Exercício de equacionamento de Pesquisa operacional

ALUNO	IZAEL ALVES DA SILVA
PROFESSOR	JOAO VAGNER PEREIRA DA SILVA
DISCIPLINA	PESQUISA OPERACIONAL

Exercício 1: Planejamento da Produção

Uma fábrica produz dois tipos de brinquedos: carros e bonecas. Cada carro requer 3 horas de trabalho no setor de montagem e 1 hora no setor de pintura. Cada boneca requer 2 horas no setor de montagem e 2 horas no setor de pintura. A fábrica dispõe de um máximo de 180 horas de trabalho por semana no setor de montagem e 100 horas por semana no setor de pintura. O lucro por carro vendido é de $8 e o lucro por boneca vendida é de $6. Problema: Determine o número de carros e bonecas que a fábrica deve produzir por semana para maximizar o lucro total.

Variáveis

x = número de carros por semana

y = número de bonecas por semana

Função objetivo (maximizar lucro): $\max\ Z = 8x + 6y$

Restrições (horas disponíveis):

- Montagem: $3x + 2y \leq 180$
- Pintura: $1x + 2y \leq 100$
- Não-negatividade: $x \geq 0,\ y \geq 0$

Solução (verificação por vértices): Vértices candidatos: $(0,0), (60,0), (0,50)$ e interseção das duas retas: resolver

$$\begin{cases} 3x + 2y = 180 \\ x + 2y = 100 \end{cases} \Rightarrow x = 40,\ y = 30$$

Lucros:

- (60,0) → $Z = 8 \cdot 60 = 480$
- (0,50) → $Z = 6 \cdot 50 = 300$

- (40,30) → $Z = 8 \cdot 40 + 6 \cdot 30 = 500$

Ótimo: produzir **40 carros** e **30 bonecas** por semana; **lucro máximo = $500**.

✅ *Comentário: solução inteira natural aqui; ambos os recursos são aproveitados na solução ótima (verificação: 3·40+2·30 = 180 e 1·40+2·30 =100).*

Exercício 2: O Alfaiate Otimizador

Um alfaiate dispõe de 16 metros de algodão, 11 metros de seda e 15 metros de lã para produzir dois tipos de produtos: camisas e calças.

- Exigem 2 metros de algodão e 1 metro de seda.
- Exigem 1 metro de algodão, 1 metro de seda e 2 metros de lã.

Para cada camisa vendida, ele obtém um lucro de R$ 50,00 e para cada calça, R$ 70,00. Objetivo: Formular um modelo de Programação Linear para que o alfaiate maximize seu lucro total, considerando os recursos limitados de tecido.

Variáveis

x = número de camisas

y = número de calças

Dados (recursos):

- Algodão disponível = 16 m
- Seda disponível = 11 m
- Lã disponível = 15 m

Requisitos por produto:

- Camisa: 2 m algodão, 1 m seda
- Calça: 1 m algodão, 1 m seda, 2 m lã

Função objetivo (maximizar lucro):

$$\max\ Z = 50x + 70y$$

Restrições:

$$\begin{cases} 2x + 1y \le 16 & \text{(algodão)} \\ 1x + 1y \le 11 & \text{(seda)} \\ 2y \le 15 & \text{(lã)} \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

Resolver por vértices (examinar interseções):

- Intersecção algodão–seda: $2x + y = 16$ e $x + y = 11$ → $x = 5,\ y = 6$. $Z = 50 \cdot 5 + 70 \cdot 6 = 670$.
- Intersecção algodão–lã (usar $y = 7.5$ da lã): com $y = 7.5$ então $2x + 7.5 = 16 \Rightarrow x = 4.25$. $Z = 50 \cdot 4.25 + 70 \cdot 7.5 = 737.5$.
- Intersecção seda–lã: $x + y = 11$ e $y = 7.5 \Rightarrow x = 3.5$. $Z = 700$.
- Eixos: (8,0) → $Z = 400$; (0,7.5) → $Z = 525$.

Ótimo contínuo: $x = 4{,}25$ camisas e $y = 7{,}5$ calças, com **lucro máximo = R$ 737{,}50**. Observação: a restrição de lã (y ≤ 7,5) é ativa; seda e algodão estão próximas de limitar também.

✅ *Comentário prático: se for necessário produzir números inteiros, avalie as combinações inteiras próximas (por exemplo (4,7) ou (5,7)) e compare lucros — o ótimo inteiro pode ser (4,7) ou (5,7) dependendo de qual combinação respeite todas as restrições.*

Exercício 3: Produção de Bolos

Uma confeitaria produz dois tipos de bolos: um tipo simples e um tipo recheado.

- Requer 1 kg de farinha, 0,5 kg de açúcar e 2 ovos. O lucro por bolo é de R$ 10,00.
- Requer 1,5 kg de farinha, 0,8 kg de açúcar, 3 ovos e 0,2 kg de chocolate. O lucro por bolo é de R$ 18,00.

A confeitaria possui um estoque de 150 kg de farinha, 70 kg de açúcar e 100 dúzias de ovos. Objetivo: Modelar um problema de otimização para a confeitaria determinar a quantidade de cada tipo de bolo a ser produzida, a fim de maximizar o lucro, sujeito às restrições de matéria-prima.

Variáveis

s = número de bolos simples

r = número de bolos recheados

Dados e requisitos:

- Bolo simples: farinha 1 kg, açúcar 0{,}5 kg, ovos 2 unidades; lucro R$ 10.
- Bolo recheado: farinha 1{,}5 kg, açúcar 0{,}8 kg, ovos 3 unidades, chocolate 0{,}2 kg; lucro R$ 18.
- Estoque: farinha 150 kg; açúcar 70 kg; ovos 100 dúzias = $100 \times 12 = 1200$ ovos.
- Nota: não foi informado estoque de chocolate — assumirei **chocolate suficiente** (não-limitante). Se houver limite, incluir mais uma restrição.

Formulação: $\max\ Z = 10s + 18r$

sujeito a

$$\begin{cases} 1.0\,s + 1.5\,r \le 150 & \text{(farinha, kg)} \\ 0.5\,s + 0.8\,r \le 70 & \text{(açúcar, kg)} \\ 2\,s + 3\,r \le 1200 & \text{(ovos, unidades)} \\ s \ge 0,\ \ r \ge 0 \end{cases}$$

Resolver (vértices): as duas primeiras restrições não se intersectam em ponto com ambas coordenadas não-negativas factíveis (uma interseção dá r negativo), e a restrição de açúcar é a mais restritiva para r. Os vértices relevantes são:

- $(0, 0)$,
- $(140, 0)$ — max s com os recursos (respeita açúcar e ovos),
- $(0, 87.5)$ — max r limitado pelo açúcar: $r \le 70/0.8 = 87.5$.

Lucros:

- (140,0) → $Z = 10 \cdot 140 = 1400$
- (0,87.5) → $Z = 18 \cdot 87.5 = 1575$

Ótimo contínuo: produzir **0 bolos simples** e **87{,}5 bolos recheados** (lucro R$ 1.575). Interpretação: o recurso limitante é **açúcar**; produzir só recheados usa melhor a disponibilidade de insumos para maximizar lucro (o recheado é mais lucrativo por “unidade de açúcar”).

✅ *Comentário prático: como número de bolos deve ser inteiro, avalie 87 ou 88 recheados e verifique consumo de recursos e lucro; provavelmente 87 recheados é a opção inteira factível com menor desperdício.*

Exercício 4: Distribuição de Notícias

Uma estação de televisão local tem dois tipos de programas: o Programa A e o Programa B.

- Traz 20% de audiência para o público jovem e 30% para o público adulto.
- Traz 15% de audiência para o público jovem e 40% para o público adulto.

A empresa quer atrair pelo menos 2.000.000 de jovens e 3.000.000 de adultos ao dia. Objetivo: Construir um modelo matemático para que a estação determine quantas horas cada programa deve exibir para atingir os objetivos de audiência, minimizando o tempo total de exibição.

Variáveis

x = horas do Programa A

y = horas do Programa B

Seja P_Y = "população base jovem" atingível por unidade de percentagem (ou seja, 1% corresponde a P_Y espectadores). Analogamente P_A = população base adulta por 1%.

Dados percentuais:

- Programa A: 20% jovens, 30% adultos → por hora gera $0{,}20 \cdot P_Y$ jovens e $0{,}30 \cdot P_A$ adultos.
- Programa B: 15% jovens, 40% adultos → por hora gera $0{,}15 \cdot P_Y$ jovens e $0{,}40 \cdot P_A$ adultos.

Metas absolutas: 2.000.000 jovens e 3.000.000 adultos.

Problema (minimizar tempo total): $\min\ x + y$

sujeito a

$$\begin{cases} 0.20\,P_Y\,x + 0.15\,P_Y\,y \ \geq \ 2\,000\,000 \\ 0.30\,P_A\,x + 0.40\,P_A\,y \ \geq \ 3\,000\,000 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dividindo cada desigualdade por P_Y e P_A, respectivamente:

$$\begin{cases} 0.20\,x + 0.15\,y \ \geq \ \dfrac{2{,}000{,}000}{P_Y} \\ 0.30\,x + 0.40\,y \ \geq \ \dfrac{3{,}000{,}000}{P_A} \end{cases}$$

Assim, para resolver numericamente precisamos especificar P_Y e P_A (quantos espectadores correspondem a 1 ponto percentual na escala que o enunciado usa).

Solução numérica com uma suposição plausível

Para dar um número concreto, suponhamos que **1%** equivale a **1.000.000 de espectadores** (apenas uma hipótese para exemplo). Então:

- 20% → 200.000 espectadores por hora (Programa A, jovens)
- 15% → 150.000 por hora (Programa B, jovens)
- 30% → 300.000 por hora (A, adultos)
- 40% → 400.000 por hora (B, adultos)

As desigualdades ficam (números em espectadores):

$$\begin{cases} 200{,}000\,x + 150{,}000\,y \ \geq \ 2{,}000{,}000 \\ 300{,}000\,x + 400{,}000\,y \ \geq \ 3{,}000{,}000 \end{cases}$$

Dividindo por 1{,}000 (ou reescrevendo em milhares) facilita; resolvendo o sistema igualando as restrições (buscando interseção), obtemos

$$x = 10,\ y \approx 0.$$

✅ *Isto é: **exibir 10 horas do Programa A** (e 0 do B) já satisfaz ambas as metas sob essa suposição numérica — e minimiza $x + y$ (total de horas = 10).*
