Tarea - Métodos Simplécticos

domingo, 27 de febrero de 2022 10:41 p. m.

1. Resolver analíticamente la ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{du}{dt} = u^q, \ t \in [0, 10] \tag{1}$$

La solución exacta es: $u(t) = e^t$ para $q = 1$ y $u(t) = (t(1-q)+1)^{\frac{1}{1-q}}$ para $q < 1$ y $t(1-q)+1 > 0$.

Caso $q = 1$:

$$\frac{du}{dt} = u \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int dt \Rightarrow \ln|u| = t + c \Rightarrow u(t) = A \cdot e^t.$$

Caso $q \neq 0$, $q \neq 1$.

Cambio de variable. $z = u^{1-q} \leftrightarrow z^{1/1-q} = u$

$$\Rightarrow u' = \frac{1}{1-q} \cdot z^{\frac{1}{1-q} - 1} z' = \frac{1}{1-q} \cdot z^{\frac{1-1+q}{1-q}} z' = \frac{1}{1-q} \cdot z^{q/1-q} \cdot z'$$

$$\hookrightarrow \frac{du}{dt} = u^q \leftrightarrow u' = u^q \leftrightarrow \frac{z^{q/1-q}}{1-q} \cdot z' = \left(z^{1/1-q}\right)^q$$

$$\Rightarrow \cancel{z^{q/1-q}} \cdot z' = \cancel{z^{q/1-q}} \cdot (1-q) \Rightarrow z' = (1-q).$$

$$\Rightarrow dz = (1-q)\,dt \Rightarrow z = (1-q) \cdot t + c \Rightarrow u^{1-q} = (1-q) \cdot t + c$$

$\Rightarrow u = \left[(1-q) \cdot t + c\right]^{1/1-q} \rightsquigarrow c = 1$ es un caso especial. Para que la raiz exista $\forall q < 1$. $(1-q) \cdot t + c \geq 0$.