به نام خدا

۳۲۱

امتحان پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل

« دانشگاه صنعتی امیرکبیر »

(دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

نام و نام‌خانوادگی:

شماره دانشجویی:

سه شنبه: ۹۸/۱۱/۰۱

مدت: ۱۳۰ دقیقه

۱- به کمک سری توانی، جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را حول $x = 0$ به‌دست آورید. (۲۴ نمره)

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0.$$

۲- یک جواب معادله دیفرانسیل زیر را به کمک سری حول $x = 0$ به‌دست آورید و تنها فرم جواب دوم را بنویسید. (۲۴ نمره)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 2)y = 0.$$

۳- به کمک تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید. (۲۴ نمره)

$$y'' - y = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1 \\ t - 1, & t > 1 \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

۴- مطلوبست محاسبه عبارات زیر

$$i)\ \mathcal{L}\left\{ te^{2t} \int_0^t e^{-2x} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) dx \right\} = ?$$

$$ii)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \cot^{-1}(2s + 1) + \frac{1}{2^s(s - 1)} \right\} = ?$$

(هر کدام ۱۲ نمره)

۵- دستگاه زیر را به روش ماتریسی حل کنید. (۲۴ نمره)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + t - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y - 5t - 2 \end{cases}$$

با آرزوی کامیابی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

پاسخ سوالات پایانترم دی ماه ۹۸

۱ـ $x = 0$ یک نقطه عادی.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 12 a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 12 a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + 6a_3 x - 2a_1 x + 12 a_0 + 12 a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2) a_{n+2} + (-n^2 + n - 2n + 12) a_n] x^n = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a_2 = -12 a_0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -6 a_0$$

$$\Rightarrow \quad 6a_3 = -10 a_1 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\frac{5}{3} a_1$$

$$a_{n+2} = \frac{(n+4)(n-3)}{(n+1)(n+2)} a_n \qquad n \geq 2$$

$$a_4 = -\frac{1}{2} a_2 = 3 a_0, \quad a_5 = a_7 = \cdots = a_{2n+1} = 0 \quad n \geq 2$$

$$y = a_0 (1 - 6x^2 + 3x^4 + \cdots) + a_1 (x - \frac{5}{3} x^3)$$

۲ـ $x=0$ نقطه تکین.

$$\lim_{x\to 0} x\times\frac{1}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0} x^2\times\frac{x^2-2}{x^2}=-2$$

معادله شاخص : $\quad r(r-1)+r-2=0 \quad\Rightarrow\quad r^2-2=0 \quad\Rightarrow\quad r=\pm\sqrt{2}$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\sqrt{2}}$$
$$y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sqrt{2})a_nx^{n+\sqrt{2}-1}$$
$$y_1''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sqrt{2})(n+\sqrt{2}-1)a_nx^{n+\sqrt{2}-2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sqrt{2})(n+\sqrt{2}-1)a_nx^{n+\sqrt{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sqrt{2})a_nx^{n+\sqrt{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\sqrt{2}+2}-\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^{n+\sqrt{2}}=0$$
$$\Rightarrow\quad \sum_{n=0}^{\infty}[n(n+2\sqrt{2})a_n]x^{n+\sqrt{2}}+\sum_{n=2}a_{n-2}x^{n+\sqrt{2}}=0$$
$$(2\sqrt{2}+1)a_1+\sum_{n=2}^{\infty}[n(n+2\sqrt{2})a_n+a_{n-2}]x^{n+\sqrt{2}}=0$$
$$a_1=0,\qquad a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n+2\sqrt{2})}$$
$$a_2=-\frac{a_0}{2(2+2\sqrt{2})},\quad a_3=a_5=\cdots=a_{2n-1}=0\quad n\geq 1$$
$$a_4=-\frac{a_2}{4(4+2\sqrt{2})}=\frac{a_0}{8(2+2\sqrt{2})(4+2\sqrt{2})}$$
$$y_1=a_0\left(1-\frac{1}{2(2+2\sqrt{2})}x^2+\frac{1}{8(2+2\sqrt{2})(4+2\sqrt{2})}x^4-+\cdots\right)$$
$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-\sqrt{2}}$$

۳ـ

$$y''-y=(t-1)u_1(t)$$

فرض می‌کنیم $\mathcal{L}\{y(t)\}=F(s)$.

$$s^2F(s)-sy(0)-y'(0)-F(s)=e^{-s}\mathcal{L}\{(t+1)-1\}\Rightarrow\quad (s^2-1)F(s)=\frac{e^{-s}}{s^2}$$
$$\Rightarrow\quad F(s)=\frac{e^{-s}}{s^2(s^2-1)}\quad\Rightarrow\quad y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2(s^2-1)}\right\}=u_1(t)f(t-1)$$
$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2}\right\}=\sinh t-t$$
$$y(t)=u_1(t)\big(\sinh(t-1)-t+1\big)$$

۴ـ $(i$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{te^{۲t}\int_{۰}^{t} e^{-۲x}\frac{۱-\cos x}{x}dx\right\} &= \mathcal{L}\left\{t\int_{۰}^{t} e^{۲(t-x)}\frac{۱-\cos x}{x}dx\right\} \\
&= -\left(\mathcal{L}\{e^{۲t}\}\times\mathcal{L}\left\{\frac{۱-\cos t}{t}\right\}\right)' \\
&= -\left(\frac{۱}{s-۲}\times\int_{s}^{\infty}\mathcal{L}\{۱-\cos t\}du\right)' \\
&= -\left(\frac{۱}{s-۲}\times\int_{s}^{\infty}\frac{۱}{u}-\frac{u}{u^{۲}+۱}du\right)' \\
&= -\left(\frac{۱}{s-۲}\times\ln\frac{u}{\sqrt{u^{۲}+۱}}\bigg|_{s}^{\infty}\right)' \\
&= -\left(\frac{۱}{s-۲}\times\ln\frac{\sqrt{s^{۲}+۱}}{s}\right)'
\end{aligned}$$

$(ii$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-۱}\left\{\cot^{-۱}(۲s+۱)+\frac{۱}{۲^{s}(s-۱)}\right\} \\
&= -\frac{۱}{t}\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{d}{ds}\cot^{-۱}(۲s+۱)\right\}+\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-s(\ln ۲)}}{s-۱}\right\} \\
&= \frac{۱}{t}\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۲}{۱+(۲s+۱)^{۲}}\right\}+u_{\ln ۲}(t)\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s-۱}\right\}\bigg|_{t\to t-\ln ۲} \\
&= \frac{۱}{t}\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{\frac{۱}{۲}}{(s+\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۱}{۴}}\right\}+u_{\ln ۲}(t)e^{t}\bigg|_{t\to t-\ln ۲} \\
&= \frac{e^{-\frac{t}{۲}}}{t}\sin\frac{t}{۲}+u_{\ln ۲}(t)e^{t-\ln ۲} = \frac{e^{-\frac{t}{۲}}}{t}\sin\frac{t}{۲}+\frac{۱}{۲}u_{\ln ۲}(t)e^{t}
\end{aligned}$$

۵ـ

$$X' = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t-۱ \\ -۵t-۲ \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = ۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} ۱-\lambda & ۲ \\ ۳ & ۲-\lambda \end{vmatrix} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \lambda^{۲} - ۳\lambda - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda-۴)(\lambda+۱) = ۰ \quad \Rightarrow \quad \lambda_۱ = ۴, \quad \lambda_۲ = -۱$$

$$(A-\lambda_۱ I)V_۱ = ۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -۳ & ۲ \\ ۳ & -۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_۱ \\ v_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad ۲v_۲ = ۳v_۱ \to v_۱ = ۲ \quad \Rightarrow \quad v_۲ = ۳ \quad \Rightarrow \quad V_۱ = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda_۲ I)V_۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ ۳ & ۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_۱ \\ v_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v_۲ = -v_۱ \to v_۱ = ۱ \quad \Rightarrow \quad v_۲ = -۱ \quad \Rightarrow \quad V_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

$$X_h(t) = c_۱ e^{۴t} \begin{pmatrix} ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} + c_۲ e^{-t} \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲c_۱ e^{۴t} + c_۲ e^{-t} \\ ۳c_۱ e^{۴t} - c_۲ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} At+B \\ Ct+D \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} At+B \\ Ct+D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t-۱ \\ -۵t-۲ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = (A+۲C+۱)t + B + ۲D - ۱$$

$$\Rightarrow \quad C = (۳A+۲C-۵)t + ۳B + ۲D - ۲$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A+۲C = -۱ \\ ۳A+۲C = ۵ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = ۳, \quad C = -۲$$

$$\begin{cases} B+۲D-۱ = A \quad \Rightarrow \quad B+۲D = ۴ \\ ۳B+۲D-۲ = -۲ \quad \Rightarrow \quad ۳B+۲D = ۰ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B = -۲, \quad D = ۳$$

$$\Rightarrow \quad X_p(t) = \begin{pmatrix} ۳t-۲ \\ -۲t+۳ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X(t) = X_h(t) + X_p(t) = \begin{pmatrix} ۲c_۱ e^{۴t} + c_۲ e^{-t} + ۳t - ۲ \\ ۳c_۱ e^{۴t} - c_۲ e^{-t} - ۲t + ۳ \end{pmatrix}$$