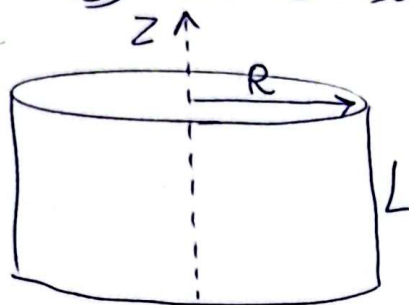


①

« نمونه سؤالات فصل ۹ و ۱۰ »

① سیم استوانه‌ای طولی به طول  $L$  و شعاع  $R$  دارای جریانی با چگالی بار سطحی غیر یکنواخت  $\vec{J} = \alpha r$  در امتداد محور  $z$  است که در آن  $\alpha$  مقداری ثابت و مثبت و  $r$  فاصله از محور استوانه است. اثری مقایسه‌ای در خیزه‌سند در داخل استوانه را بدست آورید.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc} \rightarrow \text{قانون آمپر}$$

$$\rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int \alpha r r dr d\phi = \mu_0 \alpha \int_0^r r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$dA = r dr d\phi$$

یا چون می‌دانیم یک دایره کامل

$$\rightarrow B(2\pi r) = \frac{2\pi}{3} \mu_0 \alpha r^3 \rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 \alpha r^2}{3}}$$

اثری مقایسه‌ای:  $U_B = U_B V$  : چگالی انرژی میدان مقایسه‌ای:  $U_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$

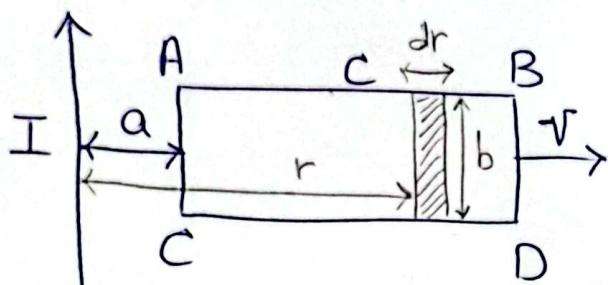
$$\rightarrow U_B = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \left( \frac{\mu_0 \alpha^2}{3} \right) \cdot \left( \frac{1}{2\mu_0} \right) \int r^4 dV = \frac{\mu_0 \alpha^2}{18} \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz$$

چون داخل استوانه  $r=R$

$$dV = r dr d\phi dz \xrightarrow{\text{حجم استوانه}} dV = 2\pi r L dr$$

$$\rightarrow U_B = \frac{\mu_0 \alpha^2}{18} \left( \frac{R^6}{6} \right) (2\pi) (L) = \boxed{\frac{\mu_0 \alpha^2 \pi L R^6}{54}}$$

② از سیم طولی جریان ثابت  $I$  می‌گذرد. این سیم مستطیل شکلی مطابق شکل با مقاومت  $R$ ، به سیم دربی می‌گردد. قرار گرفته باشد و با سرعت ثابت  $v$  عمود بر امتداد سیم از آن (در مورد  $a$  و  $b$ ) جهت و مقدار جریان الکتریکی در این قاب را بدست آورید. ب) جهت و مقدار نیروی وارد بر سیم  $BD$  حیدر خواهد بود؟



پایه:  $\vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I \rightarrow$  میدان مغناطیسی اطراف سیم استاتیسی  

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

الف)

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} \rightarrow d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot b dr$$

$$dA = b dr$$

$$\rightarrow \Phi_B = \int_{a+vt}^{a+c+vt} \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{a+c+vt}{a+vt}\right)$$

$$\ln(a+c+vt) - \ln(a+vt)$$

نشان بدهید  
 $|\mathcal{E}| = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right|$  : نیروی محرکه الکتریکی

نسبت لارانتس:  $\frac{d}{dx} (\log_b f(x)) = \frac{f'(x)}{\ln(b) \cdot f(x)}$   $\ln(a+c+vt) = \log_e$   
 $\ln(e) = 1$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} (\ln(a+c+vt)) = \frac{v}{(1)(a+c+vt)}, \quad \frac{d}{dt} (\ln(a+vt)) = \frac{v}{a+vt}$$

$$\rightarrow |\mathcal{E}| = \left| - \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left( \frac{v}{a+c+vt} - \frac{v}{a+vt} \right) \right| = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left( \frac{v}{a+vt} - \frac{v}{a+c+vt} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I b v}{2\pi} \left( \frac{a+c+vt - a - vt}{(a+vt)(a+c+vt)} \right) = \frac{\mu_0 I b c v}{2\pi (a+vt)(a+c+vt)}$$

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{\mu_0 I b c v}{2\pi R (a+vt)(a+c+vt)}$$

جهان الکتریکی

$I \uparrow \rightarrow B \otimes \rightarrow i$

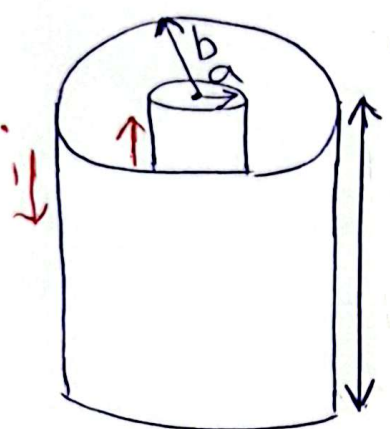
ب)  $\vec{F} = i \vec{L} \times \vec{B} \rightarrow F_{BD} = \left( \frac{\mu_0 I b c v}{2\pi (a+vt)(a+c+vt)} \right) (b) \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi (a+c+vt)} \right)$

$i \uparrow \otimes B \rightarrow \sin \theta = 4$

$l = b$   $r_{BD} = a+c+vt$



(۳) یک کابل هم محور طول شامل ۲ رسانای با مقطع شعری است. شعری داخلی  $a$  و شعری خارجی  $b$  است. منافات شعری خارجی قابل صرف نظر کردن است. از استوانه داخلی جریانی با چگالی جریان  $J = \beta r$  می‌گذرد و استوانه بیرونی سیرجست پذیر را تشکیل می‌دهد. فاصله‌ی هر نقطه از محور استوانه‌ها و  $r$  = مقداری ثابت و  $\oplus$  . مطلوب است :



(الف) بی‌سبی میدان مغناطیسی در فاصله‌های  $0 < r < a$  و  $a < r < b$  .  
 (ب) انرژی ذخیره شده در فاصله‌ی  $0 < r < b$  در واحد طول کابل .

پاسخ : الف)  $\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_1 = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{A}_1$   $0 < r < a \rightarrow$

$$\underbrace{\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell}}_{B_1(2\pi r)} = \mu_0 \int_0^r \underbrace{(\beta r)}_{dA} (r dr d\varphi) = \mu_0 \beta \int_0^r r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\rightarrow B_1(2\pi r) = \frac{2\pi}{3} \mu_0 \beta r^3 \rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 \beta r^2}{3}$$

$a < r < b \rightarrow \oint \vec{B}_r \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_r = \mu_0 \int_0^a r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 \beta 2\pi a^3}{3}$

$$\rightarrow B_r = \frac{\mu_0 \beta a^3}{3r}$$

ب) انرژی میان مغناطیسی :  $V_B = \int U_B dV$   $U_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$  : چگالی انرژی میان مغناطیسی

$dV = r dr d\varphi dz \rightarrow$  استوانه کابل :  $dV = 2\pi r L dr$

$$\rightarrow V_B = \frac{1}{2\mu_0} \left\{ \int_0^a B_1^2 dV + \int_a^b B_r^2 dV \right\} = \int_0^a B_1^2 dV = \left( \frac{\mu_0 \beta}{3} \right)^2 \cdot 2\pi L \cdot \int_0^a r^5 dr = \left( \frac{\mu_0 \beta}{3} \right)^2 \cdot 2\pi L \cdot \frac{a^6}{6}$$

$$\int_a^b B_r^2 dV = \left( \frac{\mu_0 \beta a^3}{3} \right)^2 \cdot 2\pi L \cdot \int_a^b \frac{1}{r} dr = \left( \frac{\mu_0 \beta a^3}{3} \right)^2 \cdot 2\pi L \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{\mu_0^2 \beta^2}{9} \cdot a^6 \cdot 2\pi L \cdot \left( \frac{1}{6} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)$

$$\rightarrow U_B = \frac{\pi \mu_0 \beta^2 a^6}{9} \left( \frac{1}{6} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)$$

۴

در سوال قبل: ج) ضریب خود القایی در واحد کابل را بدست آورید.

اگر القای متقابل جریانی باشد  
میدان مغناطیسی القای جریانی را  
در خود ذخیره می کند

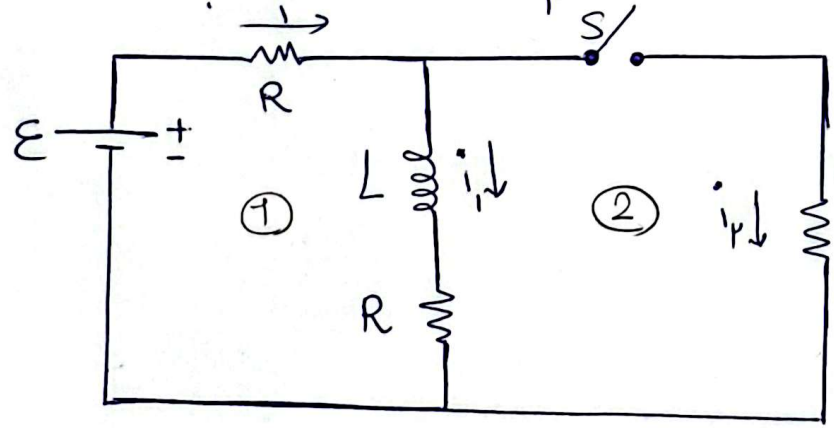
$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int (\beta r) (r dr d\phi) = \beta \int_0^a r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi \beta a^2}{1}$$

$$U_{B/I} = \frac{\pi \beta^2 \mu_0 a^4}{4} \left( \frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)$$

$$\rightarrow \frac{\pi \beta^2 \mu_0 a^4}{4} \left( \frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right) = \frac{1}{2} L \frac{4 \pi \beta^2 a^4}{4} \rightarrow L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)$$

۴) یک مدار RL مطابق شکل مفروض است. ولید S به مدت طولانی باز بوده و در لحظه  $t=0$  بسته می شود.

الف) جریان عبوری از سلف و ولتاژ  $i_2$  سران را بر حسب زمان بدست آورید.  
ب) در چه زمانی پس از بسته شدن کلید، ولتاژ  $i_2$  سر سلف به  $\frac{1}{4}$  مقدار اولیه اش می رسد؟



پاسخ: الف) وقتی کلید به مدت طولانی باز باشد،  
جریان عبوری از سلف  $\frac{E}{2R}$  خواهد بود:

$$E - iR - L \frac{di}{dt} - iR = 0$$

$$\rightarrow \frac{E}{2R} = i$$

یعنی بسته شدن کلید در  
لحظه  $t=0$ ، سلف دارای  
جریان اولیه  $\frac{E}{2R}$  می باشد.

$$i_T = i_1 + i_2$$

بسته شدن کلید داریم  
(قانون حلقه ۱)  $\rightarrow E - R(i_1 + i_2) - L \frac{di_1}{dt} - Ri_1 = 0 \rightarrow E = 2Ri_1 + Ri_2 + L \frac{di_1}{dt}$

قانون حلقه ۲:  $-i_2R + L \frac{di_1}{dt} + i_1R = 0 \rightarrow Ri_2 = Ri_1 + L \frac{di_1}{dt}$

$$\rightarrow E = 2Ri_1 + Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + L \frac{di_1}{dt} \rightarrow E = 3Ri_1 + 2L \frac{di_1}{dt}$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{3R}{2L} i_1 = \frac{E}{2L}$$

(5)

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{rR}{rL} i_1 = \frac{\varepsilon}{rL}$$

← اداء يا شيخ سؤال (4)

معادله ديفرنسيال خطي مرتبة اول :  $y' + p(x)y = q(x) \rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)} \left\{ \int \mu(x) q(x) dx + C_0 \right\}$   
 $y' = \frac{di_1}{dt}$  ,  $p(t) = \frac{rR}{rL}$  ,  $q(t) = \frac{\varepsilon}{rL}$   
 $x \rightarrow t$  ,  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{rR}{rL} dt} = e^{\frac{rR}{rL} t}$$

$$i_1 = e^{-\frac{rR}{rL} t} \left\{ \int e^{\frac{rR}{rL} t} \cdot \frac{\varepsilon}{rL} dt + \frac{C_0}{\frac{rR}{rL}} \right\} = \frac{\varepsilon}{rR} + \frac{\varepsilon}{rR} e^{-\frac{rR}{rL} t}$$

الغالب

جواب عبد العزيز :  $i_1 = \frac{\varepsilon}{R} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r} e^{-\frac{rR}{rL} t} \right)$   
 ولما يسر الغالب :  $V_L = L \frac{di_1}{dt} = L \cdot \frac{\varepsilon}{rR} \cdot -\frac{rR}{rL} \cdot e^{-\frac{rR}{rL} t} = -\frac{r\varepsilon}{r} e^{-\frac{rR}{rL} t}$

$$\frac{V_L'}{V_L} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{-\frac{r\varepsilon}{r} e^{-\frac{rR}{rL} t}}{-\frac{r\varepsilon}{r}} = \frac{1}{f} \rightarrow e^{-\frac{rR}{rL} t} = \frac{1}{f} \rightarrow$$

اولي  $V_L$  :  $t = 0 \rightarrow V_L = -\frac{r\varepsilon}{r}$

$$-\frac{rR}{rL} t = \ln\left(\frac{1}{f}\right) \rightarrow t = \frac{rL}{rR} \cdot \ln(r) \cdot \frac{\ln(f)^{-1}}{-\ln(r)}$$

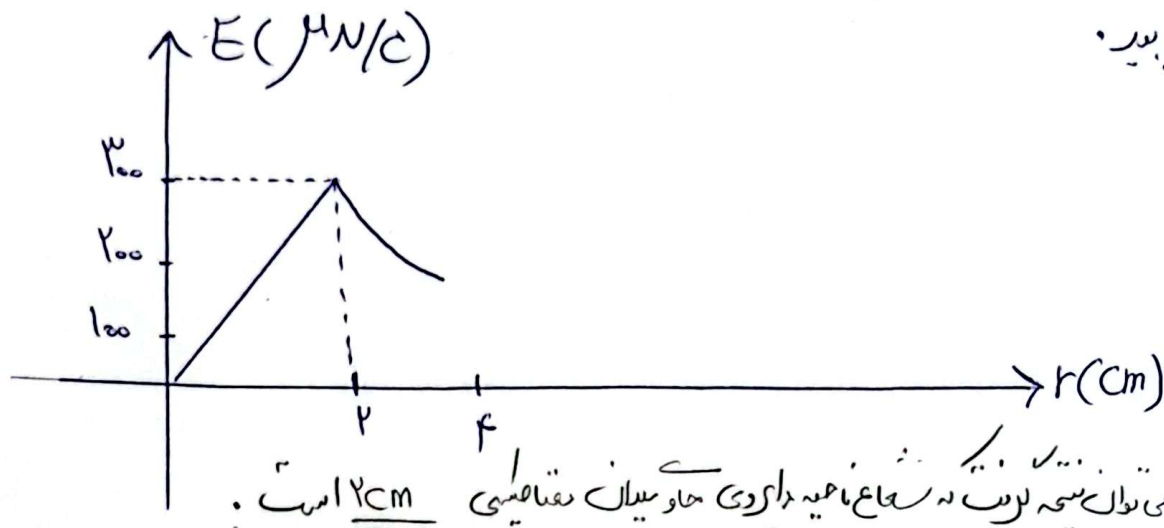


(۲)

۵۰ در یک ناحیه دایره‌ای از صفحه‌ی  $xy$  میدان مغناطیسی یکنواختی در جهت  $+z$  وجود دارد.

اندازه‌ی میدان  $B$  (بر حسب  $T$ ) به صورت  $B = at$  از این (بر حسب ثانیه) تغییر می‌کند.

اندازه‌ی میدان الکتریکی  $E$  ناشی از این تغییر میدان در شکل مقابل (بر حسب ناهمبندی شعاعی) نشان داده شده است.  $a$  را بیابید.



با توجه به جلست سطحی بی توان می‌توان نوشت که شعاع ناحیه دایره‌ای حاوی میدان مغناطیسی  $2\text{ cm}$  است.

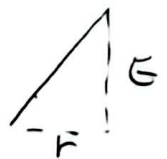
برای شعاعی  $r < 2\text{ cm}$  داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\phi_B}{dt} \rightarrow E(2\pi r) = A \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \rightarrow \phi_B = AB$$

$$\rightarrow E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \rightarrow E = \frac{ra}{2} \rightarrow a = \frac{2E}{r}$$

شیب مجسم خطی



$$B = at$$

$$\rightarrow a = \frac{2(300 \times 10^{-4} \text{ V/m})}{2 \times 10^{-2} \text{ m}} = 300 \times 10^{-4} \left( \frac{\text{V}}{\text{C} \cdot \text{m}} \right) = 300 \times 10^{-4} \frac{\text{T}}{\text{s}}$$

$$\frac{V}{m \cdot A} = \frac{N}{m \cdot C} = TA \cdot \frac{1}{AS} = \frac{T}{S}$$

$$\therefore A = \frac{C}{S}$$