نام و نام خانوادگی :	به نام خدا سوالات پایان ترم معادلات دیفرانسیل **دانشگاه صنعتی امیرکبیر** دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	تاریخ : ۹۳/۱۰/ ۲۳
گروه :		مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
شماره دانشجویی :		ساعت : ۹:۰۰

۱- الف. نشان دهید که $x^2y'' + 3xy' + (1+x)y = 0$ دارای یک نقطه غیرعادی (منفرد) منظم در $x = 0$ است.(۵ نمره)

ب. ریشه‌های معادله شاخصی آن را تعیین کنید و یک جواب آن را به دست آورید (۱۵ نمره).

ج. فقط صورت جواب دوم و همچنین جواب عمومی آن را بنویسید (۵ نمره).

۲- اگر $J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\alpha+1)} (\frac{x}{2})^{2n+\alpha}$ جواب معادله بسل مرتبه α باشد، که در آن $\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$:

الف. نشان دهید که $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ (۱۵ نمره).

ب. با استفاده از رابطه $J'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} J_\alpha - J_{\alpha+1}(x)$ نشان دهید که (۱۰ نمره) :

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right)$$

۳- الف. تبدیل معکوس لاپلاس $F(s) = \frac{1}{(s^2 - s - 6)^2}$ را بیابید(۱۵ نمره).

ب. مطلوب است تبدیل لاپلاس $f(t) = t^2 e^{-t} \int_0^t \frac{1 - \cos 2\tau}{\tau} d\tau$ (۱۰ نمره)

۴- مطلوب است حل معادله دیفرانسیل انتگرالی

$$y'' - y' + y = e^t \left(1 - \int_0^t \frac{y(\tau)}{e^\tau} d\tau \right)$$

با شرایط اولیه $y'(0) = 2$, $y(0) = 1$ (۲۰ نمره) .

۵- فقط $x(t)$ را از حل دستگاه زیر بیابید (۱۵ نمره).

$$\begin{cases} x'' + y' + 3x = 15e^{-t} \quad , \quad x(0) = 35 \ , \ y(0) = 27 \\ y'' - 4x' + 3y = 15 \sin 2t \quad , \quad x'(0) = -48 \ , \ y'(0) = -55 \end{cases}$$

موفق باشید

$$x^2y''+3xy'+(1+x)y=0$$

$$\div x^2:\quad y''+\frac{3}{x}y'+\frac{1}{x^2}(1+x)y=0$$

$$x\cdot\frac{3}{x}=3$$

$$x^2\left(\frac{1}{x^2}\right)(1+x)=(1+x)$$

$\Longrightarrow\quad x=0$ نقطه غیرعادی منظم است

$$a_0=\lim_{x\to 0}3=3\quad,\quad b_0=\lim_{x\to 0}(1+x)=1$$

با قرار دادن تقریب توانی در معادله شاخص $r(r-1)+a_0r+b_0=0$ را بدست می‌آوریم

$$r^2+2r+1=0\Rightarrow r_1=r_2=-1$$

$$y_1=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n\quad,\quad y_2=y_1\ln x+x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}A_nx^n$$

$$y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)C_nx^{n-2},\quad y_1''=\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)C_nx^{n-3}$$

با قرار دادن تقریب توانی در معادله داده شده به گسترش می‌پردازیم

$$\div x^{-1}\quad\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)C_nx^{n-\cancel{1}}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)C_nx^{n-\cancel{1}}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n-\cancel{1}}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+1}=0$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left[(n-1)(n-2)+3(n-1)+1\right]}_{\substack{n^2-3n+\cancel{2}+3n-\cancel{3}+\cancel{1}\\ n^2}}C_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+1}=0$$

ضریب x^0: $\quad 0\,C_0=0\qquad C_0$ را برابر ۱ می‌گیریم C_0

ضریب x^1: $\quad (1)^2C_1+C_0=0\Rightarrow C_1=-\frac{1}{(1)^2}=-1$

ضریب x^2: $\quad (4)C_2+C_1=0\Rightarrow C_2=\frac{-C_1}{(2)^2}=+\frac{1}{(2)^2}\qquad C_3=-\frac{C_2}{(3)^2}=\frac{-(1)}{(2)^2(3)^2}=\frac{-1}{(3!)^2}$

ضریب x^n: $\quad n^2C_n+C_{n-1}=0\Longrightarrow C_n=\frac{-C_{n-1}}{n^2}\qquad n\geq 1$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n-1}}{C_n}\right|=\infty$$

$$\Rightarrow C_n=\frac{(-1)^n}{(n!)^2}$$

$$y_1=x^{-1}\left(1-1x+\frac{1}{(2!)^2}x^2-\frac{1}{(3!)^2}x^3+\cdots\right)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{(n!)^2}$$

$$y=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2\qquad \text{جواب عمومی}$$

2 الف)

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}}{n!\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2)^{1/2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{x^{1/2}\, n!\, \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (*)$$

می‌دانیم $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

پس مخرج کسر فوق به صورت زیر درمی‌آید

$$x^{1/2}\,(2)^{-(2n+1)} \times 2 \times 4 \times \cdots (2n)\left[1\times 3 \times 5 \times \cdots (2n+1)\right]\sqrt{\pi}$$

$$= x^{1/2}\, 2^{-(2n+1)}\,(2n+1)!\,\sqrt{\pi}$$

حال بجای این مقدار را در (*) قرار دهیم، بسط مکلورن $\sin x$
ظاهر می‌شود

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x$$

ب)

$$J'_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x - \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

از رابطه داده شده (استفاده می‌کنیم) داریم

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x - \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x = \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x - J_{\frac{3}{2}}(x) \Rightarrow$$

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{1}{x}\sin x - \cos x\right)$$

3

سؤال 3 الف

$$F(s) = \frac{1}{(s-3)^2 (s+2)^2} = \underbrace{\frac{1}{(s-3)^2}}_{G(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(s+2)^2}}_{H(s)}$$

$$g(t) = te^{3t} \quad , \quad h(t) = te^{-2t}$$

$$f(t) = \int_0^t (t-\tau) e^{3(t-\tau)} \tau e^{-2\tau} d\tau$$

$$= te^{3t} \int_0^t \tau e^{-5\tau} d\tau - e^{3t} \int_0^t \tau^2 e^{-5\tau} d\tau$$

$$= te^{3t} \left[te^{-5t} + \frac{1}{s} \int_0^t e^{-5\tau} d\tau \right] - e^{3t} \left[t^2 e^{-5t} + \frac{2}{5} \int_0^t \tau e^{-5\tau} d\tau \right]$$

$$= \cancel{te^{3t} [te^{-5t}} - \frac{1}{25} e^{-5t} + \frac{1}{25}] - e^{3t} \left[t^2 e^{-5t} - \frac{2}{25} te^{-5t} + \frac{2}{25} \int_0^t e^{-5\tau} d\tau \right]$$

$$= t^2 \cancel{e^{-2t}} - \frac{1}{25} te^{-2t} + \frac{1}{25} te^{3t} - t^2 \cancel{e^{-2t}} + \frac{2}{25} te^{-2t} + \frac{2}{125} e^{-2t} - \frac{2}{125} e^{3t}$$

$$= \frac{1}{25} te^{-2t} + \frac{1}{25} te^{3t} + \frac{2}{125} e^{-2t} - \frac{2}{125} e^{3t}$$

---

3 -

$$F(s) = \mathcal{L}\Big[\underbrace{t^2 e^{-t} \int_0^t \frac{1 - \cos 2\tau}{\tau} d\tau}_{f_1(t)} \Big] = + \frac{d^2}{ds^2} F_1(s)$$

$$F_1(s) = F_2(s+1)$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s} F_3(s)$$

$$F_3(s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[1 - \cos 2\tau] du = \int_s^\infty \left[\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4} \right] du$$

$$= \left[\ln u - \frac{1}{2} \ln(u^2+4) \right]_s^\infty$$

$$= \ln \frac{\sqrt{s^2+4}}{s} = \ln \sqrt{1 + \frac{4}{s^2}}$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s} \ln \sqrt{1 + \frac{4}{s^2}}$$

$$F_1(s) = \frac{1}{s+1} \ln \sqrt{1 + \frac{4}{(s+1)^2}}$$

$$F(s) = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s+1} \ln \sqrt{1 + \frac{4}{(s+1)^2}} \right)$$

4

$\mathcal{L}[y] = Y$ فرض

$$s^2Y - sy_0 - y_0' - (sY - y_0) + Y = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1}Y$$

$$\left(s^2 - s + 1 + \frac{1}{s-1}\right)Y = \frac{1}{s-1} + s + 1 = \frac{s^2}{s-1}$$

$$\left(\frac{s^2(s-1) - s(s-1) + (s-1) + 1}{s-1}\right)Y = \frac{s^2}{s-1} \Rightarrow$$

$$Y = \frac{s^2}{s^3 - 2s^2 + 2s} = \frac{s}{s^2 - 2s + 2} = \frac{s-1+1}{(s-1)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}[Y] = e^t(\cos t + \sin t)$$

5

$\mathcal{L}[x] = X, \mathcal{L}[y] = Y$ ادامه حل

5

از طرفین معادلات دستگاه داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$\begin{cases} s^2X - s(35) - (-48 + sY - 27 + 3X = \dfrac{15}{s+1} \\ s^2Y - s(27) - (-55) - 4(sX - 35) + 3Y = \dfrac{30}{s^2+4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (s^2+3)X + sY = 35s - 21 + \dfrac{15}{s+1} \\ -4sX + (s^2+3)Y = 27s - 195 + \dfrac{30}{s^2+4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{\begin{vmatrix} 35s - 21 + \dfrac{15}{s+1} & s \\ 27s - 195 + \dfrac{30}{s^2+4} & s^2+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{35s^3 - 48s^2 + 300s - 63}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{15(s^2+3)}{(s+1)(s^2+1)(s^2+9)}$$

$$- \frac{30s}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}$$

$$= \frac{30s}{s^2+1} - \frac{45}{s^2+9} + \frac{3}{s+1} + \frac{2s}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow x = \mathcal{L}^{-1}[X] = 30\cos t - 15\sin 3t + 3e^{-t} + 2\cos 2t$$

۲۶۴

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل
« دانشگاه صنعتی امیرکبیر »

نام و نام‌خانوادگی: **شنبه: ۹۴/۰۳/۳۰**
شماره دانشجویی: **مدت: ۱۲۰ دقیقه**

۱- می‌دانیم

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

نمایانگر تابع بسل مرتبه p می‌باشد.

الف: نشان دهید $J_0'(x) = -J_1(x)$ (۹ نمره)

ب: اگر $J_0(x)$ و $J_1(x)$ به ترتیب نمایانگر جواب‌های معادلات بسل مرتبه صفر و یک باشند، نشان دهید $y = xJ_1(x)$ جواب معادله زیر است.

$$xy'' - y' - x^2 J_0'(x) = 0$$

(۱۵ نمره)

۲- الف: نقاط منفرد (تکین) معادله دیفرانسیل زیر را مشخص کنید و نوع هر کدام را بیان نمایید. (۶ نمره)

$$(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$$

ب: جواب عمومی معادله فوق را به‌صورت سری فروبنیوس حول $x = 0$ بیابید. (۲۰ نمره)

۳- دستگاه زیر را حل کنید. (۱۲ نمره)

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) - 5y_2(t) + \cos(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) - 2y_2(t) + \sin(t) \end{cases}, \quad y_1(0) = 1, \qquad y_2(0) = -\frac{1}{2}$$

ادامه سوالات پشت برگه

۴-الف: مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}^{-1}[e^{-s}tan^{-1}(s)]$. (۱۲ نمره)

ب: معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

$$\int_0^t \sinh(t-\tau)\, y(\tau)d\tau = y''(t) - y(t) + \frac{1}{2} t\, sinh(t), \quad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

(۱۲ نمره)

۵- الف: تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید. (۱۲ نمره)

$$f(t) = \int_0^1 \frac{\sin(tx)}{x}\, dx$$

ب: تابع زیر را برحسب تابع پله‌ای واحد بیان کرده و سپس تبدیل لاپلاس آن را بیابید. (۱۲ نمره)

$$g(t) = \begin{cases} \cos(2t)\,, & 0 \le t < 1 \\ \cos(2t) - t + 1, & 1 \le t < 2 \\ \cos(2t) - t + 1 + \sinh(t-2)\,, & t \ge 2 \end{cases}$$

موفق باشید

۱- الف) $x=0,1$ نقاط تکین منتظم معادله می‌باشند.

$$xy''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=0 \Rightarrow x^2y''-\frac{x}{x-1}xy'+\frac{x}{x-1}y=0$$

ب) حول $x=0$ داریم $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1} \quad , \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

با جایگذاری در معادله اولیه داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

ریشه‌های معادله شاخص: ضریب x^{r-1} ; $\quad -r(r-1)a_0=0 \xrightarrow{a_0\neq 0} \boxed{r_1=1,\ r_2=0}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n-(n\underset{r+}{+}1)(n+r)a_{n+1}-(n+r)a_n+a_n\right]x^{n+r}=0$$

$$\Rightarrow (*)\quad a_{n+1}=\frac{(n+r)[n+r-2]+1}{(n+r)(n+r+1)}a_n \quad ; \quad n\geq 0$$

$$\xrightarrow{r_1=1} a_{n+1}=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}a_n \quad ; \quad n\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1=0 \\ a_2=0 \\ \vdots \\ a_n=0 \quad ; \quad n\geq 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_1=1} y_1(x)=\sum a_nx^{n+1} \xrightarrow{\text{if } a_0=1} \boxed{x}$$

برای محاسبه جواب دوم به روش کاهش مرتبه فرض می‌کنیم $y_2 = v(x)\,y_1$ لذا داریم :

اگر $r=0$ را قرار دهیم در (*) به تناقض می‌رسیم یعنی $a_0 = 0$ ، $a_n = \frac{n(n+1)}{n(n-2)+1}a_{n+1}$ ، $n \geq 0$

$$(x^2-x)\left[v''y_1 + 2y_1'v_1'\right] - x v' y_1 = 0 \Rightarrow v'' + \left(\frac{2y_1'}{(x-1)y_1} - \frac{1}{x-1}\right)v' = 0$$

$$\Rightarrow v'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}\right)v' = 0$$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int\left[-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}\right]dx} = e^{\left[-\ln(x-1)+\ln x^2\right]} = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\Rightarrow v'(x) = \underbrace{\frac{x-1}{x^2}}_{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} \times \overset{\text{ثابت}}{C} \underset{c=1}{\Rightarrow} v(x) = \int \frac{x-1}{x^2}\,dx = \ln(x) + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_2(x) = 1 + x\ln x}$$

می‌توانستیم جواب دوم را به فرم $y_2 = C y_1(x)\ln x + x^{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{r_2}}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ در نظر گرفت و با جایگذاری در معادله C و b_n را بدست آورد.

$$\boxed{y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x + c_2(1+x\ln x)}$$ جواب عمومی

۲- الف) نشان دهید $J_0'(x) = -J_1(x)$

ب) $y = x J_1(x)$ جواب معادلهی $xy'' - y' - x^2 J_0'(x) = 0$

می‌باشد.

الف)

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \Rightarrow J_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2n}{n!\,\Gamma(n+1)} \frac{x^{2n-1}}{2^{2n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\, n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} \overset{n\to n+1}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\, \underbrace{(n+1)!}_{\Gamma(n+2)}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = -J_1(x)$$

ب)

$$y' = J_1(x) + x J_1'(x) \quad , \quad y'' = 2 J_1'(x) + x J_1''(x)$$

$$\Rightarrow x\left(2 \cancel{J_1'(x)} + x \cancel{J_1''(x)}\right) - \left(J_1(x) + x \cancel{J_1'(x)}\right) - x^2 \underbrace{J_0'(x)}_{= -J_1(x)} =$$

زیرا J_1 جواب معادله بسل مرتبه اول است

$$x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + (\underbrace{x^2 - 1}_{p=1}) J_1(x) = 0$$

۳ـ الف)

$$f(t)=\int_0^1 \frac{\sin(tx)}{x}\,dx$$

$$f'(t)=\int_0^1 \cos(tx)\,dx = \frac{\sin(tx)}{t}\Big]_{x=0}^{1} = \frac{\sin t}{t}$$

$$\Rightarrow L\{f'(t)\} = L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} \Rightarrow sL\{f\} - \cancel{f(0)}^{\,0} = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = \boxed{\frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - tg^{-1}(s)\right)}$$

ب)

$$g(t) = \cos 2t - u_1(t)(t-1) + u_2(t)\sinh(t-2)$$

$$\Rightarrow L\{g(t)\} = \boxed{\frac{s}{s^2+4} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2-1}}$$

۴ـ الف)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\,tg^{-1}s\right\} = ?$$

$$F(s) = e^{-s}\,tg^{-1}s \Rightarrow F'(s) = -\underbrace{e^{-s}\,tg^{-1}s}_{F(s)} + \frac{e^{-s}}{1+s^{2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{F'(s)\right\}}_{-tf(t)} = -\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}}_{f(t)} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{1+s^{2}}\right\}$$

$$\Rightarrow (1-t)f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{1+s^{2}}\right\} = u_1(t)\sin(t-1)$$

$$\Rightarrow f(t) = \boxed{\frac{u_1(t)\sin(t-1)}{1-t}}$$

ب)

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sinh(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = y'' - y + \frac{1}{2}t\sinh t\right\}; \quad y(0)=1,\ y'(0)=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{L}\left\{\sinh t\right\}}_{\frac{1}{s^{2}-1}}\underbrace{\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}}_{Y(s)} = s^{2}\mathcal{L}\{y\} - s\cancel{y(0)}^{1} - \cancel{y'(0)}^{0} - \left(\mathcal{L}\{y\} - \cancel{y(0)}^{1}\right) + \frac{1}{2}\underbrace{\mathcal{L}\left\{t\sinh t\right\}}_{-\left(\frac{1}{s^{2}-1}\right)'}$$

$$Y(s)\left[\frac{1}{s^{2}-1} - s^{2} + 1\right] = -s + 1 + \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}s}{(s^{2}-1)^{2}}\right)$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^{2}-1} \Rightarrow y(t) = \boxed{\cosh t}$$

$$y_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t(3\cos t + \sin t)$$

$$y_2 = \frac{2c_1 - c_2}{5}\cos t + \frac{2c_2 + c_1}{5}\sin t + t(\cos t + \sin t) - \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t$$

اعمال شرایط اولیه

$$y_1(0) = 1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 1}$$

$$y_2(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2c_1 - c_2}{5} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow y_1 = \cos t + \frac{5}{2}\sin t + t(3\cos t + \sin t) = \boxed{(3t+1)\cos t + \left(\frac{5}{2} + t\right)\sin t}$$

$$\boxed{y_2 = -\frac{1}{2}\cos t + 1\sin t + t(\sin t + \cos t)} = \boxed{\left(t - \frac{1}{2}\right)\cos t + (t+1)\sin t}$$

۵ـ با مشتق گیری از معادله اول داریم:

$$y_1'' = 2\underbrace{y_1'}_{\substack{\parallel \\ 4y_1 - 10y_2 + 2\cos t}} - 5y_2' - \sin t$$

$$\Rightarrow y_1'' = 4y_1 - 10y_2 - 5\underbrace{y_2'} + 2\cos t - \sin t \xrightarrow[\text{از معادله دوم } y_2']{\text{با جایگذاری}}$$

$$y_1'' = \cancel{4y_1} - \cancel{10y_2} - \cancel{5y_1} + \cancel{10y_2} - 5\sin t + 2\cos t - \sin t$$

$$\Rightarrow y_1'' + y_1 = 2\cos t - 6\sin t \quad \Rightarrow \text{جواب معادله همگن} \quad y_1 = c_1\cos t + c_2 \sin t$$

برای یافتن جواب خصوصی فرض میکنیم $y_p = t(A\cos t + B\sin t)$

$$y_p' = A\cos t + B\sin t + t(B\cos t - A\sin t) = (A+tB)\cos t + (B-tA)\sin t$$

$$y_p'' = B\cos t - A\sin t + B\cos t - A\sin t + t(-A\cos t - B\sin t)$$

$$= 2(B\cos t - A\sin t) - t(A\cos t + B\sin t)$$

$$\Rightarrow y_p'' + y_p = 2\cos t - 6\sin t \quad \Rightarrow \quad 2B\cos t - 2A\sin t = 2\cos t - 6\sin t$$

$$\Rightarrow \boxed{B=1}, \ \boxed{A=3} \quad \Rightarrow \boxed{y_1 = c_1\cos t + c_2\sin t + t(3\cos t + \sin t)}$$

از معادله اول می‌توان y_2 را نیز بصورت زیر بدست آورد:

$$y_2 = \frac{1}{5}(2y_1 - y_1' + \cos t)$$

$$= \frac{1}{5}\Big[2c_1\cos t + 2c_2\sin t + 2t(3\cos t + \sin t) - \big(c_2\cos t - c_1\sin t + 3\cos t + \sin t + t(\cos t - 3\sin t)\big) + \cos t\Big]$$

$$= \frac{2c_1 - c_2}{5}\cos t + \frac{2c_2 + c_1}{5}\sin t + t(\cos t + \sin t) - \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t$$

حل سؤالات امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل ۹۵

۱- جواب معادله زیر را حول نقطه $x=1$ بیابید.

$$y'' + (x-1)^2 y' - 4(x-1)y = 0$$

$$x-1=t \Rightarrow \quad dt/dx = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) \times \frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$y'' + t^2 y' - 4ty = 0$$

حل جواب معادله را بصورت سری حول $t=0$ می‌یابیم.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n = 0$$

$2a_2 = 0$ ضریب t^0 $\quad \underline{a_2 = 0}$

$6a_3 - a_0 = 0$ ضریب t^1 $\quad \underline{a_3 = \frac{1}{3!} a_0}$

$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-2)a_{n-1} = 0$ ضریب t^n

$$a_{n+2} = -\frac{(n-2)a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \qquad n \geq 2$$

ص۲

$$n=2 \Rightarrow a_4 = -\frac{(2-2)}{(2+2)(2+1)}a_1 = 0 \qquad n=3 \Rightarrow a_5 = -\frac{1}{5\times4}a_2 = 0$$

$$n=5 \Rightarrow a_7 = -\frac{3}{7\times6}a_4 = 0 \qquad n=6 \Rightarrow a_8 = -\frac{4}{8\times7}a_5 = 0$$

$$n=8 \Rightarrow a_{10} = 0 \qquad n=9 \Rightarrow a_{11} = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$n=3k-1 \Rightarrow a_{3k+1} = 0 \qquad n=3k \Rightarrow a_{3k+2} = 0$$

$$n=4 \Rightarrow a_6 = -\frac{2}{6\times5}a_3 = -\frac{2}{6\times5}\times\frac{1}{3!}a_0$$

$$n=7 \Rightarrow a_9 = -\frac{5}{9\times8}a_6 = \frac{2\times5}{3!\times6\times5\times9\times8}a_0$$

$$n=10 \Rightarrow a_{12} = -\frac{8}{12\times11}a_9 = -\frac{2\times5\times8}{3!\,6\times5\times8\times9\times11\times12}a_0$$

$$\vdots$$

$$n=3k-2 \Rightarrow a_{3k} = -\frac{(3k-4)}{3k(3k-1)}a_{3k-3} \Rightarrow$$

$$a_{3k} = \frac{(-1)^k\, 2\times5\times8\times\cdots\times(3k-4)}{(2\times3)(5\times6)(8\times9)(11\times12)\times\cdots(3k)(3k-1)}a_0$$

$$a_{3k} = \frac{(-1)^k\, \cancel{2\times5\times8\times\cdots\times(3k-4)}}{3^k\, k!\;\cancel{2\times5\times8\times\cdots\times(3k-4)}(3k-1)}a_0 = \frac{(-1)^k}{3^k\,k!}a_0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_3 t^3 + a_6 t^6 + a_9 t^9 + \cdots + a_{3k} t^{3k}$$

$$y = a_0\left(1 + \frac{1}{6}t^3 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k k!}t^{3k}\right) + a_1 t = a_0 y_0 + a_1 y_1$$

۳- معادله زیر مفروض است $\quad 2x^2(x-1)y'' + x(3x+1)y' - 2y = 0$

با تغییر متغیر $x=\frac{1}{z}$ معادله فوق را برحسب متغیر z بنویسید و نشان دهید که $z=0$ یک نقطه غیرعادی منظم (منفرد منظم) برای معادله جدید است.

به ازای ریشه بزرگتر معادله مشخصه فرم جواب را بنویسید و آن را به صورت سری فرم جواب عمومی را بنویسید.

$$x=\frac{1}{z} \Rightarrow z=\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x^2}=-z^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\times(-z^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{d}{dx}\left(z^2\frac{dy}{dz}\right)=-\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{dy}{dz}\right)\times\frac{dz}{dx}$$

$$y''=-\left(2z\frac{dy}{dz}+\frac{d^2y}{dz^2}z^2\right)\times(-z^2)$$

$\Rightarrow$ x برحسب $y' = y' \times (-z^2)$

x برحسب $y'' = (2zy'+y''z^2)z^2$

با جایگزاری در معادله داریم:

$$2\times\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z}-1\right)(2y'+y''z)z^3+\frac{1}{z}\left(\frac{3}{z}+1\right)(-y'z^2)-2y=0$$

$$2\frac{1}{\cancel{z^2}}(1-z)(2y'+y''z)\cancel{z^3}+\frac{1}{\cancel{z^2}}(3+z)(-y'\cancel{z^2})-2y=0$$

$$2z(1-z)y''+(4(1-z)-(3+z))y'-2y=0$$

$$2z(1-z)y''+(1-7z)y'-2y=0$$

$$y''+\underbrace{\frac{(1-7z)}{2z(1-z)}}_{p(z)}y'-\underbrace{\frac{2}{2z(1-z)}}_{q(z)}y=0$$

$z=0$ نقطه غیرعادی است زیرا توابع p و q در $z=0$ تحلیلی نیستند. (نامحدود هستند) برای بررسی اینکه ببینیم نقطه $z=0$ نقطه غیرعادی منظم معادله است حدهای زیر را محاسبه می‌کنیم:

ادامه ۲ ص ٤

$$p_0=\lim_{z\to 0}(z-0)p(z)=\lim_{z\to 0} z\left(\frac{1-7z}{2z(1-z)}\right)=\frac{1}{2}<\infty$$

$$q_0=\lim_{z\to 0}(z-0)^2 q(z)=\lim_{z\to 0} z^2\left(\frac{-2}{2z(1-z)}\right)=0<\infty$$

چون هر دو حد موجود و متناهی اند لذا $z=0$ نقطه منفرد منظم معادله است و معادله مشخصه به صورت زیر است:

$$s^2+(p_0-1)s+q_0=0 \Rightarrow s^2+(\tfrac{1}{2}-1)s+0$$

$$\Rightarrow s^2-\tfrac{1}{2}s=0 \Rightarrow s(s-\tfrac{1}{2})=0$$

$$\Rightarrow s_1=\tfrac{1}{2},\ s_2=0 \quad , \quad s_1-s_2\notin \mathbb{Z}$$

معادله دارای دو جواب به صورت

$$(*)\begin{cases} y_1=z^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(1/2)\, z^n \\ y_2=z^0\sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\, z^n \end{cases}$$

به ازای $s=1/2$ سری فروبنیوس جواب را محاسبه می‌کنیم.

$$y=z^s\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+s}$$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)z^{n+s-1} \quad , \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)z^{n+s-2}$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله

$$(2z-2z^2)y''+(1-7z)y'-2y=0$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_{n+1}z^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty}2(n+s)(n+s-1)z^{n+s}a_n +$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+s)a_{n+1}z^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty}7(n+s)a_n z^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty}2(n+s)a_n z^{n+s}=0$$

$$\sum\Big[\big((n+s+1)(n+s)+(n+s+1)\big)a_{n+1}-\big(2(n+s)(n+s-1)+7(n+s)+2(n+s)\big)a_n\Big]z^{n+s}=0$$

$$a_{n+1}=\frac{2(n+s)(n+s-1)+7(n+s)+2(n+s)}{(n+s+1)^2}a_n$$

$s=1/2$:

$$a_{n+1}=\frac{(n-\frac{1}{2})+9(n+\frac{1}{2})}{(n+\frac{3}{2})^2}=\frac{10n+4}{(n+\frac{3}{2})^2}a_n=\frac{2(5n+2)}{(2n+3)}a_n$$

صفحه ادامه ۲

$$a_1 = \frac{2^3(5+2)}{(2+3)} a_0 = \frac{2^3 \cdot 7}{5} a_0$$

$$a_2 = \frac{2^3(12)}{7} a_1 = \frac{2^3 \cdot 12}{7} a_1 = \frac{2^6 \cdot 7\times 12}{5\times 7}$$

$$a_3 = \frac{2^3(17)}{9} a_2 = \frac{2^9 (7\times 12\times 17)}{5\times 7\times 9} a_0$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{2^{3n} (7\times 12\times 17\times \cdots \times (5n+2))}{(5\times 7\times 9 \times \cdots \times (2n+3))} a_0$$

$$y_1 = x^{1/2} (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)$$

$$y_1 = x^{1/2} a_0 \left(1 + \frac{2^3 \cdot 7}{5} z + \frac{2^6 \times 7\times 12}{5\times 7} z^2 + \cdots\right) \longleftarrow y_1$$ می‌شود

$$y_g = x^{1/2} y_1 + x y_2$$ y_1, y_2 طبق (*) نوشته می‌شوند.

۳-

$$\delta_\varepsilon(t-a) = \begin{cases} 1/\varepsilon & a<t<a+\varepsilon \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{L}(\delta_\varepsilon(t-a))$$

$$\mathcal{L}(\delta_\varepsilon(t-a)) = \mathcal{L}(u_a(t) - u_{a+\varepsilon}(t)) = \frac{e^{-as} - e^{-(a+\varepsilon)s}}{s}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} e^{-as}\left(\frac{1-e^{-\varepsilon s}}{s}\right) \overset{\text{هوپیتال}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{-as}}{s} \times \frac{(s e^{-\varepsilon s})}{1} = e^{-as}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-as}}$$ الف:

ب: از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$\mathcal{L}(y'') - 5\mathcal{L}(y') + 6\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\delta(t-2))$$

$$s^2\mathcal{L}(y) - s y(0) - y'(0) - 5(s\mathcal{L}(y) - y(0)) + 6\mathcal{L}(y) = e^{-2s}$$

$$(s^2 - 5s + 6)\mathcal{L}(y) = e^{-2s} \Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{(s-2)(s-3)}\right)$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s-3} - \frac{e^{-2s}}{s-2}\right) = u_2(t) e^{3(t-2)} - u_2(t) e^{2(t-2)}$$

٤ - با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + 2ty' - 4y = 1 \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

حل: اگر $\mathcal{L}(y) = Y(s)$ و بنابراین طبق خاصیت $\mathcal{L}(ty') = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y')$ مسئله را حل می‌کنیم: از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(ty') - 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1)$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\left(-\frac{d}{ds}\right)\left(sY(s) - y(0)\right) - 4\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s}$$

$$s^2Y(s) - 2\left(Y(s) + sY'(s)\right) - 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$(s^2 - 6)Y(s) - 2sY'(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y'(s) + \frac{6 - s^2}{2s}Y(s) = -\frac{1}{2s^2}$$ معادله خطی مرتبه اول

$$\mu = e^{\int \frac{6-s^2}{2s}ds} = e^{3\ln s - \frac{1}{4}s^2} = s^3 e^{-\frac{1}{4}s^2}$$ عامل انتگرال ساز

$$Y(s) = \frac{e^{\frac{1}{4}s^2}}{s^3}\int \underbrace{s^{\cancel{3}} e^{-\frac{1}{4}s^2}\left(-\frac{1}{\cancel{2s^2}}\right)}_{u'e^u} ds + \frac{c}{s^3}e^{\frac{1}{4}s^2}$$

$$Y(s) = \frac{e^{\frac{1}{4}s^2}}{s^3} \cdot e^{-\frac{1}{4}s^2} + \frac{c}{s^3}e^{\frac{1}{4}s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{c}{s^3}e^{\frac{1}{4}s^2} \Rightarrow \frac{Y(s)}{e^{\frac{1}{4}s^2}} = \frac{1}{s^3e^{\frac{1}{4}s^2}} + \frac{c}{s^3}$$

چون $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$ لذا وقتی $s \to \infty$ باید $c = 0$ باشد.

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^3} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2!}{s^3}\right) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}t^2$$

۵- دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x'(t)+y'(t)+5x+3y=e^{-t} \\ 2x'(t)+y'(t)+x+y=3 \end{cases}$$

فرض می‌کنیم $x(0)=A$، $y(0)=B$

حل: از طرفین هر رابطه تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases} sX(s)-A+sY(s)-B+5X(s)+3Y(s)=\frac{1}{s+1} \\ 2sX(s)-2A+sY(s)-B+X(s)+Y(s)=\frac{3}{s} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \times(s+1) \\ \times -(s+3) \end{array} \begin{cases} (s+5)X(s)+(s+3)Y(s)=\frac{1}{s+1}+A+B \\ (2s+1)X(s)+(s+1)Y(s)=\frac{3}{s}+2A+B \end{cases}$$

$$(s^2+6s+5-2s^2-s-6s-3)X(s)=\left(1+(A+B)(s+1)-\frac{3(s+3)}{s}-(2A+B)(s+3)\right)$$

$$(-s^2-s+2)X(s)=$$

s^2+s-2

$(s+2)(s-1)$

$$-(s+2)(s-1)X(s)=1+(A+B)(s+1)-\frac{3(s+3)}{s}-(2A+B)(s+3)$$

$$X(s)=\frac{-1}{(s+2)(s-1)}-\frac{(A+B)(s+1)}{(s+2)(s-1)}+\frac{3(s+3)}{s(s+2)(s-1)}+\frac{(2A+B)(s+3)}{(s+2)(s-1)}$$

$$X(s)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}\right)-\frac{A+B}{s-1}+\frac{A+B}{3}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+2}\right)+\frac{3}{s(s-1)}+\frac{3}{s(s+2)(s-1)}$$

$3\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)$ $\quad -\frac{3/2}{s}+\frac{1/2}{s+2}+\frac{1}{s-1}$

$$+\frac{(2A+B)}{s-1}+\frac{(2A+B)}{3}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+2}\right)$$

$$x(t)=\frac{1}{3}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{t}-(A+B)e^{t}+\frac{(A+B)}{3}(e^{t}-e^{-2t})+3e^{t}-3$$

$$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}+e^{t}+(2A+B)e^{t}+\frac{(2A+B)}{3}e^{t}-\frac{(2A+B)}{3}e^{-2t}$$

بطریق مشابه $y(t)$ به دست می‌شود.

بهار ۹۵

پاسخ تمرین سری:

۱- الف)

$$xy''-(x+2)y'+2y=0 \Rightarrow y''\underbrace{-\frac{x+2}{x}}_{p(x)}y'+\underbrace{\frac{2}{x}}_{q(x)}y=0$$

چون $p(x)$ و $q(x)$ در $x=0$ تحلیلی نیستند پس $x=0$ نقطه‌ی تکین معادله است.

$$P_0=\lim_{x\to 0} xp(x)=-2 \ , \ q_0=\lim_{x\to 0} x^2\frac{2}{x}=0 \xrightarrow{P_0,q_0\in R} x=0 \text{ تکین منظم معادله است}$$

ب) معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم.

$$r^2+(p_0-1)r+q_0=0 \Rightarrow r^2-3r=0 \Rightarrow r=0,3 \xrightarrow{r_1>r_2} r_1=3,\ r_2=0$$

جواب به ازای ریشه بزرگتر همواره به فرم سری فروبنیوس است یعنی $y_1=x^3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. چون اختلاف ریشه‌ها یک عدد صحیح غیر صفر است جواب دوم را به فرم $y_2=ky_1\ln x+x^0\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ در نظر می‌گیریم که جواب عمومی به صورت $y=c_1y_1+c_2y_2$ خواهد بود. حال جواب y_1 را بدست می‌آوریم.

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+3} \Rightarrow y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)a_nx^{n+2} \Rightarrow y_1''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)a_nx^{n+1}$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}(n+3)(n+2)a_nx^{n+2}}_{xy''}+\underbrace{\sum_{n=0}-(n+3)a_nx^{n+3}}_{-xy'}+\underbrace{\sum_{n=0}-2(n+3)a_nx^{n+2}}_{-2y'}+\underbrace{\sum_{n=0}2a_nx^{n+3}}_{2y}=0$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}n(n+3)a_nx^{n+2}}_{xy''-2y'}+\underbrace{\sum_{n=0}-(n+1)a_nx^{n+3}}_{-xy'+2y}=0$$

$$\sum_{n=0}\left[(n+1)(n+4)a_{n+1}-(n+1)a_n\right]x^{n+3}=0 \xrightarrow{n\geq 0} a_{n+1}=\frac{a_n}{n+4}$$

$$n=0 \Rightarrow a_1=\frac{a_0}{4}$$

$$n=1 \Rightarrow a_2=\frac{a_1}{5}=\frac{a_0}{5\times 4} \qquad \Rightarrow \qquad a_n=\frac{a_0}{(n+3)\times\cdots\times 5\times 4}$$

$$n=2 \Rightarrow a_3=\frac{a_2}{6}=\frac{a_0}{6\times 5\times 4}$$

$$\vdots$$

با انتخاب $a_0=\frac{1}{3!}$ نتیجه می‌شود $a_n=\frac{1}{(n+3)!}$ بنابراین داریم:

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{(n+3)!}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{n=2}\frac{x^n}{n!}$$

$$\boxed{y_1=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$$

روش دیگر: این روش در کتاب معادلات دیفرانسیل پوران پژوهش تألیف اینجانب آمده است.

جمله عمومی جواب را به فرم $a_n x^N$ در نظر می‌گیریم که در آن $N=n+3$ و در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$a_nN(N-1)x^{N-1}-a_nNx^N-2a_nNx^{N-1}+2a_nx^N=0$$

$$a_n(N^2-3N)x^{N-1}-\underbrace{a_{n-1}(N-2)x^N}_{1\downarrow}=0 \Rightarrow x^{N-1}\left[a_nN(N-3)-a_{n-1}(N-3)\right]$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}}{N} \xrightarrow[r=3]{N=n+r} \boxed{a_n=\frac{a_{n-1}}{n+3}}$$

که همان رابطه‌ی بازگشتی به‌دست آمده است. البته باید به‌جای n، $n+1$ قرار دهیم.

2- الف) (کرایزیگ ص 943)

$$J_0 = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(n!)\,\Gamma(n+1)}\,\frac{x^{2n}}{2^{2n}}$$

$$J_0' = \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1)}\,\frac{2n\cdot x^{2n-1}}{2^{2n}} = \sum_{n=1 \downarrow 0} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,\Gamma(n+1)}\,\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}}$$

چون ضریب به ازای $n=0$ صفر است
پس پایه را با $n=1$ شروع می‌کنیم.

$$J_0' = \sum_{n=0} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,\Gamma(n+2)}\,\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}} = -\underbrace{\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}_{J_1(x)} = -J_1$$

ب) چون دستگاه ضریب متغیر است از روش حذفی استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} ty + x + tx' = (t-1)e^{-t} \\ y' - x = e^{-t} \end{cases} \xrightarrow{x = y' - e^{-t}} ty + y' - e^{-t} + t(y'' + e^{-t}) = (t-1)e^{-t}$$

$$\Rightarrow ty + y' + ty'' = 0 \overset{\times t}{\Rightarrow} t^2 y'' + t y' + (t^2 - 0)y = 0 \xrightarrow[\text{بسل}]{\nu = 0} y = c_1 J_0(t) + c_2 Y_0(t)$$

$$x = y' - e^{-t} = c_1 J_0'(t) + c_2 Y_0'(t) - e^{-t} = -c_1 J_1(t) + c_2 Y_0'(t) - e^{-t}$$

برای یافتن جواب‌های کراندار کافی است $c_2 = 0$ باشد.

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x \xrightarrow{n=1} 2P_2(x)=3xP_1(x)-P_0(x) \Rightarrow \boxed{P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)}$$

$$n=2 \Rightarrow \boxed{P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)}$$

چون $f(x)$ چند جمله‌ای است کافی است ضرایب را متحد قرار دهیم

$$f(x)=10x^3+3x^2-7x+1 = c_0P_0+c_1P_1+c_2P_2+c_3P_3$$

بخش زوج $\quad 3x^2+1 = c_0P_0+c_2P_2 = c_0+\frac{c_2}{2}(3x^2-1) \Rightarrow c_2=2 \Rightarrow c_0=2$

بخش فرد $\quad 10x^3-7x = c_1P_1+c_3P_3 = c_1x+\frac{c_3}{2}(5x^3-3x) \Rightarrow c_3=4 \Rightarrow c_1=-1$

4_ این سوال در صفحه‌ی 412 کتاب بوران پژوهش تألیف اینجانب حل شده است.

$$\int_0^\infty e^{-3t}\int_0^t x^2\sin(t-x)\,dx\,dt = \int_0^\infty e^{-3t}(t^2*\sin t)\,dt = \mathcal{L}\left[t^2*\sin t\right]\Big|_{s=3}$$

$$=\frac{2}{s^3}\cdot\frac{1}{s^2+1}\Big|_{s=3}=\frac{1}{135}$$

ب) $$f(t)=\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s+\sqrt{s^2+1}}{2s}\right\}}_{f_1(t)}+\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\}}_{f_2(t)}=\frac{1-J_0(t)}{t}+\frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{\sqrt{2\pi t}}$$

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\}=\ln\frac{s+\sqrt{s^2+1}}{2s}$$

$$\xRightarrow{\frac{d}{ds}} \mathcal{L}\{-tf_1(t)\}=\frac{1+\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}}{s+\sqrt{s^2+1}}-\frac{1}{s}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}-\frac{1}{s}$$

$$\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -tf_1(t)=J_0(t)-1 \Rightarrow \boxed{f_1(t)=\frac{1-J_0(t)}{t}}$$

$$f_2(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$f_2(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{2}t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}$$

$$f_2(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{2}t}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\boxed{\frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{\sqrt{2\pi t}}}$$

$$ty'' + (1-2t)y' - 2y = 0 \qquad y(0) = a, \quad y'(0) = b, \quad a=1, b=2$$

$$-(s^2Y - as - b)' + sY - a + 2(sY - a)' - 2Y = 0$$

$$-s^2Y' - 2sY + \cancel{a} + sY - \cancel{a} + \cancel{2Y} + 2sY' - \cancel{2Y} = 0 \Rightarrow (s-2)Y' + Y = 0$$

$$\frac{dY}{Y} + \frac{ds}{s-2} = 0 \Rightarrow \ln Y + \ln(s-2) = \ln c \Rightarrow Y = \frac{c}{s-2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c}{s-2}\right] = ce^{2t} \xrightarrow[y(0)=1]{a=1} \boxed{y(t) = e^{2t}}$$

توجه کنید تنها تبدیل لاپلاس جواب‌هایی از معادله به دست می‌آید که دارای تبدیل لاپلاس هستند. معادله فوق یک معادله مرتبه دوم است و بنابراین دو پایه جواب مستقل دارد. اگر $y_1 = e^{2t}$ را جواب پایه اول در نظر بگیریم داریم

$$y_2 = uy_1, \quad u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(t)dt} dt \Rightarrow y_2 = e^{2t}\int \frac{e^{-2t}}{t} dt \Rightarrow$$ تبدیل لاپلاس ندارد

بنابراین جواب y_2 از روش لاپلاس قابل تعیین نیست. و تنها بخشی از جواب عمومی یعنی $y = ce^{2t}$ به دست آمده است. توجه کنید که شرایط اولیه $y(0)$ و $y'(0)$ با توجه به معادله به هم وابسته‌اند زیرا به ازای $t=0$ داریم

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow b - 2a = 0$$

توضیحات این سوال در صفحه‌های 371, 372 کتاب [illegible] آمده است.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

پاسخنامه آزمون پایان ترم معادلات دیفرانسیل ۲۶ دی ۹۶

پاسخ سوال ۱ - $x = 0$ یک نقطه غیر عادی منظم معادله است و داریم:(۱ نمره)

$$p_0 = \lim x(\frac{1-x}{x}) = 1$$

$$q_0 = \lim x^2(\frac{-1}{x}) = 0$$

$m^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 0$ (۴ نمره)

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}$ (۱ نمره)

با قرار دادن در معادله به دست می‌آوریم

$$a_0 m^2 x^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(m+n+1)^2 a_{n+1} - (m+n+1)a_n\right] x^{m+n} = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{m+n+1} \quad n \geq 0 \quad , \quad m = 0$$

$$a_1 = a_0 \quad , \quad a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{a_0}{2!}$$

$$a_3 = \frac{a_0}{3!} \quad , \quad ... \quad , \quad a_n = \frac{a_0}{n!}$$

$y_1 = x^0(a_0 + a_0 x + \frac{a_0}{2!}x^2 + \quad ... \quad + \frac{a_0}{n!}x^n + ...)$ (۹ نمره)

$$y_1 = a_0 e^x$$

$v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{1-x}{x}dx} dx = \int \frac{1}{x}(e^{-x})dx$ (۳ نمره)

$$v = \int \frac{1}{x}(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ...)dx$$

$$v = \ln x - x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^5}{18} + ...$$

$$y_2 = vy_1 = y_1 \ln x + y_1(-x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^5}{18} + ...)$$

$y_2 = y_1 \ln x - x - \frac{3x^2}{4} + ...$ (۷ نمره)

پاسخ سوال ۲

$$y = x^{-\alpha}u$$

$y' = -\alpha x^{-\alpha-1}u + u'x^{-\alpha}$ (۱ نمره)

$y'' = \alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2}u - 2\alpha x^{-\alpha-1}u' + x^{-\alpha}u''$ (۳ نمره)

با قرار دادن مقادیر فوق در معادله داده شده به دست می‌آوریم:

$x\left[\alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2}u-2\alpha x^{-\alpha-1}u'+x^{-\alpha}u''\right]+(1-2\alpha)(-\alpha x^{-\alpha-1}u+u'x^{-\alpha})+x^{-\alpha+1}u$ (۵ نمره)

طرفین را در $x^{\alpha+1}$ ضرب می‌کنیم به دست می‌آوریم (۱ نمره)

$x^2u^{''}+xu'+(x^2-\alpha^2)u=0$ (۲ نمره)

$u(x)=c_1J_\alpha(x)+c_2Y_\alpha(x)$ (۳ نمره)

$y(x)=c_1x^{-\alpha}J_\alpha(x)+c_2x^{-\alpha}Y_\alpha(x)$ (۱ نمره)

پاسخ سوال ۳

الف)

$$F(s)=\frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{s}}$$

$F(s)=\frac{1}{s^2}(1-\frac{1}{s}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{s^2})-\frac{1}{3!}(\frac{1}{s^3})+...)$ (۵ نمره)

$\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^3}+\frac{1}{2!}\frac{1}{s^4}-\frac{1}{3!}\frac{1}{s^5}+...$ (۲ نمره)

$L^{-1}[F(s)]=f(t)=t-\frac{t^2}{2!}+\frac{1}{2!}\frac{t^3}{3!}-\frac{1}{3!}\frac{t^4}{4!}+...+\frac{(-1)^n}{(n-1)!n!}t^n+...$ (۸ نمره)

ب)

$$ty^{''}+y=0 \quad y(0)=0$$

$-\frac{d}{ds}(s^2Y-sy(0))+Y=0$ (۲ نمره)

$$-2sY-s^2Y'+Y=0$$

$-s^2Y'+(-2s+1)Y=0$ (۳ نمره)

$$\int\frac{dy}{y}=\int(\frac{-2}{s}+\frac{1}{s^2})ds$$

$$\ln y=-2\ln s-\frac{1}{s}+\ln c$$

$Y=c\frac{e^{\frac{-1}{s}}}{s^2}$ (۴ نمره)

با توجه به قسمت الف

$y=c\left(t-\frac{t^2}{2!}+\frac{1}{2!}\frac{1}{3!}t^3-...+\frac{(-1)^n}{(n-1)!n!}t^n+...\right)$ (۱ نمره)

پاسخ سوال ۴

الف)

$$\int te^{-t}J_0(3t)dt$$

$=-\frac{d}{ds}[L(J_0(3t))]_{s=1}$ (۳ نمره)

$=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+9}}\right)_{s=1}$ (۵ نمره)

$\frac{s}{(s^2+9)^{\frac{3}{2}}}\ |_{s=1}=\frac{1}{10\sqrt{10}}$ (۲ نمره)

ب)

$$f(t) = \int_0^t (t-x)(x^3 e^{2x} \sinh x)dx$$
$$= L[t^3]L[t^3 e^{2t} \sinh t]$$ (۱) (۵ نمره)
$$L[t^3] = \frac{3!}{s^4}$$ (۲) (۲ نمره)
$$L[t^3 e^{2t} \sinh t] = G(s)$$
$$G(s) = -\frac{d^3}{ds^3} G_1(s)$$ (۲ نمره)
$$G_1(s) = L[e^{2t} \sinh t] = G_2(s-2)$$ (۲ نمره)
$$G_2(s) = L[\sinh t] = \frac{1}{s^2-1}$$ (۲ نمره)
$$G_1(s) = \frac{1}{(s-2)^2-1}$$
$$G(s) = -\frac{d^3}{ds^3}\left[\frac{1}{(s-2)^2-1}\right]$$ (۳)

(۲) و (۳) را در (۱) قرار می دهیم. (۲ نمره)

پاسخ سوال ۵

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$ (۲ نمره)

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad AX_1 = \lambda_1 X_1 \Rightarrow (A-I)X_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه متناظر با λ_1 . (۲ نمره)

$$\lambda_2 = -1 \quad , \quad AX_2 = \lambda_2 X_2 \Rightarrow (A+I)\, X_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه متناظر با λ_1 . (۲ نمره)

$$y_g = c_1 X_1 e^t + c_2 X_2 e^{-t} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t + 3c_2 e^{-t} \end{bmatrix}$$ جواب عمومی دستگاه همگن (۴ نمره)

برای یافتن جواب خصوصی می توان از دو روش تغییر پارامتر یا ضرایب نا معین استفاده نمود. در اینجا از ضرایب نا معین استفاده شده است.

$$y_{p_1} = Me^t + Nte^t = e^t(M+Nt)$$
$$y_{p_2} = Ve^{-t} + Wte^{-t} = e^{-t}(V+Wt)$$

با جایگذاری y_{p_1} و y_{p_2} مستقلا در دستگاه اولیه داریم

$$e^t(M+Nt) + Ne^t = e^t(AM + ANt) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t$$ (۱)

$$-e^{-t}(V+Wt) + We^{-t} = e^{-t}(AV + AWt) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$ (۲)

۱۰ نمره یافتن جواب خصوصی

در دستگاه ۱ داریم:

$$\begin{cases} M - AM + N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ N - AN = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow N = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \end{cases}$$

می توان نوشت $\Rightarrow M - AM = \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$

$$(A - I)M = \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

$M_1 - M_2 = \alpha - 1$

$3M_1 - 3M_2 = \alpha$

$\Rightarrow \alpha - 1 = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow 2\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow N = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow M = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

از دستگاه ۲ داریم:

$$\begin{cases} W - V - AV = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A + I)V = \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 + 3\alpha \end{bmatrix} \\ W + AW = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W = \begin{bmatrix} \alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3v_1 - v_2 = \alpha \\ 3v_1 - v_2 = -1 + 3\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = -1 + 3\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = e^t \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \right) + e^{-t} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \right)$$

$y_G = y_g + y_p$ جواب عمومی دستگاه

شنبه ۹۶/۰۴/۰۳
مدت ۱۲۰ دقیقه

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

---

۱) جواب معادله دیفرانسیل زیر را با کمک سری ها تا چهار جمله غیر صفر بیابید (۱۵ نمره)

$$y'' + (x-1)e^{y}y' = 0 \quad , \quad y_{(0)} = 0 \quad , \quad y'_{(0)} = 1$$

---

۲) با استفاده از تغییر متغیر مناسب نشان دهید معادله دیفرانسیل $y''sinx + y'cosx + 12y\,sinx = 0$

به معادله دیفرانسیل $f(u)\frac{d^2y}{du^2} + g\,(u)\frac{dy}{du} + \alpha y = 0$

که در آن α عدد ثابت است تبدیل می شود سپس معادله بدست آمده را با روش سری توانی حول $u = 0$ حل نمایید.(۳۰نمره)

---

۳) الف: اگر $f(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد نشان دهید : (۱۵ نمره)

$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-ST}}\int_0^T e^{-St}\, f(t)dt$$

ب : شکل تابع متناوب زیر را در بازه $[0,\infty)$ رسم کرده و سپس تبدیل لاپلاس آن را بیابید. (۱۰ نمره)

$$E(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

---

۴) مطلوب است : (۲۵ نمره)

$$L^{-1}\left[\frac{s^3+1}{(s^2+4)^2}\right]$$

---

۵) دستگاه زیر را به کمک مقادیر ویژه ماتریس ها حل کنید. (۱۵ نمره)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

موفق باشید

ص۱

جواب سؤال ۱

$$y''(0) - e^{y(0)}y'(0) = 0 \Rightarrow y''(0) = 1 \qquad \text{(۱نمره)}$$

$$y'''(x) + e^{y}y' + (x-1)y'^2e^{y} + (x-1)e^{y}y''(x) = 0 \qquad \text{(۳نمره)}$$

$$\Rightarrow y'''(0) + 1 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow y'''(0) = 1 \qquad \text{(۲نمره)}$$

$$y^{(4)}(0) + y'^2e^{y} + y''e^{y} + y'^2e^{y} + 2(x-1)y'y''e^{y} + (x-1)y'^3e^{y}$$

$$+ e^{y}y'' + (x-1)y'e^{y}y'' + (x-1)e^{y}y''' = 0 \qquad \text{(۴نمره)}$$

$$\Rightarrow y^{(4)}(0) + y'^2(0) + y''(0) + y'^2(0) - 2y'(0)y''(0) - y'^3(0) + y''(0) - y'(0)y''(0)$$

$$- y'''(0) = 0 \Rightarrow y^{(4)}(0) = 1 \qquad \text{(۲نمره)}$$

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2!} + y'''(0)\frac{x^3}{3!} + y^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} \\ \Rightarrow y(x) &= x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \end{aligned}\right\} \text{(۳نمره)}$$

جواب سؤال 2

$$y''\sin x + y'\cos x + 12y\sin x = 0 \qquad (1)$$

$$u = \cos x \qquad \text{(۳نمره)} \qquad (2)$$

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = -\sin x\frac{dy}{du} \qquad \text{(۲نمره)} \qquad (3)$$

$$y'' = -\cos x\frac{dy}{du} + \sin^2 x\frac{d^2y}{du^2} \qquad \text{(۳نمره)} \qquad (4)$$

(2)، (3) و (4) را در (1) قرار می‌دهیم و طرفین را بر $\sin x$ تقسیم می‌کنیم به دست می‌آوریم

$$\sin^2 x\frac{d^2y}{du^2} - 2\cos x\frac{dy}{du} + 12y = 0 \qquad \text{(۲نمره)}$$

$$\text{(۲نمره)} \qquad (1-u^2)\frac{d^2y}{du^2} - 2u\frac{dy}{du} + 12y = 0 \qquad (5) \quad \text{معادله لژاندر}$$

معادله فوق در همسایگی $u=0$ تحلیلی است پس دارای جوابی به صورت

$$\left.\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n, \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n u^{n-1}, \\ y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-2} \end{aligned}\right| \text{(۱نمره)}$$

2م

تتمه سؤال 2

مقادیر بالا که فوق را در (۵) قرار دهیم بدست می‌آوریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n u^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n u^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} nC_n u^n + 12\sum_{n=0}^{\infty} C_n u^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)C_{n+2}u^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n u^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} nC_n u^n + 12\sum_{n=0}^{\infty} C_n u^n = 0$$

$$2C_2 + 6C_3 u + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)C_{n+2} + (-n^2+n-2n+12)C_n\right]u^n$$
$$-2C_1 u + 12C_0 + 12C_1 u = 0$$

$$2C_2 + 12C_0 + \left[6C_3 + 10C_1\right]x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)C_{n+2} + (3-n)(4+n)C_n\right]u^n = 0$$

$$\text{ضریب } u^0 \quad 2C_2 + 12C_0 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{-12C_0}{2}$$ (کل ۱/۲ نمره)

$$\text{ضریب } u^1 \quad 6C_3 + 10C_1 = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{10C_1}{6}$$

⋮

$$\text{ضریب } u^n \quad (n+2)(n+1)C_{n+2} + (3-n)(4+n)C_n = 0 \Rightarrow$$

$$C_{n+2} = -\frac{(3-n)(4+n)C_n}{(n+2)(n+1)}$$ (۲ نمره)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+2}}\right| = 1$$ (۱ نمره)

$$C_5 = C_7 = \cdots = 0$$

$$y = C_0\left(1 - \frac{12}{2!}u^2 + \cdots\right) + \left(u - \frac{10}{6}u^3\right)C_1$$ (۱ نمره)

$$y = C_0\left(1 - \frac{12}{2!}\cos^2 x + \cdots\right) + C_1\left(\cos x - \frac{10}{6}\cos^3 x\right)$$ (۱ نمره)

ص ۳

جواب سؤال ۵

الف

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$ (۱ نمره)

(۱ نمره) به فرض $t = u + T$ تبدیل دومین انتگرال بصورت زیر در آید

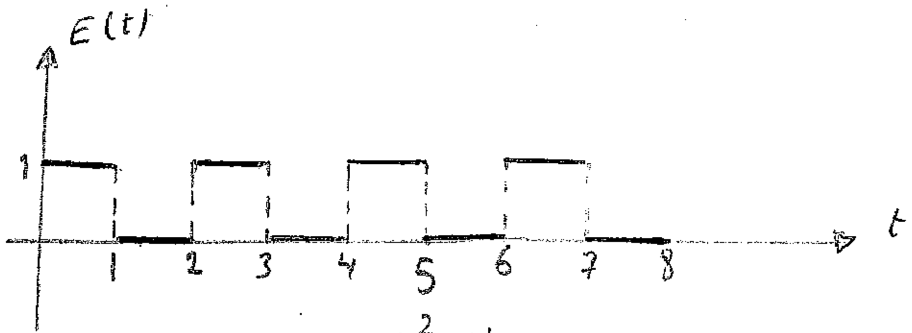
$$\int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(u+T)} f(u+T)\,du$$

$$= e^{-sT}\int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du = e^{-sT}\mathcal{L}[f(t)]$$ (۱ نمره)

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + e^{-sT}\mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$ (۱ نمره)

ب :



(۱ نمره)

$$\mathcal{L}[E(t)] = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st} E(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}\cdot 1\,dt + \int_1^2 e^{-st}\cdot 0\,dt\right]$$ (۲ نمره)

$$= \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{1}{s(1+e^{-s})}$$

ص 4

جواب سوال 4

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\overbrace{\frac{s^3+1}{(s^2+4)^2}}^{F(s)}\Big]=\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{As+B}{s^2+4}+\frac{Cs+D}{(s^2+4)^2}\Big]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{(As+B)(s^2+4)+Cs+D}{(s^2+4)^2}\Big]$$

ضریب s^3 $\quad A=1$

ضریب s^2 $\quad B=0$

ضریب s^1 $\quad 4A+C=0 \Rightarrow C=-4$

ضریب s^0 $\quad 4B+D=1 \Rightarrow D=1$

$$=\mathcal{L}^{-1}\Big[\overbrace{\frac{s}{s^2+4}}^{F_1(s)}\Big]-4\mathcal{L}^{-1}\Big[\overbrace{\frac{s}{(s^2+4)^2}}^{F_2(s)}\Big]+\mathcal{L}^{-1}\Big[\overbrace{\frac{1}{(s^2+4)^2}}^{F_3(s)}\Big]$$ (5 نمره)

$f_1(t)=\cos 2t$ (1/2 نمره)

$$f_2(t)=-2t\,\mathcal{L}^{-1}\Big[\int_s^\infty \frac{2u}{(u^2+4)^2}\Big]=-2t\,\mathcal{L}^{-1}\Big[-\frac{1}{u^2+4}\Big]_s^\infty$$ (1 نمره)

$$=-2t\,\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{u^2+4}\Big]=-t\sin 2t$$

$$f_3(t)=\frac{1}{4}\int_0^t \sin 2(t-\tau)\sin 2\tau\,d\tau$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^t\big[\cos(2t-4\tau)-\cos 2t\big]d\tau$$ (1/2 نمره)

$$=\frac{1}{8}\Big[-\frac{1}{4}\sin(2t-4\tau)-\tau\cos 2t\Big]_0^t$$

$$=\frac{1}{8}\Big[-\frac{1}{4}\sin(-2t)-t\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t+0\Big]$$

$$=\frac{1}{8}\Big[-\frac{1}{4}\sin(-2t)$$

$$=\frac{1}{16}\sin 2t-\frac{1}{8}t\cos 2t$$

$$\Rightarrow f(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)=\cos 2t-t\sin 2t-\frac{1}{8}t\cos 2t+\frac{1}{16}\sin 2t$$

ص5

جواب سؤال 5

$$X' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} X$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(3+\lambda)(4+\lambda) - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 7\lambda + 12 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -5$$

(5 نمره)

برای $\lambda = -2$:

$$(A + 2I)v = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ 2v_1 - 2v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2 \qquad v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

برای $\lambda = -5$:

$$(A + 5I)v = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2v_1 + v_2 = 0 \\ 2v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_2 = -2v_1 \Rightarrow v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

(8 نمره)

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

(2 نمره)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

پاسخ‌نامه آزمون پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۶ خرداد ۹۷

پاسخ سوال ۱-

$$x^2y'' - (2x+2x^2)y' + (x^2+2x+2)y = 0$$

در $x=0$ معادله دارای یک نقطه‌ی منفرد منظم می‌باشد:

$$p_0=-2, \quad q_0=2 \Rightarrow \quad m^2-3m+2=0$$
$$\Rightarrow \quad m_1 = 2 > 1 = m_2$$
$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}, \quad y'=\sum_{n=0}^{\infty}(m+n)a_n x^{m+n-1}, \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}(m+n)(m+n-1)a_n x^{m+n-2}$$

$$\Rightarrow \quad (m-1)(m-2)a_0x^m + \left[(m-1)ma_1 + (2-2m)a_0\right]x^{m+1} +$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(m+n-1)(m+n-2)a_n - (4-2(m+n))a_{n-1} + a_{n-2}\right]x^{n+m} = 0$$
$$a_0=0, \quad m=2 \Rightarrow \quad a_1=a_0=1, \quad a_n = \frac{2na_{n-1}-a_{n-2}}{n(n+1)}; n \geqslant 2 \quad \text{(۱۵ نمره)}$$

$$a_2 = \frac{4a_1-a_0}{2\cdot 3} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2!}, \quad a_3 = \frac{6\cdot\frac{1}{2}-1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3!}, \cdots, \quad a_n = \frac{1}{n!}$$
$$\Rightarrow \quad y_1 = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = x^2e^x$$

$$y_2 = y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{\int(\frac{2}{x}+2)dx}dx = x^2e^x\int\frac{1}{x^4e^{2x}}\cdot x^2e^{2x}dx = -xe^x$$
$$\Rightarrow \quad y = c_1x^2e^x + c_2xe^x \quad \text{(۱۰ نمره)}$$

پاسخ سوال ۲-

$$y^{'}=\frac{u^{'}}{u^2}\frac{du}{dx}-\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}$$
$$x^2+\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2=\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2-\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}$$
$$\frac{d^2u}{dx^2}+x^2u=0 \quad \text{(۵ نمره)} \qquad (1)$$

$$u^{'}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}w\left(\frac{x^2}{2}\right)+x^{\frac{3}{2}}w^{'}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$u''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}w\left(\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}w^{'}\left(\frac{x^2}{2}\right)+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}w^{'}\left(\frac{x^2}{2}\right)+x^{\frac{5}{2}}w''\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad (2)$$

(2) را در (1) قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$x^{\frac{5}{2}}w''\left(\frac{x^2}{2}\right)+2x^{\frac{1}{2}}w^{'}\left(\frac{x^2}{2}\right)+x^{-\frac{3}{2}}\left(x^4-\frac{1}{4}\right)w\left(\frac{x^2}{2}\right)=0$$
$$\Rightarrow \quad x^4w''\left(\frac{x^2}{2}\right)+2x^2w^{'}\left(\frac{x^2}{2}\right)+\left(x^4-\frac{1}{4}\right)w\left(\frac{x^2}{2}\right)=0 \quad \text{(۱۵ نمره)}$$
$$\frac{x^2}{2}=t\Rightarrow \quad x^4=4t^2$$

پس معادله فوق به‌صورت زیر در می‌آید

$$t^2w''+tw^{'}+(t^2-\frac{1}{16})w=0 \qquad \text{معادله بسل است}$$
$$w=c_1J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)+c_2J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$u=x^{\frac{1}{2}}\left(J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)+c_2J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right) \quad \text{(۵ نمره)}$$

به جای $J_{-\frac{1}{4}}$ می‌توانیم $Y_{\frac{1}{4}}$ نیز بنویسیم.

پاسخ سوال۳-از طرفین لاپلاس می‌گیریم. به‌دست می‌آوریم

$$sY-1=\frac{s}{s^2+1}+\frac{sY}{s^2+1}$$
$$\left(s-\frac{s}{s^2+1}\right)Y=\frac{s^2+s+1}{s^2+1}$$
$$\Rightarrow \quad s^3Y=s^2+s+1 \quad \text{(۹ نمره)}$$
$$Y=\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\Rightarrow \quad y=\frac{t^2}{2}+t+1 \quad \text{(۶ نمره)}$$

پاسخ سوال ۴- الف)

$$J_0^{'}(t) = -J_1(t) \Rightarrow \quad \mathcal{L}[J_0^{'}(t)] = \mathcal{L}[J_1(t)]$$
$$\mathcal{L}[J_1(t)] = -s\mathcal{L}[J_0(t)] + \mathcal{L}[J_0(0)] = 1 - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$$ (۴ نمره)

از طرفی

$$\frac{d}{dt}[t^{-1}J_1(t)] = -\frac{1}{t}J_2(t)$$
$$\Rightarrow \quad J_2(t) = -t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}J_1(t)\right)$$ (۴ نمره)
$$\Rightarrow \quad J_2(t) = -t\left(-\frac{1}{t^2}J_1(t) + \frac{1}{t}J_1^{'}(t)\right) = \frac{1}{t}J_1(t) - J_1^{'}(t)$$

$$\mathcal{L}[J_2(t)] = \int_s^{\infty}\left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right)du - \left[s(1 - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}})\right]$$
$$= \frac{(\sqrt{1+s^2}-s)^2}{\sqrt{1+s^2}}$$ (۷ نمره)

ب)

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \mathcal{L}\left[\frac{\sin x}{x}\right]_{s=0}$$
$$= \int_0^{\infty}\frac{1}{1+u^2}du = \tan^{-1}u\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

پاسخ سوال ۵-

$$\det(A - rI) = 0 \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -1-r & 1 \\ -2 & 1-r \end{vmatrix} = 0$$
$$-(1+r)(1-r) + 2 = 0 \Rightarrow \quad r^2 + 1 = 0 \Rightarrow \quad r_1 = i, \quad r_2 = -i$$ (۵ نمره)

$$\begin{bmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -(1+i)v_1 + v_2 = 0 \\ -2v_1 + (1-i)v_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_2 = (1+i)v_1$$
$$V^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ (1+i)v_1 \end{bmatrix} \quad v_1 \neq 0 \Rightarrow \quad V^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$$
$$e^{it}\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} = (\cos t + i\sin t)\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t + i\sin t \\ (1+i)(\cos t + i\sin t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix}$$
$$X_h = c_1\begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix}$$ (۱۰ نمره)

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ \cos t-\sin t & \cos t+\sin t\end{bmatrix}$$ ماتریس اساسی جواب

$$\begin{aligned}X_p&=\varphi(t)\int\varphi^{-1}(t)G(t)dt\\&=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ \cos t-\sin t & \cos t+\sin t\end{bmatrix}\int\begin{bmatrix}\cos t+\sin t & -\sin t\\ \sin t-\cos t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \cot\, t\end{bmatrix}dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_p&=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ \cos t-\sin t & \cos t+\sin t\end{bmatrix}\int\begin{bmatrix}\sin t\\ -\cos t+\csc t\end{bmatrix}dt\\&=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ \cos t-\sin t & \cos t+\sin t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\cos t\\ -\sin t+ln(\csc t-\cot\, t)\end{bmatrix}\\&=-\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t+\sin t\end{bmatrix}ln(\csc t-\cot\, t)\Rightarrow\quad X=X_h+X_p\end{aligned}$$ (۱۰ نمره)

به نام خدا

آزمون پایان ترم معادلات دیفرانسیل

« دانشگاه صنعتی امیرکبیر »

(دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

نام و نام‌خانوادگی: **سه شنبه: ۹۷/۱۰/۲۵**

شماره دانشجویی: **مدت: ۱۲۰ دقیقه**

۱- چهار جمله‌ی اول سریِ جواب معادله دیفرانسیل زیر را حول $x = 0$ بدست آورید. (۲۰ نمره)

$$y'' + x^2y' + y\,sin(x) = 0$$

۲- الف) با فرض این که λ پارامتری حقیقی و غیر صفر باشد مشخص نمایید $x = 0$ چه نوع نقطه‌ای برای معادله‌ی زیر است. (۵ نمره)

$$x^4y'' + \lambda y = 0$$

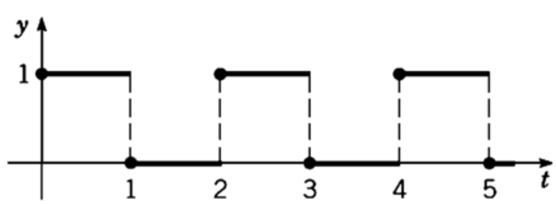
ب) تغییر متغیر $t = \frac{1}{x}$ را روی معادله‌ی قسمت (الف) اعمال کنید و یک جواب معادله‌ی حاصل را به ازای ریشه بزرگتر حول $t = 0$ بدست آورید. شعاع همگرایی سری و فرمول بازگشتی ضرایب را نیز بدست آورید. همچنین تنها فرم جواب دوم و سپس جواب عمومی را بنویسید. (۲۰ نمره)

۳- به کمک تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید. (۲۰ نمره)

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

۴- الف) تبدیل لاپلاس معکوس تابع $F(s) = \sqrt{s-1} - \sqrt{s-2}$ را بدست آورید. (۱۰ نمره)

ب) تبدیل لاپلاس تابع زیر را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)



۵- به کمک روش ماتریسی دستگاه زیر را حل کنید. (۲۵ نمره)

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X(t)$$

موفق باشید.

دی ماه ۹۷

1) $y'' + x^2 y' + y \sin x = 0 \xrightarrow{x=0} y''_{(0)} = 0$

$\quad \hookrightarrow y''' + 2x y' + x^2 y'' + y' \sin x + y \cos x = 0 \xrightarrow{x=0} y'''_{(0)} = -y_{(0)}$

$$y^{(4)} + 2y' + 2x y'' + 2x y'' + x^2 y''' + y'' \sin x + 2y' \cos x - y \sin x = 0$$

$$\xrightarrow{x=0} y^{(4)}_{(0)} + 2y'_{(0)} + 2y'_{(0)} = 0 \longrightarrow y^{(4)}_{(0)} = -4y'_{(0)}$$

$P_{(x)} = 1 \longrightarrow$ عادی $x=0 \longrightarrow y_g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}_{(0)}}{n!} x^n$

$$\longrightarrow y_g = y_{(0)} + y'_{(0)} x + 0 + \frac{y'''_{(0)}}{3!} x^3 + \frac{y^{(4)}_{(0)}}{4!} x^4 + \cdots$$

$$\xrightarrow[y'_{(0)} = a_1]{y_{(0)} = a_0} y_g = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{3!} x^3 - \frac{a_1}{3!} x^4 + \cdots$$

۲) $x^4 y'' + \lambda y = 0$

الف) $P(x) = x^4 = 0 \longrightarrow$ منفرد $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0} x\left(\frac{0}{x^4}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} x^2\left(\frac{\lambda}{x^4}\right) = \infty \longrightarrow$ $x=0$ منفرد نامنظم

ب) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -x^{-2}\dot{y}$

$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-x^{-2}\dot{y}\right) = 2x^{-3}\dot{y} + x^{-4}\ddot{y}$

جایگذاری در معادله: $\ddot{y} + 2x\dot{y} + \lambda y = 0 \longrightarrow t\ddot{y} + 2\dot{y} + \lambda t y = 0$

$P(t) = t = 0 \longrightarrow$ منفرد $t=0$

$\left.\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} t\left(\frac{2}{t}\right) = 2 \\ &\lim_{t\to 0} t^2(\lambda) = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow$ منفرد منظم $t=0 \longrightarrow y_g = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}$

$\dot{y} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1}$

$\ddot{y} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-2}$

جایگذاری در معادله: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-1} + 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} + \lambda \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r+1} = 0$

$n+r-1$ $\quad n=2 \quad n-2$

$r(r-1)a_0 t^{r-1} + r(r+1)a_1 t^{r} + 2ra_0 t^{r-1} + 2(r+1)a_1 t^{r}$

$+ \sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[(n+r)(n+r+1)a_n + \lambda a_{n-2}\right] t^{n+r-1} = 0$

t^{r-1} ضریب $=0 \longrightarrow r(r+1)a_0=0 \xrightarrow{a_0\neq 0}$ معادله‌ی شاخص: $r(r+1)=0 \longrightarrow \begin{cases} r_1=0 \\ r_2=-1 \end{cases}$

t^{r} ضریب $=0 \longrightarrow (r+1)(r+2)a_1=0 \quad (*)$

t^{n+r-1} ضریب $=0 \longrightarrow a_n=\dfrac{-\lambda a_{n-2}}{(n+r)(n+r+1)} \quad (**)$

$r_1=0$:

$$\xrightarrow{(*)} 2a_1=0 \longrightarrow a_1=0 \xrightarrow{(**)} a_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,\dots)$$

$$\xrightarrow{(**)} a_{2n}=\frac{-\lambda a_{2(n-1)}}{2n(2n+1)} \quad (n=1,2,\dots) \longrightarrow \begin{cases} a_2=\dfrac{-\lambda a_0}{3!} \\ a_4=\dfrac{-\lambda a_2}{5\times 4}=\dfrac{+\lambda a_0}{5!} \end{cases}$$

$\vdots$

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n a_0}{(2n+1)!}\lambda \quad (n=1,2,\dots)$$

$$y_1=a_0+a_2t^2+a_4t^4+\dots+a_{2n}t^{2n}+\dots=a_0\left(1-\frac{\lambda}{3!}t^2+\frac{\lambda}{5!}t^4+\dots+\frac{(-1)^n\lambda}{(2n+1)!}t^{2n}+\dots\right)$$

فرم جواب دوم: $y_2=cy_1\operatorname{Ln}x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+r_2}=cy_1\operatorname{Ln}x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-1}$

فرم جواب عمومی: $y_g=c_1y_1+c_2y_2=c_1y_1+c_2\left(cy_1\operatorname{Ln}x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-1}\right)$

شعاع همگرایی y_1 ، y_1 چندجمله‌ای است $\longleftarrow R_{y_1}=\infty$

۳) $\begin{cases} y'' + ۲y' + ۲y = \delta(t-\pi) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \xrightarrow{L} s^{۲}Y(s) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} + ۲(sY(s) - \cancel{y(0)}) + ۲Y(s) = e^{-\pi s}$

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^{۲} + ۲s + ۲} = \frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^{۲} + 1} \quad (A)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^{۲}+1}\right\} = e^{-t} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{۲}+1}\right\} = e^{-t} \cdot \sin t \quad (B)$$

$$\xrightarrow{(A),(B)} y_p(t) = U_{\pi}(t) \cdot e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi) = -U_{\pi}(t) \cdot e^{\pi - t} \sin t$$

۴)

الف) $L^{-1}\left\{\sqrt{s-1}-\sqrt{s-۲}\right\}=L^{-1}\left\{\sqrt{s-1}\right\}-L^{-1}\left\{\sqrt{s-۲}\right\}=\left(e^{t}-e^{۲t}\right)L^{-1}\left\{\sqrt{s}\right\}$ Ⓐ

$$L\left\{t^{p}\right\}=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}\xrightarrow{p=-\frac{۳}{۲}}L\left\{t^{-\frac{۳}{۲}}\right\}=\frac{\Gamma(-\frac{1}{۲})}{s^{-\frac{1}{۲}}}=-۲\sqrt{\pi}\sqrt{s}\rightarrow L^{-1}\left\{\sqrt{s}\right\}=\frac{t^{-\frac{۳}{۲}}}{-۲\sqrt{\pi}}$$ Ⓑ

$$\xrightarrow{Ⓐ, Ⓑ}L^{-1}\left\{\sqrt{s-1}-\sqrt{s-۲}\right\}=\frac{t^{-\frac{۳}{۲}}}{-۲\sqrt{\pi}}\left(e^{t}-e^{۲t}\right)$$

ب) $L\left\{f(t)\right\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt\xrightarrow{T=۲}L\left\{f(t)\right\}=\frac{1}{1-e^{-۲s}}\int_0^۲ e^{-st}f(t)\,dt$

$$\longrightarrow L\left\{f(t)\right\}=\frac{1}{1-e^{-۲s}}\int_0^1 e^{-st}\,dt=\frac{-1}{s(1-e^{-۲s})}e^{-st}\Big|_{t=0}^{1}=\frac{-(e^{-s}-1)}{s(1-e^{-۲s})}$$

$$\longrightarrow L\left\{f(t)\right\}=\frac{1}{s(1+e^{-s})}$$

Scanned by CamScanner

ه) $X'_{(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} X_{(t)}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\det(A-\lambda I)=0} (\lambda+1)(\lambda+2-\lambda^2)=0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1=\lambda_2=-1 \\ \lambda_3=2 \end{cases}$$

$$(A-\lambda_1 I)V_1=\bar{0} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

به همین ترتیب $V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ مستقل خطی با V_1، به دست می‌آیند.

$$X_g = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 V_3 e^{\lambda_3 t}$$

$$\longrightarrow X_g = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} \\ -c_1 e^{-t} - c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} \\ -c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

خرداد ۹۸

۱ـ الف)

$$y'' - \frac{۲x}{۱-x^۲}y' + \frac{۶}{۱-x^۲}y = ۰$$

توابع $p(x) = -\frac{۲x}{۱-x^۲}$ و $q(x) = \frac{۶}{۱-x^۲}$ در نقاط $x = \pm ۱$ تعریف نشده هستند. از طرفی

$$\lim_{x\to ۱}(x-۱)p(x) = \lim_{x\to ۱}(x-۱) \times \left(-\frac{۲x}{۱-x^۲}\right) = ۱$$
$$\lim_{x\to ۱}(x-۱)^۲q(x) = \lim_{x\to ۱}(x-۱)^۲ \times \frac{۶}{۱-x^۲} = ۰$$
$$\lim_{x\to -۱}(x+۱)p(x) = \lim_{x\to -۱}(x+۱) \times \left(-\frac{۲x}{۱-x^۲}\right) = ۱$$
$$\lim_{x\to -۱}(x+۱)^۲q(x) = \lim_{x\to -۱}(x+۱)^۲ \times \frac{۶}{۱-x^۲} = ۰$$

پس نقاط $x = \pm ۱$ نقاط منفرد معادله می‌باشند.
ب) داریم $p_۰ = ۱$ و $q_۰ = ۰$ در نتیجه

$$r(r-۱) + p_۰ r + q_۰ = ۰ \quad \Rightarrow \quad r^۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad r = r_۱ = r_۲ = ۰$$

ج)

$$y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-۱)^n \quad \Rightarrow \quad y_۱' = \sum_{n=۰}^{\infty} na_n(x-۱)^{n-۱} \quad \Rightarrow \quad y_۱'' = \sum_{n=۰}^{\infty} n(n-۱)a_n(x-۱)^{n-۲}$$

$$-\sum_{n=۰}^{\infty} n(n-۱)a_n(x-۱)^n - ۲\sum_{n=۰}^{\infty} n(n-۱)a_n(x-۱)^{n-۱} - ۲\sum_{n=۰}^{\infty} na_n(x-۱)^n - ۲\sum_{n=۰}^{\infty} na_n x^{n-۱} + ۶\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-۱)^n = ۰$$

$$a_{n+۱} = -\frac{(n+۳)(n-۲)}{۲(n+۱)^۲}a_n$$
$$\Rightarrow \quad a_۱ = ۳a_۰$$
$$\Rightarrow \quad a_۲ = \frac{۳}{۲}a_۰$$
$$\Rightarrow \quad a_n = ۰ \quad n \geq ۳$$
$$\Rightarrow y_۱ = a_۰\left(۱ + ۳(x-۱) + \frac{۳}{۲}(x-۱)^۲\right)$$

$$y_۲ = y_۱ \ln(x-۱) + \sum_{n=۰}^{\infty} b_n(x-۱)^n$$

۲ـ الف) $x=0$ یک نقطه عادی برای معادله است پس

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a_2 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (na_n + \frac{(-1)^n}{n!}) \right] x^n = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_2=\frac{1}{2}, \quad a_{n+2}=\frac{na_n+\frac{(-1)^n}{n!}}{(n+1)(n+2)}$$

ب)

$$a_3=\frac{a_1-1}{6}$$

$$\Rightarrow y=a_0+a_1x+\frac{1}{2}x^2+\frac{a_1-1}{6}x^3$$

۳ـ الف)

$$
\begin{aligned}
I &= L\{t\cos^{۲} t\}\Big|_{s=۲} \\
&= -\frac{d}{ds}\left(L\{\frac{۱+\cos ۲t}{۲}\}\right)\Big|_{s=۲} \\
&= -\frac{۱}{۲}\frac{d}{ds}\left(\frac{۱}{s}+\frac{s}{s^{۲}+۴}\right)\Big|_{s=۲} \\
&= -\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{s^{۲}}+\frac{۴-s^{۲}}{(s^{۲}+۴)^{۲}}\right)\Big|_{s=۲} = \frac{۱}{۸}
\end{aligned}
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
&L^{-۱}\left\{e^{-s}\ln\left(\frac{s+۱}{s-۱}\right)\right\} = u_{۱}(t)f(t-۱) \\
&f(t) = L^{-۱}\left\{\ln\left(\frac{s+۱}{s-۱}\right)\right\} = L^{-۱}\{\ln(s+۱)-\ln(s-۱)\} \\
&L^{-۱}\{\ln(s+۱)\} = -\frac{۱}{t}L^{-۱}\left\{\frac{d}{ds}\ln(s+۱)\right\} = -\frac{۱}{t}L^{-۱}\left\{\frac{۱}{s+۱}\right\} = -\frac{۱}{t}e^{-t} \\
&L^{-۱}\{\ln(s-۱)\} = -\frac{۱}{t}L^{-۱}\left\{\frac{d}{ds}\ln(s-۱)\right\} = -\frac{۱}{t}L^{-۱}\left\{\frac{۱}{s-۱}\right\} = -\frac{۱}{t}e^{t} \\
&\Rightarrow \quad f(t) = \frac{۱}{t}(e^{t}-e^{-t}) = \frac{۲\sinh t}{t} \\
&\Rightarrow L^{-۱}\left\{e^{-s}\ln\left(\frac{s+۱}{s-۱}\right)\right\} = \frac{۲u_{۱}(t)\sinh(t-۱)}{t-۱}
\end{aligned}
$$

۴ـ فرض می‌کنیم $F(s) = L\{y(t)\}$ در نتیجه

$$sF(s) + \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s} - \frac{F(s)}{s}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{s^2+1}{s}\right) F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = tL^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{u}{(u^2+1)^2}du\right\} = \frac{t}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \frac{t}{2}\sin t$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \sin t - \frac{t}{2}\sin t$$

۵-

$$|A-\lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

$$(A-2I)V_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow v_2 = -v_1$$

$$v_1 = 1 \quad \Rightarrow v_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^2 V_2 = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_h = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2(1-t)e^{2t} \\ -c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} \end{pmatrix}$$

راه حل اول برای بدست آوردن Y_p:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & (1-t)e^{2t} \\ -e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}$$

$$|\varphi(t)| = te^{4t} + e^{4t} - te^{4t} = e^{4t}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi^{-1}(t) = e^{-4t}\begin{pmatrix} te^{2t} & (t-1)e^{2t} \\ e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{-2t} & (t-1)e^{-2t} \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{-1}(t)f(t) = \begin{pmatrix} te^{-2t} & (t-1)e^{-2t} \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1+e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^2 e^{-2t} + (t-1)e^{-2t} + (t-1)e^{-t} \\ (t+1)e^{-2t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$V(t) = \int \varphi^{-1}(t)f(t)dt = \int \begin{pmatrix} t^2 e^{-2t} + (t-1)e^{-2t} + (t-1)e^{-t} \\ (t+1)e^{-2t} + e^{-t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2}e^{-2t} - te^{-2t} - te^{-t} \\ -\frac{t}{2}e^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$Y_p = \varphi(t)V(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & (1-t)e^{2t} \\ -e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2}e^{-2t} - te^{-2t} - te^{-t} \\ -\frac{t}{2}e^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}t - e^t \\ \frac{t}{4} \end{pmatrix}$$

راه حل دوم برای بدست آوردن Y_p:

$$Y_p = \begin{pmatrix} At + B + Ce^t \\ Dt + E + Fe^t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A + Ce^t \\ D + Fe^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} At + B + Ce^t \\ Dt + E + Fe^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 + e^t \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&A+Ce^t = At+B+Ce^t-Dt-E-Fe^t+t\\
&D+Fe^t = At+B+Ce^t+۳Dt+۳E+۳Fe^t+۱+e^t\\
&\Rightarrow \quad A=(A-D+۱)t+(B-E)-Fe^t \quad \Rightarrow \quad F=۰\\
&\Rightarrow \quad A-D=-۱ \quad (۱) \qquad A=B-E \quad (۲)\\
&D=(A+۳D)t+(B+۳E+۱)+(C+۱)e^t \quad \Rightarrow \quad C=-۱\\
&\Rightarrow \quad A+۳D=۰ \quad (۳), \qquad D=B+۳E+۱ \quad (۴)
\end{aligned}
$$

$$(۱),(۳) \Rightarrow \quad \begin{cases} A-D=-۱ \\ A+۳D=۰ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D=\frac{۱}{۴}, \quad A=-\frac{۳}{۴}$$

$$(۲),(۴) \Rightarrow \quad \begin{cases} B+۳E=-\frac{۳}{۴} \\ B-E=-\frac{۳}{۴} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E=۰, \quad B=-\frac{۳}{۴}$$

$$Y_p=\begin{pmatrix} -\frac{۳}{۴}-\frac{۳}{۴}t-e^t \\ \frac{t}{۴} \end{pmatrix}$$

$$Y=Y_h+Y_p=\begin{pmatrix} c_۱e^{۲t}+c_۲(۱-t)e^{۲t}-e^t-\frac{۳}{۴}t-\frac{۳}{۴} \\ -c_۱e^{۲t}+c_۲te^{۲t}+\frac{t}{۴} \end{pmatrix}$$

$$Y(۰)=\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_۱+c_۲-\frac{۷}{۴} \\ -c_۱ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_۱=۱, \quad c_۲=\frac{۷}{۴}$$

$$Y=\begin{pmatrix} e^{۲t}+\frac{۷}{۴}(۱-t)e^{۲t}-e^t-\frac{۳}{۴}t-\frac{۳}{۴} \\ -e^{۲t}+\frac{۷}{۴}te^{۲t}+\frac{t}{۴} \end{pmatrix}$$

حل دستگاه به‌روش لاپلاس:

$$\begin{cases} y_۱'=y_۱-y_۲+t \\ y_۲'=y_۱+۳y_۲+۱+e^t \end{cases} , \quad \begin{cases} y_۱(۰)=۱ \\ y_۲(۰)=-۱ \end{cases}$$

فرض می‌کنیم $L\{y_۱(t)\}=Y_۱(s)$ و $L\{y_۲(t)\}=Y_۲(s)$. داریم:

$$\begin{cases} sY_۱(s)-۱=Y_۱(s)-Y_۲(s)+\frac{۱}{s^۲} \\ sY_۲(s)+۱=Y_۱(s)+۳Y_۲(s)+\frac{۱}{s}+\frac{۱}{s-۱} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (s-۱)Y_۱(s)+Y_۲(s)=\frac{s^۲+۱}{s^۲} \\ -Y_۱(s)+(s-۳)Y_۲(s)=\frac{۳s-۱-s^۲}{s(s-۱)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Y_۱(s)=\frac{\begin{vmatrix}\frac{s^۲+۱}{s^۲} & ۱\\ \frac{۳s-۱-s^۲}{s(s-۱)} & s-۳\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-۱ & ۱\\ -۱ & s-۳\end{vmatrix}}=\frac{s^۴-۳s^۳+s^۲-۳s+۳}{s^۲(s-۱)(s-۲)^۲}$$

$$=-\frac{\frac{۳}{۴}}{s}-\frac{\frac{۳}{۴}}{s^۲}-\frac{۱}{s-۱}+\frac{\frac{۱۱}{۴}}{s-۲}-\frac{\frac{۷}{۴}}{(s-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow \quad y_۱(t)=L^{-۱}\{Y_۱(s)\}=\frac{۱۱}{۴}e^{۲t}-\frac{۷}{۴}te^{۲t}-e^t-\frac{۳}{۴}t-\frac{۳}{۴}$$

$$Y_۲(s)=\frac{\begin{vmatrix}s-۱ & \frac{s^۲+۱}{s^۲}\\ -۱ & \frac{۳s-۱-s^۲}{s(s-۱)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-۱ & ۱\\ -۱ & s-۳\end{vmatrix}}=\frac{-s^۳+۴s^۲-s+۱}{s^۲(s-۲)^۲}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۴}}{s^۲}-\frac{۱}{s-۲}+\frac{\frac{۷}{۴}}{(s-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow y_۲(t)=L^{-۱}\{Y_۲(s)\}=-e^{۲t}+\frac{۷}{۴}te^{۲t}+\frac{t}{۴}$$