فصل سوم :

قانون گاوس

آنچه در این فصل می خوانیم :

۱) شار میدان الکتریکی

۲) قانون گاوس و حل مساله به کمک آن

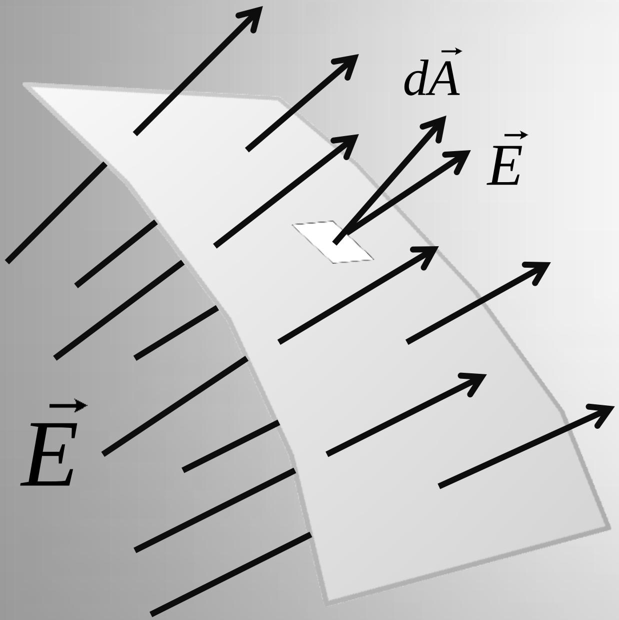
۳) رساناها

بخش اول:

شارمیدان الکتریکی

مفهوم شار

میزان خطوط یک میدان که از یک سطح مفروض می گذرد.



شار میدان الکتریکی $\vec{E}$ گذرنده از سطحی با

مساحت $\vec{A}$ برابر است با :

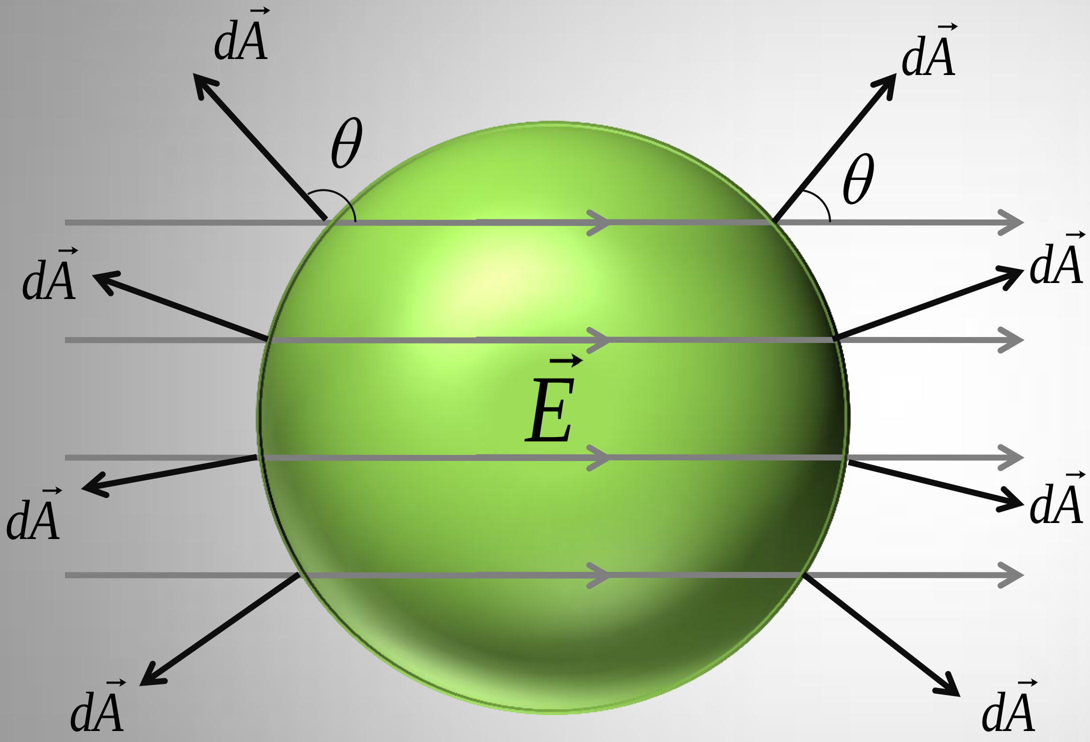
$$\phi_E = \int \vec{E} \, . \, d\vec{A}$$

بردار $d\vec{A}$ برداری عمود بر عنصر سطح dA

است که طول آن با مساحت dA برابر است.

نکته های مربوط به شار میدان الکتریکی

۱) اگر سطح مورد نظر بسته باشد بردار $d\vec{A}$ به طرف بیرون سطح است. در چنین حالتی شار ورودی، منفی و شار خروجی مثبت است. اگر شار ورودی و خروجی برابر باشد شارعبوری کل صفر است.



$$\vec{E}\,.\,d\vec{A} = EdA\cos\theta$$

برای شار ورودی:

$$\theta > \text{۹۰}^\circ \Rightarrow \cos\theta < \text{۰}$$

$$\Rightarrow \vec{E}\,.\,d\vec{A} < \text{۰}$$

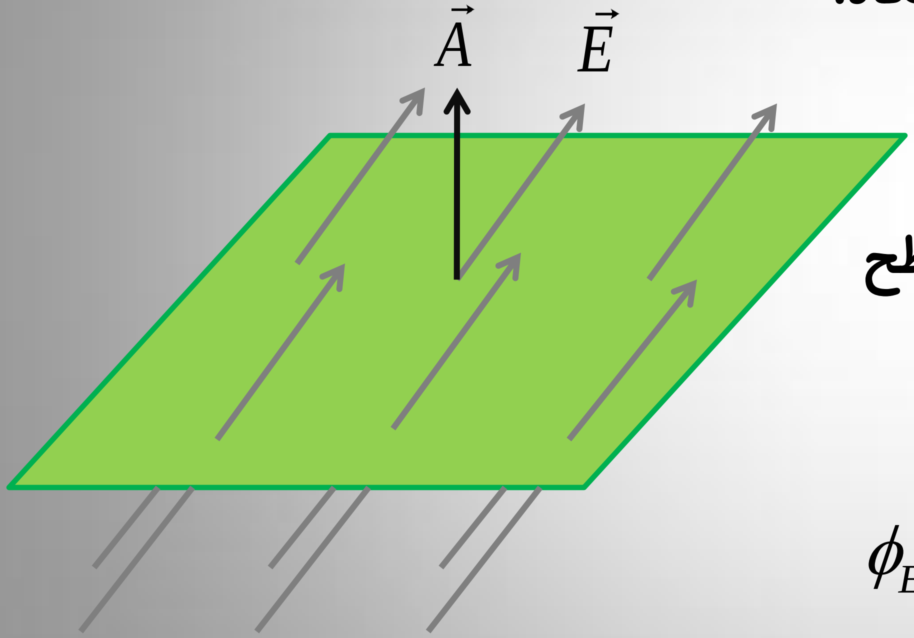
برای شار خروجی:

$$\theta < \text{۹۰}^\circ \Rightarrow \cos\theta > \text{۰}$$

$$\Rightarrow \vec{E}\,.\,d\vec{A} > \text{۰}$$

نکته های مربوط به شار میدان الکتریکی

۲) اگر میدان، یکنواخت و سطح تخت باشد آنگاه:



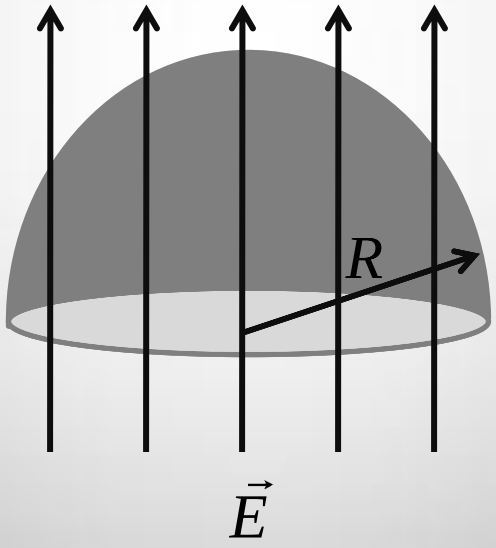
$$\phi_E = EA\cos\theta$$

برای سطح موازی با میدان هیچ شاری از سطح

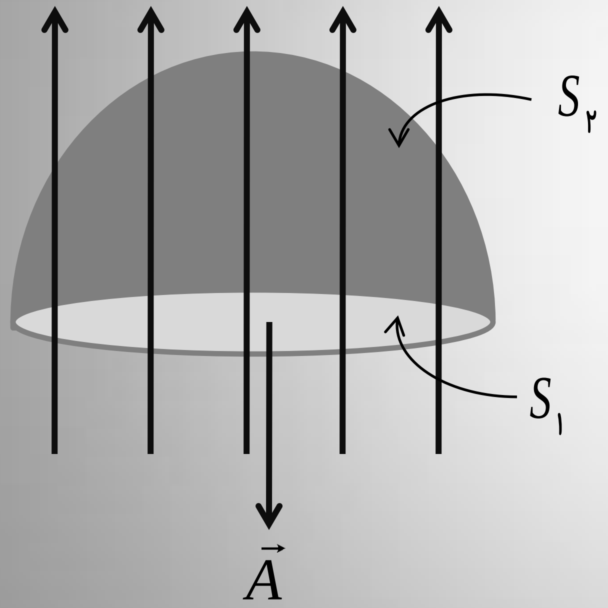
عبور نمی کند و برای سطح عمود بر میدان:

$$\phi_E = \begin{cases} +EA & \theta = ۰^\circ \\ -EA & \theta = ۱۸۰^\circ \end{cases}$$

مثال) نیمکره ای به شعاع R طوری در میدان الکتریکی یکنواخت E قرار گرفته است که محور مرکزی آن با میدان موازی است. شار عبوری از نیمکره چقدر است؟



پاسخ) شار عبوری از کل سطح $S_۱ + S_۲$ برابر صفر است.



$$\phi_{ES_۱} + \phi_{ES_۲} = ۰ \Rightarrow \phi_{ES_۲} = -\phi_{ES_۱}$$

برای سطح $S_۱$ داریم $\theta = ۱۸۰^\circ$ لذا:

$$\phi_{ES_۱} = -EA = -E\left(\pi R^۲\right)$$

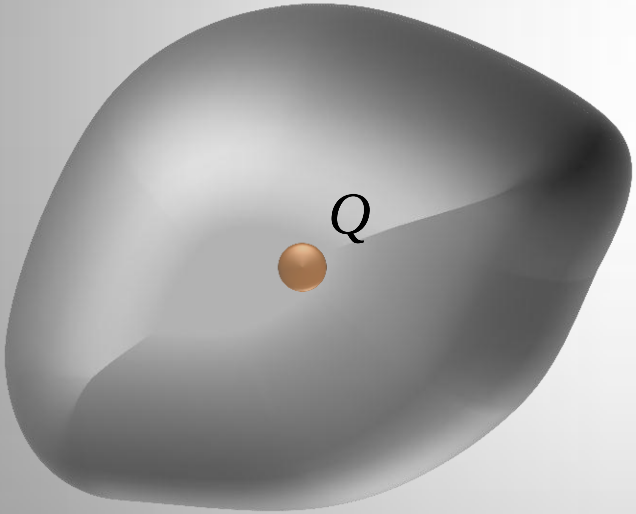
$$\Rightarrow \phi_{ES_۲} = E\left(\pi R^۲\right)$$

بخش دوم:

قانون گاوس و حل مساله به کمک آن

قانون گاوس

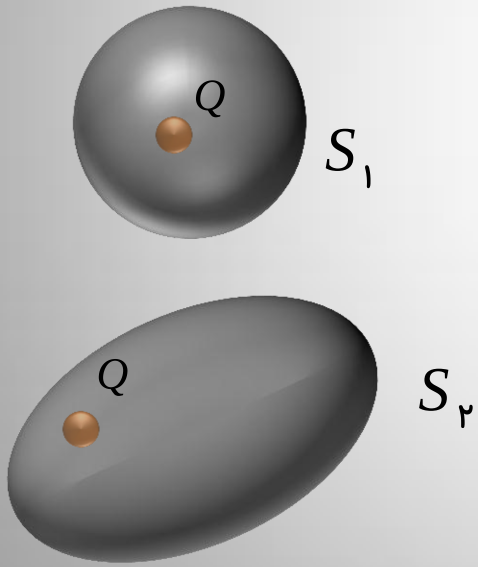
شار میدان الکتریکی خالص گذرنده از یک سطح بسته (سطح گاوسی) برابر است با : $Q/\varepsilon_\circ$ که Q بار خالص داخل سطح بسته است.



$$\oint \vec{E} \, . \, d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_\circ}$$

نکته های مربوط به قانون گاوس

۱) قانون گاوس به شکل سطح و موضع دقیق بار های درون سطح بستگی ندارد.



$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

نکته های مربوط به قانون گاوس

۲) اگر بار خالص داخل سطح صفر باشد، شار گذرنده از سطح صفر است نه میدان الکتریکی روی سطح.

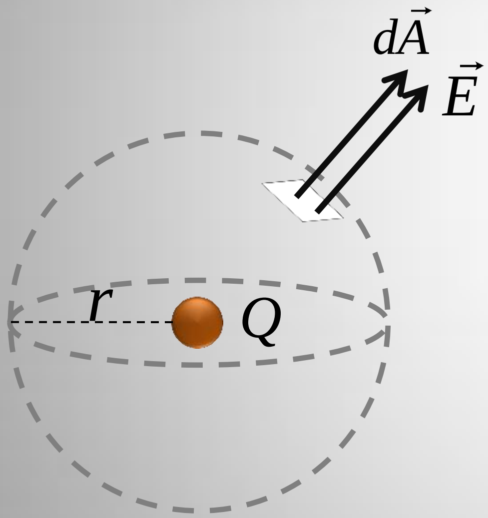
موارد استفاده و مزیت های قانون گاوس

۱) می توان با استفاده از این قانون، میدان الکتریکی توزیع های بار به حد کافی متقارن را یافت. برای این کار از سطوح گاوسی با تقارن مناسب استفاده می کنیم طوری که میدان الکتریکی روی این سطوح ثابت باشد.

۲) قانون گاوس برای بارهای متحرک نیز معتبر است در حالی که قانون کولن فقط برای بار های در حال سکون کاربرد دارد.

۳) می توان قانون کولن را از قانون گاوس به دست آورد.

میدان بار نقطه ای با استفاده از قانون گاوس



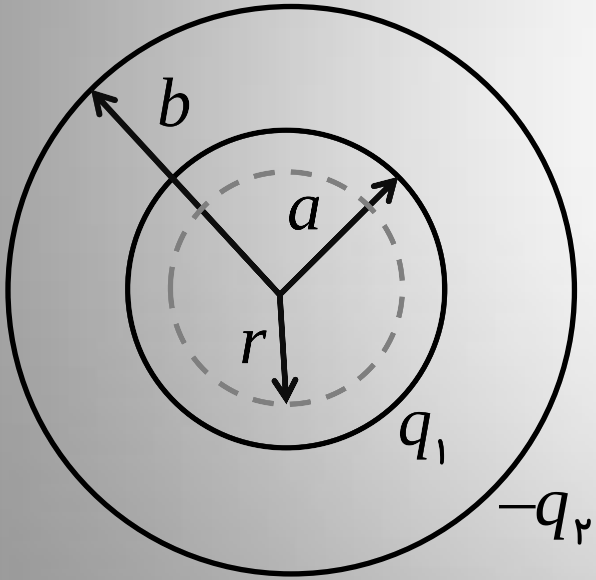
$$\vec{E}\,.\,d\vec{A} = EdA$$

$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = E\oint dA = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$\Rightarrow E\left(۴\pi r^{۲}\right) = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۲}} = k\,\frac{q}{r^{۲}}$$

مثال) بارهای الکتریکی q_1 و $-q_2$ روی دو سطح کروی هم مرکز به طور یکنواخت توزیع شده اند. میدان الکتریکی را در $r < a$ ، $a < r < b$ و $r > b$ بیابید.

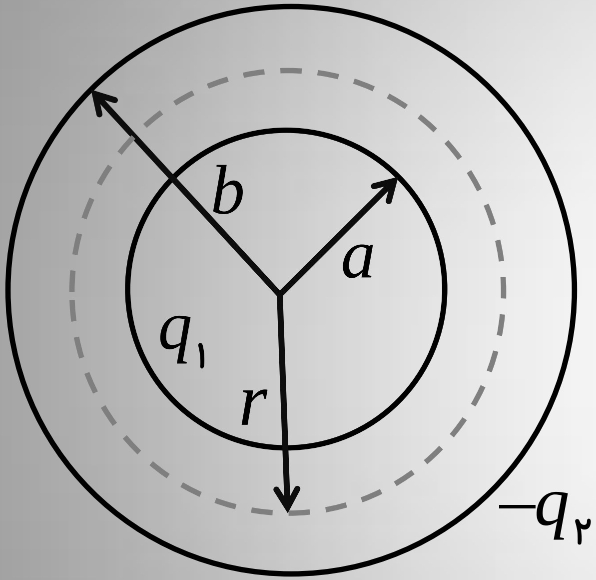


پاسخ) برای هر ناحیه، از سطح گاوسی کروی هم مرکز استفاده می کنیم. برای $r < a$:

$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$

میدان الکتریکی داخل پوسته باردار با توزیع بار یکنواخت صفر است.

برای ناحیه $a < r < b$:



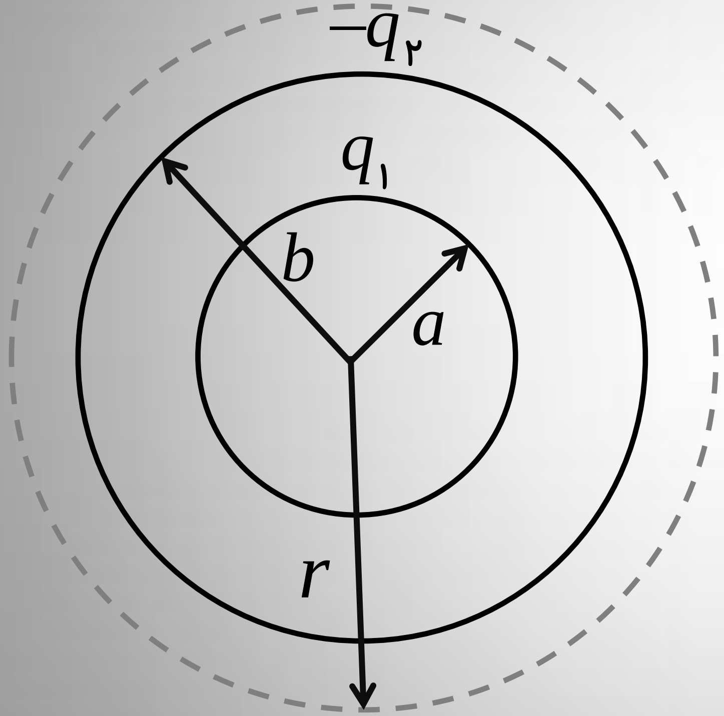
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E \oint dA = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\,\frac{q_1}{r^2}$$

میدان الکتریکی خارج پوسته باردار با توزیع بار یکنواخت به گونه ای است که گویی تمام بار در مرکز کره متمرکز شده است.

برای ناحیه $r > b$:



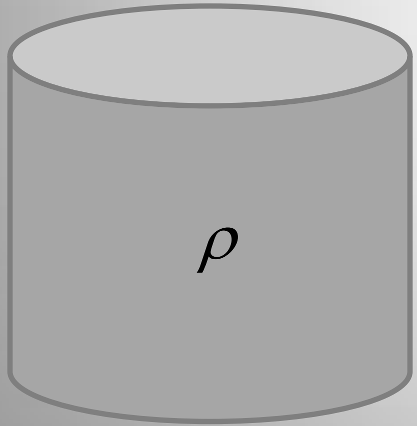
$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_1 - q_2}{\varepsilon_0}$$

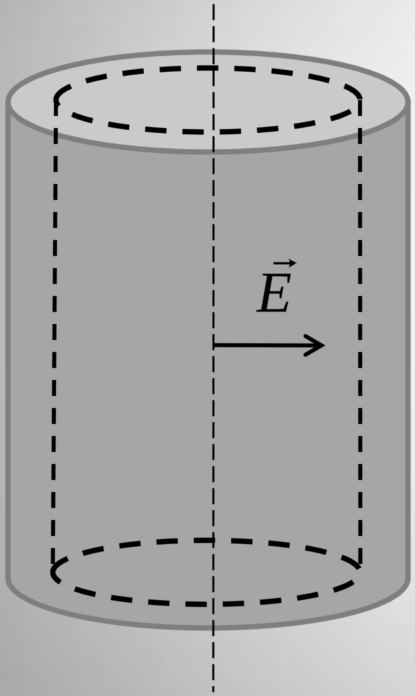
$$\Rightarrow \quad E \oint dA = \frac{q_1 - q_2}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q_1 - q_2}{\varepsilon_0}$$

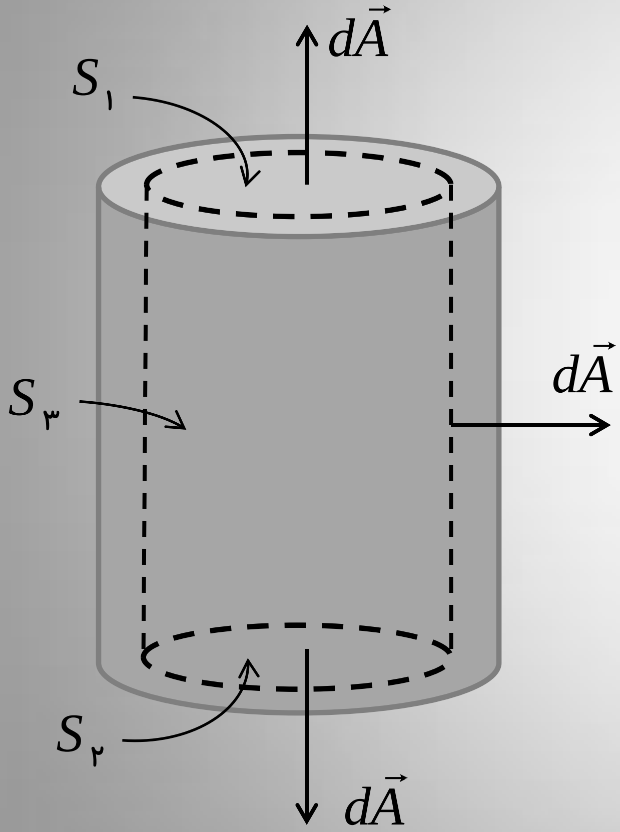
$$\Rightarrow \quad E = \frac{q_1 - q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\,\frac{q_1 - q_2}{r^2}$$

مثال) استوانه ای بینهایت بلند به شعاع R و توزیع حجمی بار یکنواخت ρ را در نظر بگیرید. الف) میدان الکتریکی را در فاصله شعاعی r در حالت های $r < R$ و $r > R$ بیابید. ب) آیا نتایج به دست آمده در $r = R$ سازگارند؟ نمودار تغییرات میدان را بر حسب فاصله از مرکز استوانه رسم کنید.





پاسخ) برای ناحیه $r < R$ سطح گاوسی را استوانه ای به شعاع r و طول L در نظر می گیریم. از تقارن مساله پیداست که میدان فقط در راستای عمود بر محور استوانه مولفه دارد.



میدان روی سطح $S_{۳}$ با بردار عمود بر سطح موازی و روی سطوح $S_{۲}$ و $S_{۱}$ عمود بر آن است.

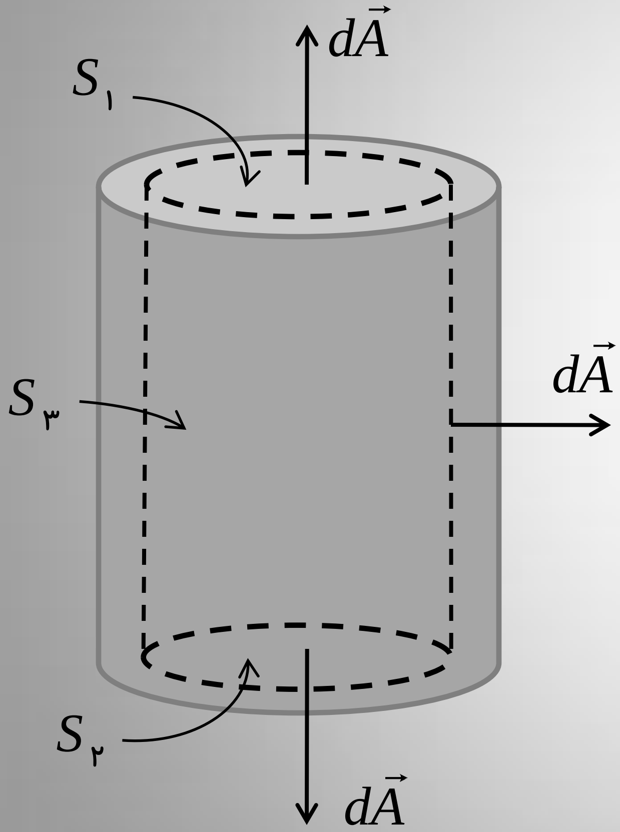
صفر

$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \int_{S_{۱}} \vec{E}\,.\,d\vec{A} + \cancel{\int_{S_{۲}} \vec{E}\,.\,d\vec{A}} + \int_{S_{۳}} \vec{E}\,.\,d\vec{A}$$

$$= E\int_{S_{۳}} dA = E\left(۲\pi r L\right)$$

بار موجود در سطح گاوسی:

$$Q = \rho\, V = \rho\left(\pi r^{۲} L\right)$$



لذا میدان داخل استوانه برابر است با:

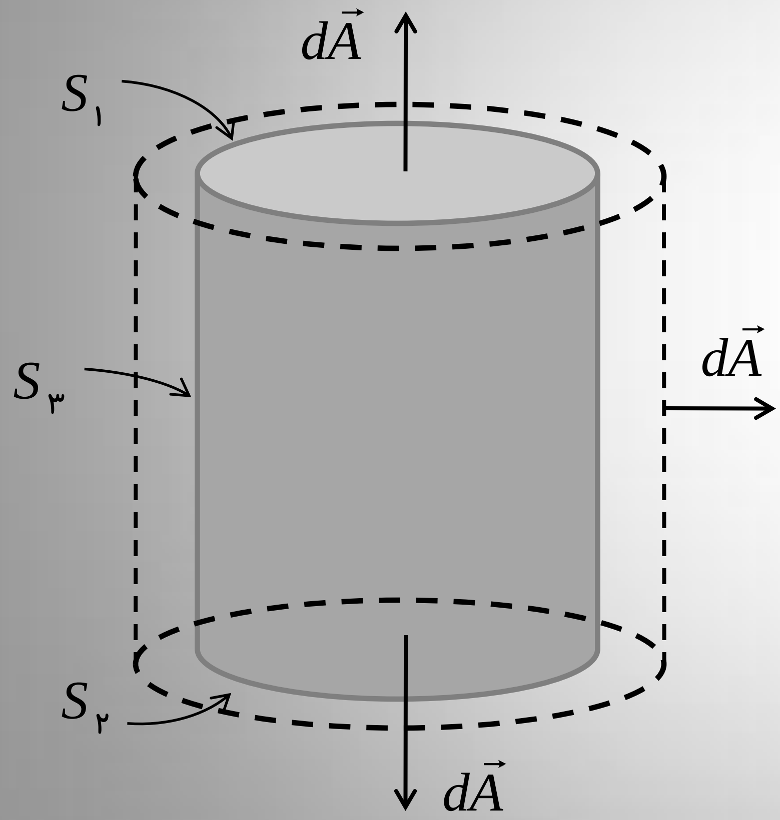
$$\oint \vec{E} \,.\, d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E\left(2\pi rL\right) = \frac{\rho\left(\pi r^2 L\right)}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$$

برای خارج استوانه سطح گاوسی مشابهی

با شعاع $r > R$ در نظر می گیریم.



$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = E\left(۲\pi rL\right) = \frac{Q}{\varepsilon_\circ}$$

$$Q = \rho\ V\ = \rho\left(\pi R^{۲}L\right)$$

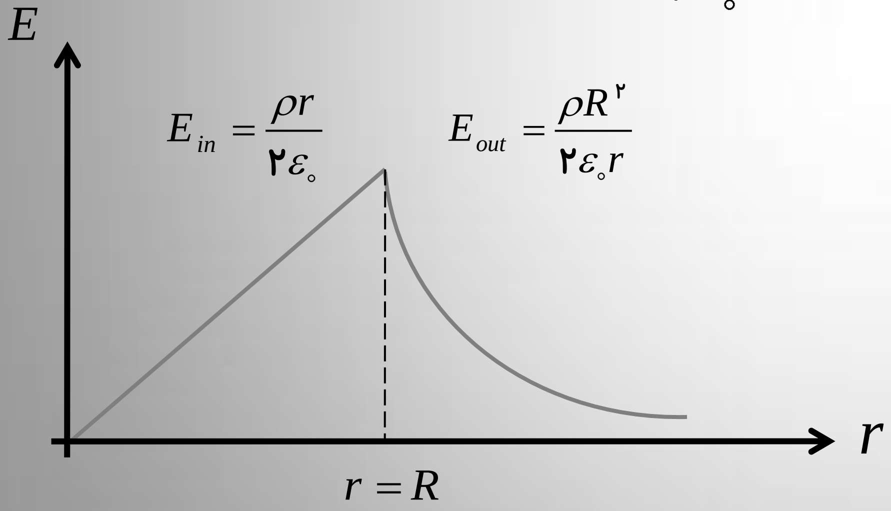
$$E\left(۲\pi rL\right) = \frac{\rho\left(\pi R^{۲}L\right)}{\varepsilon_\circ}$$

$$E\ = \frac{\rho R^{۲}}{۲\varepsilon_\circ r}$$

$$E_{in} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_\circ} \xrightarrow{r=R} E_{in} = \frac{\rho R}{2\varepsilon_\circ}$$

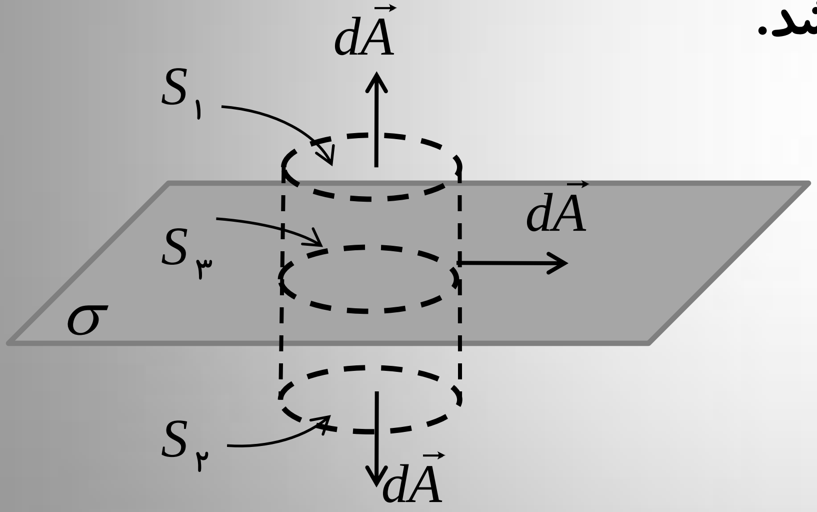
$$E_{out} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_\circ r} \xrightarrow{r=R} E_{out} = \frac{\rho R}{2\varepsilon_\circ}$$

نمودار تغییرات میدان بر حسب فاصله



مثال) میدان الکتریکی ناشی از یک صفحه باردار نامتناهی با چگالی بار یکنواخت σ را به دست آورید.

پاسخ) میدان در راستای عمود بر صفحه می باشد.



$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \int_{S_{۱}} \vec{E}\,.\,d\vec{A} + \int_{S_{۲}} \vec{E}\,.\,d\vec{A}$$

$$+\int_{S_{۳}} \vec{E}\,.\,d\vec{A} = EA + EA = \frac{Q}{\varepsilon_{۰}}$$

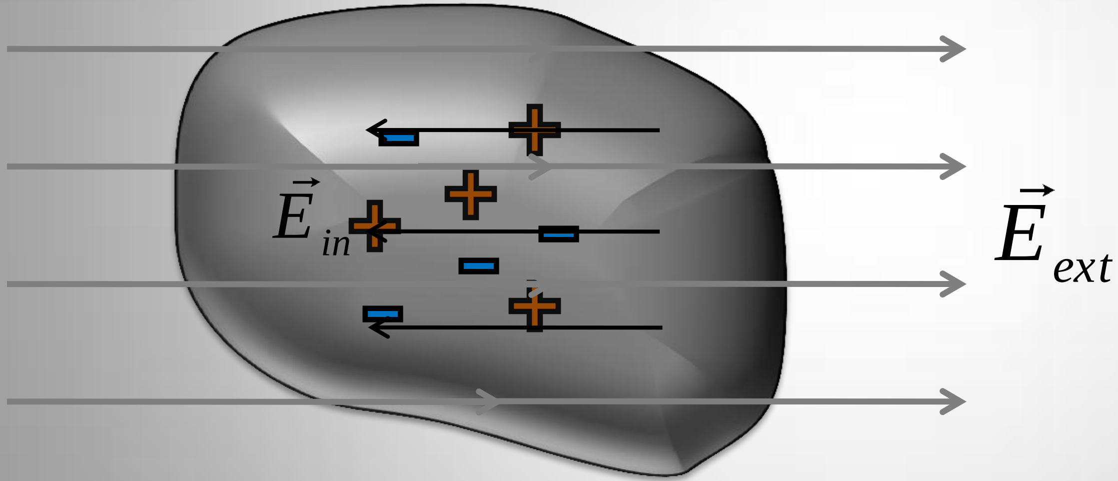
صفر

$$E = \frac{Q}{۲A\varepsilon_{۰}} = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_{۰}}$$

بخش سوم:

رساناها

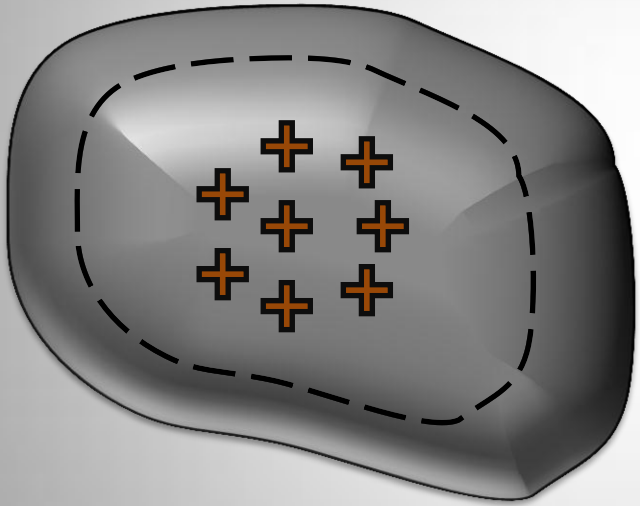
رسانا در میدان الکتریکی خارجی



$$\vec{E}_{ext} + \vec{E}_{in} = \circ$$

میدان الکتریکی ماکروسکوپی داخل رسانا صفر است.

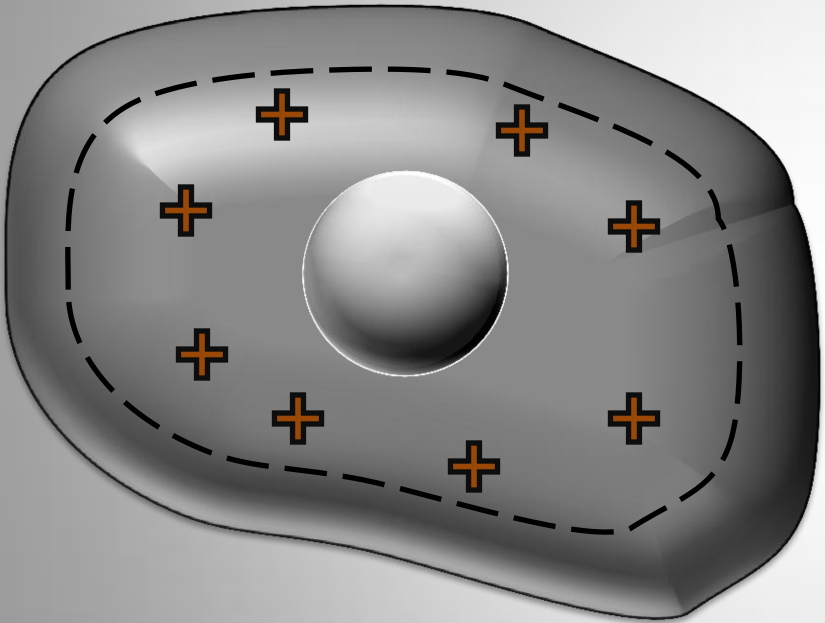
رسانا با بار اضافی



$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = 0$$

هر بار اضافی روی سطح رسانا قرار می گیرد.

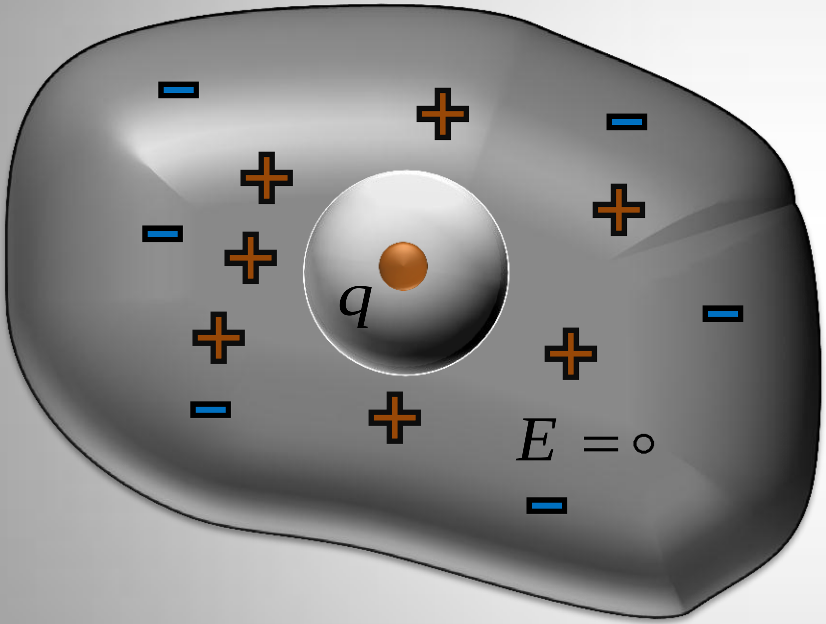
رسانا با یک کاواک



$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = 0$$

اگر در داخل رسانا کاواکی قرار داشته باشد، باری روی سطح آن قرار نمی گیرد.

رسانا با یک کاواک دارای بار



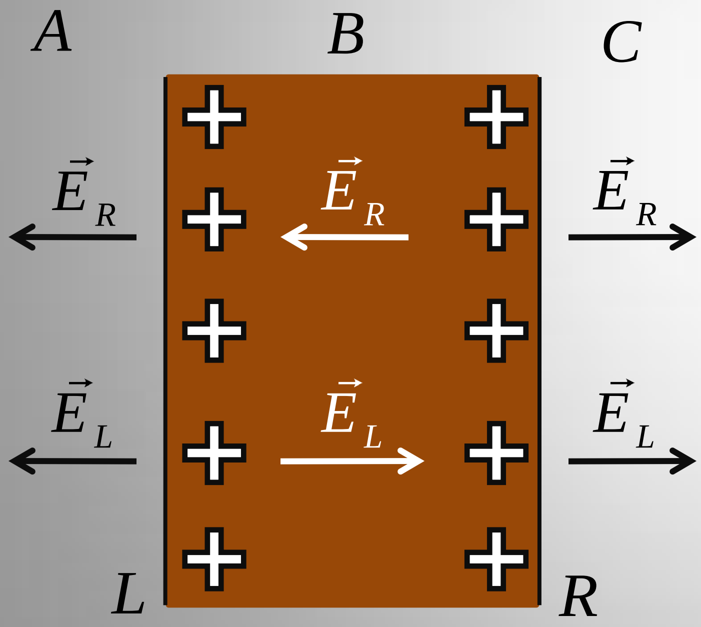
با حضور بار در داخل کاواک باز

هم میدان الکتریکی در داخل

رسانا صفر است.

میدان حاصل از صفحه رسانای باردار

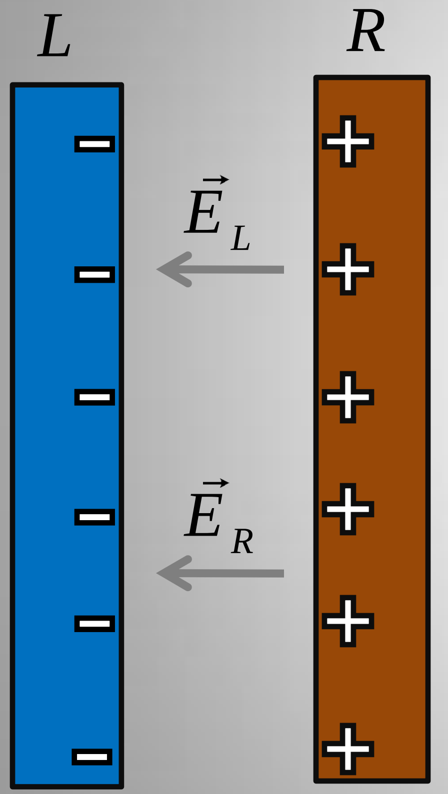
چون بارها روی سطح رسانا قرار می گیرند، هر سطح را می توان پوسته باردار با چگالی سطحی زیر در نظر گرفت.



$$\sigma = \frac{Q/2}{A} = \frac{Q}{2A}$$

$$E_A = E_C = E_R + E_L = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E_B = E_R - E_L = 0$$



میدان بین دو صفحه رسانای باردار موازی با بارهای مخالف

در اثر نیروی ربایشی، تمام بار مثبت و منفی، یک طرف صفحات قرار می گیرند.

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

$$E_A = E_R + E_L = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_\circ} + \frac{\sigma}{۲\varepsilon_\circ} = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$$