第一次理论作业参考答案

2.12 用一阶谓词逻辑表示下面的句子（自己定义合适的谓词）

(3) 不存在一个最大的素数

- 设$P(x)$表示x为素数，$G(x,y)$表示x大于等于y，则表示为:
- $\neg\exists x(P(x)\wedge\forall y(P(y)\rightarrow G(x,y)))$

(4) 任意一个实数都有比它大的整数

- 设$R(x)$表示x为实数，$Z(x)$表示x为整数，$G(x,y)$表示x大于y，则表示为：
- $\forall x(R(x)\rightarrow\exists y(Z(y)\wedge G(y,x)))$

(5) 并不是所有的学生都选修了历史和生物

- 设$S(x)$表示x为学生，$H(x)$表示x选修了历史，$B(x)$表示x选修了生物，则表示为：
- $\neg\forall x(S(x)\rightarrow(H(x)\wedge B(x)))$

(7) 只有一个学生历史和生物考试都不及格

- 设$S(x)$表示x为学生，$H(x)$表示x历史考试及格，$B(x)$表示x生物考试及格，则表示为：
- $\exists x(S(x)\wedge\neg H(x)\wedge\neg B(x)\wedge\forall y(S(y)\wedge\neg H(y)\wedge\neg B(y)\rightarrow x=y))$

(10) 星期六，所有的学生或者去参加误会了，或者工作去了，但是没有两者都去的

- 设$S(x)$表示x为学生，设$D(x)$表示x星期六参加舞会，$W(x)$表示x星期六工作去了，则表示为：
- $\forall x(S(x)\rightarrow((D(x)\wedge\neg W(x))\vee(\neg D(x)\wedge W(x))))$

2.24 把下面的表达式转换为字句形式

(1) $((\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x))\rightarrow(\exists x)[P(x)\vee Q(x)]$

答案1：

- 消去蕴含符号：$\neg((\backslash\mathrm{exist}x)P(x)\vee(\backslash\mathrm{exist}x)Q(x))\vee(\backslash\mathrm{exist}x)[P(x)\vee Q(x)]$
- 否定内移：$((\forall x)\neg P(x)\wedge(\forall x)\neg Q(x))\vee(\backslash\mathrm{exist}x)[P(x)\vee Q(x)]$
- 变量标准化：$((\forall x)\neg P(x)\wedge(\forall y)\neg Q(y))\vee(\backslash\mathrm{exist}z)[P(z)\vee Q(z)]$
- 消去存在量词：$((\forall x)\neg P(x)\wedge(\forall y)\neg Q(y))\vee P(a)\vee Q(a)$
- 求前束范式：$\forall x\forall y((\neg P(x)\wedge\neg Q(y))\vee P(a)\vee Q(a))$
- 把母式化为合取范式：$\forall x\forall y((\neg P(x)\vee P(a)\vee Q(a))\wedge(\neg Q(x)\vee P(a)\vee Q(a)))$
- 子句化：
  - $\neg P(x)\vee P(a)\vee Q(a)$
  - $\neg Q(x)\vee P(a)\vee Q(a)$

答案2：

- 消除蕴含符号：$\neg((\exists x)P(x) \bigvee (\exists x)Q(x)) \bigvee (\exists x)[P(x) \bigvee Q(x)]$
- ¬内移：$((\forall x)\neg P(x) \bigwedge (\forall x)\neg Q(x)) \bigvee (\exists x)[P(x) \bigvee Q(x)]$
- 变量标准化：$((\forall x)\neg P(x) \bigwedge (\forall y)\neg Q(y)) \bigvee (\exists z)[P(z) \bigvee Q(z)]$
- 把量词集中在公式左边：$\forall x \forall y \exists z(\neg P(x) \bigwedge \neg Q(y)) \bigvee (P(z) \bigvee Q(z))$
- 消去存在量词：$\forall x \forall y(\neg P(x) \bigwedge \neg Q(y)) \bigvee (P(f(x,y)) \bigvee Q(f(x,y)))$
- 把母式化为合取范式：$\forall x \forall y[[\neg P(x) \bigvee P(f(x,y)) \bigvee Q(f(x,y))] \bigwedge [\neg Q(y) \bigvee P(f(x,y)) \bigvee Q(f(x,y))]]$
- 隐略去前束式：$[[\neg P(x) \bigvee P(f(x,y)) \bigvee Q(f(x,y))] \bigwedge [\neg Q(y) \bigvee P(f(x,y)) \bigvee Q(f(x,y))]]$
- 把母式用子句集表示：$\{\neg P(x) \bigvee P(f(x,y)) \bigvee Q(f(x,y)), \neg Q(y) \bigvee P(f(x,y)) \bigvee Q(f(x,y))\}$
- 变量分离标准化：$\{\neg P(x_1) \bigvee P(f(x_1,y_1)) \bigvee Q(f(x_1,y_1)), \neg Q(y_2) \bigvee P(f(x_2,y_2)) \bigvee Q(f(x_2,y_2))\}$

(2) $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)[(\forall z)Q(x,z) \vee (\forall z)R(x,y,z)]$

答案1：

- 消去蕴含符号：$\neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)[(\forall z)Q(x,z) \vee (\forall z)R(x,y,z)]$
- 否定内移：$(\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x)[(\forall z)Q(x,z) \vee (\forall z)R(x,y,z)]$
- 变量标准化：$(\exists x)\neg P(x) \vee (\exists u)[(\forall z)Q(u,z) \vee (\forall w)R(u,y,w)]$
- 消去存在量词：$\neg P(a) \vee (\forall z)Q(b,z) \vee (\forall w)R(b,y,w)$
- 求前束范式：$\forall z \forall w(\neg P(a) \vee Q(b,z) \vee R(b,y,w))$
- 把母式化为合取范式：同上
- 子句化：
  - $\neg P(a) \vee Q(b,z) \vee R(b,y,w)$

答案2：

- 消除蕴含符号：$\neg(\forall x)P(x) \bigvee (\exists x)[(\forall z)Q(x,z) \bigvee (\forall z)R(x,y,z)]$
- ¬内移：$(\exists x)\neg P(x) \bigvee (\exists x)[(\forall z)Q(x,z) \bigvee (\forall z)R(x,y,z)]$
- 变量标准化：$((\exists x)\neg P(x)) \bigvee (\exists u)[(\forall z)Q(u,z) \bigvee (\forall v)R(u,y,v)]$
- 把量词集中在公式左边：$\exists x \exists u \forall z \forall v(\neg P(x) \bigvee Q(u,z) \bigvee R(u,y,v))$
- 若x、z受自由变量y影响：
  - 消去存在量词：$(\neg P(f(y)) \bigvee Q(g(y),z) \bigvee R(g(y),y,v))$
  - 把母式用子句集表示：$\{\neg P(f(y) \bigvee Q(g(y),z) \bigvee R(g(y),y,v)\}$
- 若x、z不受自由变量y影响：
  - 消去存在量词：$(\neg P(a) \bigvee Q(b,z) \bigvee R(b,y,v))$
  - 把母式用子句集表示：$\{\neg P(a) \bigvee Q(b,z) \bigvee R(b,y,v)\}$

(3) $(\forall x)[P(x) \rightarrow (\forall y)[(\forall z)Q(x,y) \rightarrow \neg(\forall z)R(x,y,z)]]$

- 消除蕴含符号：$(\forall x)[\neg P(x) \bigvee (\forall y)[\neg(\forall z)Q(x,y) \bigvee \neg(\forall z)R(x,y,z)]]$
- ¬内移：$(\forall x)[\neg P(x) \bigvee (\forall y)[(\exists z)\neg Q(x,y) \bigvee (\exists z)\neg R(x,y,z)]]$
- 变量标准化：$(\forall x)[\neg P(x) \bigvee (\forall y)[(\exists z)\neg Q(x,y) \bigvee (\exists u)\neg R(x,y,u)]]$
- 把量词集中在公式左边：$\forall x \forall y \exists z \exists u[\neg P(x) \bigvee [\neg Q(x,y) \bigvee \neg R(x,y,u)]]$
- 消去存在量词：$\forall x \forall y[\neg P(x) \bigvee [\neg Q(x,y) \bigvee \neg R(x,y,f(x,y))]]$

- 把母式化为合取范式：$\forall x \forall y[\neg P(x) \bigvee \neg Q(x,y) \bigvee \neg R(x,y,f(x,y))]$
- 隐略去前束式：$[\neg P(x) \bigvee \neg Q(x,y) \bigvee \neg R(x,y,f(x,y))]$
- 把母式用子句集表示：$\{\neg P(x) \bigvee \neg Q(x,y) \bigvee \neg R(x,y,f(x,y))\}$

2.27 对下述公式集合执行合一算法，判断是否可合一，如果可以合一，请给出最一般的合一。

(1) $S=\{P(a,x,f(g(y))),P(z,h(z,u),f(u))\}$

可合一，其最一般合一如下：

- 置$k=0,W_0=S,\delta_0=\varepsilon$
- W_0未合一，差异集合为$D_0=\{a,z\}$
- D_0中存在变量$v_0=z$和常量$t_0=a$
- 令$\delta_1=\delta_0\circ\{a/z\}=\{a,z\}$，有
  $W_1=\{P(a,x,f(g(y))),P(z,h(z,u),f(u))\}\{a,z\}=\{P(a,x,f(g(y))),P(a,h(a,u),f(u))\}$
- W_1未合一，差异集合为$D_1=\{x,h(a,u)\}$
- D_1中存在元素$v_1=x,t_1=h(a,u)$，并且变量x不出现在$h(a,u)$
- 令$\delta_2=\delta_1\circ\{h(a,u)/x\}=\{a/z,h(a,u)/x\}$，有
  $W_2=\{P(a,x,f(g(y))),P(a,f(a),f(u))\}\{f(a)/x\}=\{P(a,h(a,u),f(g(y))),P(a,h(a,u),f(u))\}$
- W_2未合一，差异集合为$D_2=\{g(y),u\}$
- D_2中的变量$v_2=u$不出现在$t_2=g(y)$中
- 令$\delta_3=\delta_2\circ\{g(y)/u\}=\{a/z,h(a,g(y))/x,g(y)/u\}$，有
  $W_3=\{P(a,f(a),f(g(y))),P(a,h(a,u),f(u))\}\{g(y)/u\}=\{P(a,h(a,g(y)),f(g(y)))\}$
- W_3只含一个元素，因此$\delta_3=\{a/z,h(a,g(y))/x,g(y)/u\}$是$W$的最一般合一

(2) $S=\{P(f(a),g(s)),P(y,y)\}$

不可合一，理由如下：

- 置$k=0,W_0=S,\delta_0=\varepsilon$
- W_0未合一，差异集合为$D_0=\{f(a),y\}$
- D_0中存在变量$v_0=y$和常量$t_0=f(a)$
- 令$\delta_1=\delta_0\circ\{f(a)/y\}$，有
  $W_1=\{P(f(a),g(s)),P(y,y)\}\{f(a),y\}=\{P(f(a),g(s)),P(f(a),f(a))\}$
- W_1未合一，差异集合为$D_2=\{g(s),f(a)\}$
- D_2中两个元素均为常量，没有变量，因此可以得到S是不可合一的

(3) $S=\{P(a,x,h(g(z))),P(z,h(y),h(y))\}$

可合一，其最一般合一如下：

- 置$k=0,W_0=S,\delta_0=\varepsilon$
- W_0未合一，差异集合为$D_0=\{a,z\}$
- D_0中存在变量$v_0=z$和常量$t_0=a$
- 令$\delta_1=\delta_0\circ\{a/z\}=\{a,z\}$，有
  $W_1=\{P(a,x,h(g(z))),P(z,h(y),h(y))\}\{a,z\}=\{P(a,x,h(g(a))),P(a,h(y),h(y))\}$
- W_1未合一，差异集合为$D_1=\{x,h(y)\}$
- D_1中存在元素$v_1=x,t_1=h(y)$，并且变量x不出现在$h(y)$
- 令$\delta_2=\delta_1\circ\{h(y)/x\}=\{a/z,h(y)/x\}$，有
  $W_2=\{P(a,x,h(g(a))),P(a,h(y),h(y))\}\{h(y)/x\}=\{P(a,h(y),h(g(a))),P(a,h(y),h(y))\}$
- W_2未合一，差异集合为$D_2=\{g(a),y\}$
- D_2中的变量$v_2=y$不出现在$t_2=g(a)$中
- 令$\delta_3=\delta_2\circ\{g(a)/y\}=\{a/z,h(g(a))/x,g(a)/y\}$，有
  $W_3=\{P(a,h(y),h(g(a))),P(a,h(y),h(y))\}\{g(a)/y\}=\{P(a,h(g(a)),h(g(a))),P(a,h(g(a)),h(g(a)))\}$
- W_3只含一个元素，因此$\delta_3=\{a/z,h(g(a))/x,g(a)/y\}$是$W$的最一般合一

2.33 用归结法证明$A_1\wedge A_2\wedge A_3\rightarrow B$

答案1：

其中，$A_1 = \forall x((P(x) \bigwedge \neg Q(x)) \rightarrow \exists y(W(x,y) \bigwedge V(y)))$

$A_2 = \exists x\{P(x) \bigwedge U(x) \bigwedge \forall y(W(x,y) \rightarrow U(y))\}$

$A_3 = \neg\exists x(Q(x) \bigwedge U(x))$

$B = \exists x(V(x) \bigwedge U(x))$

解：证明：

- 将A_1转换为子句集合：
  - 消除蕴含符号：$\forall x(\neg(P(x) \bigwedge \neg Q(x)) \bigvee \exists y(W(x,y) \bigwedge V(y)))$
  - $\neg$内移：$\forall x((\neg P(x) \bigvee Q(x)) \bigvee \exists y(W(x,y) \bigwedge V(y)))$
  - 把量词集中在公式左边：$\forall x\exists y((\neg P(x) \bigvee Q(x)) \bigvee (W(x,y) \bigwedge V(y))$
  - 消去存在量词：$\forall x((\neg P(x) \bigvee Q(x)) \bigvee (W(x,f(x)) \bigwedge V(f(x))))$
  - 把母式化为合取范式：$\forall x((\neg P(x) \bigvee Q(x) \bigvee W(x,f(x))) \bigwedge (\neg P(x) \bigvee Q(x) \bigvee V(f(x))))$
  - 隐略去前束式：$((\neg P(x) \bigvee Q(x) \bigvee W(x,f(x))) \bigwedge (\neg P(x) \bigvee Q(x) \bigvee V(f(x))))$
  - 把母式用子句表示：$\{\neg P(x) \bigvee Q(x) \bigvee W(x,f(x)), \neg P(x) \bigvee Q(x) \bigvee V(f(x))\}$
  - 变量分离标准化：$\{\neg P(x_1) \bigvee Q(x_1) \bigvee W(x_1,f(x_1)), \neg P(x_2) \bigvee Q(x_2) \bigvee V(f(x_2))\}$
- 把A_2转换为子句集合：
  - 消除蕴含符号：$\exists x[P(x) \bigwedge U(x) \bigwedge \forall y(\neg W(x,y) \bigvee U(y))]$
  - 把量词集中在公式左边：$\exists x\forall y[P(x) \bigwedge U(x) \bigwedge (\neg W(x,y) \bigvee U(y))]$
  - 消去存在量词：$\forall y[P(a) \bigwedge U(a) \bigwedge (\neg W(a,y) \bigvee U(y))]$
  - 隐略去前束式：$[P(a) \bigwedge U(a) \bigwedge (\neg W(a,y) \bigvee U(y))]$
  - 把母式用子句集表示：$\{P(a), U(a), \neg W(a,y) \bigvee U(y)\}$
- 把A_3转化为子句集合：
  - $\neg$内移：$\forall x(\neg Q(x) \bigvee \neg U(x))$
  - 隐略去前束式：$(\neg Q(x) \bigvee \neg U(x))$
  - 把母式用子句集表示：$\{\neg Q(x) \bigvee \neg U(x)\}$
- 把$\neg B$化为子句集合：
  - $\neg$内移：$\forall x(\neg V(x) \bigvee \neg U(x))$
  - 隐略去前束式：$(\neg V(x) \bigvee \neg U(x))$
  - 把母式用子句集表示：$\{\neg V(x) \bigvee \neg U(x)\}$
- 则有$A_1 \bigwedge A_2 \bigwedge A_3 \bigwedge \neg B$的子句集合为：

$$S = \{\neg P(x_1) \bigvee Q(x_1) \bigvee W(x_1,f(x_1)), \neg P(x_2) \bigvee Q(x_2) \bigvee V(x_2), P(a), U(a), \neg W(a,y) \bigvee U(y), \neg Q(x) \bigvee \neg U(x), \neg V(x) \bigvee \neg U(x$$

- 归结证明S是不可满足的：
  - (1) $\neg P(x_1) \bigvee Q(x_1) \bigvee W(x_1,f(x_1))$
  - (2) $\neg P(x_2) \bigvee Q(x_2) \bigvee V(f(x_2))$
  - (3) $P(a)$
  - (4) $U(a)$
  - (5) $\neg W(a,y) \bigvee U(y)$
  - (6) $\neg Q(x) \bigvee \neg U(x)$
  - (7) $\neg V(x) \bigvee \neg U(x)$
  - (8) $\neg P(a) \bigvee Q(a) \bigvee U(f(a))$ 由（1）、（5）归结得到
  - (9) $\neg P(a) \bigvee Q(a) \bigvee \neg U(f(a))$ 由（2）、（7）归结得到
  - (10) $\neg P(a) \bigvee Q(a)$ 由（8）、（9）归结得到
  - (11) $Q(a)$ 由（3）、（10）归结得到
  - (12) $\neg Q(a)$ 由（4）、（6）归结得到
  - (13) $\square$ 由（11）、（12）归结得到

综上，$A_1 \bigwedge A_2 \bigwedge A_3 \rightarrow B$得证

答案2：

子句化 A_1：

- (1) $(\neg P(x), Q(x), W(x,f(x)))$

- (2) $(\neg P(x), Q(x), V(f(x)))$

子句化 A_2：

- (3) $P(a)$
- (4) $U(a)$
- (5) $(\neg W(a,y), U(y))$

子句化 A_3：

- (6) $(\neg Q(x), \neg U(x))$

子句化 $\neg B$：

- (7) $(\neg V(x), \neg U(x))$

归结证明：

- (8) R[1c, 5a]{$x=a, y=f(a)$ } $(\neg P(a), Q(a), U(f(a)))$
- (9) R[7b, 8c]{$x=f(a)$} $(\neg P(a), Q(a), \neg V(f(a)))$
- (10) R[2c, 9c]{$x=a$} $(\neg P(a), Q(a))$
- (11) R[3, 10a]{} $Q(a)$
- (12) R[4, 6b]{$x=a$} $\neg Q(a)$
- (13) R[11, 12]{} []

2.39 任何通过了历史考试并中了彩票的人都是快乐的。 任何肯学习或幸运的人都可以通过所有考试， 小张不学习，但很幸运，任何人只要是幸运的，就能中彩。求证：小张是快乐的。

形式化使用谓词：

- $Person(x)$：x 是人；
- $Exam(x)$：x 是考试；
- $Happy(x)$：x 是快乐的；
- $Pass(x,y)$：x 通过 y ；
- $Win(x)$：x 中了彩票；
- $Study(x)$：x 肯学习；
- $Lucky(x)$：x 是幸运的。

任何通过历史考试并中了彩票的人都是快乐的

$\forall x(Person(x) \wedge Pass(x, history) \wedge Win(x) \rightarrow Happy(x)).$

子句化：

- (1) $(\neg Person(x),\ \neg Pass(x, history),\ \neg Win(x),\ Happy(x))$

任何肯学习或幸运的人都可以通过所有考试

$\forall x(Person(x) \land (Study(x) \lor Lucky(x)) \to \forall y(Exam(y) \to Pass(x,y)))$.

子句化：

- (2) $(\neg Person(x),\ \neg Study(x),\ \neg Exam(y),\ Pass(x,y))$
- (3) $(\neg Person(x),\ \neg Lucky(x),\ \neg Exam(y),\ Pass(x,y))$

小张不学习，但很幸运

$\neg Study(zhang) \land Lucky(zhang)$.

子句化：

- (4) $\neg Study(zhang)$
- (5) $Lucky(zhang)$

任何人只要是幸运的，就能中彩

$\forall x(Person(x) \land Lucky(x) \to Win(x))$.

子句化：

- (6) $(\neg Person(x),\ \neg Lucky(x),\ Win(x))$

隐含条件：**小张是人**

- (7) *Person(zhang)*

隐含条件：**历史是考试**

- (8) $Exam(history)$

结论的否定：否定**小张是快乐的**

- (9) $\neg Happy(zhang)$

归结证明：

- (10) R[3a, 7]{$x = zhang$} $(\neg Lucky(zhang),\ \neg Exam(y),\ Pass(zhang,y))$
- (11) R[5, 10a]{} $(\neg Exam(y),\ Pass(zhang,y))$
- (12) R[8, 11a]{$y = history$} $Pass(zhang,history)$
- (13) R[6a, 7]{$x = zhang$} $(\neg Lucky(zhang),\ Win(zhang))$
- (14) R[5, 13a]{} $Win(zhang)$
- (15) R[1a, 7]{$x = zhang$} $(\neg Pass(zhang,history),\ \neg Win(zhang),\ Happy(zhang))$
- (16) R[12, 15a]{} $(\neg Win(zhang),\ Happy(zhang))$

- (17) R[14, 16a]{} $Happy(zhang)$
- (18) R[9, 17]{} []