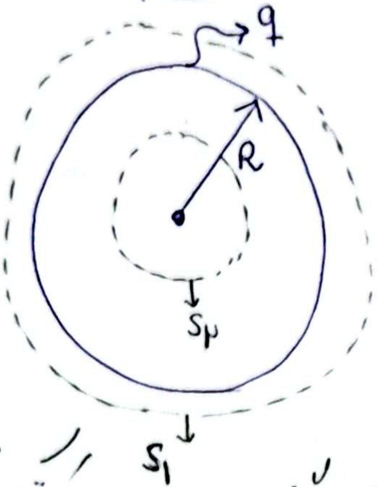
فصل ۳: قانون گاوس

① پوسته‌ی کروی: یک پوسته‌ی باردار کروی با بار کل q و شعاع R وجود دارد. میدان را در داخل و خارج پوسته بدست آورید.



پاسخ: خارج از پوسته: $\underbrace{r \geq R}_{S_1\ \text{(سطح بسته (گاوسی}}$

$$\Rightarrow \oint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{dA}_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Longrightarrow E_1 \underbrace{\oint \vec{dA}_1}_{A_1 = 4\pi r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

این میدان همان میدانی است که یک بار نقطه‌ای q واقع در مرکز پوسته‌ی باردار ایجاد می‌کند. ⟸ اثبات اولین قضیه پوسته

قانون گاوس: میدان های الکتریکی نقاط روی سطح گاوسی (سطح بسته) را به بار خالصی که داخل آن سطح قرار دارد مربوط می‌کند (بار q محصور شده است)

قانون گاوس: $\oint_S \vec{E} \cdot \underset{\text{یا } \vec{dS}}{\vec{dA}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

داخل پوسته: $\underbrace{r < R}_{S_2\ \text{سطح گاوسی}}$

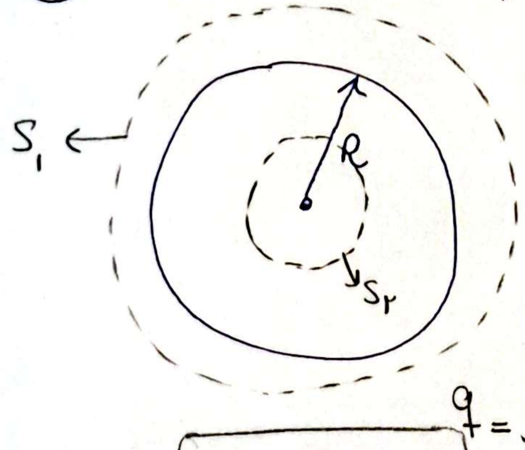
$$\Rightarrow \oint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{q_2}{\varepsilon_0} = \frac{0}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow E_2 = 0 \longrightarrow$$

یعنی اگر باری داخل پوسته قرار گیرد چون میدان صفر است، هیچ نیرویی به آن وارد نمی‌شود ⟸ اثبات دومین قضیه پوسته

---

② یک توزیع بار کروی به شعاع R با بار کل q و چگالی حجمی بار ρ_0 را در نظر بگیرید. میدان را در داخل و خارج از این توزیع بار بدست آورید.



پاسخ: خارج از توزیع بار (کل): $r \geq R$ (سطح گاوسی S_1) $\Rightarrow$

$$\oint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{dA}_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E_1 (4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

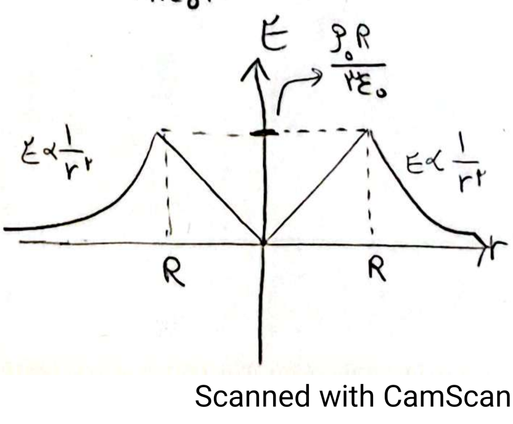
$$q = \rho_0 V = \rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2}}$$

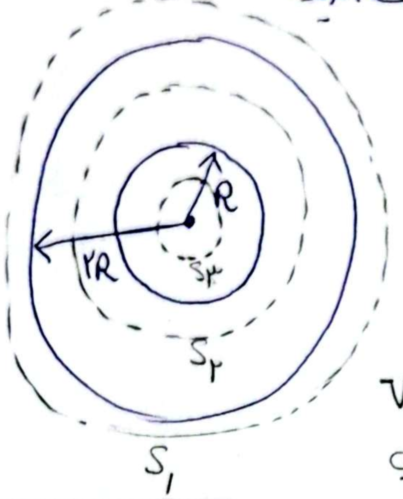
داخل توزیع بار: $r < R\ (S_2) \Rightarrow \oint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{dA} = \frac{q_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$q = \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3$$
$$q_2 = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3 \longrightarrow \frac{q_2}{q} = \frac{r^3}{R^3} \longrightarrow \boxed{q_2 = q\frac{r^3}{R^3}}$$

$$\Longrightarrow E_2 = \frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \boxed{\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r}$$



③ در حجم کروی ای به شعاع داخلی R و شعاع خارجی 2R ، بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ در داخل حجم کره توزیع شده است.
میدان الکتریکی را در سه ناحیه $r<R$ ، $R<r<2R$ و $r>2R$ بدست آورید.



پاسخ:

$$r\geq 2R \to S_1 \Rightarrow \oint_{S_1} \vec{E_1}\cdot d\vec{A_1} = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\to E_1(4\pi r^2) = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{q_1}{4\pi r^2\varepsilon_0}$$

$$q_1=\rho V_1 \to dq_1=\rho\, dV_1 \to q_1=\int \underbrace{\rho}_{\text{یکنواخت/ثابت}} dV_1$$

$$V_1=\frac{4}{3}\pi r^3 \to dV_1 = 4\pi r^2 dr$$

$$q_1=\int_R^{2R}\rho\, 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho\int_R^{2R} r^2 dr = \frac{4\pi\rho}{3}(\underbrace{8R^3-R^3}_{7R^3})$$

$$\int_R^{2R} r^2 dr = \frac{r^3}{3}\Big|_R^{2R}$$

$$\to \boxed{q_1 = \frac{28}{3}\rho\pi R^3}$$

$$\to \boxed{E_1=\frac{7}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}}$$

$$R\leq r<2R \to S_2 \Rightarrow \oint_{S_2}\vec{E_2}\cdot d\vec{A_2} = \frac{q_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{q_2}{4\pi r^2\varepsilon_0}$$

$$q_2=\int\rho\, dV_2 = \int_R^r \rho\, 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi\rho(r^3-R^3)$$

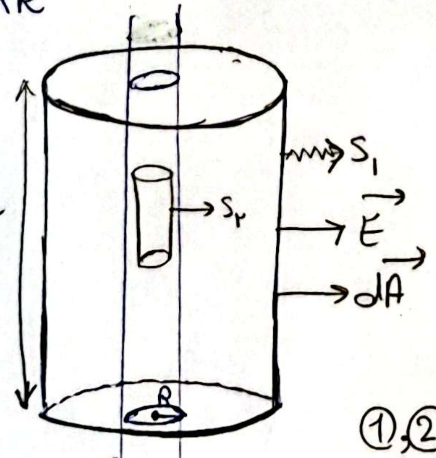
$$\to E_2=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{(r^3-R^3)}{r^2}$$

$$r<R \to S_3 \Rightarrow E_3 = \frac{q_3}{4\pi r^2\varepsilon_0} = \frac{0}{4\pi r^2\varepsilon_0} = 0$$

---

④ یک میله‌ی باردار نامحدود به شعاع R و چگالی بار حجمی ρ و بار کل q مفروض است. میدان الکتریکی را در نقاط $r\geq R$ و $r<R$ بیابید.

$$r\geq R \to S_1 \text{ استوانه‌ای} \Rightarrow \underbrace{\oint_{S_1}\vec{E_1}\cdot d\vec{A_1}}_{E_1 A_1,\ \cos 0=1} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad A_1=2\pi rh$$



$$\to E_1=\frac{q}{2\pi rh\varepsilon_0} \quad ①$$

$$q=\int dq=\int\rho\, dV=\rho\int \underbrace{2\pi Rh\, dr}_{dV} = \rho\pi R^2 h \quad ②$$

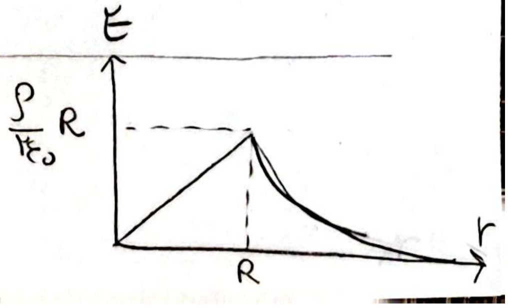
$$V=\pi R^2 h$$

$$dV=2\pi Rh\, dr$$

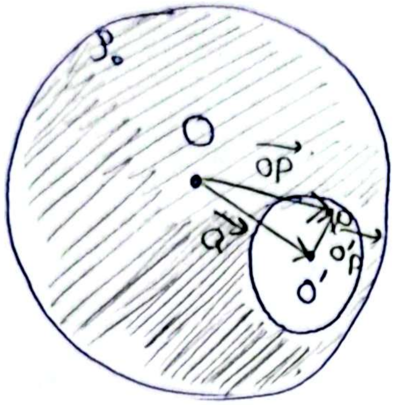
$$①,② \to \boxed{E_1=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}}$$

$$r<R \to S_2 \Rightarrow \oint_{S_2}\vec{E_2}\cdot d\vec{A_2}=\frac{q_2}{\varepsilon_0} \to E_2=\frac{q_2}{2\pi rh\varepsilon_0}$$

$$q_2=\rho\pi r^2 h \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r}$$



⑤ حجم بین ۲ کره مطابق شکل با بار الکتریکی با چگالی حجمی ρ_0 به طور یکنواخت پر شده است. میدان الکتریکی را در داخل حفره به دست آورید.



پاسخ: یک بار کره‌ی بزرگ را توپر فرض کرده و میدان را در نقطه‌ی P با استفاده از قانون گاوس به دست می‌آوریم، سپس کره‌ی کوچک (حفره) را توپر و با چگالی بار $-\rho_0$ فرض می‌کنیم و میدان را در P به دست می‌آوریم؛ خواهیم داشت:

$$① \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A}_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 (4\pi r_1^2) = \frac{\overbrace{\rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi r_1^3\right)}^{q_1}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r_1} \Rightarrow \text{شدت}$$

میدان داخل کره‌ی بزرگ توپر

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \vec{op}} \quad : \text{جهت} \leftarrow \quad |\vec{op}| = r_1$$

$$② \oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{A}_2 = \frac{q_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 (4\pi r_2^2) = \frac{(-\rho_0)\left(\frac{4}{3}\pi r_2^3\right)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{-\rho_0}{3\varepsilon_0} r_2}$$

میدان داخل حفره

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = \frac{-\rho_0}{3\varepsilon_0} \vec{o'p}} \qquad |\vec{o'p}| = r_2$$

علت $-\rho_0$ ← چگالی یکنواخت ⇐ چگالی حفره برابر با چگالی کره بزرگ ⇐ علت منفی بودن ← چون می‌خواستیم جمع کره‌ی توپر با جمع حفره بشه کره‌ی ناقص (می‌شه جای $-\rho_0$ با ρ_0 و در آخر جای حفره جمع کنی)

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}(\vec{op} - \vec{o'p}) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \underbrace{\vec{oo'}}_{\vec{a}} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \vec{a}$$

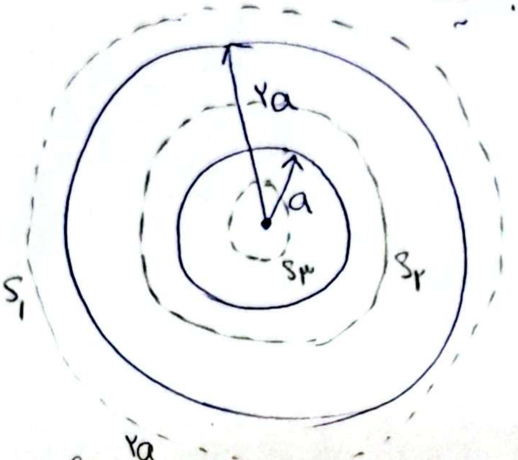
نکته: اگر شبیه این مسئله برای استوانه حل شود (یعنی ۲ استوانه که بینشان چگالی بار حجمی ρ_0 وجود دارد) در این صورت $\vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\vec{a}$ خواهد بود ← به عنوان تمرین حل شود.

(۴) در فضای آزاد بار حجمی به صورت زیر داده شده است:

$$\rho=\begin{cases}\rho_0\dfrac{r}{a}, & r<a \rightarrow \rho_3\\ \beta\rho_0, & a\leqslant r<2a \rightarrow \rho_2\\ 0, & r\geqslant 2a \rightarrow \rho_1\end{cases}$$

الف) شدت میدان الکتریکی را در کلیه نقاط فضا بدست آورید.

ب) شار الکتریکی (شار الکتریکی) را که از سطح کروی نیم کره ی بالایی به شعاع $\frac{3}{2}a$ و به مرکز مبدا مختصات خارج می شود را نیز حساب کنید.



پاسخ: الف)

$$r\geqslant 2a \rightarrow S_1 \rightarrow \oint_{S_1} \overbrace{\vec{E}_1\cdot\vec{dA}_1}^{E_1(4\pi r^2)} = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$q_1=\int dq_1=\int \rho\, dV \qquad V=\frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow dV=4\pi r^2 dr$$

$$q_1=\int \rho(4\pi r^2)dr = 4\pi\left\{\cancel{\int_{2a}^{r}\rho_1 r^2 dr}+\int_a^{2a}\rho_2 r^2 dr+\int_0^a \rho_3 r^2 dr\right\}$$

$$\rho_T=\rho_1+\rho_2+\rho_3$$

$$\rightarrow q_1=4\pi\left\{\int_a^{2a}\beta\rho_0 r^2 dr+\int_0^a \frac{\rho_0}{a} r^3 dr\right\}=4\pi\left[\beta\rho_0\underbrace{\left(\frac{8a^3-a^3}{3}\right)}_{\frac{7a^3}{3}}+\frac{\rho_0}{a}\left(\frac{a^4}{4}\right)\right]$$

$$\rightarrow q_1=4\pi\rho_0 a^3\left(\frac{7}{3}\beta+\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \boxed{E_1=\frac{\rho_0 a^3\left(\frac{7}{3}\beta+\frac{1}{4}\right)}{\varepsilon_0 r^2}}$$

$$a\leqslant r<2a \rightarrow S_2 \rightarrow E_2=\frac{q_2}{4\pi r^2\varepsilon_0} \qquad q_2=4\pi\left\{\underbrace{\int_a^r \rho_2 r^2 dr}_{\beta\rho_0\left(\frac{r^3-a^3}{3}\right)}+\underbrace{\int_0^a \rho_3 r^2 dr}_{\frac{\rho_0}{4}a^3}\right\}$$

$$\rightarrow \boxed{E_2=\frac{\rho_0\left(\frac{\beta}{3}(r^3-a^3)+\frac{a^3}{4}\right)}{\varepsilon_0 r^2}}$$

$$r<a \rightarrow S_3 \rightarrow E_3=\frac{q_3}{4\pi r^2\varepsilon_0} \qquad q_3=4\pi\int_0^r \rho_3 r^2 dr=\frac{4\pi\rho_0}{a}\underbrace{\int_0^r r^3 dr}_{\frac{r^4}{4}}$$

$$\rightarrow \boxed{E_3=\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0 a}r^2}$$

ب) نیم کره ی بالایی $\leftarrow$ $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ ، $0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$

شار الکتریکی : $\Phi=\int \vec{E}\cdot\vec{dA}$ $\qquad dA=r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$

شعاع: $r=\frac{3}{2}a \Rightarrow a\leqslant r<2a \Rightarrow E_2\checkmark$

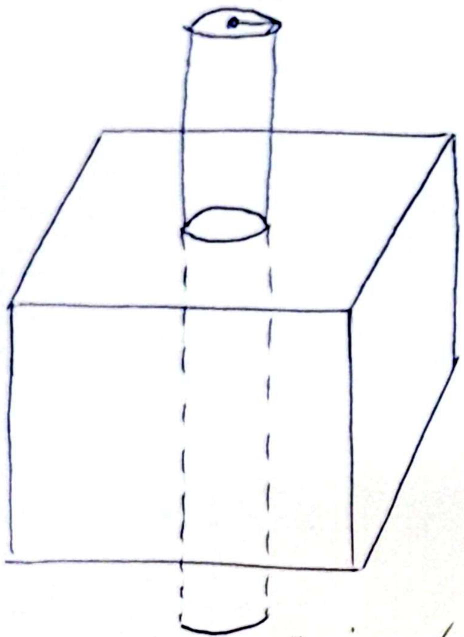
$$E_2=\frac{\rho_0\left(\frac{\beta}{3}(r^3-a^3)+\frac{a^3}{4}\right)}{\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Phi=\int\frac{\rho_0\left(\frac{\beta}{3}(r^3-a^3)+\frac{a^3}{4}\right)}{\varepsilon_0 \cancel{r^2}}\cdot\cancel{r^2}\sin\theta\, d\theta\, d\phi=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left\{\frac{\beta}{3}(r^3-a^3)+\frac{a^3}{4}\right\}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin\theta\, d\theta}_{1}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\phi}_{2\pi}$$

$$r=\frac{3}{2}a \rightarrow \Phi=\frac{2\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left\{\frac{\beta}{3}\left(\frac{27}{8}a^3-a^3\right)+\frac{a^3}{4}\right\}=\frac{\pi\rho_0 a^3}{2\varepsilon_0}\left(1+\frac{19}{6}\beta\right)$$

Scanned with CamScanner

⑦ یک استوانه بسیار طویل با چگالی بار حجمی $\rho=\alpha r$ و شعاع R مفروض است که در آن α عددی ثابت و مثبت بوده و r نیز فاصله بین هر نقطه تا محور استوانه است. اگر این استوانه را درون مکعبی به ضلع $3R$ طوری قرار دهیم که از مرکز مکعب عبور کند و محور آن عمود بر دو وجه مکعب باشد، شار عبوری از یک وجه مکعب را بدست آورید.



پاسخ: $\Phi =$ شار کل عبوری از مکعب $\qquad \varepsilon_0 \Phi = q \rightarrow$

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} q = \frac{1}{\varepsilon_0}\int dq = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV$$

$$q = \int dq = \int \rho\, dV$$

$$dV = r\,dr\,d\phi\,dz$$

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int (\alpha r)(r\,dr\,d\phi\,dz) =$$

$$\frac{\alpha}{\varepsilon_0}\underbrace{\int_{r=0}^{R} r^2 dr}_{\frac{R^3}{3}} \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_{z=0}^{3R} dz}_{3R} = \frac{\alpha}{\varepsilon_0}(2\pi R^4)$$

که در واقع بار کل داخل استوانه است.

خطوط میدان الکتریکی ساطع شده از استوانه به صورت شعاعی است $\leftarrow E \perp A \leftarrow E.A=0 \leftarrow \Phi=0 \Leftarrow$ از وجوه بالا یا پایین مکعب شاری عبور نمی‌کند لذا بنابراین از وجوه چپ و راست و جلو و عقب $\leftarrow \frac{1}{4}$ شار کل عبور خواهد کرد.

شار عبوری از وجوه جانبی $\Rightarrow \Phi = \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi R^4 \alpha}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\pi \alpha R^4}{2\varepsilon_0}$