

并行数值方法大作业---解线性方程组（给定算例）

一、 作业概述

本次作业目标为：读取已提供的 `Matrix.dat` 文件，并求解对应的线性方程组 $Ax = b$ 。

该任务作为热传导问题的基础版本，不要求学生构建矩阵，而是直接使用已生成的稀疏矩阵数据进行求解。该作业将帮助学生理解稀疏矩阵存储格式、线性系统的求解过程，为后续更复杂的矩阵构建或优化任务打下基础。

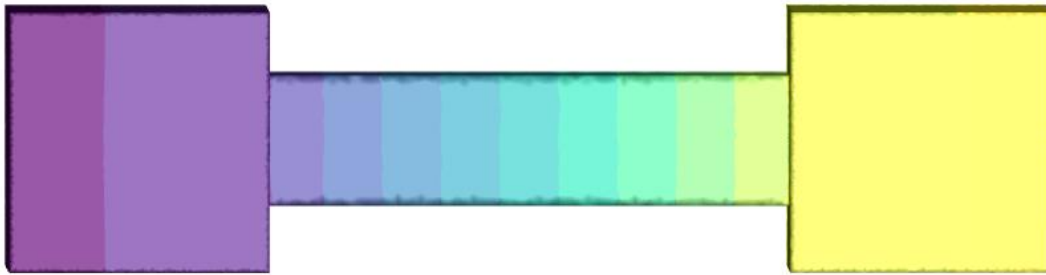
二、 背景介绍

热扩散问题形式为：

$$-\nabla \cdot (k \nabla T) = q$$

通过有限差分法或有限体积法进行离散后，将得到线性方程组 $Ax = b$ ，其中 A 为稀疏矩阵， x 为温度变量， b 为源项。

算例补充说明：



算例来自一个纯热扩散问题。右端是加热端，有 1MW 的热流密度；左端是等温端，为恒温 300K。热流通量由右端传递到左端。

三、 作业要求

请完成以下任务：

1. 读取 `Matrix.dat` 文件，其中包含：

- 稀疏矩阵 A 的 CSR 格式。
- 右端项向量 b （全部为 0）。

2. 将数据重构为线性方程组 $Ax = b$

3. 使用数值方法求解 x 。

4. 将解向量 x 输出为 `Result.dat`，每行一个温度值，共 n 行。

说明：请确保输出的解向量 x 的长度与网格文件（如 `.vtk` 或 `.ugrid`）中对应的节点数一致，避免因节点数与变量数量不匹配导致可视化异常（如显示全部红色或报错等）。若自行构造网格文件，请先检查节点总数 n 并与 `Result.dat` 中行数保持一致。

5. 为判断求解结果是否正确，请计算残差范数 $\|Ax - b\|$ ，若该值小于或等于 $1e-6$ ，则认为本次求解数值上正确。

四、 拓展建议

本任务为基础版本，建议同学首先专注于正确求解与矩阵结构理解。在此基础上，以下内容作为未来扩展任务的准备方向，感兴趣的同学可提前尝试：

- 将当前问题与二维热传导背景联系起来，尝试设定如下边界条件：左边恒温 300K，右边恒温 1000K，自行构建热传导模型并生成 A 与 b。
- 支持绘制稀疏结构图以辅助理解矩阵结构。
- 比较不同求解器性能。
- 可将结果进行可视化展示（如温度分布图）。

本项目已提供 `grid.lb8.ugrid` 网格文件（文件说明详见附录 B），可配合 `Result.dat` 使用可视化工具（如 Tecplot、ParaView、Gmsh 等）展示温度场。请确保格式兼容，并在报告中说明使用流程。

图示参考：请见“第二章 背景介绍”中的图。

五、 建议工具或语言

本任务要求学生自行实现线性方程组的并行求解器，因此：

- 使用 MPI、CUDA、OpenMP、Pthreads 等并行框架实现矩阵运算与求解逻辑
- 不得使用任何现有的求解器函数或库（如 SciPy、Eigen、MKL、MATLAB 的内建求解接口等）进行直接求解。

六、 提交内容

提交文件包括以下内容：

1. `Result.dat`：解向量输出，n 行每行一个实数。
2. 源代码：含必要注释。
3. 说明文档（可简要描述读取逻辑、求解算法及使用工具）。
4. 可选附加材料：如可视化结果图。

注意：文件名需保持不变（`Matrix.dat`，`Result.dat`）

七、 评分建议

项目	正确性	实现质量	说明清晰度
占比	50%	30%	20%

八、 附录部分

附录 A: `Matrix.dat` 文件格式与输出规范

1. 线性方程式为 $Ax = b$ ， x 为求解目标。
2. 稀疏矩阵 A 使用 CSR（行压缩存储）格式，包括：
 - nA：所有非零元素，按行优先顺序排列；
 - JA：对应非零元素所在列；
 - IA：每一行第一个非零元素在 nA 中的位置索引（IA 长度为 n+1）。

示例 (3×3 矩阵):

```
A = [1 0 5
      0 4 7
      0 0 2]
nA = 1 5 4 7 2
JA = 0 2 1 2 2
IA = 0 2 4 5
```

Matrix.dat 文件结构:

```
第一行: n (矩阵行数), m (非零元素数)
m行: nA 数值
m行: JA 列索引
n+1行: IA 行指针
n行: 向量 b
```

注意:

- Matrix.dat、Result.dat、grid.lb8.ugrid 文件名不可更改;
- 输出 Result.dat 行数需等于 n;
- 确保输出没有 nan、inf 或非数字。

附录 B: grid.lb8.ugrid 文件格式与说明

1. .ugrid 文件是 Tecplot 专用的网格文件格式, 建议使用 Tecplot 360 进行加载与结果可视化。
2. 默认情况下, ParaView 无法直接打开 .ugrid 文件, 如需在 ParaView 中使用, 请确保安装对应插件或将网格格式转换为兼容格式。
3. 对于有能力进行拓展的同学, 也可以使用 Gmsh 自行生成网格文件, 并基于该网格自行组装稀疏矩阵进行求解。(若采用自定义网格, 请在报告中说明网格生成方式及可视化流程)。

注意: 自行构造网格时请注意检查是否存在**重复节点或空单元**, 并确认 b 向量和边界条件正确施加(如左端恒温 300K、右端恒温 1000K), 以确保模拟合理性。

附录 C: 问题所对应的微分方程模型说明

为帮助同学更清晰理解给定算例的背景, 并支持有能力者从头构建线性方程组, 现补充该问题的数学模型如下:

本问题对应的偏微分方程为二维稳态热传导问题, 即二维 Laplace 方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

其中， $u(x,y)$ 表示某区域内的温度场， Ω 是二维区域或三维区域。给定算例采用了哑铃状结构但是一个三维结构。若学生自行构造区域，亦可采用矩形、圆形或其他形状。

附录 D：VTK 可视化文件说明与注意事项

1. grid_converted.vtk 为将 Tecplot 的 .ugrid 文件转换后的三维网格结构，包含网格点坐标、单元类型与变量字段。
2. 若导入可视化工具后温度场数量异常，可能原因为中间变量写入，或存在重复网格点、空单元等，请优先检查数据是否仅写入 Result.dat 中的解向量。
3. 建议在可视化前进行 x 数据维度检查，确保长度与网格节点一致，必要时手动裁剪无效项。
4. 可使用 Paraview 的 “Cell Data to Point Data” 工具进行插值并改善展示。

示例：将温度向量添加为 VTK 中的 temperature 属性

```
import meshio
import numpy as np

# 读取原始网格（已包含拓扑结构但没有温度属性）
mesh = meshio.read("grid.lb8.ugrid")

# 读取温度结果 (Result.dat)，确保其长度与 mesh.points 一致
temperature = np.loadtxt("Result.dat")

# 添加温度属性为点数据
mesh.point_data = {"temperature": temperature}

# 写出新的 VTK 文件用于可视化
meshio.write("grid_with_temperature.vtk", mesh, file_format="vtk")
```

注意：请确保 Result.dat 的行数与 .ugrid 网格中的节点数一致，否则加载将异常或显示为全红。