به نام خدا

تمرین اول

جبرخطی کاربردی - پاییز 1403

1.پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره صفر برای کل تمرین منظور خواهد شد.

2. پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.

3. برای تمرین‌ها و پروژه‌ها **در مجموع 10 روز** بودجه تاخیر خواهید داشت؛ دقت کنید که ددلاین‌ها به هیچ عنوان تمدید نخواهند شد.

3. در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق کانال درس سوال خود را بپرسید.

4. پاسخ خود را در یک فایل pdf با فرمت HW?_Name_StudentNumber آپلود کنید.

موفق باشید. 😊

سوال1)
درست یا نادرست بودن هر یک از عبارات زیر را مشخص و اثبات نمایید :

a) اگر دستگاه ax=b بیشتر از یک جواب داشته باشد, دستگاه ax=0 هم بیشتر از یک جواب دارد.
b) ماتریس های A_{mxn} و C_{mxn} مفروضند: اگر Ax=0 تنها دارای جواب بدیهی باشد و داشته باشیم $\text{span}\{a_1,\ldots,a_n\} = \text{span}\{c_1,\ldots,c_n\}$ آنگاه تبدیل خطی که با ماتریس C مشخص شده باشد یک به یک و پوشاست.
c) اگر جواب های دو دستگاه یکسان باشند, آن دو دستگاه هم ارزند.
d) ضرب از سمت چپ ماتریس B در یک ماتریس قطری با درایه های قطری غیرصفر, سطرهای B را scale می کند.
e) اگر A و B ماتریس های nxn باشند, آنگاه $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

سوال2)
الف) فرض کنید که u, v, w بردارهای مستقل خطی در فضای R^{n} باشند:
ثابت کنید که $u+v, u-v, u-2v+w$ نیز مستقل خطی هستند.
ب) فرض کنید مجموعه $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی در فضای R^{n} است:
ثابت کنید که مجموعه $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ که در آن $w_i = v_i + v_1$ می باشد، یک مجموعه مستقل خطی است.

سوال3)
مشخص کنید هر یک از تبدیلات زیر خطی هستند یا نه، در صورتی که خطی باشند ماتریس استاندارد آنها را نیز بیابید.
الف)

$$T: R^2 \to R^2$$
$$(x_1, x_2) \to (4x_1 - 2x_2, 3|x_2|)$$

ب)

$$T: R^2 \to R^2$$
$$(x_1, x_2) \to (sin\,(x_1), x_2)$$

ج)

$$T: R^3 \to R^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \to (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

سوال 4)
دوران Givens یک تبدیل خطی از R^n به R^n است. این دوران در برنامه های کامپیوتری برای ساخت یک درایه صفر در یک بردار (معمولا یک ستون از یک ماتریس) استفاده می شود.
ماتریس استاندارد دوران Givens در R^2 به این فرم است :

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},\ a^2 + b^2 = 1$$

a و b را طوری تعیین کنید که $\binom{4}{3}$ را روی $\binom{5}{0}$ دوران دهد.

سوال 5)
الف) معکوس ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ را بیابید.
ب) فرض کنید ماتریس A یک ماتریس پایین مثلثی با درایه های تمام 1 مشابه الف به ابعاد nxn است , با استفاده از قسمت الف فرم کلی معکوس این ماتریس را حدس زده و آن را اثبات کنید. (می توانید از استقرا هم استفاده کنید.)

سوال 6)
تبدیل $T : R^3 \to R^2$ مفروض است. این تبدیل ابتدا نقطه $x = [x_1,x_2,x_3]$ را به صفحه $x_2 = 0$ نگاشت می کند و سپس نقطه حاصل را در جهت ساعتگرد به اندازه θ دوران می دهد. خطی بودن این تبدیل را بررسی نمایید و در صورت خطی بودن ماتریس تبدیل را بیابید.

سوال 7)
دستگاه معادلات زیر را در صورتی که اعداد a و b حقیقی باشند، در نظر بگیرید:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = a$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b$$
$$3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = a + b$$

الف) اعداد a و b را طوری مشخص کنید که دستگاه حداقل یک جواب داشته باشد و جواب را برحسب a و b مشخص کنید.
ب) آیا مقادیری از a و b وجود دارد که دستگاه تنها یک جواب داشته باشد؟ توضیح دهید.

سوال 8)
الف) اگر A یک ماتریس $n \times n$ وارون پذیر باشد ثابت کنید:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

ب) با استفاده از قضیه بالا معادله زیر را حل کنید.

$$A^T x = b$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -6 & -7 & -2 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

سوال 9)

فرض کنید $T: R^2 \to R^3$ و $T(x) = Ax$ که در آن A یک ماتریس وارون پذیر باشد.

اگر داشته باشیم $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، مقادیر زیر را پیدا کنید.

الف) $T\left(\begin{bmatrix} 7 \\ 16 \end{bmatrix}\right) =$

ب) $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}\right) =$

امتیازی

فرض کنید A یک ماتریس خودتوان است (یعنی $A^2 = A$), ثابت کنید به ازای kهایی بزرگ, ماتریس $I - \frac{1}{k}A$ وارون پذیر است و داریم :

$$\left(I - \frac{1}{k}A\right)^{-1} = I + \frac{1}{k-1}A$$