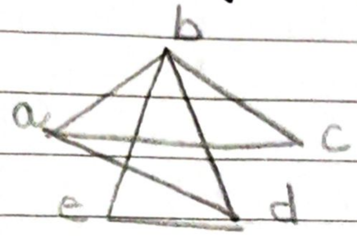
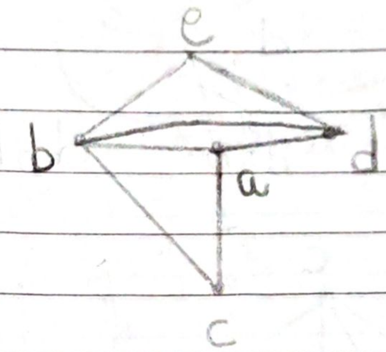
Lista 8

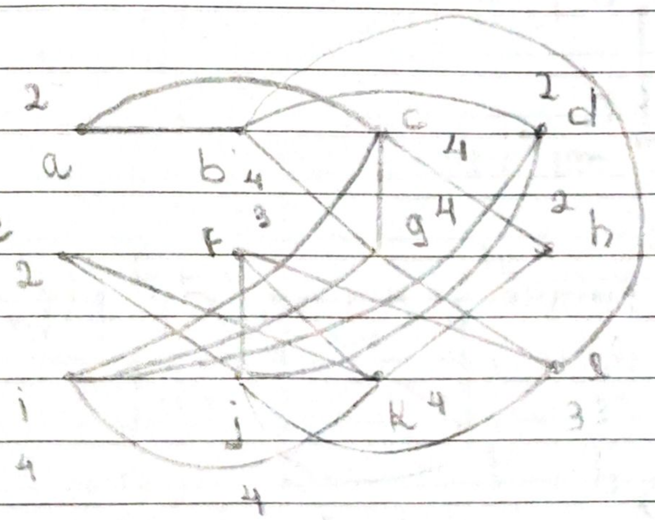
1) Mostre que o grafo é planar; redesenhando-o de forma que não haja cruzamento de arestas.

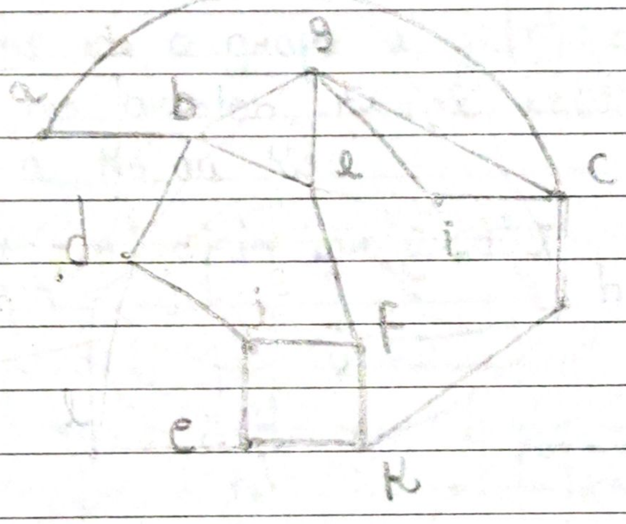
a)





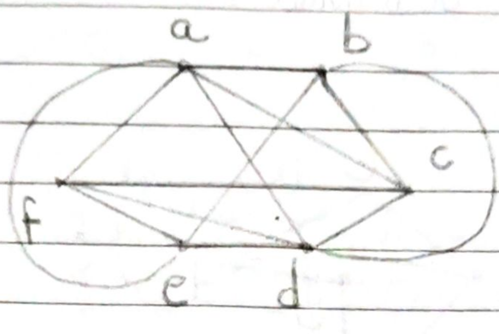
b)

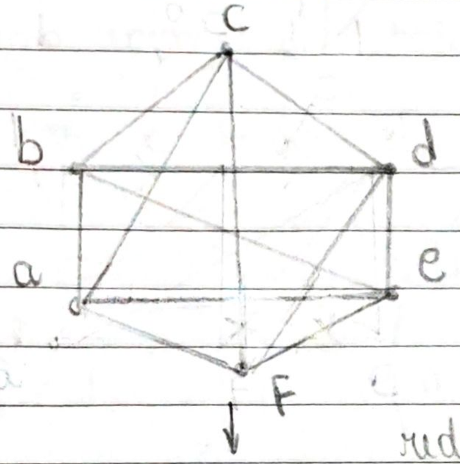




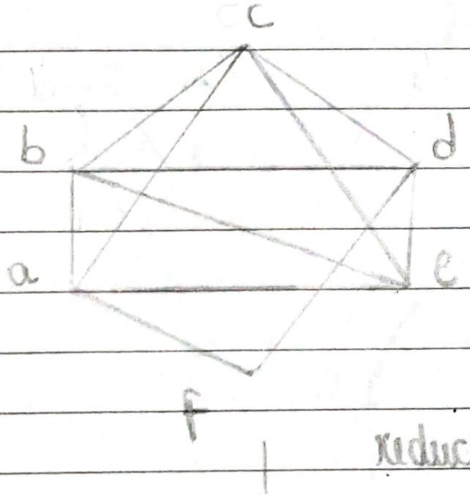
2) Nos itens a seguir, mostre que em cada grafo não é planar encontrando um subgrafo homeomorfo à K_5 ou a $K_{3,3}$.

a)

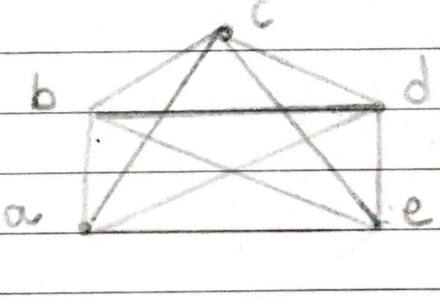




redução em série (c,f) e (f,e)

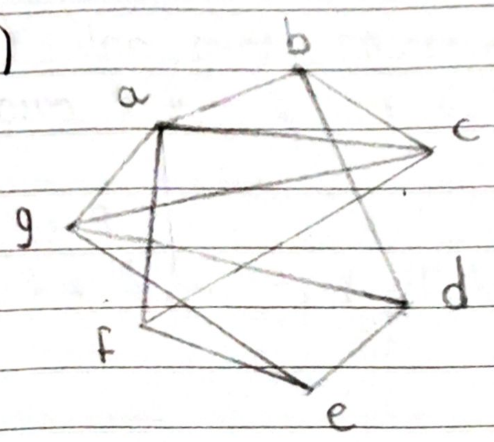


redução em série (a,f) e (f,d)



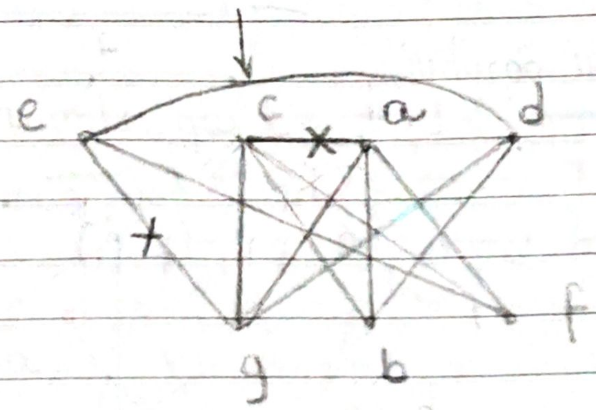
K_5

b)



∘ remover (a,c)

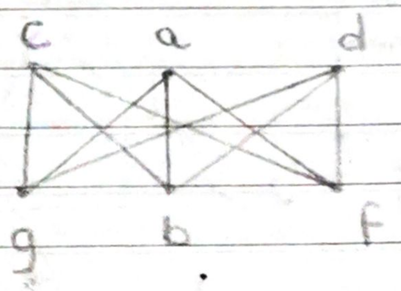
∘ remover (e,g)



↓ red em série (d,e); (e,f)

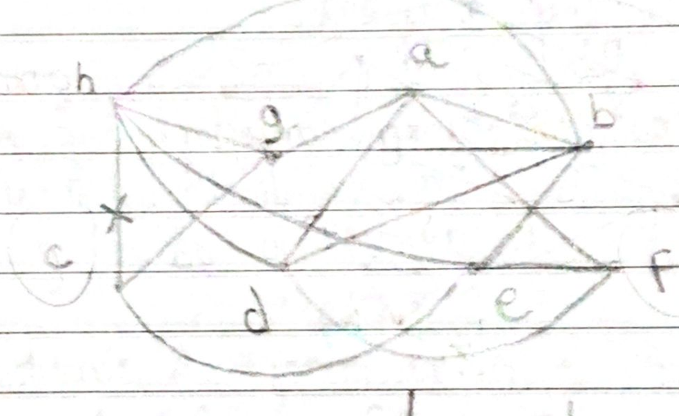
↓

(d,f)



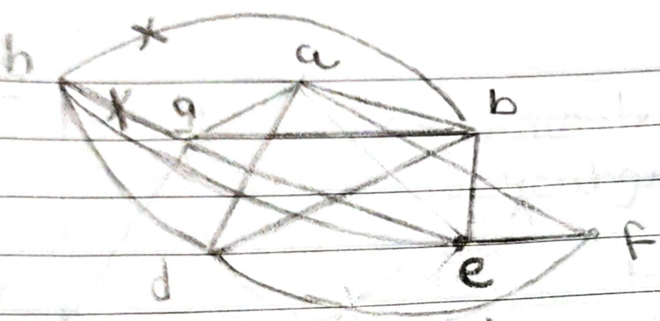
$K_{3,3}$

3) Determine se o grafo é planar. Se sim, redesenhe o sem cruzar as arestas, se não, encontre um subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$

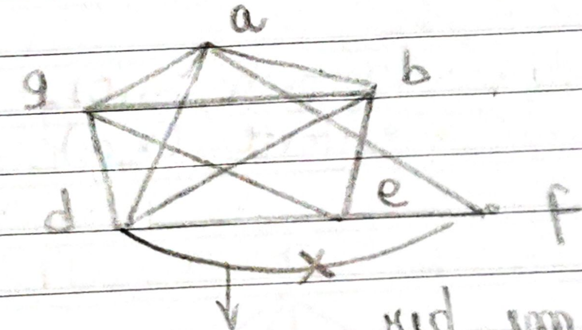


(g,c) e (c,e)

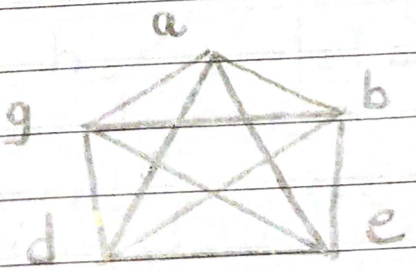
↓ red em série



red em serie (e,h), (h,d)



red em serie (a,f), (f,e)



K_5

4) Um grafo conexo planar tem 9 vértices tendo graus 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2.

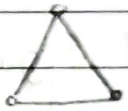
$v = 9$

$e = \frac{5+4+4+3+3+3+2+2+2}{2} = \frac{28}{2} = 14$

$f = e - v + 2 = 14 - 9 + 2 = 7$

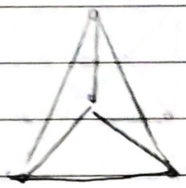
5) Mostre que qualquer grafo tendo 5 ou menos vértices e um vértice de grau 2 é planar

$v = 3$



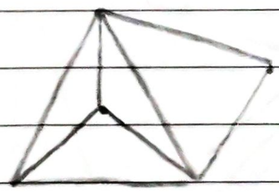
são planares

$v = 4$



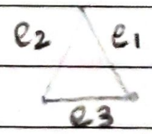
um grafo que tem vértice com grau 2, é um subgrafo de K_4.
K_4 é planar, logo, seus subgrafos são planares.

$v = 5$



ao acrescentar um vértice no K_4 obtemos o grafo ao lado, que é planar. Qualquer outra configuração que atende a condição com $v=5$ é subgrafo desse grafo.

6) Mostre que em um grafo simples conexo planar vale que $e \leq 3v - 6$



$f \leq \frac{e}{3}$, mas cada aresta divide 2 faces então é contada duas vezes

$f \leq \frac{2e}{3}$ $3f \leq 2e$

$$f = e - v + 2$$

$$\frac{2e}{3} \geq e - v + 2$$

$$2e \geq 3e - 3v + 6$$

$$e \leq 3v - 6$$

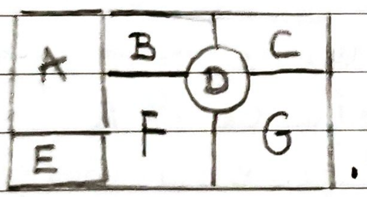
7) Use o exercício 6 para provar que K_5 não é planar

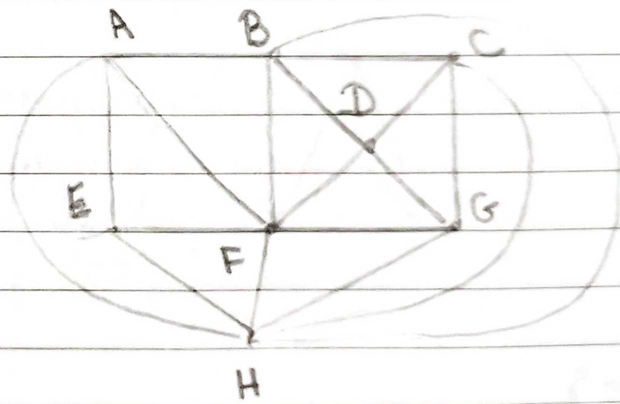
$v = 5$ $\quad$ $e \leq 3v - 6$

$e = 10$ $\quad$ $10 \leq 3 \cdot 5 - 6$

$10 \leq 9$ falso

8) Encontre o dual do mapa a seguir

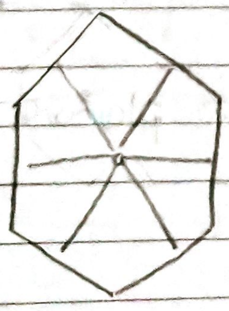




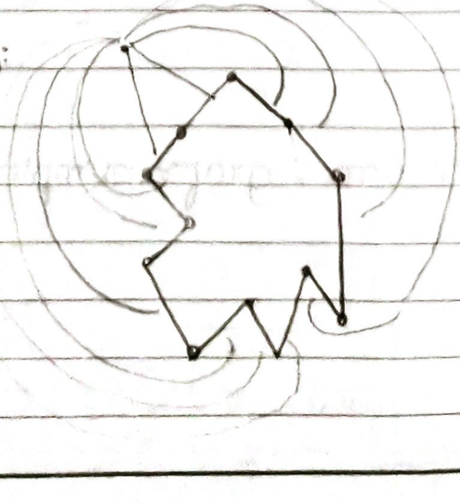
9) Mostre que o dual de um mapa planar é um grafo planar

Duas situações:

dentro:



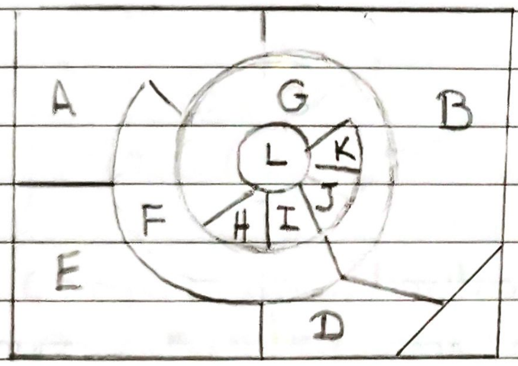
fora:

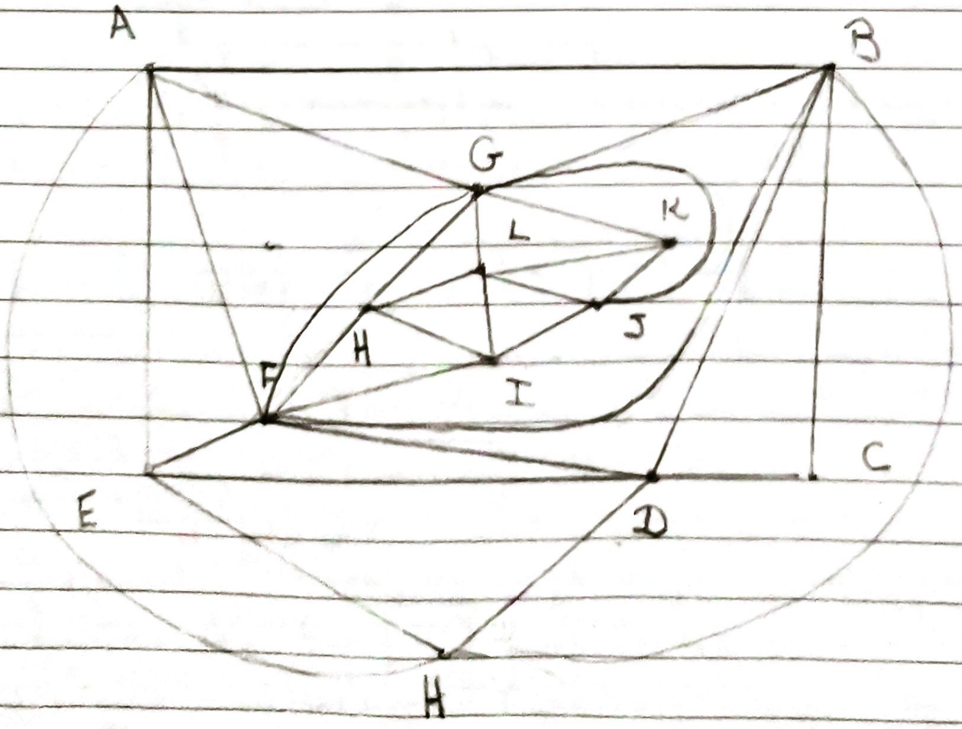


(10) Mostre que qualquer coloração do mapa do Exercício 8 excluindo a região ilimitada requer pelo menos três cores.

Caso haja um K_3 no dual, então o mapa requer pelo menos 3 cores, pois significa que há 3 regiões adjacentes entre si, e logo, precisam de cores distintas para cada uma. K_3 presentes no dual: (A, B, F), (A, E, F), (B, C, D), (B, F, D), (C, D, G), (F, D, G), (H, E, F)

(11) Encontre o dual do mapa a seguir





(12) Mostre que qualquer coloração do mapa de 11) excluindo a região ilimitada requer pelo menos 4 cores.

Mesma lógica da 10), Agora para K_4:
(G, J, K, L)