Exercícios de Maximização e Minimização em PO

ALUNO	IZAEL ALVES DA SILVA
PROFESSOR	JOAO VAGNER PEREIRA DA SILVA
DISCIPLINA	PESQUISA OPERACIONAL

Exercício 1: Maximização de Lucro na Produção de Móveis

Uma pequena marcenaria produz dois tipos de móveis: **mesas** e **cadeiras**. A produção de uma mesa consome 2 horas de mão de obra e 1 unidade de madeira, gerando um lucro de R$ 80,00. A produção de uma cadeira consome 1 hora de mão de obra e 1 unidade de madeira, com um lucro de R$ 50,00. A marcenaria dispõe de um total de 40 horas de mão de obra e 30 unidades de madeira por semana. O objetivo é determinar quantas mesas e cadeiras devem ser produzidas semanalmente para maximizar o lucro total.

Equacione o problema:

- **Variáveis de decisão:**
  - x = número de mesas por semana
  - y = número de cadeiras por semana
- **Função Objetivo (Maximizar Lucro):**
  - $Z = 80x + 50y$
- **Restrições**
  - **Mão de obra:** $2x + y \leq 40$
  - **Madeira:** $x + y \leq 30$
  - **Não-negatividade:** $x \geq 0,\ y \geq 0$

Resolução:

A solução ótima fica em um dos vértices formados pelas restrições. Testamos os vértices relevantes:

- $(x, y) = (0, 0)$ → $Z = 0$

- eixo y: $x = 0 \Rightarrow y \leq 30$ → ponto candidato $(0, 30)$: $Z = 50 \cdot 30 = 1500$
- eixo x: $y = 0 \Rightarrow 2x \leq 40 \Rightarrow x \leq 20$ → ponto $(20, 0)$: $Z = 80 \cdot 20 = 1600$
- interseção das duas retas: resolver

$$\begin{cases} 2x + y = 40 \\ x + y = 30 \end{cases} \Rightarrow x = 10,\ y = 20$$

$Z = 80 \cdot 10 + 50 \cdot 20 = 800 + 1000 = 1800.$

Ótimo: produzir **10 mesas** e **20 cadeiras** por semana. **Lucro máximo: R$ 1.800,00**.

Exercício 2: Minimização de Custos em uma Dieta

Um nutricionista está elaborando uma dieta com base em dois alimentos, A e B. Cada 100g do alimento A contém 10g de proteína e 5g de carboidratos, custando R$ 2,00. Cada 100g do alimento B contém 5g de proteína e 15g de carboidratos, custando R$ 1,50. A dieta precisa ter no mínimo 20g de proteína e 30g de carboidratos por dia. O objetivo é determinar a quantidade de cada alimento que deve ser consumida para satisfazer as necessidades nutricionais com o menor custo possível.

Equacione o problema:

- **Variáveis de decisão:**
  - x = quantidade (em 100g) do alimento A
  - y = quantidade (em 100g) do alimento B
- **Função Objetivo (Minimizar Custo):**
  - $Z = 2.00x + 1.50y$ (R$ por cada 100 g)
- **Restrições:**
  - **Proteína:** $10x + 5y \geq 20$ (gramas)
  - **Carboidratos:** $5x + 15y \geq 30$ (gramas)
  - **Não-negatividade:** $x \geq 0,\ y \geq 0$

Resolução:

Procuramos a combinação mais barata que satisfaça ambas as igualdades. Igualando as restrições como iguais e resolvendo:

$$\begin{cases} 10x + 5y = 20 \\ 5x + 15y = 30 \end{cases}$$

Dividindo a primeira por 5: $2x + y = 4$ → $y = 4 - 2x$. Segunda por 5: $x + 3y = 6$. Substituindo y:

$$x + 3(4 - 2x) = 6 \Rightarrow x + 12 - 6x = 6 \Rightarrow -5x = -6 \Rightarrow x = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Então $y = 4 - 2(1{,}2) = 4 - 2{,}4 = 1{,}6$.

Essas quantidades são em porções de 100 g, ou seja: **120 g** do alimento A e **160 g** do alimento B.

Custo: $Z = 2 \cdot 1{,}2 + 1{,}5 \cdot 1{,}6 = 2{,}4 + 2{,}4 = 4{,}80$.

Ótimo: comer **120g de A** e **160g de B** por dia. **Custo mínimo diário: R$ 4,80**.

Exercício 3: Maximização de Produção Agrícola

Um agricultor tem 100 hectares de terra para plantar milho e soja. O custo de plantio por hectare de milho é de R$ 200,00 e o de soja é R$100,00. O agricultor tem um orçamento máximo de R$ 12.000,00 para o plantio. A mão de obra necessária para o milho é de 2 dias por hectare e para a soja é de 3 dias por hectare. O agricultor dispõe de no máximo 240 dias de mão de obra. O lucro por hectare de milho é de R$ 500,00 e de soja é R$ 300,00. O objetivo é determinar quantos hectares de cada cultura devem ser plantados para maximizar o lucro.

Equacione o problema:

- **Variáveis de decisão:**
  - x = hectares
  - y = hectares

- Área total disponível: **100 hectares**.
- Custo por ha:
  - milho R$200
  - soja R$100
  - orçamento máximo **R$ 12.000,00**.
- Mão de obra:
  - milho 2 dias/ha
  - soja 3 dias/ha
  - máximo **240 dias**.
- Lucro por ha:
  - milho R$500
  - soja R$300.

- **Função Objetivo (Maximizar Lucro):**

    - $Z = 500x + 300y$
- **Restrições:**
    - **Área:** $x + y \leq 100$
    - **Custo:** $200x + 100y \leq 12000$ → dividir por 100: $2x + y \leq 120$
    - **Mão de obra:** $2x + 3y \leq 240$
    - **Não-negatividade:** $x \geq 0,\ y \geq 0$

Resolução:

Calculei os vértices das interseções das retas e verifiquei quais satisfazem todas as restrições; os candidatos factíveis e seus lucros:

- $(x, y) = (0, 80)$: verifica as três restrições → $Z = 300 \cdot 80 = 24.000$
- $(x, y) = (60, 0)$: factível → $Z = 500 \cdot 60 = 30.000$
- interseção custo × mão de obra: $(30, 60)$ — verifica todas as restrições → $Z = 500 \cdot 30 + 300 \cdot 60 = 15.000 + 18.000 = 33.000$
  (Outros vértices violavam alguma restrição.)

Ótimo: plantar **30 ha de milho** e **60 ha de soja**. **Lucro máximo: R$ 33.000,00**.

Observação intuitiva: nesse ponto o orçamento (custo) e a mão de obra ficam totalmente utilizados (são restrições ativas), sobrando 10 ha de área não utilizados porque custo/mão-de-obra limitam mais do que a área disponível.
