ص ۱۵) جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-2(x-1)y'-y=0$

را به صورت سری توانی برحسب توان‌های $(x-1)$ بدست آوریم

حل:

چون $x=0$ یک نقطه تحلیلی معادله است پس معادله دارای جوابی به صورت زیر است

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-1)^n$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n C_n (x-1)^{n-1}, \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n (x-1)^{n-2}$$

تعاریف فوق را در معادله داده شده قرار دهیم

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n(x-1)^{n-2}-2(x-1)\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-1)^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-1)^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n(x-1)^{n-2}-2\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-1)^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)C_{n+2}(x-1)^n-2\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-1)^n=0$$

$$2C_2 - C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)C_{n+2} - (2n+1)C_n\right](x-1)^n = 0$$

ضریب $(x-1)^0$: $2C_2 - C_0 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{C_0}{2}$

ضریب $(x-1)^1$: $6C_3 - 3C_1 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{2}C_1$

ضریب $(x-1)^n$: $(n+2)(n+1)C_{n+2} - (2n+1)C_n = 0$

$$C_{n+2} = \frac{(2n+1)\,C_n}{(n+2)(n+1)} \qquad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+2}}\right| = \infty$$

$$n=2 \quad C_4 = \frac{5C_2}{12} = \frac{1.5}{4!}C_0$$

$$C_{2n} = \frac{1.5.9\ldots(4n-3)}{(2n)!} \qquad n \geq 1$$ بطور کلی

$$C_5 = \frac{7C_3}{20} = \frac{7}{5\times4\times2}C_1 = \frac{3.7}{2.3.4.5}C_1 = \frac{(3.7)C_1}{5!}$$

$$C_{2n-1} = \frac{3.7.11\ldots(4n-5)}{(2n-1)!}C_1 \qquad n \geq 2$$ بطور کلی

بنابراین جواب عمومی بصورت زیر است

$$y = C_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.5.9\ldots(4n-3)}{(2n)!}(x-1)^{2n}\right] +$$

$$C_1\left[(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3.7\ldots(4n-5)}{(2n-1)!}(x-1)^{2n-1}\right]$$

نشان دهید که $x=0$ یک نقطه منفرد منظم معادله زیر است. یک جواب (با روش دیگر) معادله را به ازای ریشه بزرگتر معادله شاخص به دست آورده و سپس جواب دوم آن را با روش کاهش مرتبه به دست آورده و جواب عمومی را کامل

$$x^2(x^2-1)y'' - x(x^2+1)y' + (x^2+1)y = 0$$

حل:

$$y'' - \frac{x(x^2+1)}{x^2(x^2-1)}y' + \frac{x^2+1}{x^2(x^2-1)}y = 0$$

$$x \cdot \frac{-(x^2+1)}{x(x^2-1)} = \frac{-(x^2+1)}{x^2-1} = (x^2+1)(1+x^2+x^4+\cdots)$$

$$x^2 \cdot \frac{x^2+1}{x^2(x^2-1)} = -(x^2+1)(1+x^2+x^4+\cdots)$$

بنابراین $x=0$ یک نقطه غیرعادی منظم یا منفرد منظم معادله است. پس معادله حداقل دارای یک جواب به صورت سری زیر است

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \qquad C_0 \neq 0$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)C_n x^{n+r-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

حال روابط فوق را در معادله داده شده قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r} - (x^2+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_n x^{n+r}$$
$$+ (x^2+1)\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

Scanned with CamScanner

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r+2}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\overbrace{(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1}^{(n+r-1)^2}\Big]C_n x^{n+r+2}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\underbrace{(n+r)(n+r-1) + (n+r) + 1}_{(n+r)^2-1}\Big]C_n x^{n+r} = 0$$

برای یافتن معادله شاخص ضرایب کوچکترین توان x را برابر صفر قرار میدهیم

$$[r^2-1]C_0 = 0 \qquad C_0 \neq 0$$
$$r^2-1=0 \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -1$$

$r=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n^2]C_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)^2-1]C_n x^n = 0$$

x^0 ضریب $\quad [(0+1)^2-1]C_0 = 0 \qquad$ C_0 دلخواه

x^1 ضریب $\quad [(1+1)^2-1]C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

x^2 ضریب $\quad [0]C_0 - C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

x^3 ضریب $\quad [1]C_1 - [((4)^2-1)C_3] = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

$\vdots$

x^n ضریب $\quad [(n-2)^2]C_{n-2} - [(n+1)^2-1]C_n = 0 \Rightarrow$

$$C_n = \frac{(n-2)^2 C_{n-2}}{n(n+2)} \qquad n \geq 2$$

$\boxed{y_1 = C_0 x}$ تمام ضرایب به جز C_0 صفر شد

با فرض $C_0 = 1$

$$y_2 = u(x)y_1 = x\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int f_1(x)dx}dx =$$

$$y_2 = x\int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{-(x^2+1)x}{x^2(x^2-1)} dx} dx$$

$$= x\int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} dx} dx = x\int \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{x^2-1}{x}\right) dx$$

$$= x\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) dx = x \ln x + \frac{1}{2x}$$

$$y = Ay_1 + By_2 = Ax + Bx\ln x + \frac{B}{2x}$$

$$= (A + B\ln x)x + \frac{B}{2x}$$

Scanned with CamScanner

حل ۳)

$$y(t)+\int_0^t y'(x)\sin(t-x)\,dx = u_{\pi/2}(t)\cos t \qquad y(0)=1$$

$$\mathcal{L}\{y\}+\mathcal{L}\{y'\}\,\mathcal{L}\{\sin t\} = -\mathcal{L}\left\{u_{\pi/2}(t)\sin(t-\pi/2)\right\}$$

$$Y(s)+(sY(s)-1)\frac{1}{s^2+1} = -e^{-\pi/2\, s}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\left(1+\frac{s}{s^2+1}\right)Y(s) = \frac{1}{s^2+1}-\frac{e^{-\pi/2\, s}}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1-e^{-\pi/2\, s}}{s^2+1+s} = \frac{1}{(s+1/2)^2+3/4}-\frac{e^{-\pi/2\, s}}{(s+1/2)^2+3/4}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-1/2\, t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-u_{\pi/2}(t)\left[\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-1/2(t-\pi/2)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi/2)\right)\right]$$

۴ الف) می‌دانیم $\mathcal{L}\{t^P\} = \frac{\Gamma(P+1)}{s^{P+1}}$ $(P>-1)$

$$\mathcal{L}\{t^{-1/۲}\} = \frac{\Gamma(1/۲)}{s^{1/۲}} = \sqrt{\pi/s} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi s+1}}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{s+1/\pi}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\pi}t} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-1/\pi t} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s+1}}\right\} = \frac{1}{\pi} U_1(t)\, e^{-1/\pi (t-1)} \frac{1}{\sqrt{t-1}}}$$

ب)

$$\mathcal{L}\{te^{-t}\sin^۲ t\} = \frac{1}{۲}\mathcal{L}\{te^{-t}(1-\cos ۲t)\}$$

$$= \frac{1}{۲}\mathcal{L}\{te^{-t}\} - \frac{1}{۲}\mathcal{L}\{te^{-t}\cos ۲t\}$$

$$= -\frac{1}{۲}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{۲}\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{(s+1)^۲+۴}\right)$$

$$= \frac{1}{۲}\frac{1}{(s+1)^۲} + \frac{1}{۲}\frac{۴-(s+1)^۲}{[(s+1)^۲+۴]^۲}$$

س ۱) دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y = e^t \\ \dfrac{dy}{dt} + x = \sin t \end{cases} \qquad x(0)=1, \quad y(0)=0$$

ح: از طرفین معادلات دستگاه، تبدیل لاپلاس می‌گیریم

به فرض: $\mathcal{L}[x]=X$, $\mathcal{L}[y]=Y$

$$\begin{cases} SX - \overset{1}{x(0)} - Y = \dfrac{1}{S-1} \\ SY - \underbrace{y(0)}_{=0} + X = \dfrac{1}{S^2+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} SX - Y = \dfrac{S}{S-1} \\ X + SY = \dfrac{1}{S^2+1} \end{cases}$$

$$(S^2+1)X = \frac{S^2}{(S-1)} + \frac{1}{S^2+1}$$

$$X = \frac{S^2}{(S-1)(S^2+1)} + \frac{1}{(S^2+1)^2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{S-1} + \frac{BS+C}{S^2+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(S^2+1)^2}\right]$$

$A = B = C = \frac{1}{2}$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2(S-1)} + \frac{S}{2(S^2+1)} + \frac{1}{2(S^2+1)}\right] + \int_0^t \sin(t-x)\sin x \, dx$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[e^t + \cos t + \sin t + (\sin t - t\cos t)\right]$$

$$-(S^2+1)Y = -\frac{S}{S^2+1} + \frac{S}{S-1}$$

$$Y = \frac{S}{(S^2+1)^2} - \frac{S}{(S^2+1)(S-1)}$$

$C = -\frac{1}{2}$

$A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{S}{(S^2+1)^2} + \frac{AS+B}{S^2+1} + \frac{C}{S-1}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[t\sin t - e^t + \cos t - \sin t\right]$$