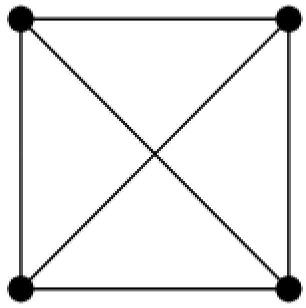
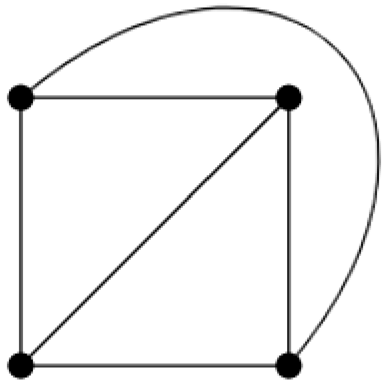
Definição

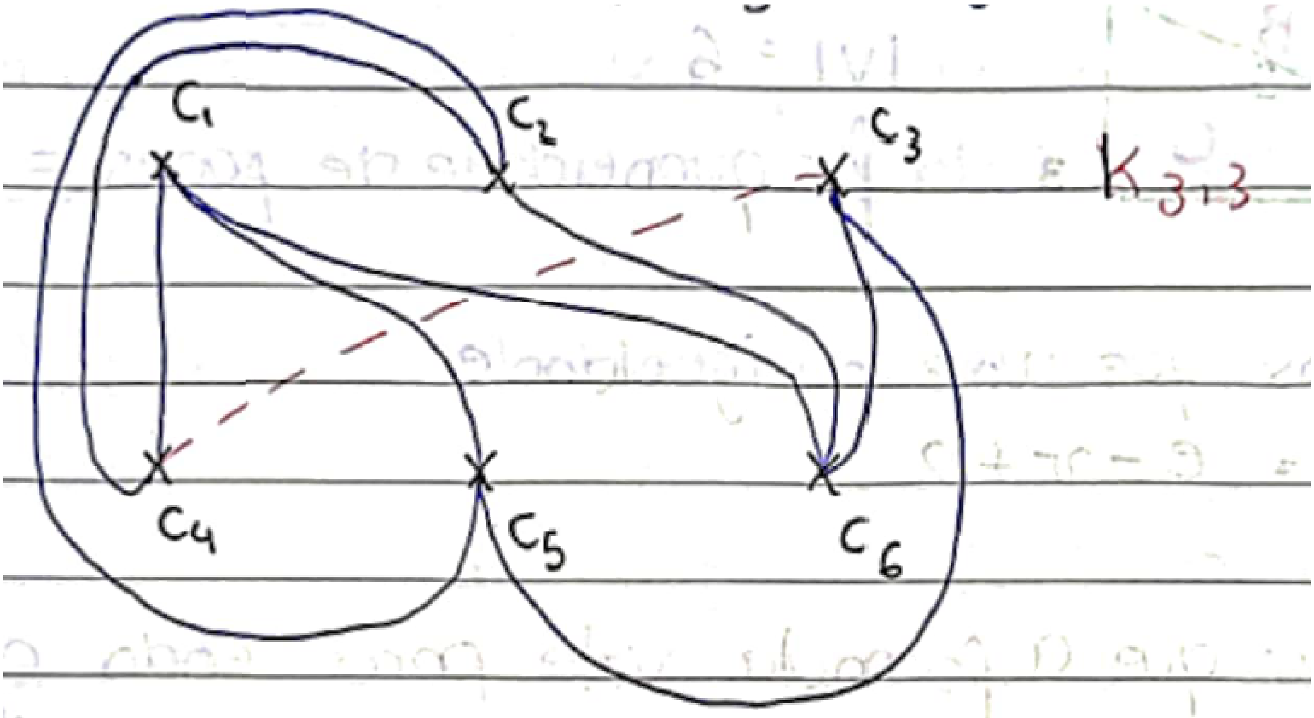
> Um grafo G é dito **planar** se é possível representá-lo graficamente no plano de forma tal que não haja cruzamento de arestas. Se G não é planar, dizemos que G é **não-planar**.

Exemplos





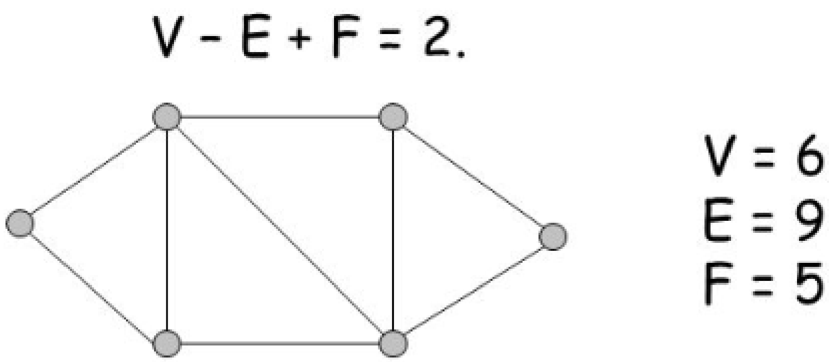
Temos 6 cidades que queremos conectar com rodovias de forma tal que não haja cruzamento entre elas e tal haja rodovias diretas das cidades c_1, c_2 e c_3 até as cidades c_4, c_5 e c_6.



- K_3, K_4 são planares
- K_5 não é planar

Fórmula de Euler para grafos Planares

Dado $G = (V, E)$, um grafo planar e convexo, a sua representação gráfica no plano determina "regiões" que chamamos de Faces.



$|E| = 9 = e$
$|V| = 6 = v$
f = quantidade de faces = 5

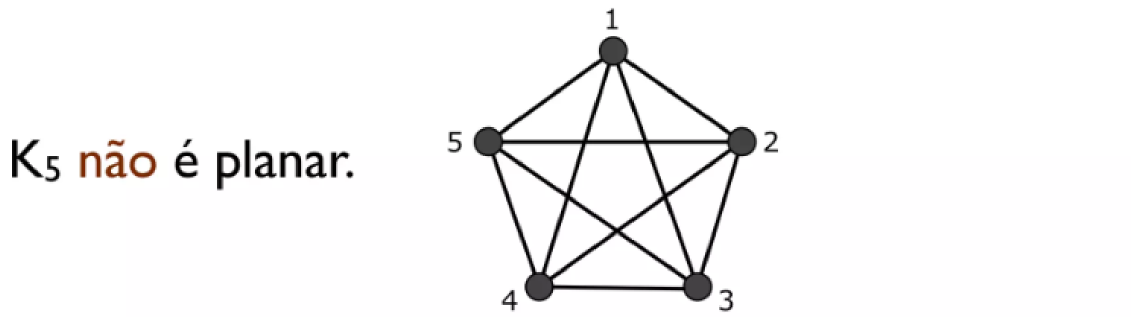
Observemos que vale a igualdade

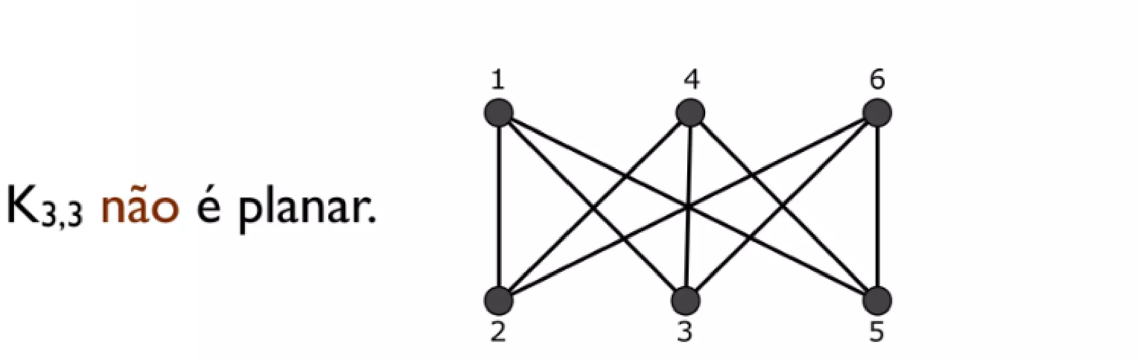
$$f = e - v + 2$$

Euler provou que a fórmula vale pra todo grafo planar convexo.

Teorema K_5 e $K_{3,3}$

$K_{3,3}$ e $K_{5,5}$ não são planar.





Prova

Supomos por absurdo que $k_{3,3}$ é planar. Cada face está delimitada por um ciclo.
No $k_{3,3}$, qualquer ciclo maior que 3. (ou igual/maior que 4). Cada aresta pertence a dois ciclos delimitantes.

$$e \geq \frac{4f}{2} \Rightarrow 2e \geq 4f = 4(e - v + 2)$$

Logo dado que $v = 6$, $e = 3 \times 3 = 9$

$$2 \times 9 \geq 4(9 - 6 + 2)$$
$$18 \geq 20$$

Absurdo!

Concluímos que $k_{3\times3}$ não é planar.

- De forma similar é possível provar que k_5 é não-planar.
- Se um grafo contém um Homeomorfismo a $k_{3,3}$ ou k_5, então ele não é planar.

Vamos ver que vale uma propriedade recíproca "similar" que utiliza o conceito de **Homeomorfismo de grafos**.