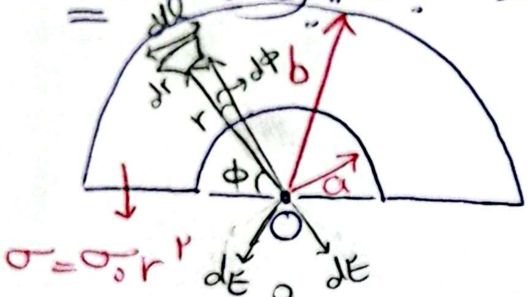
① در شکل مقابل q بار الکتریکی با چگالی سطحی $\sigma = \sigma_0 r^2$ بر روی نوار نیم‌دایره‌ای به شعاع‌های داخلی و خارجی a و b قرار داده شده است. r = فاصله‌ی هر نقطه‌ی داخل نوار تا مرکز دایره است. شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ی O (مرکز نوار) بدست آورید.



پاسخ:

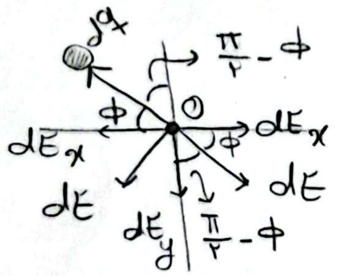
$$E = \frac{kq}{r^2} \longrightarrow dE = \frac{k\,dq}{r^2}$$

$$\sigma = \frac{q}{A} \longrightarrow q = \sigma A \longrightarrow dq = \sigma\, dA = \sigma(dr \times \underbrace{dl}_{r\,d\phi}) = \sigma\, r\,dr\,d\phi$$

$$\sigma = \sigma_0 r^2 \Rightarrow dq = (\sigma_0 r^2)(r\,dr\,d\phi) = \sigma_0 r^3\, \underbrace{dr}_{\text{از } a \text{ تا } b}\, \underbrace{d\phi}_{\text{از } 0 \text{ تا } \pi}$$

$$\Rightarrow dE = \frac{k\,\sigma_0 r^3\,dr\,d\phi}{r^2} = k\sigma_0\, r\,dr\,d\phi \Rightarrow$$

توجه: $\vec{E} = \int d\vec{E}$ $\qquad d\vec{E} = dE_x\,\hat{i} + dE_y\,\hat{j}$



$$E_x = \int dE_x = \int dE\cos\phi = k\sigma_0 \int r\,dr \underbrace{\int_0^{\pi} \cos\phi\, d\phi}_{\sin\phi\,\big|_0^{\pi}} = 0$$

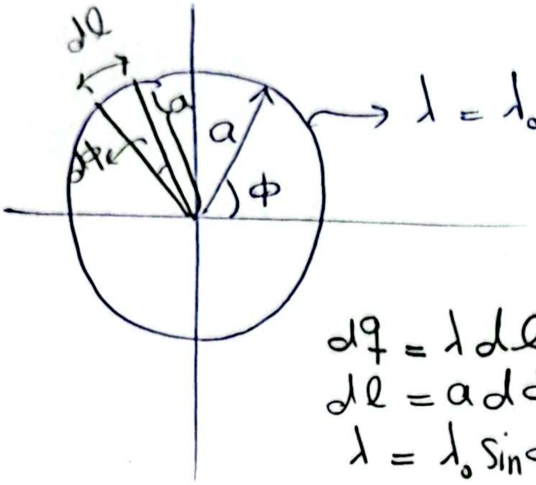
$$\Rightarrow E_x = 0 \longrightarrow E = E_y = \int dE \sin\phi$$

$$dE_x = dE\cos\phi$$

$$dE_y = dE\sin\phi$$

$$\Rightarrow E = \int dE\sin\phi = k\sigma_0 \underbrace{\int_a^b r\,dr}_{\frac{b^2 - a^2}{2}} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi}_{-\cos\phi\,\big|_0^{\pi} = 2} = k\sigma_0 (b^2 - a^2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma_0 (b^2 - a^2)$$

② با توجه به شکل زیر میدان در مرکز حلقه را بدست آورید.



$\lambda = \lambda_0 \sin\phi$

پاسخ:

$$E = \frac{kq}{r^2} \xrightarrow[r=a]{} dE = \frac{k\,dq}{a^2}$$

$$dq = \lambda\, dl$$
$$dl = a\, d\phi$$
$$\lambda = \lambda_0 \sin\phi$$

$$\Rightarrow dE = \frac{k \cdot \lambda_0 \sin\phi \cdot a \cdot d\phi}{a^2} \Rightarrow \boxed{dE = \frac{k\lambda_0 \sin\phi\, d\phi}{a}}$$

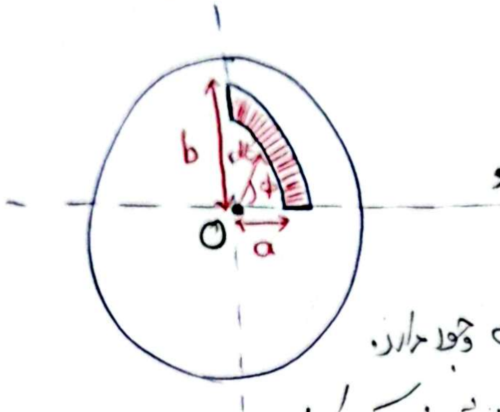
$$\vec{dE} = dE_x\,\hat{i} + dE_y\,\hat{j} = dE\cos\phi\,\hat{i} + dE\sin\phi\,\hat{j}$$

$$E_x = \int dE\cos\phi = \frac{k\lambda_0}{a}\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin\phi\cos\phi}_{\frac{1}{2}\sin 2\phi}\, d\phi = \frac{-k\lambda_0}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2\phi \Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}}$$

$$E_y = \int dE\sin\phi = \frac{k\lambda_0}{a}\int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\phi = \frac{k\lambda_0}{a}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2\phi}{2}\right) d\phi =$$

$$\frac{k\lambda_0}{a}\left\{ \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos 2\phi}_{\underbrace{\frac{1}{2}\sin 2\phi \Big|_0^{2\pi}}_{0}} \right\} = \frac{k\lambda_0 \pi}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda_0 \pi}{a} = \boxed{\frac{\lambda_0}{4a\varepsilon_0}}$$

۳) شکل مقابل یک دیسک کامل با چگالی سطحی $\sigma = \sigma_0 r^3$ می باشد که قطاعی از آن بریده شده است.



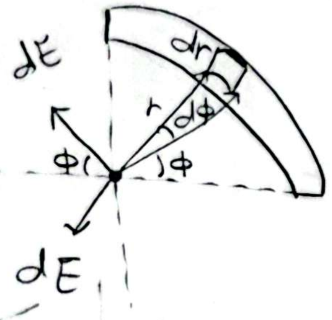
میدان را در مرکز دیسک حساب کنید. پاسخ:

از اصل برهم نهی استفاده می کنیم. یکبار فرض می کنیم قطاع بریده شده وجود ندارد و دیسک کامل است که آنگاه میدان در مرکز دیسک 0 خواهد بود.

بار دیگر فرض می کنیم قطاع مشخص شده با چگالی بار $-\sigma_0 r^3 = -\sigma$ وجود دارد.

میدان در نقطه‌ی O را بدست می آوریم. میدان کل همین است، زیرا میدان ناشی از دیسک کامل 0 بود.

- برای ما علامت مهم نیست در این حالت ← شدت میدان مهم است.



$$dE = \frac{k\,dq}{r^2}$$
$$dq = \sigma\, dA$$
$$dA = r\,dr\,d\phi$$
$$\sigma = \sigma_0 r^3$$
$$\vec{dE} = dE_x \hat{i} + dE_y \hat{j}$$
$$E = \int dE$$
$$dE_x = dE\cos\phi \longrightarrow E_x = \int dE\cos\phi$$
$$dE_y = dE\sin\phi \longrightarrow E_y = \int dE\sin\phi$$

$$E_x = \int \frac{k\cdot\sigma_0 r^3\, r\,dr\,d\phi}{r^2}\cos\phi \Rightarrow$$

$$E_x = k\sigma_0 \underbrace{\int_a^b r^2\,dr}_{\frac{b^3-a^3}{3}} \underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos\phi\, d\phi}_{\sin\phi\big|_0^{\pi/2} = 1} =$$

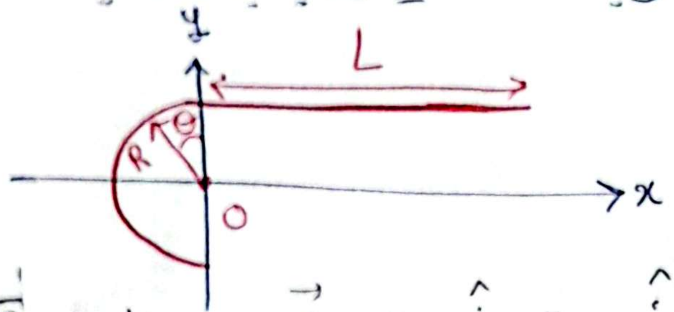
$$\Rightarrow \boxed{E_x = \frac{k\sigma_0}{3}(b^3 - a^3)}$$

$$E_y = k\sigma_0 \underbrace{\int_a^b r^2\,dr}_{\frac{b^3-a^3}{3}} \underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin\phi\, d\phi}_{-\cos\phi\big|_0^{\pi/2} = 1} = \frac{k\sigma_0}{3}(b^3 - a^3)$$

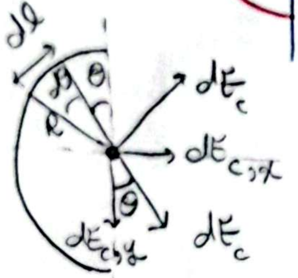
$$\Rightarrow E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{2E_x^2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}k\sigma_0 (b^3 - a^3)}$$

Scanned with CamScanner

۴) بار الکتریکی Q به طور یکنواخت بر روی شکل مقابل که ترکیبی از یک پاره خط مستقیم به طول L و نیم دایره‌ای به شعاع R می‌باشد پخش شده است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی O مرکز نیم دایره محاسبه کنید.



میدان حاصل از نیم دایره در مرکز O :



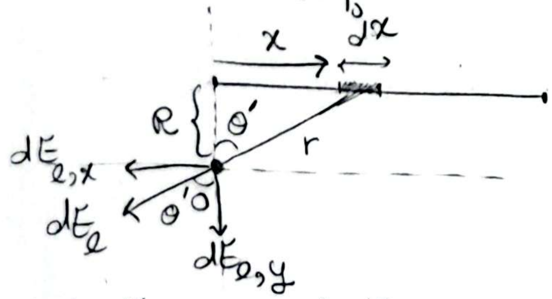
$$\vec{E}_{\underset{\text{circle}}{c}} = E_{c,x}\,\hat{i} + E_{c,y}\,\hat{j}$$

$$E_{c,x} = E_c \sin\theta \quad , \quad E_{c,y} = E_c \cos\theta$$

$$\left.\begin{aligned} dE &= \frac{k\,dq}{r^2} \\ dq &= \lambda\, dl \\ dl &= R\,d\theta \end{aligned}\right\} \longrightarrow dE_c = \frac{k\lambda . R\,d\theta}{R^2} = \frac{k\lambda\,d\theta}{R} \longrightarrow \begin{cases} dE_{x,c} = \dfrac{k\lambda\,d\theta}{R}\sin\theta \\ dE_y = \dfrac{k\lambda\,d\theta}{R}\cos\theta \end{cases}$$

$$\longrightarrow E_{x,c} = \frac{k\lambda}{R}\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta}_{-\cos\theta|_0^{\pi}} = = \frac{2k\lambda}{R} \qquad E_{y,c} = \frac{k\lambda}{R}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos\theta}_{\sin\theta} = 0$$

میدان حاصل از پاره خط در مرکز O :



$$\vec{dE_l} = dE_x\,\hat{i} + dE_y\,\hat{j}$$

$$dE_x = dE_l \sin\theta'$$

$$dE_y = dE_l \cos\theta'$$

$$\left.\begin{aligned} dE_l &= \frac{k\,dq}{r^2} \quad , \quad dq = \lambda\,dx \\ x^2 + R^2 &= r^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow dE_l = \frac{k\lambda\,dx}{x^2+R^2}$$

$$\sin\theta' = \frac{x}{\underset{\sqrt{x^2+R^2}}{r}} \quad , \quad \cos\theta' = \frac{R}{r}$$

$$E_{l,x} = \int dE_l \sin\theta' = \int \frac{k\lambda}{x^2+R^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dx = k\lambda\int_0^L \frac{x\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

حل انتگرال : $\displaystyle\int_0^L \frac{x\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} \rightarrow$ تغییر متغیر : $x^2 + R^2 = u^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x\,dx = 2u\,du \rightarrow x\,dx = u\,du$

$$\rightarrow (x^2+R^2)^{3/2} = (u^2)^{3/2} = u^3$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow u^2 = R^2 \Rightarrow u = R \\ x = L \longrightarrow u = \sqrt{L^2+R^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{x\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{u\,du}{u^3} = \frac{du}{u^2}$$

$$\rightarrow \int_R^{\sqrt{L^2+R^2}} \frac{du}{u^2} = \left.\frac{-1}{u}\right|_R^{\sqrt{L^2+R^2}} = \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{L^2+R^2}}$$

$$\rightarrow \boxed{E_{l,x} = k\lambda\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{L^2+R^2}}\right)}$$

ادامه‌ی پاسخ سؤال (۴) :

$$E_{l,y} = \int dE_l \cos\theta' = \int \frac{k\lambda}{x^2+R^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dx = k\lambda R\int\frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

حل انتگرال : با تغییر متغیر :

$$x = R\,tg\,u \longrightarrow dx = R\cdot\sec^2 u\cdot du$$

$$tg\,u = \frac{\sin u}{\cos u} \longrightarrow d(tg\,u) = \frac{\cos u\cdot\cos u + \sin u\cdot\sin u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u} = \sec^2 u\cdot du$$

$$x^2+R^2 = R^2 tg^2 u + R^2 = R^2(1+tg^2 u) = R^2\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right) = R^2\cdot\sec^2 u$$

$$\longrightarrow \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{R\cdot\sec^2 u\cdot du}{R^3\cdot\sec^3 u} = \frac{du}{R^2\cdot\sec u}$$

$$\int\frac{du}{\sec u} = \int\cos u\,du = \sin u$$

$$x = R\,tg\,u \longrightarrow tg\,u = \frac{x}{R} \longrightarrow \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{x}{R} \longrightarrow \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{x^2}{R^2} \longrightarrow \frac{\sin^2 u}{1-\sin^2 u} = \frac{x^2}{R^2}$$

$$\longrightarrow R^2\sin^2 u = x^2 - x^2\sin^2 u \longrightarrow \sin^2 u(x^2+R^2) = x^2 \longrightarrow \sin^2 u = \frac{x^2}{x^2+R^2}$$

$$\longrightarrow \sin u = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$\Rightarrow E_{l,y} = k\lambda R\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\Bigg|_0^L = \frac{k\lambda}{R}\cdot\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}$$

$$\longrightarrow E_{x,total} = E_{c,x} + E_{l,x} = \frac{2k\lambda}{R} + k\lambda\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{L^2+R^2}}\right)$$

$$\longrightarrow E_{y,total} = E_{c,y} + E_{l,y} = 0 + \frac{k\lambda L}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{L^2+R^2}}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} E_{x,total} &= k\lambda\left(\frac{3}{R} - \frac{1}{\sqrt{L^2+R^2}}\right)\\ E_{y,total} &= \frac{k\lambda L}{R\sqrt{L^2+R^2}}\end{aligned}\right\}$$