Tarea 3

viernes, 11 de febrero de 2022 10:17 p. m.

0.1 Colisiones 2D de duración finita (juguemos billar)

1. Un modelo de esfera dura (Landau-Lifshitz volumen 7) para entender clásicamente la interacción partícula a partícula es:

$$\vec{f}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \begin{cases} K|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3 \hat{n} & si \quad |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| < R_1 + R_2 \\ 0 & En\ otro\ caso. \end{cases} \tag{1}$$

donde R_1, R_2 son los radios de las esferas y $\vec{n}$ es el vector normal al plano de contacto. Usar $K = 100\ N/m^3$.

a) ¿Cuál es el significado físico de K?

Note que $[K] = \left[\frac{N}{m^3}\right]$, luego, K se identifica con una densidad de fuerza. Esto simboliza la resistencia a la compresión que ofrece $1\ m^3$ del material de las bolas en cuestión.

b) ¿Es conservativa la fuerza?

Note que podemos definir $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r_1} - \vec{r_2} \mapsto K\|\vec{r_1} - \vec{r_2}\|^3 \cdot \hat{n}$. Esto se parece a Ley de Hooke vectorial, luego parece ser conservativa. Note también que:

$$\hat{n} = \frac{\vec{r_1} - \vec{r_2}}{\|\vec{r_1} - \vec{r_2}\|} \quad \text{pues } \vec{r_1} - \vec{r_2} \text{ es ortogonal al plano de contacto.}$$

$$\Rightarrow \vec{f}(\vec{r_1} - \vec{r_2}) = K \cdot \|\vec{r_1} - \vec{r_2}\|^3 \cdot \hat{n} = K\|\vec{r_1} - \vec{r_2}\|^2 \cdot (\vec{r_1} - \vec{r_2}). \quad \text{Sea } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$$

$$\Rightarrow \vec{f}(x,y,z) = K(x^2+y^2+z^2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 + xz^2 \\ x^2y + y^3 + yz^2 \\ x^2z + y^2z + z^3 \end{pmatrix}. \quad \text{Si existe } u: \vec{\nabla} u = \vec{f}$$

entonces:

$$u(x,y,z) = \int x^3 + xy^2 + xz^2\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2z^2}{2} + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{x^2y} + \frac{\partial C_1}{\partial y} = \cancel{x^2y} + y^3 + yz^2$$

$$\Rightarrow C_1 = \int y^3 + yz^2\, dy = \frac{y^4}{4} + \frac{y^2z^2}{2} + C_2$$

$$\Rightarrow u(x,y,z) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2z^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^2z^2}{2} + C_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \cancel{x^2z} + \cancel{y^2z} + \frac{\partial C_2}{\partial z} = \cancel{x^2z} + \cancel{y^2z} + z^3$$

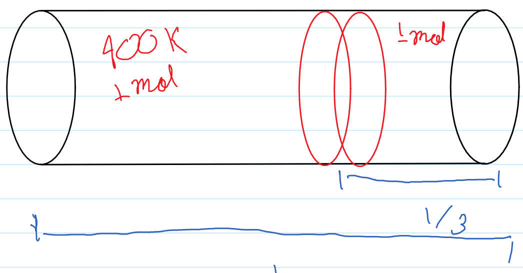
$$\Rightarrow C_2 = \int z^3\, dz = \frac{z^4}{4}.$$

$$u(x,y,z) = K\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2z^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^2z^2}{2} + \frac{z^4}{4}\right), \text{ y } \vec{\nabla} u = \vec{f} \text{ por construcción.}$$

$\therefore \vec{f}$ es un campo conservativo con potencial $u(x,y,z)$.

1. Un cilindro cerrado está separado por un piston móvil sin fricción. La sección (1) de la izquierda contiene un mol de gas ideal monoatómico a 400 K. La sección (2) de la derecha también contiene un mol de gas monoatómico a una temperatura desconocida. El pistón se encuentra en equilibrio cerca del lado derecho a una longitud de 1/3 de la longitud total. Un estudiante de Métodos 2 conecta el lado derecho y el izquierdo con un alambre de cobre de conductividad $k = 389.6$, sección transversal de $A = 0.01\ m^2$ y longitud total de $l = 0.30\ m$, permitiendo el flujo de calor entre ambas secciones.

a) Encuentre la temperatura de equilibrio de la sección derecha antes de conectar el alambre de cobre ($T_0^2 = 200\ K$).



El sistema está en equilibrio mecánico $P_L = P_R$. Por la ecuación de estado del gas ideal:

$$PV = nRT$$

$$P_L = P_R \Rightarrow \frac{V_L}{\cancel{n_L}RT_L} = \frac{V_R}{\cancel{n_R}\cancel{R}T_R} \Rightarrow T_R = \frac{V_R}{V_L} \cdot T_L$$

$V = \pi \cdot r^2 h$
$V_L = \pi r^2 \cdot 2/3$
$V_R = \pi \cdot r^2 \cdot 1/3$

$$\Rightarrow T_R = \frac{\cancel{\pi \cdot r^2}\ 1/\cancel{3}}{\pi \cdot \cancel{r^2}\ 2/\cancel{3}} \cdot 400\,K \Rightarrow T_R = \frac{400\,K}{2}, \quad \therefore T_R = 200\,K.$$

b) Considerando que no se realiza trabajo y que el proceso es lo suficientemente lento, use la primera ley de la termodinámica y la ley de transferencia de Fourier para encontrar:

$$\begin{aligned} nc_v \frac{dT_1}{dt} &= -\frac{kA}{l}(T_1 - T_2) \\ nc_v \frac{dT_2}{dt} &= \frac{kA}{l}(T_1 - T_2), \end{aligned} \tag{6}$$

donde podemos definir $C = \frac{kA}{nc_v l}$ y $c_v = 3/2R$. Dadas estas ecuaciones, las condiciones iniciales de la derivadas están bien definidas.

$$\begin{aligned} \left.\frac{dT_1}{dt}\right|_{t=0} &= -C(T_1^0 - T_2^0) \\ \left.\frac{dT_2}{dt}\right|_{t=0} &= C(T_1^0 - T_2^0) \end{aligned} \tag{7}$$

Ley de Transferencia de Fourier: $\frac{dQ}{dt} = \frac{-K \cdot A (T_2 - T_1)}{l}$

Además, el cambio de energía interna por la primera ley es

$$dU = n c_v dT = dQ$$

$dW = 0$, pues el sistema ya está en equilibrio mecánico.

$$\Rightarrow \frac{dQ_1}{dt} = \frac{-K \cdot A (T_1 - T_2)}{l} \Rightarrow n c_v \frac{dT_1}{dt} = \frac{-K A (T_1 - T_2)}{l}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ_2}{dt} = \frac{-K\cdot A(T_2-T_1)}{l} \quad \Rightarrow n C_v \cdot \frac{dT_2}{dt} = \frac{K\cdot A(T_1-T_2)}{l}$$

$\hookrightarrow$ Sistema de Ecuaciones:

$$\frac{dT_1}{dt} = -C(T_1-T_2) \quad \Bigg| \quad \left.\frac{dT_1}{dt}\right|_{t=0} = -C\cdot 200K \quad \Bigg| \quad C = \frac{KA}{nC_v l}$$

$$\frac{dT_2}{dt} = C(T_1-T_2) \quad \Bigg| \quad \left.\frac{dT_2}{dt}\right|_{t=0} = C\ 200K \quad \Bigg| \quad n=1 \text{ para ambos lados.}$$

c) Encuentre analíticamente la solución del sistema de ecuaciones.

Note que C es independiente de t.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = -C \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \cancel{1} - 2\lambda + \lambda^2 \cancel{-1} = \lambda(\lambda-2)$$

$\Rightarrow \operatorname{Spec}(A) = \{0, 2\}$

Para $\lambda = 0$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow E_{\lambda=0} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Para $\lambda = 2$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1-2 & -1 & 0 \\ -1 & 1-2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow E_{\lambda=2} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

Note que existe un -1 escalar multiplicando a A. Metiendo este escalar en la matriz los valores propios cambian de signo y por lo tanto:

$$\operatorname{Spec}(-A) = \{0, -2\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2C\cdot t} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = 2b\cdot C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2Ct}$$

$\Rightarrow \left.\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}\right|_{t=0} = 2bC\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Luego, $b = -100$. $\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \end{pmatrix} e^{-2Ct}$

También tenemos la condición $T_1 = 400\,K$, $T_2 = 200\,K$ en $t = 0$.

$$\begin{aligned} a - 100\,K &= 400\,K \\ a + 100\,K &= 200\,K \end{aligned} \Rightarrow 2a = 600\,K \Rightarrow a = 300\,K.$$

$$\therefore \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300\,K \\ 300\,K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \end{pmatrix} e^{-2ct} \Leftrightarrow \begin{aligned} T_1(t) &= 300\,K - 100\,e^{-2ct} \\ T_2(t) &= 300\,K + 100\,e^{-2ct} \end{aligned}$$