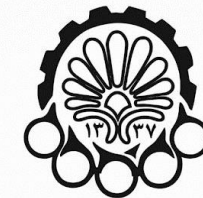


بسم الله الرحمن الرحيم

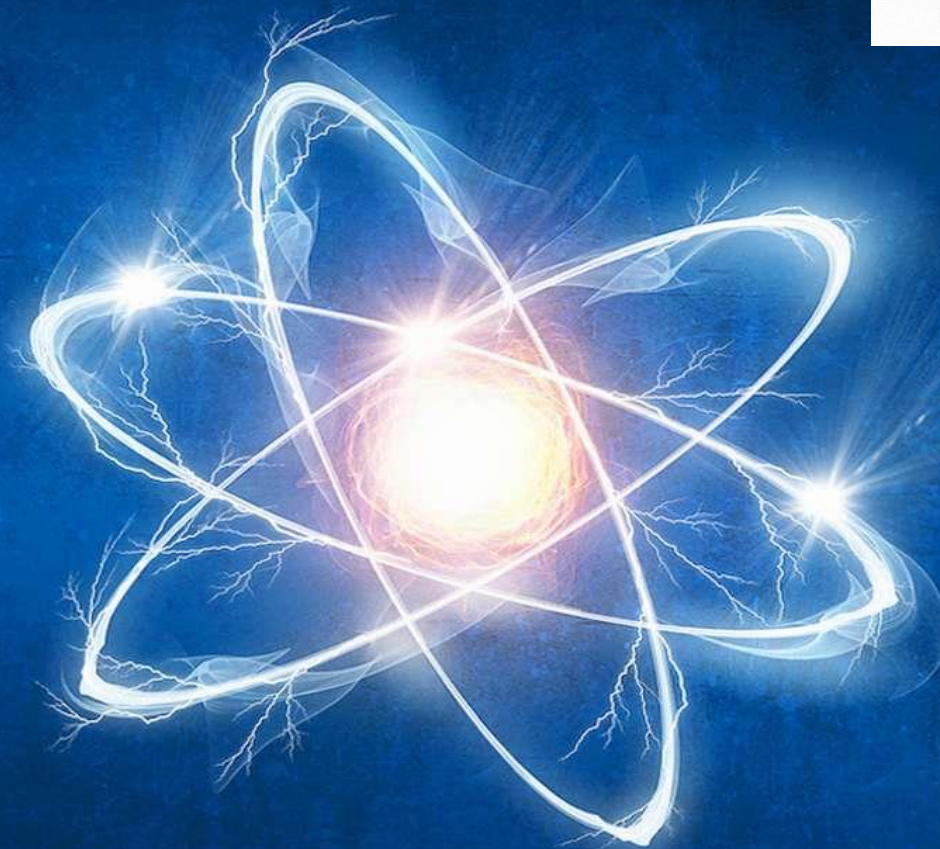


دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

فصل سوم فیزیک عمومی ۲:

قانون گاوس

ارائه دهنده: فاطمه مومن



تمرین فصل ۳ = فیزیک : قانون گاوس

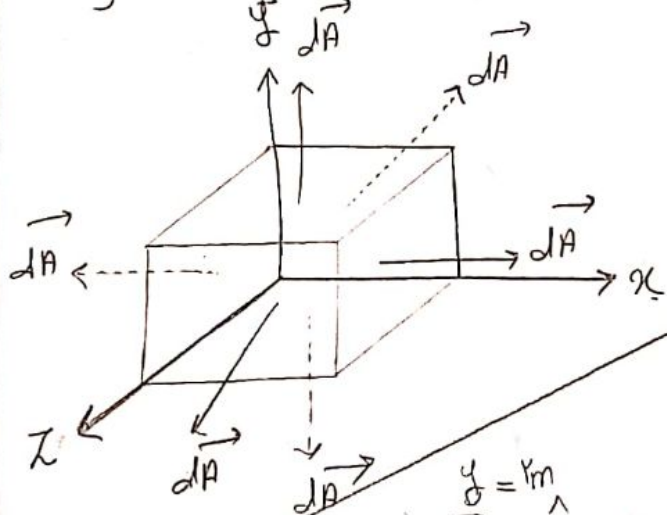
① میدان الکتریکی به $\vec{E} = 4\hat{i} - 3(y^2 + 2)\hat{j}$ داده شده است؛ از ملعب گاوسی به ضلع $2m$ می‌گذرد (کروی E به حسب N/C و y به حسب m است) شار الکتریکی عبوری از :

الف) وجه بالایی (ب) وجه پایینی (ج) وجه سمت چپ (د) وجه سمت راست ؟
 شار الکتریکی خالص عبوری از ملعب محاسبه کنید ؟

پاسخ : تعریف شار الکتریکی (Φ) : شار الکتریکی عبوری از یک سطح، مقدار میدان الکتریکی است که آن سطح را قطع می‌کند.

- شار الکتریکی Φ یک سطح با بردار سطح $d\vec{A}$: $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$
 - شار عبوری Φ از یک سطح : $\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$ (انتگرال روی سطح)

- شار خالص عبوری از یک سطح بسته (سطح بسته حاوی حجم است) که در قانون گاوس به کار می‌رود : $\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$



ملعب گاوسی \Rightarrow

الف) وجه بالایی : $y = 2m$
 $d\vec{A} = dA \hat{j}$

$$\left. \begin{aligned} y = 2m \\ \vec{E} = 4\hat{i} - 3(y^2 + 2)\hat{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E} = 4\hat{i} - 18\hat{j}$$

$$\Phi_1 = \int_{top} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{top} (4\hat{i} - 18\hat{j}) \cdot dA \hat{j} = -18 \int_{top} dA = -18 A_{top} = -18 (2 \times 2) = -72 \left(\frac{N \cdot m^2}{C} \right)$$

(وجه سمت چپ بالایی)

$$y = 0 \rightarrow \vec{E} = 4\hat{i} - 4\hat{j}$$

ب) وجه پایینی : $y = 0$
 $d\vec{A} = dA (-\hat{j})$

$$\Phi_2 = \int_{bottom} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{bottom} (4\hat{i} - 4\hat{j}) \cdot dA (-\hat{j}) = 4 \int_{bottom} dA = 4 A_{bottom} = 4 (2 \times 2) = 16 \left(\frac{N \cdot m^2}{C} \right)$$

الزمنی یاسف سوال ①

$$\Phi_F = \int_{\text{left}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{left}} (x\hat{i} - y(y+z)\hat{j}) \cdot dA(-\hat{i}) = \quad : \quad d\vec{A} = dA(-\hat{i}) \quad : \quad \text{ب) وجهت جب}$$

$$\int_{\text{left}} dA = -FA_{\text{left}} = -F(2 \times 2) = -16 \frac{N \cdot m^2}{C}$$

$$\text{ب) وجهت جب} : \quad d\vec{A} = dA(-\hat{k}) \quad : \quad \text{ب) یاسف یاسف} : \quad \vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} \quad : \quad \text{ب) یاسف یاسف} : \quad \Phi_F = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \Leftarrow$$

$$\text{top: } \Phi_1 = -16 \left(\frac{N \cdot m^2}{C} \right) \quad \text{left: } \Phi_2 = -16 \frac{N \cdot m^2}{C} \rightarrow d\vec{A} = dA(-\hat{i}) \quad (\text{ب) } \hat{k}$$

$$\text{bottom: } \Phi_3 = 16 \left(\frac{N \cdot m^2}{C} \right) \quad \text{right: } \Phi_4 = +16 \frac{N \cdot m^2}{C} \quad \downarrow \quad d\vec{A} = dA(\hat{i})$$

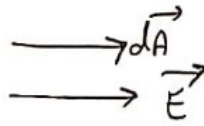
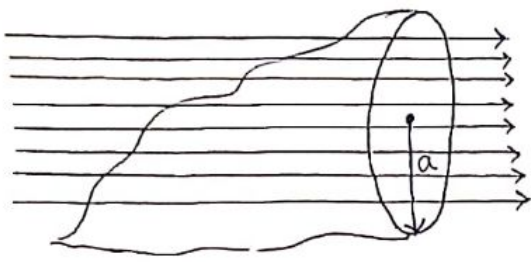
$$\text{back: } \Phi_5 = 0 \rightarrow \text{front: } \Phi_6 = 0 \quad \leftarrow \text{ب) یاسف یاسف}$$

$$\Phi_{\text{Total}} = \sum_{i=1}^6 \Phi_i = -16 + 16 - 16 + 16 + 0 + 0 = -16 \frac{N \cdot m^2}{C}$$

۲) در سطح زیر یک تورید وانه لری در میدان الکتریکی یکنواختی به تری $E = 3 \frac{mV}{C}$ قرار دارد. قاب تورید دارای به

شعاع $a = 11 \text{ cm}$ و عمودی این میدان الکتریکی قرار گرفته است. تور دارای بار خالصی نیست.

سار الکتریکی عمودی از تور را پیدا کنید.



\hat{n} : فرض

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int (3 \times 10^{-3} \frac{N}{C}) \hat{i} \cdot dA (\hat{i}) = 3 \times 10^{-3} \int dA = 3 \times 10^{-3} A = \\ &= 3 \times 10^{-3} (\pi a^2) = 3 \times 10^{-3} \times \pi \times (11)^2 \times 10^{-4} = 1.1604 \times 10^{-4} \frac{N \cdot m^2}{C} \end{aligned}$$

۳) وقتی شیر درش هم درسته ای را با بازی لیف و ترشح آب از وان حمام می تونید هوای داخل حمام را با یون های باردار سردی

منفی به لندویک میدان الکتریکی به تری $1000 \frac{N}{C}$ در خواب وجود دارد. حمامی را به ابعاد $2.15 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$

در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در استاندارد سقف، کف و چهار دیوار به یکنواخت و عمودی این سطح ها و تری آن را $400 \frac{N}{C}$ در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید که این سطح های کف و سقف به دور هوای همگامی یکنواختی در کف (الف) و سقف (ب) قرار دارد بارهای بنیادی e به ستر سطح را در هوای همگامی سب کنید.

جایبغ : قانون گاوس : میدان الکتریکی نقاط روی سطح گاوسی (سطح بسته) را به بار خالصی در داخل آن سطح قرار دارد

رابطه های لند (بار q به صورت شده در آن سطح) : قانون گاوس $\epsilon_0 \Phi = q$

$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$: میدان الکتریکی در سطح بسته گاوسی

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

→ ادراسی پادفع (۳) الف :

میدان الکتریکی : $E' = 1000 \text{ N/C}$
در محله

میدان الکتریکی : $E = 900 \text{ N/C}$ →

میدان الکتریکی عمود بر سطح

ابعاد : $2.15 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$

در هر جهت می دانیم E جدارات قطری آن را می دانیم

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 + \int_{S_4} \vec{E} \cdot d\vec{A}_4 + \int_{S_5} \vec{E} \cdot d\vec{A}_5 + \int_{S_6} \vec{E} \cdot d\vec{A}_6$$

$\vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = E dA$ S_1 ← وجه راست
 $\vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = E dA$ S_2 ← وجه چپ
 $\vec{E} \cdot d\vec{A}_3 = E dA$ S_3 ← وجه بالا
 $\vec{E} \cdot d\vec{A}_4 = E dA$ S_4 ← وجه پایین
 $\vec{E} \cdot d\vec{A}_5 = E dA$ S_5 ← وجه جلو
 $\vec{E} \cdot d\vec{A}_6 = E dA$ S_6 ← وجه عقب

→ $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$ $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\phi = 900 \left(2(2.15)(1) + 2(2.15)(1) + 2(1)(1) \right) = 12200 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}}$$

$\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow q = \epsilon_0 \phi = (8.85 \times 10^{-12}) (122000) = 1.07 \times 10^{-6} \text{ C}$

$\rho = \frac{q}{V} = \frac{1.07 \times 10^{-6} \text{ C}}{(2.15)(1)(1)} = 4.98 \times 10^{-7} \left(\frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right)$

چگالی بار

$n = \frac{q}{e} = \frac{1.07 \times 10^{-6}}{1.6 \times 10^{-19}} = 6.69 \times 10^{12}$

تعداد الکترون

(ب)

- نقطه $x = 2\text{cm}$ داخل بوده است. قرار دارد بنابراین میدان ناشی از آن در $x = 2\text{cm}$ و برای $x = 0$ است.

- خارج $= 2$ " " میدان ناشی از بوده است $y = 2$ در نقطه $y = 0$ و مرکز:

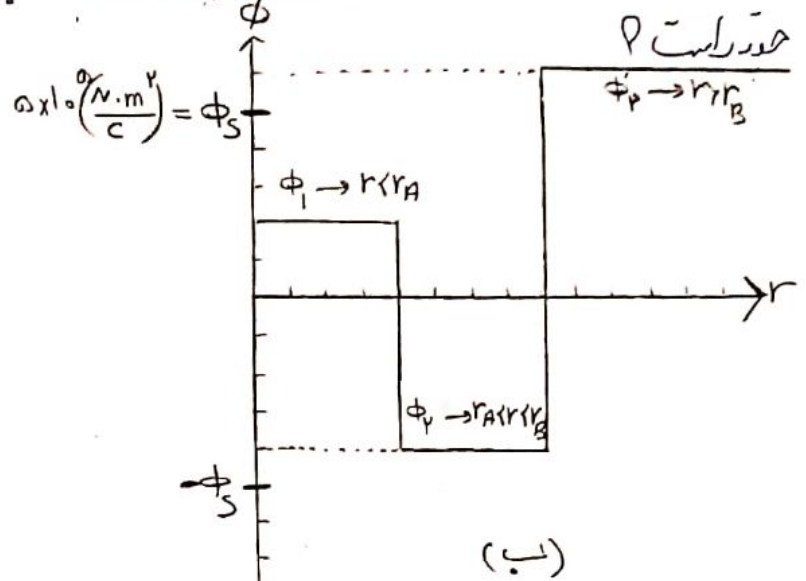
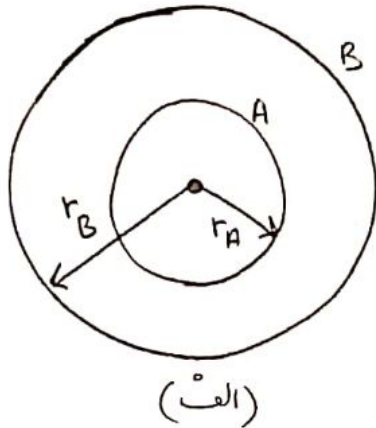
$$r = 2 \rightarrow L = r + x \rightarrow r = L - x = 10 - 9 = 1 \text{ cm}$$

$$\rightarrow \vec{E} = -0.28 \text{ V/m} \hat{i}$$

Scanned with CamScanner

۵) یک ذره‌ی باردار در مرکز φ یونانی کروی همگن که بسیار نازک و از جنس ماده‌ای با ϵ_0 است. سطح زیر الف، سطح مقطع آن مهاران می‌دهد. شکل زیر ب، شارخاکن ϕ عبوری از یک کروی با دسی -

مرکز ذره‌ی باردار را بر حسب تابع از شعاع r نو بدست می‌دهد. معیاس موردنظر با $\phi_s = 5 \times 10^{-9} \frac{N \cdot m^2}{C}$ مشخص شده است. الف) بار ذره‌ی مرکزی همگراست ب) بارخاکن یونانی A و ب) بارخاکن یونانی B



الف) $r < r_A \Rightarrow \phi_1 = 5 \times 10^{-9} \left(\frac{N \cdot m^2}{C} \right)$ $\Rightarrow q_1 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \right) \left(5 \times 10^{-9} \frac{N \cdot m^2}{C} \right)$
 $q_1 = \epsilon_0 \phi_1$
 $\Rightarrow q_1 = 1.77 \times 10^{-9} C$

ب) $r_A < r < r_B \Rightarrow \phi_r = -4 \times 10^{-9} \left(\frac{N \cdot m^2}{C} \right)$ $\Rightarrow q_r = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \right) \left(-4 \times 10^{-9} \frac{N \cdot m^2}{C} \right)$
 $q_r = \epsilon_0 \phi_r$

$\Rightarrow q_r = -3.52 \times 10^{-9} C$

$q_A = q_r - q_1 = -3.52 \times 10^{-9} C - 1.77 \times 10^{-9} C = -5.29 \times 10^{-9} C$

د) $\epsilon_0 \phi_r = q_A + q_1 \Rightarrow q_A = \epsilon_0 \phi_r - q_1$

$$r > r_B \Rightarrow \epsilon_0 \phi_3 = q_B + q_A + q_1$$

$$\phi_3 = +6 \times 10^{-9} \frac{N \cdot m^2}{C}$$

$$\rightarrow \epsilon_0 \phi_3 = \left(1,15 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \right) \left(6 \times 10^{-9} \frac{N \cdot m^2}{C} \right) = 5,31 \times 10^{-22} C$$

$$\Rightarrow q_B = (5,31 \times 10^{-22}) - (-5,31 \times 10^{-22} + 1,17 \times 10^{-22}) = 1,15 \times 10^{-22} C$$

۶) یک رسانای متوسطی با سطح دکوا دارای بار خالص $+10 \times 10^{-6} C$ است. داخل رسانا، کادایی است که در داخل آن بار نقطه ای $q = +3 \times 10^{-6} C$ قرار دارد. الف) بار روی دیواره ی کاداک (ب) بار روی سطح خارجی رسانا

چقدر است ؟



نکته : میدان داخل رسانا باید ۰ باشد و زیرا اگر میدان ۰ نباشد، این میدان یروهایی از الکترون های آزاد که همواره در رسانا وجود دارند وارد می کند و بنابراین همواره جریانی درون رسانا وجود خواهد داشت، اما باید اینگونه درون رسانای متوسطی چنین جریانی های دائمی وجود ندارد، بنابراین میدان الکتریکی داخلی ۰ است.

الف) یک سطح کادویی را درون رسانا حوری در نظر می گیریم که حفره درون آن قرار گیرد؛ چون درون رسانا میدان الکتریکی ۰ است، لذا شارری از سطح کادویی نمی گذراند ۰ است. و چون بار می گذریده درون سطح کادویی $q = +3 \times 10^{-6} C$ است بنابراین باید بار معادل $q' = -q = -3 \times 10^{-6} C$ در دیواره ی کاداک توزیع شود تا بار خالص درون سطح کادویی ۰ شود و تا میدان الکتریکی داخل دیواره (کاداک) نیز ۰ شود:

$$\epsilon_0 \phi = q + q' \rightarrow \phi = \frac{q + q'}{\epsilon_0}$$

$$\phi = 0 \Rightarrow q + q' = 0 \rightarrow q' = -3 \times 10^{-6} C$$

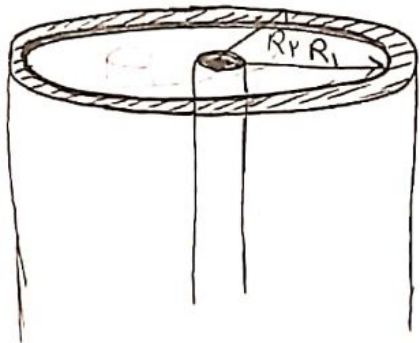
ب) اگر بار اضافی داخل رسانا قرار بگیرد و آن بار سطح رسانا مستقل خواهد شد و هیچ بار اضافی داخل رسانا وجود نخواهد داشت و برای آنکه پایداری بار برقرار باشد باید بار q' با بار معادل خود خنثی شود، لذا بار $-q'$ در دیواره ی رسانا توزیع می شود و در نتیجه بار خالص روی دیواره ی رسانا ۰ است:

$$Q = q'' + (-q')$$

$$q'' = 10 \times 10^{-6} C \quad Q = 10 \times 10^{-6} C + 3 \times 10^{-6} C = 13 \times 10^{-6} C$$

ایده ی
مفید

۱۷) باری با چگالی خطی یکنواخت $\frac{\lambda}{m}$ روی سیمه‌ای نازک و نازک و بلندی توزیع شده است. سیمه با پستی
 استوانه‌ای رسانای بلندی (برش‌های داخلی $5cm$ و شعاع خارجی $10cm$) هم‌محور است. بار خالص روی پسته
 برابر با ۵ است. الف) برای میدان الکتریکی به فاصله‌ی $15cm$ از محور پسته چقدر است؟
 ب) چگالی بار سطحی روی سطح داخلی پسته چقدر است؟
 ج) بار سطحی خارجی



$$R_1 = 5cm$$

$$R_2 = 10cm$$

$$\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda}{m} \quad \text{چگالی خطی بار روی سیمه}$$

پاسخ:

الف) $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$: میدان در فاصله‌ی r از سیمه‌ی نازک و بلند
 با چگالی خطی یکنواخت λ

$$E(\text{total}) = E_1(\text{سیمه}) + E_2(\text{پسته})$$

$$q_2 = 0 \Rightarrow E_2 = 0$$

$$\rightarrow E = \frac{\lambda \times 10^{-9} \text{ C/m}}{2\pi (1/18 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}) (15 \times 10^{-2} \text{ m})} \approx 2.4 \times 10^4 \text{ N/C}$$

ج) میان داخل رسانا $E = 0$ اما حضور سیمه‌ی نازک و بلند در داخل پسته‌ی رسانا باعث شده میدان داخل رسانا
 به باشد و پس باید بار را به پستی بار سیمه‌ی بار در اما با رعایت منفی روی سطح داخلی پسته توزیع شود
 کپ سطح خارجی استوانه‌ای داخل پسته در نظر بگیریم، R_1 و R_2 شعاع‌های داخلی و خارجی پسته هستند:

$$\lambda_1' = -\lambda \times 10^{-9} \frac{C}{m} \rightarrow q_1' = \lambda_1' l$$

طول سیمه = طول استوانه = l

طول سیمه

چگالی بار سطحی روی سطح داخلی پسته $\rightarrow \sigma_1 = \rho$

مساحت داخلی استوانه: $(2\pi R_1)l$

$$\sigma_1 = \frac{q_1'}{(2\pi R_1)l}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{\lambda_1' l}{(2\pi R_1)l} = \frac{\lambda_1'}{2\pi R_1} = \frac{-\lambda \times 10^{-9} \frac{C}{m}}{2\pi (5 \times 10^{-2} \text{ m})} = -9.4 \times 10^{-9} \frac{C}{m^2}$$

ب) طبق قانون پاسکال بارها را به پستی بارها تولید شود پس باید باری هم از آن به پستی بارها اما با رعایت منفی
 روی پسته خارجی استوانه توزیع شود:

$$\sigma_2 = \rho = \text{چگالی بار سطحی روی سطح خارجی پسته}$$

$$\sigma_2 = \frac{q_2'}{(2\pi R_2)l} = \frac{-\lambda_1' l}{(2\pi R_2)l} = \frac{-\lambda_1'}{2\pi R_2} = \frac{\lambda \times 10^{-9} \frac{C}{m}}{2\pi (10 \times 10^{-2} \text{ m})} = 4.7 \times 10^{-9} \frac{C}{m^2}$$

① استوانه‌ای توپر با پهنای 2cm دارای چگالی بار چگویی نابرابر است که تابعی از فاصله‌ی شعاعی r از محور استوانه است: $\rho = Ar^2$. به ازای $A = 45 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^3}$ ، بکدام میدان الکتریکی در الف) $r = 2\text{cm}$ و ب) $r = 5\text{cm}$ خواهیم رسید؟

پایه:

رابطه‌ی سطح گاوسی =

توزیع بار =

شعاع سطح گاوسی =

الف)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q'}{\epsilon_0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{شعاع استوانه} \\ \text{له شعاع ارتفاع} \end{array} \right.$$

$$A = 2\pi r l \rightarrow dA = 2\pi l dr \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E 2\pi l r \Rightarrow E 2\pi l r = 2\pi l A \frac{r^3}{\epsilon_0 r} \Rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{Ar^2}{\epsilon_0}}$$

$$dq' = \rho dV' \rightarrow q' = \int \rho dV' = \int Ar^2 (2\pi r l dr)$$

جمع سطح بیتی گاوسی

$$dV' = \pi r^2 l = \pi r^2 l dr$$

$$\Rightarrow q' = \int_0^r 2\pi l A r^3 dr = 2\pi l A \frac{r^4}{4}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(2.5 \times 10^{-4} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}) (2 \times 10^{-2} \text{m})^4}{4 (8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2})} = 1.4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

چون ρ تغییر یافته است باید از مرکز لولت و به دورت $q' = \rho V'$ را بنویسیم

شعاع سطح گاوسی

ب)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q''}{\epsilon_0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{شعاع استوانه} \end{array} \right.$$

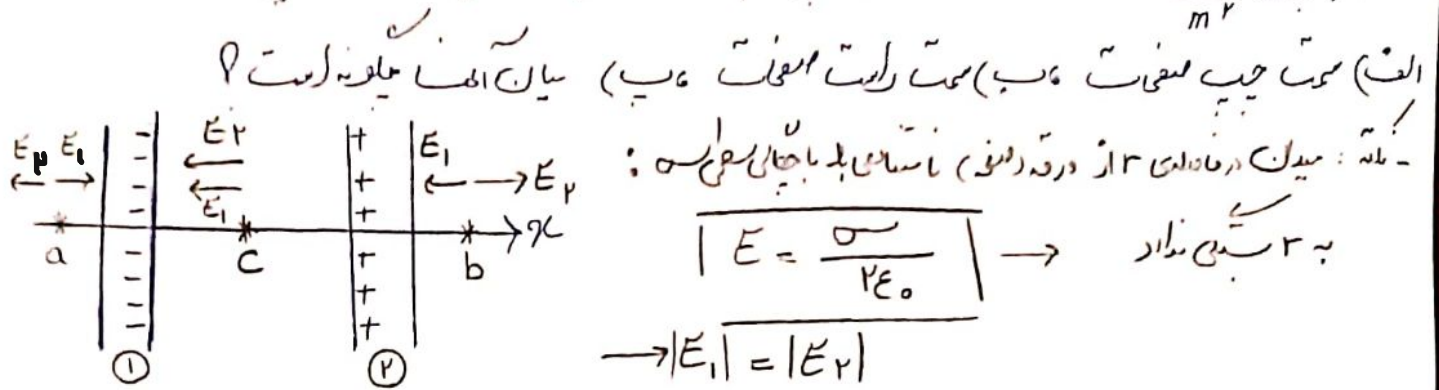
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E 2\pi r l$$

$$q'' = \int_0^R \rho dV'' = \int_0^R Ar^2 (2\pi r l dr) = 2\pi l A \frac{R^4}{4}$$

$$\rightarrow E (2\pi r l) = 2\pi l A \frac{R^4}{\epsilon_0 r} \rightarrow E_r = \frac{AR^3}{\epsilon_0 r} = \frac{(2.5 \times 10^{-4} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}) (2 \times 10^{-2} \text{m})^4}{(8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}) (5 \times 10^{-2} \text{m})}$$

$$\rightarrow E_r = 1.4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

۹) در سطح زیر ۲ صفحه‌ی نظری نازک درلند و سوزنی و خرابی بیلرید. در وجه ها داخلی آن ها و صفحات داخلی جیبی بارشکی اضافه - جیبی $\frac{C}{m^2}$ و 710^{-12} و سطح منفی اند. بر حسب عادی لری بر در لری لری و میدات المتری درقا ه :



$$\vec{E}_a = E_1(\hat{i}) + E_2(-\hat{i}) = 0$$

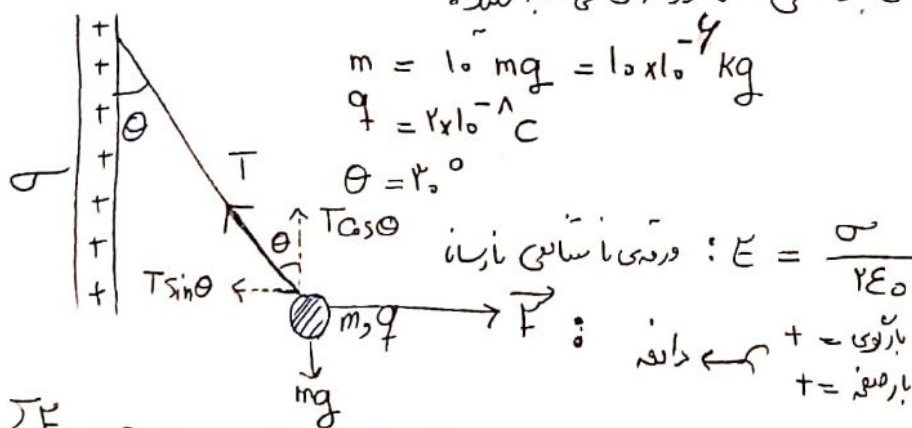
الف) سمت جیب دو صفحه :

$$\vec{E}_b = E_1(-\hat{i}) + E_2(\hat{i}) = 0$$

ب) سمت راست دو صفحه :

$$\vec{E}_c = E_1(-\hat{i}) + E_2(\hat{i}) = -2 \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \hat{i} = -2 \times \frac{710^{-12} \text{ C/m}^2}{2 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2} \hat{i} = -0.4 \hat{i} \text{ N/C}$$

۱۰) در سطح زیر ۲ صفحه‌ی نظری نازک و جیب به جیب $m = 10 \text{ mg}$ و بار $q = 2 \times 10^{-8} \text{ C}$ (به طور یقین است که آن توزیع شده است) از یک نخ صافی افقی است و باریک ورقه‌ی نازک و جیب به جیب با بار یقین است (سطح متوجه آن نشان داده شده) زاویه‌ی $\theta = 30^\circ$ می‌سازد. با در نظر گرفتن نیروی گرانشی و بار الکتریکی و با فرض اینکه ورقه به عوار قائم و به سمت داخل و خارج صفحه تا فواصل دور امتداد یابد و جیبی بارشکی ورقه را می‌سازد.



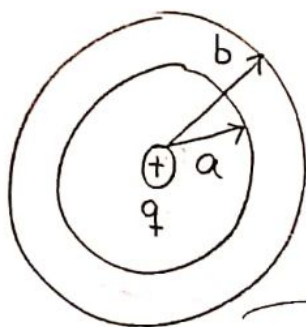
نیروی در جهات تعادل : به این نیروها = 0

باری = +
 بار منفی = -

$\sum F_x = 0 \rightarrow F = T \sin \theta$
 $\sum F_y = 0 \rightarrow mg = T \cos \theta$

$$\frac{(2 \times 10^{-8} \text{ C}) \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right)}{(10^{-5} \text{ kg})(10)} = \tan 30^\circ \rightarrow \sigma = \frac{(0.577)(10^{-5})(2)(8.85 \times 10^{-12})}{2 \times 10^{-8}} = 5.1 \times 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

11) در شکل زیر یک یونتهی کروی بار مثبت به شعاع داخلی $a = 2 \text{ cm}$ و شعاع خارجی $b = 7.4 \text{ cm}$ دارای چگالی بار یکنواخت است. $\rho = \frac{A}{r}$ (روغن فنی متش) است که در آن A ثابت و r فاصله‌ی مرکز یونتهی است. - علاوه بر لوی لوجی با بار $q = 45 \text{ fC}$ در مرکز آن قرار داده است. A باید مقید باشد تا میلان الکتریکی در یونتهی $(a < r < b)$ یکنواخت باشد؟



شعاع داخلی $a = 2 \text{ cm} \rightarrow$

شعاع خارجی $b = 7.4 \text{ cm} \rightarrow$

$$\rho = \frac{A}{r}$$

چگالی سطحی = سطح بار

راست = توزیع بار

در ناحیه $a < r < b$: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q'}{\epsilon_0}$

$A = 4\pi r^2 \rightarrow dA = 4\pi r dr$

$$q' = q + \int \rho dV = q + \int_{r=a}^{r=b} \left(\frac{A}{r}\right) (\epsilon_0 4\pi r^2 dr) = q + 4\pi A \frac{r^2}{2} \Big|_a^b = q + 2\pi A (b^2 - a^2)$$

$\int \rho dV = \int_{r=a}^{r=b} \left(\frac{A}{r}\right) (\epsilon_0 4\pi r^2 dr) = 4\pi A \epsilon_0 \int_{r=a}^{r=b} r dr = 2\pi A \epsilon_0 (b^2 - a^2)$

$\rho = \frac{A}{r}$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E 4\pi r^2 = \frac{q + 2\pi A (b^2 - a^2)}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q + 2\pi A (b^2 - a^2)}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} + \frac{2\pi A b^2}{4\pi r^2 \epsilon_0} - \frac{2\pi A a^2}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{q - 2\pi A a^2}{4\pi r^2 \epsilon_0} + \frac{A}{r^2 \epsilon_0}$$

$q - 2\pi A a^2 = 0 \rightarrow A = \frac{q}{2\pi a^2}$

$$\rightarrow A = \frac{45 \times 10^{-15} \text{ C}}{2\pi (2 \times 10^{-2} \text{ m})^2} = 1.79 \times 10^{-11} \text{ C/m}^2$$

برای اینکه E یکنواخت باشد باید وابستگی به r از بین برود.

۱۲) چگالی حجمی بار الکتریکی توپ به شعاع $R = 5.4 \text{ cm}$ دارای توزیع بار کاهنده با چگالی حجمی $\rho = \left(\frac{14}{m^3} \right) \frac{r}{R}$ است که در آن r فاصله‌ی شعاعی از مرکز توپ است.

الف) بار کل توپ چقدر است؟

ب) بزرگی میدان الکتریکی E در $r = R$ و $r = R/4$ چقدر است؟

پ) نمودار E را بر حسب r رسم کنید.

یادش بخیر :

$$R = 5.4 \text{ cm}$$

$$\rho = 14.1 \times 10^{-12} \left(\frac{C}{m^3} \right) \frac{r}{R}$$

$$q_T = \int \rho dV = \int_{r=0}^{r=R} 14.1 \times 10^{-12} \frac{r}{R} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{(14.1 \times 10^{-12}) (4\pi)}{R} \int_0^R r^3 dr$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$$

$$\Rightarrow q_T = \frac{(14.1 \times 10^{-12}) (4\pi)}{R} \cdot \frac{R^4}{4} = (14.1 \times 10^{-12}) (\pi) (5.4 \times 10^{-2})^3 = 4.18 \times 10^{-15} \text{ C}$$

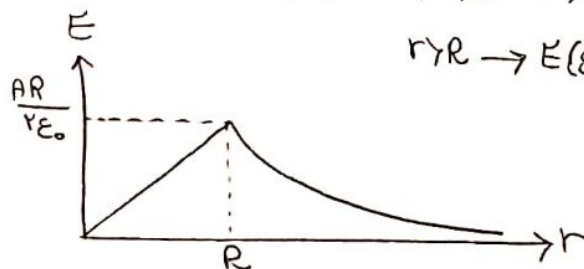
$$\text{ب) } \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{\int_0^r \rho dV}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\int_0^r A \frac{r}{R} 4\pi r^2 dr}{\epsilon_0} \rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{\frac{4\pi A}{R} \cdot \frac{r^4}{4}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Ar^2}{4\pi \epsilon_0 R}$$

$$r = R \rightarrow E = \frac{AR}{4\pi \epsilon_0} = \frac{(14.1 \times 10^{-12}) (5.4 \times 10^{-2})}{4\pi (8.85 \times 10^{-12})} = 2.13 \times 10^{-2} \text{ N/C}$$

$$r = R/4 \rightarrow E = \frac{AR}{16\pi \epsilon_0} = 0.13 \times 10^{-2} \text{ N/C}$$

$$\text{پ) } r=0 \rightarrow E=0 \rightarrow 0 < r < R \rightarrow E = \frac{Ar^2}{4\pi \epsilon_0 R}$$



$$r > R \rightarrow E(E_{\text{surface}}) = \frac{\int_0^R \rho dV}{\epsilon_0} = \frac{q_T}{\epsilon_0} = \frac{A\pi R^3}{\epsilon_0}$$

$$r > R \rightarrow E = \frac{AR^3}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$