Tarea 2 - Métodos Computacionales 2.

1.1. Series de Fourier.

Lema: Sea $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en un compacto, luego f tiene máximo y mínimo.

Proposición: La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t)$$

que converge a una función continua $f(t)$ es uniformemente convergente.

Demostración: Considere el espacio de funciones con la norma del supremo:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t\in Dom[f]\}$$

Note que $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n es una suma finita de funciones continuas, luego es continua. Como f es continua, $f_n - f$ es continua y como $|\cdot|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ continua, entonces $|f_n - f|$ es continua. Note que el dominio de $|f_n - f|$ es el compacto $[-T/2, T/2]$ luego, existe $t\in[-T/2, T/2]$ tal que $|f_n(t) - f(t)|$ es máximo.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ se tiene que:

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Con el t fijado anteriormente. Luego, $\forall n \geq N$:

$$\|f_n - f\|_\infty := \operatorname{Sup}\{|f_n(t) - f(t)| : t \in [-T/2, T/2]\}$$
$$= |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Luego, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente. $\square$

Corolario 1:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 \left(-a_n \operatorname{Sin}(n\omega t) + b_n \operatorname{Cos}(n\omega t)\right).$$

Demostración: Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente, se tiene la conmutatividad de los símbolos $\lim\limits_{n\to\infty}$ y $\lim\limits_{x\to t}$.

$$f'(t) = \lim_{x\to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t},$$

$$= \lim_{x\to t} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(t)}{x - t} = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to t} \frac{f_n(x) - f_n(t)}{x - t},$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dt}(f_n(t)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(-a_k \operatorname{Sen}(k\omega t) + b_k \operatorname{Cos}(k\omega t)\right) k\omega$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\omega \left(-a_n \operatorname{Sen}(n\omega t) + b_n \operatorname{Cos}(n\omega t)\right). \quad \square$$

Corolario 2:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \frac{1}{2}a_0(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega}\Big[-b_n\big(Cos(n\omega t_2) - Cos(n\omega t_1)\big) + a_n\big(Sen(n\omega t_2) - Sen(n\omega t_1)\big)\Big].$$

Demostración:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m} f(t_i^*)\,\Delta x$$

$\Delta x = \Delta t$ Perdón el error de notación

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\big(a_k Cos(k\omega t^*) + b_k Sen(k\omega t^*)\big) + \frac{a_0}{2}\right)\Delta x$$

Convergencia uniforme.

$$= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n}\big(a_k Cos(k\omega t^*) + b_k\cdot Sen(k\omega t^*)\big) + \frac{a_0}{2}\right)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\big(a_k Cos(k\omega t^*) + b_k\cdot Sen(k\omega t^*)\big)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_{t_1}^{t_2} a_k Cos(k\omega t^*) + b_k\cdot Sen(k\omega t^*)\,d\cancel{x}t$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\int_{t_1}^{t_2} Cos(k\omega t)\,dt + b_k\cdot\int_{t_1}^{t_2} Sen(k\omega t^*)\,dt\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k\omega}\Big(a_k\big(Sin(k\omega t_2) - Sin(k\omega t_1)\big) - b_k\big(Cos(k\omega t_2) - Cos(k\omega t_1)\big)\Big) \quad \square$$

1.2 Presentación de funciones.

a.) Encuentre analíticamente la serie de Fourier de $f(t)=t$, $t\in(-\pi,\pi)$ y $f(t+2\pi)=f(t)$.

$$a_0=\frac{1}{2L}\cdot\int_{-L}^{L}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}t\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{4\pi}\left(\pi^2-(-\pi)^2\right)=0.$$

$$a_n=\frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{+L}f(t)\cdot\cos(nt)\,dt=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{+\pi}t\cos(nt)\,dt$$

$u=t \qquad v=\frac{\sin(nt)}{n}$

$du=dt \qquad dv=\cos(nt)\,dt$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\cancel{\frac{t\cdot\sin(nt)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}}^{\,0}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,dt\right)$$

$$=\frac{-1}{n\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\,dt\right)=\frac{1}{n^2\pi}\cdot\cancel{\cos(nt)}^{\,0}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

$$b_n=\frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L}f(t)\cdot\sin(nt)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\cdot\sin(nt)\,dt$$

$u=t \qquad v=\frac{-\cos(nt)}{n}$

$du=dt \qquad dv=\operatorname{Sen}(nt)\,dt$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{-t\cos(nt)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}\,dt}^{\,0}\right]$$

$$= \frac{-1}{n\pi} \cdot \left[t\,Cos(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \frac{-1}{n\pi} \left(\pi\,Cos(n\pi) + \pi\,Cos(n(-\pi)) \right)$$

$$= \frac{-1}{n\pi} \left(2\pi\,Cos(n\pi) \right) = \frac{2}{n} \left(-Cos(n\pi) \right) = \frac{2}{n} (-1)^{n-1}.$$

$$\therefore f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n-1} \cdot Sin(nt).$$

1.3 Función $\zeta(s)$ de Rieman.

a.) integrar analíticamente la serie de fourier de $f(t) = t^2$, $t \in (-\pi, \pi)$, $f(t+2\pi) = f(t)$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{6\pi} \cdot (\pi^3 + \pi^3) = \frac{2\pi^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} t^2 Cos(nt)\, dt \quad \Bigg| \begin{array}{ll} u = t^2 & v = \frac{Sen(nt)}{n} \\ du = 2t\,dt & dv = Cos(nt)\, dt \end{array}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\cancel{\frac{t^2 Sen(nt)}{n}}^{\,0} \Big|_{-\pi}^{\pi} - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\,Sen(nt)}{n} dt \right]$$

$$= \frac{-2}{n} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t \cdot Sen(nt)}{1} dt \right) \to$$ lo hicimos en el punto anterior.

$$= \frac{-2}{n} \left(\frac{2}{n} \cdot (-1)^{n-1} \right) = \frac{4}{n^2} (-1)^n.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cdot Sen(nt)\,dt \quad \left|\begin{array}{ll} u = t^2, & v = -\frac{Cos(nt)}{n} \\ du = 2t\,dt, & dv = Sen(nt)\,dt \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{-t^2 Cos(nt)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} + 2\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} t\,Cos(nt)\,dt}^{\,0}\right)$$ Ya hicimos esta integral

$$= \frac{-1}{n\pi}\left(\pi^2 Cos(n\pi) - (-\pi)^2\cdot Cos(n(-\pi))\right) = 0.$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot Cos(nt)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \hat{t}^2 - \frac{\pi^2}{3}\,d\hat{t} = 4\cdot\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot Cos(n\hat{t})\,d\hat{t},$$

$$\Rightarrow \int_0^t \hat{t}^2 d\hat{t} - \frac{\pi^2}{3}\cdot t = 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot\int_0^t Cos(n\hat{t})\,d\hat{t},$$

$$\Rightarrow \frac{t^3}{3} - \frac{\pi^2}{3}t = 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\cdot Sen(nt).$$

$$\Rightarrow \frac{t}{12}(t^2-\pi^2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\cdot Sen(nt).$$

↳ Identidad de Parseval:

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{t}{12}(t^2-\pi^2)\right)^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^3}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6},$$

$$\Rightarrow \zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{t}{12}(t^2-\pi^2)\right)^2 dt \quad \square$$

↳ Podemos estimar la integral por cuadratura de Gauss.