Corte

> Definição: Um corte $(P,\overline{P})$ de uma rede G consiste num conjunto de vértice P e seu complementar $\overline{P}$ de uma rede G consiste num conjunto de vértice P e seu complementar $\overline{P}$, com a propriedade:
> $a \in P$, $z \in \overline{P}$.

Capacidade de Corte

A capacidade do corte $(P,\overline{P})$ é dada por:

$$C(P,\overline{P}) = \sum_{i \in P} \sum_{j \in P} C_{i,j}$$

Exemplo

O corte induzido pela rotulação dos vértices no término do algoritmo de fluxo maximal é:

$$(P = \{a, b, d\},\ \overline{P} = \{c, e, z\})$$

A capacidade de $(P,\overline{P})$ é

$$C(P,\overline{P}) = C_{bc} + C_{dc} + C_{de} = 2 + 2 + 2 = 6$$

Observemos que $C(P,\overline{P})$ coincide com o valor do fluxo maximal:

Teorema

Seja F um fluxo em G e seja $(P,\overline{P})$ um corte em G. Então a capacidade de $(P,\overline{P})$ é maior ou igual do que o valor de F, isto é,

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in P} C_{ij} \geq \sum_{i} F_{ai} \quad (*)$$

($\sum_i$ que dizer a soma a respeito de todos os vértices)

Prova

$$\sum_i (\underbrace{F_{ai} - F_{ia}}_{=0}) + \sum_{j \in P\{a\}} (\underbrace{\sum_i F_{ji} - \sum F_{ij}}_{=0 \text{ por conservação de fluxo}})$$

$$\sum_i F_{ai} = \sum_{j \in P} \sum_i F_{ji} - \sum_{j \in P} \sum_i F_{ij}$$

$$= \sum_{j \in P} \sum_{i \in P} F_{ji} + \sum_{j \in P} \sum_{i \in \overline{P}} F_{ji} - \sum_{j \in P} \sum_{i \in P} F_{ij} - \underbrace{\sum_{j \in P} \sum_{i \in \overline{P}} F_{ij}}_{>0} \leq \sum_{j \in P} \sum_{i \in \overline{P}} C_{ij}$$

$$\sum_{j \in P} \sum_{i \in \overline{P}} F_{ji} - \underbrace{\sum_{j \in P} \sum_{i \in \overline{P}} F_{ij}}_{>0} \leq \sum_{j \in P} \sum_{i \in \overline{P}} C_{ij} = \sum_{j \in P} \sum_{i \in \overline{P}} C_{ji}$$

Corte Minimal

> Definição: Dizemos que um corte $(P, \overline{P})$ de G é *MINIMAL* (ou mínimo) se tem a mínima capacidade entre todos os cortes existentes.

Teorema Fluxo Maximal/Corte Minimal

(Fluxo Maximal/Corte Minimal)
("Max Flow, Min Cut Theorem")

Seja F um fluxo em G e $(P, \overline{P})$ um corte. Se vale a igualdade em $(*)$, então F é maximal e o corte em $(P, \overline{P})$ é minimal. Analogamente a igualdade vale em $(*)$ se e somente se:

(a) $F_{ij} = C_{ij}$, para $i \in P$, $j \in \overline{P}$
(b) $F_{ij} = 0$, para $i \in \overline{P}$, $j \in P$

Prova

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in P} C_{ij} \geq \sum_{i} F_{ai} \quad (*)$$

Observemos que em $(*)$ o lado esquerdo não depende do fluxo e o direito não depende do corte. Logo:

$$\min_{(P, \overline{P})} \sum_{i \in P} \sum_{j \in \overline{P}} C_{ij} \geq \max_{F \text{ fluxo}} \sum_{i} F_{ai}$$

Então se $(P, \overline{P})$ e F são tais que vale a igualdade, necessariamente $(P, \overline{P})$ é *MINIMAL* e F é *MAXIMAL*.

Para provar a segunda afirmação notemos que na demostração de $(*)$ a igualdade é mantida se e somente se valem (a) e (b).

$$O(|E| \underbrace{f_{\max}}_{C_{\min}})$$

Teorema

O algoritmo de fluxo maximal é correto, isto é, acha um fluxo maximal quando termina. Adicionalmente, se P é o conjunto de vértices rotulados na terminação, então $(P, \overline{P})$ é um corte minimal.

Prova

Seja (i, j) uma aresta com $i \in P$ e $j \in \overline{P}$. Dado que i está rotulado e j não foi rotulado, necessariamente $F_{ij} = C_{ij}$. Analogamente, se (j, i) é uma aresta com $i \in P$, $j \in \overline{P}$ então $F_{ji} = 0$. Então valem (a) e (b) do teorema anterior, logo o corte é minimal e o fluxo maximal.