竞赛论坛

机场出租车问题的数学模型

韩中庚

(解放军信息工程大学 四院，河南 郑州 450001)

摘　要：针对 2019 年全国大学生数学建模竞赛的 C 题——机场的出租车问题，首先介绍了问题的实际背景和问题的提法；然后根据实际问题分别建立了机场出租车司机的选择模型、上车点的设置模型和短途载客返回出租车的优先方案模型，并给出了模型的求解结果；最后对竞赛论文的总体情况做了点评分析.

关键词：机场出租车；选择方案；蓄车池；乘车区；排队模型

中图分类号：O29　　　**文献标志码**：A　　　**文章编号**：2095-3070(2020)01-0049-08

1　问题背景与问题提出

随着人们生活节奏的加快，飞机已成为人们长途旅行的重要交通工具. 通常机场距离市区都比较远，很多人下飞机后要去市区(或周边)的目的地，出租车是主要的交通工具之一. 国内多数机场都是将送客(出发)与接客(到达)通道分开的. 送客到机场的出租车司机都将会面临两个选择：

(A)前往到达区排队等待载客返回市区. 出租车必须到指定的“蓄车池”排队等候，依“先来后到”排队进场载客，等待时间长短取决于排队出租车和乘客的数量多少，需要付出一定的时间成本.

(B)直接放空返回市区拉客. 出租车司机会付出空载费用和可能损失潜在的载客收益.

在某时间段抵达的航班数量和“蓄车池”里已有的车辆数是司机可观测到的确定信息. 通常司机的决策与其个人的经验判断有关，比如在某个季节与某时间段抵达航班的多少和可能乘客数量的多寡等. 如果乘客在下飞机后想“打车”，就要到指定的“乘车区”排队，按先后顺序乘车. 机场出租车管理人员负责“分批定量”放行出租车进入“乘车区”，同时安排一定数量的乘客上车. 在实际中，还有很多影响出租车司机决策的确定和不确定因素，其关联关系各异，影响效果也不尽相同. 要研究的问题：

1)分析研究与出租车司机决策相关因素的影响机理，综合考虑机场乘客数量的变化规律和出租车司机的收益，建立出租车司机选择决策模型，并给出司机的选择策略.

2)收集国内某一机场及其所在城市出租车的相关数据，给出该机场出租车司机的选择方案，并分析模型的合理性和对相关因素的依赖性.

3)在某些时候，经常会出现出租车排队载客和乘客排队乘车的情况. 某机场“乘车区”现有两条并行车道，管理部门应如何设置“上车点”，并合理安排出租车和乘客，在保证车辆和乘客安全的条件下，使得总的乘车效率最高.

4)机场的出租车载客收益与载客的行驶里程有关，乘客的目的地有远有近，出租车司机不能选择乘客和拒载，但允许出租车多次往返载客. 管理部门拟对某些短途载客再次返回的出租车给予一定的“优先权”，使得这些出租车的收益尽量均衡，试给出一个可行的“优先”安排方案.

这个问题是一个现实生活中的现实问题，看似简单，但从实际建模的角度很有内涵和社会效益. 要研究这个问题，需要考虑与实际问题相关的多种因素的影响，由浅入深、由表及里，特别注意问题的针对性，分析相关因素的影响机理. 该问题开放性强，需要参赛学生自己分析研究，几乎没有类似问题的文献和资料，具有较大的发挥创造空间，适合于各专业的学生，尤其适合于经济类、管理类等非理工类学生[1].

收稿日期：2020-01-09

通讯作者：韩中庚，E-mail：zhghan@163.com

2　机场出租车司机的选择模型

要求分析研究与出租车司机决策相关的确定和不确定因素的影响机理，综合考虑机场乘客数量的变化规律和出租车司机的收益，建立出租车司机的选择决策模型，并给出司机可能的选择方案.

该问题主要从出租车司机的经济效益角度考虑. 在正常情况下，司机空载返回的成本(耗油费和过路费等)基本上是确定的，影响司机决策的主要因素取决于可能的等待时间成本的多少. 等待时间长短取决于排队等待的出租车数量和可能乘坐出租车的乘客数量，可能乘坐出租车的乘客数与具体的时间段和到达的航班数量有密切的关系. 通常每个机场的航班数量有季节性差异，每天进出的航班基本上是确定的，而每天早、中、晚不同时间段的一个航班可能乘坐出租车的人数也不尽相同. 同时，注意到每天早上送机的车多，但到达的航班少;正常时间(如 8:00－22:00)通常都有地铁和机场大巴车往返机场与市区之间，会分流一定数量的乘客;其他时间(如 22:00 后)可能会有更多的乘客需要乘坐出租车.

实际中有诸多不确定的影响因素，需要根据具体情况做一定的简化处理，抓住主要的因素进行研究:

1)出租车空载返回的油耗费 a 和过路费 b(可能没有)，即空载返回的基本成本为 $R\geqslant a+b$;

2)载客收益 P 由起步价 p_0 和阶梯车公里价 $p(s)\times$行驶公里数 s 组成，即 $P(s)=p_0+\lceil p(s)\cdot s\rceil$;

3)关于机场乘客数量的变化规律较为复杂，关键是如何合理地简化处理.

首先，不同季节每天不同时段抵达的航班数量，可以当前时节为例统计某一天到达航班数量的分布规律. 记某机场的一天的航班数量为 $f(t)(0\leqslant t\leqslant 24$，$t$ 表示 24 小时制时间，下同)，不同的机场、不同的时间段，其数值不尽相同.

其次，每天、每个航班的乘客数量有不同，不同时段需要乘坐出租车的人数比例也是不确定的，可以取乘车人数比例的平均值，也可以按统计规律来做出估计，也可假设服从某种分布，正常时段是均匀分布，早或晚时段不应该是均匀分布.

考虑到在正常时段都有机场巴士(或地铁)运行，可分流一部分乘客，通常情况下，到晚上 22:00(或 21:00)之后，地铁会停止运行，机场巴士也会减少，乘坐出租车的乘客数会增加. 为此不妨设乘坐出租车的人数比例为

$$R(t)=\begin{cases}k, & 7<t<22,\\ k+r(t), & 22\leqslant t\leqslant 24+7(\mathrm{mod}\ 24),\end{cases}$$

其中，$r(t)=k\left(1-\exp\{-\frac{(t-\alpha)^2}{\sigma^2}\}\right)$，$\alpha$ 和 σ 由经验给定，譬如取 $\alpha=22$，$\sigma=1$，这里 k 值可由统计规律确定，如 20%～30%.

如果 t 时段每个航班(常见机型)的载客数量 $N(t)$平均为 120～180 人不等，则相应可能乘坐出租车的人数为 $n(t)=N(t)R(t)$，于是，t 时段需要乘坐出租车的乘客数量为 $Z(t)=f(t)N(t)R(t)$.

4)关于出租车在机场排队可能等待时间 w 的估计值，取决于不同时段出租车的到达规律、排队数量和乘坐出租车的乘客数量.

在实际中，每天到达机场“蓄车池”的出租车数量是不确定的，早晨和晚上相对会少一些，正常时间段内会服从一定的概率分布.

①出租车的平均到达率

在正常情况下，假设每天出租车到达机场的时间间隔服从 Poisson 分布，其平均到达率与时间段 t 有关，记为 $\lambda(t)$，即在$[0,t]$时间内有 n 辆出租车到达的概率为

$$P_n(t)=\frac{\lambda(t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda(t)}(n=0,1,\cdots;t>0).$$

关于平均到达率 $\lambda(t)$随时间的变化规律，通常情况下按照一天 24 小时随时间的变化大体上如图 1 所示，早上赶早班飞机的较多，会有一个早高峰，中午和傍晚时段也会有一个小高峰，具体的数值会与机场出港的航班有关.

②出租车的平均服务率

不妨设机场有 $c(\geqslant 2)$ 个独立的出租车上车站点，每辆出租车接受服务(载客后离开乘车区)的时间 $\mu(>0)$ 是不同的，其中包括从“蓄车池”到达乘车区的时间、等待乘客到达上车站点的时间、乘客上车的时间和载客离开乘车区的时间，则出租车接受服务的时间服从于负指数分布：

$$F(t)=1-\mathrm{e}^{-\mu t},$$

其中，接受服务的时间 $\mu(>0)$ 与不同时间段乘坐出租车的乘客数量有关. 乘客的数量取决于航班数量和乘坐出租车的乘客比例 $R(t)$，即 $\mu(t)$ 是随时间变化的，也就是与乘坐出租车的人数 $Z(t)$ 有关.

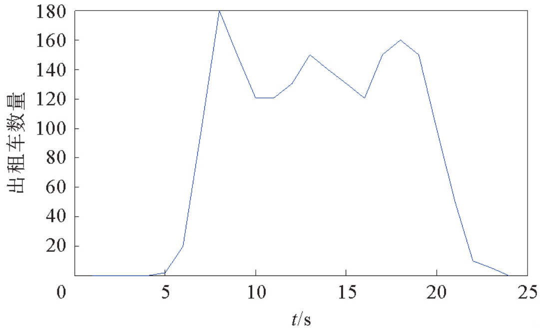

图 1　机场出租车的平均到达率 $\lambda(t)$ 的变化规律示意图

在正常情况下，如果每辆出租车从“蓄车池”安全到达乘车区停稳后需要的时间为 t_1；每组乘客(同车 1～4 人)上车需要时间为 t_2(不妨设介于 0.5～1 min 之间，即 $t_2\sim N(0.75,0.25)$；每辆车载客后启动、离开乘车区需要时间为 t_3. 则在乘客足够多时(车到乘车区即有乘客上车)每辆车接受服务的时间为 $\mu_0=t_1+t_2+t_3$，其中，t_1 和 t_3 为常数，即意味着每小时有 $n_0=\left[\dfrac{60}{\mu_0}\right]$ 辆车接受服务(载客离开).

如果乘客数量不多时，出租车到达乘车区时不能立即载客，就需要在乘车区等待乘客，记等待时间为 τ，其值与需要乘坐出租车的人数有关，则

$$\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{n_0}{Z(t)}\mu_0, & Z(t)\leqslant n_0,\\ 0, & Z(t)>n_0,\end{cases}$$

于是有平均服务率 $\mu(t)=\mu_0+\tau(t)$.

③出租车的平均等待时间

每位乘客上车过程所需要的时间也不尽相同，但差异性不会太大，可以取一个平均值.

为此，可以认为出租车到机场“蓄车池”排队等候载客过程满足顾客(出租车)到达时间间隔服从 Poisson 分布，服务时间(出租车从进入乘车区到载客离开的时间)服从于负指数分布，c 个服务台(上车点)，顾客源和系统容量无限，以及先到先服务的排队模型[2]：

$$\mathrm{M/M/c/\infty/\infty/FCFS}.$$

由于这个排队系统各服务台的服务工作(各辆车载客离开)是相互独立的，则对于时段 t，整个系统的平均服务率为 $c\mu(t)$(当 $n\geqslant c$)，令 $\rho(t)=\dfrac{\lambda(t)}{c\mu(t)}$，即为系统的服务强度. 当 $\rho>1$ 时，系统中就会有出租车在排队等待载客. 于是可以得到时段 t 排队系统的状态转移方程为

$$\begin{cases}\mu(t)P_1=\lambda(t)P_0,\\ (n+1)\mu(t)P_{n+1}+\lambda(t)P_{n-1}=(\lambda(t)+n\mu(t))P_n, & 1\leqslant n\leqslant c,\\ c\mu(t)P_{n+1}+\lambda(t)P_{n-1}=(\lambda(t)+c\mu(t))P_n, & n>c,\end{cases}$$

其中，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n=1$. 由递推关系可以求得系统状态概率为

$$P_0=\left[\sum_{k=0}^{c-1}\frac{1}{k\,!}\left(\frac{\lambda(t)}{\mu(t)}\right)^k+\frac{1}{c\,!}\,\frac{1}{1-\rho(t)}\left(\frac{\lambda(t)}{\mu(t)}\right)^c\right]^{-1},$$

$$P_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n\,!}\left(\dfrac{\lambda(t)}{\mu(t)}\right)^nP_0, & n\leqslant c,\\ \dfrac{1}{c\,!}\,\dfrac{1}{c^{n-c}}\left(\dfrac{\lambda(t)}{\mu(t)}\right)^nP_0, & n>c.\end{cases}$$

相应的排队长度(系统中排队等候的出租车数量)为 $L_q(t)=\dfrac{(c\rho(t))^c\rho(t)}{c\,!\,(1-\rho(t)^2}P_0$，相应的等待时间为

$$w_q(t)=\frac{L_q(t)}{\lambda(t)}=\frac{(c\rho(t))^c\rho(t)}{c\,!\,(1-\rho(t))^2\lambda(t)}P_0.$$

这里 $w_q(t)$是 t 时间段内每辆出租车需要等待的时间长度.

5)根据出租车需要等待的时间来估算出等待时间的成本 Q，首先要估计等待单位时间的成本 $q_0(t)$，则等待的时间成本为 $Q=q_0(t)\cdot w_q(t)$.

对于等待单位时间的成本 $q_0(t)$，可以考虑出租车在正常运营情况下单位时间的收益，此值也与相应的时间段有关.

在通常情况下，$q_0(t)$在一天中是随时间段变化的，实际处理时可以简化，譬如取分段函数，具体数值根据某城市的情况可具体确定，如图 2 所示.

在这里取分段函数，即

$$q_0(t)=\begin{cases}10,\ 0\leqslant t<5,\\30,\ 5\leqslant t<7,\\40,\ 7\leqslant t<11,\\60,\ 11\leqslant t<13,\\40,\ 13\leqslant t<15,\\30,\ 15\leqslant t<18,\\40,\ 18\leqslant t<20,\\20,\ 20\leqslant t<22,\\10,\ 22\leqslant t<24.\end{cases}$$

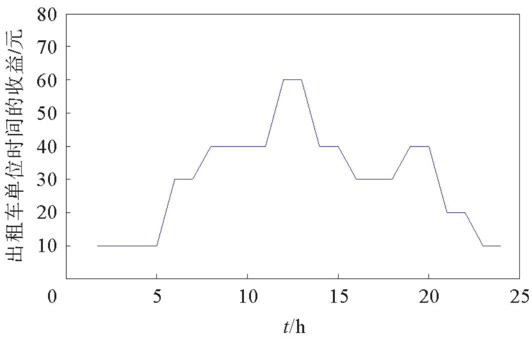

图 2　一辆出租车各时间段平均单位时间收益图

6)空车返回的潜在损失. 如果出租车从机场空车返回，不仅要付出空载成本 R，还损失可能载客的收益. 记空载返回市区所需要的时间为 T，从机场载客返回市区总收益为 P_U. 由于乘客从机场乘出租车返回市区的距离不同，所需要的时间也不同，不妨设从机场到达市中心的距离为 S_0，辐射周边方圆距离为 σ_0^2. 于是，不妨设乘客搭乘出租车返回市区的距离 S 服从正态分布 $N(S_0,\sigma_0^2)$，平均行驶速度为 v_0，故可能的总收益为 $P_U=P(S)=P(N(S_0,\sigma_0^2))$，所需要的总时间为 $T=\dfrac{S}{v_0}=\dfrac{N(S_0,\sigma_0^2)}{v_0}$. 则单位时间的潜在损失(即载客收益)为$\dfrac{P_U}{T}$，空载返回潜在的总损失为

$$R_0(t)=\begin{cases}\dfrac{P_U}{T}(T-w_q(t)),w_q(t)<T,\\0,\qquad\qquad\qquad w_q(t)\geqslant T.\end{cases}$$

因此出租车司机选择决策的准则(即比较空载返回成本和等待时间成本的关系)为

当 $Q>R+R_0(t)$时，则应选择空载返回市区；

当 $Q<R+R_0(t)$时，则应选择排队等待载客；

当 $Q=R+R_0(t)$时，则可以随意选择，即等待载客和空载返回效果相同.

3　选择模型的检验与合理性分析

问题需要收集国内某一机场及其所在城市出租车的相关数据，利用机场出租车司机的选择模型验证给出选择方案，并分析模型的合理性和对相关因素的依赖性.

不难获取某个机场一天的实时动态的进出航班数量、时间、机型和载客量等数据，某城市的出租车定价和一辆出租车单位时间的收益情况，以及机场距离市区的里程和成本费用等数据，则可以验证说明模型的合理性，并给出租车司机的选择方案. 针对相关参数的变化情况，可以说明模型对相关参数的依赖性.

1)如果取正常时间段(6:00—22:00)的乘坐出租车人数的平均值 k 为 10%～20%，其他时段乘坐出租车的人数平均值 k 为 30%～50%. 则可以得到全天的出租车乘客比例 $R(t)$，从而可以得到相应的

每个航班可能乘坐出租车的人数 $n(t)$ 和 t 时段内可能乘坐出租车的人数 $Z(t)$.

2)该机场距所属城市市区距离大约 30～60 km，距其市中心为 45 km，即机场出租车载客从机场到市区的距离服从正态分布 $N(45,15)$；高速过路费 10 元；出租车起步价(2 km 内)5:00～22:00 为 8 元，22:00～5:00 为 10 元；2～12 km 为 1.5 元/km，12 km 后为 2.25 元/km.

3)该机场出租车南北各有一个“乘车区”，每个“乘车区”各有两条道路，即两个上车点.

4)该市城区道路限速为 50～60 km/h；机场高速限速 90～120 km/h，全段长 30 km；正常行驶时间为 30～60 min.

5)该市出租车每天行驶 10～20 h(单班或两班)，收益 400～800 元，平均每小时收益 20～50 元.

由这些实际数据即可对上述模型进行验证计算，给出出租车司机在不同时间段的决策方案，并调整相关参数的数值(航班数量、乘坐出租的乘客比例、行驶里程、出租车的收益率和等待时间等)的变化，由此可以说明模型的合理性. 通过计算比较出租车等待时间和等待成本的变化，以及对决策方案的影响，则可以检验模型对相关参数的依赖性.

4　乘车区上车点的设置模型

针对某机场有两条并行车道的“乘车区”的情况，建立“上车点”的优化设置模型，在保证车辆和乘客安全的条件下，合理安排出租车和乘客，使得乘车区总的乘车效率最高，即单位时间内出租车载客离开乘车区的车辆(或人数)最多.

1)如果设置一个上车点，即每批次、每车道各安排 1 辆车，乘客由 1 个队列按次序乘车，则每辆出租车从“蓄车池”安全到达乘车区停稳后需要时间为 t_1；每组乘客(同车 1～4 人)上车需要时间为 t_2，介于 30～60 s 之间；每辆车载客后启动、离开乘车区平均需要时间为 t_3. 于是 1 个批次安排 2 辆车共需时间为 $t_1+t_2+t_3$，其运行效率(平均每辆车乘载一批乘客所需时间)为 $S_1=1/2(t_1+t_2+t_3)$.

2)如果设置两个上车点，即每批次、每车道各安排 2 辆车，乘客由 1 个队列按次序乘车，则从实际安全考虑，当所有车辆停稳后才能上客，车辆在乘客全部上车后才可以离开乘车区. 由于车辆和乘客的相互影响，则所需要的时间会比 1 个上车点的情况有所增加.

不妨设 2 辆车都安全到达乘车区停稳需要的时间为 $t_1+\alpha_1 t_1(0<\alpha_1<1)$；每组乘客上车需要时间为 $t_2+\alpha_2 t_2(0<\alpha_2<1)$；每辆车载客后启动、离开乘车区所需要的时间为 $t_3+\alpha_3 t_3(0<\alpha_3<1)$. 于是 1 个批次安排 4 辆车共需时间为 $t_1+\alpha_1 t_1+t_2+\alpha_2 t_2+t_3+\alpha_3 t_3$，其运行效率(平均每辆车乘载 1 批乘客所需时间)为 $S_2=1/4(t_1+\alpha_1 t_1+t_2+\alpha_2 t_2+t_3+\alpha_3 t_3)$.

3)如果设置 $k\ (k>1)$ 个上车点，即每批次、每车道各安排 k 辆车，乘客由 1 个队列按次序乘车，则在实际安全的条件下，所有车辆停稳后才能上客，在所安排的乘客全部上车后车辆依次启动、离开乘车区.

不妨设 k 辆车到达乘车区停稳后所需要的时间为 $t_1+(k-1)\alpha_1(k)t_1(\alpha_1(k)\geqslant 0)$；每组乘客(同车 1～4人)上车所需要的时间为 $t_2+(k-1)\alpha_2(k)t_2(\alpha_2(k)\geqslant 0)$；每辆车载客后从启动、离开乘车区所需要的时间为 $t_3+(k-1)\alpha_3(k)t_3(\alpha_3(k)\geqslant 0)$. 于是 1 个批次安排 $2k$ 辆车共需时间为

$$t_1+(k-1)\alpha_1(k)t_1+t_2+(k-1)\alpha_2(k)t_2+t_3+(k-1)\alpha_3(k)t_3,$$

其运行效率(平均每辆车乘载 1 批乘客所需时间)为

$$S_k=\frac{1}{2k}[t_1+(k-1)\alpha_1(k)t_1+t_2+(k-1)\alpha_2(k)t_2+t_3+(k-1)\alpha_3(k)t_3],$$

其中，$\alpha_1(k)$，$\alpha_2(k)$，$\alpha_3(k)\geqslant 0$. 在通常情况下，同时到达乘车区的车辆越多，会产生相互的影响，在保证安全的条件下，从相互影响的效果来确定其取值. 根据实际情况分析，不妨取

$$\alpha_1(k)=\begin{cases}0, & k=1,\\ 0.2, & k=2,\\ 0.3, & k=3,\\ 0.4, & k=4,\\ 0.5, & k=5,\\ \cdots\end{cases}\qquad \alpha_2(k)=\alpha_3(k)=\begin{cases}0, & k=1,\\ 0.3, & k=2,\\ 0.4, & k=3,\\ 0.5, & k=4,\\ 0.6, & k=5,\\ \cdots\end{cases}$$

考虑到机场的实际情况，通常乘车区的空间是有限的，为此设立上车点数不会太多，即 k 值不会太大. 于是在保证安全的条件下，应取使乘车区运行效率最高的方案，即

$$\min_{k} S_k=\frac{1}{2k_0}[t_1+(k_0-1)\alpha_1(k_0)t_1+t_2+(k_0-1)\alpha_2(k_0)t_2+t_3+(k_0-1)\alpha_3(k_0)t_3],$$

即有 $S_{k_0-1}>S_{k_0}$ 且 $S_{k_0}<S_{k_0+1}$.

事实上，如果一辆车从“蓄车池”到乘车区停稳需要时间 $t_1=120$ s，每一组乘客上车时间 $t_2\in[30,60]$ s，不妨取平均值 $t_2=45$ s，出租车载客后启动、驶离乘车区的时间 $t_3=30$ s.

当 $k=1$(即设 1 个上车点)时，则有 $S_1=\frac{1}{2}(120+45+30)=97.5(\mathrm{s})$.

当 $k=2$(即设 2 个上车点)时，则有

$$S_2=1/4(120+0.2\times120+45+0.3\times45+30+0.3\times30)=60.375(\mathrm{s}).$$

当 $k=3$(即设 3 个上车点)时，则有

$$S_3=1/6(120+2\times0.3\times120+45+2\times0.4\times45+30+2\times0.4\times30)=54.5(\mathrm{s}).$$

当 $k=4$(即设 4 个上车点)时，则有

$$S_4=1/8(120+3\times0.4\times120+45+3\times0.5\times45+30+3\times0.5\times30)=56.4375(\mathrm{s}).$$

由此可知，设置 3 个上车点，乘车区的运行效率是最高的，不难说明这是符合实际情况的.

注：关于 3 个上车点和乘客的排队方式可以做相应的讨论. 譬如：单队依次到 3 个上车点乘车和 3 个队列分别依次到 3 个上车点乘车，哪个效率更高？

5　短途往返车辆的优先安排模型

机场的出租车载客收益与载客的行驶里程(或时间)有关，乘客的目的地有远有近，出租车司机不能选择乘客和拒载，但允许出租车多次往返载客. 管理部门拟对某些短途载客再次返回的出租车给予一定的“优先权”，使得这些出租车的收益尽量均衡，那么应该如何确定这样的“优先”方案？

如果某时间段内排队等待的出租车等待的时间长度都为 T_0(如 1～3 h). 在正常情况下，对于一辆载客返回市区的出租车，行驶时间为 T_1(如 30～60 min)，收益额为 P_1(如 100～180 元)；而对于一辆乘载了短途乘客的出租车，行驶时间长度为 $T_2<T_1$(如 10～30 min)，收益额为 $P_2<P_1$(如 20～50 元)，即需要经 $2T_2$ 时间后返回机场，那么应该如何安排“优先”方案？

事实上，对于一辆正常载客返回城区的出租车的平均收益为$\frac{P_1}{T_0+T_1}$，而对于一辆载短途乘客的出租车的平均收益为$\frac{P_2}{T_0+T_2}$. 如果该车经 $2T_2$ 时间后返回机场，并且需要等待 t 时间后“优先”载客，不妨设乘载非短途乘客，则要让这些同样在机场排队等待 T_0 时间的出租车单位时间的收益尽量均衡，即要求其等待时间 t 应该满足：

$$\min_{t\geqslant0}\left[\frac{P_2+P_1}{T_0+2T_2+T_1+t}-\frac{P_1}{T_0+T_1}\right].$$

根据某机场的实际情况，给出确定的 T_0，T_1，T_2，P_1 和 P_2 的具体数值，则可以求解出相应的 t_0 值. 即对于一辆短途的出租车来说，只要载客离开并在 $2T_0$ 时间内返回，只需要等待 t_0 时间即可“优先”载客，根据机场的具体情况确定合适的 T_0 和 t_0.

譬如，以某机场和所隶属的城市为例，相关数据均取平均值，从机场载客到市区行驶时间为 $T_1=45$ min，相应收益为 $P_1=140$ 元；短途的行驶时间为 $T_1=20$ min，相应收益为 $P_2=35$ 元. 不妨假设排队等待时间为 $T_0=120$ min，则有 $t_0=1.25$ min. 即如果机场的短途载客出租车能够在 40 min 内返回机场载客，该出租车只需要等待 1.25 min 即可“优先”直接载客，而且能够载客(长途客)返回市区，这样就能使得与之前载客(长途客)返回市区的出租车单位时间的收益基本均衡，这也是与该机场现实行的“优先”方案相吻合的.

6　竞赛论文的综合评述

6.1　总体情况

问题 C 是 2019 年全国大学生数学建模竞赛为本科组新增加的一个题目，主要是为财经、管理等非理工类专业的学生设立的问题[1]. 该问题是现实生活中的一个实际问题，问题本身易读易懂、看似简单，但真正从实际出发，通过数学模型来研究问题，对实际问题给出合理的解释并非易事. 同时，现有与问题相似或相关、真正有参考价值的文献资料很少，这对参赛学生也是很有挑战性的. 从全国实际参赛选题情况来看，虽然选 C 题的队数很多，但真正针对实际问题自主做深入研究的不多，完成质量高的更少. 从而在送全国评阅的论文中，获得全国一等奖和二等奖的比例仅为 12.31%和 48.89%，远低于 A 题和 B 题的获奖率.

从报送全国评阅的论文来看，大多数的参赛队对问题的理解是正确的，能够抓住问题的核心和实际的要求，并结合实际问题做了相应的机理分析，按问题的要求建立了相应的数学模型，给出了相应的求解结果.

电子科技大学王满林、于劲松和郭晏宏的参赛论文荣获了 2019 年全国大学生数学建模竞赛的中国知网研学奖，这也是全国组委会设立的第一个中国知网研学奖. 他们的论文能够准确把握这个实际问题的核心，真正从实际出发深入地分析问题、自主地研究问题、很好地解决了问题. 他们针对实际问题分析了影响出租车司机决策的相关因素及其影响机理，建立了相关确定和不确定因素的度量模型和决策模型，并利用具体机场和所属城市出租车的相关数据验证了模型的合理性和对相关因素的依赖性. 同时，建立了乘车区上车点的优化设置模型和短途载客后返回机场“优先”方案的设计模型，并给出了分析结果. 主要特点是相关因素分析全面、详实，模型设计切合实际、思路清晰、表述准确，特别是对相关模型都进行了模拟检验.

另外，东北电力大学的宋智强、马庆华、薛旻皓和电子科技大学的张松、皮雳、冯元可的参赛论文也都针对问题做了深入的分析研究，用不同的表达方式较好地解决了问题，被评为优秀论文[3].

6.2　存在的主要问题

1)大多数获全国一等奖的论文都针对问题做了有意义的分析和研究. 但有些参赛论文对实际的影响因素考虑不够全面，或没有抓住核心问题和主要因素，反而考虑了一些无关紧要的因素，例如考虑天气、节假日、大型集会等因素，这些都与所研究的问题关系很小. 这属于舍主求次、脱离实际、别出心裁.

2)该问题是一个现实生活中的实际问题，非针对实际问题的简单套用一般的模型和方法是没有实际意义的. 一些参赛队简单地将问题视为一个综合评价问题，把所有相关和不相关的因素指标简单地用综合加权法综合到一起，根本不知道综合指标的含义是什么. 譬如层次分析法、模糊评价法、主成分分析法、多元线性回归法(无实际数据)，等等，这些都是不符合实际的.

3)有些参赛队忽视实际、不思机理、浮于表面，习惯于“采用什么方法、借用什么文献、套用什么模型和算法”等所谓的“建模套路”，没有真正地从实际问题出发,深入地分析问题、自主研究问题和解决问题. 从而也说明了有些参赛队对数学建模的认识比较肤浅，缺乏正确的建模思想和方法，实际的建模能力不够强. 这种做法也不是数学建模所提倡的.

4)有些参赛队没有认识到影响机场出租车司机选择(A)或(B)两个方案的基本原则是两个方案的收益(或成本)多少，也没有抓住在什么时间、什么情况下、选择哪个方案收益更多(或成本更少)这个核心问题. 在正常情况下，影响出租车收益的因素有哪些、哪些因素是确定的、哪些因素是不确定的、影响的机理又是什么？这些才是解决问题的关键所在.

5)在问题 1 中，很多参赛队没有考虑到一天内不同时间段进出港航班数量的变化、对出租车司机收益的影响和对进出机场出租车数量的影响，以及对乘坐出租车人数(或比例)的影响等，显然这是不太符合实际情况的.

6)很多参赛队，虽然想到了采用排队论方法来研究问题，但有些并不了解排队论. 因为所讨论的是出租车排队而不是乘客排队问题，所以排队模型中的“顾客”应是出租车，而不是乘客. 有的参赛队

仅仅是抄写了排队模型的一般公式，并没有真正用来研究问题.

7)在问题2中，有些参赛队下载了某城市过去某段时间的所有出租车行驶轨迹的数据，但并没有正确地利用这些数据分析研究相关的问题，更没有真正用来验证问题1中模型的合理性和对相关因素的依赖性，只是做了一些诸如出租车的数量、位置分布、行驶距离、行驶时间等简单的统计分析，其结果只是一些让人看不出任何规律的复杂图形，其内容与问题1的模型不相关，也不知道想要说明什么.如果能够正确利用这些数据挖掘出与问题1模型中所涉及的因素指标，或用来确定相关的不确定参数，则应该是有意义的工作.

8)在问题3中，如果不考虑安全因素，只考虑乘车区的运行效率，当然是上车点越多效率越高，事实上这是不符合实际的.有些参赛队没有考虑到多个上车点(多辆出租车)之间相互影响的作用，其结果都是设置很多个上车点的不合理结论.事实上，机场乘车区的空间是有限的，从管理者的角度，也不会设置太多的上车点.

9)在问题4中，有些参赛队没有分析清楚出租车短途载客和非短途载客收益的差异性，在二者收益尽量均衡的条件下，通过建立模型来分析确定出短途载客再次返回的出租车优先载客的具体方案，也有不少参赛队只做了简单的定性分析.

10)由于该问题的开放性和实用性，没有固定的数学模型和建模方法，更没有确定的数值结果.同时，真正有参考价值的文献资料也很少，因此在送全国评阅和针对实际问题研究有意义的论文中，几乎没有相同或相似的模型及结果.有些参赛队死搬硬套或照抄了一些不太相关的模型、方法和完全不搭界的所谓“高大上”的算法.譬如：在一篇论文中，用到了主成分分析(没有数据)、遗传算法、排队论、博弈论、元胞自动机等，实际上只是抄了一些通用公式和方法，根本没有真正地使用这些方法.诸如此类做法，皆有造假之嫌，这也是数学建模竞赛坚决反对的错误做法.

11)从竞赛论文的表述情况来看，搬方法、套模型、抄算法的“套路化”做法仍然存在，形式化和虚拟化的表面文章过多，论文写作模板化、形式化的情况较为普遍，没有了特性，如何能创新.这种“套路化”“模板化”和“形式化”的东西都不是数学建模所提倡的，这对参赛同学和数学建模活动的开展都是极其有害的.

参考文献

[1]全国大学生数学建模竞赛组委会.2019年全中国大学生数学建模竞赛题[EB/OL].http://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/b0ae8510b9ec0cc0deb2266d2de19ecb.html.

[2]韩中庚.数学建模方法及其应用[M].3版.北京:高等教育出版社,2017.

[3]中国大学生在线.2019全国大学生数学建模竞赛论文展示[EB/OL].http://dxs.moe.gov.cn/zx/qkt/sxjm/lw/.

[4]韩中庚.数学建模竞赛论文写作方法[J].数学建模及其应用,2017,6(2):42-48.

The Mathematical Model of Problems on Airport Taxies

HAN Zhonggeng

(Fourth School, Information Engineering University of PLA, Zhengzhou, Henan 450001, China)

Abstract: Aiming at the problem C of CUMCM-2019, namely, the problems on airport taxies, the practical background and formulation of this problem are introduced firstly. Then, a decision model of taxi drivers, a setting model of boarding areas, and a prior scheme model of drivers who take a short-distance passenger and back to airport are established and solved respectively. Finally, the overall situations of competition papers are commented and analyzed.

Key words: airport taxies; decision; car storage pool; boarding area; queueing model

作者简介

韩中庚(1958—)，男，信息工程大学教授，主要研究方向为军事运筹、数学建模及其应用.