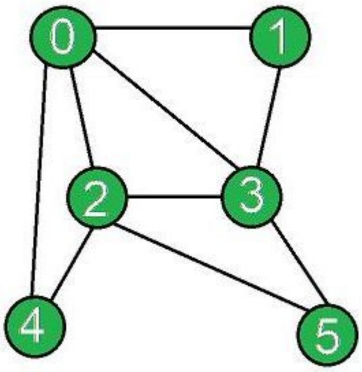
Matriz de Adjacência

> Definição: Dado um grafo simples $G = (V, E)$ com n vértices e n arestas, a matriz de adjacêcia de G é uma matriz $n \times n$, denotada por:

$$A = (a_{ij}), \;\; 1 \leq i, j \leq n$$

Onde a_{ij}'s satisfazem:

$$\begin{cases} 1 \; existe \; aresta \\ 0 \; não \; existe \; a. \end{cases}$$



	0	1	2	3	4	5
0	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	1	1	1
3	1	1	1	0	0	1
4	1	0	1	0	0	0
5	0	0	1	1	0	0

Propriedades Básicas:

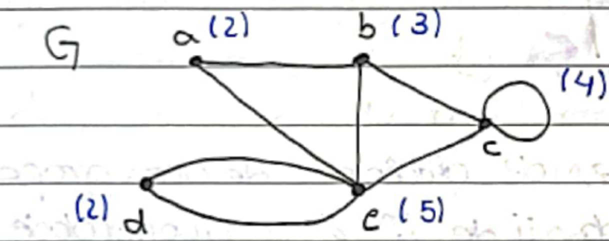
- O grau de cada vértice é a soma da coluna (ou linha) correspondente.
- Em grafos *NÃO-DIRECIONADOS* a matriz de adjacência é simétrica
- Em grafos *SIMPLES* (não tem loops), a diagonal da matriz de adjacência é 0.

Loops

Def: Para $G = (V, E)$ (não necessariamente simples) de n vértices, a matriz de adjacência $A = (a_{ij})$ de G é tal que:

a_{ij} = quantidade de arestas entre v_i e v_j onde, quando $i = j$ é considerado que cada loop conta 2 vezes.

EX:



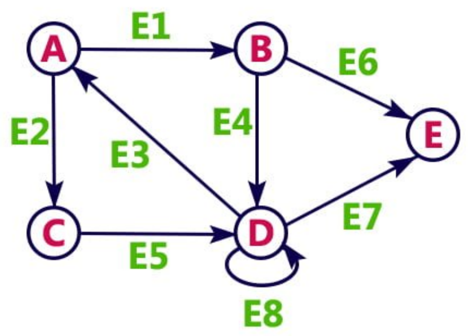
$$\begin{array}{c|c} \Sigma & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} & \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \end{array}$$

Teorema para quantidade de caminhos

Se A é a matriz de adjacência de um grafo simples G, então a entrada ij de A^n é a quantidade de caminhos de v_i a v_j, onde $i \neq j$ e $n \in \mathbb{N}$ (arbitrário)

Matriz de Incidência

> Definição: Seja G um grafo com n vértices e m arestas, a matriz de incidência de G é a matriz $n \times m$, denotada por:
>
> $$A = (a_{ij}), \;\; 1 \leq i \leq n \,/\, 1 \leq j \leq n$$
>
> $$\begin{cases} 1 \;\; : aresta\ e_j\ é\ incidente\ em\ v_i \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \;\; : c.c \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} E1 & E2 & E3 & E4 & E5 & E6 & E7 & E8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriedades Básicas:

- Cada coluna soma 2, exceto as colunas correspondentes aos laços que somam 1.
- Se o grafo não possui laços então a soma das entradas de cada linha coincide com o grau do vértice correspondente.

Grafos desconexos

Se G é desconexo, então existe um ordenamento dos vértices G tal que a matriz de incidência de G tem uma estrutura de bloco da forma:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \hline & & \ddots & \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_K \end{array} \right)$$

K: quantidade de componentes (conexos) de G;

Os 0's representam MATRIZES