Verossimilhanca de um G(N, p)

Guilherme Yukio Iasunaga

2023-11-29

```
matriz <- data.frame(
  `1` = c(0, 0, 1, 0, 1),
  `2` = c(0, 0, 1, 1, 0),
  `3` = c(1, 1, 0, 1, 1),
  `4` = c(0, 1, 1, 0, 1),
  `5` = c(1, 0, 1, 1, 0)
)
```

Vamos considerar p como a probabilidade de ter uma aresta entre v e v', assim $P(M(v, v') = 1) = p$ e $P(M(v, v') = 0) = 1 - p$. Com isso, a probabilidade de conseguir uma matriz igual a construida acima é:

$$
\begin{aligned}
&P(M(1,2) = 0, M(1,3) = 1, ..., M(3,4) = 1, M(4,5) = 1)\\
=&P(M(1,2) = 0) \cdot P(M(1,3) = 1) \cdots P(M(3,4) = 1) \cdot P(M(4,5) = 1)\\
=&p^7(1-p)^3
\end{aligned}
$$

Com isso, temos que a função de verossimilhança é $p^7(1-p)^3$.

Tirando o log da função, temos:

$$g(p) = log(p^7(1-p)^3) = log(p^7) + log((1-p)^3) = 7log(p) + 3log(1-p)$$

Tirando a derivada e igualando a zero para encontrar o ponto de invariância:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g(p)}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p}(7log(p) + 3log(1-p))\\
&= 7\frac{1}{p} + 3\left(\frac{-1}{1-p}\right)\\
&= \frac{7}{p} - \frac{3}{1-p} = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{7}{p} = \frac{3}{1-p}\\
&\Leftrightarrow 10p = 7\\
&\Leftrightarrow p = 0.7
\end{aligned}
$$

Pela aula, sabemos que o p encontrado acima é ponto de máximo por conta da segunda ferivada ser menor que zero. Com isso, $\hat{p}_N = 0.7$.