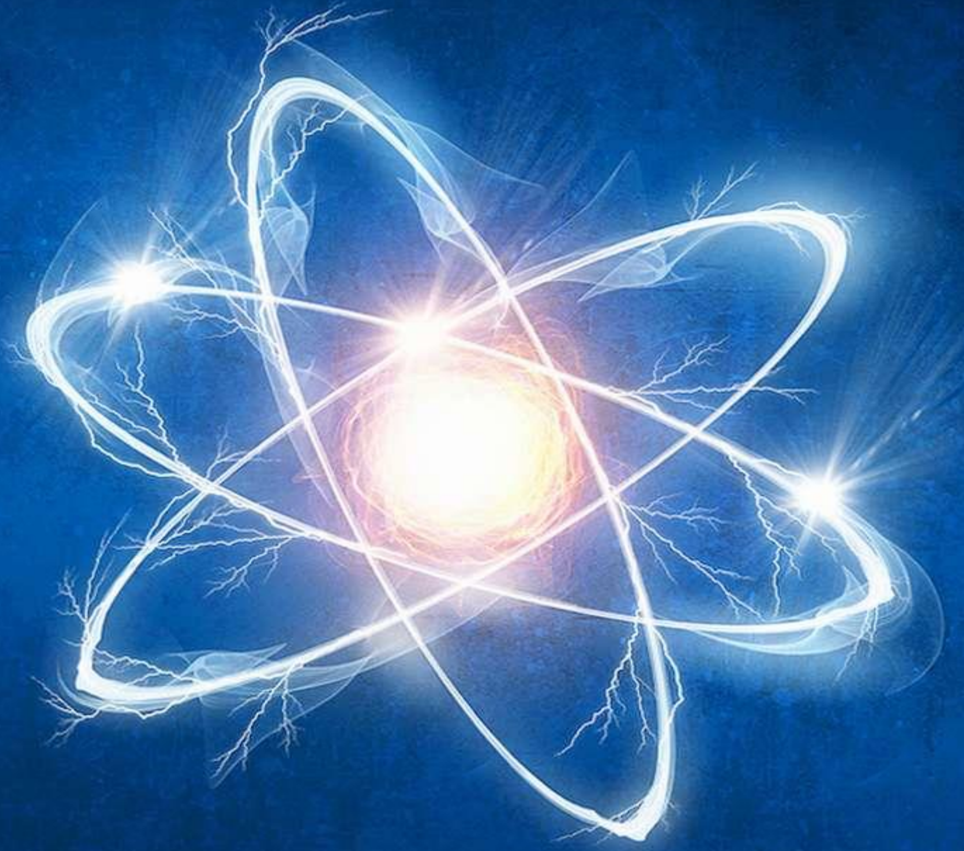
بسم الله الرحمن الرحیم



فصل دوم فیزیک عمومی ۲:

میدان الکتریکی

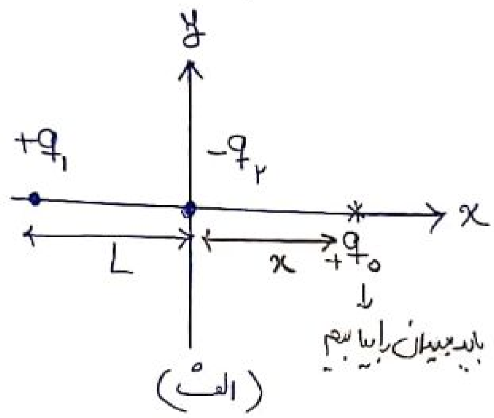
ارائه دهنده: فاطمه مومن

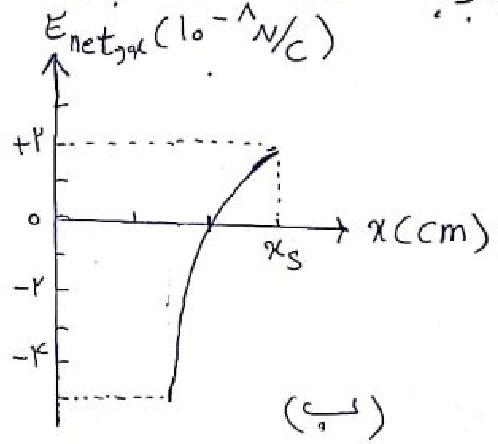
تمارین فصل ۲ فیزیک ۲ : میدان های الکتریکی

۱) شکل زیر (الف)، ۲ ذره‌ی باردار را نشان می‌دهد که در مکان هایی روی محور x به فاصله‌ی L قرار دارند. نسبت $\frac{q_1}{q_2}$ برای بارهای ذرات برابر با ۴ است. شکل زیر (ب)، مولفه‌ی x میدان الکتریکی $E_{net,x}$ آن‌ها را در امتداد محور x برای سمت راست ذره‌ی ۲ نشان می‌دهد. مقیاس محور x با $x_s = 30\ cm$ مشخص شده است.

الف) به ازای چه مقدار $x>0$ مولفه‌ی $E_{net,x}$ بیشینه است؟

ب) اگر بار ذره‌ی ۲ به جای $-q_2 = -3e$ باشد، مقدار آن بیشینه چقدر است؟





حل: الف) میدان الکتریکی E: نیروی الکتروستاتیک $\vec{F}$ بر بار آزمون کوچک $+q_0$ که در نقطه‌ای از فضا است، وارد می‌شود.

$$F = \frac{kqq_0}{r^2} \longrightarrow E = \frac{F}{q_0} = \frac{kq}{r^2}$$

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{kq_1}{(L+x)^2} - \frac{kq_2}{x^2} \overset{q_1=4q_2}{=\!=} \frac{4kq_2}{(L+x)^2} - \frac{kq_2}{x^2} = kq_2\left(\frac{4}{(L+x)^2} - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{dE}{dx} = kq_2\left(\frac{-8}{(L+x)^3} + \frac{2}{x^3}\right) = kq_2\left\{\frac{-8x^3 + 2(L+x)^3}{x^3(L+x)^3}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow -8x^3 + 2(L+x)^3 = 0 \Rightarrow 8x^3 = 2(L+x)^3 \rightarrow 2x = (2)^{1/3}(L+x) \rightarrow$$

$$2^{2/3}x = L + x \Rightarrow x(2^{2/3}-1) = L \longrightarrow x = \frac{L}{2^{2/3}-1} \approx \boxed{\frac{L}{0.59}}$$

$$x = 20\ cm \longrightarrow E = 0$$

حال باید به دنبال L بگردیم: طبق شکل ب:

$$\rightarrow E = kq_2\left(\frac{4}{(L+20)^2} - \frac{1}{20^2}\right) = 0 \rightarrow \frac{4}{(L+20)^2} - \frac{1}{20^2} = 0 \rightarrow \frac{4}{(L+20)^2} = \frac{1}{20^2} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{L+20} = \frac{1}{20} \rightarrow 40 = L + 20 \rightarrow \boxed{L = 20\ cm} \Rightarrow x = \frac{L}{0.59} = \frac{20}{0.59} \approx \boxed{34\ cm}$$

← ادامه‌ی سؤال ① :

$-q_2 = -3e \rightarrow E_{max,q_2} = ?$

$$\left.\begin{array}{l} L = 20\ cm = 0.2 m \\ x = 34 cm = 0.34 m \\ -q_2 = -3e \\ E = kq_2\left(\frac{4}{(L+x)^2} - \frac{1}{x^2}\right) \\ k \approx 9\times10^9\ \frac{Nm^2}{C} \end{array}\right\} \Rightarrow E = \left(9\times10^9\ \frac{Nm^2}{C}\right)\left(3\times1.6\times10^{-19}\ C\right)\left(\frac{4}{(0.54m)^2} - \frac{1}{(0.34)^2}\right)$$

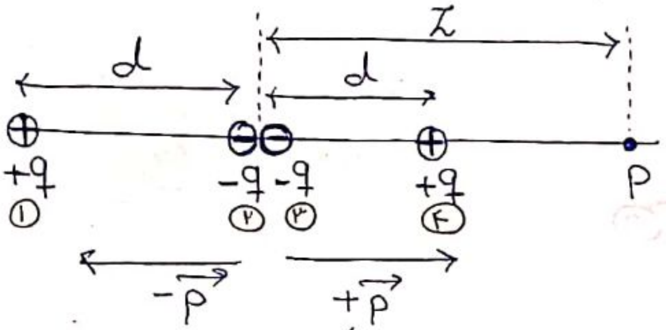
$$\sim E \approx \boxed{2.2\times10^{-8}\ N/C}$$

---

② چهارقطبی الکتریکی: شکل زیر یک چهارقطبی الکتریکی را نشان می‌دهد که شامل ۲ دوقطبی است که بردارهای گشتاورهای دوقطبی آن‌ها برابر ولی جهت آن‌ها مخالف یکدیگر است. نشان دهید که مقدار E روی محور چهارقطبی برای نقطه‌ی P به فاصله‌ی z از مرکز آن (با فرض $z \gg d$) با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$E = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 z^4}$$

که در آن $Q = 2qd^2$: گشتاور چهارقطبی توزیع بار نامیده می‌شود.



پاسخ: ابتدا میدان ناشی از تک‌تک بارها را در نقطه‌ی P بدست می‌آوریم و سپس برآیند آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

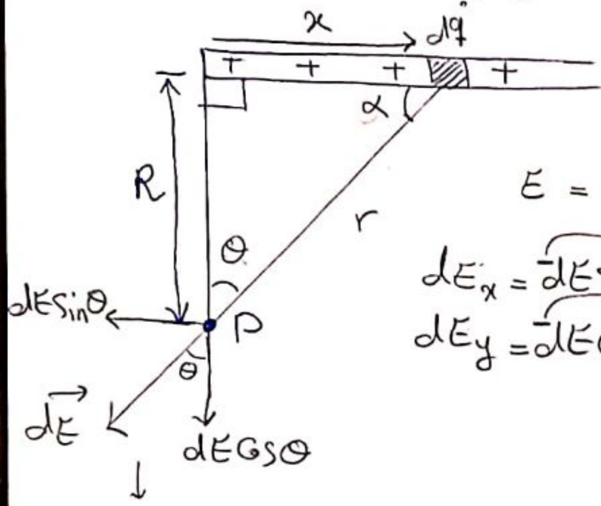
$$E_1 = \frac{+kq}{(z+d)^2} \qquad E_2 = \frac{-kq}{z^2} = E_3 \qquad E_4 = \frac{+kq}{(z-d)^2}$$

$$E_T = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = kq\left\{\frac{1}{(z+d)^2} - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{(z-d)^2}\right\} =$$

$$kq\left\{\frac{z^2(z-d)^2 - 2(z+d)^2(z-d)^2 + z^2(z+d)^2}{z^2(z+d)^2(z-d)^2}\right\} = kq\left\{\frac{6z^2d^2 - 2d^4}{z^2(z^2-d^2)^2}\right\}$$

$$z \gg d \Rightarrow E_T \approx kq\left\{\frac{6z^2d^2}{z^2z^4}\right\} = kq\left(\frac{6d^2}{z^4}\right) = \frac{3(\overbrace{2qd^2}^{Q})}{4\pi\varepsilon_0 z^4} = \boxed{\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 z^4}}$$

(۳) در شکل زیر، یک میله‌ی نارسانای (نیم - نامتناهی) (یعنی فقط از ۱ طرف نامتناهی است) دارای چگالی بار خطی λ است.
نشان دهید که میدان الکتریکی $\vec{E}_p$ در نقطه‌ی P با میله زاویه‌ی 45° می‌سازد و این نتیجه مستقل از فاصله‌ی R است.



پاسخ: ابتدا المان dq را در نظر می‌گیریم که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی P برابر با r است:

$$E = \frac{kq}{r^2} \longrightarrow dE = \frac{k(dq)}{r^2}$$

$$dE_x = -dE\sin\theta$$
$$dE_y = -dE\cos\theta$$

خلاف جهت محورها

جهت میدان به این سمت است چون بار میله $\oplus$ است و با بار آزمون $+q$ در نقطه‌ی P دافعه ایجاد می‌کند.

- توزیع پیوسته‌ی بار: ۱- خطی: چگالی خطی بار: $\lambda = \frac{\text{بار}}{\text{واحد طول}}$

$$\lambda = \frac{dq}{dx} \longrightarrow \boxed{dq = \lambda\, dx}$$

$$r\cos\theta = R \longrightarrow \boxed{r = \frac{R}{\cos\theta}}$$

$$x = r\sin\theta = \frac{R}{\cos\theta}\cdot\sin\theta = \boxed{R\cdot tg\theta} \longrightarrow \boxed{dx = R(1+tg^2\theta)\,d\theta}$$

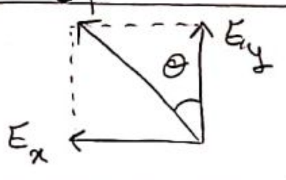
$$dE_x = -dE\sin\theta = -\frac{k\,dq}{r^2}\sin\theta = -\frac{k\cdot\lambda\,dx}{(R^2/\cos^2\theta)}\cdot\sin\theta = -\frac{k\lambda\cdot R(1+tg^2\theta)\sin\theta}{R^2/\cos^2\theta}d\theta$$

$$\longrightarrow dE_x = \frac{-k\lambda}{R}\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}\sin\theta\,d\theta = \frac{-k\lambda}{R}\sin\theta\,d\theta$$

$$\longrightarrow \int dE_x = \int_0^{\pi/2}\frac{-k\lambda}{R}\sin\theta\,d\theta \longrightarrow E_x = \frac{-k\lambda}{R}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{-k\lambda}{R}}$$

$$dE_y = -dE\cos\theta = \frac{-k\lambda}{R}\cos\theta\,d\theta \longrightarrow E_y = \frac{-k\lambda}{R}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta}_{\sin\theta\big|_0^{\pi/2}} = \frac{-k\lambda}{R}$$

$$\longrightarrow E_x = E_y$$



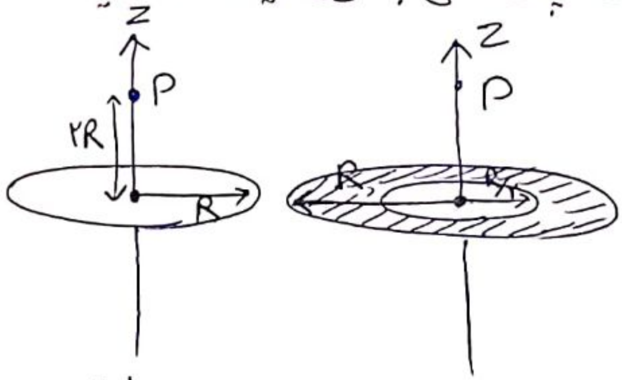
$$E_x = E_y \longrightarrow \boxed{\theta = 45^\circ}$$

راه دوم:

$$dE_x = -dE\sin\theta = \frac{-k\,dq}{r^2}\sin\theta = \int_0^{\infty}\frac{-k\cdot\lambda\,dx}{(R^2+x^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \qquad dq = \lambda\,dx$$

④ فرض کنید قرار است وسیله‌ای را طراحی کنید که در آن یک قرص باردار یکنواخت به شعاع R، میدانی الکتریکی ایجاد کند. بزرگی این میدان در امتداد محور عمود در مرکز، در نقطه‌ی P به فاصله‌ی $2R$ از قرص (شکل الف) بیشترین اهمیت را دارد. برآورد هزینه‌ها شما را بر آن می‌دارد که قرص را با حلقه‌ای با همان شعاع خارجی R ولی با شعاع داخلی $\frac{R}{2}$ (شکل ب) جایگزین کنید. فرض کنید حلقه همان چگالی سطحی بار قرص اولیه را دارد. با این حلقه، بزرگی میدان الکتریکی در نقطه‌ی P با چه نسبتی تغییر می‌کند؟



(الف)   (ب)

پاسخ:

- می‌دانیم: برای یک دیسک (قرص دایره‌ای) به شعاع R و حامل بار q، میدان در فاصله‌ی z از مرکز دیسک:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \qquad \sigma = \text{چگالی سطحی بار}$$

- میدان در فاصله‌ی $2R$ از (مرکز) دیسک به شعاع R:

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{2R}{\sqrt{R^2+(2R)^2}}\right)$$

- میدان در فاصله‌ی $2R$ از مرکز دیسک به شعاع $R/2$:

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{2R}{\sqrt{(R/2)^2+(2R)^2}}\right)$$

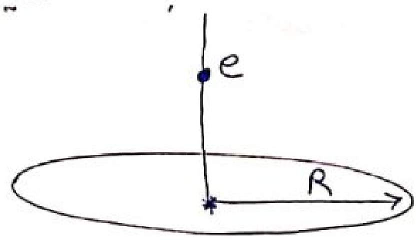
میدان در فاصله‌ی $2R$ از مرکز دیسکی به شعاع R که دیسکی به شعاع $R/2$ از آن خارج شده است:

$$E_3 = E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{\left(1 - \frac{2R}{\sqrt{\underbrace{R^2+(2R)^2}_{5R^2}}}\right) - \left(1 - \frac{2R}{\sqrt{\underbrace{(R/2)^2+(2R)^2}_{\frac{17}{4}R^2}}}\right)\right\} =$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{17}}\right)$$

میزان نسبت تغییر: $\frac{E_3}{E_1} = \frac{2 - \frac{4}{\sqrt{17}}}{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}} = \boxed{-8{,}18}$

۵) در شکل زیر الکترونی از حالت سکون روی محور مرکزی قرص باردار نازک افقی به شعاع R رها می‌شود. چگالی سطحی بار روی قرص برابر با $+4\ \mu C/m^2$ است. شتاب اولیه‌ی الکترون در صورتی که از فاصله‌ی: الف) R، ب) $\frac{R}{100}$ از مرکز قرص رها شود چقدر است؟



پاسخ: میدان در فاصله‌ی z از مرکز دیسکی به شعاع R و حامل بار q:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

$\sigma = \frac{4\mu C}{m^2} = 4\times10^{-6}\ C/m^2$ ؛ جرم الکترون: $m = 9.1\times10^{-31}\ kg$ ؛ $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \frac{C}{Nm^2}$

$$\underbrace{ma}_{F} = \underbrace{qE}_{F_1} \longrightarrow a = \frac{qE}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{e}{m}\cdot\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

$\Rightarrow$ الف) $a = \frac{1.6\times10^{-19}\ C}{9.1\times10^{-31}\ kg}\cdot\frac{4\times10^{-6}\ C/m^2}{2\times8.85\times10^{-12}\ \frac{C}{N.m^2}}\cdot\left(1 - \frac{R}{R\sqrt{2}}\right) = \boxed{1.14\times10^{14}\ m^2/s}$

$\Rightarrow$ ب) $a = \frac{1.6\times10^{-19}\ C}{9.1\times10^{-31}\ kg}\cdot\frac{4\times10^{-6}\ C/m^2}{2\times8.85\times10^{-12}\ \frac{C}{N.m^2}}\left(1 - \frac{R/100}{\sqrt{R^2+(R/100)^2}}\right) = \boxed{3.94\times10^{14}}$

در این سؤال g نیز اثرش در دل a است.
شامل g و شتاب ناشی از $\leftarrow a$
باردار بودن دیسک

۶) برای آنکه یک دوقطبی الکتریکی به اندازه‌ی 180° در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $E = 46\ N/C$ بچرخد، چه مقدار کار لازم است در صورتی که $p = 3.02\times10^{-25}\ C$ و زاویه‌ی اولیه‌ی 64° باشد؟

- انرژی پتانسیل یک دوقطبی الکتریکی: برای تغییر جهت دوقطبی الکتریکی در میدان خارجی باید یک عامل خارجی کار انجام دهد؛ این کار به صورت انرژی پتانسیل در دوقطبی ذخیره می‌شود:

$$\Delta U = U(\theta) - U(\theta_0) = W$$

انرژی پتانسیل دوقطبی: $U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$ $\qquad$ $\vec{p}$: گشتاور دوقطبی الکتریکی

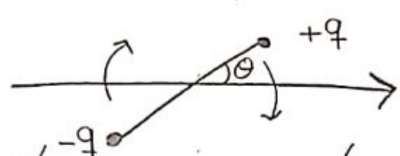
$$W = U(64^\circ + 180^\circ) - U(64^\circ) = \Big(-pE\underbrace{\cos(64+180)}_{-\cos 64}\Big) - \Big(-pE\cos(64)\Big) = 2pE\cos(64)$$

$$\longrightarrow W = 2\,(3.02\times10^{-25}\ C)\,(46\ N/C)\,\cos(64) = 121.79\times10^{-25} \approx \boxed{1.22\times10^{-23}\ J}$$

---

۷) برای بسامد نوسان‌های با دامنه‌ی کوچک یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی $\vec{p}$ و لختی دورانی I حول مکان تعادل آن در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی E عبارتی پیدا کنید.

گشتاور نیروی وارد بر دوقطبی: $\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E} = pE\sin\theta$



جهت گشتاور به گونه‌ای است که می‌خواهد دوقطبی را به حالت تعادل در $\theta = 0$ بازگرداند

← لذا کنار آن علامت ⊖ قرار می‌گیرد (گشتاور همواره به سمت تعادل): $\tau = -pE\sin\theta$

برای θهای کوچک: $\sin\theta \approx \theta \Rightarrow \tau = -pE\theta$ ①

از طرفی: $\tau = I\underbrace{\alpha}_{\text{شتاب زاویه‌ای}} = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ ②

$$①=② \Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -pE\theta \Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} + pE\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{I}\theta = 0$$

ω^2 ← برای مشابهت با معادله‌ی نوسان ساده (نوسانگر هماهنگ)

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 2\pi f \\ \omega &= \sqrt{\frac{pE}{I}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}}}$$