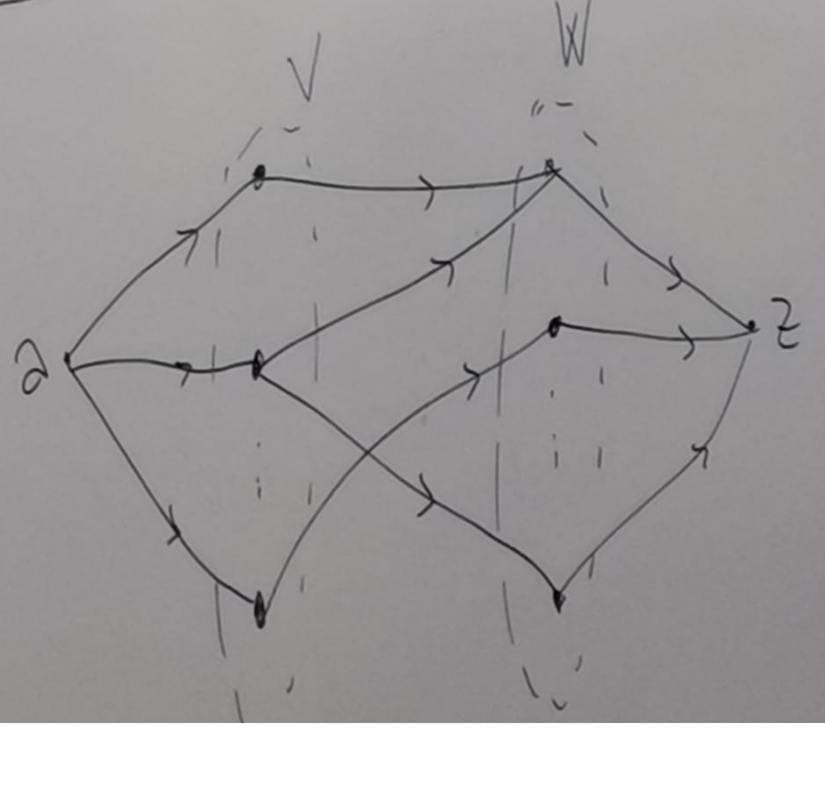
Existe a aresta (x, y) se a pessoa x é qualificada p/o trabalho y.

Exemplo:



$M = \{(A,X),(B,Z),(C,W)\}$ é um matching completo.

Rede de matching



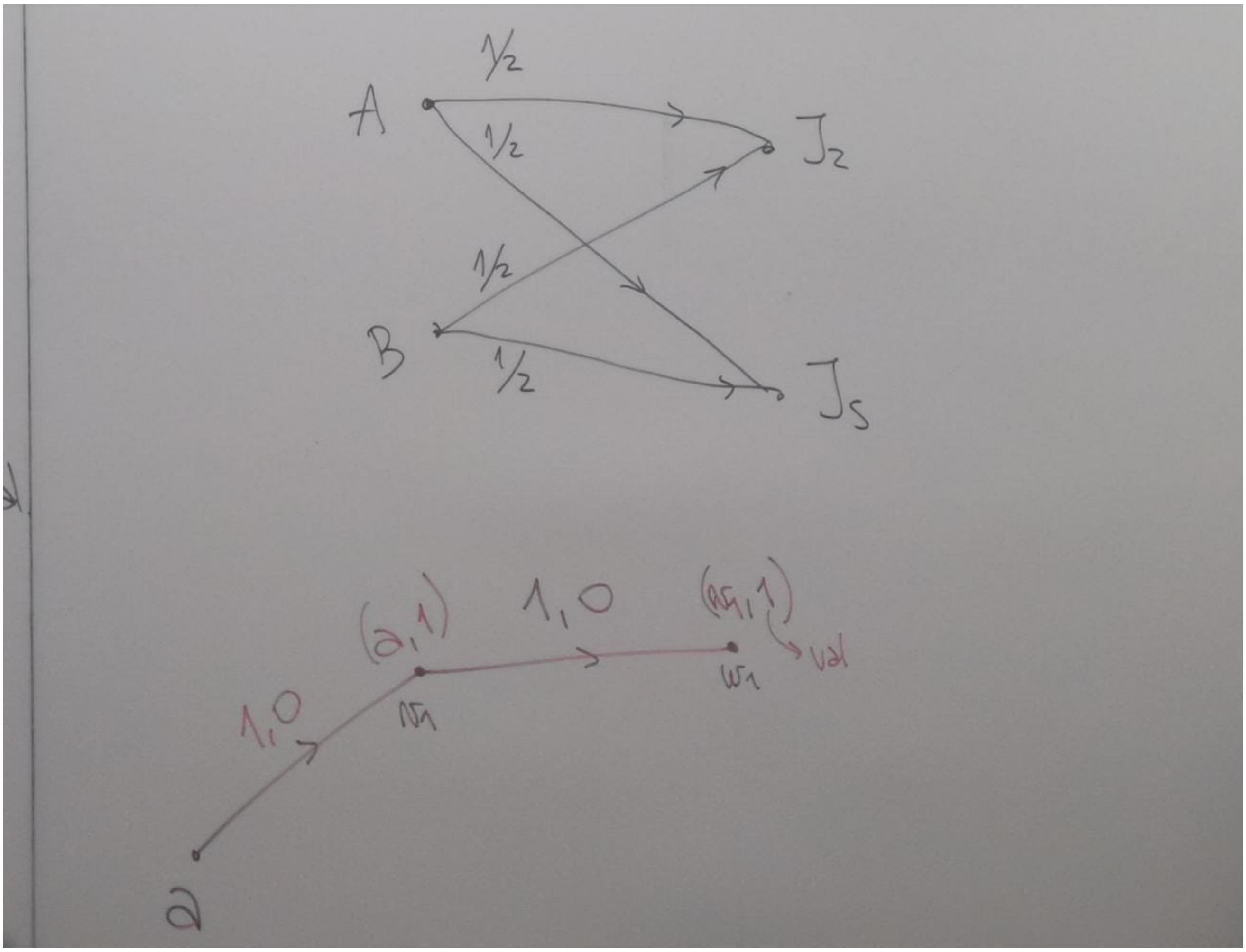
A partir de um grafo G com a propriedade $(*)$, costruímos uma rede seguindo os passos:

$1)$ Adicionamos um vértice fonte a, e todas as arestas de forma (a, v) com $v \in V$.
$2)$ Adicionamos um vértice sumidouro z, e todas as arestas de forma (w, z) com $w \in W$.
$3)$ Assignamos a capacidade 1 a todas as arestas.

Teorema

Seja G com a propriedade $(*)$. Então:

(a) Um fluxo na rede de matching associada a G induz um matching em G.
(b) Um fluxo maximal F, com $F_{ij} \in \{0, 1\}$, p.t (i, j), corresponde a um matching maximal.
(c) Um fluxo com valor (V) corresponde a um matching completo.



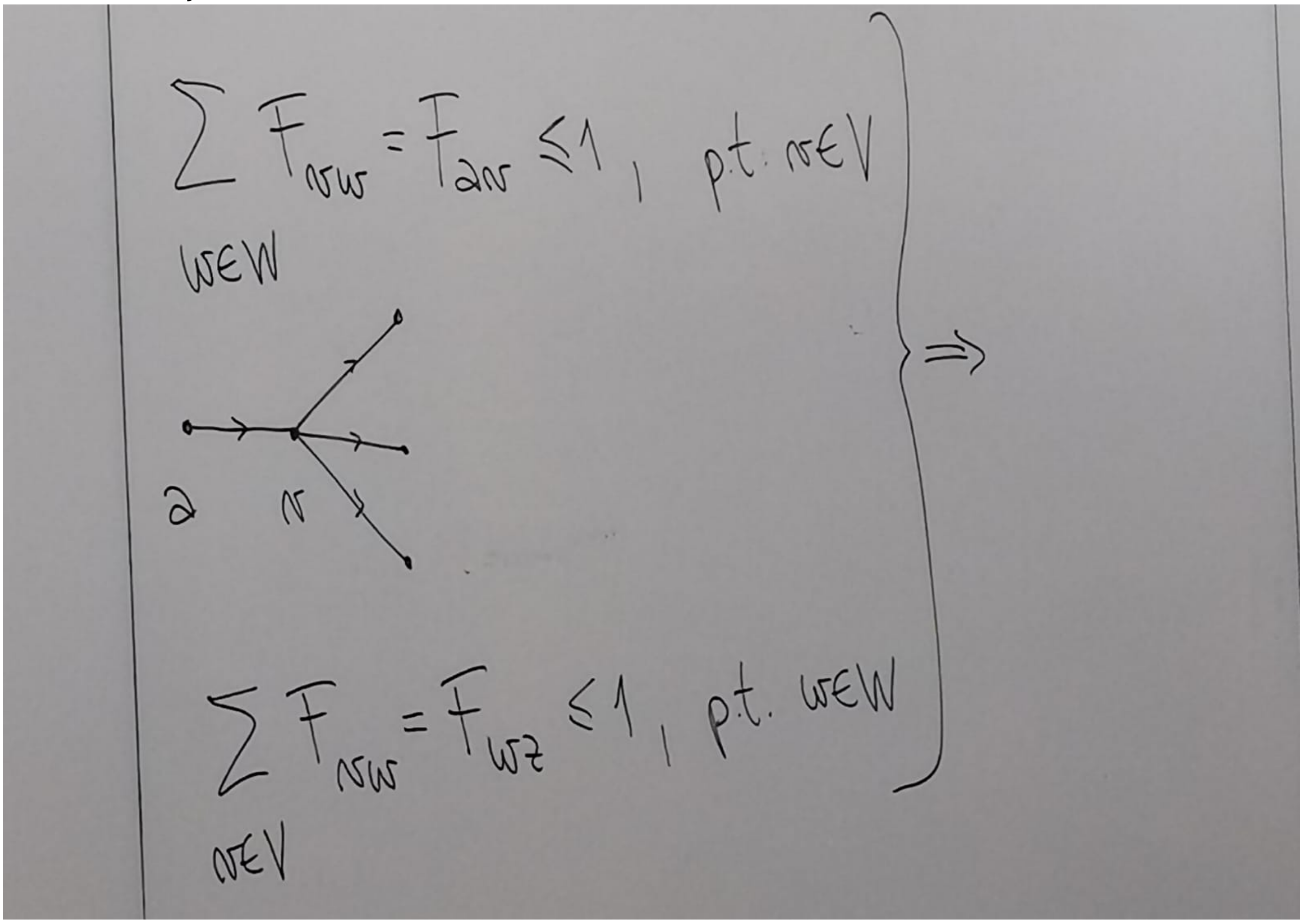
Prova

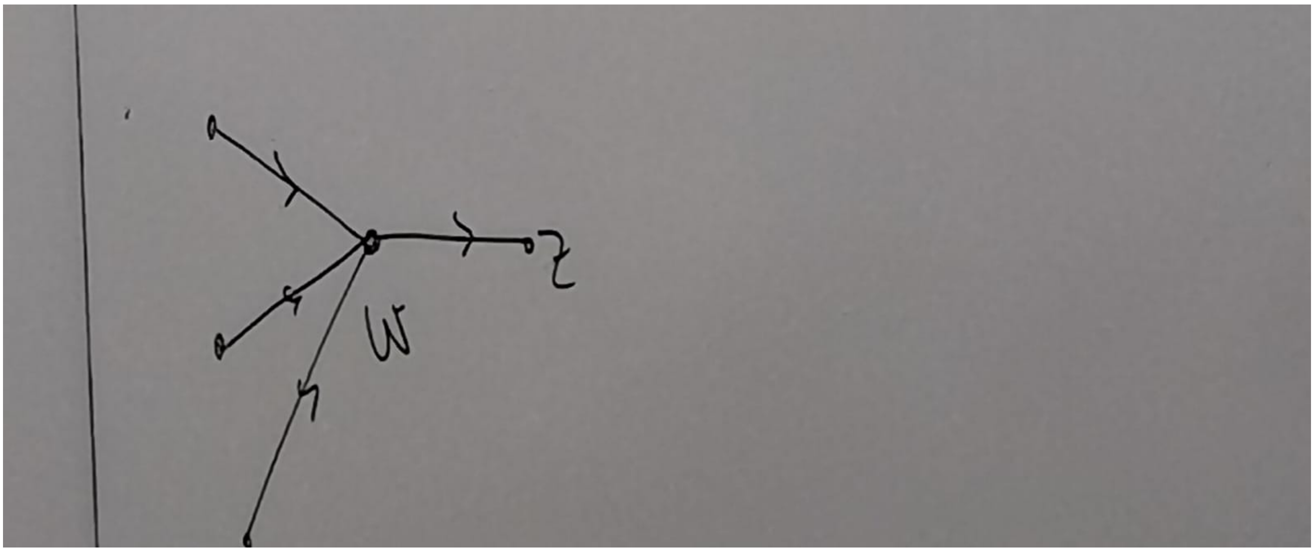
Dem/ Seja R a rede de matching induzida por G

Seja F fluxo em R. Definimos

$$M = \{(v, w) \in E / F_{vw} 1\}$$

E : arestas de G
Pela conservação de fluxo,





$(\Rightarrow)$ no conjunto M não há arestas que incidam no mesmo $v \in V$, nem no mesmo $w \in W$. Logo M é um *MATCHING* em G.

(b) e (c) ficam como exercício.

Deduzimos do item (b) que o algoritmo de fluxo maximal (Ford-Fulkerson) acha um matching maximal.
Discutiremos a existência de um matching completo. Seja $S \subseteq V$ e

$$R(s) = \{v \in W / \exists (v, w) \text{ aresta de G com } v \in S\}$$

Teorema Hall's Marriage (1935)

Seja G um grafo com a propriedade $(*)$. Então G possui um matching completo se, e somente se,

$$|R(s)| \geq |S|, \text{ p.t } S \subseteq V$$

Prova

Dem/ $(\Rightarrow)$ É imediato (fica como exercício)

$(\Leftarrow)$ Supomos que:

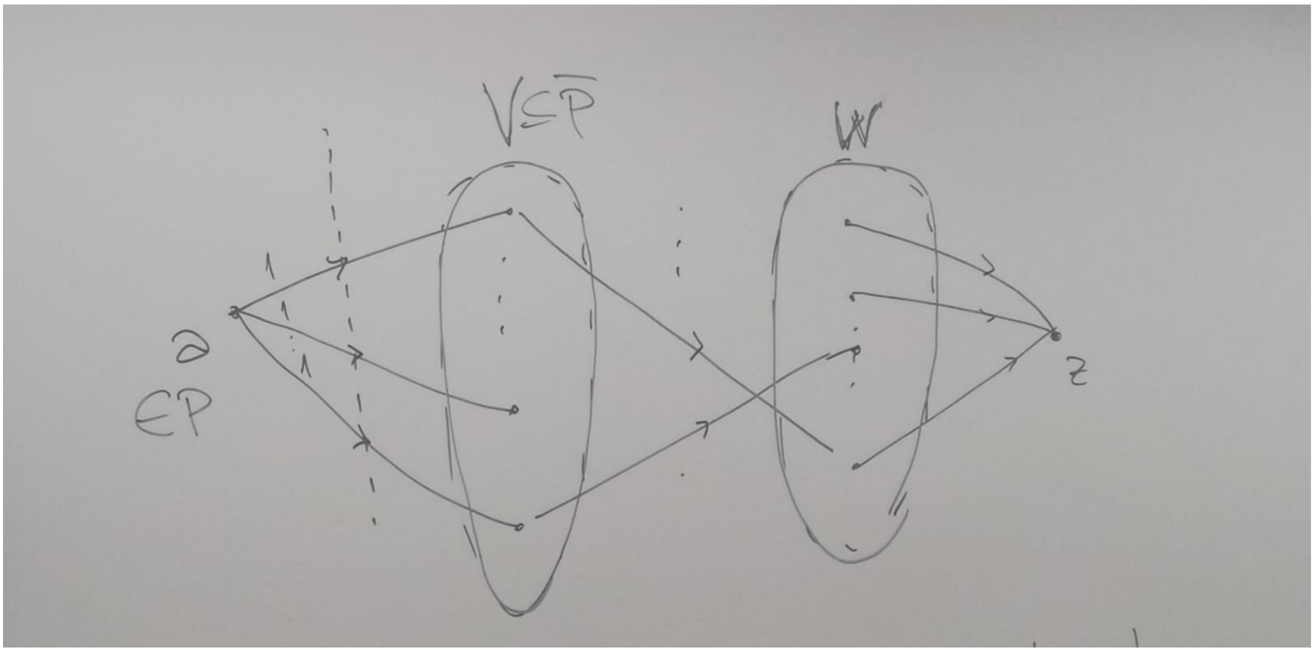
$$|R(s)| \geq |S| \text{ p.t. } S \subseteq V$$

Seja R a rede associada a G, e $(P, \bar{P})$ um corte minimal em R. Queremos mostrar que $C(P, \bar{P}) = |V| =: n$
Supomos pelo contrário que $C(P, \bar{P}) < n$

$$C(P, \bar{P}) = |C|$$

onde:

$$C := \{(x, y)/x \in P \text{ e } y \in \bar{P}\}$$

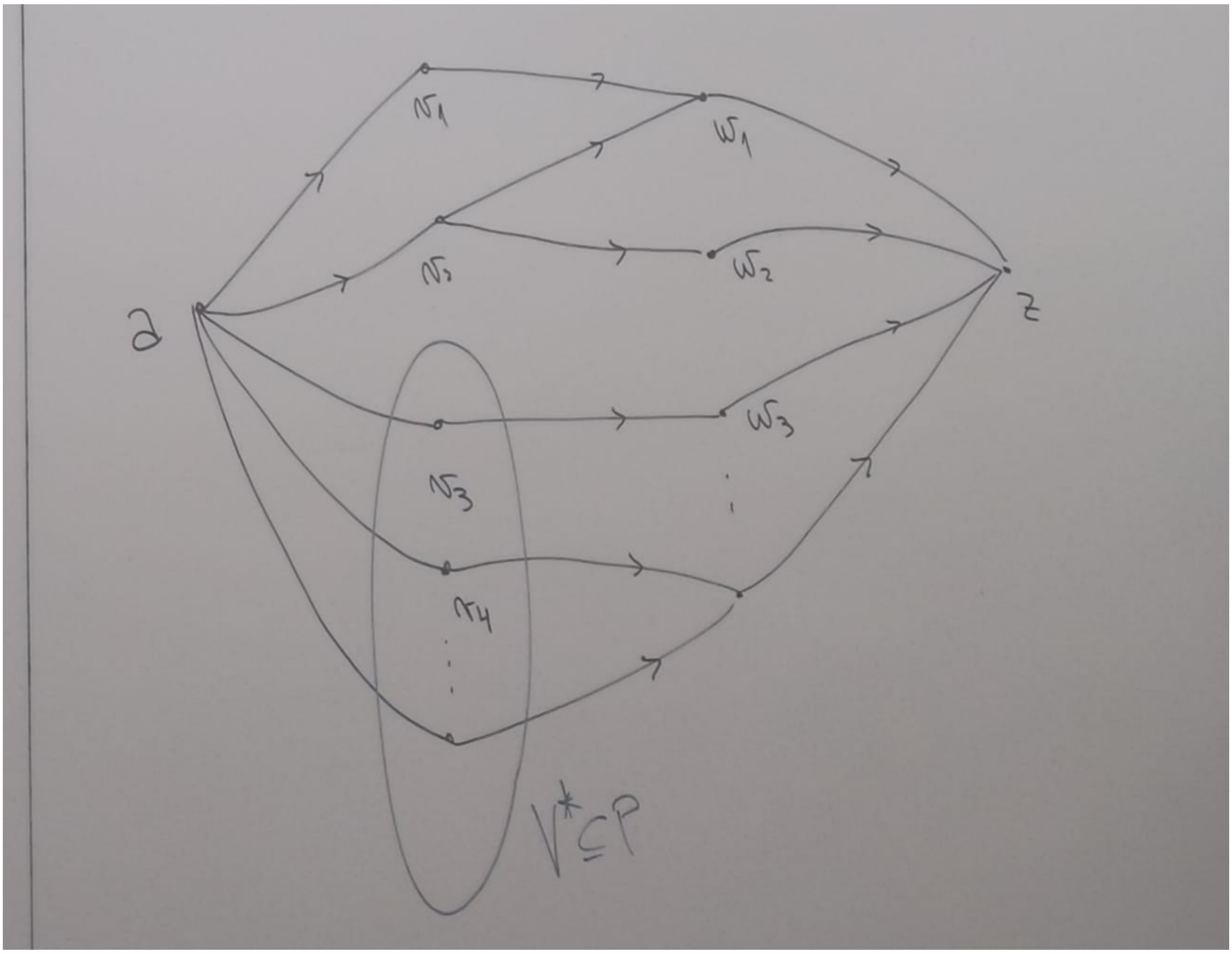


Se $e \in C$, então é de algumd estes tipos:

- Tipo I: $e = (a, v)$ com $v \in V$
- Tipo II: $e = (v, w)$ com $v \in V$, $w \in W$
- Tipo III: $e = (w, z)$ com $w \in W$

Vamos estimar o número de arestas de cada tipo.

Se $V \subseteq \bar{P}$, então $C(P, \bar{P}) = n$. Isto contradiz a hipótese $V \nsubseteq \bar{P}$.
Então $V \cap P = V^* \neq \phi$



Logo há $n - |V^*|$ arestas do Tipo I em C.

Particionamos $R(V^*)$ nos conjuntos disjuntos:

$W_1 := R(V^*) \cap P$
$W_2 := R(V^*) \cap \bar{P}$

Há pelo menos $|W_1|$ arestas de tipo II.
Então:
$\#$ arestas Tipo II $< \underbrace{n - (n - |V^*|)}_{\#\text{ arestas Tipo I}} - \underbrace{|W_1|}_{\#\text{ arestas Tipo II}}$
$\downarrow$
$C(P, \bar{P}) < n$

// $|V^*| \leq |W_1| + |W_2| = |R(V^*)|$

Cada vértice de W_2 contribui no máximo com uma aresta do tipo II. Logo:

$$|W_2| \leq \#\text{Arestas do tipo II} < |V^*| - |W_1|$$

Isto é,

$$\underbrace{|W_1| + |W_2|}_{R(S^*)} < |V^*| \leq |R(V^*)|$$