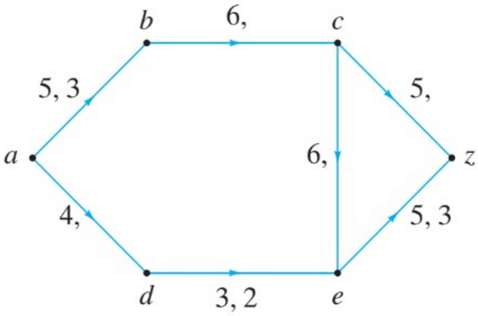
Matemática Discreta 2022
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professora Maria Soledad Aronna
Monitor Felipe Vieira Costa 14 de novembro de 2022

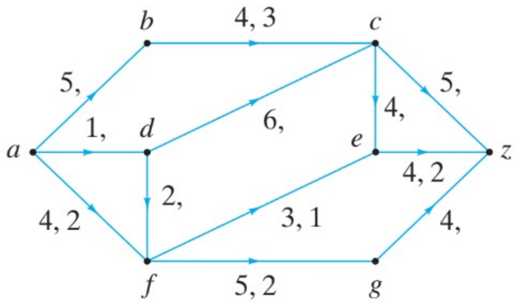
Lista 11

Exercício 1 Nos itens a seguir, preencha os fluxos de aresta em branco para que o resultado seja um fluxo na rede dada. Determine o valor dos fluxos.

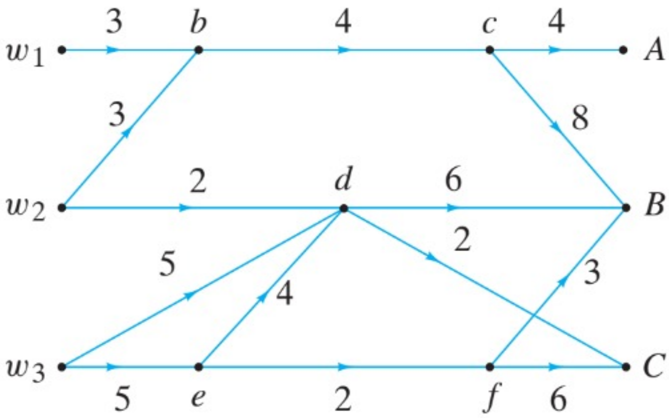
(a)



(b)



Exercício 2 O grafo a seguir representa uma rede de bombeamento na qual petróleo para três refinarias, A, B, C, é entregue a partir de três poços, w_1, w_2 e w_3. As capacidades dos sistemas intermediários estão mostrados nas arestas. Os vértices b, c, d, e e f representam estações de bombeamento intermediárias. Modele esse sistema como uma rede.



Exercício 3 Existem duas estradas da cidade A para a cidade D. Uma estrada passa pela cidade B e a outra estrada passa pela cidade C. Durante o período de $7h00$ da manhã às $8h00$ da manhã, os tempos médios de viagem são

A to B	30 minutes
A to C	15 minutes
B to D	15 minutes
C to D	15 minutes.

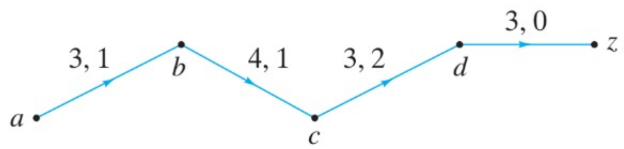
As capacidades máximas das estradas são

A to B	1000 vehicles
A to C	3000 vehicles
B to D	4000 vehicles
C to D	2000 vehicles.

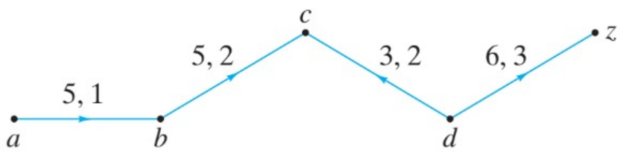
Represente o fluxo de tráfego de A a D durante o período das $7h00$ às $8h00$ como uma rede.

Exercício 4 Nos itens a seguir, um caminho da fonte a para o sumidouro z em uma rede é dada. Encontre o maior incremento que é possível obter alterando os fluxos nas arestas do caminho.

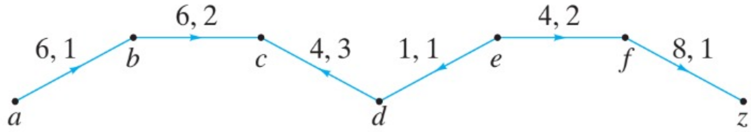
(a)



(b)

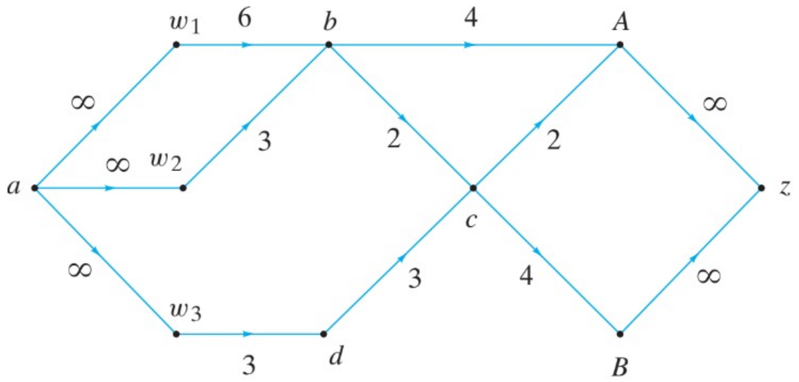


(c)

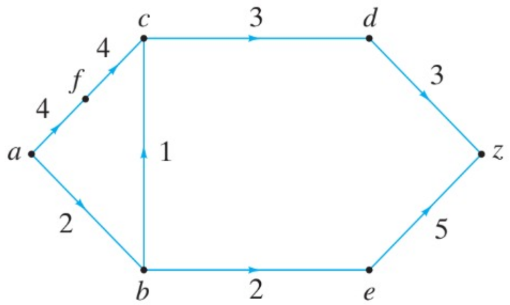


Exercício 5 Nos itens a seguir, use o Algoritmo de Ford-Fulkerson para encontrar o fluxo maximal para cada rede.

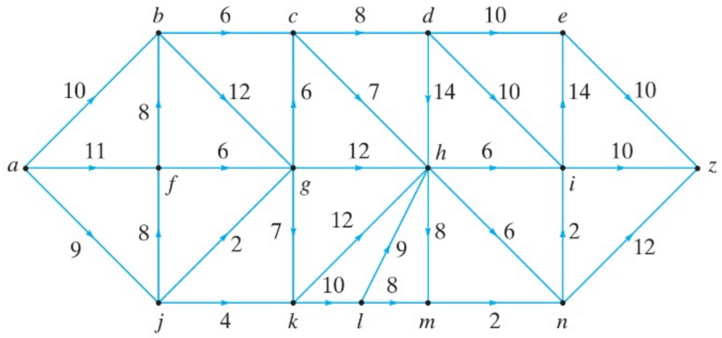
(a)



(b)



(c)



Exercício 6 No grafo do Exercício 5(a), encontre o fluxo maximal da rede com o fluxo inicial dado.

$$\begin{array}{rrrr} F_{a,w_1} = 2, & F_{w_1,b} = 2, & F_{bA} = 0, & F_{cA} = 0, \\ F_{Az} = 0, & F_{a,w_2} = 0, & F_{w_2,b} = 0, & F_{bc} = 2, \\ F_{cB} = 4, & F_{Bz} = 4, & F_{a,w_3} = 2, & F_{w_3,d} = 2, \\ F_{dc} = 2. & & & \end{array}$$

Exercício 7 Mostre que o algoritmo para Fluxo Maximal de Ford-Fulkerson sempre termina.

Exercício 8 Nos itens a seguir, encontre a capacidade do corte $(P, \overline{P})$. Também determine se o corte dado é minimal.

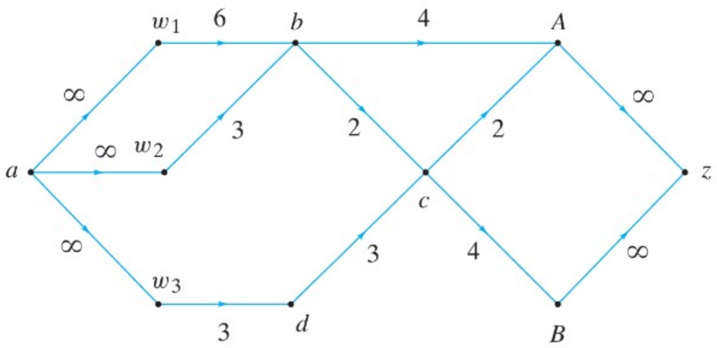
(a) $P = \{a, d\}$ para o grafo do Exercício 1(a)

(b) $P = \{a, b, c, d\}$ para o grafo do Exercício 1(b)

Exercício 9 Nos itens a seguir, encontre um corte minimal em cada rede.

(a) Rede do Exercício 2

(b)



(c) Rede construída no Exercício 3

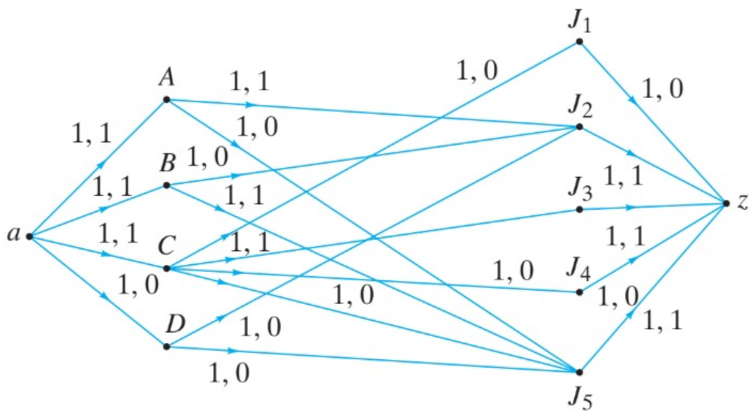
Exercício 10 Este exercício se refere a uma rede que, além de ter capacidades inteiras não negativas C_{ij}, tem requisitos de fluxo mínimo nas arestas m_{ij}. Ou seja, um fluxo F deve satisfazer

$$m_{ij} \leq F_{ij} \leq C_{ij}$$

para todas as arestas (i, j).

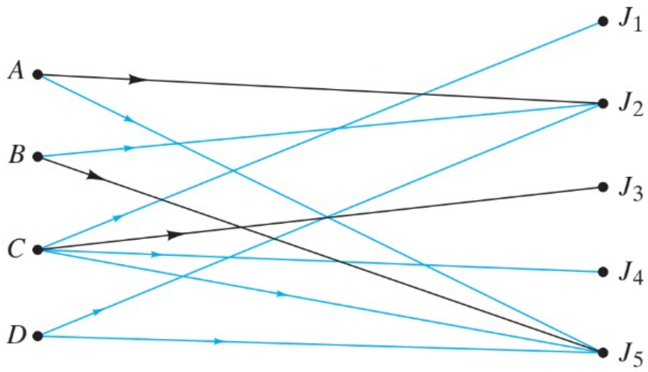
Dê um exemplo de uma rede G na qual $m_{ij} \leq C_{ij}$ para todas as arestas (i, j) tal que não existe nenhum fluxo.

Exercício 11 Mostre que o fluxo na rede a seguir é maximal exibindo um corte mínimo cuja capacidade é 3.



Exercício 12 Encontre o fluxo que corresponde ao matching da rede abaixo. Mostre que esse fluxo é maximal exibindo um corte minimal cuja capacidade é 3.

Exercício 13 O grafo abaixo representa quatro candidatos A, B, C e D e 5 trabalhos J_1, J_2, J_3, J_4 e J_5, onde uma aresta conecta um candidato a um trabalho para o qual ele é qualificado.



Os itens abaixo se referem ao grafo acima, com uma mudança: todas as arestas terão sua direção revertida, de forma que elas fiquem direcionadas dos trabalhos para os candidatos.

(a) O que um matching representa?

(b) O que um matching maximal representa?

(c) Mostre um matching maximal.

(d) O que um matching completo representa?

(e) Existe um matching completo? Se sim, mostre um. Se não, explique por que não existe nenhum.

Exercício 14 O candidato A está qualificado para os trabalhos J_1 e J_4; B está qualificado para os trabalhos J_2, J_3 e J_6; C está qualificado para os trabalhos J_1, J_3, J_5 e J_6; D está qualificado para os trabalhos J_1, J_3 e J_4; E está qualificado para os trabalhos J_1, J_3 e J_6.

(a) Modele essa situação como uma rede de matching.

(b) Use o Algoritmo de Ford-Fulkerson para encontrar um matching maximal.

(c) Existe um matching completo?

Exercício 15 Cinco estudantes, V, W, X, Y e Z, são membros de quatro comitês, C_1, C_2, C_3 e C_4. Os membros de C_1 são V, X e Y; Os membros de C_2 são X e Z; Os membros de C_3 são V, Y e Z; Os membros de C_4 são V, W, X e Z. Cada comitê deve mandar um representante para a administração. Nenhum estudante pode representar dois comitês.

(a) Modele essa situação como uma rede de matching.

(b) Qual é a interpretação de um matching maximal?

(c) Qual é a interpretação de um matching completo?

(d) Use o Algoritmo de Ford-Fulkerson para encontrar um matching maximal.

(e) Existe um matching completo?

Definição. Seja G um grafo direcionado bipartido com conjuntos de vértices disjuntos V e W nos quais as arestas são deirecionadas dos vértices de V para os vértices de W. (Todo vértice de G está em V ou em W.) Definimos a *deficiência* de G como

$$\delta(G) = max\{|S| - |R(S)| \mid S \subseteq V\}$$

onde $R(S)$, para $S \subseteq V$, é definido como

$$R(S) = \{w \in W \mid v \in S, (v, w) \in E\}$$

Exercício 16 Mostre que G tem um matching completo se, e somente se, $\delta(G) = 0$

Exercício 17 Verdadeiro ou falso? Todo matching está contido em um matching maximal. Se for verdade, prove; Se não, dê um contraexemplo.