

نام و نام خانوادگی:	امتحان میان ترم جبر خطی کاربردی
دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر	۱۴۰۲/۹/۱۲

\*\*\* لطفا جواب هر سوال را تنها در مکان اختصاص داده شده بنویسید. ضمناً، بردارها را با حروف کوچک همراه با علامت  $\rightarrow$ ، ماتریسها را با حروف بزرگ و اعداد ثابت را با حروف کوچک نشان دهید. عدم رعایت موارد فوق منجر به کسر ۵/۰ نمره خواهد شد.

۱- ماتریس  $A_{m \times n}$  مفروض است. به دو سوال زیر پاسخ دهید:

الف) (۲ نمره) در مورد تعداد موقعیتهای محوری (pivot positions) این ماتریس چه میتوانید بگویید؟

ب) (۲ نمره) اگر ماتریس افزونه  $[A \ b]$  در هر سطر یک موقعیت محوری داشته باشد، در مورد سازگاری معادله  $Ax = b$  چه میتوانید بگویید؟

۲- قضایای زیر را اثبات کنید:

الف) (۲ نمره) با فرض خطی بودن تبدیل  $T: R^n \rightarrow R^m$ ، اگر معادله  $T(x) = 0$  فقط جواب بدیهی داشته باشد، آنگاه  $T$  تبدیلی یک به یک است.

ب) (۲ نمره) اگر  $A_{n \times n}$  ماتریسی وارون پذیر باشد، آنگاه  $A$  با یک مجموعه عملیات سطری قابل تبدیل به  $I_n$  است.

۳- گزاره های زیر را در صورت درست بودن اثبات کرده و در غیر اینصورت با مثال نقض رد کنید:

الف) (۲ نمره) برای یک ماتریس منفرد (singular)، تجزیه LU منحصر بفرد است.

(۱ نمره) اگر ماتریس بخش الف  $2 \times 2$  باشد چطور؟

ب) (۲ نمره)  $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$  یک زیر فضای برداری از  $R^2$  است.

۴- (۲ نمره) مجموعه مقادیر  $c$  که به ازای آن ماتریس روبرو معکوس پذیر نمی شود را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & c \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۵- (۲ نمره) اگر  $A$  و  $B$  ماتریس های  $n \times n$  متشکل از درایه های حقیقی باشند و  $|A + B| \neq 0$  باشد، آنگاه ثابت کنید :

$$A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A$$

۶- ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & c & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید.

الف) (۲ نمره) برای مقادیر مختلف  $c$  یک پایه برای فضای ستونی  $A$  بیابید.

ب) (۲ نمره) برای مقادیر مختلف  $c$  یک پایه برای فضای پوچ  $A$  بیابید.

چرک نویس: