

Verossimilhana de um $G(N, p)$

Guilherme Yukio Iasunaga

2023-11-29

Construindo a matriz mostrada no enunciado do exercício:

```
matriz <- data.frame(  
  `1` = c(0, 0, 1, 0, 1),  
  `2` = c(0, 0, 1, 1, 0),  
  `3` = c(1, 1, 0, 1, 1),  
  `4` = c(0, 1, 1, 0, 1),  
  `5` = c(1, 0, 1, 1, 0)  
)
```

i) Achando a função de verossimilhança

Vamos considerar p como a probabilidade de ter uma aresta entre v e v' , assim $P(M(v, v') = 1) = p$ e $P(M(v, v') = 0) = 1 - p$. Com isso, a probabilidade de conseguir uma matriz igual a construída acima é:

$$\begin{aligned} &P(M(1, 2) = 0, M(1, 3) = 1, \dots, M(3, 4) = 1, M(4, 5) = 1) \\ &= P(M(1, 2) = 0) \cdot P(M(1, 3) = 1) \cdots P(M(3, 4) = 1) \cdot P(M(4, 5) = 1) \\ &= p^7(1 - p)^3 \end{aligned}$$

Com isso, temos que a função de verossimilhança é $p^7(1 - p)^3$.

ii) Encontrando o estimador de máxima verossimilhança \hat{p}_n

Tirando o log da função, temos:

$$g(p) = \log(p^7(1 - p)^3) = \log(p^7) + \log((1 - p)^3) = 7\log(p) + 3\log(1 - p)$$

Tirando a derivada e igualando a zero para encontrar o ponto de invariância:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(p)}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p}(7\log(p) + 3\log(1 - p)) \\ &= 7\frac{1}{p} + 3\left(\frac{-1}{1 - p}\right) \\ &= \frac{7}{p} - \frac{3}{1 - p} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{p} = \frac{3}{1 - p} \\ &\Leftrightarrow 10p = 7 \\ &\Leftrightarrow p = 0.7 \end{aligned}$$

Pela aula, sabemos que o p encontrado acima é ponto de máximo pois $\frac{\partial g(p)^2}{\partial^2 p} < 0$. Com isso, $\hat{p}_N = 0.7$.