جزوه معادلات دیفرانسیل

دکتر واعظ پور

تبدیل های لاپلاس

تبدیل لاپلاس

یکی از ابزارهایی که معمولاً در ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرد "تبدیل"ها هستند. تبدیل‌هایی که یک معادله پیچیده را به یک معادله ساده‌تر تبدیل می‌کند و پس این معادله ساده‌تر را حل کرده و جواب آنرا به دست می‌آوریم و پس با استفاده از معکوس آن تبدیل، نتیجه دلخواه را به دست آورد.

یکی از انواع تبدیلات که در حل معادلات دیفرانسیل بسیار مفیدند، تبدیلات انتگرال هستند. یک تبدیل انتگرال رابطه‌ای است به صورت

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t) dt$$

که تابع $f(t)$ را به تابع $F(s)$ تبدیل می‌کند.

$K(s,t)$ تابع داده شده‌ای است به نام هسته تبدیل و حدود انتگرال‌گیری α و β نیز داده شده‌اند و می‌توانند مقادیر $+\infty$ یا $-\infty$ را نیز اختیار کنند.

حالت خاصی از این تبدیل انتگرال زمانی است که $\beta = +\infty$ ، $\alpha = 0$ و $K(s,t) = e^{-st}$ یا به عبارتی

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

این تبدیل را تبدیل لاپلاس گویند و با $(f(t))$ لا نمایش می‌دهند

L2

خاصیت اصلی این تبدیل آن است که معادله دیفرانسیل را به یک معادله جبری تبدیل می کند.

زیرا:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-st} f'(t)\,dt$$

$$= \lim_{A\to+\infty} e^{-st} f(t)\Big|_0^A + \lim_{A\to+\infty} s\int_0^A e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left[e^{-sA} f(A) - f(0)\right] + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= -f(0) + s\,\mathcal{L}(f(t)) = s\,\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

و به سادگی نتیجه می شود که:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s\,\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0)$$

$$= s\left[s\,\mathcal{L}(f(t)) - f(0)\right] - f'(0)$$

$$= s^2\mathcal{L}(f(t)) - s f(0) - f'(0)$$

و با ادامه این روند نتیجه می شود که:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

L3

چند نکته

۱- $\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$ یک انتگرال ناسره است و طبق آنچه در ریاضی عمومی ۱ خوانده‌اید به صورت $\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{-st}f(t)dt$ تعریف می‌شود که اگر این حد وجود داشته باشد آن انتگرال را همگرا گوییم.

۲- یکی از شرایطی برای تابع f که در شرط همگرایی انتگرال ناسره تبدیل لاپلاس مورد استفاده قرار می‌گیرد، شرط پیوسته قطعه‌ای (یا قطعه‌ای پیوسته) تابع f است.
تابع f را در $[0,+\infty)$ پیوسته قطعه‌ای گوییم اگر در فاصله $[0,A]$ حداکثر تعداد متناهی ناپیوستگی داشته باشد و در هر نقطه ناپیوستگی، حد چپ و راست وجود داشته باشد.

۳- تابع f را در $[0,+\infty)$ از رشد نمایی گوییم اگر اعداد ثابت M و a وجود داشته باشند که برای هر $0\le x<\infty$

$$|f(x)|\le Me^{ax}$$

٤- اگر تابع f در $[0,+\infty)$ پیوسته قطعه‌ای باشد و از رشد نمایی ($|f(x)|\le Me^{ax}$) باشد آنگاه تبدیل لاپلاس f برای $s>a$ وجود دارد.

۵- به عنوان نتیجه‌ای از نکته ٤ داریم که اگر $f(x)$ در شرایط نکته ٤ صدق کند و $F(s)=L(f(t))$ آنگاه $\lim_{s\to+\infty}F(s)=0$.

چند مثال

مثال ۱: اگر $f(t)=1$ آنگاه:

$$\mathcal{L}(1)=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-st}\,dt=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-As}+\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}$$

مثال ۲: اگر $f(t)=e^{at}$ آنگاه

$$\mathcal{L}(e^{at})=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-st}\cdot e^{at}\,dt$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{s-a}\left[1-e^{-(s-a)A}\right]=\frac{1}{s-a}\quad s>a.$$

مثال ۳: اگر $f(t)=t^a$ آنگاه:

$$\mathcal{L}[t^a]=\int_0^\infty e^{-st}t^a\,dt$$

با تغییر متغیر $st=u$ داریم:

$$=\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^a\frac{du}{s}=\frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-u}.u^a\,du\quad s>0$$

$$=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\quad s>0$$

مثال ۴: اگر $f(t)=t^n$ آنگاه $\mathcal{L}(t^n)=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

L5

تعمیم: $L(c_1 f(t) + c_2 g(t)) = c_1 L(f(t)) + c_2 L(g(t))$

یا به عبارتی L یک تبدیل خطی است.

مثال: $L(\cos at) + i\, L(\sin at) = L(\cos at + i \sin at)$

$$= L(e^{iat}) = \frac{1}{s - ia} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2}$$

در نتیجه:

$$L(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2} \quad , L(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

مثال:

$$L(\sin^2 at) = L\left(\frac{1-\cos 2at}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} L(1) - \frac{1}{2} L[\cos 2at]$$

$$= \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4a^2)}$$

مثال:

$$L(\sinh at) = L\left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{2} L(e^{at}) - \frac{1}{2} L(e^{-at})$$

$$= \frac{1}{2(s-a)} - \frac{1}{2(s+a)} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

به طور مشابه:

$$L(\cosh at) = \frac{s}{s^2-a^2}$$

L6

حل مسائل مقدار اولیه با استفاده از لاپلاس

مثال: با استفاده از تبدیل لاپلاس مسائل مقدار اولیه

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = -1 \quad y'(0) = 0$$

حل: از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم داریم که

$$\mathcal{L}(y'' - y' - 2y) = L(0) = 0$$

$$\mathcal{L}(y'') - L(y') - 2L(y) = 0$$

$$s^2 \mathcal{L}(y) - s y(0) - y'(0) - \left(sL(y) - y(0)\right) - 2\mathcal{L}(y) = 0$$

$$(s^2 - s - 2)\mathcal{L}(y) = -s+1$$

در نتیجه:

$$L(y) = \frac{-s+1}{s^2 - s - 2} = \frac{1-s}{(s-2)(s+1)}$$

اکنون کسر سمت راست را به کسرهای جزئی تجزیه می‌کنیم (مشابه انتگرالگیری)

$$\frac{1-s}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow A(s+1) + B(s-2) = 1-s$$

اگر قرار دهیم $s=-1$ نتیجه می‌شود $B = -\frac{2}{3}$ و اگر $s=2$ نتیجه می‌شود $A = -\frac{1}{3}$.

بنابراین:

$$L(y) = \frac{-\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{-\frac{2}{3}}{s+1}$$

$$y = -\frac{1}{3} L^{-1} \frac{1}{s-2} - \frac{2}{3} L^{-1} \frac{1}{s+1} = -\frac{1}{3} e^{2x} - \frac{2}{3} e^{-x}.$$

مثال : با استفاده از تبدیل لاپلاس مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y''+y=\sin 2x \qquad y(0)=0 \quad y'(0)=1$$

حل :

$$L(y'')+L(y)=L(\sin 2x)$$

$$s^2 L(y) - sy(0) - y'(0) + L(y) = \frac{2}{s^2+4}$$

پس از قرار دادن شرایط اولیه و مرتب نمودن جملات داریم :

$$L(y)(s^2+1) = \frac{2}{s^2+4}+1$$

$$L(y)=\frac{s^2+6}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

حال کسر سمت راست را به کسرهای جزئی تجزیه می کنیم :

$$\frac{s^2+6}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

با ضرب طرفین در مخرج مشترک و مساوی قرار دادن صورت کسرها داریم :

$$(As+B)(s^2+1)+(Cs+D)(s^2+4)=s^2+6$$

اگر قرار دهیم $s=i$ سمت چپ خواهد بود $(iC+D)(3)=5$ در نتیجه $C=0$ ، $D=\frac{5}{3}$

اگر قرار دهیم $s=2i$ سمت چپ خواهد بود $(2iA+B)(-3)=2$ در نتیجه $A=0$ ، $B=-\frac{2}{3}$

پس

$$L(y)=\frac{\frac{5}{3}}{s^2+1} - \frac{\frac{2}{3}}{s^2+4}$$

در نتیجه

$$y=\frac{5}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)-\frac{2}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)=\frac{5}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t$$

18

چند خاصیت تبدیل لاپلاس

قضیه: اگر $L(f(t))=F(s)$ آنگاه $L(e^{at}f(t))=F(s-a)$

(اثبات به راحتی با استفاده از تعریف حاصل می‌شود)

مثال: لاپلاس $e^{3t}\cos 2t$ را بیابید.

$$L(\cos 2t)=\frac{s}{s^2+4}=F(s)$$

درنتیجه

$$L(e^{3t}\cos 2t)=F(s-3)=\frac{s-3}{(s-3)^2+4}$$

مثال: تبدیل معکوس لاپلاس $\frac{1}{s^2-4s+5}$ را بیابید.

حل:

$$\frac{1}{s^2-4s+5}=\frac{1}{(s-2)^2+1}$$

فرض می‌کنیم $F(s)=\frac{1}{s^2+1}$ درنتیجه $f(t)=L^{-1}[F(s)]=\sin t$

لذا:

$$L^{-1}\frac{1}{(s-2)^2+1}=L^{-1}(F(s-2))=e^{2t}f(t)$$

$$=e^{2t}\sin t$$

مثال: $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-5)^7}\right)=?$

قرار می‌دهیم $F(s)=\frac{1}{s^7}$ درنتیجه $f(t)=L^{-1}(F(s))=\frac{t^6}{6!}$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{(s-5)^7}\right)=L^{-1}(F(s-5))=e^{5t}f(t)=e^{5t}\cdot\frac{1}{6!}t^6$$

مثال : $L^{-1} \dfrac{s}{s^2-2s+3} = ?$

حل : $\dfrac{s}{s^2-2s+3} = \dfrac{s}{(s-1)^2+2} = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+2} + \dfrac{1}{(s-1)^2+2}$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2-2s+3}\right) = L^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} L^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{(s-1)^2+2}\right)$$

$$= e^t L^{-1} \frac{s}{s^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^t L^{-1} \frac{\sqrt{2}}{s^2+2}$$

$$= e^t \cos\sqrt{2}t + \frac{e^t}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}t$$

نکته : توجه کنید $L(e^{at}f(t)) = F(s-a)$ را می توان به صورت

$$L^{-1}(F(s-a)) = e^{at} L^{-1}(F(s))$$

نوشت. در مثال بالا از این فرمول استفاده شده است.

(41)

قضیه: اگر $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ آنگاه

$$\mathcal{L}(-t f(t)) = \frac{d}{ds} F(s) = F'(s)$$

یا به عبارتی

$$\mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = -t f(t).$$

نتیجه: با استفاده مکرر از قضیه بالا نتیجه میشود که:

$$\mathcal{L}((-1)^n t^n f(t)) = \frac{d^n}{ds^n} F(s) = F^{(n)}(s)$$

یا به طور معادل

$$\mathcal{L}^{-1}(F^{(n)}(s)) = (-1)^n t^n f(t)$$

مثال:

$$\mathcal{L}(t \sin at) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\sin at)$$

$$= -\frac{d}{ds}\frac{a}{s^2+a^2} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

مثال:

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}(e^{at})$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{s-a}$$

$$= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

مثال: تبدیل معکوس لاپلاس $\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$ را پیدا کنید

حل: توجه کنید که

$$\left(\tan^{-1}\frac{a}{s}\right)' = \frac{\frac{-a}{s^2}}{1+\left(\frac{a}{s}\right)^2}$$

$$= \frac{-a}{s^2+a^2}$$

درنتیجه

$$L^{-1}\left(\tan^{-1}\frac{a}{s}\right)' = L^{-1}\frac{-a}{s^2+a^2} = -\sin at$$

از طرفی می‌دانیم که

$$L^{-1}(F'(s)) = -t f(t) \Leftrightarrow L^{-1}(F(s)) = f(t)$$

بنابراین اگر $L^{-1}\left(\tan^{-1}\frac{a}{s}\right) = f(t)$ آنگاه

$$-\sin at = L^{-1}\left(\tan^{-1}\frac{a}{s}\right)' = -t f(t)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{\sin at}{t}$$

تقسیم : اگر $F(s)=L(f(t))$ آنگاه .

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_s^{+\infty}F(u)\,du$$

مثال :

$$L\left(\frac{\sin at}{t}\right)=\int_s^{+\infty}\frac{a}{u^2+a^2}\,du=\tan^{-1}\frac{a}{s}$$

مثال : با استفاده از تبدیل لاپلاس $\int_0^{+\infty}\frac{\sin at}{t}dt$ را بیابید.

حل : بنابر مثال قبل :

$$L\left(\frac{\sin at}{t}\right)=\tan^{-1}\frac{a}{s}$$

از طرفی

$$L\left(\frac{\sin at}{t}\right)=\int_0^{\infty}e^{-st}\,\frac{\sin at}{t}\,dt$$

بنابراین :

$$\int_0^{\infty}e^{-st}\,\frac{\sin at}{t}\,dt=\tan^{-1}\frac{a}{s}$$

حال اگر $s\to 0$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin at}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

L13

لاپلاس - توابع پله‌ای

در بسیاری از کاربردها تابع سمت راست معادله دیفرانسیل

$$ay''+by'+cy=f(x)$$

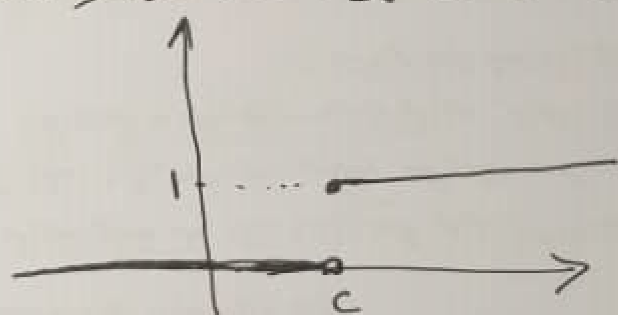
در یک یا چند نقطه ناپیوستگی جهشی دارد، مثلاً ذره‌ای که تحت تاثیر نیروی $f_1(x)$ حرکت می‌کند ناگهان تحت تاثیر یک نیروی دیگر $f_2(x)$ قرار می‌گیرد. حل چنین معادلاتی با استفاده از روشهایی که قبلاً گفته شده قدری پر زحمت است.

این مسئله را می‌توان با استفاده از تبدیل لاپلاس راحت‌تر حل کرد.

ساده‌ترین مثال از تابعی که یک ناپیوستگی جهشی دارد تابع پله‌ای یکه است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_c(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<c\\ 1 & x>c\end{cases}$$

که در آن c عدد ثابت مثبت است. نمودار $u_c(x)$ به شکل زیر است:



تبدیل لاپلاس u_c عبارت است از:

$$\mathcal{L}(u_c(x))=\int_0^{\infty}e^{-sx}u_c(x)\,dx=\int_c^{+\infty}e^{-sx}\,dx$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{s}\left[e^{-cs}-e^{-sA}\right]$$

$$=\frac{e^{-cs}}{s}\qquad s>0$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 3 \\ 0 & x \geq 3 \end{cases}$$

حل:

$$f(x) = x \cdot \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 3 \\ 0 & x \geq 3 \end{cases} = x\left(u_0(x) - u_3(x)\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f(x)) = \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(x\,u_3(x))$$

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{d}{ds}\mathcal{L}(u_3(x))$$

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-3s}}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{3e^{-3s} + e^{-3s}}{s^2}$$

مثال: تابع زیر را برحسب تابع پله‌ای نوشته و تبدیل لاپلاس آن را حساب کنید

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \le x < 1 \\ 2 & 1 \le x < 3 \\ 5 & 3 \le x < 4 \\ -3 & x \ge 4 \end{cases}$$

حل: می‌توان نوشت:

$$f(x) = 3\left(u_0(x) - u_1(x)\right) + 2\left(u_1(x) - u_3(x)\right) + 5\left(u_3(x) - u_4(x)\right) - 3u_4(x)$$

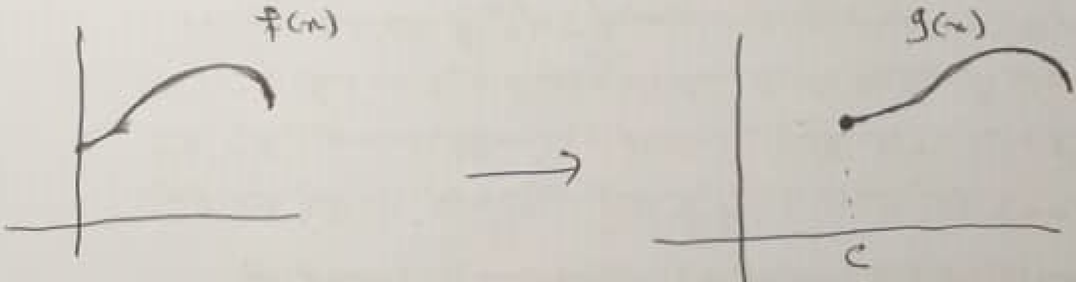
در نتیجه:

$$\mathcal{L}(f(x)) = 3\mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(u_1(x)) + 3\mathcal{L}(u_3(x)) - 8\mathcal{L}(u_4(x))$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f(x)) = \frac{3}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + 3\frac{e^{-3s}}{s} - 8\frac{e^{-4s}}{s}$$

فرض کنید f تابعی باشد روی $[0,+\infty)$ تعریف شده است و g تابعی است که از انتقال f به اندازه c واحد به سمت راست بدست آمده است

یعنی:



در این صورت:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < c \\ f(x-c) & x \ge c \end{cases}$$

تابع $g(x)$ را با استفاده از تابع پله‌ای بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$g(x) = u_c(x)\, f(x-c)$$

قضیه زیر تبدیل لاپلاس تابع g یا انتقال یافته تابع f را مشخص می‌کند.

قضیه: اگر $\mathcal{L}(f(x)) = F(s)$ آنگاه:

$$\mathcal{L}\left(u_c(x)\, f(x-c)\right) = e^{-cs} F(s)$$

اثبات:

$$\mathcal{L}\left(u_c(x)\, f(x-c)\right) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} u_c(x) f(x-c)\, dx$$

$$= \int_c^{+\infty} e^{-sx} f(x-c)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s(t+c)} f(t)\, dt$$

$$= e^{-cs} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= e^{-cs} F(s)$$

(47)

مثال: تبدیل لاپلاس $u_{\frac{\pi}{2}} \sin x$ را بیابید.

حل:

$$\mathcal{L}\left(u_{\frac{\pi}{2}}(x)\sin x\right) = \mathcal{L}\left(u_{\frac{\pi}{2}}(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}s}\,\mathcal{L}(\cos x)$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}s}\,\frac{s}{s^2+1}$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x < \pi/2 \\ \sin x + \cos x & x \geq \pi/2 \end{cases}$$

حل:

$$f(x) = \sin x + \begin{cases} 0 & 0 \le x < \pi/2 \\ \cos x & x \geq \pi/2 \end{cases}$$

$$= \sin x + \cos x \cdot \begin{cases} 0 & 0 \le x < \pi/2 \\ 1 & x \geq \pi/2 \end{cases}$$

$$= \sin x + u_{\frac{\pi}{2}}(x)\cos x$$

$$= \sin x - u_{\pi/2}(x)\sin\left(x-\pi/2\right)$$

$$\mathcal{L}(f(x)) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi/2\, s}}{1+s^2}$$

(48)

مثال: تبدیل معکوس $\dfrac{1-e^{-2s}}{s^2}$ را بیابید.

حل:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$$= x - u_2(x)(x-2)$$

مثال: تبدیل معکوس تابع زیر را بیابید

$$F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2-4s+5}$$

حل:

$$F(s) = \frac{e^{-3s}}{(s-2)^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{(s-2)^2+1}\right) = u_3(x)\,G(x-3)$$

که $G(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1}\right)$ از طرفی

$$G(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1}\right) = e^{2x}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+1}$$

$$= e^{2x}\sin x$$

بنابراین:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = u_3(x)\,e^{2(x-3)}\sin(x-3)$$

مثال : معادله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y''+y=\begin{cases} x & 0\le x<4 \\ 3 & x\ge 4\end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=0$$

حل : از طرفین معادله بالا لاپلاس می‌گیریم. ولی ابتدا لاپلاس تابع سمت راست را می‌یابیم:

$$\mathcal{L}(f(x)) = \mathcal{L}\left[(x u_0(x) - u_4(x)) + 3u_4(x)\right]$$

$$= \mathcal{L}\left[x - u_4(x)(x-4) - u_4(x)\right]$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-4s}}{s^2} - \frac{e^{-4s}}{s}$$

نکته ۱ : $F(s)$ را می‌توان بصورت زیر نیز حساب کرد

$$\mathcal{L}(f(x)) = F(s) = \mathcal{L}\left[(x - x u_4(x) + 3u_4(x)\right]$$

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{d}{ds}\mathcal{L}(u_4(x)) + 3\frac{e^{-4s}}{s} = \cdots$$

نکته ۲ : بطور مستقیم نیز می‌توان $F(s)$ را بدست آورد

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^4 x e^{-sx}\,dx + \int_4^{+\infty} 3e^{-sx}\,dx .$$

(که انتگرال اول از جزء به جزء به راحتی محاسبه می‌شود)

اکنون معادله را حل می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(y'')+\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f(x))$$

L20

لذا داریم :

$$s^2 \mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}(y) = F(s)$$

با اعمال شرایط اولیه و دسته بندی جملات داریم :

$$\mathcal{L}(y) = \frac{F(s)}{s^2+1}$$

در نتیجه :

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} - \frac{e^{-4s}}{s^2(s^2+1)} - \frac{e^{-4s}}{s(s^2+1)}$$

اکنون کسرها را تجزیه می کنیم

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

پس از مخرج مشترک گیری و متحد قرار دادن صورت کسرها داریم :

$$(As+B)(s^2+1)+(Cs+D)(s^2)=1$$

اگر قرار دهیم $s=i$ داریم $C=0$, $D=-1$ و اگر $s=0$ داریم $B=1$
و اگر $s=1$ داریم $A=0$. لذا :

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$$

به طور مشابه :

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

که پس از انجام محاسبات داریم $A=1$, $B=-1$, $C=0$.

121

لذا

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

درنتیجه :

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-4s}}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s^2+1} - \frac{e^{-4s}}{s} + \frac{se^{-4s}}{s^2+1}$$

درنتیجه :

$$y = x - \sin x - u_4(x)(x-4) + u_4(x)\sin(x-4) - u_4(x) + u_4(x)\cos(x-4).$$

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y'' - 3y' - 4y = f(x) = \begin{cases} e^x & 0 \le x < 2 \\ 0 & x \ge 2 \end{cases} \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

حل :

$$\mathcal{L}(f(x)) = \mathcal{L}\left(e^x \cdot \begin{cases} 1 & 0 \le x < 2 \\ 0 & x \ge 2 \end{cases}\right) = \mathcal{L}(e^x(1 - u_2(x)))$$

$$= \mathcal{L}(e^x - u_2(x)e^{x-2} \cdot e^2)$$

$$= \frac{1}{s-1} - e^2 \cdot \frac{e^{-2s}}{s-1}$$

لذا داریم :

$$\mathcal{L}(y'') - 3\mathcal{L}(y') - 4\mathcal{L}(y) = s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) - 3s\mathcal{L}(y) + 3y(0) - 4\mathcal{L}(y) = F(s)$$

با اعمال شرایط اولیه و ساده سازی جملات داریم :

$$\mathcal{L}(y) = \frac{F(s)}{(s+1)(s-4)}$$

L22

درنتیجه:

$$\mathcal{L}(y)=\frac{1}{(s-1)(s+1)(s-4)}-e^{2}\cdot\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s+1)(s-4)}$$

کسرها را تجزیه کنیم. به سادگی درمی‌یابیم که:

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)(s-4)}=\frac{-1/6}{s-1}+\frac{1/10}{s+1}+\frac{-1/15}{s-4}$$

بنابراین

$$y=-\frac{1}{6}e^{x}+\frac{1}{10}e^{-x}+\frac{1}{15}e^{4x}-e^{2}u_{2}(x)\Big[-\frac{1}{6}e^{x-2}+\frac{1}{10}e^{-(x-2)}$$

$$-\frac{1}{15}e^{4(x-2)}\Big]\,.\ \square$$

L23

تبدیل لاپلاس - توابع متناوب

یادآوری می‌کنیم که تابع f را متناوب با دوره تناوب T گوییم هرگاه $f(x+T)=f(x)$.

قضیه: اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب T روی $[0,+\infty)$ باشد آنگاه

$$\mathcal{L}(f(x)) = \frac{\int_0^T e^{-sx} f(x)\,dx}{1-e^{-sT}}$$

اثبات:

$$\mathcal{L}(f(x)) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T e^{-s(u+nT)} f(u+nT)\,du$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_0^T e^{-su} f(u)\,du$$

$$= \int_0^T e^{-su} f(u)\,du \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-sT}\right)^n$$

$$= \int_0^T e^{-su} f(u)\,du \cdot \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

L24

مثال ، مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y'' + y = f(x) \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 2 \\ 0 & 2 \le x < 4 \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x)$$

حل : چون تابع f متناوب است

$$\int_0^4 e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^2 e^{-sx}\,dx = \frac{1-e^{-2s}}{s}$$

و

$$\mathcal{L}(f(x)) = \frac{\frac{1-e^{-2s}}{s}}{1-e^{-4s}} = \frac{1-e^{-2s}}{s(1-e^{-4s})}$$

$$= \frac{\cancel{1-e^{-2s}}}{s(\cancel{1-e^{-2s}})(1+e^{-2s})} = \frac{1}{s(1+e^{-2s})}$$

لذا :

$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}(y) = F(s)$$

یا

$$\mathcal{L}(y) = \frac{F(s)}{s^2+1}$$

در نتیجه :

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s(s^2+1)(1+e^{-2s})}$$

(L25)

پس از تجزیه کسر $\frac{1}{s(s^2+1)}$ به صورت: $\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$ نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s(1+e^{-2s})} - \frac{s}{(s^2+1)(1+e^{-2s})}$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s(1+e^{-2s})}\right) - L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)(1+e^{-2s})}\right)$$

طبق قسمت اول حل مسأله داریم که

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(1+e^{-2s})}\right) = f(x)$$

اما برای پیدا کردن L^{-1} قسمت دوم تا حدی مشکل داریم و باید از سری مک لوران تابع زیر استفاده کنیم:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow \frac{1}{1+e^{-2s}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2ns}$$

بنابراین:

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{1+e^{-2s}}\right) = L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2ns}\right)$$

$$= L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{s\,e^{-2ns}}{s^2+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L^{-1}\left(\frac{s\,e^{-2ns}}{s^2+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{2n}(x) \cos(x-2n)$$

پس:

$$y = f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{2n}(x) \cos(x-2n). \qquad \square$$

لاپلاس - حاصلضرب پیچشی

اگر f و g دو تابع باشند حاصلضرب پیچشی f و g را به صورت $f*g$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt$$

مثال: اگر $f(x) = \cos x$ آنگاه:

$$(f*1)(x) = \int_0^x \cos(x-t)\, dt = -\sin(x-t)\Big|_0^x$$

$$= -\sin 0 + \sin x = \sin x$$

نکته:

1. $f*g = g*f$
2. $f*(g_1+g_2) = (f*g_1)+(f*g_2)$
3. $(f*g)*h = f*(g*h)$
4. $f*0 = 0*f = 0$

انتگرال پیچشی در کاربردهای مختلفی ظاهر می‌شود که در آنها رفتار دستگاه در لحظه t نه تنها تابع وضعیت آن در لحظه t است بلکه به تاریخچه قبلی آن نیز بستگی دارد. گاهی دستگاه‌های از این نوع را دستگاه‌های موروثی نیز می‌گویند.

اما نکته مهم:

L27

قضیه :

$$\mathcal{L}\left((f*g)(x)\right) = \mathcal{L}(f(x)) \cdot \mathcal{L}(g(x)) .$$

(اثبات قضیه را در اینجا نمی آوریم علاقمندان از هر کتاب معادلات اثبات را خواهند یافت)

مثال :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)$$

$$= x * \sin ax$$

$$= \int_0^x (x-t)\sin at \, dt$$

$$= \frac{ax - \sin ax}{a^2}$$

مثال :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \mathcal{L}\left[(f*1)(x)\right]$$

$$= \mathcal{L}[f(x)] \, \mathcal{L}[1]$$

$$= F(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

مثال: جواب معادله مقدار اولیه زیر را بیابید

$$y'' + 4y = g(x) \qquad y(0)=3 \,,\; y'(0)=-1$$

حل:

$$\mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(g(x)) \Rightarrow$$

$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}(y) = G(s)$$

$$s^2\mathcal{L}(y) - 3s + 1 + 4\mathcal{L}(y) = G(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{3s-1}{s^2+4} + \frac{G(s)}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y) = 3\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}G(s)$$

$$\Rightarrow y = 3\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\int_0^x \sin 2(x-t)\, g(t)\, dt$$

اگر $g(t)$ داده شده باشد انتگرال بالا را می‌توان (به روش عددی در صورت لزوم) بدست آورد.

در واقع می‌توان در مسئله کلی‌تر نیز به همین نحو عمل کرد مثلاً

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad y(0)=y_0 \qquad y'(0)=y'_0$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{(as+b)y_0 + a y'_0}{as^2+bs+c} + \frac{G(s)}{as^2+bs+c}$$

حال می‌توان از کسرهای جزئی برای معکوس لاپلاس استفاده کرد.

لاپلاس - تابع دلتای دیراک

در بسیاری از کاربردهای فیزیکی، بیولوژی، مهندسی به معادلات دیفرانسیل

$$ay'' + by' + cy = f(t) \qquad y(t_0) = y_0 \quad y'(t_0) = y'_0$$

برخورد می‌کنیم که در آن $f(t)$ در طول بازه کوتاه $t_0 - a < t < t_0 + a$ بزرگ و در غیر اینصورت صفر می‌باشد و انتگرال این تابع در این بازه برابر یک است.

این پدیده‌ها سرشت ضربه‌ای دارند از قبیل ضربه خوردن بال هواپیما توسط رعد و برق، ضربه خوردن توپ تنیس توسط راکت، ضربه خوردن میخ توسط چکش و ... می‌باشند.

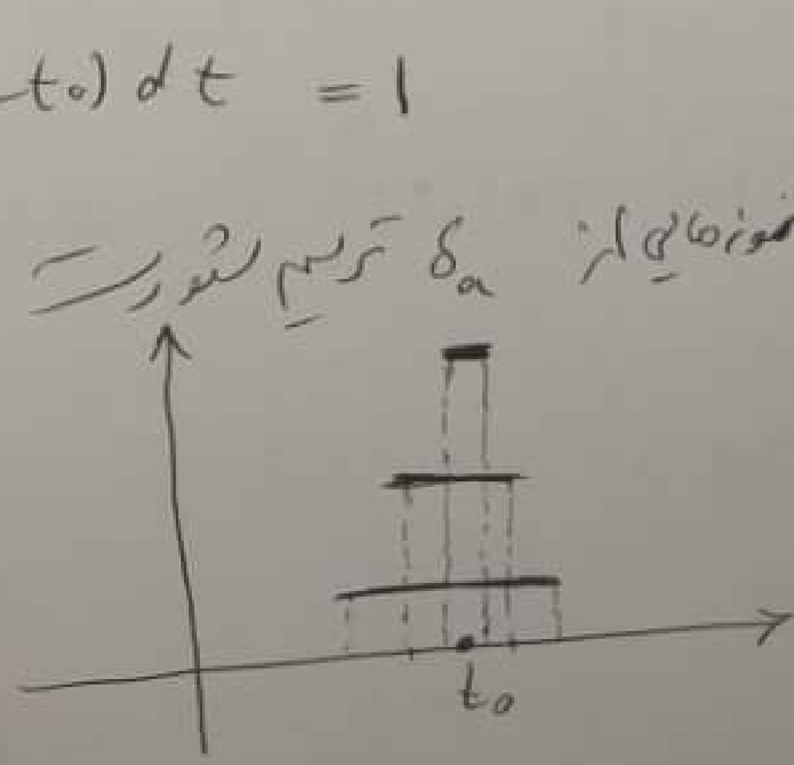
یکی از این توابع مشهور بدین صورت تعریف می‌شود و تابع ضربه واحد نامیده می‌شود!

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a} & t_0 - a \le t \le t_0 + a \\ 0 & t > t_0 + a \end{cases}$$

که تنها در زمان کوتاهی حول t_0 برابر $\frac{1}{2a}$ است، در بقیه زمان‌ها صفر است و

$$\int_0^\infty \delta_a(t - t_0)\, dt = 1$$

در نمودار زیر نمونه‌هایی از δ_a ترسیم شده است



(L30)

در یک دستگاه مکانیکی $f(t)$ نیرو است و جریان کل نیروی $f(t)$ بر روی بازه زمانی (t_0-a, t_0+a) برابر یک است.

در حالت خاص که $t_0=0$ باشد $\delta_a(t)$ به صورت

$$\delta_a(t)=\begin{cases}\frac{1}{a} & 0\le t<a\\ 0 & t\ge a\end{cases}$$

پس اگر δ_a شاخص تابع نیرو باشد آنگاه δ_a دارای ضربه واحد است.

حال تابع δ_a را با فرار اینکه روی بازه‌های زمانی کوتاه‌تر و کوتاه‌تر عمل می‌کند ایده‌آل می‌سازیم.

$$\lim_{a\to 0}\delta_a(t)=0 \qquad t\neq 0$$

و به علاوه چون برای هر $a\neq 0$، $\int_0^\infty \delta_a(t)dt=1$ نتیجه می‌شود که

$$\lim_{a\to 0}\int_0^\infty \delta_a(t)dt=1$$

معمولاً $\lim_{a\to 0}\delta_a(t)$ را با $\delta(t)$ نشان می‌دهند در این صورت داریم:

$$\delta(t)=0 \quad t\neq 0, \qquad \int_0^\infty \delta(t)dt=1$$

و به طور مشابه:

$$\delta(t-t_0)=\lim_{a\to\infty}\delta_a(t-t_0)=0 \qquad t\neq t_0$$

و

$$\int^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$

(L31)

تابع δ یک تابع معمولی نیست و یک تابع تعمیم یافته است.

قضیه: $\mathcal{L}(\delta(t-t_0)) = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-t_0)\,dt = e^{-st_0}$

$$\mathcal{L}(\delta(t-t_0)) = \lim_{a\to 0} \mathcal{L}(\delta_a(t-t_0)) = \lim_{a\to 0} \frac{\sinh as}{as} e^{-st_0}$$

$$= e^{-st_0}$$

در حالت خاص: $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$.

همچنین با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها می‌توان نشان داد که

$$\int_0^\infty \delta(t-t_0) f(t)\,dt = f(t_0)$$

مثال: معادله زیر را حل کنید

$$y'' - 4y' + 4y = 3\delta(x-1) \quad y(0) = y'(0) = 1$$

حل: از طرفین معادله تبدیل لاپلاس گرفته داریم:

$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) - 4s\mathcal{L}(y) + 4y(0) + 4\mathcal{L}(y) = 3e^{-s}$$

در نتیجه:

$$(s^2 - 4s + 4)\mathcal{L}(y) = s - 3 + 3e^{-s}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{3e^{-s}}{(s-2)^2}$$

$$y = e^{2t} - te^{2t} + 3u_1(t)(t-1)e^{2(t-1)}$$

توجه کنید که:

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2} = t \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s-2)^2} = te^{2t} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\frac{e^{-s}}{(s-2)^2} = u_1(t)(t-1)e^{2(t-1)}$$

مثال :

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t-5) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

(این سوال از مطالعه مدار الکتریکی یا نوسانگر مکانیکی ناشی می‌شود)

حل :

$$(2s^2 + s + 2)\,\mathcal{L}(y) = e^{-5s}$$

$$F(s) = \frac{e^{-5s}}{2s^2+s+2} = \frac{1}{2} e^{-5s} \cdot \frac{1}{(s+\frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + \frac{15}{16}} \right) = \frac{4}{\sqrt{15}} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+\frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}} \right) = \frac{4}{\sqrt{15}} e^{-t/4} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1} \frac{e^{-5s}}{(s+\frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}} = \frac{4}{\sqrt{15}} u_5(t) e^{\frac{-(t-5)}{4}} \cdot \sin \frac{\sqrt{15}}{4}(t-5)$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{15}} u_5(t) e^{\frac{-(t-5)}{4}} \sin \frac{\sqrt{15}}{4}(t-5) .$$ ✓

L33

حل تمرین

مثال:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{1+e^{-s}}\right) = L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-ns}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n L^{-1} e^{-ns}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \delta(t-n)$$

مثال:

$$\mathcal{L}(t e^{at}\sin bt) = ?$$

حل:

$$\mathcal{L}(\sin bt) = \frac{b}{s^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}\sin bt) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}(t e^{at}\sin bt) = -\left(\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right)' = -\frac{2b(s-a)}{((s-a)^2+b^2)^2}$$

مثال: اگر $y = x + e^x\int_0^x y(t)e^{-t}\,dt$ آنگاه $L(y) = ?$

$$y(x) = x + \int_0^x y(t)e^{x-t}\,dt \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y * e^x) = L(x) + L(y)\,L e^x$$

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{L(y)}{s-1}$$