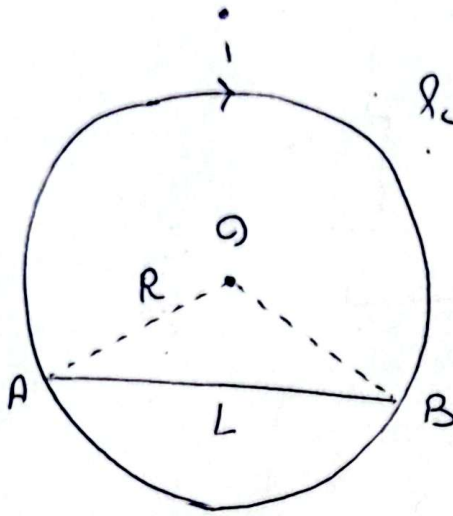


۷. عبور سؤالات پایانه

① سیم لوله‌ای طولی با شعاع R با n دور در واحد طول حامل جریان $i = \alpha t$ ای با نرخ α تعدادی ثابت و \oplus است. میله‌ای مطابق شکل: طول L در داخل سیم لوله قرار گرفته است. (الف) میدان الکتریکی را در داخل و خارج سیم لوله بیابید.



(ب) انرژی مقایسه‌ای ذخیره شده در واحد طول از این سیم لوله چقدر است؟

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} = \mu_0 n i$$

$$N = n l \rightarrow \text{طول} \quad \downarrow \quad \text{تعداد دور} \quad \downarrow \quad \text{تعداد دور} \quad \downarrow \quad \text{طول}$$

$$\rightarrow \left| \frac{N}{l} = n \right|$$

$$\rightarrow B = \mu_0 n i = \mu_0 n (\alpha t)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ \mathcal{E} &= - \frac{d\Phi_B}{dt} \\ \Phi_B &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \end{aligned} \right\} \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\rightarrow 0 < r < R \rightarrow E_r(2\pi r) = \pi r^2 \left(- \frac{d}{dt} \mu_0 n \alpha t \right) \rightarrow |E_r| = \frac{\mu_0 n \alpha r}{2}$$

$$r > R \rightarrow E_r(2\pi r) = \pi R^2 \left(- \frac{d}{dt} \mu_0 n \alpha t \right) \rightarrow |E_r| = \frac{\mu_0 n \alpha R^2}{2r}$$

$$U = \int u dV = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int \frac{\mu_0 n^2 \alpha^2 t^2}{2\mu_0} dV = \frac{\mu_0 n^2 \alpha^2 t^2}{2} \int r dr \int d\varphi \int dz$$

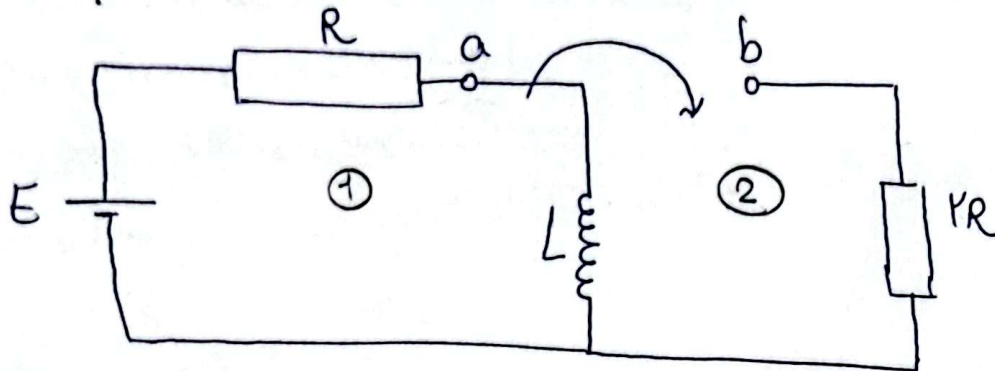
$$dV = r dr d\varphi dz$$

$$\int_0^R r dr = \frac{R^2}{2}, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, \quad \int_0^L dz = L$$

$$\rightarrow \frac{U}{L} = \frac{\mu_0 n^2 \alpha^2 t^2 \pi R^2}{2}$$

انرژی مقایسه‌ای ذخیره شده در واحد طول

۲) در مدار شکل زیر کلید S به سمت چپ یعنی در موقعیت a بوده و در لحظه $t=0$ به موقعیت b می‌رود. الف) مطلوب است بی‌سببی جریان و ولتاژ القایی به صورت تابعی از زمان $(t \geq 0)$ ب) پس از آنکه کلید به موقعیت b می‌رود، کار انرژی تلف شده در مقاومت \underline{R} محاسبه کنید؟



$$i_L(t=0^-) = i_L(t=0^+)$$

① حلقه ۱: $E - iR - L \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow i_R(t=0^-) = i_L(t=0^-) = \frac{E}{R}$

↑ در سمت چپ کلید در موقعیت a

ب) بازگشت کلید به موقعیت b :

حلقه ۲: $i_L(2R) + L \frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di_L}{dt} + i_L \left(\frac{2R}{L} \right) = 0 \xrightarrow{\times \frac{dt}{i_L}}$

$$\rightarrow \frac{di_L}{i_L} = -\frac{2R}{L} dt \rightarrow \int \frac{di_L}{i_L} = \int -\frac{2R}{L} dt$$

$$\rightarrow \ln(i_L) = -\frac{2R}{L} t \rightarrow i_L = Ae^{-\frac{2R}{L} t} + C$$

لمتغییر استوار

$$t \rightarrow \infty \rightarrow i_L = 0 \rightarrow C = 0$$

$$i_L(t=0^+) = \frac{E}{R} \rightarrow \frac{E}{R} = A$$

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} = L \cdot \frac{E}{R} \cdot \left(-\frac{2R}{L} \right) \cdot e^{-\frac{2R}{L} t} \rightarrow V_L = -2E e^{-\frac{2R}{L} t}$$

این $2R$ این است

الف) توان گرمایی (تلف) در R : $P_R = i^2 R$

از فرمول: $P_R = \frac{dU}{dt}$

انرژی تلف شده $= U$

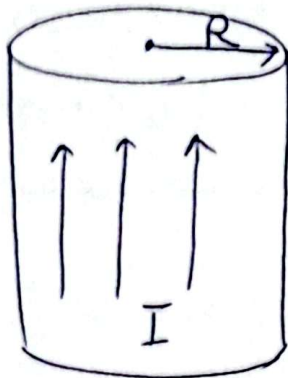
$$\rightarrow dU = P_R dt \rightarrow U = \int_0^\infty \frac{E^2}{R} e^{-\frac{4R}{L} t} dt$$

$$\rightarrow U = \frac{E^2}{R} \cdot \frac{L}{-4R} \cdot 2R \left(e^{-\frac{4R}{L} t} \Big|_0^\infty \right) = \frac{E^2}{2R} L$$

۱۳) از سیم طول مستقیم مطابق شکل، به طول l ، و شعاع R جریان یکنواخت I می‌گذرد.

الف) میدان مغناطیسی را در داخل و خارج این سیم بیست آید.

ب) انرژی مغناطیسی ذخیره شده در داخل سیم محاسب است؟



الف) $\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_1 \rightarrow B_1 (2\pi r) = \mu_0 i$ (برای $r < R$)
 ب) $\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_2 \rightarrow B_2 (2\pi r) = \mu_0 I$ (برای $r > R$)

جریان یکنواخت $\rightarrow J = \frac{i_1}{A_1} = \frac{I}{A} \rightarrow \frac{i}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi R^2} \rightarrow i = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$

$\rightarrow i = I \frac{r^2}{R^2}$

$\rightarrow B_1 (2\pi r) = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$

$r > R \rightarrow \oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_2 \rightarrow B_2 (2\pi r) = \mu_0 I \rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$i_2 = I$

$U = \int u dV$

$u = \frac{B^2}{2\mu_0} \rightarrow u = \frac{B_1^2}{2\mu_0}$

$dV = r dr d\phi dz$

$\rightarrow U = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^4} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^l dz = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$

۴) قابی با مقاومت R مطابق شکل با سرعت ثابت v در جهت عمودی میان مقاطع مغناطیسی با نواخت B حرکت می کند.

الف) اندازه و جهت جریان القایی در قاب را تعیین کنید.

ب) کل نیروی مغناطیسی وارده بر این قاب محاسبه کنید.

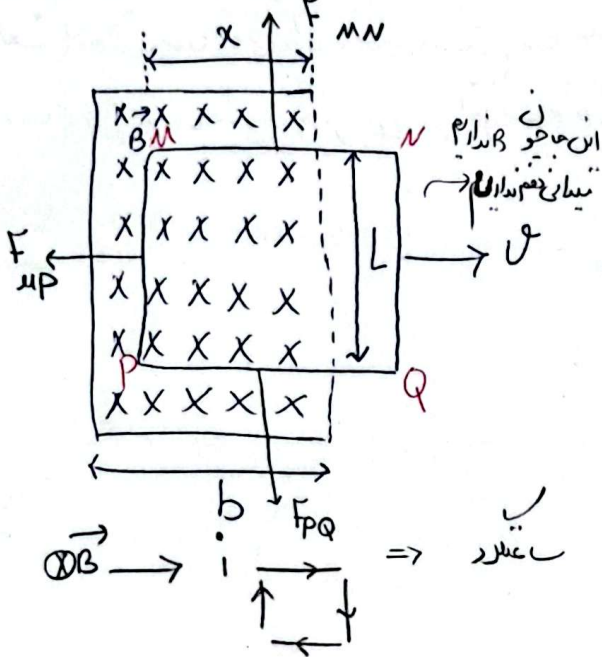
ج) توان تلف شده در قاب را بدست آورید.

الف)

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = BLx$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \rightarrow \mathcal{E} = -BL \frac{dx}{dt} \rightarrow$$

$$|\mathcal{E}| = BLv$$



$$\vec{B} \otimes \rightarrow i \Rightarrow \text{ساعتگرد} \quad i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} \rightarrow i = \frac{BLv}{R}$$

۵) $F_{MN} - F_{PQ} = 0 \rightarrow F_{MN} = F_{PQ}$

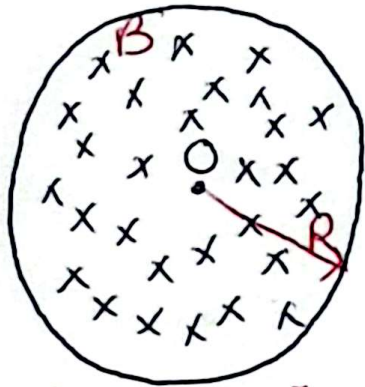
$F_{MP} = BiL \sin \theta = i \vec{L} \times \vec{B} \rightarrow F_{MP} = BiL$

$i \otimes B \rightarrow \theta = 90^\circ$

$F_{MP} = \frac{B^2 L^2 v}{R}$

۶) توان تلف شده : $P_R = i^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$

۵) میدان مغناطیسی که یواخت متغیر با زمان محدود به داخل استوانه‌ای به شعاع R بوده و جهت آن در راستای محور استوانه است. الف) جهت داندازه میدان الکتریکی القایی را در داخل استوانه به شعاع $\frac{R}{2}$ بیست آورید. ب) خارج از استوانه در شعاع $2R$ بیست آورید. $\alpha = \text{ثابت و مثبت}$



شعاع استوانه طولی



$$\bullet r < R \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (B = \alpha t^2)$$

$$\rightarrow E_r (2\pi r) = - \frac{d}{dt} (\alpha t^2) \cdot \pi r^2 \rightarrow |E_r| = \alpha t r$$

$$r = \frac{R}{2} \rightarrow |E_r| = \frac{\alpha t R}{2}$$

$$r > R \rightarrow E_r (2\pi r) = (-\alpha t) (\pi R^2) \rightarrow |E_r| = \frac{\alpha t R^2}{r}$$

$$r = 2R \rightarrow |E_r| = \frac{\alpha t R}{4}$$