中山大学本科生期末考试

考试科目：《微分方程及数值解》（A卷）

学年学期：2024 - 2025 学年第 1 学期

开课单位：计算机学院

考试方式：闭卷

考试时长：120 分钟

任课老师：江颖

一、计算题（15 分）

求解波动方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2t\cos(x) \\ u\big|_{t=0} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 2\cos(x) \end{cases}$$

二、计算题（15 分）

用分离变量法求解热传导方程的初边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (t > 0, \quad 0 < x < 1) \\ u(x,0) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \le \dfrac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad (t > 0) \end{cases}$$

三、计算题（共 10 分）

试求一函数 u，使其在半径为 1 的圆的内部是调和的，而且在圆周 C 上取下列的值：

$$u|_c = \sin(\varphi + \pi/4)$$

四、证明题（共 10 分）

设 $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(r)$（其中 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$）是 n 维调和函数（即满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$），试证明

$$f(r) = c_1 + \frac{c_2}{r^{n-2}} \quad (n \neq 2),$$

$$f(r) = c_1 + c_2 \ln \frac{1}{r} \quad (n = 2),$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。

五、计算题（共 10 分）

用 Euler 法求解 $u' = 3tu \ (0 <= t <= 1)$，$u(0) = 1$，$h = 0.1$ 的前三步的数值解 u_1，u_2，u_3。

六、计算题（共 10 分）

判断线性多步法 $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + f_{n+1})$ 是否稳定。

七、计算题（共 15 分）

Ritz-Galerkin 法，取 n=2。

八、计算题（共 10 分）

最小值原理

附注：以上题目为个人考试回忆版本，题型与实际考试基本一致，但仍存在细节差异（如公式、数据等），特此说明。