

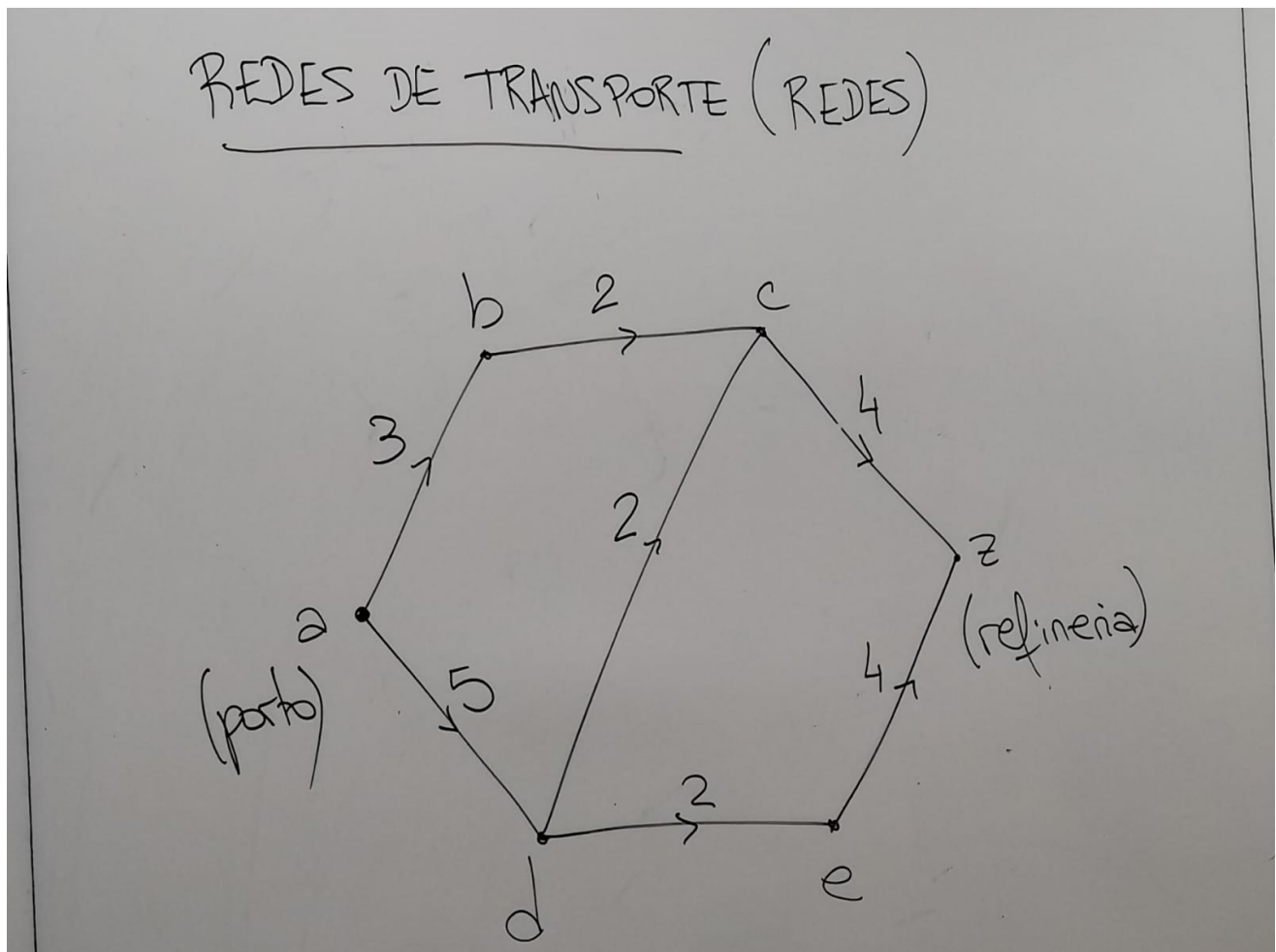
## Redes

Definição: Uma REDE DE TRANSPORTE (ou simplesmente REDE) é um grafo simples dirigido com pesos, tal que:

- (a) possui um vértice sem arestas entrantes que é chamado de FONTE ("source"),
- (b) possui um vértice sem arestas saíntes que é chamado de SUMIDOURO ("sink")
- (c) o peso  $C_{ij}$  da aresta dirigida  $(i,j)$  é não-negativo e chamado de CAPACIDADE de  $(i,j)$

a: fonte

z: sumidouro



## Fluxo

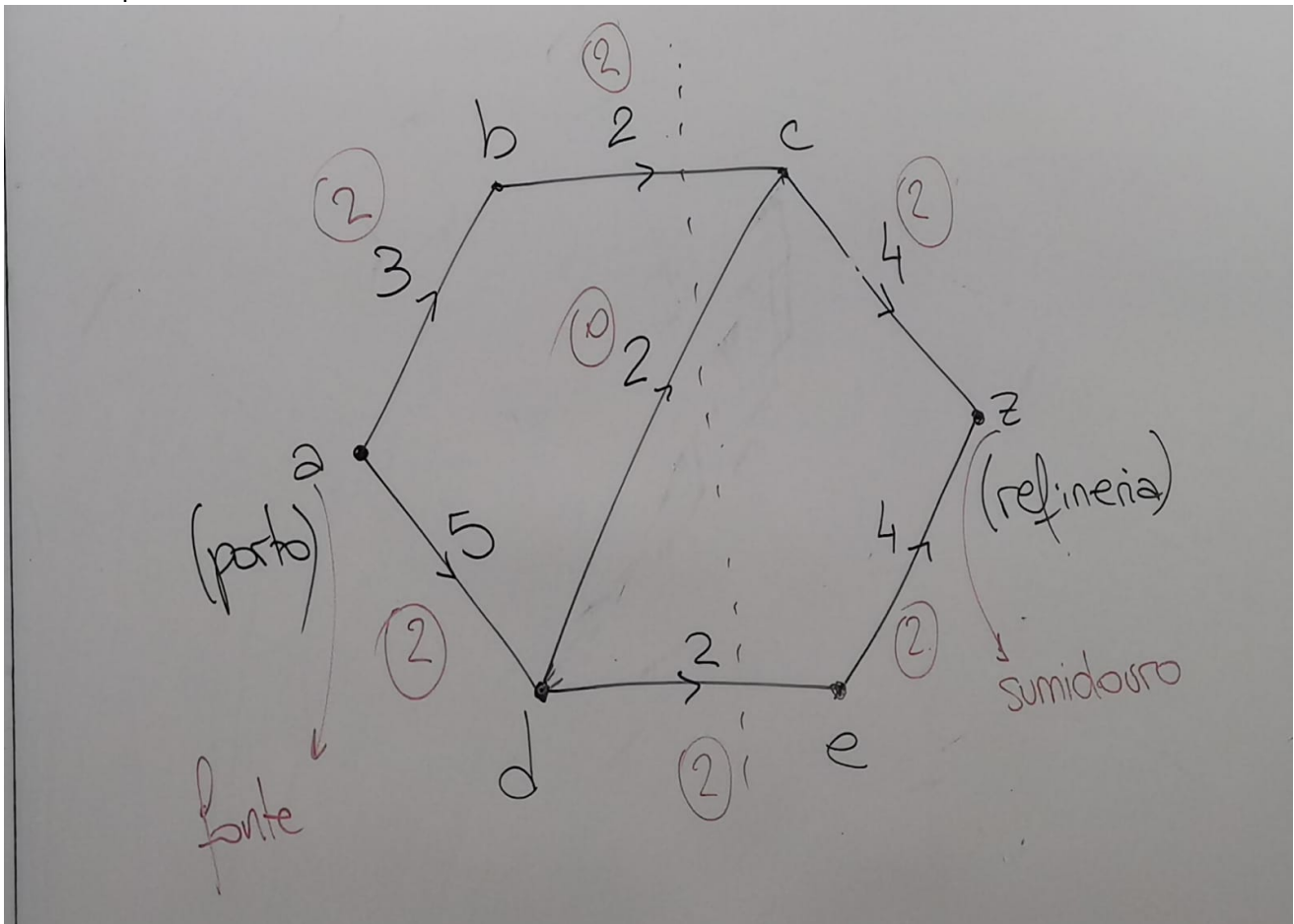
Definição: Dado  $G = (V, E)$  uma rede com capacidade  $C_{ij}$ ,  $(i, j) \in E$ , um FLUXO  $F$  associa a cada aresta dirigida  $(i, j) \in E$  um número não-negativo  $F_{ij}$  tal que:

- $F_{ij} \leq C_{ij}$
- Para cada vértice  $j$ , que não é nem fonte nem sumidouro,

$$\sum_{i/(i,j) \in E} F_{ij} = \sum_{i/(i,j) \in E} F_{ji} \quad (*)$$

(conservação do fluxo)

No exemplo anterior:



Observação: A equação (\*) pode ser escrita na forma compacta:

$$\sum_i F_{ij} = \sum_i F_{ji}$$

onde é considerado que  $F_{ij} = 0$  se  $(i, j) \notin E$

## Fluxo da Aresta

Definição: Chamamos de FLUXO DA ARESTA  $(i, j)$  ao valor de  $F_{ij}$ . Dado um vértice  $j$ ,  $\sum_i F_{ij}$  é o FLUXO ENTRANTE e  $\sum_i F_{ji}$  é o FLUXO SAÍTE.

## Teorema

Dado um fluxo  $F$  numa rede  $G$ , tem-se que:

$$\sum_i F_{ai} = \sum_i F_{iz}$$

## Prova

$$G = (V, E)$$

Dada  $e \in E$ , escrevemos  $F_e$  p/o fluxo nessa aresta:

$$\sum_{e \in E} F_e = \sum_{j \in V} \left( \sum_{i \in V} F_{ij} \right) = \sum_{j \in V} \left( \sum_{i \in V} F_{ji} \right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j \in V} \left( \sum_{i \in V} F_{ij} - \sum_{i \in V} F_{ji} \right) \\ &= \underbrace{\left( \sum_{i \in V} F_{iz} - \sum_{i \in V} F_{zi} \right)}_{j=z} + \underbrace{\left( \sum_{i \in V} F_{ia} - \sum_{i \in V} F_{ai} \right)}_{j=a} \\ &\quad + \sum_{j \in V, j \neq a, z} \underbrace{\left( \sum_{i \in V} F_{ij} - \sum_{i \in V} F_{ji} \right)}_{=0 \text{ pela conservação de fluxo em } j \in V \setminus \{a, z\}} \end{aligned}$$

Então:

$$\sum_{i \in V} F_{iz} - \sum_{i \in V} F_{ai} = 0$$

## Valor do Fluxo

Definição: Dado um fluxo  $F$  em  $G$ , chamamos de VALOR DO FLUXO  $F$  ao número:

$$\sum_i F_{ai} = \sum_i F_{iz}$$