



# **Algoritmos y Estructuras de Datos**

**Cursada 2020**

**Prof. Alejandra Schiavoni ([ales@info.unlp.edu.ar](mailto:ales@info.unlp.edu.ar))**

**Prof. Catalina Mostaccio ([catty@lifa.info.unlp.edu.ar](mailto:catty@lifa.info.unlp.edu.ar))**

**Prof. Laura Fava ([lfava@info.unlp.edu.ar](mailto:lfava@info.unlp.edu.ar))**

**Prof. Pablo Iuliano ([piuliano@info.unlp.edu.ar](mailto:piuliano@info.unlp.edu.ar))**

# Agenda - Grafos

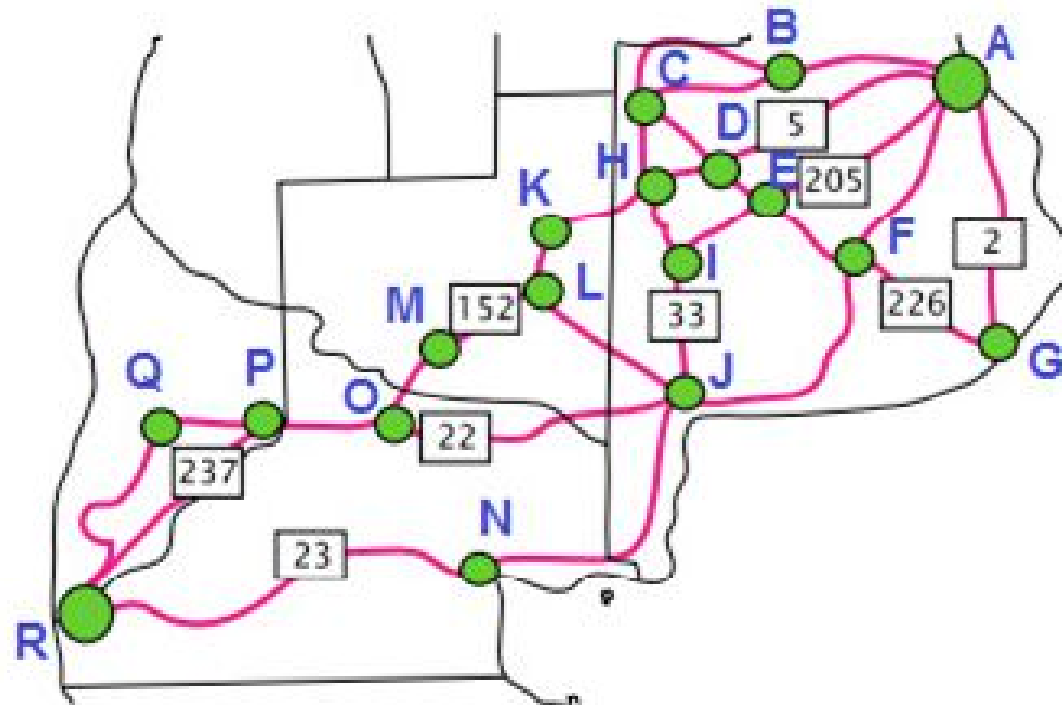
1. Ejemplos y terminología
2. Representaciones
3. Recorridos

# Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología
2. Representaciones
3. Recorridos

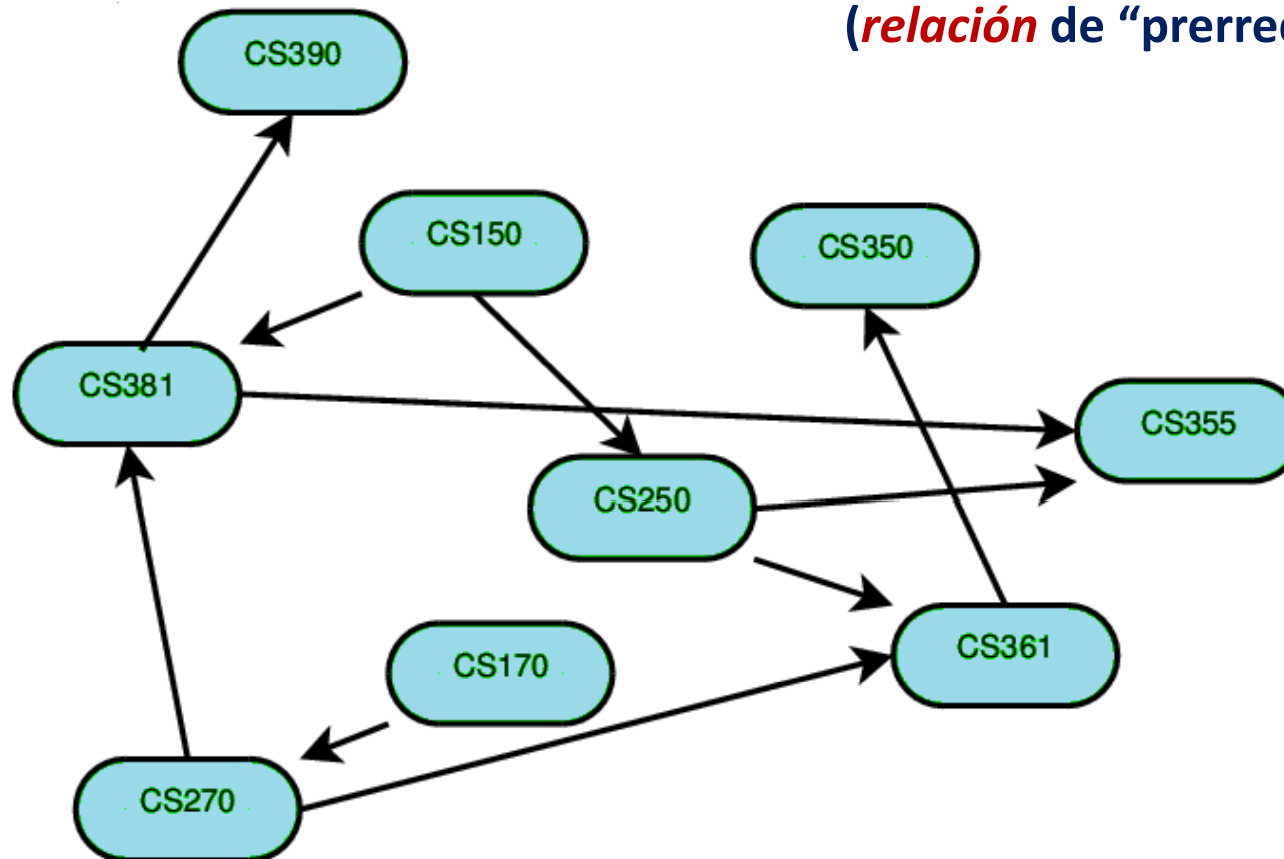
# Ejemplo 1: Mapa de ciudades

**Ciudades** conectadas por  
**Rutas**



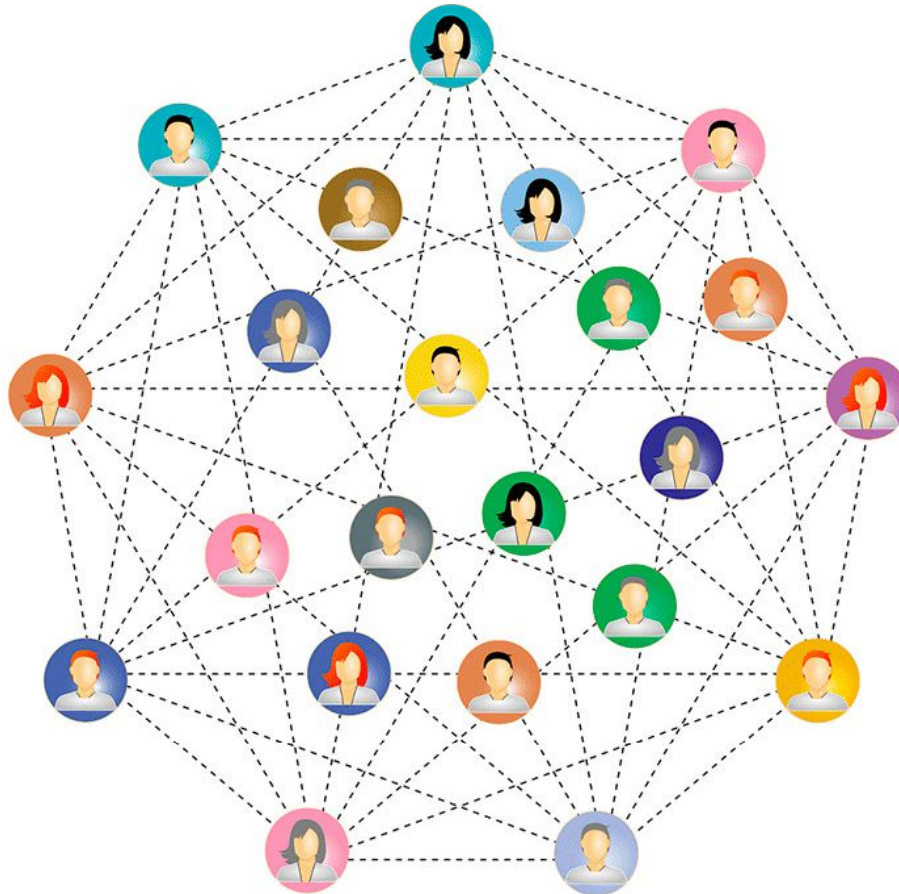
## Ejemplo 2: Prerrequisitos de un curso

*Cursos* conectados por sus correlativas  
(*relación* de “prerrequisito”)

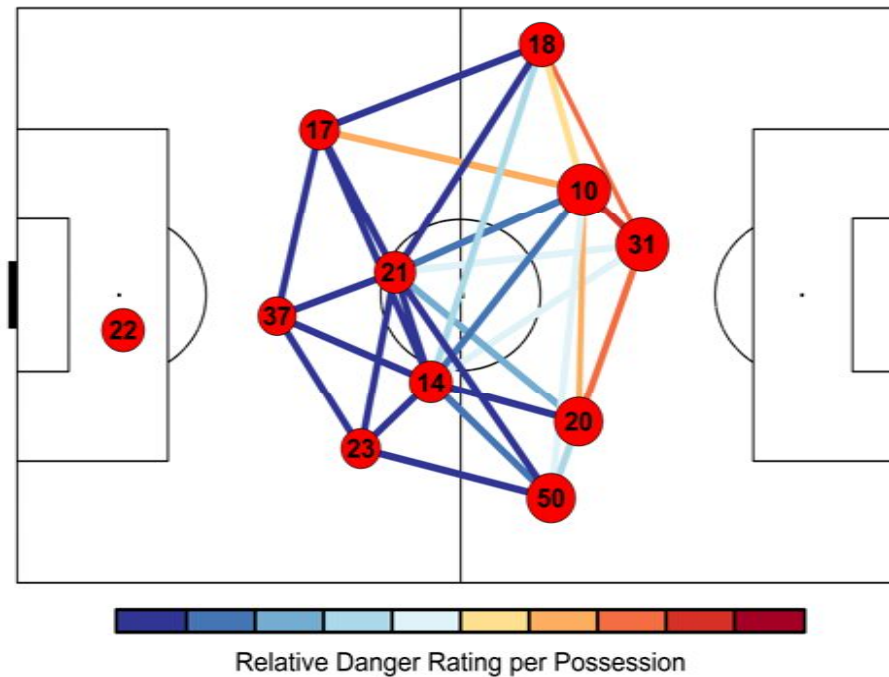


## Ejemplo 3: Redes sociales

**Personas** conectadas  
en una red social



## Ejemplo 4: Red de pases de un partido de fútbol



Red de pases para el Barcelona y el AC Milan de un partido de Liga de Campeones.  
Las flechas más oscuras y gruesas indican más pases entre cada jugador.

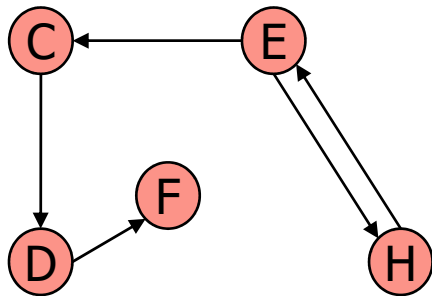
# Terminología

- *Grafo* → modelo para representar relaciones entre elementos de un conjunto.
- **Grafo:**  $(V, E)$ ,  $V$  es un conjunto de vértices o nodos, con una relación entre ellos;  $E$  es un conjunto de pares  $(u, v)$ ,  $u, v \in V$ , llamados aristas o arcos.
- **Grafo dirigido:** la relación sobre  $V$  no es simétrica. Arista  $\equiv$  par ordenado  $(u, v)$ . (Ejemplo 3)
- **Grafo no dirigido:** la relación sobre  $V$  es simétrica. Arista  $\equiv$  par no ordenado  $\{u, v\}$ ,  $u, v \in V$  y  $u \neq v$ . (Ejemplos 1 y 2)



# Terminología (cont. 1)

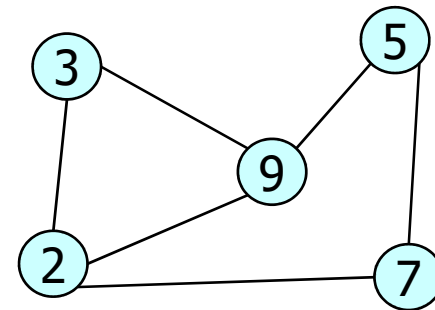
## *Ejemplos*



*Grafo dirigido  $G(V,E)$ .*

$$V = \{C, D, E, F, H\}$$

$$E = \{(C, D), (D, F), (E, C), (E, H), (H, E)\}$$



*Grafo no dirigido  $G(V,E)$ .*

$$V = \{2, 3, 5, 7, 9\}$$

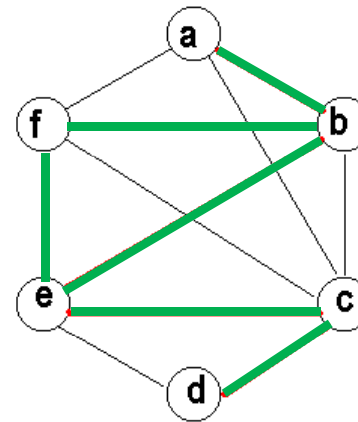
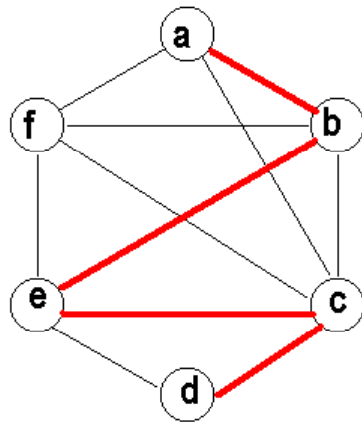
$$E = \{\{2, 3\}, \{2, 7\}, \{2, 9\}, \{3, 9\}, \{5, 7\}, \{5, 9\}\}$$

# Terminología (cont. 2)

- $v$  es **adyacente** a  $u$  si existe una arista  $(u,v) \in E$ .
  - en un grafo no dirigido,  $(u,v) \in E$  **incide** en los nodos  $u, v$ .
  - en un grafo dirigido,  $(u,v) \in E$  **incide** en  $v$ , y **parte** de  $u$ .
- En grafos no dirigidos:
  - El **grado** de un nodo: número de arcos que inciden en él.
- En grafos dirigidos:
  - existen el grado de salida (**grado\_out**) y el grado de entrada (**grado\_in**).
    - el **grado\_out** es el número de arcos que parten de él y
    - el **grado\_in** es el número de arcos que inciden en él.
  - El **grado** del vértice será la suma de los grados de entrada y de salida.
- **Grado de un grafo**: máximo grado de sus vértices.

# Terminología (cont. 3)

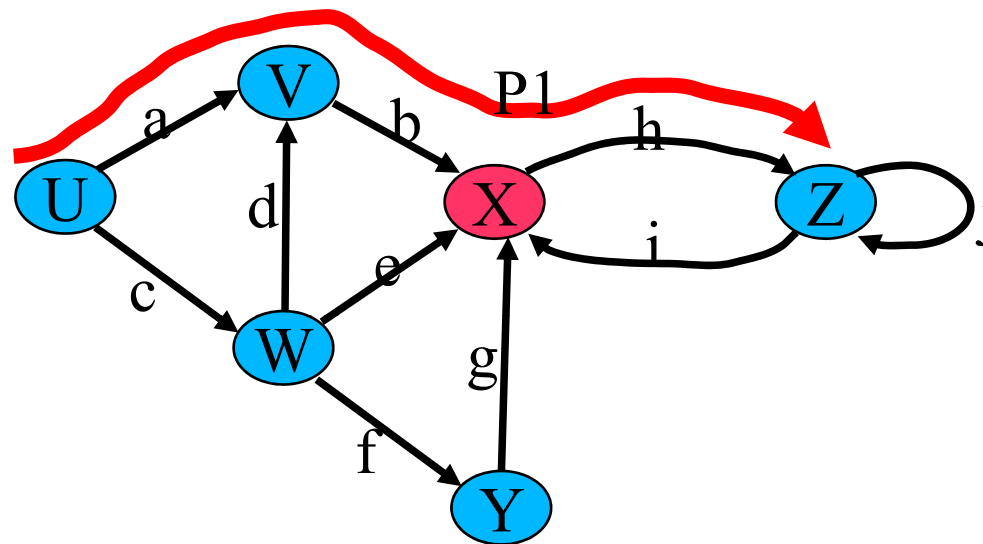
- **Camino** desde  $u \in V$  a  $v \in V$ : secuencia  $v_1, v_2, \dots, v_k$  tal que  $u=v_1, v=v_k$  y  $(v_{i-1}, v_i) \in E$ , para  $i = 2, \dots, k$ .  
Ej: camino desde **a** a **d**  $\rightarrow \langle a, b, e, c, d \rangle$ .



- **Longitud de un camino**: número de arcos del camino.  
Ejs: long. del camino desde **a** a **d**  $\rightarrow \langle a, b, e, c, d \rangle$  es 4. (a)  
long. del camino desde **a** a **d**  $\rightarrow \langle a, b, e, f, b, e, c, d \rangle$  es 7. (b)

## Terminología (cont. 4)

- **Camino simple:** camino en el que todos sus vértices, excepto, tal vez, el primero y el último, son distintos.  $P1$  es un camino simple desde  $U$  a  $Z$ .

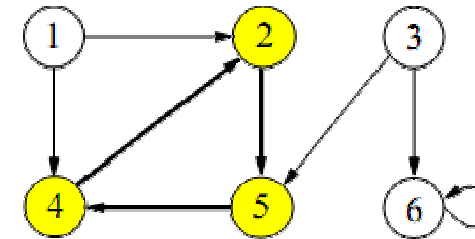


Ejemplos anteriores: (a) es camino simple, (b) no lo es.

# Terminología (cont. 5)

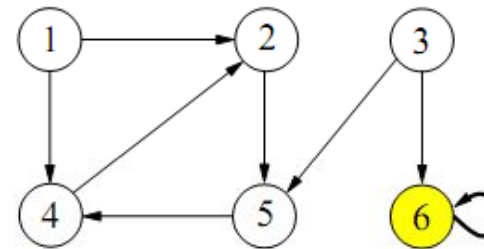
➤ **Ciclo:** camino desde  $v_1, v_2, \dots, v_k$  tal que  $v_1 = v_k$

Ej:  $\langle 2, 5, 4, 2 \rangle$  es un ciclo de longitud 3.

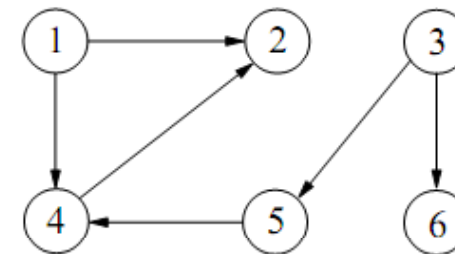


*El ciclo es simple si el camino es simple.*

➤ **Bucle:** ciclo de longitud 1.

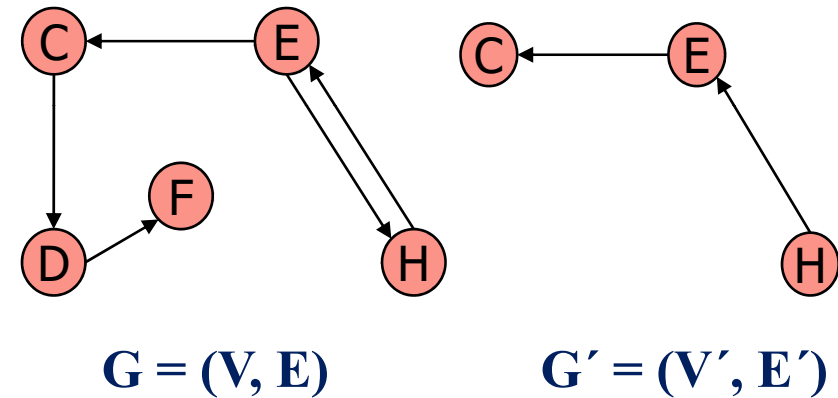
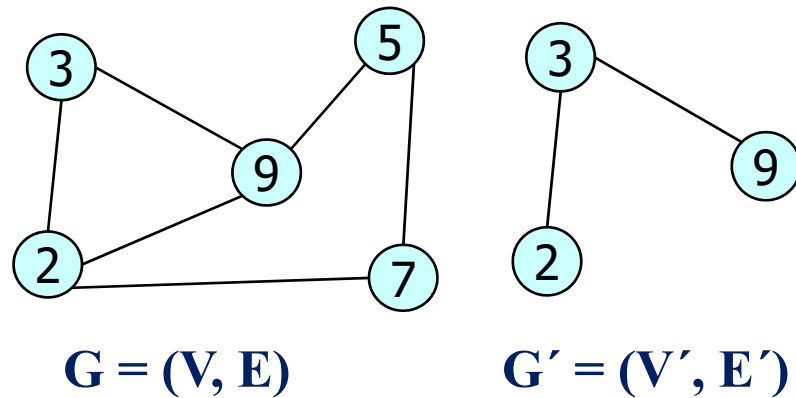


➤ **Grafo acíclico:** grafo sin ciclos.



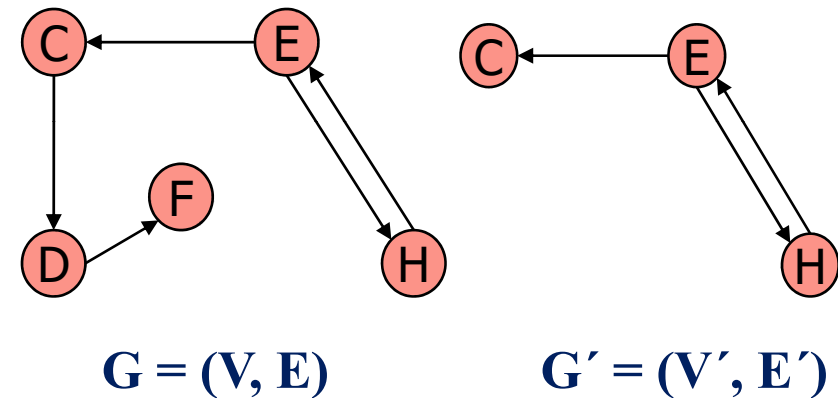
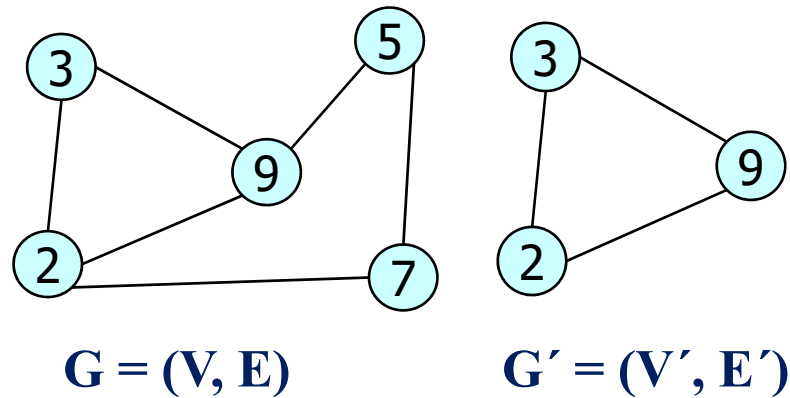
# Terminología (cont. 6)

➤ Dado un grafo  $G=(V, E)$ , se dice que  $G'=(V', E')$  es un **subgrafo** de  $G$ , si  $V' \subseteq V$  y  $E' \subseteq E$ .



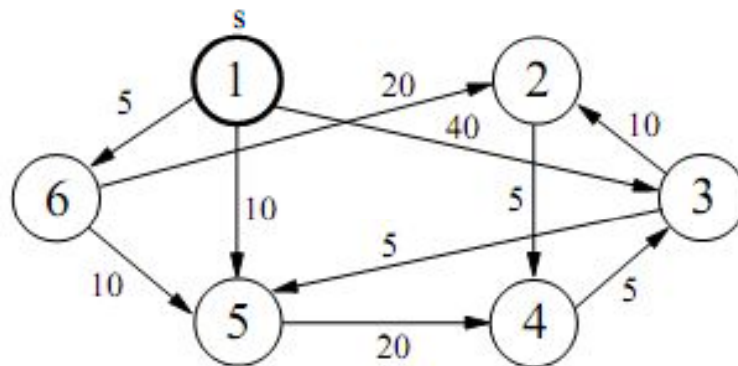
# Terminología (cont. 7)

➤ *Un subgrafo inducido por  $V' \subseteq V : G' = (V', E')$  tal que  $E' = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V'\}$ .*



# Terminología (cont. 8)

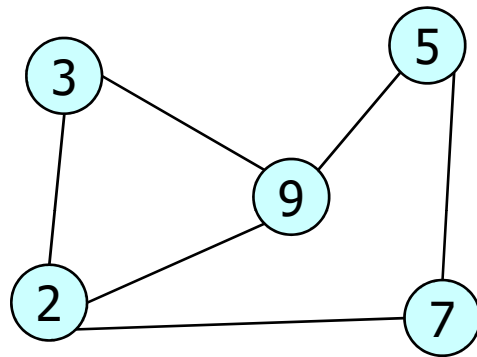
➤ *Un grafo **ponderado**, **pesado** o **con costos**: cada arco o arista tiene asociado un valor o etiqueta. (Ejemplos 2 y 4)*



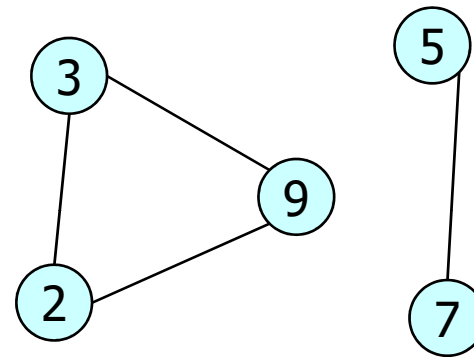


# Conectividad en grafos no dirigidos

- Un grafo no dirigido es **conexo** si hay un camino entre cada par de vértices.



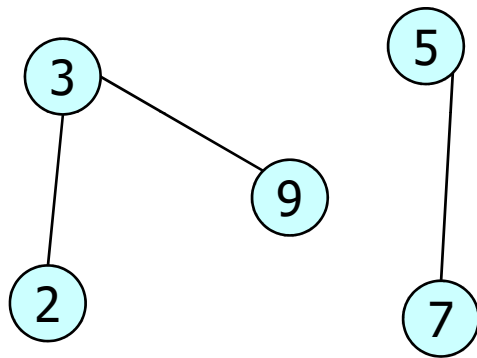
**Conexo**



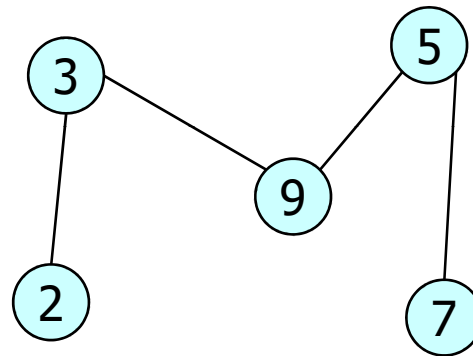
**No Conexa**

# Conectividad: bosque y árbol

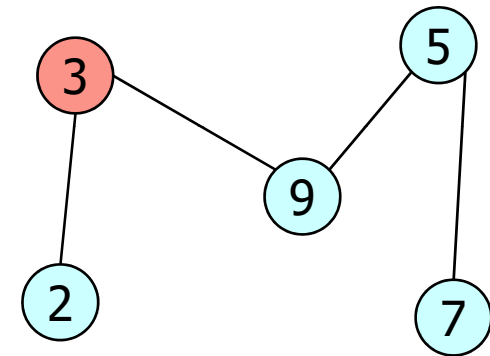
- Un **bosque** es un grafo sin ciclos.
- Un **árbol libre** es un bosque conexo.
- Un **árbol** es un árbol libre en el que un nodo se ha designado como raíz.



Bosque



Árbol libre



Árbol

# Propiedades

➤ Sea  $G$  un grafo no dirigido con  $n$  vértices y  $m$  arcos, entonces

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2 * m$$

✓ Siempre:  $m \leq (n * (n-1)) / 2$

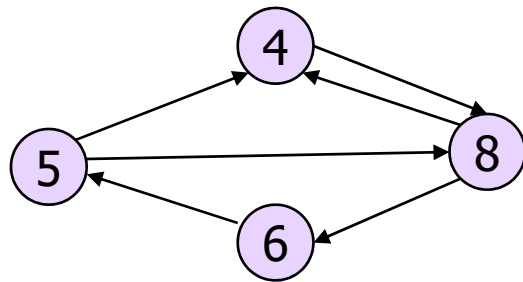
✓ Si  $G$  conexo:  $m \geq n-1$

✓ Si  $G$  árbol:  $m = n-1$

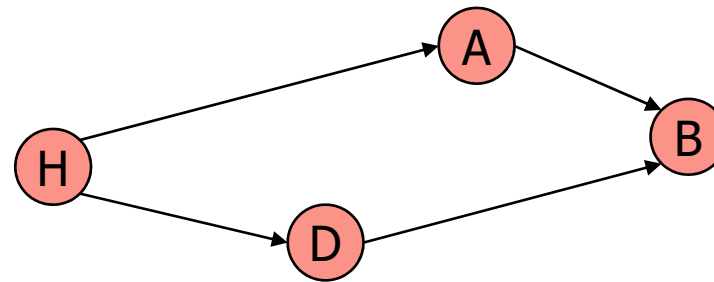
✓ Si  $G$  bosque:  $m \leq n-1$

# Conectividad en grafos dirigidos

- $v$  es **alcanzable desde**  $u$ , si existe un camino de  $u$  a  $v$ .
- Un grafo dirigido se denomina **fuertemente conexo** si existe un camino desde cualquier vértice a cualquier otro vértice



**Fuertemente Conexo**



**No Fuertemente Conexo**  
**Débilmente Conexo**

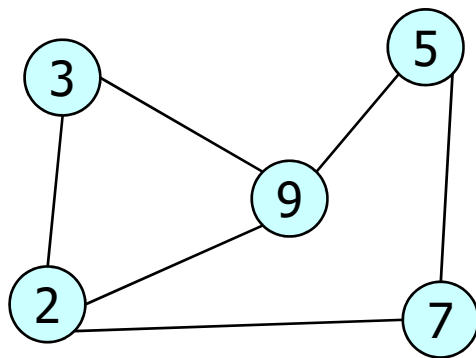
- Si un grafo dirigido no es fuertemente conexo, pero el grafo subyacente (sin sentido en los arcos) es conexo, el grafo es **débilmente conexo**.

# Componentes conexas

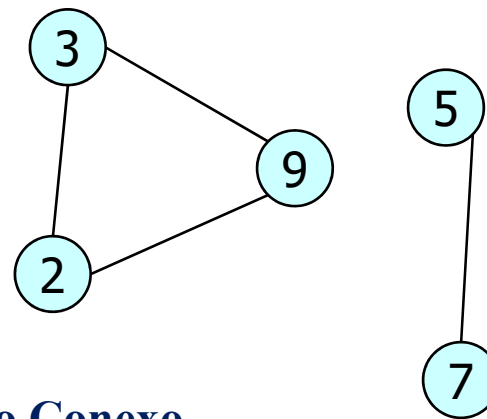
*En un grafo no dirigido, una **componente conexa** es un subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga.*

*Es un **subgrafo conexo maximal**.*

*Un grafo no dirigido es **no conexo** si está formado por varias componentes conexas.*



**Conexo**



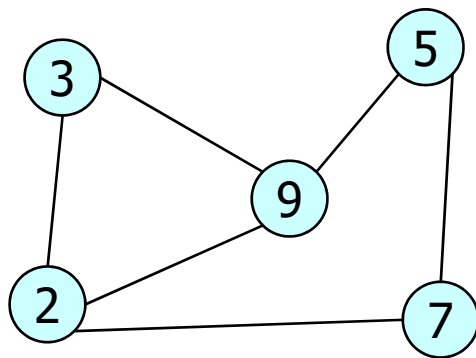
**No Conexa**

# Componentes conexas

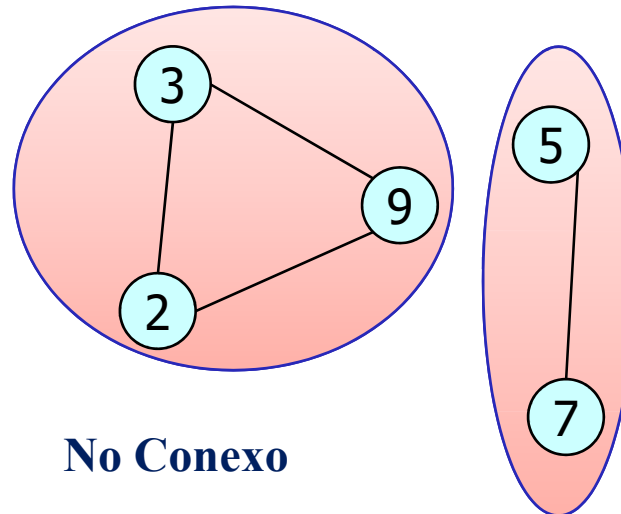
*En un grafo no dirigido, una **componente conexa** es un subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga.*

*Es un **subgrafo conexo maximal**.*

*Un grafo no dirigido es **no conexo** si está formado por varias componentes conexas.*



**Conexo**



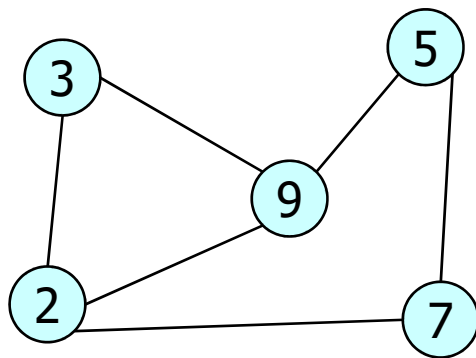
**No Conexa**

# Componentes conexas

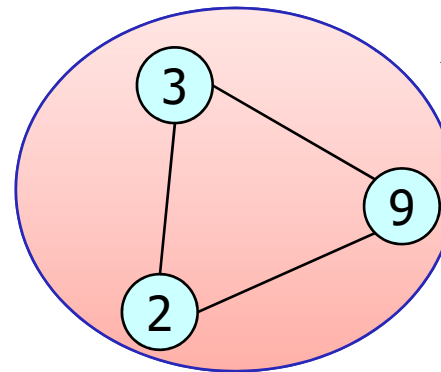
*En un grafo no dirigido, una **componente conexa** es un subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga.*

*Es un **subgrafo conexo maximal**.*

*Un grafo no dirigido es **no conexo** si está formado por varias componentes conexas.*

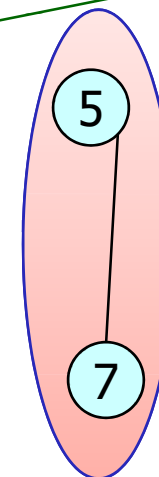


**Conexo**



**No Conexo**

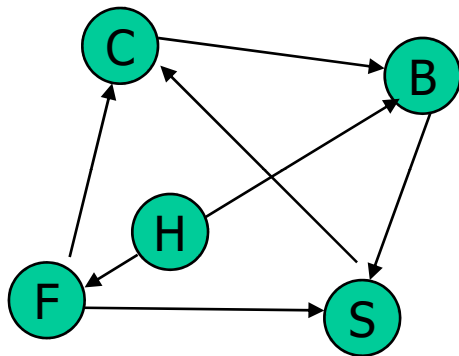
Componentes conexas:  
entre ellas son conexas



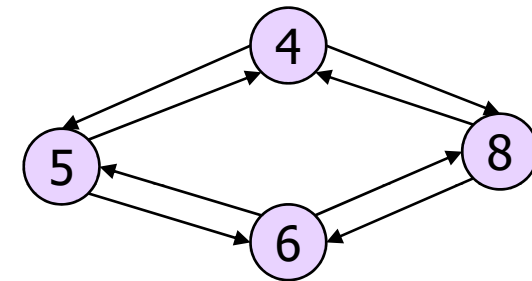
# Componentes fuertemente conexas

*En un grafo dirigido, una **componente fuertemente conexa**, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.*

*Un grafo dirigido es **no fuertemente conexo** si está formado por varias componentes fuertemente conexas.*



**No Fuertemente Conexa**



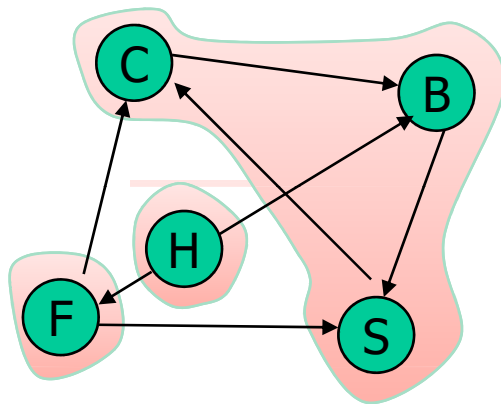
**Fuertemente Conexa**



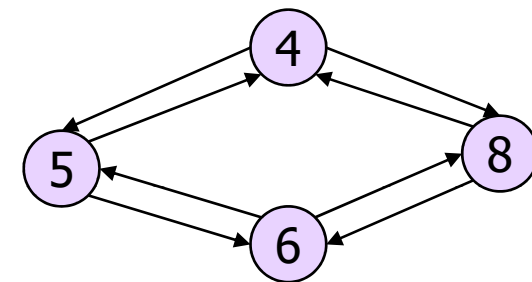
# Componentes fuertemente conexos

*En un grafo dirigido, una **componente fuertemente conexa**, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.*

*Un grafo dirigido es **no fuertemente conexo** si está formado por varias componentes fuertemente conexas.*



**No Fuertemente Conexo**

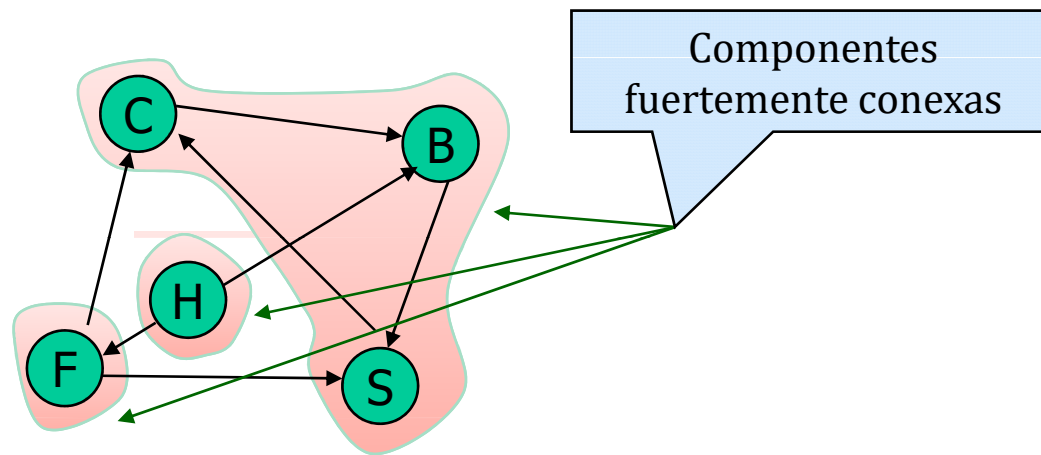


**Fuertemente Conexo**

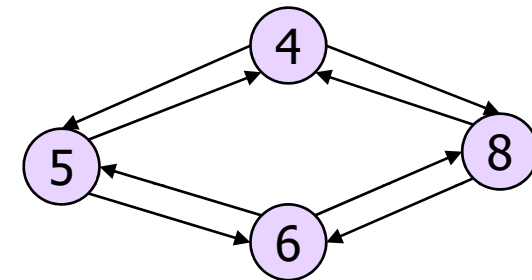
# Componentes fuertemente conexas

*En un grafo dirigido, una **componente fuertemente conexa**, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.*

*Un grafo dirigido es **no fuertemente conexo** si está formado por varias componentes fuertemente conexas.*



**No Fuertemente Conexo**



**Fuertemente Conexo**

# Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología
2. Representaciones
3. Recorridos

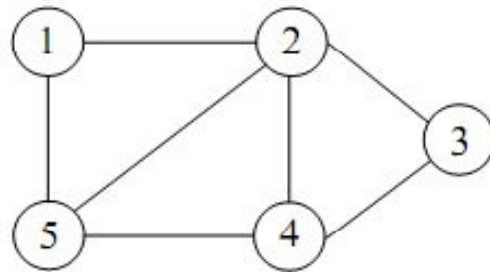
# Agenda - Grafos

- Representaciones
  - Matriz de Adyacencias
  - Lista de Adyacencias

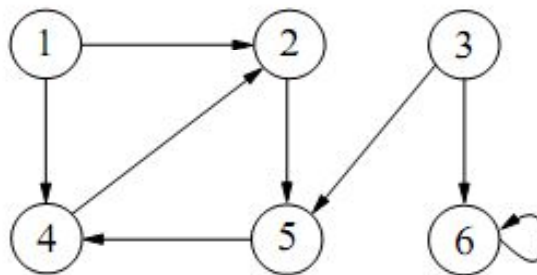
# Representaciones: Matriz de Adyacencias

- $G=(V,E)$ : matriz  $A$  de dimensión  $|V| \times |V|$ .
- Valor  $a_{ij}$  de la matriz:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

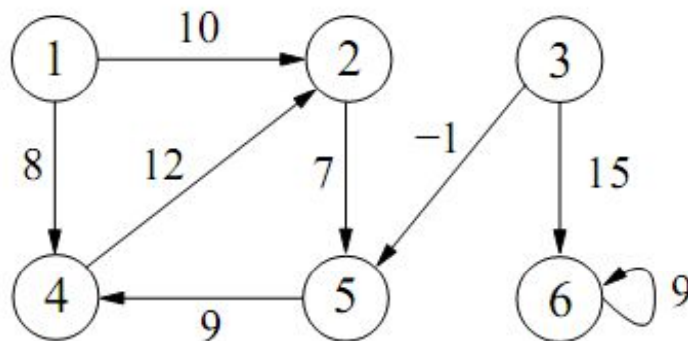
# Representaciones: Matriz de Adyacencias

- *Costo espacial:  $O(|V|^2)$*
- *Representación es útil para grafos con número de vértices pequeño, o grafos densos ( $|E| \approx |V| \times |V|$ )*
- *Comprobar si una arista  $(u,v)$  pertenece a  $E \rightarrow$  consultar posición  $A(u,v)$* 
  - *Costo de tiempo  $T(|V|, |E|) = O(1)$*

# Representaciones: Matriz de Adyacencias

- Representación aplicada a Grafos pesados
- El peso de  $(i,j)$  se almacena en  $A(i,j)$

$$a_{ij} = \begin{cases} w(i,j) & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 \text{ o } \infty & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

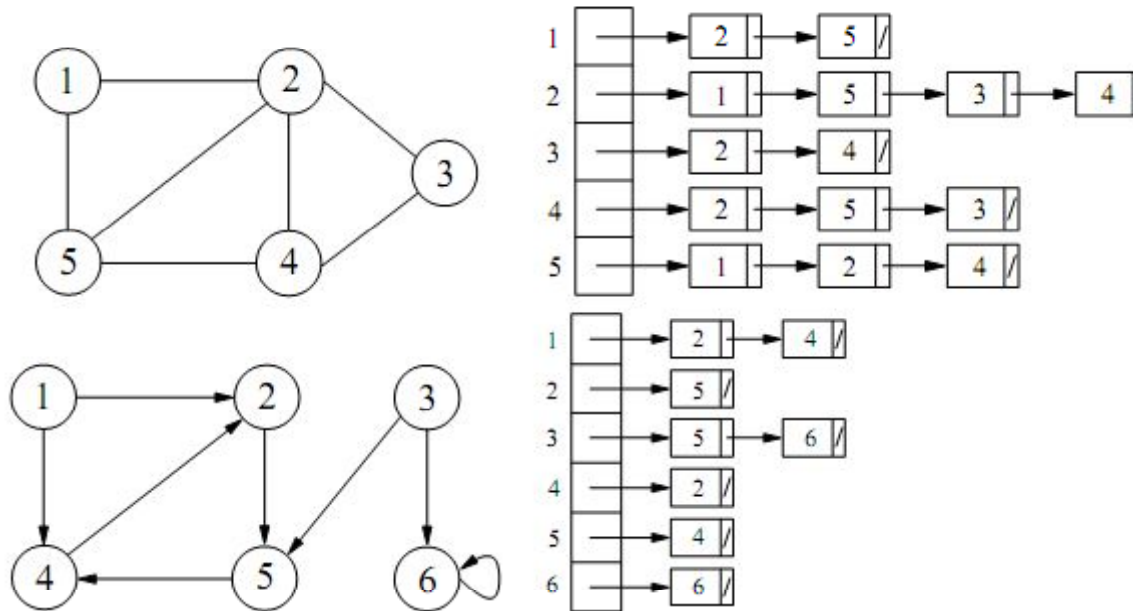


	1	2	3	4	5	6
1	0	10	0	8	0	0
2	0	0	0	0	7	0
3	0	0	0	0	-1	15
4	0	12	0	0	0	0
5	0	0	0	9	0	0
6	0	0	0	0	0	9

# Representaciones: Lista de Adyacencias

- $G=(V,E)$ : vector de tamaño  $|V|$ .
- Posición  $i \rightarrow$  puntero a una lista enlazada de elementos (lista de adyacencia).

*Los elementos de la lista son los vértices adyacentes a  $i$*





# Representaciones: Lista de Adyacencias

- Si  $G$  es dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será  $|E|$ .
- Si  $G$  es no dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será  $2|E|$ .
- Costo espacial, sea dirigido o no:  $O(|V| + |E|)$ .
- Representación apropiada para grafos con  $|E|$  menor que  $|V|^2$ .
- **Desventaja:** si se quiere comprobar si una arista  $(u, v)$  pertenece a  $E \Rightarrow$  buscar  $v$  en la lista de adyacencia de  $u$ .
  - Costo temporal  $T(|V|, |E|)$  será  $O(\text{Grado } G) \subseteq O(|V|)$ .

# Representaciones: Lista de Adyacencias

- Representación aplicada a Grafos pesados
- El **peso de  $(u,v)$**  se almacena en el nodo de  $v$  de la lista de adyacencia de  $u$ .

