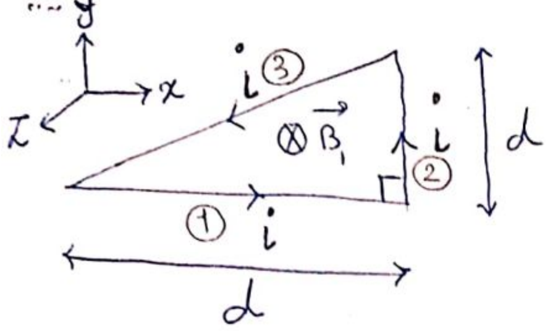
فصل ۸ فیزیک ۲ : میدان های مغناطیسی

① حلقه‌ی سیمی مثلثی شکل حامل جریان را در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B_1} = -B_1\hat{k}$ در نظر بگیرید. نیروی وارد بر هر ضلع را پیدا کنید.



پاسخ : نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی :

$$\vec{F_B} = i\vec{l}\times\vec{B} = Bil\sin\theta$$

① نیروی وارد بر ضلع : $\begin{cases}\vec{F_1} = i\vec{l_1}\times\vec{B_1} \\ \vec{l_1} = d\hat{i}\end{cases}$ $\Rightarrow \vec{F_1} = id\hat{i}\times(-B_1)\hat{k} = -idB_1\underbrace{(\hat{i}\times\hat{k})}_{-\hat{j}} = idB_1\hat{j}$

$$\longrightarrow \boxed{|\vec{F_1}| = idB_1}$$

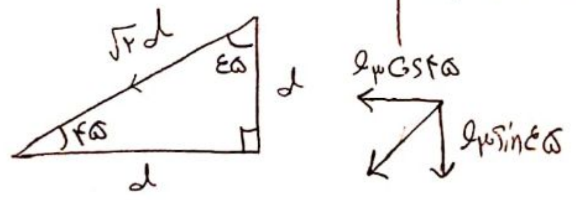
---

② نیروی وارد بر ضلع : $\begin{cases}\vec{F_2} = i\vec{l_2}\times\vec{B_1} \\ \vec{l_2} = d\hat{j}\end{cases}$ $\Rightarrow \vec{F_2} = id\hat{j}\times(-B_1)\hat{k} = -idB_1\underbrace{(\hat{j}\times\hat{k})}_{\hat{i}} = -idB_1\hat{i}$

$$\longrightarrow \boxed{|\vec{F_2}| = idB_1}$$

---

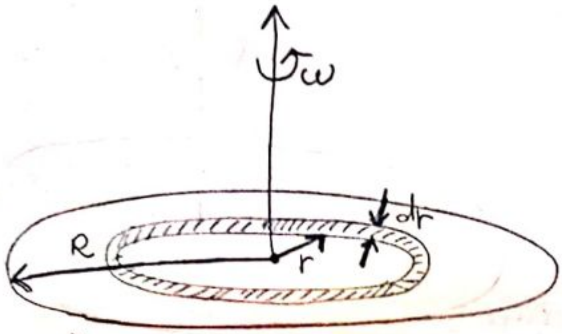
③ نیروی وارد بر ضلع : $\begin{cases}\vec{F_3} = i\vec{l_3}\times\vec{B_1} \\ \vec{l_3} = \sqrt{2}d\left(\cos 45(-\hat{i}) + \sin 45(-\hat{j})\right) = d(-\hat{i}-\hat{j})\end{cases}$



$$\Rightarrow \vec{F_3} = id(-\hat{i}-\hat{j})\times(-B_1)\hat{k} = idB_1(\underbrace{\hat{i}\times\hat{k}}_{-\hat{j}} + \underbrace{\hat{j}\times\hat{k}}_{\hat{i}}) = idB_1(-\hat{j}+\hat{i})$$

$$\longrightarrow |\vec{F_3}| = \sqrt{(idB_1)^2((-\hat{j})^2+(\hat{i})^2)} = \boxed{\sqrt{2}\,idB_1}$$

④ قرصی به شعاع R را با چگالی بار یکنواخت $\sigma\,(\frac{e}{m^2})$ در نظر بگیرید. این قرص در حالی که در میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار دارد، با سرعت $\omega\,(\frac{rad}{s})$ حول محور مرکزی اش که عمود بر میدان است دوران می‌کند. الف) گشتاور مغناطیسی آن را پیدا کنید. ب) نشان دهید که گشتاور نیروی وارد بر قرص عبارت است از: $\tau = \frac{1}{4}\sigma\omega\pi B R^4$



الف)

گشتاور دوقطبی مغناطیسی: $\vec{\mu} = N\, i\, \vec{A}$

$N \to$ تعداد دور حلقه

$i \to$ جریان

$\vec{A} \to$ مساحت سطح حلقه

$A = \pi r^2 \to dA = 2\pi r\,dr$

در اینجا برای یک المان $d\vec{\mu} \Leftarrow N=1 \Leftarrow d\vec{\mu} = i\, d\vec{A} = i(2\pi r\,dr)$

$di \,|\, dI = \frac{dq}{dt} \,|\, \frac{dq}{T} = \frac{\sigma(2\pi r\,dr)}{2\pi/\omega} = \sigma\omega r\,dr \to$ برای یک حلقه

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ و $\frac{q}{A} = \sigma \to q = \sigma A \Rightarrow dq = \sigma\, dA = \sigma(2\pi r\,dr)$

$\to di = \sigma\omega r\,dr \to i = \sigma\omega\int_0^R r\,dr = \sigma\omega.\frac{R^2}{2} = \frac{1}{2}\sigma\omega R^2 \to$ جریان ناشی از قرص چرخان به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ω

$\to d\vec{\mu} = (\frac{1}{2}\sigma\omega r^2)\cdot(2\pi r\,dr) \Rightarrow \vec{\mu} = \sigma\omega\pi\int_0^R r^3\,dr = \frac{1}{4}\sigma\omega\pi R^4$

چون قراره داخل انتگرال بره R نذار.

منطقی‌تر: $d\vec{\mu} = (di)(\vec{A}) = di\,(\pi r^2)$

$di = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma\, 2\pi r\,dr}{2\pi/\omega} = \sigma\omega r\,dr$

$\to d\vec{\mu} = \sigma\omega r\,dr(\pi r^2) = \sigma\omega\pi r^3\,dr$

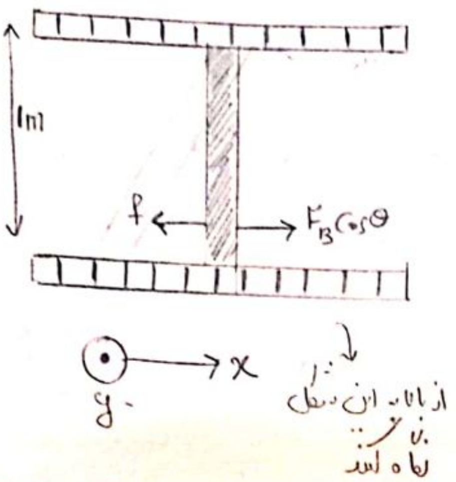
$\to \vec{\mu} = \frac{1}{4}\sigma\vec{\omega}\pi R^4$

ب) گشتاور نیروی مغناطیسی: $\vec{\tau}_B = \vec{\mu}\times\vec{B} = \mu B\sin\theta \overset{\theta=\pi/2}{=\!=} \mu B$

زاویه بین $\vec{\mu}$ و $\vec{B}$ $\to$ در واقع زاویه بین $\vec{\omega}$ و $\vec{B}$ $= \frac{\pi}{2}$

$\to \boxed{\vec{\tau}_B = \frac{1}{4}\sigma\omega\pi B R^4}$

۲) یک میله‌ی مسی به جرم 1kg روی دو ریل افقی به فاصله‌ی 1m از یکدیگر قرار دارد و حامل جریان ۵۰A از یک ریل به ریل دیگر است. ضریب اصطکاک ایستایی میان میله و ریل‌ها ۰/۶ است. الف) بزرگی و ب) زاویه (نسبت به قائم) کمترین میدان مغناطیسی که میله را در آستانه‌ی لغزش قرار می‌دهد چقدر است؟



پاسخ: برای به حرکت در آمدن میله ← باید مولفه‌ی افقی میدان مغناطیسی بر نیروی اصطکاک غلبه کند.

چون در آستانه‌ی لغزش ← پس هنوز حرکت ندارد ← برآیند نیروها = ۰

فرض ← نیروی مغناطیسی F_B زاویه‌ی θ را با محور x ها می‌سازد

نیروی اصطکاک f در آستانه حرکت ← $f = \mu_s N$

$mg : \otimes$

$N : \odot$

$F_B \sin\theta : \odot$

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow F_B \cos\theta - f = 0 \longrightarrow F_B \cos\theta = \mu_s N \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow F_B \sin\theta + N - mg = 0 \longrightarrow F_B \sin\theta = mg - N \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow N = \frac{F_B \cos\theta}{\mu_s} \xrightarrow{(2)} F_B \sin\theta = mg - \frac{F_B \cos\theta}{\mu_s}$$

$$\longrightarrow F_B \sin\theta \, \mu_s = mg\,\mu_s - F_B \cos\theta \Rightarrow F_B(\mu_s \sin\theta + \cos\theta) = mg\,\mu_s \rightarrow \boxed{F_B = \frac{\mu_s mg}{\mu_s \sin\theta + \cos\theta}}$$

از طرفی: $\vec{F}_B = i\vec{l} \times \vec{B} = ilB \longrightarrow$ (جریان) سیم را عمودی میدان $\vec{B}$ نگه داریم

$$\rightarrow \frac{F_B}{il} = B \longrightarrow B = \frac{\mu_s mg}{il(\mu_s \sin\theta + \cos\theta)} \longrightarrow \frac{dB}{d\theta} = 0 \Rightarrow$$ تا min برای B را پیدا کنیم

$$\frac{dB}{d\theta} = \frac{\mu_s mg}{il}\left(-(\mu_s \sin\theta + \cos\theta)^{-2}(\mu_s \cos\theta - \sin\theta)\right) = \frac{-\mu_s mg}{il}\left(\frac{\mu_s \cos\theta - \sin\theta}{(\mu_s \sin\theta + \cos\theta)^2}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \mu_s \cos\theta - \sin\theta = 0 \longrightarrow \underbrace{\mu_s}_{0/6} = \tan\theta \longrightarrow \theta = 31^\circ \Rightarrow$$

F_B با محور x ها ← زاویه θ

F_B و B عمود بر هم ← B با محور y ها (محور قائم) ← زاویه θ

$$\Rightarrow B_{min} = \frac{(0/6)(1)(9/8)}{(50)(1)\left(0/6(\sin 31) + \cos 31\right)} = 0/1\ \text{T}$$

۴) رسانای طویل طیلی که در امتداد محور x قرار دارد در جهت منفی x حامل جریان 5A است. میدان مغناطیسی موجود $\vec{B}$ با رابطه‌ی $\vec{B} = 3\hat{i} + 8x^2\hat{j}$ داده می‌شود که x بر حسب m و B بر حسب mT. بر حسب بردارها یکه نیروی وارد بر یک تکه ۲ متری این رسانا که میان x=1m و x=3m قرار دارد پیدا کنید.

$$\vec{F}_B = i\vec{l}\times\vec{B} \longrightarrow d\vec{F}_B = i\,d\vec{l}\times\vec{B} = i(-dx\,\hat{i})\times(3\hat{i}+8x^2\hat{j})\times 10^{-3}$$

$$d\vec{l} = -dx\,\hat{i}$$

mT بوده

$$= \underset{5A}{i}(-dx)(8x^2)(10^{-3})(\underbrace{\hat{i}\times\hat{j}}_{\hat{k}}) = -0.04x^2dx\,(\hat{k})$$

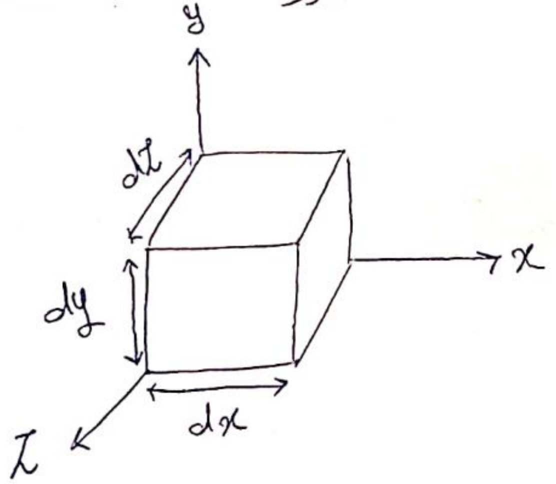
$$\Rightarrow \vec{F}_B = -0.04(\hat{k})\int_1^3 x^2dx = \frac{-0.04\hat{k}}{3}(27-1) \simeq -0.35\hat{k}$$

$$\frac{x^3}{3}\Big|_1^3$$

---

۵) شکل زیر یک قطعه‌ی فلزی را نشان می‌دهد که وجه‌های آن با محورها مختصات موازی‌اند. این قطعه در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی 0.02T قرار دارد. طول یک ضلع این قطعه 25cm است. این قطعه با تندی 3m/s به نوبت موازی با هر محور حرکت می‌کند و اختلاف پتانسیل V ظاهر شده در ۲ طرف قطعه اندازه‌گیری می‌شود. در حرکت موازی با محور y، V=12mV، موازی با محور z، V=18mV، موازی با محور x، V=0 است.

ابعاد قطعه‌ی d_x، d_y، d_z چقدر است؟



پاسخ:

$B = 0.02T$

طول ۱ ضلع: $a = 25cm$

$\vec{v} = 3m/s\ (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$

حرکت موازی محور y ها ⟸ $V = 12mV$

" " z ها ⟸ $V = 18mV$

" " x ها ⟸ $V = 0$

$$\vec{F}_T = \underbrace{q\vec{E}}_{\vec{F}_E} + \underbrace{q\vec{v}\times\vec{B}}_{\vec{F}_B} \xrightarrow[\text{نیروی}=0]{\text{سرعت ثابت} \Leftarrow} q\vec{E} = -q\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B}$$

از طرفی می‌دانیم: $E = \frac{V}{d}$

$V \longrightarrow$ اختلاف پتانسیل دو سر هر ضلع

$d \longrightarrow$ d طول ضلع

فرض: $\vec{B}$ در جهت $\hat{i}$ ⟵ با این فرض سؤال را حل می‌کنیم

ادامه‌ی پاسخ سؤال (۵):

$$\left.\begin{array}{l} E = \dfrac{-V}{d} \\ \vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{V}{d} = \vec{v}\times\vec{B} \rightarrow d = \frac{|V|}{|\vec{v}\times\vec{B}|}$$

- حرکت موازی محور y ها ← $\vec{v} = 3\hat{j}$ ⇐ ، $V = 12mV$

$$\vec{v}\times\vec{B} = (3\hat{j})\times(0/02\hat{i}) = -0/06\hat{k}$$

$$\rightarrow d_y = \frac{12\times10^{-3}}{0/06} = 0/2m$$

- حرکت موازی محور z ها ← $\vec{v} = 3\hat{k}$ ⇐ ، $V = 18mV$

$$\vec{v}\times\vec{B} = (3\hat{k})\times(0/02\hat{i}) = +0/06\hat{j}$$

$$\rightarrow d_z = \frac{18\times10^{-3}}{0/06} = 0/3m$$

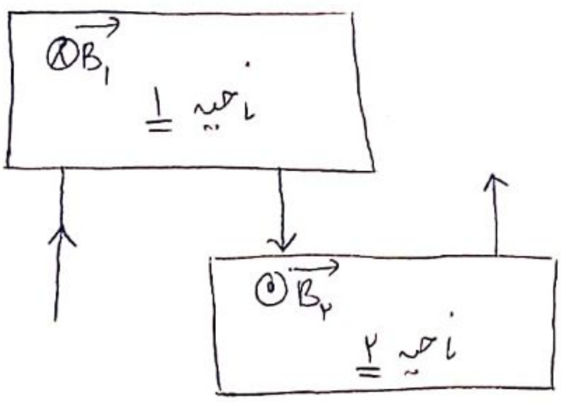
- حرکت موازی محور x ها ← $\vec{v} = 3\hat{i}$ ، $V = 0$

$$\vec{v}\times\vec{B} = (3\hat{i})\times(3\hat{i}) = 0$$

$\longrightarrow$ $d_x = 25cm$ ← طول میله‌ی گفته شده در س

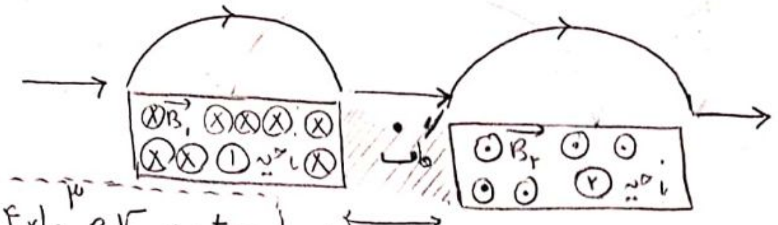
---

۶) در شکل زیر الکترونی با انرژی جنبشی اولیه $4KeV$ در لحظه‌ی $t=0$ وارد ناحیه‌ی 1 می‌شود. در آن ناحیه میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $0/01T$ و به طرف داخل صفحه برقرار است. الکترون یک نیم دایره را طی می‌کند و سپس از ناحیه‌ی 1 خارج می‌شود و به طرف ناحیه‌ی 2 که $25cm$ با آن فاصله دارد حرکت می‌کند. یک اختلاف پتانسیل الکتریکی $\Delta V = 2000V$ در سراسر این فاصله برقرار است، به طوری که تندی الکترون‌ها را به طور یکنواخت با عبور از این فاصله افزایش می‌دهد. در ناحیه‌ی 2 میدان مغناطیسی یکنواختی به طرف خارج از صفحه با بزرگی $0/02T$ وجود دارد. الکترون یک نیم دایره را می‌پیماید و سپس ناحیه‌ی 2 را ترک می‌کند. در چه زمان t این ناحیه را ترک کرده است؟



Scanned with CamScanner

پاسخ سؤال ۶ :



$K_p = 4\times10^3\,eV \leftarrow t=0$

$B_1 = 0/01\,T$

$B_2 = 0/02\,T$

② زمان ترک ناحیه : $t = ?$

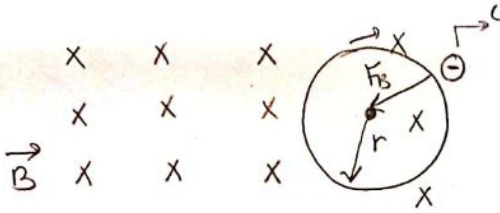
$d = 25\,cm$

$\Delta V = 2000\,V$

نکته :

بارهای در حال دوران : ذره‌ی باردار با جرم m و بار q که با سرعت $\vec v$ عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec B$ حرکت می‌کند ، مسیر دایره‌ای خواهد داشت :

مثال :



$$\vec F_B = q\vec v\times\vec B \to |F| = |q|vB\sin 90 = |q|vB$$

$$F = \frac{mv^2}{r} \to \frac{mv^2}{r} = |q|vB$$

نیروی گریز از مرکز

→ شعاع مسیر : $\boxed{r = \frac{mv}{|q|B}}$

دوره‌ی تناوب : $T = \underbrace{\frac{2\pi r}{v}}_{\text{محیط دایره}} = \frac{2\pi\left(\frac{mv}{|q|B}\right)}{v} = \boxed{\frac{2\pi m}{|q|B}}$

اطلاعات عمومی :

فرکانس سیکلوترونی : $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$

فرکانس زاویه‌ای : $\omega = \frac{v}{r}$

$$\Rightarrow \nu = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m} \longrightarrow \boxed{\omega = \frac{|q|B}{m}}$$

با فاکتور گرفتن

برمی‌گردیم به حل سؤال : یک دور کامل $\longrightarrow T = \frac{2\pi m}{|q|B} \longrightarrow$ نیم دور : $T' = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{|q|B}$

$$T'_1 + t_{\text{شکاف}} + T'_2 = T_{total} \longrightarrow \frac{\pi m_e}{|q|B_1} + t_{\text{شکاف}} + \frac{\pi m_e}{|q|B_2} = T_{total}$$

یعنی زمانی که بالاخره از ناحیه‌ی ② خارج می‌شود .

در واقع الکترون با سرعت v_0 وارد ناحیه‌ی ① می‌شود و با همین سرعت v_0 از ناحیه‌ی ① خارج می‌شود یعنی سرعت الکترون در لحظه‌ی ورود به شکاف برابر با همان v_0 است :

$$K_0 = \frac{1}{2}m_e v_0^2 \longrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2K_0}{m_e}}$$

در ۲ سر شکاف اختلاف پتانسیل ΔV وجود دارد : $\Delta V = -Ed$

نیروی وارد بر الکترون در ۲ سر شکاف : $F = qE = -eE = -e\left(\frac{-\Delta V}{d}\right)$

$F = ma$

$$\Rightarrow ma = \frac{e\Delta V}{d} \longrightarrow \boxed{a = \frac{e\Delta V}{md}}$$

می‌دانیم : $x = \frac{1}{2}a t_{\text{شکاف}}^2 + v_0 t \longrightarrow d = \frac{1}{2}\left(\frac{e\Delta V}{md}\right) t_{\text{شکاف}}^2 + \sqrt{\frac{2K_0}{m_e}}\; t_{\text{شکاف}}$

ادامه صفحه بعد

ادامه‌ی پاسخ ۶ :

$$T_{total} = \frac{\pi m_e}{|q|}\left(\frac{1}{B_1}+\frac{1}{B_2}\right)+t_{gap}$$

$$\underbrace{d}_{-C} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{e\Delta V}{m d}\right)}_{A} t_{gap}^{2} + \underbrace{\sqrt{\frac{2K_0}{m_e}}}_{B}\, t_{gap} \rightarrow A t_{gap}^{2} + B t_{gap} + C = 0$$

$$\rightarrow \Delta = B^2 - 4AC \rightarrow t_{gap} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$\rightarrow t_{gap} = \frac{-\sqrt{\frac{2K_0}{m_e}} + \sqrt{\frac{2K_0}{m_e} + 4\left(\frac{1}{2}\left(\frac{e\Delta V}{m_e d}\right)\right)d}}{2\left(\frac{1}{2}\,\frac{e\Delta V}{m_e d}\right)}$$

$$\rightarrow T_{total} = \frac{\pi m_e}{|q|}\left(\frac{1}{B_1}+\frac{1}{B_2}\right) + \frac{-\sqrt{\frac{2K_0}{m_e}} + \sqrt{\frac{2K_0}{m_e}+\frac{2e\Delta V}{m_e}}}{\frac{e\Delta V}{m_e d}} = 1/7\times10^{-9}\ s$$

---

۷) یک حلقه‌ی سیم دارای سطح به شعاع $8cm$ حامل جریان $0/2A$ است. بردار یکه موازی با گشتاور دوقطبی μ با $0/6\hat i - 0/8\hat j$ داده شده است. این حلقه در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec B = (0/25T)\hat i + (0/30T)\hat k$ قرار گیرد. الف) گشتاور وارد بر حلقه (برحسب بردار یکه) و ب) انرژی پتانسیل مغناطیسی حلقه را پیدا کنید.

پاسخ : $\vec A = (|A|)(\underbrace{\text{بردار یکه}}_{\hat A})$ ، $\vec A$ = بردار : می‌دانیم $\Leftarrow \vec\mu = \hat\mu\,\mu \Leftarrow \vec\mu = \mu(\underbrace{0/6\hat i - 0/8\hat j}_{\hat\mu})$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی : $|\vec\mu| = NiA = i\pi R^2 = (0/2)(\pi)(8\times10^{-2})^2 = 4/02\times10^{-3}\ A\cdot m^2$

N ← تعداد دورها ۱ ، شعاع حلقه $= R$ ←

$$\boxed{\vec\mu = 4/02\times10^{-3}(0/6\hat i - 0/8\hat j)}$$

$$\begin{cases} i = 0/2A \\ R = 8\times10^{-2}\ m \\ \hat\mu = 0/6\hat i - 0/8\hat j \\ \vec B = (0/25T)\hat i + (0/30T)\hat k \end{cases}$$

الف) گشتاور نیروی مغناطیسی : $\vec\tau_B = \vec\mu\times\vec B$

$$\rightarrow \vec\tau_B = 4/02\times10^{-3}\begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ 0/6 & -0/8 & 0 \\ 0/25 & 0 & 0/30 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec\tau_B = \left(-9/7\times10^{-4}\hat i - 7/2\times10^{-4}\hat j + 8\times10^{-4}\hat k\right)\ N\cdot m$$

ب) انرژی پتانسیل مغناطیسی : $\boxed{U_B = -\vec\mu\cdot\vec B = -6\times10^{-4}\ J}$