بسمه تعالی

جزوه فیزیک عمومی ۲

استاد: دکتر حبیبیان

نویسنده: سید امیرعلی مقدسی نژاد

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی انرژی

نیمسال دوم تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

Subject:
Date

فیزیک دهم ۲:

الکترومغناطیس (الکتریسیته + مغناطیس)

★ بار الکتریکی:

۲ نوع بار الکتریکی { + ، − }

★ نیروی الکترواستاتیکی بین بارها را با قانون کولن بصورت کمّی بیان می‌کنیم.

بار القایی: به هم زدن تعادل بارهای یک جسم

$1C = 1A \times 1s$ ← مقدار آمپری که در یک ثانیه طی می‌شود

★ ۱۲ اصل مهم فیزیکی در مورد بار الکتریکی:

۱) اصل کوانتیتی بار الکتریکی: بار الکتریکی کوانتیده است: $q = ne$ ($e = 1.6 \times 10^{-19}$ کولن)

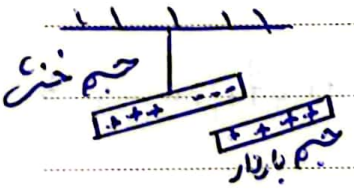
← مضرب صحیحی از کمیت پایه است.

e ← کمیت پایه

۲) اصل پایستگی بار الکتریکی: بار الکتریکی نه بوجود می‌آید و نه از بین می‌رود بلکه از جسم به جسم دیگر تبدیل می‌شود

مثال‌های مختلف: واپاش رادیواکتیو، فرآیند تابودی

بار القایی: باردار کردن اجسام بدون تماس، که در این روش با جسم باردار به یک جسم خنثی نزدیک شده و باعث می‌شود که تعادل و آرایش بار ۲ جسم خنثی تغییر کند.



★ یکای SI بار الکتریکی کولن است. (C)

★ ۱ کولن مقدار باری است که توسط جریان ۱ آمپری در مدت زمان ۱ ثانیه منتقل می‌گردد.

@booklet_aut

Subject:
Date

$i = \frac{dq}{dt}$ 1(C), 1(A), 1(s)

★ قانون کولن

این قانون به طور مختصر بیان می‌کند که چگونه بارهای ساکن بر یکدیگر تاثیر دارند و نیرو وارد می‌کنند.

۲ بار نقطه‌ای q_1 و q_2 که فاصله‌ی بین آنها r باشد در نظر بگیرید. نیروی الکترواستاتیک (جاذبه یا دافعه) بین این ذرات،

الف) با حاصل ضرب بارها متناسب است: $F \propto q_1 q_2$

ب) با مجذور فاصله ۲ بار از هم نسبت عکس دارد: $F \propto \frac{1}{r^2}$

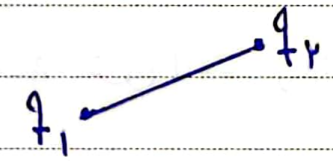
$\rightarrow F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \rightarrow$ برای برقراری تساوی و درست کردن واحدها به یک ثابت نیاز داریم که به آن ثابت متناسب هم گفته می‌شود.

$\Rightarrow F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$ ($k \simeq 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$) $= 8.99 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$

ثابت الکترواستاتیک

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ ← ثابت الکترواستاتیک → ثابت گذردهی خلاء $= 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2}$

★ اگر بارهای q_1 و q_2 هم علامت باشند، نیروی دافعه وجود دارد و اگر غیر هم علامت باشند، نیروی جاذبه وجود دارد.



@booklet_aut

Subject
Date

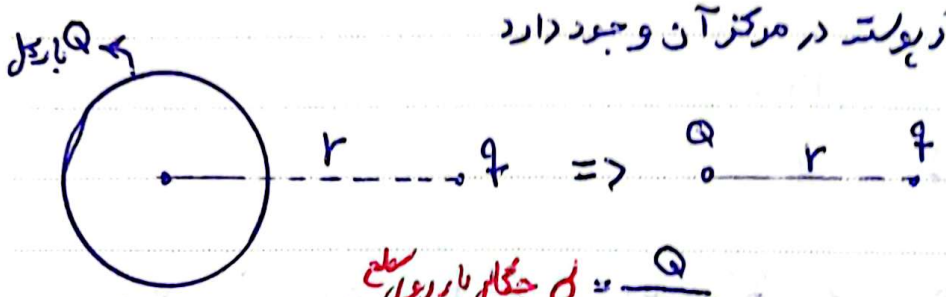
نمایش نیرو به صورت برداری:

بردار یکه فاصله × اندازه بردار F

$$\rightarrow \vec{F} = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2} \times \frac{\vec{r}}{r} = k\frac{|q_1 q_2|}{r^3}\vec{r}$$

★ قضایای پوسته در الکتروستاتیک:

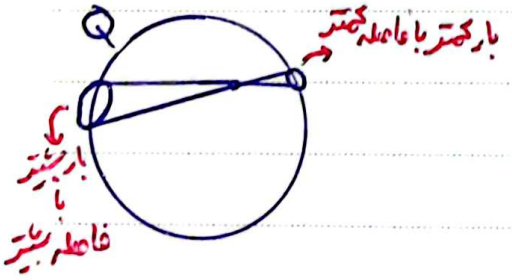
۱- نیروی جاذبه یا دافعه که یک پوسته کروی با بار یکنواخت به یک ذره باردار در خارج از پوسته وارد می‌کند، چنان است که گویی کل بار پوسته در مرکز آن وجود دارد



$$F = k\frac{Qq}{r^2}$$

$\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2}$ = چگالی بار روی سطح

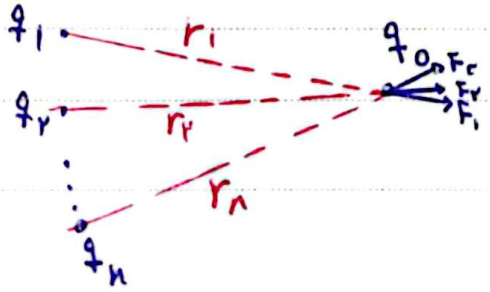
۲- اگر یک ذره باردار در داخل یک پوسته کروی با بار یکنواخت قرار گیرد نیروی الکتروستاتیک خالص وارد بر آن ۰ است.



★ اصل برهم نهی یا جمع آثار

← در مورد نیروهای الکتروستاتیک برقراره

کاربرد: بدست آوردن نیروی وارد بر یک بار نقطه‌ای از طرف یک توزیع بار گسسته



اندازه نیروی وارد بر q_0 از طرف q_1 = $F_1 = k\frac{q_1 q_0}{r_1^2} \Rightarrow \vec{F_1}$

⋮

q_n . . . . . $= F_n = k\frac{q_n q_0}{r_n^2} \Rightarrow \vec{F_n}$

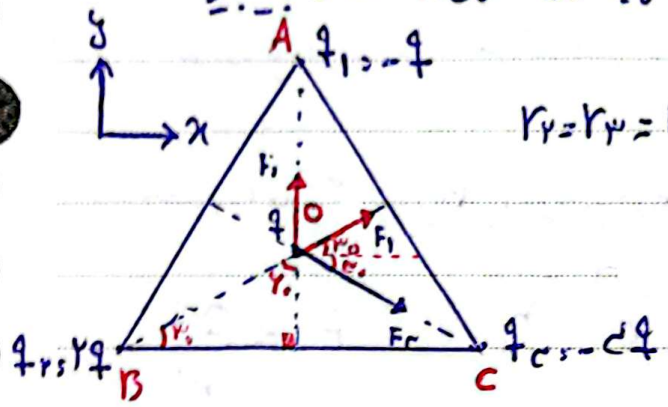
LINOMAX

$$\vec{F}_{\text{کل}} = \vec{F_1} + \dots + \vec{F_n} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

Subject
Date

$$\begin{cases} F_x = F_{x_1} + \dots + F_{x_n} \\ F_y = F_{y_1} + \dots + F_{y_n} \\ F_z = F_{z_1} + \dots + F_{z_n} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{|\vec{F}|}_{\text{اندازه نیرو}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

مثال: فرض کنید در رئوس یک مثلث مساوی الاضلاع به ضلع a، سه بار $(-q, +2q, -4q)$ قرار دارد. نیروی وارد بر بار q واقع بر مرکز مثلث و محل برخورد ۳ عمود منصف را بیابید.



$$r_2 = r_3 = r_1 = OA = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$F_1 = 3k\frac{q^2}{a^2} \qquad F_2 = 6k\frac{q^2}{a^2} = 2F_1 \qquad F_3 = 9k\frac{q^2}{a^2} = 3F_1$$

$$\vec{F_1} = 3k\frac{q^2}{a^2}\hat{j} = F_1\hat{j}$$

$$\vec{F_2} = F_2\cos 30^\circ\,\hat{i} + F_2\sin 30^\circ\,\hat{j} = \sqrt{3}F_1\hat{i} + F_1\hat{j}$$

$$\vec{F_3} = F_3\cos 30^\circ\,\hat{i} - F_3\sin 30^\circ\,\hat{j} = \frac{3\sqrt{2}}{2}F_1\hat{i} - \frac{3}{2}F_1\hat{j}$$

برآیند $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \left(1 + \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)F_1\hat{i} + \left(+\frac{3}{2}\right)F_1\hat{j} = 7.5\sqrt{3}k\frac{q^2}{a^2}\hat{i} + 1.5k\frac{q^2}{a^2}\hat{j}$

جهت برآیند نیرو $= tg^{-1}\frac{\overset{1.5}{F_y}}{\underset{7.5\sqrt{3}}{F_x}} \simeq 6.7^\circ$

@booklet_aut

Subject
Date

فصل ۲، میدان الکتریکی

سوال، ذره ۱ چگونه از حضور ذره ۲ باخبر می‌شود؟

ذره ۲ در فضای اطراف خود یک میدان الکتریکی بوجود می‌آورد. اگر ذره ۱ در نقطه‌ای از این فضا قرار بگیرد، حضور ذره ۲ را به خاطر تاثیر میدان الکتریکی آن حس می‌کند.

انواع میدان:
- میدان اسکالر، میدان توزیع دما، میدان فشار (فقط مقدار)
- میدان برداری، میدان الکتریکی (جهت + مقدار)

تعریف، در هر نقطه‌ای برحسب نیروی الکترواستاتیک وارد بر یک بار آزمون q_0 واقع در آن نقطه میدان الکتریکی $\vec{E}$ تعریف می‌شود.

ابتدا یک بار مثبت (q_0) را در یک نقطه مورد نظر قرار می‌دهیم (بار آزمون)، سپس نیروی الکترواستاتیک $\vec{F}$ وارد بر آن را اندازه می‌گیریم. درنهایت میدان الکتریکی $\vec{E}$ در نقطه مورد نظر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{E} \triangleq \frac{\vec{F}}{q_0}$$

- E اندازه میدان ؛ $E = \frac{F}{q_0}$ (N/C) (وابسته به q_0 نمی‌باشد)
- جهت میدان: هم جهت نیروی وارد بر بار آزمون مثبت → بصورت قراردادی

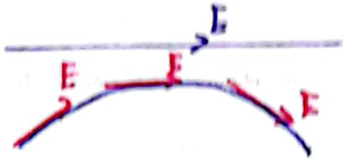
★ خطوط میدان الکتریکی، روشی است برای تجسم جهت و اندازه میدان‌های الکتریکی.

@booklet_aut

Subject
Date

★ قواعد خطوط میدان الکتریکی :

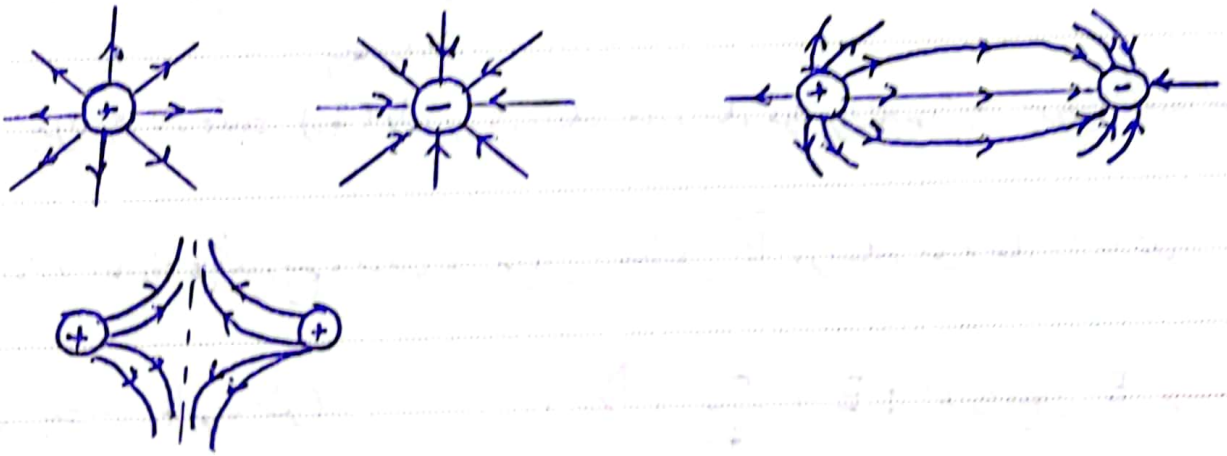
★ در هر نقطه‌ای ، جهت یک خط میدان مستقیم یا جهت مماس بر خط میدان ، جهت $\vec{E}$ را نشان می‌دهیم .



★ چگالی (تراکم) خطوط میدان در هر ناحیه (تعداد خطوط در واحد سطح) با اندازهٔ میدان الکتریکی متناسب است .

★ اگر جهت و مقدار میدان در هر نقطه یکسان باشد ، به آن میدان ، میدان الکتریکی یکنواخت گوییم .

★ خطوط میدان الکتریکی از بار + خارج و به بار منفی وارد می‌شود



★ محاسبه میدان ناشی از : ۱- توزیع بار گسسته ۲- توزیع بار پیوسته

۱- توزیع بار گسسته : ① یک بار نقطه‌ای ② چند بار نقطه‌ای

۲- " " پیوسته : ① توزیع بار خطی ② توزیع بار سطحی ③ توزیع بار حجمی

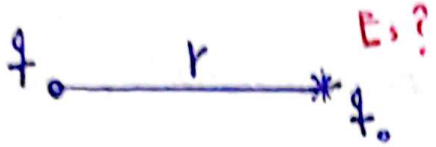
LINOMAX

@booklet_aut

Subject
Date

* میدان ناشی از توزیع بار گسسته :

الف) یک بار نقطه‌ای : می‌خواهیم میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای q را در فاصله r از آن بدست آوریم :



ابتدا در نقطه مورد نظر بار آزمون q_0 را قرار داده و نیروی الکترواستاتیک وارد بر آن از طرف بار q را محاسبه می‌کنیم :

$$F = k\frac{qq_0}{r^2} \Rightarrow E \triangleq \frac{F}{q_0} = k\frac{q}{r^2}$$

$$\xRightarrow[\text{میدان الکتریکی}]{\text{اندازه}} E = k\frac{q}{r^2} \rightarrow \vec{E} = k\frac{q}{r^2}\vec{r}$$

* جهت $\vec{E}$ همان جهت نیروی وارد بر بار آزمون است.

ب) میدان حاصل از چند بار نقطه‌ای : اگر بار آزمون را نزدیک n بار نقطه‌ای q_1، q_2 و ... و q_n قرار دهیم، نیروی برآیند وارد بر بار آزمون از سوی این بارها برابر است با :

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \dots + \vec{F_n}$$

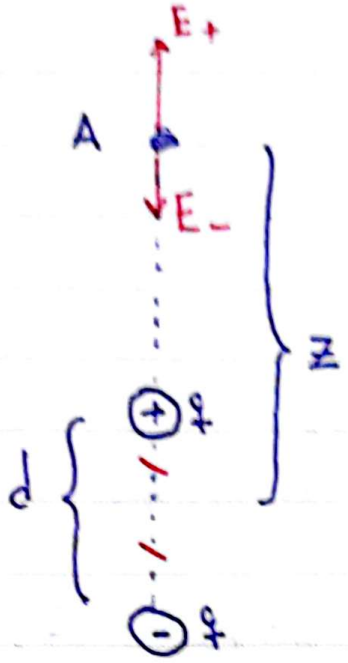
میدان الکتریکی ناشی از کل توزیع بارها در محل بار آزمون

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\vec{F_1}}{q_0} + \frac{\vec{F_2}}{q_0} + \dots + \frac{\vec{F_n}}{q_0} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \dots + \vec{E_n}$$

E_i میدان الکتریکی ناشی از بار i ام است هنگامی که به تنهایی عمل می‌کند.

درنتیجه اصل جمع آثار برای میدان الکتریکی معتبر است

@booklet_aut



مثال) ۲ ذره باردار با اندازه یکسان q و علامات مخالف به فاصله d از هم قرار دارند، این آرایش را ۲ قطبی الکتریکی نامیم. می‌خواهیم در نقطه A به فاصله z از وسط ۲ قطبی و روی محوری که بارها روی آن قرار دارند (محور ۲ قطبی) میدان الکتریکی E را بیابیم

$$E_{کل} = (E_+) - (E_-) = kq\left[\frac{1}{(z-\frac{d}{2})^2} - \frac{1}{(z+\frac{d}{2})^2}\right] = \frac{kq}{z^2}\left[\frac{1}{(1-\frac{d}{2z})^2} - \frac{1}{(1+\frac{d}{2z})^2}\right]$$

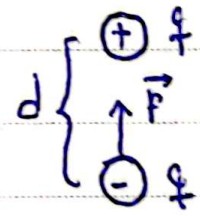
$$= \frac{kq}{z^2} \times \frac{\frac{2d}{z}}{\left[1-(\frac{d}{2z})^2\right]^2}$$

قرار داد = p

$$\text{if } z \gg d \Rightarrow E = k\frac{q}{z^2} \times \frac{2d}{z} = \frac{2kqd}{z^3} \rightarrow E = 2k\frac{p}{z^3}$$ توجیه الهایت

حاصل ضرب qd که ۲ ویژگی ذاتی ۲ قطبی را در بر دارد، اندازه p را تشکیل می‌دهد.

اندازه یک کمیت برداری به فرم $\vec{p}$ است که به آن گشتاور ۲ قطبی الکتریکی می‌نامند و جهت آن از بار منفی به بار مثبت است.



$|\vec{p}| = qd$

@booklet_aut

Subject
Date

نکته کره: برای ۲ قطبی شدن (الکتریکی) میدان با مکعب فاصله کاهش پیدا می‌کند، درصورتی که میدان یک ذره با مربع فاصله کاهش یابد، درنتیجه کاهش میدان ۲ قطبی بیشتر از یک بار نقطه‌ای است.

می‌توان نشان داد که برای بقیه نقاط فضای اطراف ۲ قطبی نیز میدان الکتریکی متناسب با $\frac{1}{r^3}$ است.

$$E \propto \frac{1}{r^3} \propto q \propto d$$

★ بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی:

اگر یک بار q در یک میدان الکتریکی E قرار گیرد (E میدانی نیست که توسط خود q تولید می‌شود)

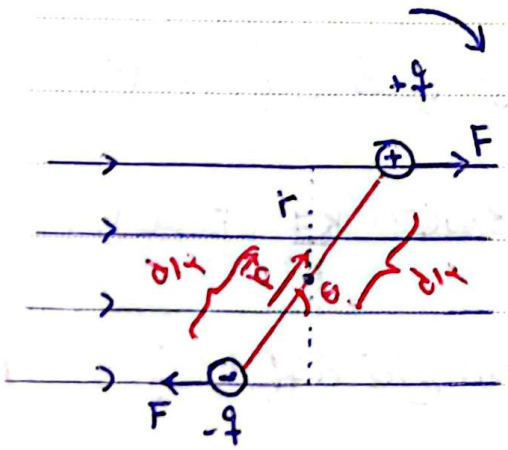
نیروی الکتروستاتیک F بر آن وارد می‌شود که برابر است با:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

اگر $q>0$ باشد ← $\vec{F}$ در جهت $\vec{E}$ قرار دارد

اگر $q<0$ باشد ← $\vec{F}$ در خلاف جهت $\vec{E}$ قرار دارد

★ ۲ قطبی الکتریکی در میدان الکتریکی یکنواخت:



$$\underset{\text{گشتاور}}{\vec{\tau}} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow \tau = rF\sin\theta = r_{\perp}F$$

$$\tau_{\text{کل}} = \tau_+ + \tau_- = -F\left(\frac{d}{2}\sin\theta\right) - F\left(\frac{d}{2}\sin\theta\right)$$

$$= -Fd\sin\theta$$

$$\xrightarrow{F=Eq} \tau = -Eqd\sin\theta = -pE\sin\theta \rightarrow \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

LINOMAX

اندازه گشتاور: $-pE\sin\theta$

@booklet_aut

Subject
Date

★ انرژی پتانسیل ۲ قطبی الکتریکی:

با انتخاب انرژی پتانسیل صفر برای وضعیت $\theta = 90^\circ$ داریم:

$$U = -W = -\int_{90^\circ}^{\theta} \tau \, d\theta = +\int_{90^\circ}^{\theta} pE\sin\theta = -pE\cos\theta \Rightarrow U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

کار انجام شده توسط میدان الکتریکی

خارجی در چرخاندن ۲ قطبی از 90° به وضعیت θ

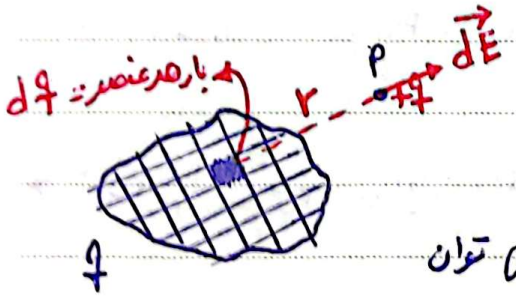
- توجه: هنگامی که ۲ قطبی از زاویه اولیه θ_i به زاویه نهایی θ_f چرخانده می‌شود،

$$= W = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

کاری که میدان الکتریکی روی آن انجام می‌دهد

- توجه ۲: اگر تغییر راستا توسط یک عامل خارجی صورت پذیرد، کار انجام شده توسط این عامل خارجی،

$$W_a = -W = \Delta U = U_f - U_i$$



★ میدان الکتریکی ناشی از بار الکتریکی پیوسته:

برای محاسبه میدان الکتریکی ناشی از بار پیوسته q در نقطه P نمی‌توان از رابطه $E = \frac{kq}{r^2}$ استفاده کرد (چرا؟) برای رفع مشکل بار q را به تعداد بسیار زیادی بار کوچک (یا بار دیفرانسیلی) dq تقسیم کرده و هر کدام را مانند یک بار نقطه‌ای در نظر می‌گیریم. در ضمن:

$$q = \int dq$$

@booklet_aut

میدان ناشی از هر بار نقطه‌ای dq در نقطه P را dE نامیده و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$dE = k\frac{dq}{r^2} \Rightarrow \vec{dE} = k\frac{dq}{r^3}\vec{r}$$

پس میدان الکتریکی کل در نقطه P برابر است با:

$$\vec{E} = \int \vec{dE}$$

$\vec{E} \to E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$

$\vec{dE} \to dE_x\hat{i} + dE_y\hat{j} + dE_z\hat{k}$

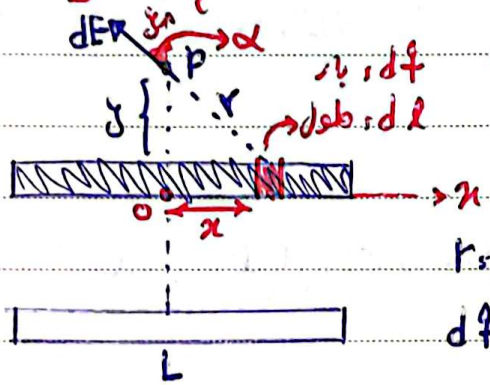
$$\begin{cases} E_x = \int dE_x \\ E_y = \int dE_y \\ E_z = \int dE_z \end{cases}$$

★ هنگامی کار با توزیع بار پیوسته، بار روی جسم به صورت یک چگالی بار بیان می‌شود.

- چگالی بار خطی، $\lambda \leftarrow \frac{C}{m}$
- چگالی بار سطحی، $\sigma \leftarrow \frac{C}{m^2}$
- چگالی بار حجمی، $\rho \leftarrow \frac{C}{m^3}$

دسته‌بندی دیگر بار:
- توزیع بار یکنواخت، $\lambda \leftarrow$ چگالی ثابت
- توزیع بار غیر یکنواخت، $\lambda \leftarrow$ چگالی متغیر

مثال) خط باردار ← میدان الکتریکی در نقطه P روی عمود منصف و به فاصله y از میله چقدر است؟



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$dq = \lambda dl$

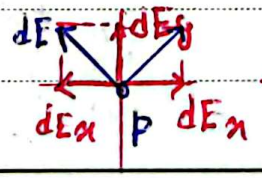
$\hookrightarrow dq = \lambda dx$

$$dE = k\frac{dq}{r^2} \to dE = k\frac{\lambda dx}{(x^2+y^2)}$$

طول میله = L (m)

$\to \lambda = \frac{q}{L}$ ← چگالی بار خطی

q (C): بار یکنواخت روی میله



→ مولفه‌های محور x با هم خنثی می‌شوند

@booklet_aut

Subject:
Date

$E_{\text{کل}}$

$E_x = \int dE_x$ ← با توجه به تقارن توزیع بار، مولفه میدان الکتریکی در امتداد محور x برابر با صفر خواهد بود و فقط کافی است E_y را بدست بیاوریم

$+$

$$E_y = \int dE_y = \int dE\cos\alpha = \int dE\,\frac{y}{r} = \int \frac{dE\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\rightarrow E_y = \int k\frac{\lambda\,dx}{x^2+y^2}\times\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = k\lambda y\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- با توجه به جدول انتگرال گیری:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow E_y = k\lambda y\times\frac{1}{y^2}\times\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{k\lambda}{y}\left[\frac{\frac{L}{2}}{(\frac{L^2}{4}+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{-\frac{L}{2}}{(\frac{L^2}{4}+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

مقدار میدان در جهت محور y $\Rightarrow E_y = \frac{2k\lambda}{y}\times\frac{L}{\sqrt{L^2+4y^2}} = \frac{2kq}{y}\times\frac{1}{\sqrt{L^2+4y^2}}$

$$\rightarrow \vec{E} = E_y\hat{j}$$

مثال) خط باردار طویل، اگر در مثال قبل طول خط بی نهایت باشد میدان الکتریکی چقدر خواهد شد؟

حل مسئله همانند قبل است (جز بخش حل انتگرال):

$$E = k\lambda y\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= k\lambda y\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{y^3(1+(\frac{x}{y})^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k\lambda}{y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+(\frac{x}{y})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

@booklet_aut

Subject:
Date

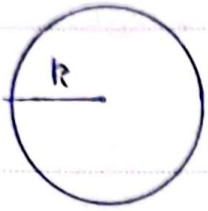
$\star\ (1+tg^2\theta) = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\xrightarrow{\frac{x}{y} = tg\theta} x = tg\theta\, y \rightarrow dx = y(1+tg^2\theta)\,d\theta$

$$\rightarrow E_y = \frac{k\lambda}{y^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{y(1+tg^2\theta)\,d\theta}{(1+tg^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k\lambda}{y}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+tg^2\theta)^{\frac{1}{2}}}\ \star = \frac{k\lambda}{y}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta$$

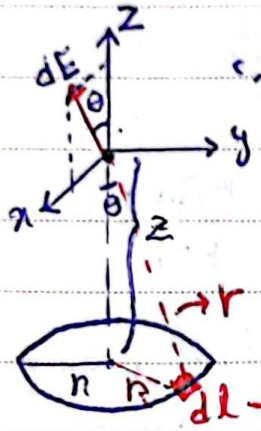
$$\left\{\begin{array}{l} x \rightarrow +\infty \Rightarrow \theta \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow \theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \rightarrow E_y = \frac{2k\lambda}{y} \rightarrow E = \frac{2k\lambda}{y}\hat{j}$$

★ حلقه‌ی باردار



R ، شعاع حلقه باردار

q ، بار حلقه $\rightarrow \lambda = \frac{q}{2\pi R}$



.. میدان الکتریکی در نقطه P روی محور حلقه و به فاصله z از صفحه در بردارنده حلقه:

$$dE = \frac{k\,dq}{(z^2+R^2)} = k\frac{\lambda\, dl}{z^2+R^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} E_x = \int dE_x \rightarrow \text{بدلیل تقارن شکل} \\ E_y = \int dE_y \rightarrow \text{خنثی می‌شوند و صفر خواهند شد} \\ E_z = \int dE_z \end{array}\right.$$

$dq \rightarrow$ بار $= \lambda\, dl$

روی آن دیفرانسیل

$$E_z = \int dE\cos\theta$$

$$\xrightarrow{\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}} E_z = \int k\frac{\lambda\, dl}{z^2+R^2}\times\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{k\lambda z}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\int dl$$

$$\xrightarrow{dl = R\,d\alpha} E_z = \frac{k\lambda z}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\, R\int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{k\lambda z R 2\pi}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\lambda z R\pi}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{qz}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

بار کل

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{kqz}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

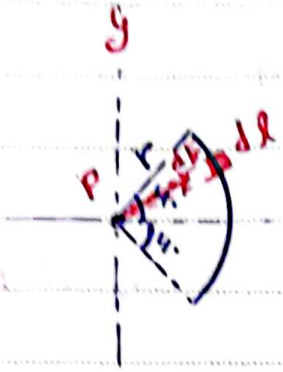
@booklet_aut

Subject:
Date

① If $z \gg R \rightarrow \vec{E} = \frac{kq}{z^2}$

② If $z = 0 \rightarrow \vec{E} = 0 \longrightarrow$ میدان در مرکز حلقه صفر

مثال) کمان باردار، میدان الکتریکی که ناشی از کمان در نقطه P مرکز کمان بیابید.



r، شعاع کمان

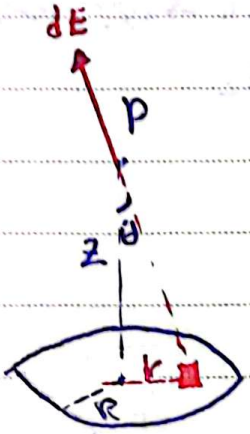
$-q$، بار کل روی کمان $\longrightarrow \lambda = -\frac{q}{\frac{2\pi}{3}(r)}$

$$dE = \frac{kdq}{r^2} = \frac{k\lambda \overbrace{dl}^{rd\theta}}{r^2}$$

$$\rightarrow dE = \frac{k\lambda r d\theta}{r^2} = \frac{k\lambda d\theta}{r} \longrightarrow \begin{cases} E_y = \int dE_y \rightarrow 0 \leftarrow \text{با توجه به تقارن} \\ E_x = \int dE_x \end{cases}$$

$$E_x = \int dE\cos\theta = \int \frac{k\lambda d\theta}{r}\cos\theta = \frac{k\lambda}{r}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{3}k\lambda}{r}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{k\lambda\sqrt{3}}{r}\hat{i} = -\frac{k\sqrt{3}}{r} \times \frac{3q}{2\pi r}\hat{i} = -\frac{3\sqrt{3}kq}{2\pi r^2}\hat{i}$$



مثال) میدان الکتریکی در نقطه P به فاصله z از قرص روی محور آن چقدر است.

$$dE = \frac{kdq}{z^2+r^2} = \frac{k\sigma dA}{z^2+r^2} = \frac{k\sigma r dr d\varphi}{z^2+r^2} \quad \begin{cases} E_x = \int dE_x = 0 \rightarrow \\ E_y = \int dE_y = 0 \rightarrow \\ E_z = \int dE_z \end{cases} \text{تقارن!}$$

$$E_z = \int dE\cos\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{k\sigma r dr d\varphi}{z^2+r^2} \times \overbrace{\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}}^{\cos\theta}$$

$$= k\sigma z \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} \frac{r dr}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dA = \overbrace{dr}^{rd\varphi}\, dl$$

$$\rightarrow dA = r dr d\varphi$$

@booklet_aut

@booklet_aut

$$\longrightarrow E_z = k\pi\sigma z \int_0^R \frac{2r\,dr}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

تغییر متغیر
$$\begin{cases} r^2+z^2 = x \\ 2r\,dr = dx \end{cases}$$

$$E_z = \underbrace{k}_{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}\pi\sigma z \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = k\pi\sigma z \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}$$

$$= \underbrace{k}_{\frac{q}{\pi R^2}}\pi\sigma z \left.\frac{(z^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

$$\longrightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat{k}$$

① If $\begin{cases} R\to\infty \\ z\to \text{ثابت} \end{cases} \longrightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ میدان الکتریکی صفحه بی‌نهایت — حالت خاص:

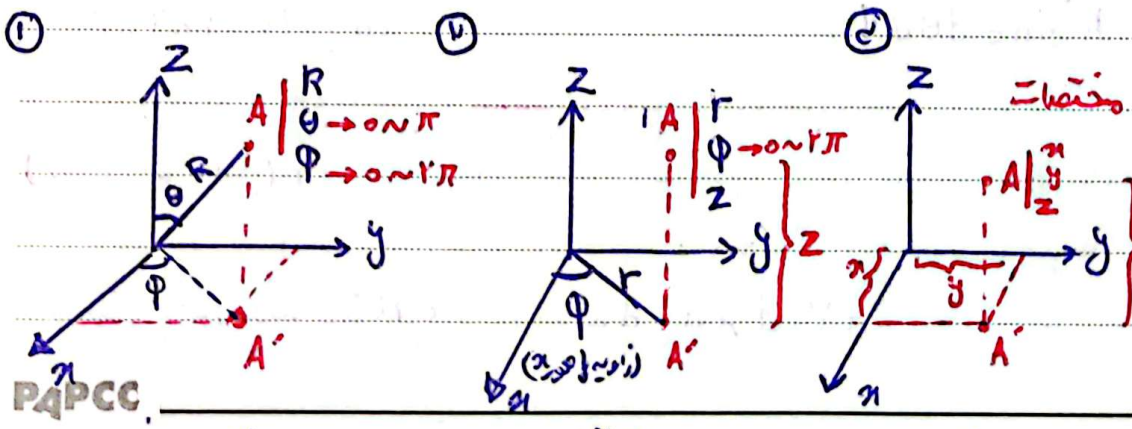
② If $\begin{cases} R\to \text{ثابت} \\ z\to 0 \end{cases} \longrightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

جمع‌بندی فصل ۲:

$$dE = \frac{k\,dq}{r^2}, \quad dq \begin{cases} \lambda\,dl & \text{خطی} \\ \sigma\,dA & \text{سطحی} \\ \rho\,dV & \text{حجمی} \end{cases}$$

در روابط فوق بسته به دستگاه مختصات انتخابی، مقادیر dl یا dA یا dV متفاوت خواهند بود.

$$E \begin{cases} E_x = \int dE_x \\ E_y = \int dE_y \\ E_z = \int dE_z \end{cases}$$



کروی — استوانه‌ای — دکارتی

★ یادآوری دستگاه مختصات

دکارتی به استوانه‌ای
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

دکارتی به کروی
$$\begin{cases} z = R\cos\theta \\ x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$$

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

← در ۲ بعدی: قطبی

PAPCC

Subject:
Date

نکات دستگاه کروی:

$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{R}\right)$

$z = R\cos\theta$

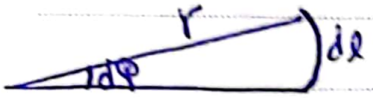
$x = R\sin\theta\cos\varphi$

$y = R\sin\theta\sin\varphi$

(توزیع بار خطی):

حالت ۱) بار میله ای یا خط مستقیم است:

$dl = \begin{cases} dx & \text{یا} \\ dy & \text{یا} \\ dz \end{cases}$

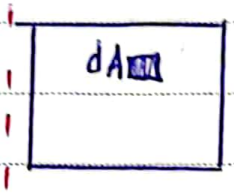


حالت ۲) بار حلقه ای یا کمانی است:

$dl = r\,d\varphi$

(توزیع بار سطحی):

حالت ۱) سطح مستطیلی:

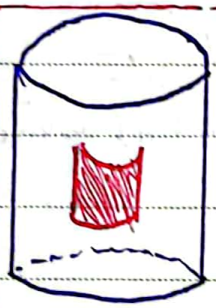


$dA = \begin{cases} dx\,dy \\ dx\,dz \\ dy\,dz \end{cases}$

حالت ۲) سطح دایره ای یا بخشی از دایره:

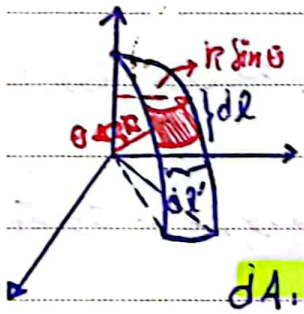
$dA = dr\,dl = r\,d\varphi\,dr$

حالت ۳) سطح استوانه ای:



$dA = \begin{cases} dz \times dl = r\,d\varphi\,dz \\ dx \times dl = r\,d\varphi\,dx \\ dy \times dl = r\,d\varphi\,dy \end{cases}$

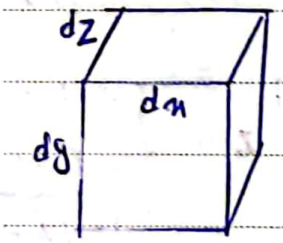
حالت ۴)



$dA = \underbrace{dl}_{R\,d\theta}\,\underbrace{dl'}_{(R\sin\theta)\,d\varphi}$

$dA = R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

(توزیع بار حجمی):



حالت ۱) حجم مکعب مستطیل:

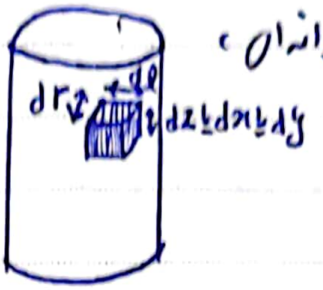
$dV = dx\,dy\,dz$

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

حالت ۲) حجم استوانه‌ای:

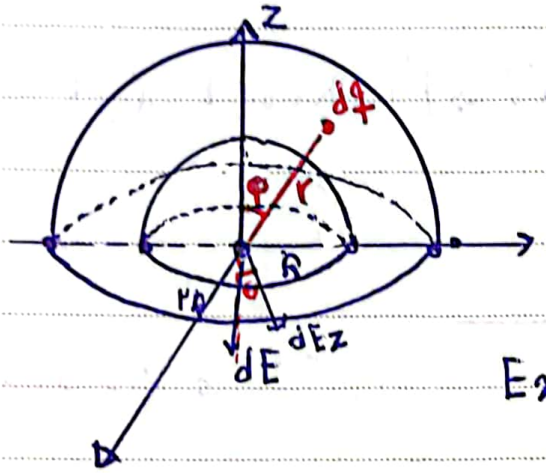


$$dV = \begin{cases} dr\,dz\,\overset{r\,d\varphi}{dl} = r\,dr\,d\varphi\,dz \\ dr\,dx\,dl = r\,dr\,d\varphi\,dx \\ dr\,dy\,dl = r\,dr\,d\varphi\,dy \end{cases}$$

حالت ۳) حجم دایره‌ای:

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

مثال) در حجم یک نیمکره (شمالی) به شعاع داخلی R و شعاع خارجی $2R$ بار الکتریکی با چگالی حجمی یکنواخت ρ در واحد حجم توزیع شده است. میدان الکتریکی را در نقطه O مرکز کره بیابید.



$$dE = k\frac{dq}{r^2}, \quad dq = \rho\, dV = \rho(r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta)$$

$$\rightarrow dE = k\rho \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$E_x = \int dE_x = 0 \rightarrow \text{تقارن!} \leftarrow E_y = \int dE_y = 0$$

$$E_z = \int dE_z = \int dE\cos\theta = \int k\rho \sin\theta\cos\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$-\frac{1}{2}\cos^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

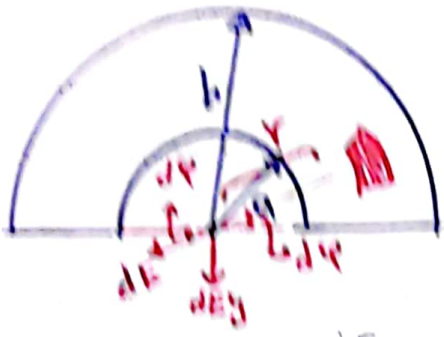
$$= \int_{r=R}^{2R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} k\rho \sin\theta\cos\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = k\rho \underbrace{\int_{r=R}^{2R} dr}_{R} \cdot \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho R\, 2\pi \times \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}\hat{k}$$

@booklet_aut

مثال) در شکل زیر بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho = \rho_0 r^2$ در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی O (مرکز نیم‌دایره) بیابید.



$$dE = k\frac{dq}{r^2} \quad , \quad dq = \rho\, dA = (\rho_0 r^2)(r\,dr\,d\varphi)$$

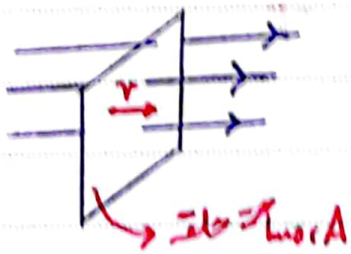
$$\rightarrow dE = k\frac{\rho_0 r^4\, dr\, d\varphi}{r^2} = k\rho_0 r\, dr\, d\varphi$$

$$E = \begin{cases} E_x = \int dE_x = 0 \rightarrow \text{تقارن!} \\ E_y = \int dE_y = \int dE \sin\varphi = \int k\rho_0 r \sin\varphi\, dr\, d\varphi \end{cases}$$

$$= k\rho_0 \underbrace{\int_{r=a}^{b} r\,dr}_{\frac{b^2-a^2}{2}} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi}_{-\cos\varphi\,|_0^{\pi} = 2} = k\rho_0 (b^2-a^2) \rightarrow \vec{E} = \underbrace{-}_{\text{رو به پایین}} k\rho_0 (b^2-a^2)\,\hat{j}$$

فصل سوم: قانون گاوس

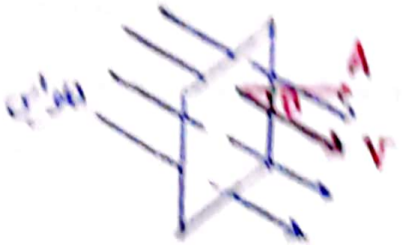
- قانون گاوس:
  - در حالت مستقیم، میدان الکتریکی نقاط روی یک سطح بسته (سطح گاوس) را به بار داخل آن مربوط می‌کند.
  - در حالت معکوس، اگر میدان الکتریکی روی یک سطح گاوس را بدانیم، می‌توانیم بار خالص داخل آن را بیابیم.



- شار آهنگ گذر حجمی هوا از حلقه است. $= \varphi$

① اگر $\vec{v}$ بر سطح A عمود باشد، $\varphi = vA$ ، $\left(\frac{m^3}{s}\right)$

@booklet_aut



① اگر $\vec{V}$ عمود بر سطح A باشد : $\varphi = 0$

② اگر زاویه بین $\vec{V}$ و A برابر θ باشد :

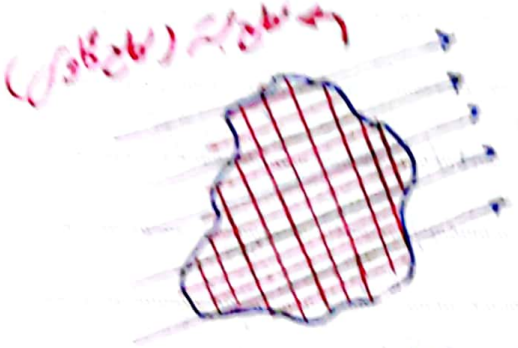
در این صورت : $\varphi = (V\cos\theta)A$ ← با این تعبیر تا حدی به نظر منبع واقعی چیزی از یک سطح است! یک قسمت حاصل ضرب داخل مساحت و میدان مماس سطح است.

$= VA\cos\theta = \vec{V}\cdot\vec{A}$

بردار شار

A بردار مساحت است که اندازه اش برابر با مساحت سطح و جهتش عمود بر صفحه سطح می باشد

• شار میدان الکتریکی :



یک سطح بسته دلخواهی را داخل یک میدان الکتریکی غیریکنواخت

در نظر بگیرید ، این سطح را به بخش های کوچک به مساحت ΔA تقسیم می کنیم ،

بخش ها آنقدر کوچک هستند که می توان خمیدگی ها را نادیده گرفت و مسطح فرض کرد . شار

میدان الکتریکی برای این سطح بسته برابر است با : $\varphi = \sum \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}$

تعریف دقیق شار میدان الکتریکی گذرنده از یک سطح بسته با کوچک و کوچکتر کردن بخش ها و رساندن

آن به حد دیفرانسیلی dA بدست آورد ،

→ شار میدان الکتریکی گذرنده از یک سطح گاوس ، $\varphi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$ $SI: \left(\frac{N\cdot m^2}{C}\right)$

سطح بسته است

اگر سطح باز بود ، $\varphi = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}$

@booklet_aut

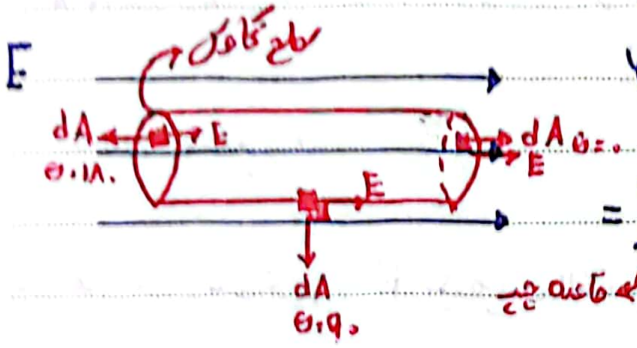
Subject:
Date

$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$$

$$d\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{A} = E_xA_x + E_yA_y + E_zA_z$$

مثال) یک سطح تخت به صورت استوانه‌ای به شعاع R در میدان الکتریکی یکنواخت E قرار دارد محور سطح تخت با میدان موازی است. شار میدان الکتریکی گذرنده از این سطح بسته چقدر است؟



$$\varphi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$= \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده چپ}} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{سطح جانبی}} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده راست}}$$

$$= \int E\,dA\cos 180 + \cancel{\int E\,dA\cos 90}^{\,0} + \int E\,dA\cos 0 = \underbrace{-E\int dA}_{\substack{-EA\\ \text{قاعده}}} + \underbrace{E\int dA}_{\substack{EA\\ \text{قاعده}}} = 0$$

نکات:

① شار خطوطی از میدان که وارد سطح می‌شوند (منفی) و شار خطوطی که از سطح خارج می‌شوند (مثبت) است.

② هر سطح بسته‌ای که داخل میدان قرار گیرد، شار آن ۰ است زیرا هر خطی که از میدان وارد سطح بسته می‌شود در نهایت از جایی از آن سطح خارج می‌شود.

③ اگر درون سطح بسته‌ای که خود داخل یک میدان است یک بار ⊕ قرار دهیم، شار دیگر ۰ نیست اما...

PAPCO

@booklet_aut

اگر این بار ⊕ را در خارج سطح بسته ای قرار دهیم، باز هم شار ۰ می شود.

به عبارت دیگر بارهایی که خارج سطح قرار گیرند، اثری روی شار گذرنده از سطح بسته ندارند و فقط شارهایی

وجود دارند که بار (چه مثبت و چه منفی) داخل سطح بسته باشد.

④ اگر چند بار مختلف درون سطح بسته باشند بدانید شارها، شار کل را تعیین می کند.

⑤ شکل و محل دقیق بارهای داخل سطح مهم نیست و فقط اندازهٔ آن اهمیت دارد.

- قانون گاوس: این قانون شار خالص میدان الکتریکی گذرنده از یک سطح بسته (سطح گاوس) را به

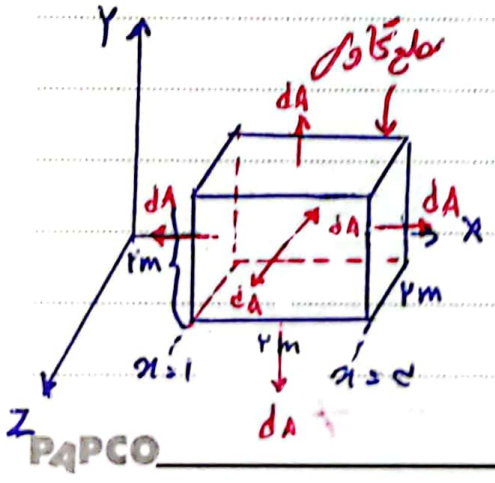
بار خالص داخل آن سطح (q_{enc}) مرتبط می کند.

قانون گاوس: $\varphi = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$

شار گذرنده خالص

q_{enc}: داخل سطح ⊕ و ⊖ = مجموع جبری تمام بارهای $= \int dq$

مثال) میدان الکتریکی غیر یکنواخت در فضای اطراف یک سطح گاوسی مکعبی به فرم زیر وجود دارد.



شار الکتریکی گذرنده از تک تک وجه ها را بدست بیاورید.

شار کل را محاسبه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

$(\vec{E} = 2x\hat{i} + 4\hat{j})$

@booklet_aut

Subject:
Date

- شار عبوری از وجه راست: $\varphi = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}$ و $d\vec{A} = dA\,\hat{i}$

$$\rightarrow \varphi = \int (3x\hat{i} + 4\hat{j})\cdot(dA\,\hat{i}) = \int [3x\,dA\,(\hat{i}\cdot\hat{i}) + 4\hat{j}\,dA\,(\hat{j}\cdot\hat{i})]$$

$$\rightarrow \varphi = \int 3x\,dA \overset{x=2}{=} \int 9\,dA = 9A = 9(2\times 2) = 36\ N.m^2$$

مساحت وجه راست

- شار عبوری از وجه چپ: $\varphi = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}$ و $d\vec{A} = -dA\,\hat{i}$

$$\rightarrow \varphi = \int (3x\hat{i} + 4\hat{j})\cdot(-dA\,\hat{i}) = \int -3x\,dA \overset{x=1}{=} -3\int dA = -12\ N.m^2$$

- شار عبوری از وجه بالا: $\varphi = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}$ و $d\vec{A} = dA\,\hat{j}$

$$\rightarrow \varphi = \int (3x\hat{i} + 4\hat{j})\cdot(dA\,\hat{j}) = \int 4\,dA = 16\ N.m^2$$

- شار عبوری از وجه پایین: $\varphi = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}$ و $d\vec{A} = -dA\,\hat{j}$

$$\rightarrow \varphi = \int (3x\hat{i} + 4\hat{j})\cdot(-dA\,\hat{j}) = \int -4\,dA = -16\ N.m^2$$

- شار عبوری از وجه جلویی: $\varphi = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}$ و $d\vec{A} = dA\,\hat{k}$

$$\rightarrow \varphi = \int (3x\hat{i} + 4\hat{j})\cdot(dA\,\hat{k}) = 0$$

- شار عبوری از وجه عقب: $\varphi = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}$ و $d\vec{A} = -dA\,\hat{k}$

$$\rightarrow \varphi = \int (3x\hat{i} + 4\hat{j})\cdot(-dA\,\hat{k}) = 0$$

شار کل: $\varphi_T = 36 - 12 + 16 - 16 = 24\ N.m^2 \neq 0$

PAPCO

@booklet_aut

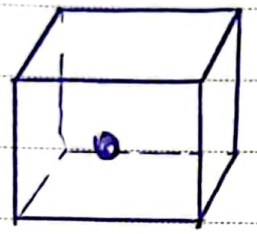
Subject:
Date

نتیجه: با توجه به اینکه شار کل ۵ شده داخل آن یک بار ⊕ وجود دارد که مقدار آن برابر است با:

$$\varphi = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow q_{enc} = \varphi \cdot \varepsilon_0 = 24\varepsilon_0$$

نکته: ۵ بودن یا نبودن شار کل هیچ ربطی به یکنواخت یا غیریکنواخت بودن میدان الکتریکی ندارد!!

مثال: بار کروی (شبیه بار نقطه‌ای) در مرکز یک مکعب به ضلع a قرار دارد. قطر بار کروی ۲R کوچکتر از a است. شار الکتریکی گذرنده از هر وجه مکعب را بیابید. (الف) اگر این بار Q را در یک گوشهٔ مکعب قرار دهیم، شار عبوری از هر وجه را بیابید. (ب)



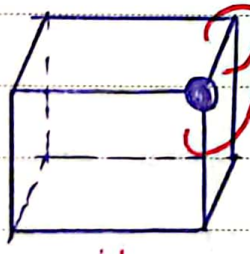
الف) شار عبوری از هر وجه مکعب برابر است با:

$$\varepsilon_0 \varphi_T = q_{enc} = Q \rightarrow \varphi_T = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

با توجه به اینکه خطوط میدان الکتریکی بار مورد نظر بصورت شعاعی به بیرون از بار Q است، لذا از هر وجه تعداد خطوط مساوی عبور می‌کند، به عبارت دیگر شار عبوری از هر وجه، $\frac{1}{6}$ شار کل است!

شار هر وجه $= \frac{Q}{6\varepsilon_0}$

ب) اگر بار Q را در گوشهٔ مکعب قرار دهیم، $\frac{1}{8}$ آن داخل مکعب است.



در نتیجه شار عبوری از هر وجه آن برابر است با:

$$\varepsilon_0 \varphi_T = q_{enc} = \frac{Q}{8}$$

$$\rightarrow \varphi_T = \frac{Q}{8\varepsilon_0}$$

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

★ با توجه به تقارن بودن خطوط میدان، تار عبوری از ۴ وجهی که متصل به بار هستند $\frac{Q}{8\varepsilon_0}$ می‌باشد، لذا از ۴ وجه دیگر که متصل به بار نیستند مجموعاً $\frac{Q}{8\varepsilon_0}$ می‌گذرد. یعنی به هر کدام از این ۴ وجه غیرمتصل $\frac{Q}{8\varepsilon_0} \times \frac{1}{4}$ یا $\frac{Q}{24\varepsilon_0}$ می‌گذرد.

تار عبوری هر وجه غیرمتصل $= \frac{Q}{24\varepsilon_0}$

حالا = مختلف مثال قبل:

۱) Q ← یک بار کروی با چگالی سطحی ρ_0 و شعاع R:

بار کل $= Q = \rho V = \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi R^3$

۲) Q ← یک بار کروی با چگالی سطحی $2\rho_0 = \rho$ و شعاع R:

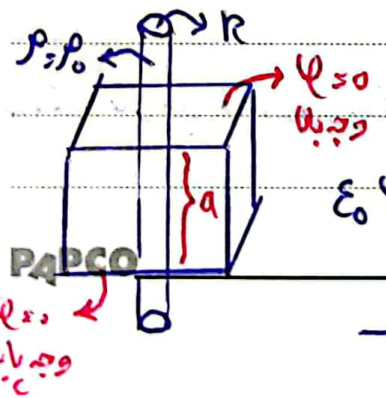
بار کل $= Q = \int dq = \int \rho\, dV$

$$\rightarrow Q = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R} (\rho_0 r)(r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi)$$

$$= \rho_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{2} \underbrace{\int_{r=0}^{R} r^3\, dr}_{R^4/4} = \pi \rho_0 R^4$$

@booklet_aut

۳) Q ← یک استوانه در مرکز مکعب با شعاع R و چگالی سطحی ρ_0:



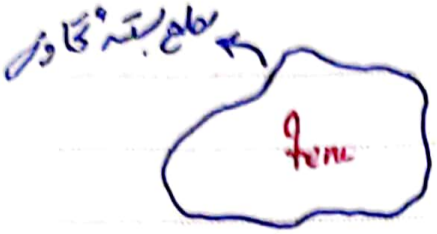
$\varepsilon_0 \varphi_T = q_{enc} \rightarrow q_{enc} = \pi R^2 a \rho_0 \leftarrow \rho V$

$\rightarrow \varphi_T = \frac{\pi R^2 a \rho_0}{\varepsilon_0} \rightarrow$ تار هر وجه کناری $= \frac{\pi R^2 a \rho_0}{4\varepsilon_0}$

PAPCO

Subject:
Date

یادآوری از قانون گاوس:



$$\underbrace{\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\varphi} = q_{enc} \rightarrow \varepsilon_0 \varphi = q_{enc}$$

★ هنگام استفاده از قانون گاوس به نکات زیر توجه کنید:

۱) سطح گاوس فرض ترجیحا هم شکل توزیع بار باشد.

یعنی برای بارهای میله ای و استوانه ای ← سطح گاوس استوانه ای باشد

برای بارهای نقطه ای و کروی ← سطح گاوس کروی باشد

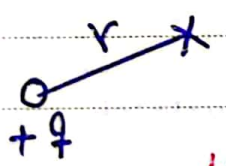
۲) سطح گاوس فرض بسته باشد

@booklet_aut

۳) بار مورد نظر داخل سطح گاوس باشد

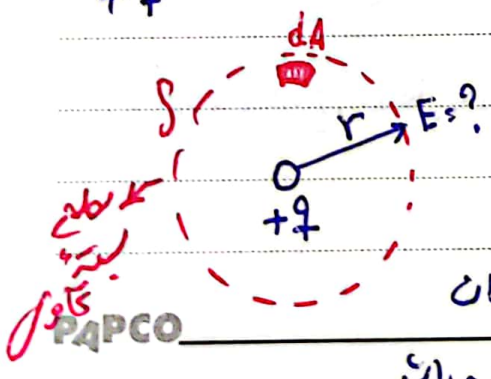
۴) $d\vec{A}$ همواره بر سطح عمود و به سمت خارج است

مثال) بدست آوردن میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه ای $+q$ در فاصله دلخواه (r) از آن:



می خواهیم با قانون گاوس آن را محاسبه کنیم ← $E = ?$ $\xrightarrow[\text{قانون کولن}]{\text{می دانیم}}$ $E = k\frac{q}{r^2}$

یعنی می خواهیم قانون کولن را از قانون گاوس بیابیم.



$$\varepsilon_0 \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc} = +q$$

سطح گاوس را به مساحت های دیفرانسیلی dA تقسیم می کنیم. می دانیم میدان الکتریکی $\vec{E}$ در هر نقطه از روی این سطح بر آن عمود است و به سمت خارج می باشد

PAPCO

Subject:
Date

dA نیز بردار عمود بر سطح و به سمت خارج است، پس زاویه بین $\vec{E}$ و dA برابر با ۰ است

$$\varepsilon_0 \oint_S E\,dA\cos 0 = q$$

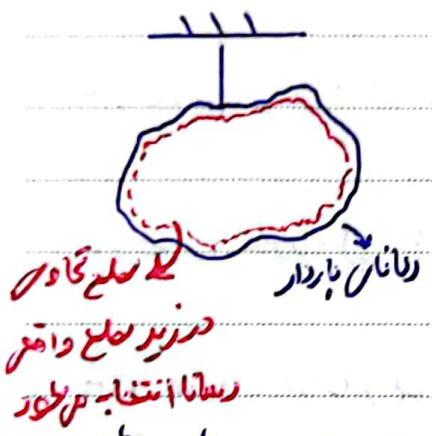
مقدار $\vec{E}$ روی سطح گاوس ثابت است چون فاصله تمام نقاط روی سطح گاوس از بار q یکسان است

$$\varepsilon_0 E \oint_S dA = q$$ در نتیجه E از انتگرال بیرون می‌آید:

$$\rightarrow \varepsilon_0 E(4\pi r^2) = +q \rightarrow E = \overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}^{k} \times \frac{q}{r^2} = k\frac{q}{r^2}$$

---

* توزیع بار در رسانای مجزای باردار



بار اضافی روی رسانا قرار داده می‌گردد

بار اضافی روی سطح رسانا توزیع می‌گردد، چرا؟

زیرا بارهای هم‌نام یکدیگر را دفع و به سطح رسانا می‌روند تا بیشترین فاصله را از هم داشته باشند.

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc}$$ این قضیه با قانون گاوس هم قابل توجیه است.

میدان $\vec{E}$ داخل رسانا ۰ است (اگر ۰ نبود، این میدان به الکترون‌های هدایت آزاد داخل رسانا نیرو وارد کرده و جریانی داخل رسانا برقرار می‌کند که البته در واقعیت چنین چیزی وجود ندارد!)

در داخل رسانا

$$\rightarrow E = 0 \rightarrow \underbrace{\varepsilon_0 \oint \overset{0}{\vec{E}}\cdot d\vec{A}}_{0} = q_{enc} \rightarrow q_{enc} = 0$$

@booklet_aut

Subject:
Date

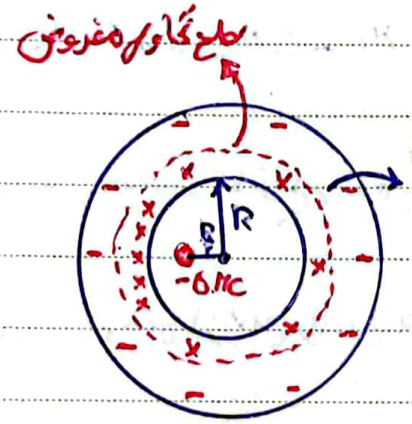
یعنی بار اضافی داخل سطح گاوسی وجود ندارد و به ناچار باید بیرون آن یعنی روی سطح رسانا توزیع شود

★ نحوه توزیع بار در یک رسانای باردار مجزای حفره دار:

در این رسانا یک بار اضافی قرار داده می‌شود

طبق همان استدلال قبلی توزیع بار اضافی روی سطح خارجی رسانا خواهد بود

مثال) یک پوسته کروی فلزی به شعاع r مفروض است. بار 5- میکروکولن داخل این پوسته و به فاصله $\frac{R}{2}$ از مرکز آن قرار دارد. پوسته خنثی است. توزیع بار در پوسته چگونه است؟ الگوی خطوط میدان الکتریکی در داخل و خارج پوسته را توصیف کنید.



یک سطح گاوسی داخل فلز و اطراف دیواره داخلی در نظر می‌گیریم. میدان داخل رسانا صفر است. این وضعیت زمانی برقرار است که $q_{enc}=0$ و چون داخل حفره بار 5μC- داریم، پس ناچار باید به اندازه 5μC+ روی دیواره پوسته بار القا گردد. این بار القا شده به صورت غیریکنواخت توزیع خواهد شد. اگر بار 5μC-

@booklet_aut

Subject:
Date

در مرکز قرار داشت در این صورت توزیع بار مثبت در دیواره داخلی نیز یکنواخت می‌شد!

از طرف دیگر پوسته خنثی است و در دیواره داخلی آن $+6\mu C$ توزیع شده پس برای خنثی کردن

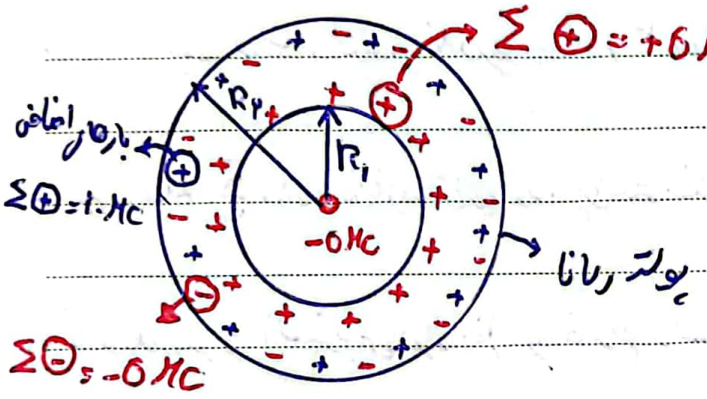
باید $-6\mu C$ روی دیواره خارجی پوسته القا شود. اما این بار توزیع شده یکنواخت است. پوسته

کروی است و توزیع غیر یکنواخت بار روی دیواره‌ی داخلی نمی‌تواند در پوسته میدان ایجاد کند

که روی توزیع دیواره‌ی خارجی اثر بگذارد.

مثال) یک بار $-6\mu C$ در مرکز و یک بار اضافی $+10\mu C$ روی رسانا قرار داده می‌شود. توزیع بار

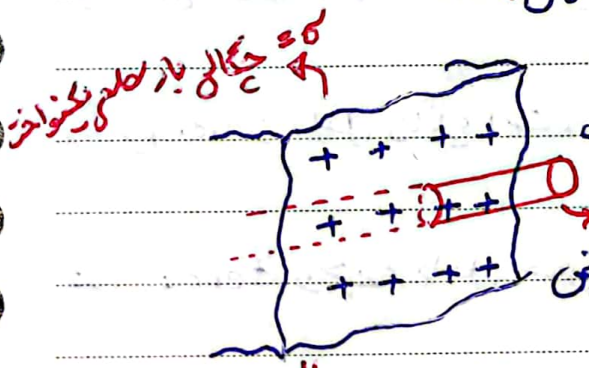
در رسانا چگونه است؟



دیواره داخلی: $+6\mu C \xrightarrow[\text{یکنواخت}]{\text{با توزیع}}$

دیواره خارجی: $+10\mu C - 6\mu C = +6\mu C$

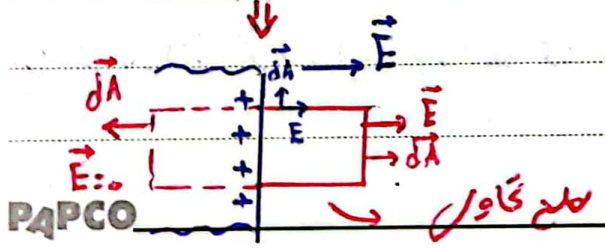
★ محاسبه میدان الکتریکی در مجاورت سطح رسانا توسط قانون گاوس:



بخش کوچکی از سطح رسانا را در نظر می‌گیریم. آنقدر کوچک

که بتوان بر انحنایی را نادیده گرفت و سطح را مسطح فرض

کرد.



* سطح گاوسی استوانه‌ای رسم می‌شود

PAPCO

@booklet_aut

یک طرف سطح تخاوی کاملا داخل رسانا است. سطح تخاوی استوانه‌ای عمود بر سطح رسانا است.

* $\vec{E}$ در سطح رسانا و درست بیرون آن باید بر سطح عمود باشد اگر چنین نبود، مولفهٔ مماس میدان بر بارهای سطحی نیرو وارد کرده آنها را به حرکت در می‌آورد. در حالی که فرض ضمنی ما این بوده که حالت الکترواستاتیک را بررسی می‌کنیم.

* اعمال قانون گاوس به سطح تخاوی:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc} \rightarrow \underbrace{\varepsilon_0 \int \cancel{\vec{E}}^{\,0}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده چپ}} + \underbrace{\varepsilon_0 \int \cancel{\vec{E}}^{\,0}\cdot d\vec{A}}_{\text{سطح جانبی}} + \underbrace{\varepsilon_0 \int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده راست}} = q_{enc}$$

صفر، چون قاعده چپ داخل رسانا و در رسانا میدان صفر است

صفر، زاویه بین $\vec{E}$ و $d\vec{A}$ ، 90° است. پس شار عبوری از سطح جانبی نداریم

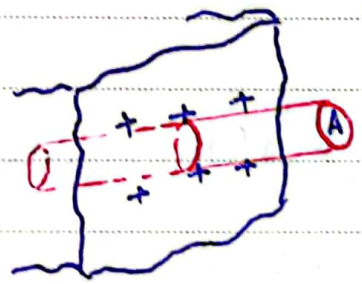
$$\varepsilon_0 \int E\, dA \cos 0$$

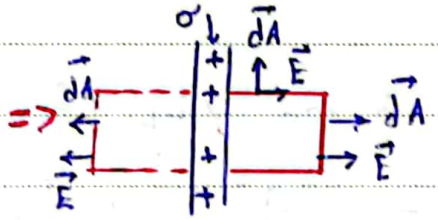
$$\rightarrow \varepsilon_0 E \underbrace{\int dA}_{\text{مساحت قاعده } A} = q_{enc} \rightarrow \varepsilon_0 E A = \sigma A \rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

در مجاورت سطح رسانا

اگر بار ⊕ باشد میدان به سمت خارج، و اگر منفی باشد به سمت داخل رسانا است.

* ورق نارسانا، روی یک ورق نازک بی‌نهایت بزرگ نارسانا بار یکنواخت با چگالی $+\sigma$ وجود دارد. می‌خواهیم میدان الکتریکی را در فاصله نزدیک ۲ از ورق بیابیم.





@booklet_aut

Subject:
Date

یک سطح تخاوی استوانه‌ای، با مساحت قاعده A در نظر می‌گیریم

$$\varepsilon \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc} = \sigma A$$

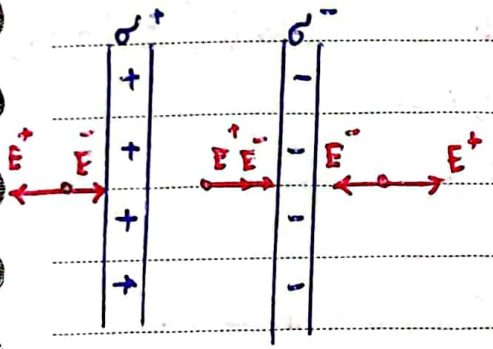
$$\underbrace{\varepsilon_0 \int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده چپ}} + \underbrace{\cancel{\varepsilon_0 \int \vec{E}\cdot d\vec{A}}}_{\text{سطح جانبی}} + \underbrace{\varepsilon_0 \int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{قاعده راست}} = \sigma A$$

$E \perp dA$

$$\rightarrow \varepsilon_0 \int E\,dA\cos 0 + 0 + \varepsilon_0 \int E\,dA\cos 0 = \sigma A \rightarrow \varepsilon_0 E A + 0 + \varepsilon_0 E A = \sigma A$$

$$\rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$ میدان در مجاورت ورق باردار

مثال: برخی از ۲ ورق موازی نارسانا که هر کدام بار یکنواخت ثابتی روی یک وجه خود دارند در شکل زیر نشان داده شده است. چگالی های بار سطحی $\sigma^+ = 6.8\ \mu C/m^2$ و $\sigma^- = -4.3\ \mu C/m^2$ است. میدان الکتریکی را در سمت چپ ورق‌ها، بین ۲ ورق و سمت راست ورق‌ها بیابید.



$$E^+ = \frac{\sigma^+}{2\varepsilon_0} = \frac{6.8\times10^{-6}\ C/m^2}{2\times 8.85\times10^{-12}\ C^2/N\cdot m^2} = 3.84\times10^{5}\ N/C$$

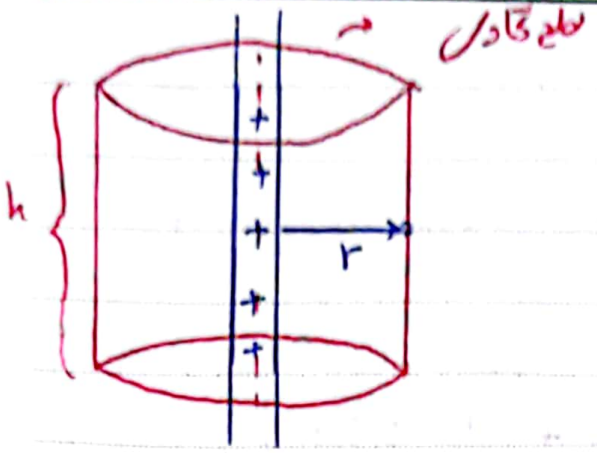
$$E^- = \frac{\sigma^-}{2\varepsilon_0} = \frac{4.3\times10^{-6}}{2\times 8.85\times10^{-12}} = 2.42\times10^{5}\ N/C$$

$E_R = E^+ - E^- = 1.4\times10^{5}\ N/C$ به سمت راست (راست) / $E_L = E^+ - E^- = 1.4\times10^{5}\ N/C$ به سمت چپ (چپ)

$E_i = E^+ + E^- = 6.3\times10^{-5}\ N/C$ به سمت راست (وسط)

PAPCO

@booklet_aut



مثال * میله‌ی باردار بی نهایت بلند پلاستیکی،

روی میله بار یکنواخت مثبت با چگالی خطی λ قرار دارد.

میدان را در فاصله r از محور میله بیابید.

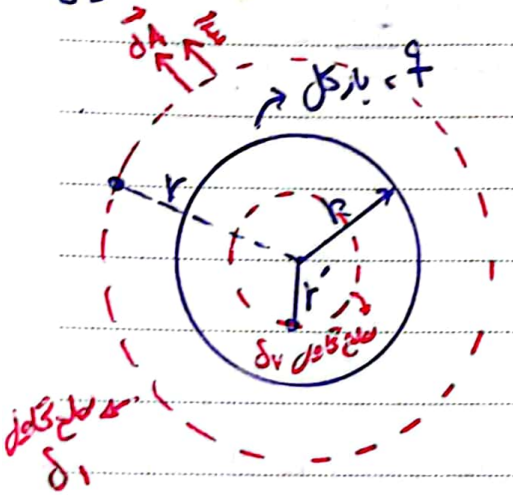
$$\varepsilon_0 \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc} = \lambda h$$

از قاعده بالا و پایین کاری عبور نمی‌کند زیرا زاویه‌ی $\vec{E}$ و $d\vec{A}$ ۹۰° است اما در سطح جانبی زاویه $\vec{E}$ و $d\vec{A}$ ۰ است!

$$\underset{\text{سطح جانبی}}{\varepsilon_0 \int \vec{E}\cdot d\vec{A}} = \lambda h \rightarrow \underset{\text{سطح جانبی}}{\varepsilon_0 E \int d\vec{A}} = \lambda h$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 E A = \lambda h \rightarrow \varepsilon_0 E (2\pi r h) = \lambda h \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

مثال * پوسته کروی، یک پوسته باردار کروی با بار کل q و شعاع R مفروض است، میدان الکتریکی در داخل و خارج پوسته بیابید.



الف) در خارج پوسته،

$$r \geq R : \varepsilon_0 \oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc} = q$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 \int E\, dA \cos 0 = q \rightarrow \varepsilon_0 E \int dA = q$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 E (4\pi r^2) = q \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\frac{q}{r^2}$$ → اولین قضیه پوسته

ب) در داخل پوسته، $R \geq r'$

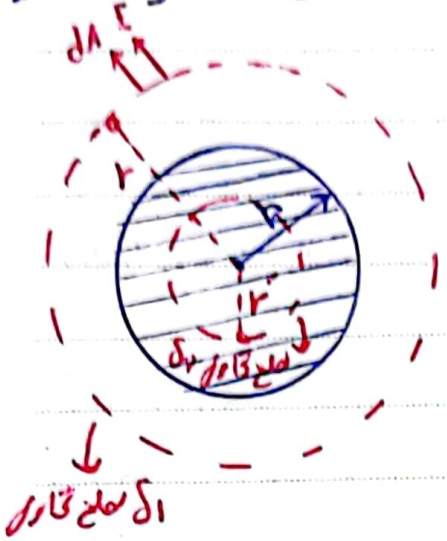
$$\varepsilon_0 \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc} = 0$$ (داخل سطح تحاوی S_2 باری نداریم)

$$\rightarrow E = 0$$

@booklet_aut

Subject:
Date

مثال) یک توزیع بار کروی به شعاع R با بار کل q و چگالی بار حجمی ρ را فرض کنید. میدان الکتریکی را در داخل و خارج این توزیع بار بیابید.



الف) $r \geq R$

حجم کره باردار

$$\varepsilon_0 \oint E \cdot dA = q_{enc} = q = \rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

ثابت

$$\varepsilon_0 E (4\pi r^2) = \rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \rightarrow \boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}}$$

$$\rightarrow E \propto \frac{1}{r^2}$$

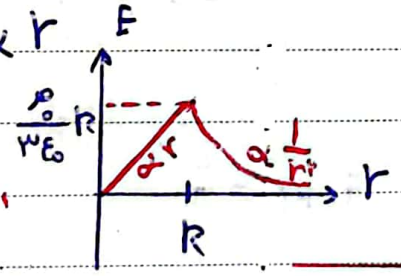
ب) $r' \leq R$

$$\varepsilon_0 \oint_{S_2} E \cdot dA = q_{enc} = q' = \rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi r'^3\right) \rightarrow \left(q' = q\frac{r'^3}{R^3}\right)$$

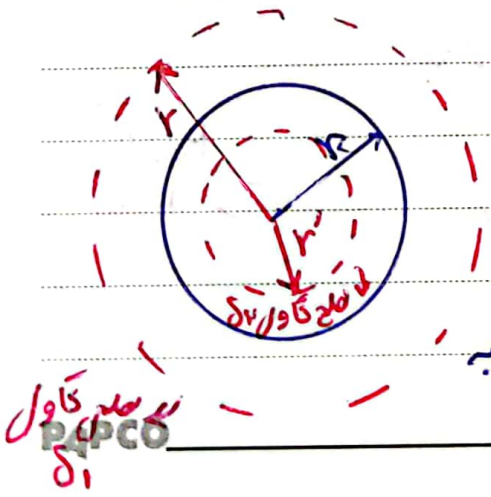
$$\varepsilon_0 E (4\pi r'^2) = \rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi r'^3\right) \rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r'^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q r'}{R^3} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r'}$$

$$\rightarrow E \propto r$$

نمودار



★مثال) مسئله قبل را بدان چگال بار حجمی $\rho = \rho_0 r$ حل کنید که در آن ρ_0 مقداری ثابت و مثبت و r فاصله هر نقطه از مرکز کره است.



الف) $r \geq R$

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 E_1 (4\pi r^2) = q_{enc}$$

چون چگالی بار حجمی ثابت نیست، باید q_{enc} را بصورت مرحله بعد محاسبه کنیم.

PAPCO

@booklet_aut

Subject
Date

$q_{enc} = \int dq = \int \rho\, dV$

$\int \rho\, dV$ را می توان از ۲ راه بدست آورد.

روش ۱)

$$\int \rho\, dV = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} (\rho_0 r)(r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi)$$

$$= \rho_0 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} r^3 dr = \rho_0 \times 2 \times 2\pi \times \frac{R^4}{4} = \pi \rho_0 R^4$$

روش ۲) چون در چگالی بار حجمی متغیر ما فقط شعاع r است پس می توان dV را بصورت زیر نوشت،

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$$

$$\rightarrow \int \rho\, dV = \int_{r=0}^{R} (\rho_0 r)(4\pi r^2 dr) = 4\pi\rho_0 \int_0^{R} r^3 dr = \pi \rho_0 R^4$$

ادامه مسئله:

$$\varepsilon_0 E_1 (4\pi r^2) = q_{enc} = \pi \rho_0 R^4 \rightarrow E_1 = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \times \frac{R^4}{r^2} \rightarrow E_1 \propto \frac{1}{r^2}$$

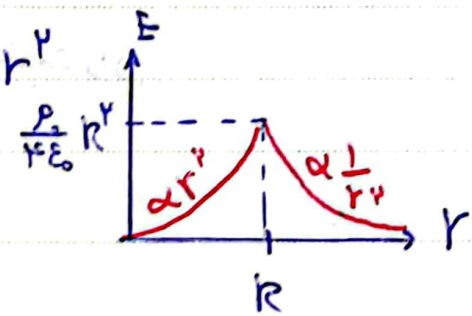
ب) $r' \leq R$

$$\varepsilon_0 \oint_{S_2} \vec{E_2} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

$$\varepsilon_0 E_2 (4\pi r^2) = q_{enc}$$

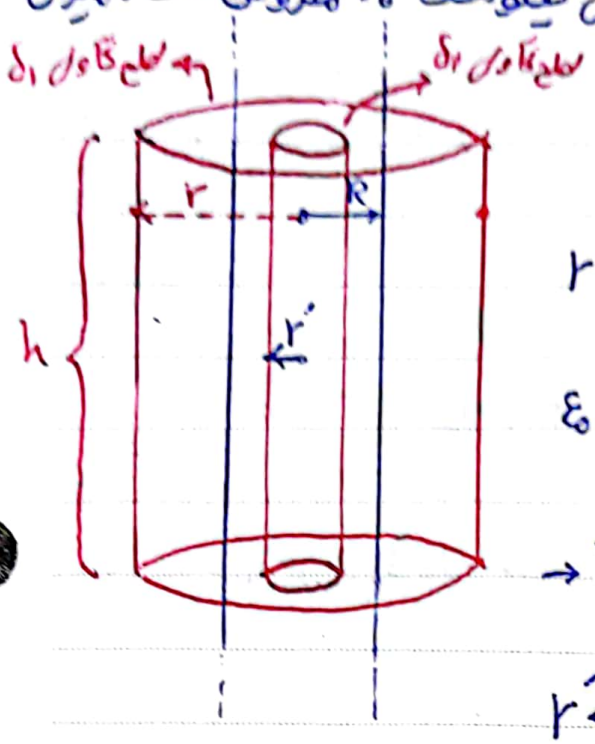
$$q_{enc} = \int dq = \int \rho\, dV = \int_{r=0}^{r} (\rho_0 r)(4\pi r^2 dr) = 4\pi\rho_0 \frac{r^4}{4} = \pi \rho_0 r^4$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 E_2 (4\pi r^2) = \pi \rho_0 r^4 \rightarrow E_2 = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^2 \rightarrow E_2 \propto r^2$$



@booklet_aut

مثال) یک میله باردار نامحدود به شعاع R و چگالی بار حجمی یکنواخت ρ_0 مفروض است. میدان الکتریکی را در نقاط $r \geq R$ و $r < R$ بیابید.



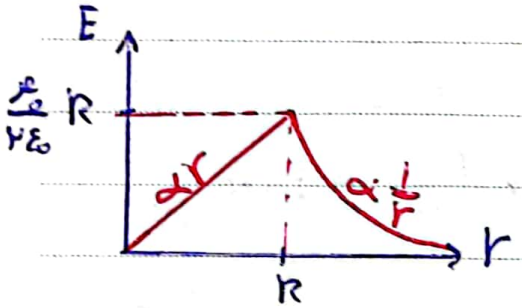
$$r \geq R: \ \varepsilon_0 \oint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

$$\varepsilon_0 E_1 (2\pi r h) = q_{enc} = \rho_0 (\pi R^2 h)$$

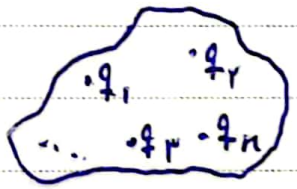
$$\rightarrow E_1 = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \times \frac{R^2}{r} \rightarrow E_1 \propto \frac{1}{r}$$

$$r' < R: \ \varepsilon_0 \oint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 E_2 (2\pi r' h) = \rho_0 (\pi r'^2 h) \rightarrow E_2 = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} r \rightarrow E_2 \propto r$$



فصل ۴: پتانسیل الکتریکی



انرژی پتانسیل الکتریکی:

سیستم متشکل از ۲ یا چند جسم باردار را در نظر بگیرید. وقتی یک نیروی الکترواستاتیک در این سیستم عمل کند، می‌توان به آن یک انرژی پتانسیل الکتریکی (U) نسبت داد.

LINOMAX
@booklet_aut

Subject:
Date

- اگر بار های سیستم از حالت اولیه i به حالت نهایی f بروند، نیروی الکترواستاتیک کار W را روی ذرات انجام می‌دهد. (مستقل از مسیر) $\Delta U = U_f - U_i = -W$: تغییر انرژی پتانسیل سیستم

نکته: برای سادگی معمولا آرایش مرجع یک سیستم را آرایشی می‌گیریم که در آن تمام ذرات بی‌نهایت از هم دورند و انرژی پتانسیل مرجع را ۰ در نظر می‌گیریم.

یکای U: ژول If $U_1 = 0$ و $U_2 = U \rightarrow U = -W_\infty$

* پتانسیل الکتریکی: انرژی پتانسیل بر واحد بار در هر نقطه از میدان الکتریکی را پتانسیل الکتریکی نامیده و با V نمایش می‌دهیم: (مستقل از مقدار بار) $V = \frac{U}{q}$: پتانسیل الکتریکی

* اختلاف پتانسیل الکتریکی: اختلاف پتانسیل الکتریکی بین ۲ نقطه i و f از یک میدان الکتریکی برابر است با: $\Delta V = V_f - V_i = \frac{U_f}{q} - \frac{U_i}{q} = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-W}{q}$

If مرجع $= \infty \rightarrow U_i = 0$ و $U_f = U \rightarrow V_i = 0$ و $V_f = V \rightarrow V = -W_\infty \times \frac{1}{q}$

یکای δI پتانسیل: J/C که به آن ولت نیز می‌گویند. $\frac{\text{ژول}}{\text{کولن}}$ = ۱ ولت

← یکای جدید برای میدان الکتریکی: $1\,N/C \xlongequal{E = \frac{F}{q} = \frac{\frac{W}{d}}{q}} 1\,\frac{V}{m}$

← یکای جدید برای حوزه های اتمی و زیراتمی: $1\,eV = 1.6 \times 10^{-19}\,C \times 1\,J/C = 1.6 \times 10^{-19}\,J$

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

★ کار انجام شده توسط یک نیروی اعمالی:

اگر با اعمال یک نیرو ذره‌ای با بار q را در یک میدان الکتریکی از نقطه i به f ببریم، در این حالت نیروی اعمالی کار که با W_{app} نشان می‌دهیم بصورت زیر بدست می‌آید:

کار نیروی الکتروستاتیکی

$$\Delta k = k_f - k_i = W_{app} + W$$

اگر ذره قبل و بعد از حرکت ساکن باشد:

$$\Delta k = 0 = W_{app} + W \rightarrow W_{app} = -W = \Delta U = U_f - U_i = q\Delta V$$

★ سطوح هم پتانسیل:

نقاط مجاوری که پتانسیل الکتریکی یکسانی دارد یک سطح هم پتانسیل تشکیل می‌دهند که می‌تواند یک سطح فرضی یا یک سطح فیزیکی واقعی باشد:

- اگر ذره را بین ۲ نقطه i و f از یک سطح هم پتانسیل جابه‌جا کنیم، میدان الکتریکی کار خالص انجام نمی‌دهد!

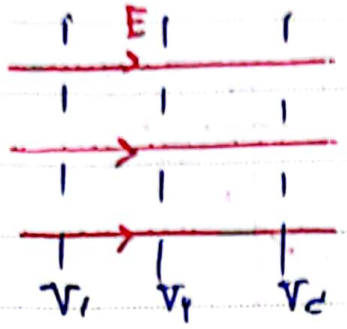
- کاری که روی بار آزمون انجام می‌شود تا آن را از یک سطح هم پتانسیل به سطح هم پتانسیل دیگری ببرد مستقل از محل نقاط اولیه و نهایی است (مستقل از مسیر است) و فقط به اختلاف پتانسیل این سطوح وابسته است

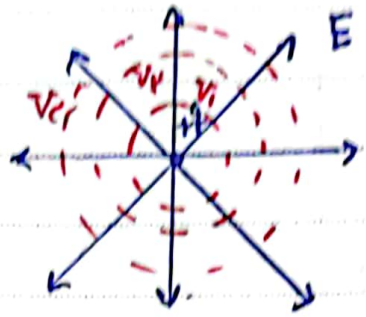
PAPCO

@booklet_aut

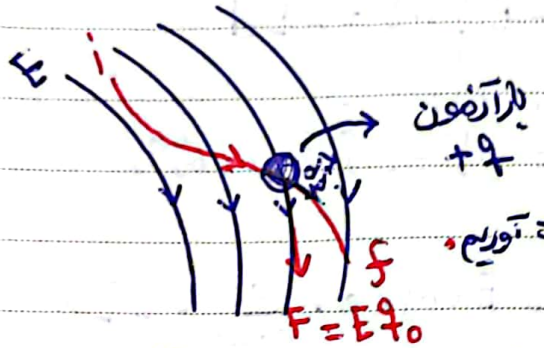
Subject:
Date

- سطوح هم پتانسیل عمود بر خطوط میدان الکتریکی اند.





* بدست آوردن پتانسیل الکتریکی از میدان الکتریکی:



اگر بردار میدان الکتریکی را در امتداد مسیر بین ۲ نقطهٔ i و f بدانیم می‌توانیم اختلاف پتانسیل بین i و f را بدست آوریم.

باید کاری را که میدان برای بردن یک بار آزمون ⊕ از i به f انجام می‌دهد را بدست آوریم. در هر نقطه از مسیر نیروی F به بار وارد شده و یک جابه‌جایی دیفرانسیلی $d\vec{s}$ روی آن انجام می‌دهد.

کار دیفرانسیلی dW ناشی از جابه‌جایی برابر است با:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = q_0\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

کار کل از i به f : $W = \int_i^f dW = \int_i^f q_0\vec{E}\cdot d\vec{s} = q_0\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = \frac{-W}{q_0} \rightarrow \boxed{\Delta V = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

@booklet_aut

If $V_i = 0$ (مرجع) و $V_f = V \rightarrow V = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$

پتانسیل الکتریکی هر نقطه نسبت به مرجع

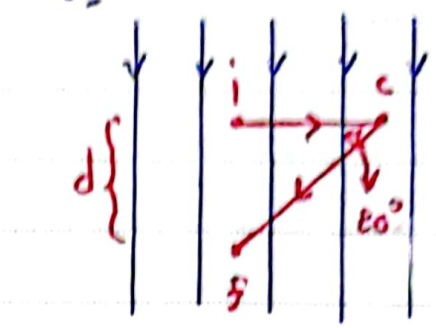
PAPCO

* $d\vec{s} = d\vec{l}$ ← در بعضی کتابها
به جابه‌جایی طولی

Subject:
Date

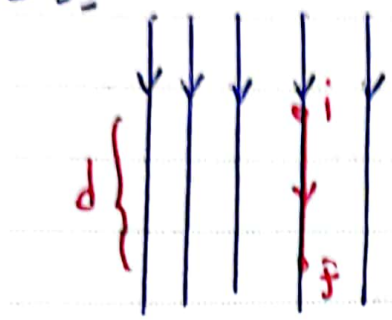
مثال)

(ب)



$\Delta V = ?$

(الف)



$\Delta V = ?$

(الف) $V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_i^f E\,ds\cos 0^\circ = -E\int_i^f ds = -Ed$

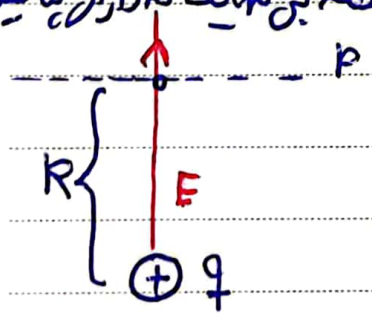
(ب) $V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_i^c \vec{E}\cdot d\vec{s} - \int_c^f \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_i^c E\,ds\cos 90^\circ$

$-\int_c^f E\,ds\cos 60^\circ = 0 - E\cos 60\int_c^f ds = -E\cos 60\times\frac{d}{\cos 60} = -Ed$

نکته: به هنگام محاسبه اختلاف پتانسیل بین ۲ نقطه مسیری انتخاب کنید که محاسبه انتگرال میان آن ۲ نقطه راحت تر باشد.

* پتانسیل الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای)

می‌خواهیم پتانسیل الکتریکی نقاط اطراف یک بار نقطه‌ای را نسبت به نقطه بی‌نهایت که دارای پتانسیل صفر است، بدست بیاوریم. نقطه P را در فاصله R از یک ذره باردار با بار q+ در نظر می‌گیریم. یک بار آزمون q_0+ را از نقطه P به



@booklet_aut

Subject:
Date

بی نهایت می‌بریم. ساده‌ترین مسیر را انتخاب می‌کنیم. خط‌هایی از محل ذره تا بی نهایت که از نقطه P می‌گذرد. در این مسیر $E = \frac{kq}{r^2}$ است.

$$\overset{V_\infty}{V_f} - \overset{V_R}{V_i} = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{l} \rightarrow -V_R = -\int_R^\infty E\, dl \cos 0 \rightarrow V_R = \int_R^\infty k\frac{q}{r^2}\, \overset{dr}{dl}$$

$$= kq\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = kq\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_R^\infty \Rightarrow V_R = -\frac{kq}{R}$$

- با تبدیل R به r می‌توان گفت پتانسیل الکتریکی ناشی از یک ذره باردار q در فاصله r از آن برابر است با:

$$V = \frac{kq}{r}$$

- اگر q مثبت بود ← V مثبت و اگر q منفی بود ← V منفی است

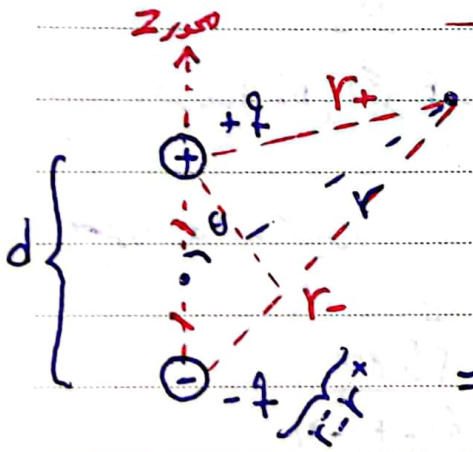
★ پتانسیل ناشی از یک دسته بار نقطه‌ای:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{kq_i}{r_i} = k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

← فاصله شعاع بار i از نقطه مورد نظری که می‌خواهیم V را در آن محاسبه کنیم.

@booklet_aut

* پتانسیل الکتریکی ناشی از یک دوقطبی الکتریکی:



$$V_P = (V_+) + (V_-) = \frac{kq}{r_+} - \frac{kq}{r_-} = kq\left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right]$$

$$= kq\left[\frac{r^- - r^+}{r^+ r^-}\right] \star$$

$r^+ r^- = r^2$

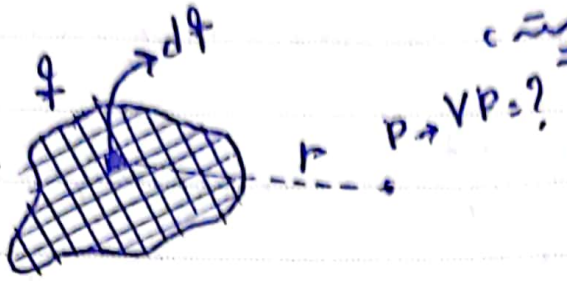
$r^- - r^+ = d\cos\theta$

$$\xrightarrow{\star} V_P = kq\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{kp\cos\theta}{r^2}$$

★ qd: اندازه بردار گشتاور دوقطبی الکتریکی

Subject:
Date

* پتانسیل الکتریکی ناشی از توزیع بارهای پیوسته:

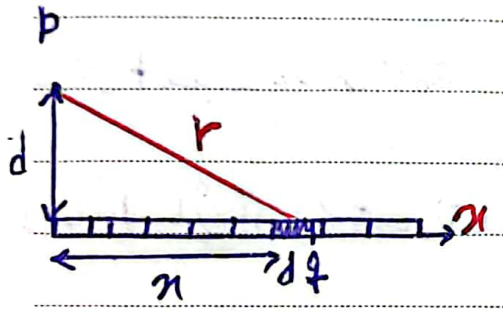


$$dV = k\frac{dq}{r}$$

$$\rightarrow V = \int dV \rightarrow V = k\int \frac{dq}{r}$$

$$dq \begin{cases} \lambda\, dl \\ \sigma\, dA \\ \rho\, dV \end{cases}$$

مثال) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک خط باردار، یک میله نازک نازک به طول L مفروض است. بار مثبت با چگالی یکنواخت λ روی آن قرار دارد. می‌خواهیم پتانسیل الکتریکی را در نقطه P که در فاصله عمودی d از سر میله قرار دارد بدست آوریم.



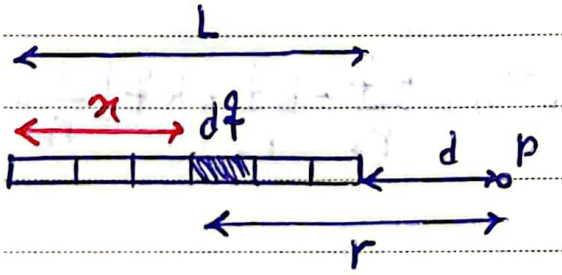
$\rightarrow dl = dx$

$$dV = \frac{k\,dq}{r} \rightarrow V_P = \int dV = k\int \frac{dq}{r}$$

$$= k\int \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{x^2+d^2}} \rightarrow V_P = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$= k\lambda \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+d^2}\right)\right)\Big|_{x=0}^{L} \rightarrow V_P = k\lambda\left[\ln\frac{L+\sqrt{L^2+d^2}}{d}\right]$$

مثال) در مثال قبل اگر P در امتداد میله و به فاصله d از آن قرار داشت، پتانسیل الکتریکی V را مجددا محاسبه کنید.



$$dV = \frac{k\,dq}{r}$$

$$\rightarrow V_P = \int dV = k\int_0^L \frac{\lambda\, dx}{(L+d-x)}$$

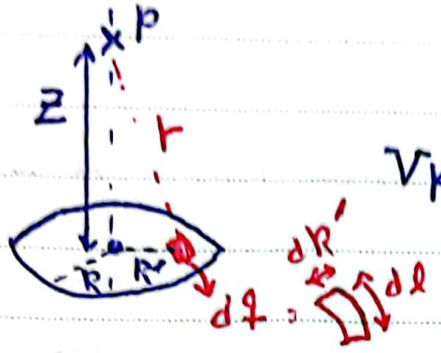
$$= -k\lambda \ln(L+d-x)\Big|_{x=0}^{L} = +k\lambda \ln\frac{L+d}{d}$$

@booklet_aut

Subject:
Date

مثال) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک قرص باردار،

یک قرص باردار به شعاع R و چگالی بار سطحی یکنواخت σ مفروض است. پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای روی محور قرص به فاصله z از آن چقدر است؟



$$V_P = \int dV = k\int \frac{dq}{r} = k\int \frac{\sigma dA}{r} = k\int \frac{\sigma \overbrace{dl}^{R'd\varphi} dR'}{r}$$

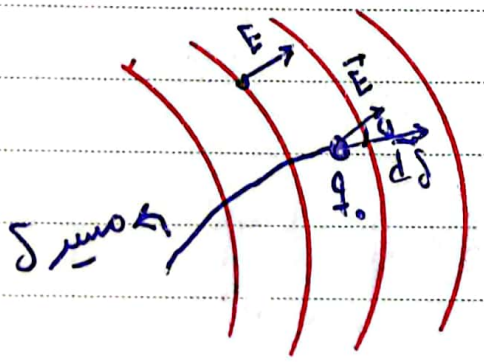
$$= k\int \frac{\sigma (R'd\varphi dR')}{\sqrt{z^2+R'^2}}$$

$$\rightarrow V_P = k\int_{R'=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\sigma R'd\varphi dR'}{(z^2+R'^2)^{\frac{1}{2}}} = k\int_{R'=0}^{R} \frac{\sigma R'dR'}{(z^2+R'^2)^{\frac{1}{2}}} \times \cancel{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}^{\,2\pi}$$

$$\rightarrow V_P = 2k\sigma\pi (z^2+R'^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_{R'=0}^{R} = 2k\sigma\pi\left[\sqrt{z^2+R^2} - z\right]$$

★ بدست آوردن میدان الکتریکی از روی پتانسیل الکتریکی

اگر در ناحیه پتانسیل تمام نقاط را بیابیم، می‌توانیم یک دسته سطح هم پتانسیل را بیابیم. فرض کنید اختلاف پتانسیل ۲ سطح مجاور هم dV باشد. میدان الکتریکی $\vec{E}$ در هر نقطه P بر سطح هم پتانسیل که از P می‌گذرد عمود است.



@booklet_aut

Subject:
Date

فرض کنید یک بار آزمون q_0 با جابه‌جایی $\vec{ds}$ از یک سطح هم پتانسیل به سطح هم پتانسیل مجاور حرکت کند. کاری که میدان $\vec{E}$ روی بار آزمون انجام می‌دهد،

$$W = -\Delta U = -q_0 dV \quad *$$

از طرف دیگر همین کار برابر است با:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{ds} = q_0\vec{E}\cdot\vec{ds} \quad **$$

$$\xrightarrow[**]{*} -q\,dV = q\,\vec{E}\cdot\vec{ds} = -qE\,ds\cos\theta \rightarrow E\cos\theta = -\frac{dV}{ds}$$

تصویر E در امتداد مسیر s

تصویر E در امتداد s را با E_s نمایش می‌دهیم ($E_s = E\cos\theta$)

$$\rightarrow E_s = -\frac{dV}{ds} \rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{dV}{dx} \\ E_y = -\frac{dV}{dy} \\ E_z = -\frac{dV}{dz} \end{cases}$$

$s = x, y, z$

به عنوان مثال برای قرص باردار:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - z\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_x = E_y = 0 \\ E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{\sqrt{z^2+R^2}}{z}\right) \end{cases}$$

@booklet_aut

Subject:
Date

مثال عددی) اگر در ناحیه‌ای $V = 4x^2 - 6y$ باشد، میدان الکتریکی در آن ناحیه چقدر است؟

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -(8x) = -8x$$

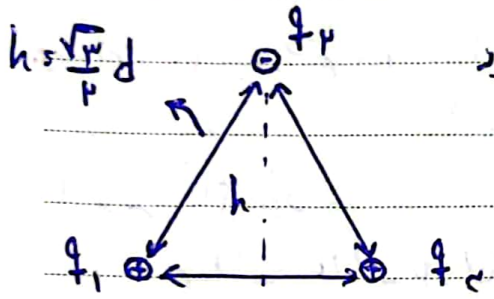
$$E_y = -\frac{dV}{dy} = -(-6) = +6$$

$$\rightarrow \vec{E} = -8x\hat{i} + 6\hat{j}$$

★ انرژی پتانسیل الکتریکی یک سیستم ذرات باردار:

انرژی پتانسیل الکتریکی یک سیستم متشکل از بارهای نقطه‌ای ثابت برابر با کاری است که باید توسط یک عامل خارجی صورت گیرد تا این سیستم را با آوردن بارها از فواصل بی‌نهایت دور تشکیل دهد.

مثال) سه بار نقطه‌ای توسط نیروهای نشان داده شده‌ای در محل خود ثابت نگه داشته شده‌اند. انرژی پتانسیل الکتریکی U این سیستم چقدر است؟



$d = 12cm$ $\quad q_1 = q$ و $q_2 = -4q$ و $q_3 = +2q$ و $q = 150\,nC$

سیستم را از حالتی که هر ۳ بار در بی‌نهایت دور هستند تجسم کنید. ابتدا بار q_1 را از بی‌نهایت آورده و در محلش قرار می‌دهیم چون به این بار نیرویی وارد نمی‌شود لذا کاری انجام نمی‌دهیم. اما برای آوردن q_2 از بی‌نهایت و قرار دادن آن از محل تعیین شده باید کاری انجام دهیم زیرا q_1 در این حرکت نیروی الکترواستاتیک q_2 وارد می‌کند.

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

$\rightarrow U = V q_0 = \frac{k q q_0}{r}$

$U_{12} = k \frac{q_1 q_2}{d}$ ، انرژی پتانسیل متناظر با ۲ بار q_1 و q_3

به همین ترتیب q_3 را از بی‌نهایت آورده و در محل مورد نظر قرار می‌دهیم. در این صورت

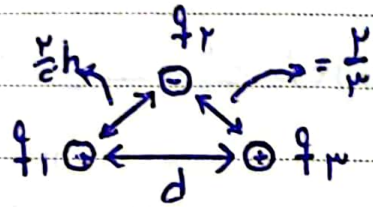
انرژی پتانسیل متناظر با q_1 و q_3 : $U_{13} = k \frac{q_1 q_3}{d}$

و همچنین، $U_{23} = k \frac{q_2 q_3}{d}$

انرژی پتانسیل الکتریکی سیستم ، $U_i = U_{12} + U_{23} + U_{13} = \frac{k}{d}(q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_1 q_3)$

$= -1.7 \times 10^{-20} J$

★ توجه: اگر در سیستم قبل یکی از بارها مثل q_2 را به محل برخورد عمودمنصف‌ها بیاوریم چقدر کار باید انجام شود؟

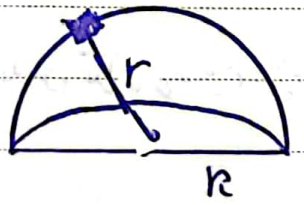


$= \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} d = \frac{\sqrt{3}}{3} d$

$U_f = ? = U_{12} + U_{23} + U_{13}$

$W = -\Delta U = (-U_f + U_i)$

مثال) بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho_0 r^2$ در درون نیمکره‌ای نارسانا با شعاع R توزیع می‌شود. مقدار پتانسیل الکتریکی را در مرکز نیمکره حساب کنید.



$V = k \int \frac{dq}{r} = k \int \frac{\rho dV}{r} = k \int \frac{(\rho_0 r^2)(r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi)}{r}$

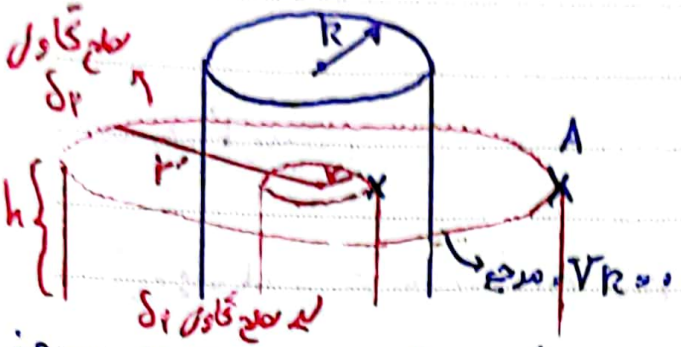
$\rightarrow V = \rho_0 k \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R} r^3 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

@booklet_aut

Subject:
Date

$$= k\rho_0 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \times \int_{r=0}^{R} r^3 dr = 2\pi k \rho_0 \frac{R^4}{4} = \frac{\rho_0 R^4}{8\varepsilon_0}$$

مثال) استوانه توپر بی نهایت طویل با توزیع بار حجمی یکنواخت ρ_0 مفروض است. پتانسیل را در هر نقطه‌ای در داخل و خارج آن بیابید.



$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$\text{if } V_i = V_R = 0 \xrightarrow[V_f = V_A]{} V_A - \cancel{V_R}^{\,0} = -\int_R^A \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

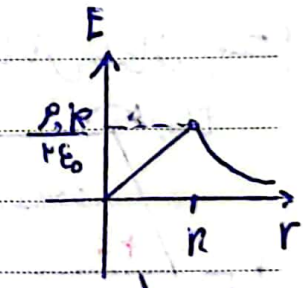
لذا میدان را در داخل یا خارج استوانه نیاز داریم.

$$\text{If } R > A \rightarrow \text{داخل استوانه} \rightarrow \varepsilon_0 \oint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 E_1 (2\pi r h) = (\pi r^2 h)\rho_0 \rightarrow \boxed{E_1 = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}}$$

$$\text{If } R < A \rightarrow \text{خارج استوانه} \rightarrow \varepsilon_0 \oint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 E_2 (2\pi r' h) = (\pi R^2 h)\rho_0 \rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r'}}$$



$$\text{If } r < R,\ V_A - V_R = -\int_R^A \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = -\int_R^A E_1\, dr \cos 180$$

$$\rightarrow V_A = \int_{r=R}^{r} \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} dr = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{r^2}{2}\Big|_R^r = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}(r^2 - R^2) < 0$$

$$\text{If } r' > R \rightarrow V_A - V_R = -\int_R^A \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = -\int_R^A E_2\, dr' \cos 0$$

@booklet_aut

Subject:
Date

$$\rightarrow V_A = -\int_{r=R}^{r} \frac{\rho_0 r^2}{2\varepsilon_0 r}\, dr \rightarrow V_A = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} \ln r \Big|_R^r$$

$$\rightarrow V_A = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) < 0$$

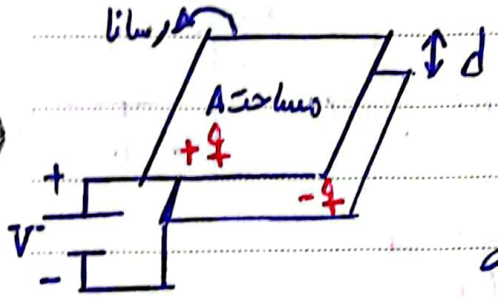
فصل ۵: ظرفیت:

- خازن: قطعه‌ای که توانایی ذخیره کردن انرژی الکتریکی را دارد

(تفاوت خازن با باطری؟)

← خازن از ۲ رسانا که از لحاظ الکتریکی از هم و از محیط اطراف مجزا شده باشند، یک خازن تشکیل می‌دهند.

- ظرفیت: آرایش مرسوم و مناسب برای یک خازن متشکل از ۲ صفحه رسانای موازی است!



هنگام پر شدن خازن روی صفحات آن بارهای هم اندازه و غیرهم‌علامت $+q$ و $-q$ ایجاد می‌گردد. وقتی از بار روی خازن حرف می‌زنیم منظورمان بار q (یعنی اندازه بار روی یکی از صفحات) است؛ به عبارتی q بار خالص خازن نیست! (بار خالص = ۰)

$$q \propto V \rightarrow q = CV$$

PAPCO

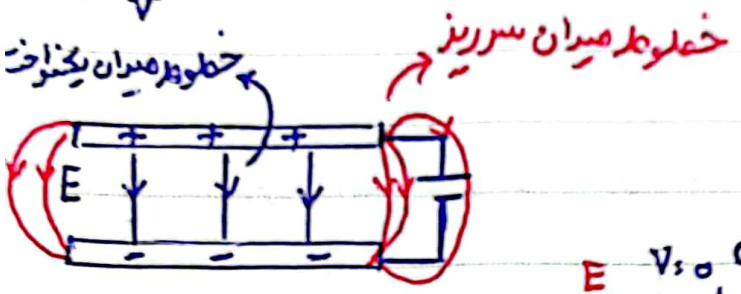
@booklet_aut

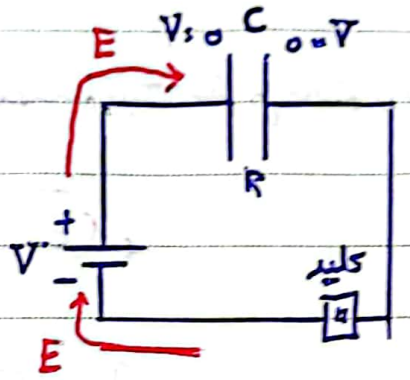
Subject:
Date

★ C (که ثابت تناسب است) ظرفیت خازن نام دارد. C به وضعیت هندسی صفحات بستگی دارد.

- یکای SI ظرفیت، کولن بر ولت است که فاراد نام دارد:

$1\frac{C}{V} = 1F$





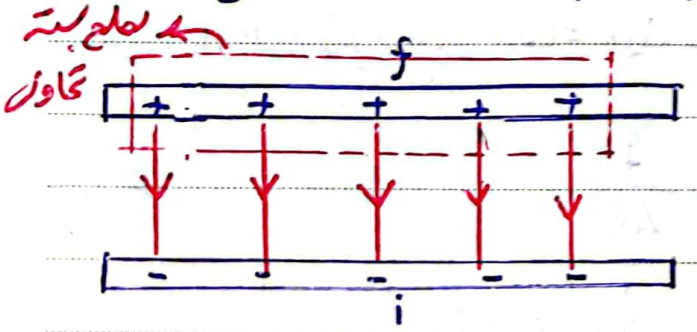
★ مکانیزم پرشدن خازن،

(بیشتر بدانید!)

★ نحوه محاسبه ظرفیت خازن C

۱) فرض می‌کنیم بار q روی صفحات خازن وجود دارد

۲) میدان الکتریکی $\vec{E}$ بین صفحات را برحسب این بار با استفاده از قانون گاوس محاسبه می‌کنیم.



فرمول: $\varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = q$

(در تمام موارد این درس، سطح گاوس به گونه‌ای است که در صورت عبور بار از آن میدان $\vec{E}$ دارای اندازه ثابت E بوده و بردارهای $\vec{E}$ و $d\vec{A}$ موازی باشند)

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

مساحت بخش از سطح گاوسی که بار از آن عبور می‌کند

در حالت خاص $\rightarrow \varepsilon_0 E A = q$

- برای راحتی همیشه سطح گاوسی را طوری انتخاب می‌کنیم که بار روی صفحه مثبت را کامل دربرگیرد

۳) با داشتن $\vec{E}$، اختلاف پتانسیل V بین ۲ صفحه را محاسبه می‌کنیم:

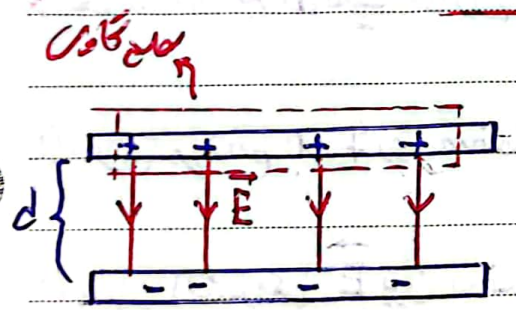
$$V = V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

نکته: همیشه مسیری را انتخاب می‌کنیم که روی یک خط میدان الکتریکی باشد و چون مسیر انتگرال‌گیری از صفحه منفی شروع و به صفحه مثبت ختم می‌شود، در این صورت $\vec{E}$ و $d\vec{l}$ برخلاف جهت هم خواهند بود و لذا $(\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dl)$

$$V = \int_-^+ E\, dl$$

۴) C را از رابطه $(C = \frac{q}{V})$ می‌یابیم.

مثال) محاسبه ظرفیت خازن با صفحات موازی:



صفحات خازن آنقدر بزرگ و به هم نزدیکند که می‌توان از میدان لبه زیر در لبه‌ی صفحات صرف نظر کرد و این در تمام ناحیه‌ی بین صفحات پشت فرض کرد.

$$\varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \rightarrow \varepsilon_0 E A = q \rightarrow E = \frac{q}{A\varepsilon_0}$$

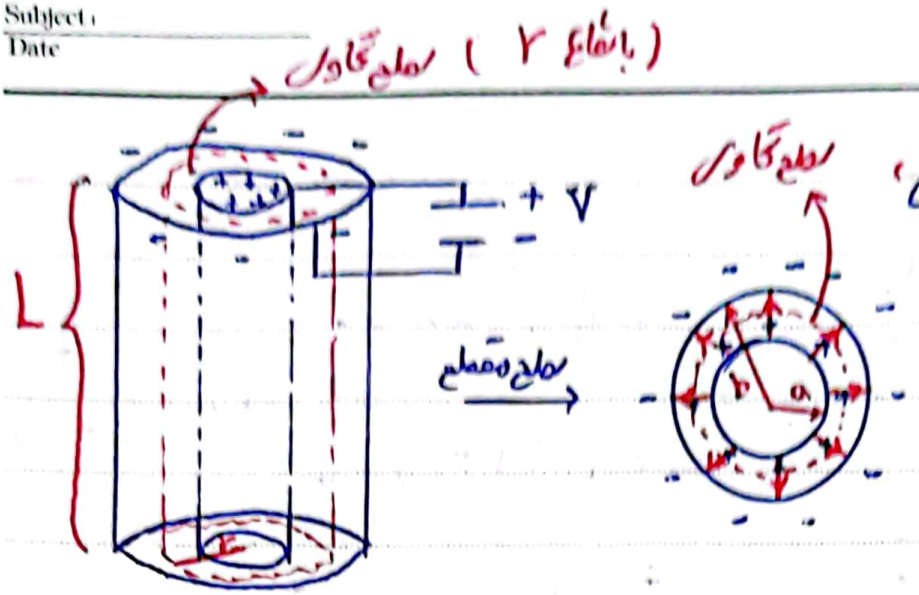
$$V = \int_-^+ E\, dl = \frac{q}{A\varepsilon_0} \int_-^+ dl = \frac{qd}{A\varepsilon_0} \xrightarrow{C = \frac{q}{V}} C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

C فقط به A و d بستگی دارد!

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date



★ محاسبه ظرفیت خازن استوانه‌ای:

خازن استوانه‌ای به بلندی L که از ۲ استوانه هم محور به شعاع های a و b مفروض است.

فرض می‌کنیم $b \ll L$ در این صورت می‌توان از میدان های مدرج در لبه های استوانه چشم پوشی کرد.

۱) فرض می‌کنیم روی صفحات رسانای خازن بار q قرار می‌دهیم.

۲) میدان را در بین صفحات محاسبه می‌کنیم.

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \rightarrow \varepsilon_0 E \oint dA = q \rightarrow \varepsilon_0 E (2\pi r L) = q$$

$$\rightarrow E = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 L r}$$

۳) محاسبه پتانسیل الکتریکی:

$$V = \int_{-}^{+} E \overbrace{d\delta}^{-dr} = -\int_b^a E\,dr = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_b^a \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

★ در خازن های کروی و استوانه‌ای همیشه $d\delta = -dr$

۴) محاسبه ظرفیت C:

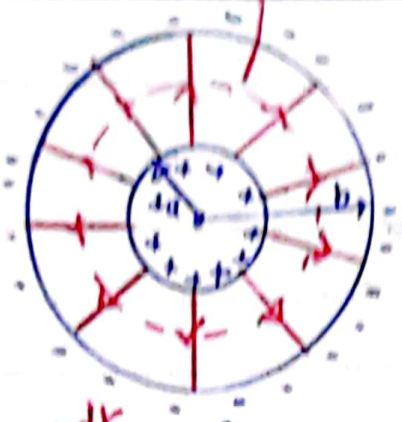
$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

سطح گاوسی با شعاع r



* محاسبه ظرفیت خازن کروی:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 E (4\pi r^2) = q \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$V = \int_{\infty}^{a} E\,\overset{-dr}{d\vec{S}} = -\int_{b}^{a} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_b^a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{b-a}{ab}$$

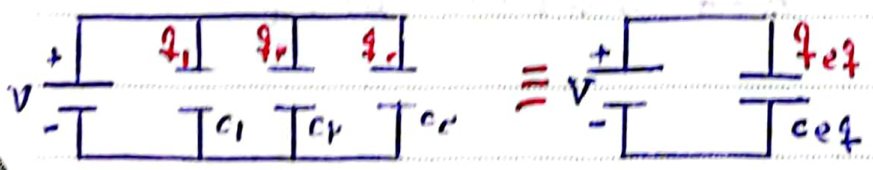
$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

$$\text{If}\begin{cases} b\rightarrow\infty \\ a = R \end{cases} \rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\overset{R}{\cancel{a}}}{1-\cancel{\frac{a}{b}}} \longrightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

ظرفیت یک کره منزوی

ترکیب سری موازی خازن ها:

1) موازی



$$q_1 + q_2 + q_3 = q_{eq} \rightarrow C_1\cancel{V} + C_2\cancel{V} + C_3\cancel{V} = C_{eq}\cancel{V} \rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

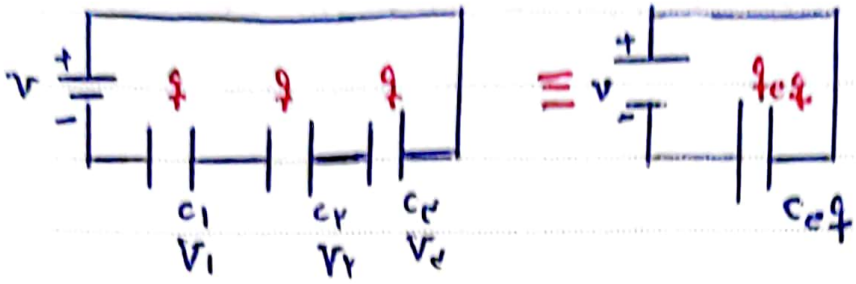
اگر n خازن بطور موازی بسته شده باشند خازن معادل برابر است با:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_n$$

PAPCO

@booklet_aut

۲) سری



$$V_1 + V_2 + V_3 = V$$

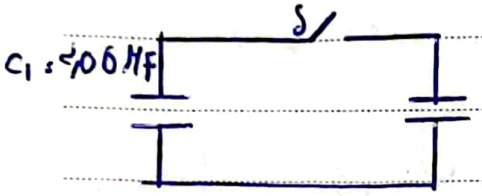
$$\rightarrow \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} = \frac{q}{C_{eq}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

اگر n خازن سری باشند خازن معادل عبارت است از:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

مثال) C_1 تا اختلاف پتانسیل $V_0 = 6,3V$ توسط یک باتری پر شده است و در کلید S بسته می‌شود با بار روی C_1 بین ۲ خازن به اشتراک گذاشته می‌شود و هر ۲ به پتانسیل V برسند. V را بیابید.



جمع بارهای روی هر ۲ خازن = بار خازن C_1 قبل از بسته شدن کلید

پس از بسته شدن کلید

$$q_0 = q_1 + q_2 \rightarrow C_1V_0 = C_1V + C_2V \rightarrow V = \frac{C_1V_0}{C_1+C_2} = 1,79\,V$$

انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی خازن؟

برای پر کردن خازن باید یک عامل خارجی (مثلا باتری) کار انجام دهد.

فرض کنید در بازه زمانی خاصی بار q' از یک صفحه خازن به صفحه دیگر منتقل شود در اینصورت اختلاف پتانسیل V' بین صفحات $\frac{q'}{C}$ خواهد بود.

@booklet_aut

Subject:
Date

اگر یک بار دیفرانسیلی dq' را بخواهیم منتقل کنیم، کار دیفرانسیلی لازم عبارت است از:

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{c} dq'$$

کار لازم برای اینکه بار نهایی خازن به مقداری مانند q برسد برابر است با:

$$W = \int dW = \int_{q'=0}^{q} \frac{q'}{c} dq' = \frac{q^2}{2c}$$

این کار بصورت انرژی پتانسیل U در خازن ذخیره می‌گردد:

$$\boxed{U = \frac{q^2}{2c} = \frac{1}{2} c V^2}$$

این انرژی ذخیره شده در خازن که حجم بزرگتری دارد به همان نسبت بزرگتر است

★ چگالی انرژی: انرژی پتانسیل در واحد حجم است:

چگالی انرژی — انرژی کل

$$u = \frac{U}{V} \quad (J/m^3)$$

حجم خازن

برای یک خازن صفحه‌ای برابر است با: میدان بین صفحات

$$u = \frac{\frac{1}{2} c V^2}{\text{حجم } V} = \frac{1}{2} \frac{\left[\varepsilon \frac{A}{d} V^2\right]}{Ad} \quad \text{و} \quad E = \frac{V}{d}$$

$$\rightarrow u = \frac{1}{2} \frac{\left[\varepsilon \frac{A}{d} E^2 d^2\right]}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \rightarrow \boxed{u = \frac{1}{2} \varepsilon E^2}$$

نکته:

این نتیجه برای خازن با صفحات موازی بدست آمد ولی رابطه‌ای کلی است و برای هر میدانی صادق است!

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

- اگر میدان یکنواخت بود،

چگالی انرژی ، حجم

انرژی کل = $u V$

- اما اگر میدان یکنواخت نبود، حجم دیفرانسیلی dV را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که E در آن ثابت باشد پس dU ناشی از آن را می‌یابیم. انرژی کل از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$dU = u\,dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,dV \rightarrow \int dU = \boxed{\int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,dV}$$

خازن دارای دی الکتریک،

ماده	K
هوا	۱,۰۰۰۵۴
آب ۲۰°	۸۰,۴
چینی	۶,۵

فارادی در ۱۸۳۷ آزمایش زیر را انجام داد:

۱- اگر ولتاژ ۲ سر خازن توسط یک باتری ثابت نگه داشته شود، قرار دادن ماده‌ی دی الکتریک بین این صفحات باعث افزایش بار q روی صفحات با ضریب K می‌شود

۲- اگر باتری در ۲ سر خازن وجود نداشته باشد، با قرار دادن تیغه‌ی دی الکتریک بین صفحات بار q باید ثابت بماند، در این حالت اختلاف پتانسیل V بین صفحات با ضریب K کم می‌شود.

نتیجه ← هر ۲ این آزمایش‌ها بیانگر آن اند که با قرار دادن یک دی الکتریک بین صفحات (طوری که فاصله بین صفحات کامل پر شود) ظرفیت خازن نسبت به حالت بدون دی الکتریک K برابر افزایش می‌یابد.

@booklet_aut

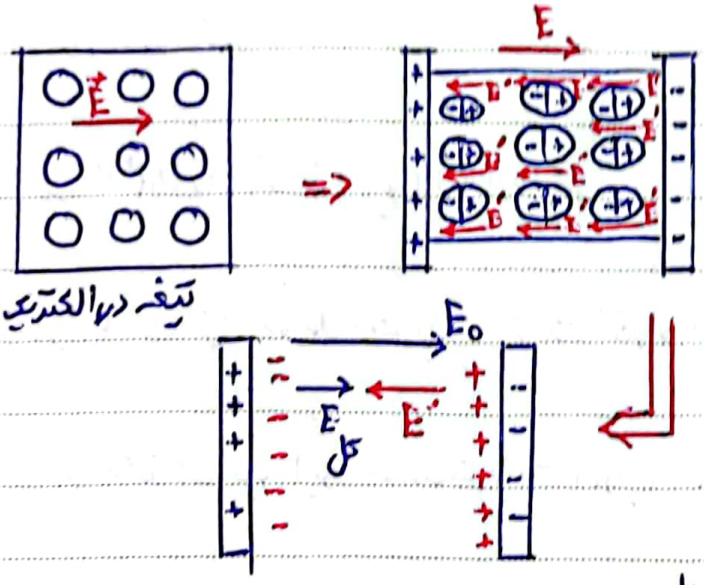
Subject:
Date

ظرفیت خازن وقتی بین صفحات هوا است ، C_0 $\xrightarrow[\text{بین صفحات به طور کامل}]{\text{قرار دادن دی الکتریک}}$ $C = KC_0$

نتیجه کلی :

در ناحیه‌ای که کاملا از یک دی الکتریک با ضریب K پر شده باشد تمام معادلات الکترواستاتیک دارای ثابت گذردهی ε_0 صادق هستند فقط باید ε_0 را به $K\varepsilon_0$ تبدیل کرد!

★ دی الکتریک ، دیدگاه اتمی :



در حالت با K

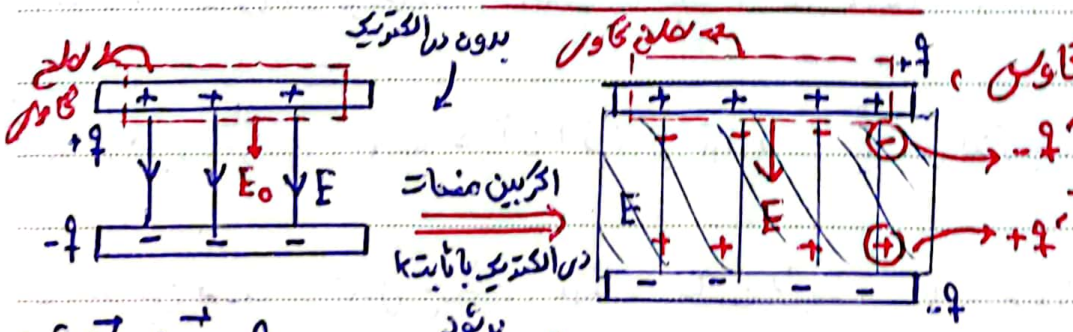
$\vec{E}_{کل} = \vec{E}_0 - \vec{E}'$

در حالت بدون K

- اگر بین صفحات کاملا با دی الکتریک با ثابت K پر شده باشد

$$E_{نهایی} = \frac{E_0}{K}$$

★ دی الکتریک و قانون گاوس :



$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \rightarrow$

$\varepsilon_0 E_0 A = q \rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$

قانون گاوس در حالت دی الکتریک :

$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc} = q - q' \rightarrow \varepsilon_0 E A = q - q'$

$\rightarrow E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 A}$ ★ $\rightarrow$ ادامه در ص بعد

@booklet_aut

Subject:
Date:

می‌دانیم، $\frac{E_0}{k}$ ، E در نتیجه:

$$\frac{q-q'}{\varepsilon_0 A} = \frac{q}{\varepsilon_0 A k} \rightarrow q-q' = \frac{q}{k}$$

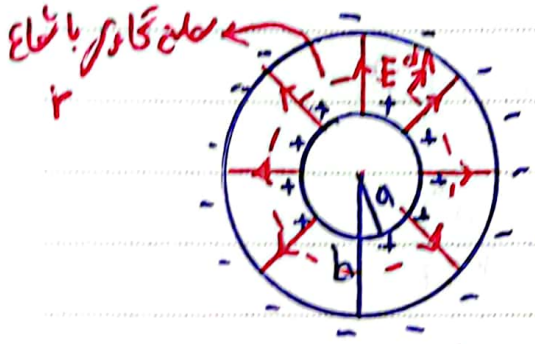
با جایگذاری در رابطه A داریم:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{k} \rightarrow k\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q$$

$$\rightarrow \boxed{\varepsilon_0 \oint k\vec{E}\, d\vec{A} = q_{enc}}$$ → قانون گاوس در حضور دی الکتریک

معادله فوق با شکل اولیه قانون گاوس تنها از این جنبه تفاوت دارد که جای (ε_0) قرار داده ایم ($k\varepsilon_0$). در نتیجه تنها بار آزاد را به عنوان q داخل سطح گاوس در نظر می‌گیریم. اثر بارهای القایی در سمت چپ معادله با قرار دادن ثابت دی الکتریک k لحاظ شده است.

مثال) فضای بین صفحات یک خازن کروی با ماده‌ای به ضریب دی الکتریک $k=\frac{1}{2}$ پر شده است. که r فاصله از مرکز کره است. (الف) ظرفیت خازن؟ (ب) اگر خازن با بار q پر شده باشد، انرژی ذخیره شده در این صفحات چقدر است؟



$$\varepsilon_0 \oint_S k\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc} \rightarrow \varepsilon_0 \oint kE\,dA\,\cancelto{1}{\cos 0} = q$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 E \oint \frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancelto{r^2}{r^2}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\right) = \varepsilon_0 E r \cancelto{2}{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta} \cancelto{2\pi}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi} = q$$

$$\rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{kq}{r^2}$$

PAPCO

@booklet_aut

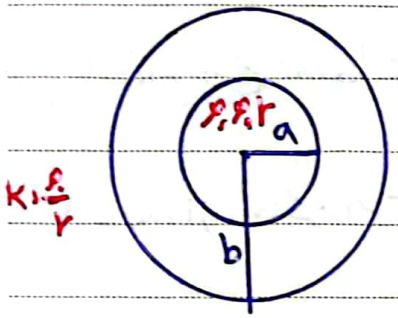
Subject:
Date

$$V = \int_{\infty}^{+} E\,dS = -\int_{b}^{a} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\overset{-dr}{dr} = -\frac{kq}{\cdot}\int_{b}^{a}\frac{dr}{r} = \frac{kq}{\cdot}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{q}{V} = \frac{1}{k\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$(ب)\ U = \frac{q^2}{2C} = \frac{kq^2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2}$$

مثال) در شکل زیر یک کره نارسانا با چگالی بار $\rho = \rho_0 r$ و شعاع a مفروض است که با یک پوسته رسانای کروی به شعاع b و بار منفی به اندازه کره داخلی هم مرکز شده است از $r=a$ تا $r=b$ محیط با ضریب دی الکتریک $k = \frac{r}{2}$ قرار دارد. (الف) مقدار بار خازن؟ (ب) ظرفیت خازن؟



(الف) $q = \int \rho\,dV = \int_0^a (\rho_0 r)(4\pi r^2)\,dr$

$\rightarrow q = \pi\rho_0 a^4$

(ب) $\varepsilon_0 \oint k\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc} = \pi\rho_0 a^4$

$$\rightarrow \varepsilon_0 \frac{r}{2} E(4\pi r^2) = \pi\rho_0 a^4 \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \rho_0 r} = \frac{a^4}{4\varepsilon_0 r}$$

$$V = \int_{\infty}^{+} E\,dS = -\int_{b}^{a}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\rho_0 r}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\rho_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

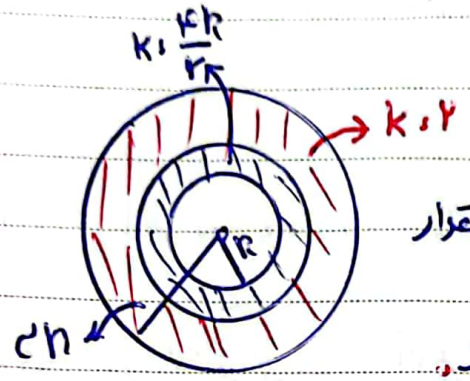
$$\rightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0\rho_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

مثال) فضای بین ۲ رسانای یک خازن کروی به شعاع های R و ۲R با دو نوع مایع به ضریب ثابت دی الکتریک ($R<r<2R$) $k_1=\frac{4R}{r}$ و ($2R<r<3R$) $k_2=2$ پر شده است. اگر رسانای داخلی دارای بار q و رسانای خارجی دارای بار $-q$ باشد (الف) میدان را در تمامی نواحی بیابید (ب) انرژی الکتریکی ذخیره شده را تا شعاع 2R بیابید (ج) ظرفیت خازن کروی را بیابید (د) انرژی الکتریکی ذخیره شده تا شعاع 2.5R را بیابید.



(الف) در نواحی $r<R$ و $r>2R$ اگر سطح گاوسی رسم شود مقدار q_{enc} برابر 0 است در نتیجه میدان در این ۲ ناحیه 0 است.

برای نواحی دیگر میدان را محاسبه می‌کنیم:

$$R<r<2R: \varepsilon_0 \oint_{S_1} k_1 \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = q_{enc} \rightarrow \varepsilon_0 \frac{4R}{r} E_1 (4\pi r^2) = q$$

$$\rightarrow \vec{E}_1 = \frac{q}{16\pi\varepsilon_0 R r}$$

$$2R<r<3R: \varepsilon_0 \oint_{S_2} k_2 \vec{E}_2 \cdot d\vec{A} = q_{enc} \rightarrow \varepsilon_0 \times 2 \times E_2 (4\pi r^2) = q$$

$$\rightarrow \vec{E}_2 = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(ب) $$U = \int u_E \, dV = \int \frac{k_1}{2} \varepsilon_0 E_1^2 \, dV = \int_{r=R}^{2R} \frac{1}{2} \left(\frac{4R}{r}\right) \left(\frac{q}{16\pi\varepsilon_0 R r}\right)^2 (4\pi r^2 dr)$$

$$U = \frac{q^2 \ln 2}{32\pi\varepsilon_0 R}$$

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

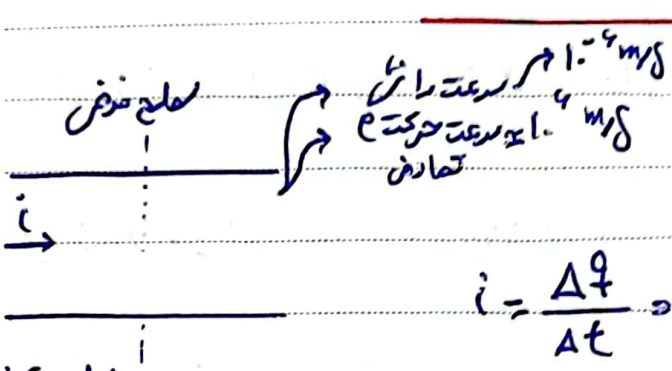
(ج) $V = \int_{\infty}^{+} E\, d\overset{-dr}{l} = -\int_{\infty}^{+} E\, dr = -\int_{r=R}^{r=2R} E_1\, dr - \int_{r=2R}^{r=4R} E_2\, dr$

$= -\int_{R}^{2R} \frac{q\, dr}{16\pi\varepsilon_0 R r} - \int_{2R}^{4R} \frac{q\, dr}{8\pi\varepsilon_0 r^2} \rightarrow V = \frac{q \ln 2}{16\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2R} - \frac{1}{4R}\right]$

$\rightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{48\pi\varepsilon_0 R}{4\ln 2 + 1}$

(د) $U = \int_{r=R}^{r=2R} \frac{1}{2} k_1 \varepsilon_0 E_1^2\, dV + \int_{r=2R}^{r=4R} \frac{1}{2} k_2 \varepsilon_0 E_2^2\, dV$

فصل ۶: جریان و مقاومت



کمیت جریان الکتریکی: (کمیت عددی و اسکالر)

$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}\ (C/s)$ آمپر

برای یافتن مقدار بار عبوری از سطح فرضی در یک بازه زمانی مثلا t داریم:

$q = \int dq = \int_0^t i\, dt \rightarrow$ نمی‌تواند ثابت یا تابعی از زمان باشد!

* جهت جریان c در مدارها معمولا جهت جریان را با پیکان نشان داده می‌شود. پیکان جریان در جهتی رسم می‌شود که حامل های مثبت (در صورت وجود) حرکت می‌کنند. حامل های بار در رسانا ها، الکترونها با بار منفی هستند و در نتیجه جهت جریان، خلاف جهت $\vec{e}$ ها می‌باشد.

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

* چگالی جریان، کمیتی در بردار جریان i یک رسانا دیدگاه موضعی گرفته و گذر بار از یک مقطع خاص را بررسی می‌کنیم. برای توصیف این گذر از کمیت جدید یعنی چگالی جریان که با $\vec{J}$ نشان داده می‌شود استفاده می‌کنیم. جهت $\vec{J}$ در صورت مثبت بودن بار همسو با جریان و در صورت منفی بودن بار در خلاف جهت i است. ارتباط بین جریان و $\vec{J}$ بصورت زیر است.

$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$ → $d\vec{A}$ برداری است عمود بر سطح مقطع مورد نظر

$\rightarrow i = \int J\, dA \cos\theta$

اگر $\vec{J}$ و $d\vec{A}$ باهم موازی باشند و $\vec{J}$ در سطح مقطع مورد نظر ثابت باشد:

$i = J \underbrace{\int dA}_{A \text{ (مساحت مقطع مورد نظر)}} \rightarrow i = JA$

$\hookrightarrow J = \frac{i}{A}$

مثال) الف) چگالی جریان در یک سیم استوانه‌ای به شعاع $R = 2mm$ در سطح مقطع سیم یکنواخت و برابر با $J = 2\times10^{5} A/m^2$ است. جریانی که از بخش بیرونی سیم بین فاصله شعاعی $\frac{R}{2}$ تا R می‌گذرد چقدر است؟

ب) اگر چگالی جریان تابعی از فاصله شعاعی r و به صورت $J = ar^2$ باشد و $a = 2\times10^{2} A/m^2$ و r برحسب متر باشد جریانی که از بخش بیرونی ذکر شده عبور می‌کند چقدر است؟

الف) برای حالت چگالی جریان ثابت و یکنواخت داریم: $i = JA$

$i = 2\times10^{5} \times \pi\left(R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2\right) = 1.9\ A$

$R = 2\times10^{-3}$

@booklet_aut

Subject:
Date

(ب) $i = \int \vec{J}\cdot d\vec{A} = \int J\, dA \cos 0 \quad , \quad dA = 2\,dr\,d\varphi = 2\pi r\,dr$

$$\rightarrow i = \int_{r=\frac{R}{2}}^{R} a r^2 (2\pi r)\,dr = 2\pi a \int_{\frac{R}{2}}^{R} r^3\,dr = \frac{\pi a}{2} r^4 \Big|_{\frac{R}{2}}^{R} = \frac{15}{32}\pi a R^4$$

$$\xrightarrow[R = 2\times 10^{-3}]{a = 3\times 10^{2}} i = 1.1\ A$$

مقاومت: مقاومت بین ۲ نقطه‌ی یک رسانا با اختلاف پتانسیل V بین آن نقاط و اندازه گیری جریان حاصل را تعریف می‌کنند طبق تعریف مقاومت (R) برابر است با:

$$R = \frac{V}{i} \quad \left(\frac{V}{A}\right) \quad \Omega = \text{اهم}$$

نماد مداری:

- مقاومت ویژه رسانا: حالت کلی‌تر آن است که به جای اختلاف پتانسیل V روی یک مقاومت خاص میدان الکتریکی در نقطه‌ای داخل ماده مقاومتی را در نظر می‌گیریم و به جای توجه به جریان i چگالی جریان $\vec{J}$ در A مورد نظر را بدست می‌کنیم. در این صورت مقاومت ویژه ρ به صورت زیر تعریف می‌شود: $\Omega m = \frac{V m}{A} = \delta I$ یکای

$$\rho = \frac{E}{J} \xrightarrow[\text{برداری}]{\text{نماد بصورت}} \vec{E} = \rho \vec{J}$$

تغییر ρ با دما: در بسیاری از مواد از جمله فلزات رابطه‌ی بین دمای T و مقاومت ویژه ρ با معادله خطی زیر تقریب زده می‌گردد.

$$(\rho - \rho_0) = \rho_0 \alpha (T - T_0) \rightarrow \Delta\rho = \rho_0 \alpha \Delta T$$

T_0 دمای مرجع (معمولا ۲۷۳K)

ρ_0: مقاومت ویژه در دمای مرجع

α: ضریب حرارتی مقاومت ویژه ماده ★

@booklet_aut

Subject:
Date

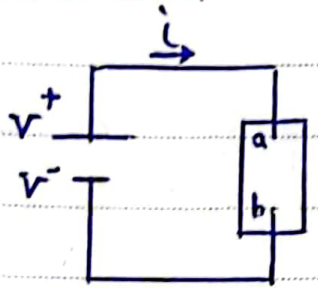
- توجه داشته باشید که رابطه خطی قبلی برای مواد مختلف در گستره‌های مشخصی برقرار است و خارج از آن گستره‌ها رابطه خطی نخواهد بود.

★ رسانندگی ماده، عکس مقاومت ویژه را رسانندگی نامیده و با (σ) نمایش می‌دهند

$\sigma = \frac{1}{\rho}$ $(\Omega \cdot m)^{-1}$: یکاها SI

$\rightarrow \boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$

★ توان در مدارهای الکتریکی:



جریان پایدار i در مدار مقابل از پایه a به پایه b از یک عنصر عبور می‌کند.

مقدار بار dq که بین این ۲ پایه در فاصلهٔ زمانی dt عبور می‌کند برابر است با: $i\,dt$

این بار dq کاهش پتانسیل به اندازه V دارد. یعنی انرژی پتانسیل الکتریکی آن به مقدار زیر کاهش می‌یابد:

$du = V\,dq \rightarrow du = V i\,dt$

- توان P یا آهنگ انتقال انرژی در یک عنصر الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$P = \frac{du}{dt} = Vi$ $\qquad$ واحد SI: $(VA) = (\frac{J}{s}) = W$

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

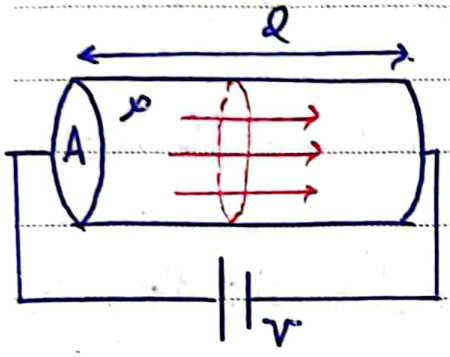
* اتلاف مقاومتی: اگر عنصر قبلی در مدار مقاومت باشد،

$$P = Vi = (Ri)i = Ri^2 = \frac{V^2}{R}$$

* محاسبهٔ مقاومت:

اگر مقاومت ویژه ماده‌ای مانند مس را بدانیم، می‌توانیم مقاومت سیمی از آن ساخته شده بدست آوریم.

اگر A مساحت مقطع سیم و l طول آن باشد و فرض شود اختلاف پتانسیل V بین ۲ انتهای سیم برقرار شده است و همچنین جریان نشان دهنده چگالی جریان در تمام سیم یکنواخت باشد، خواهیم داشت:



$$J = \frac{i}{A} \quad \text{و} \quad E = \frac{V}{l}$$

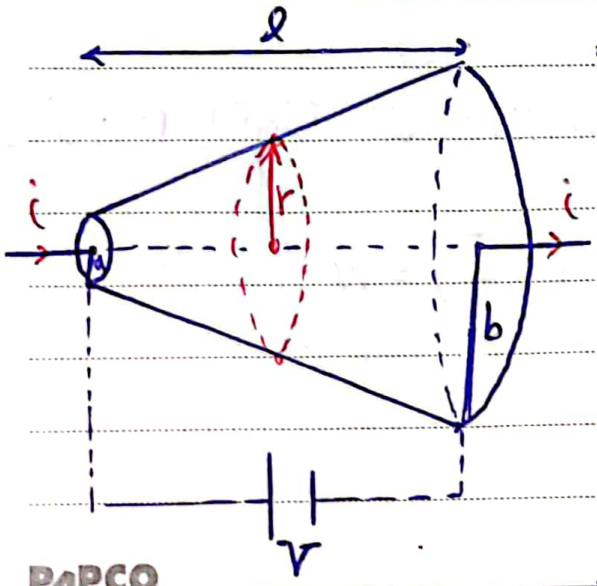
$$\rightarrow \rho = \frac{E}{J} = \frac{V}{i} \times \frac{A}{l} = R\frac{A}{L}$$

$$\rightarrow R = \rho\frac{L}{A}$$

مثال: مخروط ناقص شکل فوق از ماده‌ای با مقاومت ویژه $2.1\,\Omega\cdot m$ ساخته شده و طول آن $L = 9.4\,mm$ است.

شعاع قاعده چپ $a = 2\,mm$ و شعاع قاعده راست $b = 2.3\,mm$ است.

چگالی جریان در هر مقطع عمود بر طول این مخروط را یکنواخت فرض کنید، مقاومت بین ۲ قاعدهٔ این مخروط



PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

در هر سطح مقطع دلخواه به شعاع r چون خطوط جریان یکنواخت هستند پس $\frac{i}{\pi r^2}$ ، $\frac{j}{A}$ در نتیجه:

$$\frac{j}{A} , \frac{E}{\rho} , \frac{i}{\pi r^2} \rightarrow E , \frac{\rho i}{\pi r^2}$$

(r رابطه خطی با x دارد)

$r = c_1 + c_2 x$

$r_a = c_1 = a$

$r_b = c_1 + L c_2 = b$

$$\rightarrow a + L c_2 = b \rightarrow c_2 = \frac{b-a}{L} \rightarrow \boxed{r = a + \frac{b-a}{L} x}$$

$$\rightarrow E = \frac{\rho i}{\pi \left(a + \frac{b-a}{L} x\right)^2} \quad , \quad \overset{V}{V_f} - \underset{0}{V_i} = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\rightarrow V = \int_{r=a}^{b} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{x=0}^{L} E \, dx = \int_{x=0}^{L} \frac{\rho i}{\pi} \left(a + \frac{b-a}{L} x\right)^{-2} dx$$

$$\rightarrow V = \frac{\rho i}{\pi} \times \frac{L}{b-a} \left[a + \frac{b-a}{L} x\right]^{-1} \Big|_{x=0}^{L}$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{b-a}{L} x + a = u \\ \frac{b-a}{L} dx = du \end{array} \right.$$

$$\rightarrow V = \frac{\rho i}{\pi} \times \frac{L}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \xrightarrow{R = \frac{V}{i}} R = \rho \frac{L}{\pi a b}$$

فصل ۷: مدار!

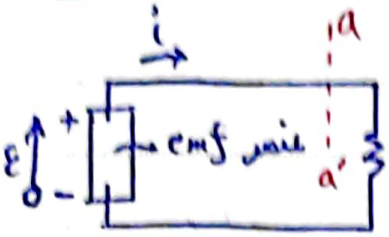
★ انتقال بار: برای ایجاد یک جریان پایدار به یک عنصر emf نیاز داریم.

نیروی محرکه الکتریکی

- مولد الکتریکی
- باتری
- سلول های خورشیدی
- سلول های سوختی
- ترموپیل ها
- مارماهی

@booklet_aut

Subject:
Date



* در مدار فوق در هر فاصله زمانی dt

از هر مقطعی مانند aa' مقدار بار dq

$$emf = \varepsilon = \frac{dW}{dq}$$

$(\frac{J}{C})$

ولت

می‌گذرد. همین مقدار بار باید از پایه‌ی منفی emf وارد و از پایه‌ی مثبت emf خارج گردد. در نتیجه

عنصر emf باید به اندازهٔ dW روی بار dq کار انجام دهد.

$$\frac{dW}{dq} = \varepsilon$$

* قانون حلقه (KVL) و قانون گره (KCL):

- قواعد تحلیل مدار: برای تحلیل مدارها نیاز به دانستن ۲ قاعده ولتاژ حلقه و جریان گره می‌باشد.

- قانون حلقه: جمع جبری تغییر پتانسیل‌هایی که در طی هر حلقه از یک از مدار با آن مواجه می‌شویم، باید صفر گردد

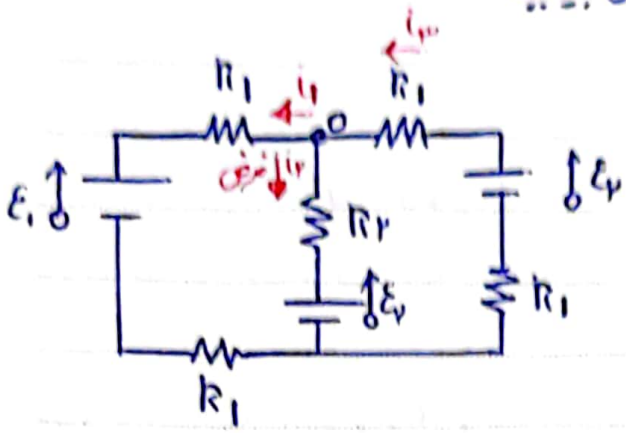
- قاعده مقاومت: تغییر پتانسیل در گذشتن از مقاومت R در جهت جریان (-IR) و در خلاف جهت جریان (+IR) است

- قاعده emf: تغییر در پتانسیل به هنگام عبور از عنصر emf در جهت پیکان برابر است با (+ε) و در جهت خلاف آن (-ε) است.

- قانون گره: مجموع جریان‌های وارد شده به یک گره از مدار باید از مجموع جریان‌های خارجه از آن برابر باشد.

@booklet_aut

مثال) در شکل زیر اندازه و جهت جریانهای ۴ شاخه مدار را بیابید.



$\begin{cases} \varepsilon_1 = 3V \\ \varepsilon_2 = 6V \end{cases}$ $\begin{cases} R_1 = 2\Omega \\ R_2 = 4\Omega \end{cases}$

جهت i دلخواهی را برای جریان شاخه ها انتخاب می کنیم

KVL @ حلقه چپ : $-R_1 i_1 - \varepsilon_1 - R_1 i_1 + \varepsilon_2 + R_2 i_2 = 0 \rightarrow 4 i_1 - 4 i_2 = 3$ ①

پاد ساعتگرد

KVL @ حلقه راست : $R_1 i_3 - \varepsilon_2 + R_1 i_3 + \varepsilon_2 + R_2 i_2 = 0 \rightarrow \cancel{4} i_2 + \cancel{4} i_3 = 0$ ②

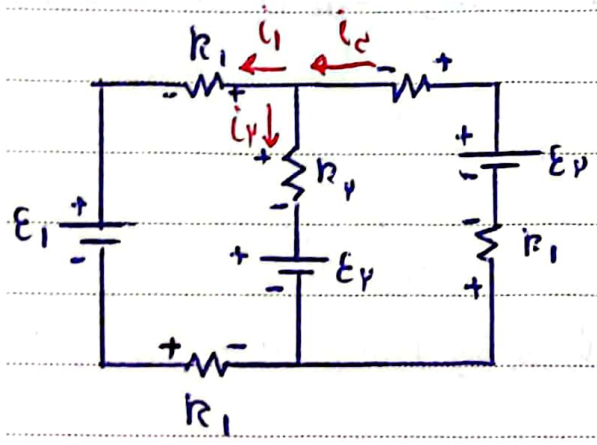
ساعتگرد

$i_2 = -i_3$

KCL @ O : $i_3 = i_1 + i_2$ ③

$\Rightarrow \begin{cases} i_1 = 0.5A \\ i_2 = -0.25A \\ i_3 = 0.25A \end{cases}$

روش ۲ حل:



(عکس)

$R_1 i_1 + \varepsilon_1 + R_1 i_1 - \varepsilon_2 - R_2 i_2 = 0$

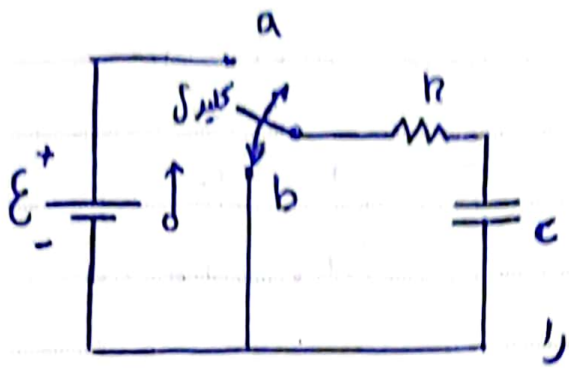
$R_2 i_2 + \varepsilon_2 + R_1 i_2 - \varepsilon_2 + R_3 i_3 = 0$

$i_3 = i_1 + i_2$

@booklet_aut

Subject:
Date

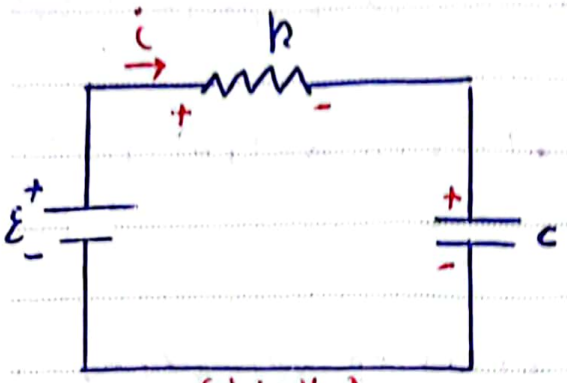
(مدار RC)



★ حالت اول (پر شدن خازن)

($t=0 \to q=0$)

خازن در ابتدا بدون بار است. برای پر کردن خازن، کلید را در وضعیت a قرار می‌دهیم.



(حالت اول)

$$KVL: -\varepsilon + Ri + V_C = 0$$

$$\to -\varepsilon + Ri + \frac{q}{C} = 0$$

$$\to -\varepsilon + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

معادله دیفرانسیل را طوری بازنویسی می‌کنیم که ضریب مشتق مرتبه اول برابر با (یک) گردد:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}$$

(مهم) برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول فوق پاسخ به این صورت است.

$$★\ q(t) = \underbrace{q_p}_{\text{پاسخ خصوصی معادله}} + \underbrace{Ke^{-\delta t}}_{\text{پاسخ عمومی معادله}}$$

q_p از جنس سمت راست معادله (اینجا مقدار ثابت است) و در خود معادله صدق می‌کند.

$$\cancel{\frac{dq_p}{dt}}^{\,0} + \frac{1}{RC}q_p = \frac{\varepsilon}{R} \to q_p = C\varepsilon$$

@booklet_aut

Subject:
Date

* ثابت ضریب $q(t)$ در پاسخ کلی معادله دیفرانسیل همگن مشخص نوشته شده باشد که ضریب $\frac{dq}{dt}$ برابر -1 باشد

$$\rightarrow \delta = \frac{1}{RC}$$

در نتیجه ما اینجا خواهیم داشت:

$$q(t) = C\mathcal{E} + Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

با نیز از شرایط اولیه معادله دیفرانسیل روبرو یافت می‌شود. می‌دانیم در $t=0$ مقدار بار خازن صفر است. در نتیجه:

$$0 = C\mathcal{E} + Ke^{0} \rightarrow K = -C\mathcal{E}$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$q(t) = C\mathcal{E} + (-C\mathcal{E})e^{-\frac{t}{RC}} = \mathcal{E}C(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

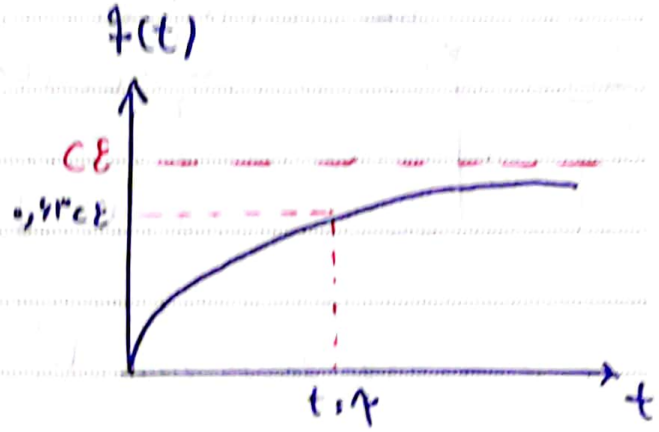
$$\rightarrow V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E}(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$\rightarrow i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \left[0 - C\mathcal{E} \times \frac{-1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\right] = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\rightarrow V_R(t) = Ri(t) = \mathcal{E}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$t \rightarrow 0 \Rightarrow q(0) = 0$

$t \rightarrow \infty \Rightarrow q(\infty) = C\mathcal{E}$



@booklet_aut

Subject:
Date

★ ثابت زمانی مدار: برعکس ضریب δ (که در این مدار RC می‌شود) از جنس زمان بوده و به آن

ثابت زمانی مدار گویند که با حرف یونانی τ نشان داده می‌شود:

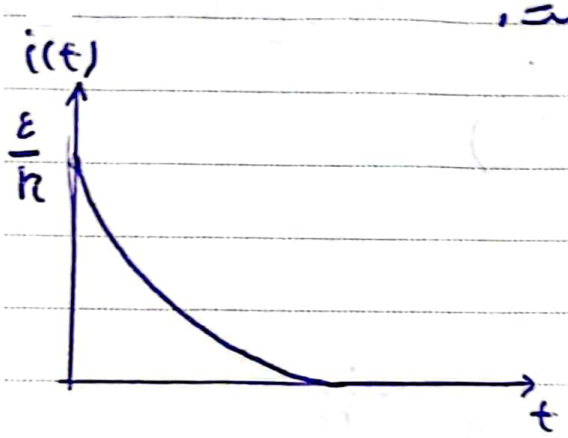
$$\tau = RC \rightarrow q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

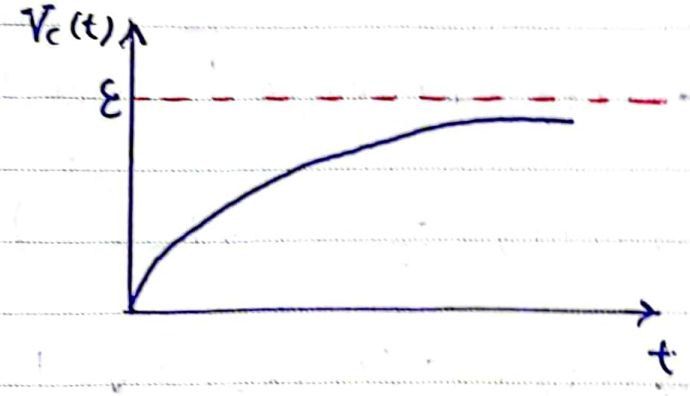
If $t = \tau = RC \rightarrow q(t) = 0{,}63\, C\mathcal{E}$

یعنی بعد از یک ساعت زمانی، ۶۳ درصد از خازن پر شده است.

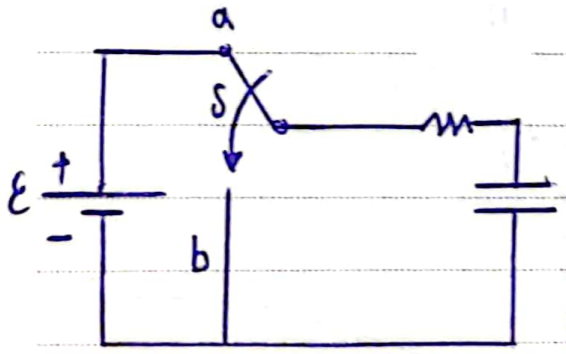
If $t = 5\tau = 5RC \rightarrow q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-5}\right) = 0{,}99\, C\mathcal{E}$

یعنی بعد از ۵ ساعت زمانی، ۹۹ درصد از خازن پر شده است.





★ حالت دوم، تخلیه خازن:

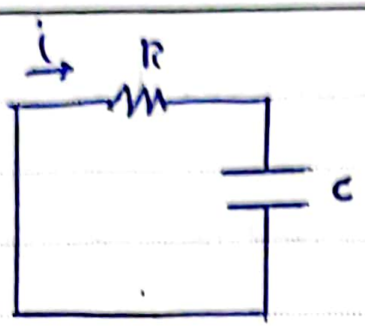


فرض کنید خازن تا یک ولتاژ V_0 که برابر با emf باتری $\mathcal{E}$ است پر شده است. پس کلیدی را در $t=0$ از وضعیت a

به وضعیت b برده باشیم، در این صورت مدار به شکل ص بعد خواهد بود:

@booklet_aut

Subject:
Date



در لحظه $t=0$ مقدار بار خازن، $q(t)=CV_0=C\mathcal{E}$

$$+V_R+V_C=0 \rightarrow Ri+\frac{q}{C}=0 \rightarrow R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

$$\rightarrow \frac{dq(t)}{d(t)}+\frac{1}{RC}q(t)=0 \qquad \delta=\frac{1}{RC}=\frac{1}{\tau}$$

$$\rightarrow q(t)=q_p+Ke^{-\delta t} \rightarrow q(t)=q_p+Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

q_p مقدار ثابت و در خود معادله صدق می‌کند.

$$\frac{dq_p}{dt}+\frac{1}{RC}q_p=0 \rightarrow q_p=0$$

$$\rightarrow q(t)=Ke^{-\delta t}$$

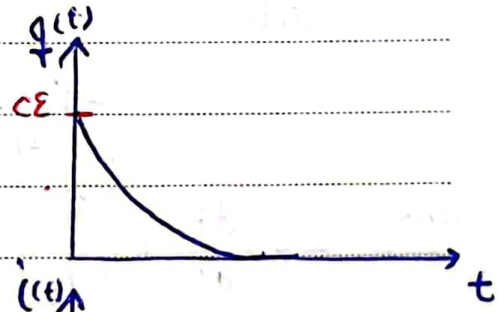
K از شرایط اولیه بدست می‌آید.

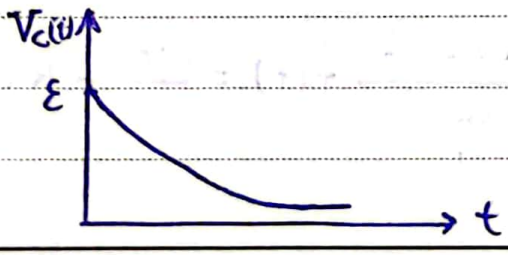
$$\xrightarrow{t=0} C\mathcal{E}=Ke^{0} \rightarrow K=C\mathcal{E} \rightarrow q(t)=C\mathcal{E}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

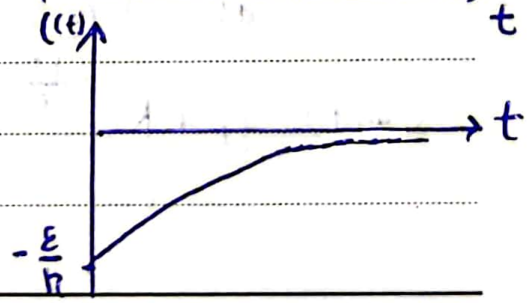
$$\text{If } t=\tau \rightarrow q(t)=C\mathcal{E}e^{-\frac{\tau}{\tau}}=C\mathcal{E}e^{-1}=0.37C\mathcal{E}$$

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{-\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V_C(t)=\frac{q(t)}{C}=\mathcal{E}e^{-\frac{t}{\tau}}$$



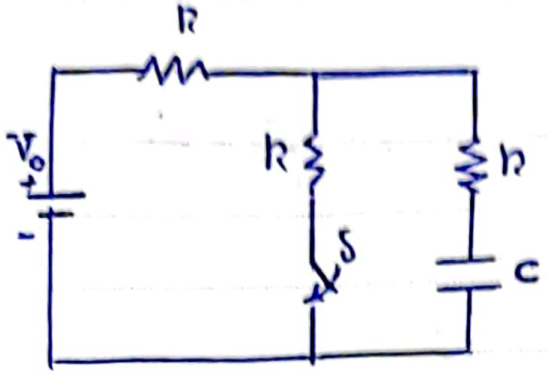




@booklet_aut

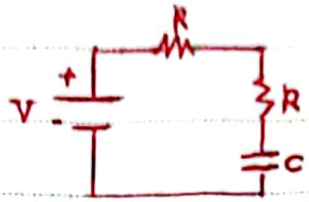
Subject:
Date

در شکل زیر کلید S در ابتدا به مدت طولانی باز بوده است و در زمان $t=0$ بسته می‌شود.

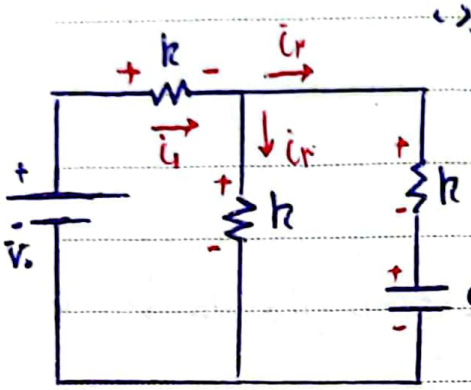


معادله ولتاژ و جریان خازن را بیابید.

وقتی کلید به مدت طولانی باز بوده، خازن C به طور کامل و تا ولتاژ باتری (یعنی V_0) شارژ می‌شود و وقتی در $t=0$ بسته می‌گردد، خازن دارای بار CV_0 ، q می‌باشد:



اکنون که در $t=0$ کلید بسته می‌شود، مدار به شکل زیر خواهد بود.



$KCL: i_1 = i_2 + i_3$

KVL در حلقه بیرونی C نادیده گرفته شود: $-V_0 + Ri_1 + Ri_2 + \cancelto{\frac{q}{C}}{V_C} = 0$

$$-V_0 + 2Ri_2 + Ri_3 + \frac{q}{C} = 0$$

KVL در حلقه راست نادیده گرفته شود: $Ri_2 + \frac{q}{C} - Ri_3 = 0$

$$-V_0 + 3Ri_2 + \frac{2q}{C} = 0 \rightarrow -V_0 + 3R\frac{dq}{dt} + \frac{2q}{C} = 0$$

با تغییر معادله $\longrightarrow \frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{2}{3RC}}_{\alpha}\, q(t) = \frac{V_0}{3R}$

$\longrightarrow q(t) = q_p + Ke^{-\frac{2t}{3RC}} \xrightarrow[\text{می‌کند و عددی ثابت است}]{q_p \text{ در معادله صدق}} q(t) = \frac{CV_0}{2} + Ke^{-\frac{2t}{3RC}}$

@booklet_aut

Subject:
Date

K از شرط اولیه بدست می‌آید، در t=0 مقدار بار CV_0 بوده است.

$$CV_0 = \frac{CV_0}{2} + K \rightarrow K = \frac{CV_0}{2}$$

$$\rightarrow q(t) = \frac{CV_0}{2}\left(1 + e^{-\frac{2t}{CRC}}\right)$$

$$I_2 = \frac{dq}{dt} = \frac{-V_0}{3R} e^{-\frac{2t}{3RC}}$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{V_0}{2}\left(1 + e^{-\frac{2t}{3RC}}\right)$$

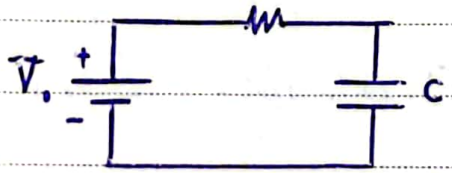
روش تستی:

$$\frac{dy(t)}{dt} + K_1 y(t) = K_2 \rightarrow y(t) = A + Be^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\begin{cases} y(0) = A + B \\ y(\infty) = A \end{cases} \rightarrow B = y(0) - y(\infty)$$

$$\rightarrow y(t) = y(\infty) + [y(0) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(حالت اول پرشدن)



$$q(t) = q(\infty) + [q(0) - q(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\left.\begin{array}{l} q(\infty) = CV_0 \\ q(0) = 0 \end{array}\right\} q(t) = CV_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$V_C(t) = V_C(\infty) + [V_C(0) - V_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow[V(\infty)=V_0]{V(0)=0} V_C(t) = V_0 + [0 - V_0]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

@booklet_aut

Subject:
Date

فصل ۸: میدان مغناطیسی:

منشاء میدان مغناطیسی:

① تولید میدان مغناطیسی با استفاده از ذرات بنیادین مانند الکترون ها! ← این ذرات میدان مغناطیسی در اطراف خود دارند و یک ویژگی پایدار آن ذرات است. در بعضی از مواد (مانند آهنربا) این میدان ها با هم جمع شده و یک میدان مغناطیسی خالص بوجود می آورند اما در مواد دیگر میدان ها همدیگر را خنثی کرده و میدان مغناطیسی در اطراف آن صفر است.

② استفاده از بارهای متحرک ← جریان داخل یک سیم در اطراف آن میدان مغناطیسی تولید می کند

تعریف میدان مغناطیسی ($\vec{B}$):

تعریف میدان مغناطیسی را با پرتاب یک ذره باردار که قرار است $\vec{B}$ را در آن تعریف کنیم انجام می دهیم. ذره در جهت های مختلف به نقطه مورد نظر پرتاب می شود و ($\vec{F}_B$) در آن نقطه اندازه گیری می شود. پس از تکرارهای مختلف از جهت های متعدد مشاهده می شود:

۱- وقتی سرعت ذره ($\vec{V}$) در راستای خاصی قرار می گیرد، نیروی وارد بر آن صفر است.

۲- در تمام جهت های دیگر $\vec{V}$، اندازه $|\vec{F}_B|$ با $V\sin\theta$ متناسب است که در آن θ زاویه بین

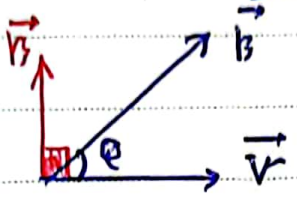
@booklet_aut

Subject:
Date

بین بردار $\vec{V}$ با آن راستای خاص (که در امتداد آن نیرو صفر است) می‌باشد. اندازه $\vec{F}_B$ را هنگامی که

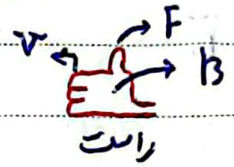
$\vec{V}$ بر بردار خاص عمود است اندازه می‌گیریم و میدان مغناطیسی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$B = \frac{F_B}{|q|V}$$



همه نتایج فوق در قالب فرمول زیر خلاصه می‌گردد.

$$\vec{F}_B = q(\vec{V} \times \vec{B}) \rightarrow F_B = qVB\sin\theta$$



اگر $q>0$

اگر $q<0$ ،، (ولی با دست چپ)

قاعده دست راست می‌گوید اگر شست دست راست جهت $\vec{V} \times \vec{B}$ را نشان می‌دهد اگر جهت خم بودن انگشتان دیگر از $\vec{V}$ به بردار $\vec{B}$ باشد. حال اگر $q>0$ باشد، $\vec{F}_B$ در جهت $\vec{V} \times \vec{B}$ است و اگر $q<0$ باشد $\vec{F}_B$ در خلاف جهت $\vec{V} \times \vec{B}$ است.

یکای SI میدان مغناطیسی،

$$\frac{N}{C \times \frac{m}{s}} = \frac{N}{A \times m} = T$$ (تسلا)

$$1T = 10^4 G$$ (گاوس)

(جهت میدان مغناطیسی، از S به N)

میدان‌های متقاطع: متشکل از یک میدان الکتریکی $\vec{E}$ و یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ است که بر هم عمودند.

هر دو به بار الکتریکی نیرو وارد می‌کنند.

PAPCO

@booklet_aut

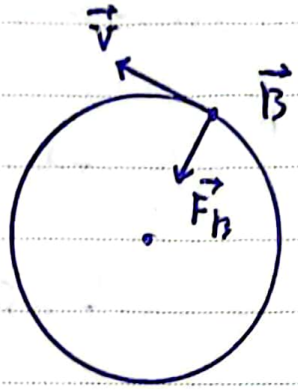
Subject:
Date

★ کاربردهای میدان متعامد: (بیشتر بدانید)

۱- کشف $\frac{e}{m}$ (تامسون) ۲- اثر هال

★ ذره باردار چرخان:

اگر ذره‌ای باردار به جرم m و اندازه بار $|q|$ با سرعت $\vec{v}$ عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ حرکت کند، این حرکت مسیری دایره‌ای خواهد داشت.



طبق قانون دوم نیوتن:

$$\vec{F} = m\frac{v^2}{r} \rightarrow |q|vB\sin 90^\circ = m\frac{v^2}{r} \rightarrow r = \frac{mv}{|q|B}$$

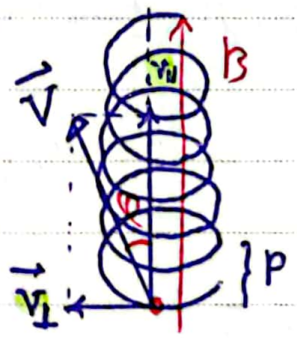
شعاع مسیر دایره‌ای

دوره تناوب (زمان یک دور کامل): $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{|q|B}$

فرکانس: $f = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m}$

تعداد دور در یک ثانیه

▲ مسیرهای مارپیچ: اگر سرعت ذره باردار مولفه‌ای موازی با میدان یکنواخت مغناطیسی $\vec{B}$ داشته باشد، ذره مسیر مارپیچی حول بردار میدان طی می‌کند.



PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

$V_\perp = V\sin\varphi$ مولفه $V_{\parallel}$ گام P مارپیچ یعنی فاصله بین دورهای

$V_{\parallel} = V\cos\varphi$ مجاور را تعیین می‌کند و مولفه عمودی $V_\perp$ شعاع مارپیچ را

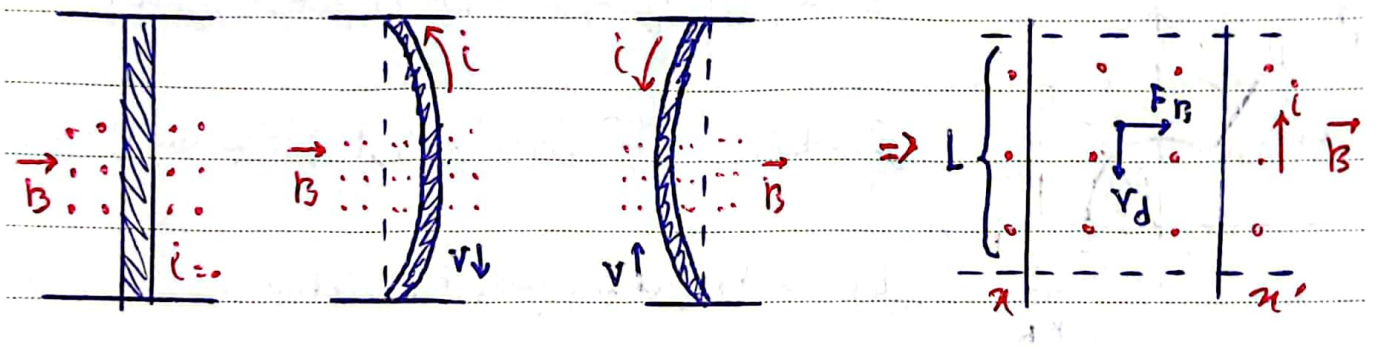
تعیین می‌کند.

$$\begin{cases} P = V_{\parallel} T = V\cos\varphi \times \dfrac{2\pi m}{|q|B} \\ r = \dfrac{mV\sin\varphi}{|q|B} \end{cases}$$

اگر میدان $\vec{B}$ غیریکنواخت باشد، مسیرهای مارپیچ دارای

شعاع‌های متغیر و گام‌های متفاوت می‌شود ← کاربرد: طیف سنج جرمی !!

- نیروی مغناطیسی وارد بر یک سیم حامل جریان: دست راست ← $\vec{B}$ کف دست و $\vec{i}$ جهت انگشت

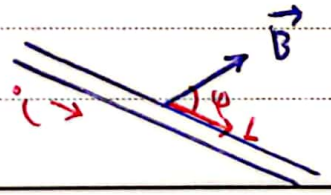


قطعه‌ای از سیم به طول L را فرض کنید تمام e های هدایتی این قطعه باید طی زمان $t = \frac{L}{V_d}$ از صفحه

xx' بگذرند. در این زمان کل باری که از صفحه عبور می‌کند $q = it$ که برابر است با $q = i \times \frac{L}{V_d}$.

$$F_B = qV_d B\sin 90^\circ = iLB$$

اگر میدان مغناطیسی بر سیم عمود نباشد:



@booklet_aut

Subject:
Date

$\vec{F}_B = i(\vec{L} \times \vec{B})$

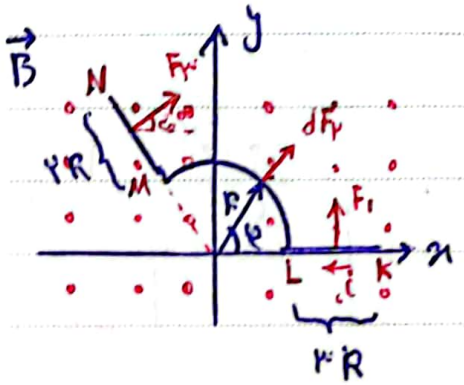
$\vec{L}$ بردار طول است که اندازه اش همان طول سیم یا L بوده و جهتش به صورت قراردادی با جهت جریان یکی است.

$|F_B| = i L B \sin\theta$ ← زاویه بین L و B

★ اگر سیم مستقیم نباشد یا میدان مغناطیسی یکنواخت نباشد می توان سیم را به قطعات بسیار کوچکی تقسیم کرد و برای هر قطعه رابطه ای مثل رابطه فوق را نوشت. در این صورت نیروی وارد بر کل سیم بصورت جمع برداری نیروهای وارد بر هر قطعه خواهد بود:

$\vec{F}_B = \sum d\vec{F}_B = \int d\vec{F}_B$. که در آن: $d\vec{F}_B = i\, d\vec{L} \times \vec{B}$

مثال) قطعه سیمی به طول KLMN که قسمتی از آن به صورت کمانی از دایره به شعاع R و زاویه مرکزی $\frac{2\pi}{3}$ است و ۲ قطعه دیگر آن سیم راست یکی به طول R و دیگری به طول 2R است حامل جریان i می باشد و در یک میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ که عمود بر صفحه و به سمت داخل می باشد مقدار و جهت نیروی مغناطیسی کل وارد بر سیم را بیابید.



$dF_2 = dF_{2x}\hat{i} + dF_{2y}\hat{j}$

① (KL) نیروی وارد بر سیم: $F_1 = i L_{KL} B \sin 90 = 3Ri B$

$\rightarrow \vec{F}_1 = 3RiB\hat{j}$

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

(۲) (MN) نیروی وارد بر سیم ، $F_3 = iL_{MN}B\sin 90^\circ = 2kiB$

$\rightarrow F_{3x} = F_3\cos 60^\circ = 2kiB \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow F_{3y} = F_3\sin 60^\circ = 2kiB \times \frac{1}{2}$

$\rightarrow \vec{F}_3 = \sqrt{3}kiB\,\hat{i} + kiB\,\hat{j}$

(۳)

F_2 ، نیروی وارد بر بخش کمانی (LM)

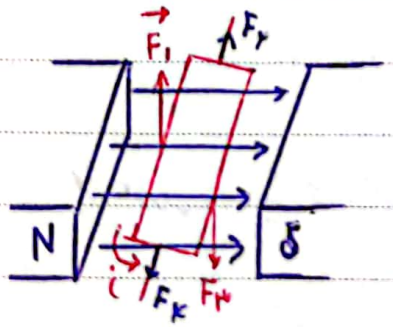
یک المان کوچک دیفرانسیلی به طول dL درنظر گرفته و نیروی وارد بر آن را که dF_2 است می‌یابیم:

$d\vec{F}_2 = i\,d\vec{L} \times \vec{B} = i\,dL\,B\sin 90^\circ = i\underbrace{dL}_{kd\varphi}B$

$\rightarrow d\vec{F}_2 = kiB\,d\varphi \longrightarrow \begin{cases} dF_{2x} = dF_2\cos\varphi = iKB\cos\varphi\,d\varphi \\ dF_{2y} = dF_2\sin\varphi = iKB\sin\varphi\,d\varphi \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} F_{2x} = \int dF_{2x} = iKB\int_{\varphi=0}^{\frac{2\pi}{3}}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}kiB \\ F_{2y} = \int dF_{2y} = iKB\int_{\varphi=0}^{\frac{2\pi}{3}}\sin\varphi\,d\varphi = \frac{3}{2}kiB \end{cases} \rightarrow \vec{F}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}kiB\,\hat{i} + \frac{3}{2}kiB\,\hat{j}$

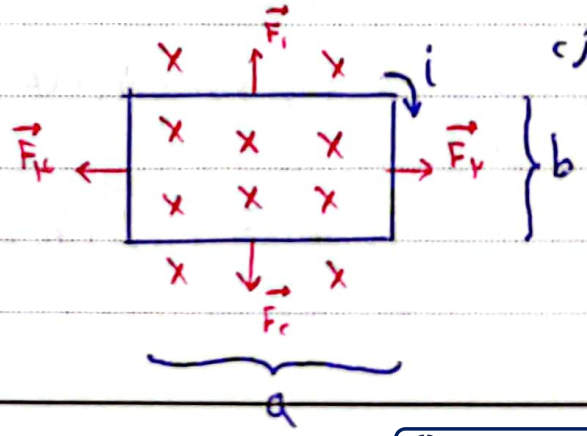
$\rightarrow \vec{F}_{کل} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2{,}6\,kiB\,\hat{i} + 5{,}5\,kiB\,\hat{j}$



نمای کلی از یک موتور ساده

- گشتاور وارد بر یک حلقهٔ جریان:

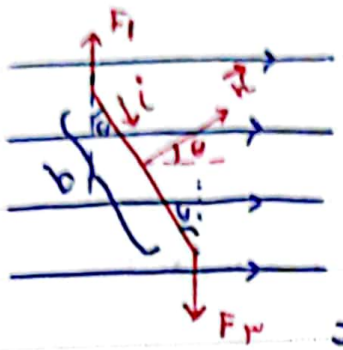
نمای دیگر:



PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date



نمای دیگر:

نیروی وارد بر ضلع ۲ و ۴ ، $F_2 = -F_4 = i b B \sin(90 - \theta)$
$= i b B \cos\theta$

این دو نیرو اصلا تاثیری در گشتاور ندارند زیرا بازوی گشتاور ۰ است

لذا گشتاور معادل این دو، صفر خواهد بود.

★ نیروی وارد بر ضلع ۱ ، $F_1 = i a B \sin 90^\circ = i a B$

★ نیروی وارد بر ضلع ۳ ، $F_3 = i a B \sin 90^\circ = i a B$

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= r_\perp F_1 = \frac{b}{2} \sin\theta \times i a B \\ + \quad & \\ \tau_3 &= r_\perp F_3 = \frac{b}{2} \sin\theta \times i a B \end{aligned}\right\} \rightarrow \tau' = i a b B \sin\theta = i A B \sin\theta$$

اگر به جای تک حلقه، یک حلقه N دور داشته باشیم و فرض کنیم حلقه ها بصورت فشرده طوری پیچیده شده اند طوری که همه آنها هم اندازه و هم صفحه اند (مساحت همه A می باشد)

$$\rightarrow \tau = N\tau' = \underbrace{(NiA)}_{\mu} B \sin\theta = \mu \times B$$

اگر یک بردار μ طوری تعریف کنیم که اندازه آن NiA ، μ باشد و جهتش با جهت عمود بر حلقه (N) یعنی با شکل در این صورت گشتاور ما به صورت $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ خواهد بود

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

$\tau = \vec{P} \times \vec{E}$

بردار $\vec{\mu}$ را بردار گشتاور ۲ قطبی مغناطیسی می‌نامیم. (مقایسه شود با گشتاور وارد بر ۲ قطبی الکتریکی)

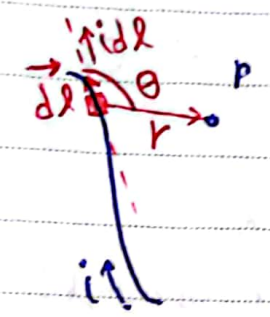
گشتاور مغناطیسی واقع در میدان $\vec{B}$، انرژی پتانسیل مغناطیسی دارد که وابسته به θ و B می‌باشد،

$$U(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \begin{cases} \min, & \text{هم جهت} \\ \max, & \text{خلاف جهت} \end{cases}$$

اگر حلقه از زاویه θ_i به θ_f برده شود، کار انجام شده توسط میدان،

$$W = -\Delta U = -(U(\theta_f) - U(\theta_i))$$

فصل ۹: میدان مغناطیسی ناشی از جریان:



از یک جریان i عبور می‌کند.

هدف، یافتن میدان مغناطیسی ناشی از این جریان در نقطه دلخواه P.

ابتدا یک را به عناصر دیفرانسیل کوچک تقسیم کرده و هر کدام را با $d\vec{l}$ بیان می‌کنیم. طول آن برابر dl و جهتش منطبق بر جهت جریان $\vec{i}$ است. زاویه بین dl با بردار $\vec{r}$ (برداری که از $d\vec{l}$ به نقطه دلخواه P متصل است) را با θ نمایش می‌دهیم. اندازه میدان مغناطیسی ناشی از یک المان دیفرانسیل به صورت زیر بدست می‌آید:

$$dB = \frac{i\,dl \sin\theta}{r^2} \times \frac{\mu_0}{4\pi}$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A}$ ← ثابت تراوایی

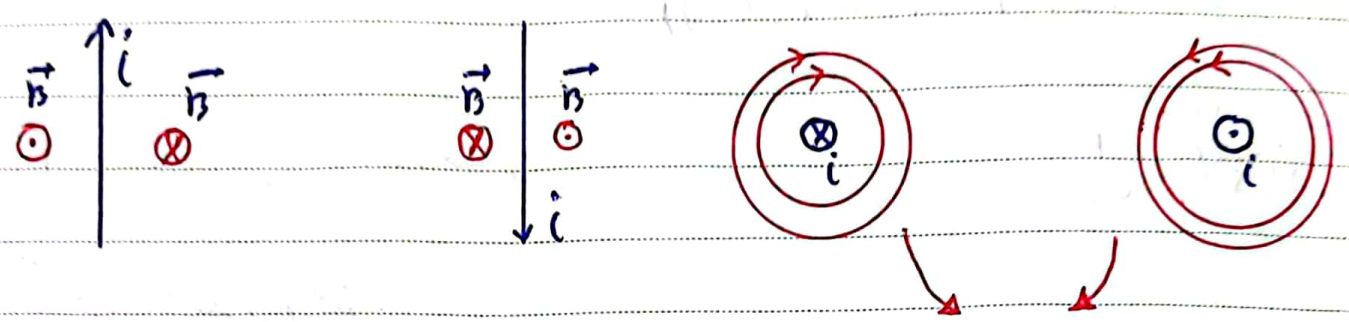
@booklet_aut

اگر بخواهیم $d\vec{B}$ را بصورت برداری نشان دهیم خواهیم داشت:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{i\,d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

جهت $d\vec{B}$ همان جهت $d\vec{l}\times\vec{r}$ می‌باشد.

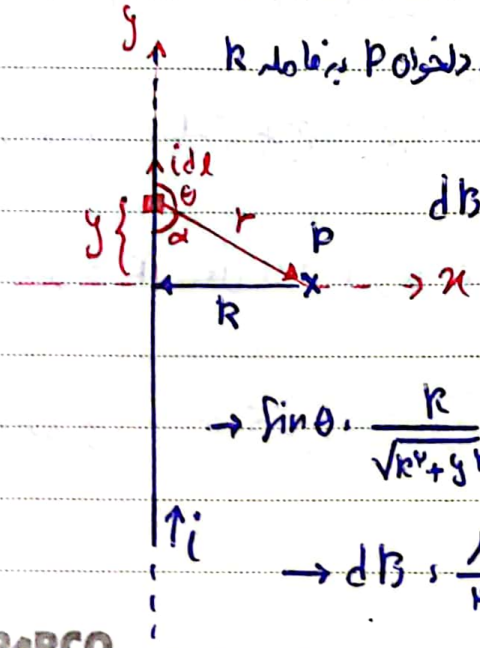
قاعده دست راست: عنصر پاره‌خط را در دست راست طوری بگیرید که انگشت شست در جهت جریان باشد. انگشتان دست راست در جهت خطوط میدان مغناطیسی بسته می‌شوند.



▲ خطوط میدان مغناطیسی در اطراف یک سیم حامل جریان دایره‌هایی هم مرکز حول سیم هستند.

$\rightarrow B = \int dB$

مثال) میدان مغناطیسی ناشی از جریان در یک سیم طویل مستقیم را در نقطه دلخواه P به فاصله R بیابید.



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{i\,dl\sin\theta}{r^2}$$

$$r = \sqrt{R^2+y^2} \;,\; dl = dy \;,\; \sin\theta = \sin(\cancel{\pi}^{\,\alpha}-\theta) = \frac{R}{r}$$

$$\rightarrow \sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+y^2}}$$

$$\rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{i\,R\,dy}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R\,dy}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

PAPCO

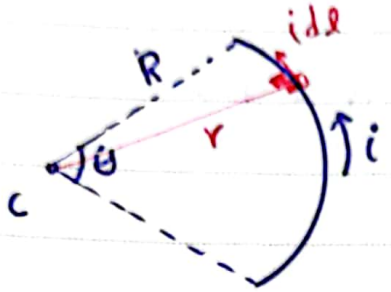
@booklet_aut

Subject:
Date

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\left[\frac{y}{(R^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$ → میدان مغناطیسی یک سیم بی‌نهایت طویل حامل جریان

* اگر سیم ما از یک طرف فقط بی‌نهایت بود، آنوقت مقدار میدان مغناطیسی نصف مقدار قبلی می‌شد.

* میدان مغناطیسی ناشی از جریان سیم به شکل کمان دایره‌ای.



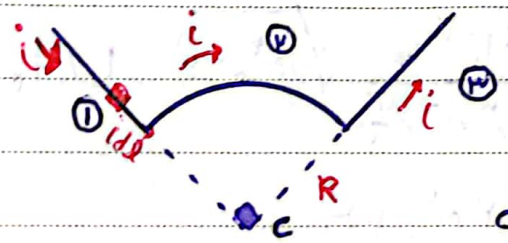
می‌خواهیم اندازه میدان مغناطیسی را در مرکز یک کمان دایره‌ای به شعاع R و زاویه مرکزی θ (بر حسب رادیان است) و زاویه مرکزی θ را بدست آوریم.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{i\,dl\,\cancel{\sin\theta}^{\,1}}{r^2}$$

در این حالت زاویه میان $\vec{dl}$ و $\vec{r}$ برابر 90° است و r=R است.

$$\rightarrow B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\int_{\theta=0}^{\theta} R\,d\theta = \frac{\mu_0 i \theta}{4\pi R} \xrightarrow{\text{مثال}} \theta = 2\pi \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

مثال ۴) سیم مطابق شکل از یک کمان دایره‌ای به شعاع R و زاویه مرکزی $\frac{\pi}{2}$ و دو بخش مستقیم که امتداد آنها از نقطه c می‌گذرد تشکیل شده است و جریان i از آن عبور می‌کند. میدان مغناطیسی B ناشی از این جریان را در نقطه c بیابید.



$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,dl\,\cancel{\sin 0}^{\,0}}{r^2} = 0 \rightarrow B_1 = 0$$

به همین ترتیب میدان ناشی از بخش مستقیم ③ هم صفر می‌شود، $B_3 = 0$

PAPCO

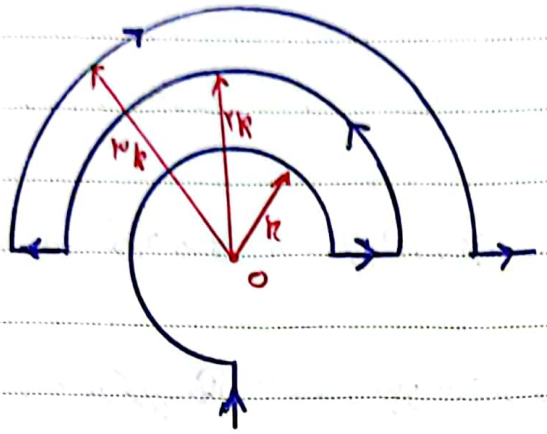
@booklet_aut

Subject:
Date

میدان ناشی از بخش کمانی شکل نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

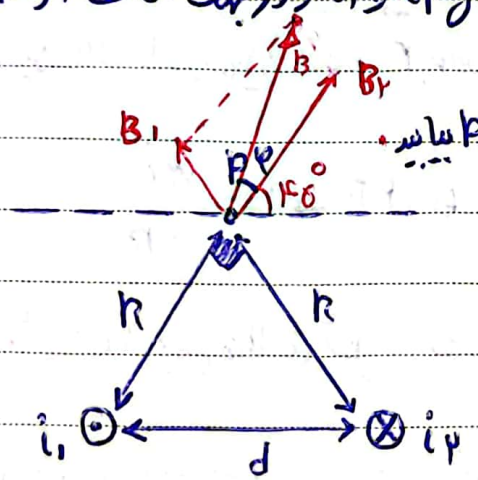
$$B_2 = \frac{\mu_0 i \theta}{4\pi R} \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{2}} B_2 = \frac{\mu_0 i}{8R} \qquad B_{کل} = \frac{\mu_0 i}{8R} \ (\text{درون‌سو})$$

مثال امتحانی)



$$B_{کل} = \underset{\text{درون‌سو}}{B_1} + \underset{\text{برون‌سو}}{B_2} + \underset{\text{درون‌سو}}{B_3}$$

مثال) شکل زیر ۲ سیم موازی طویل را نشان می‌دهد که جریان‌های i_1 و i_2 و در جهت مخالف از آنها عبور می‌کنند. اندازه و جهت میدان مغناطیسی برآیند را در نقطه O بیابید.



($i_1 = 15A$ و $i_2 = 32A$ و $d = 5.3cm$)

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R} \quad , \quad B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi R} \quad , \quad R = \frac{\sqrt{2}\, d}{2}$$

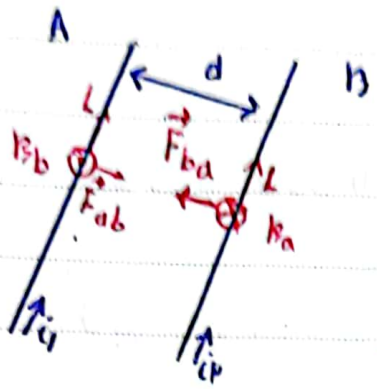
$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0}{2\pi d \cos 45} \sqrt{i_1^2 + i_2^2} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi \times 5.3 \times 10^{-2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{15^2 + 32^2} = 1.89 \times 10^{-4}$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{B_1}{B_2}\right) = 25^\circ \rightarrow \text{زاویه B با افق} = 25^\circ + 45^\circ = 70^\circ$$

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date



* نیروی بین دو جریان موازی

دو سیم طویل موازی (حامل جریان) بر هم نیرو وارد می‌کنند فرض کنید

جهت هر دو جریان i_1 و i_2 یکسان است. ابتدا نیروی وارد بر

سیم B ناشی از جریان عبوری i_1 را بدست می‌آوریم. برای این کار میدان مغناطیسی ناشی از سیم A

در محل سیم B بدست می‌آید:

$$B_A = \frac{\mu_0 i_A}{2\pi d} \quad (\text{درون سو})$$

نیروی وارد بر سیم B از طرف سیم A برابر است با:

$$\vec{F}_{ba} = i_B \vec{L} \times \vec{B}_a = i_B L B_A$$

$$\rightarrow \vec{F}_{ba} = \frac{\mu_0 i_a i_b L}{2\pi d}$$

میدان ناشی از سیم B در سیم A برابر است با:

$$B_b = \frac{\mu_0 i_b}{2\pi d}$$

این میدان بر سیم A نیروی زیر را وارد می‌کند:

$$\vec{F}_{ab} = i_a \vec{L} \times \vec{B}_b = i_a L B_b$$

$$\rightarrow \vec{F}_{ab} = \frac{\mu_0 i_a i_b L}{2\pi d}$$

اندازه $\vec{F}_{ab}$ و $\vec{F}_{ba}$ یکسان ولی در جهت مخالف هستند. یعنی این ۲ سیم همدیگر را جذب می‌کنند.

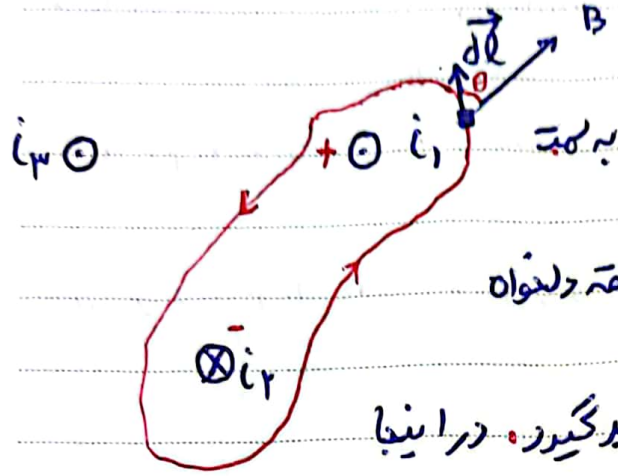
توجه: اگر جهت جریان‌های i_a و i_b مخالف هم بودند، دو سیم همدیگر را دفع می‌کردند

@booklet_aut

Subject:
Date

تعریف آمپر: آمپر جریان ثابتی است که اگر ۲ سیم طویل موازی با سطح مقطع ناصفر و دارای فاصله ۱ متر از هم در خلاء، جاری شود، بر هر یک از این ۲ سیم نیرویی معادل $2\times10^{-7}N$ بر واحد طول وارد می‌کند.

★ قانون آمپر:



۳ سیم راست طویلی که از آنها جریانهای i_1، i_2 یا i_3 به سمت داخل یا خارج صفحه می‌گذرد مفروض است. یک حلقه دلخواه روی صفحه رسم می‌کنیم به طوری که ۲ جریان (و بیشتر) را در بر بگیرد. در اینجا حلقه رسم شده جریان های i_1 و i_2 در بر گرفته شده است. جهت دلخواهی برای این حلقه در نظر می‌گیریم. حلقه را به عناصر دیفرانسیل dl تقسیم کرده طوری که در تمام نقاط در حلقه مماس و در جهت مشخص شده برای حلقه باشد. فرض می‌کنیم در محل عنصر دیفرانسیل dl میدان ناشی از هر ۳ جریان می‌باشد. چون هر ۳ سیم عمود بر صفحه اند، لذا میدان $\vec{B}$ در خود صفحه قرار خواهد داشت. زاویه بین $\vec{B}$ و $\vec{dl}$ را θ در نظر می‌گیریم طبق قانون آمپر داریم:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i_{enc}$$

انتگرال روی حلقه بسته دلخواهی که حلقه آمپری نامیده می‌شود، گرفته می‌شود

@booklet_aut

Subject:
Date

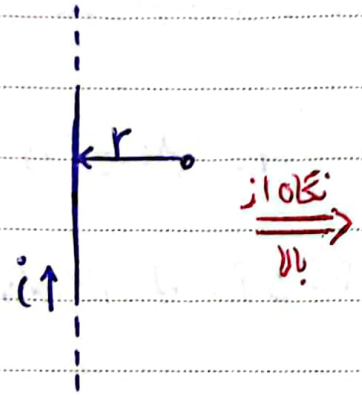
$\rightarrow \oint B\,dl\cos\theta = \mu_0 i_{enc}$

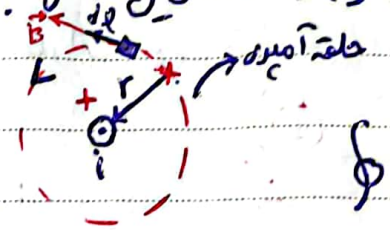
- برای محاسبه i_{enc} باید به جریان های داخل حلقه علامت ⊕ یا ⊖ اختصاص دهیم برای اینکار چهار انگشت دست راست را در جهت انتخابی برای حلقه آمپری خم می‌کنیم. انگشت شست با هر جریان هم سو بود آن جریان علامت ⊕ و با هر جریان مخالف جهتش بود، علامت ⊖ به آن جریان نسبت می‌دهیم. در شکل مورد نظر خواهیم داشت.

$\oint B\,dl\cos\theta = \mu_0(i_1 - i_2)$

- اگر علامت B منفی بدست آمد یعنی جهت اولیه را اشتباه فرض کرده ایم

مثال) میدان مغناطیسی بیرون یک سیم راست طویل حامل جریان

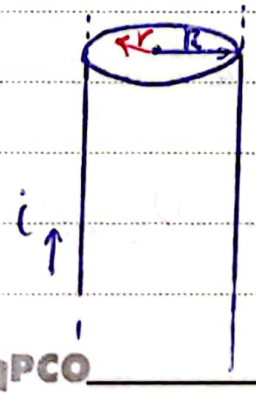


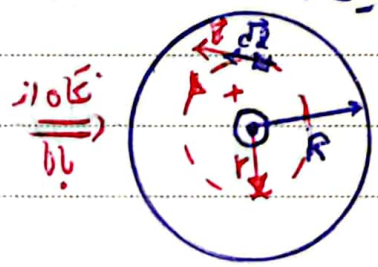


$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i_{enc} = +\mu_0 i$

$\rightarrow \oint B\,dl\cancel{\cos\theta} = \mu_0 i \rightarrow B\oint dl = \mu_0 i \rightarrow B(2\pi r) = \mu i \rightarrow B = \frac{\mu i}{2\pi r}$

★ میدان مغناطیسی داخل یک سیم راست طویل دارای جریان به شعاع R





$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i_{enc}$

$\rightarrow B\oint dl = \mu_0 i_{enc}$

$2\pi r$

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

- $\frac{i}{i_{enc}} \Big| \frac{\pi R^2}{\pi r^2} \rightarrow i_{enc} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 i$

روش ۱

* محاسبه i_{enc}

- $i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \xrightarrow[\text{خاص}]{\text{در حالت}} i = JA \rightarrow J = \frac{i}{A} \rightarrow J = \frac{i}{\pi R^2}$

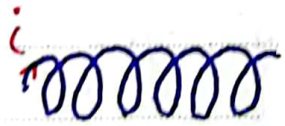
روش ۲

$\rightarrow i_{enc} = J A_{enc} = \frac{i}{\pi R^2} \times \pi r^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 i$

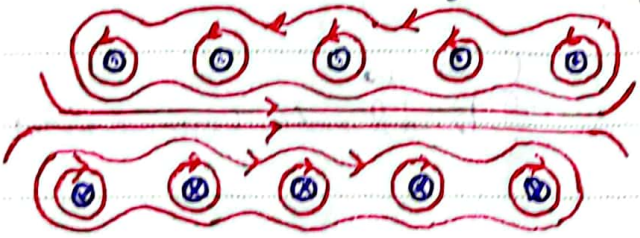
$\Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 \times \left(\frac{r}{R}\right)^2 i \Rightarrow B = \frac{\mu i}{2\pi R^2} r$

* میدان مغناطیسی یک سیم لوله:

سیم است بلند که به صورت مارپیچ و مانند فنر فشرده پیچیده شده است.



فرض کنید طول سیم لوله نسبت به قطر آن بسیار بیشتر است. اگر از مقطع سیم لوله به آن نگاه کنیم:



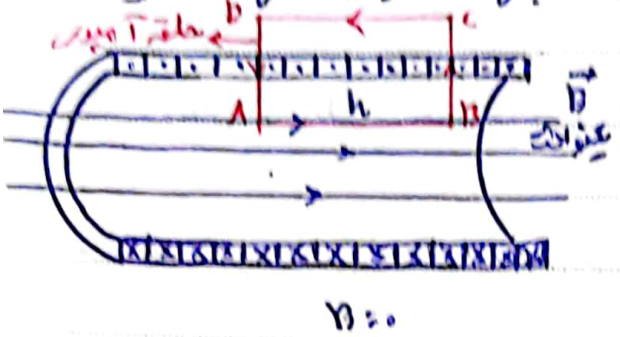
برای نقاط نزدیک هر ۲ سیملوله مانند یک سیم راست عمل کرده و $\vec{B}$ در آنجا تقریباً شبیه دایره‌های هم مرکز است. میدان بین دورهای مجاور در جهت حذف هم عمل کرده و در نقاط دیگر، تقریباً با محور سیملوله موازی است.

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

★ سیملوله ایده آل، طول آن طویل و سطح مقطع سیم‌ها مربعی در نظر گرفته می‌شود. میدان در



داخل یکنواخت و در خارج آن صفر است! (چرا؟)

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$\rightarrow \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$\rightarrow \int_a^b B\,dl\,\cancel{\cos 0}^{1} + \int_b^c B\,dl\,\cancel{\cos 90}^{0} + \int_c^d \cancel{B}^{0}\,dl\cos\theta + \int_d^a B\,dl\,\cancel{\cos 90}^{0} = \mu_0 i_{enc}$$

$$\rightarrow Bh = \mu_0 i_{enc}$$

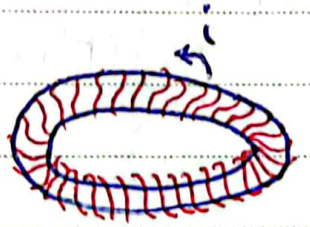
اگر n تعداد دورهای سیم لوله در واحد طول باشد:

$$i_{enc} = nhi$$

تعداد دور در واحد طول

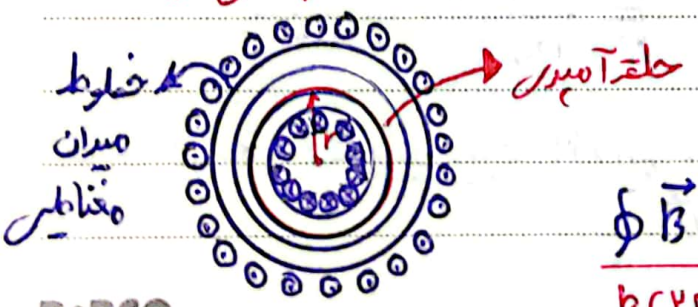
$$\rightarrow B\cancel{h} = \mu_0 n\cancel{h} i \rightarrow B = \mu_0 n i$$

★ میدان مغناطیسی چنبره:



چنبره را می‌توان سیملوله‌ای در نظر گرفت که خمیده شده

تا ۲ انتهای آن به هم بچسبند. با انتخاب حلقه آمپری



وجهت را عکس‌ساعتگرد برای آن خواهیم داشت:

$$\underbrace{\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}}_{B(2\pi r)} = \mu_0 i_{enc} = \mu_0 (Ni)$$

تعداد کل دورهای چنبره

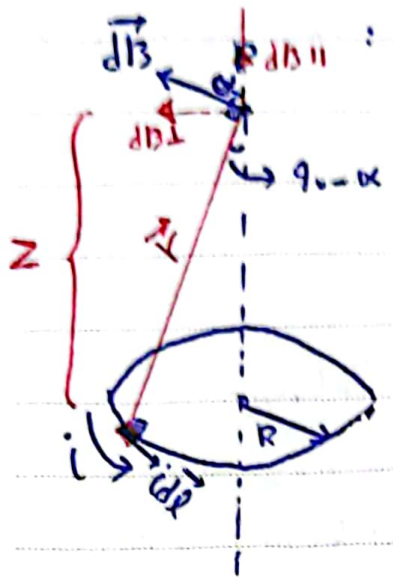
PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$ در بیرون از چنبره ایده‌آل میدان مغناطیسی ۰ است.

مثال) میدان مغناطیسی یک پیچک حامل جریان (۲ قطب مغناطیسی):



می‌خواهیم میدان را در نقطه P واقع بر روی محور مرکزی حلقه و به فاصله z از مرکز حلقه بیابیم.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

زاویه بین بردار $\vec{r}$ و $i\,d\vec{l}$ برابر با:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,dl\,r\sin 90}{r^{3\,2}}$$

به دلیل تقارن شکل، مولفه های $dB_{\perp}$ همدیگر را خنثی و در $\vec{B}$ کل فقط مولفه های $dB_{\parallel}$ حضور دارند:

$$B = \int dB_{\parallel} = \int dB\cos\alpha = \int \frac{\mu_0 i \overbrace{dl}^{R\,d\varphi}}{4\pi r^2}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} \rightarrow B = \frac{\mu_0 i R^2}{4\pi(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\sin(90-\alpha)$

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{\text{If } z \gg R} B = \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3} = \frac{\mu_0 i \pi R^2}{2\pi z^3} = \frac{\mu_0 i A}{2\pi z^3}$$

اگر به جای یک حلقه، یک پیچک N دوری داشته باشیم:

μ ← اندازه بردار گشتاور ۲ قطبی مغناطیسی

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 N i A}{2\pi z^3} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi z^3} \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi z^3}\vec{\mu}$$

@booklet_aut

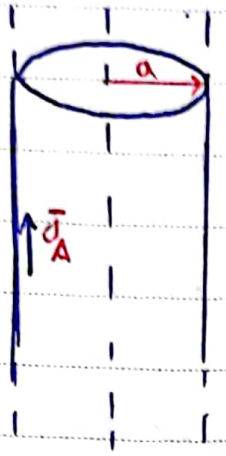
PAPCO

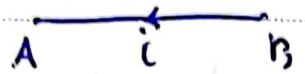
★ آمپر برای سولونوئید، چنبره و سیم طویل است! (سولونوئید = سیملوله)

Subject:
Date

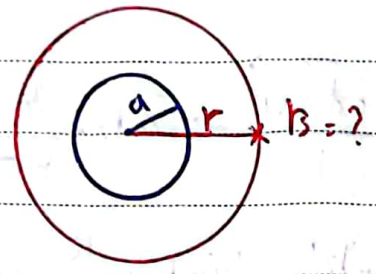
مثال) چگالی جریان $J = \frac{A}{r} e^{kr}$ از داخل رسانای توپر استوانه‌ای شکل طولانی به شعاع $R = a$ عبور می‌کند. الف) میدان مغناطیسی را در خارج رسانا و به فاصله r از محور آن را بیابید.

ب) نیروی وارد بر سیم AB به طول 4a در مطابق شکل عمود بر محور رسانا و به فاصله 2a از محور قرار دارد و حامل جریان I می‌باشد را بیابید.





الف)



$$\oint B \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 i_{enc} \star \quad , \quad i_{enc} = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

سطح بالا:

$A = \pi r^2$

$dA = 2\pi r dr$

$$\rightarrow i_{enc} = \int_{r=0}^{a} \left(\frac{A}{r} e^{kr}\right)(2\pi r dr)$$

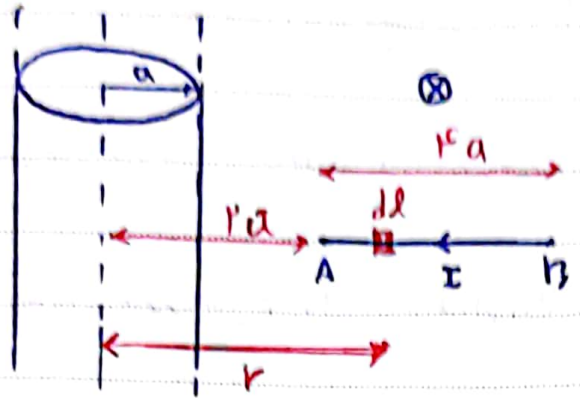
$$= 2\pi A \int_0^a e^{kr} dr = \frac{2\pi A}{k} e^{kr}\Big|_0^a = \frac{2\pi A}{k}(e^{ka} - 1)$$

$$\xrightarrow{\star} B(2\pi r) = \frac{2\pi \mu_0 A}{k}(e^{ka} - 1)$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 A}{k r}(e^{ka} - 1)$$

@booklet_aut

ب)

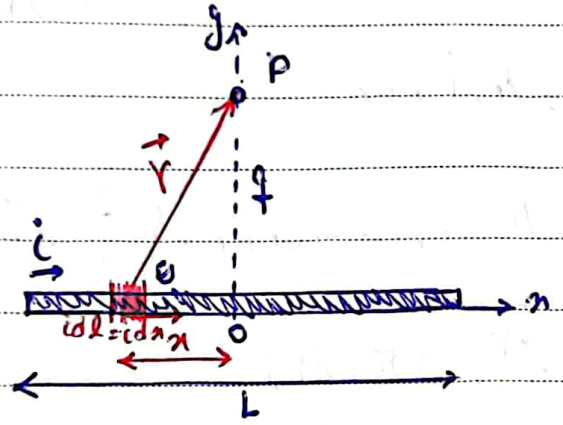


$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B} = I\overbrace{dl}^{dr} B \sin 90$$

$$\rightarrow F = \int I B\, dr = \int_{2a}^{4a} I \frac{\mu_0 A}{kr}\left(e^{ka}-1\right) dr$$

$$= \frac{\mu_0 I A}{k}\left(e^{ka}-1\right) \ln(3)$$

مثال) از سیم به طول محدود L مطابق شکل جریان i عبور می‌کند. نقطه P به فاصله k روی عمود منصف سیم قرار دارد. اندازه میدان مغناطیسی در نقطه P را بدست بیاورید.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\, d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2} \rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\overbrace{dl}^{dr}\sin\theta}{r^2}$$

$$\text{و } r^2 = x^2 + k^2 \text{ و } \sin\theta = \frac{k}{r} = \frac{k}{\sqrt{x^2+k^2}}$$

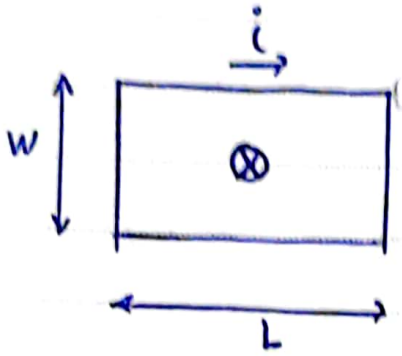
$$\rightarrow B = \int dB = \int_{x=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i k\, dx}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left[k \times \frac{x}{k^2(x^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi k} \times \frac{L}{\sqrt{L^2+4k^2}}$$

@booklet_aut

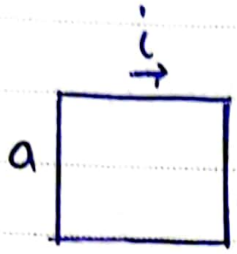
Subject:
Date

قسمت ب مثال قبل) میدان در مرکز حلقه مستطیل شکل زیر که حامل جریان i است چقدر می‌شود؟



$$B = 2\left\{\frac{\mu_0 i}{2\pi(\frac{w}{2})} \times \frac{L}{\sqrt{L^2+4(\frac{w}{2})^2}}\right\} + 2\left\{\frac{\mu_0 i}{2\pi(\frac{L}{2})} \times \frac{w}{\sqrt{w^2+(\frac{L}{2})^2}}\right\}$$

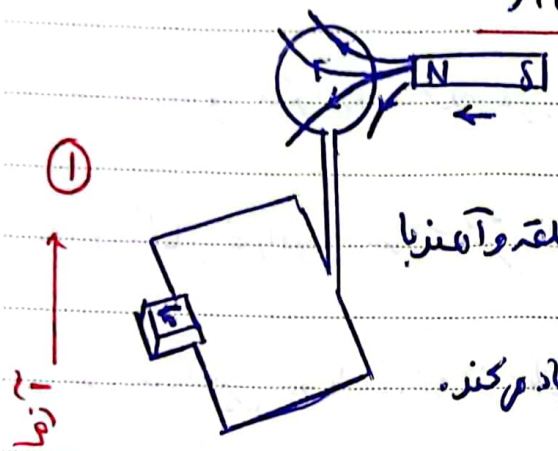
$$= \frac{2\mu_0 i}{\pi} \times \frac{\sqrt{L^2+w^2}}{Lw}$$



تمرین: اگر $a = w = L$ یعنی میدان در مرکز مربع.

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi a}$$

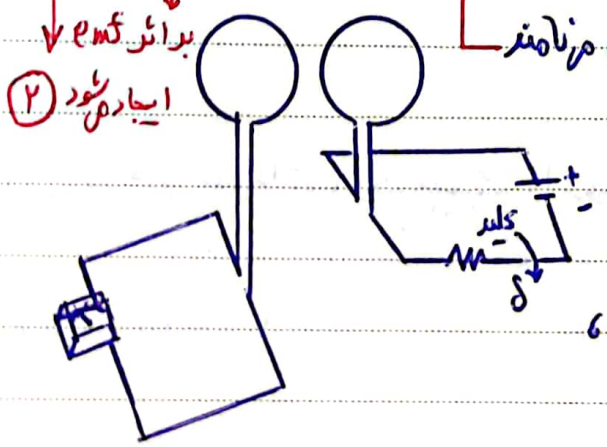
فصل ۱: فرآیند و ضرایب القاء.



آزمایش اول: جریان فقط موقع ایجاد می‌گردد که بین حلقه و آهنربا حرکت نسبی وجود داشته باشد. حرکت سریعتر جریان بزرگتری ایجاد می‌کند.

اگر قطب N را به سمت حلقه حرکت دهیم و جریان ساعتگرد ایجاد شود، N از حلقه جریان پادساعتگرد تولید خواهد کرد. جریان ایجاد شده در حلقه را جریان القایی می‌نامند

نام فرآیند: القاء



آزمایش دوم: هنگام بسته شدن کلید S و برقراری جریان در حلقه سمت راست و یا هنگام باز شدن کلید و قطع جریان،

@booklet_aut

آمپرسنج موجود در حلقه سمت چپ، عبور جریان را نشان می‌دهد.

★ نتیجهٔ ۲ آزمایش (قانون القای فاراده):

هنگامی در حلقه سمت چپ ۲ آزمایش قبل، emf القایی ایجاد می‌گردد که تعداد خطوط میدان مغناطیسی گذرنده از آن تغییر کند.

★ شار میدان مغناطیسی: که با Φ_B نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

یکای SI، $T.m^2$ ← برای سادگی: وبر (Wb)

در حالت خاص اگر $\vec{B}$ بر سطح عمود و یکنواخت باشد:

$$\Phi_B = BA$$

★ قانون القای فاراده به صورت کمّی:

اگر شار مغناطیسی Φ_B گذرنده از سطح یک حلقهٔ رسانا متغیر با زمان باشد، یک emf در حلقه القا می‌شود. این فرآیند را القا نامیده و emf القایی را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

emf القایی

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$ (قانون القای فاراده)

اگر به جای یک حلقه، یک پیچک N دوری با دورهای فشرده قرار داشته باشد، emf القایی برابر خواهد بود با:

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$ (قانون القای فاراده)

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

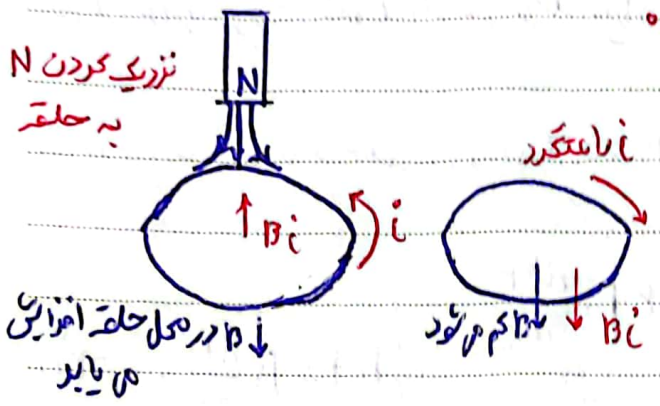
★ روش های تغییر شار:

۱) تغییر اندازه B در محل حلقه

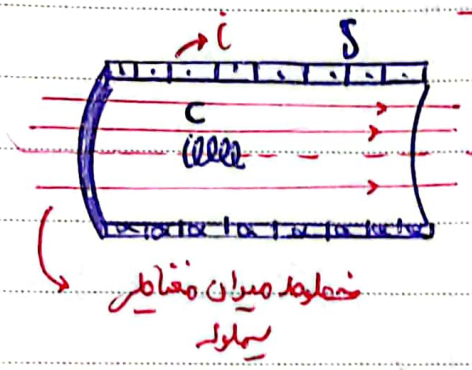
۲) تغییر مساحت حلقه یا بخشی از آن که شار عبور می کند

۳) تغییر زاویه بین میدان مغناطیسی و صفحه حلقه

★ قانون لنز: جهت جریان القا شده در حلقه به نحوی است که میدان مغناطیسی ناشی از این جریان القایی با تغییر شار مغناطیسی القا کننده مخالفت کند.



مثال) پیچک C در داخل یک سیملوله ایده آل S که از آن جریان i عبور می کند، قرار دارد.



$n_S = 220 \frac{\text{دور}}{cm}$ ، $2R_S = 3.2\,cm$

و

$N_C = 130$ دور ، $2R_C = 2.1\,cm$

جریان سیملوله با آهنگ ثابت طی 25ms از مقدار $i = 10A$ به صفر می رسد. اندازه emf القا شده در پیچک C هنگام این تغییر جریان بیابید.

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \rightarrow |\mathcal{E}| = N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

$$\frac{d\Phi_B}{dt}\ ,\ \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}\ ,\ \frac{\Phi_{Bf}-\Phi_{Bi}}{\Delta t}$$

$$\Phi_{Bf}=0\ /\ \Phi_{Bi}=\int \vec{B}\cdot d\vec{A}=B_s A_c=(1.0\,mT)(\pi r_c^2)=(4\times10^{-7}\times 22\ldots)\times(\pi(\frac{\text{قطر}}{2})^2)$$

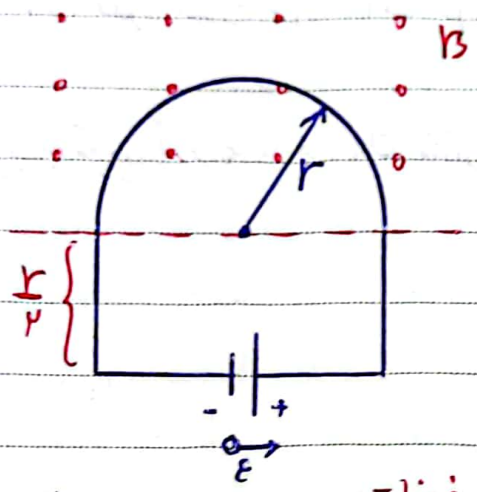
بیضی

لوله

$$\longrightarrow \Phi_{Bi}=1.4\times10^{-6}$$

$$|\mathcal{E}|_c=N_c\times\left|\frac{\Phi_{Bf}-\Phi_{Bi}}{\Delta t}\right|=130\times\left|\frac{0-1.4\times10^{-6}}{25\times10^{-4}}\right|=7.5\times10^{-1}\,V=0.75\,V$$

مثال)



الف) اندازه و جهت emf القایی توسط میدان $\vec{B}$ در $t=0.5$

بیابید ب) جریان حلقه در $t=0.5$ چقدر است؟

(الف) $|\mathcal{E}|=\frac{d\Phi_B}{dt}$

$$\Phi_B=\int\vec{B}\cdot d\vec{A}=BA$$

$$|\mathcal{E}|=A\frac{dB}{dt}=\frac{1}{2}\pi r^2(8t+2)$$

معروفات:

$r=0.2\,m$

$\mathcal{E}=2\,V$ و $B=4t^2+2t+3$

$R_{حلقه}=2\,\Omega$

$$\longrightarrow |\mathcal{E}|=\frac{\pi\times(0.2)^2}{2}\times(8\times0.5+2)=0.512\,V$$

جهت emf ← ساعتگرد

چون شار به سمت بیرون حلقه در حال افزایش است. B_i (القایی) باید به سمت داخل صفحه باشد ← این میدان القایی توسط یک جریان القایی پادساعتگرد تولید می‌گردد.

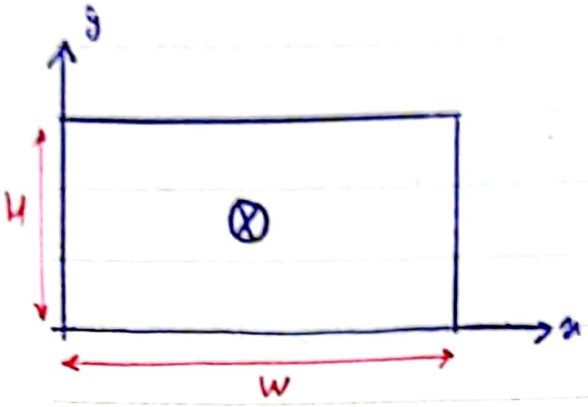
@booklet_aut

Subject:
Date

(ب) $\rightarrow i = \frac{\varepsilon_{net}}{R} = \frac{\varepsilon_{ind} - \varepsilon_{mf}}{R} = \frac{0.012 - 2}{2} = 1.58\ A$

مثال) اندازه و جهت emf القایی حول حلقه را در $t = 1.5$ بیابید.

$$\begin{cases} H = 2m \\ W = 3m \\ B = 4t^2x^2\ (T) \end{cases}$$



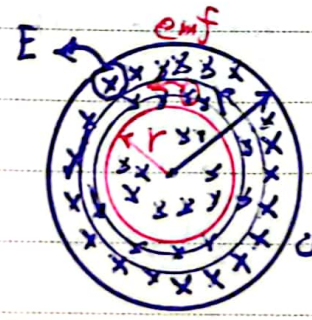
$$|\varepsilon| = \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B\, dA \cos 0 = \int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{3} 4t^2x^2\, dx\, dy = 4 \times \frac{27}{3} \times 2t^2 = 72t^2$$

$$|\varepsilon| = \frac{d}{dt}(72t^2) = 144t \xrightarrow{t=1.5} |\varepsilon| = 14.4\ V$$

تا به صورت درون سو افزایش می‌یابد، در نتیجه B_i القایی باید برون سو باشد. این میدان توسط جریان پادساعتگرد تولید می‌شود در نتیجه جهت emf القایی پادساعتگرد است.

★ میدان الکتریکی القایی:



یک حلقه مس به شعاع r در میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد، این میدان دارای حجم استوانه‌ای به شعاع R است. شدت این میدان را با آهنگ ثابت افزایش می‌دهیم در نتیجه در حلقه یک emf پادساعتگرد القا می‌شود که باعث جاری شدن جریان در آن می‌شود: به عبارت دیگر

PAPCO

@booklet_aut

Subject:
Date

یک میدان الکتریکی در امتداد حلقه وجود دارد که کار لازم بر روی الکترون های متحرک را انجام می دهد.

این میدان الکتریکی القایی را با $\vec{E}$ نمایش می دهیم که همانند میدان الکتریکی ناشی از بارهای ایستا بر ذره ای با بار q_0 نیروی $q_0\vec{E}$ را وارد می کند. این میدان الکتریکی القا حتی در صورت نبود حلقه مسی نیز در فضا القا می گردد. خطوط میدان الکتریکی القایی به شکل دایره های متحدالمرکز در میدان مغناطیسی متغیر $\vec{B}$ هستند و در هر نقطه بر دایره مربوطه خود مماس اند.

★ فرمولبندی جدید قانون القای فاراده:

ذره ای با بار q_0 روی یک مسیر دایره ای حرکت می کند. کاری که میدان الکتریکی القایی برای یک دور چرخاندن این ذره انجام می دهد $W = q_0\mathcal{E}$ است که $\mathcal{E}$ همان emf القایی است:

$$W = \oint \vec{F}\cdot d\ell = \oint q_0\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = q_0\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\ell}$$

- مثلا اگر مسیر دایره ای به شعاع r باشد:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E\oint d\vec{\ell} = E(2\pi r)$$

در نتیجه از قانون القای فاراده داریم:

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}$$

@booklet_aut

Subject:
Date

★ مقایسه میدان الکتریکی القایی با میدان الکتریکی ناشی از بارهای ایستایی:

- عدد ۲ به یک ذره باردار q_0 نیروی q_0E را وارد می‌کند

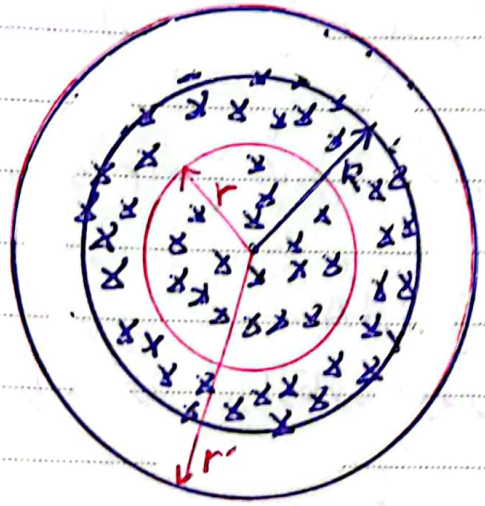
★ تفاوت میدان الکتریکی القایی با میدان الکتریکی ناشی از بارهای ایستایی:

- برای میدان الکتریکی القایی نمی‌توان اختلاف پتانسیل الکتریکی تعریف کرد!

در میدان الکتریکی القایی اگر i و f یکی باشند در نتیجه باید $V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{l}$

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}$ برابر با صفر ولی در صورت وجود تار مغناطیسی متغیر، انتگرال فوق ≠ نبوده و برابر است با: $-\frac{d\Phi_B}{dt}$. در نتیجه انتساب اختلاف پتانسیل الکتریکی به میدان الکتریکی القایی معنی ندارد.

مثال) در شکل مقابل $R = 8.5\,cm$ و $\frac{dB}{dt} = 0.13\,T/s$ است.



الف) عبارتی برای اندازه میدان الکتریکی در نقطه‌ای داخل میدان مغناطیسی و به فاصله r از مرکز میدان بیابید و آن را به ازای $r = 5.2\,cm$ محاسبه کنید.

ب) عبارتی برای میدان الکتریکی القایی در نقطه‌ای بیرون میدان B به فاصله r' از مرکز میدان بیابید و آن را به ازای $r' = 13.5\,cm$ محاسبه کنید.

@booklet_aut

Subject:
Date

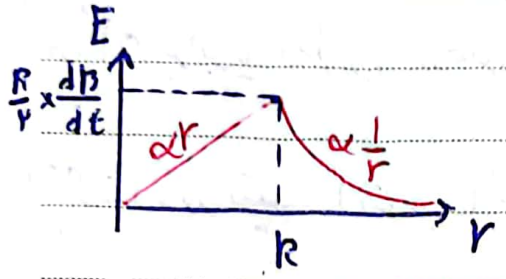
الف) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi_B}{dt} \rightarrow E(2\pi r) = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(BA)$

$\rightarrow E(2\pi r) = A\frac{dB}{dt} = (\pi r^2)\frac{dB}{dt} \rightarrow E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$

$\xrightarrow{r=0.2cm} E = \frac{0.2\times10^{-2}}{2}\times13 = 0.0034\ V/m$

ب) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(BA) = A\frac{dB}{dt} \rightarrow E(2\pi r') = \pi R^2\frac{dB}{dt}$

$\longrightarrow E = \frac{R^2}{2r'}\frac{dB}{dt} \xrightarrow[r'=15cm]{R=8cm} E = \frac{(8.0)^2\times10^{-4}}{2\times15.0\times10^{-2}}\times0.13 = 3.8\times10^{-4}\ \frac{V}{m}$



مثال) از سیم مستقیم طویل جریانی با چگالی $J = ar$ عبور می‌کند که a عددی ثابت و r فاصله از محور سیم است. شاری که از سطح نشان داده شده عبور می‌کند چقدر است؟ ($R = 3a$)

$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int B\,dA\cos\cancel{\theta}^{\,90^\circ} = \int B\,dA$

در رابطه فوق B را از قانون آمپر می‌یابیم:

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc} \rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 i_{enc}$

$i_{enc} = \int \vec{J}\cdot d\vec{A} = \int J\,dA\cos 0 = \int_{r=0}^{r}(ar)(2\pi r\,dr) = 2\pi a\frac{r^3}{3}$

$\rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 i_{enc} = \mu_0\left(2\pi a\frac{r^3}{3}\right) \rightarrow B = \frac{\mu_0 a r^2}{3}$

@booklet_aut

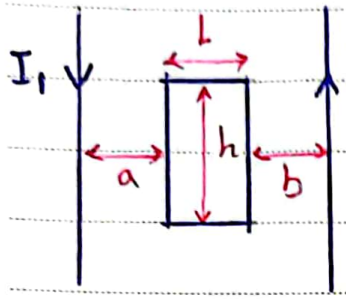
Subject:
Date

$$\longrightarrow \Phi = \int_{r=0}^{R}\int_{z=0}^{L} \frac{\mu_0 a r^2}{3}\, dr\, dz = \frac{\mu_0 a}{3}\int_{r=0}^{R}\int_{z=0}^{L} r^2\, dr\, dz = \frac{\mu_0 a}{3}\times\frac{R^3}{3}\times L$$

$$\xrightarrow{R=3a} \Phi_B = 3\mu_0 a^4 L$$

مثال) ۲ سیم طویل و یک قاب مطابق شکل در صفحهٔ کاغذ قرار دارند و قاب فاقد جریان است.

شار مغناطیسی گذرنده از قاب حاصل از جریان ۲ سیم را محاسبه کنید. نیروی محرکه القایی را بیابید.



$I_2 = t^2$

$$\Phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int B\, dA \cos 0 = \int B\, dA$$

B ناشی از یک سیم با جریان i در فاصله r از آن:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$\longrightarrow \Phi_1 = \int B_1\, dA = \int_{z=0}^{h}\int_{r=a}^{a+L} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\, dr\, dz = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_{r=a}^{a+L}\frac{dr}{r}\int_{z=0}^{h} dz = \frac{\mu_0 h I_1}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

$$\longrightarrow \Phi_2 = \int B_2\, dA = \int_{z=0}^{h}\int_{r=b}^{b+L} \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}\, dr\, dz = \frac{\mu_0 h I_2}{2\pi}\ln\left(\frac{b+L}{b}\right)$$

هر ۲ شار در محل قاب بدون واسطه. پس با هم جمع می‌شوند:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\left(I_1 \ln\left(\frac{a+L}{a}\right) + \overset{t^2}{I_2}\ln\left(\frac{b+L}{b}\right)\right)$$

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 h t}{\pi}\ln\left(\frac{b+L}{b}\right)$$

Saamin

تموم شد؟

راه ارتباطی: @MrSaamin
@booklet_aut