



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

---

---

CAMPUS IRAPUATO-SALAMANCA  
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

Localización de los Ejes de Tornillos  
Instantáneos de Mecanismos Espaciales y sus  
Aplicaciones

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA

Presenta

Valderrama Rodríguez Juan Ignacio

Directores:

Dr. Rico Martínez José María  
Dr. Cervantes Sánchez J. Jesús

Salamanca, Gto., Diciembre 2018

# Agradecimientos.

Me gustaría expresar mi mas sincero y profundo agradecimiento aquellas personas que de una u otra forma contribuyeron a la realización del siguiente trabajo.

En primera instancia quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por brindarme su apoyo económico a través de la beca 792650. A la Universidad de Guanajuato, División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, y su planta docente por darme la oportunidad crecer y formarme tanto a nivel profesional como personal.

A mis directores el Dr. José María Rico Martínez y el Dr. J. Jesús Cervantes Sánchez, por ser mis mentores durante mi etapa de investigación y formación, a mi compañero y amigo Alejandro por su colaboración.

A mi familia por todo su apoyo incondicional y comprensión, a mis compañeros y amigos de posgrado por todos esos momentos gratos que pasamos, a México y todas aquellas personas que conocí y formaron parte importante durante esta etapa de mi vida, mil gracias...

---

# Resumen

El presente trabajo muestra que la ecuación básica del análisis de velocidad de mecanismos espaciales constituye, a juicio del autor de este trabajo y sus asesores, la ecuación más general del teorema de Aronhold-Kennedy y su extensión espacial. Además, el presente trabajo aplica los resultados obtenidos a los mecanismos asociados a las subálgebras del álgebra de Lie,  $se(3)$ , del grupo Euclídeo,  $SE(3)$ . En el caso de mecanismo planos y esféricos, este trabajo presenta métodos más sencillos que los publicados a la fecha para determinar los centros instantáneos de velocidad y los ejes instantáneos de velocidad de mecanismos indeterminados, respectivamente. Finalmente, el trabajo aborda la determinación de los ejes instantáneos de velocidad para mecanismos pertenecientes a las subálgebras  $y_{\hat{u}}$  y  $x_{\hat{u}}$  un tema que no se había analizado hasta ahora.

# Abstract

The present work shows that the basic equation for the velocity analysis of spatial mechanisms is, in the opinion of the author and his advisors, the more general equation for the Aronhold-Kennedy theorem and its spatial extension. Furthermore, the work applies the results developed to the mechanisms associated to the subalgebras of the Lie algebra,  $se(3)$ , of the Euclidean group,  $SE(3)$ . In the case of planar and spherical mechanisms, this work provides methods, for the determination of the instantaneous velocity centers, or instantaneous rotation axes, of undetermined linkages, simpler than those published up to this date. Finally, this work carries out the determination of the instantaneous screw axes of linkages associated with the subalgebras,  $y_{\hat{u}}$  and  $x_{\hat{u}}$ , a subject that it has not dealt with up to now.

---

# Índice general

---

<b>1. Capítulo 1: Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. La hipótesis central . . . . .	2
1.2. Descripción de la tesis . . . . .	2
<b>2. Capítulo 2: Fundamentos teóricos</b>	<b>4</b>
2.1. El estado de velocidad de un cuerpo rígido . . . . .	4
2.2. Análisis de velocidad de cadenas cinemáticas . . . . .	5
2.2.1. Notación . . . . .	5
2.2.2. Ecuaciones de velocidad . . . . .	6
2.3. Estados de velocidad y tornillos infinitesimales, su equivalencia . . . . .	12
2.4. Representación de un tornillo mediante coordenadas de plücker . . . . .	12
2.5. Forma de Killing . . . . .	13
2.6. Forma de Klein . . . . .	15
2.7. Aplicación de las formas de Klein y Killing en la determinación de los ejes instantáneos de tornillos . . . . .	16
<b>3. Capítulo 3: Mecanismos triviales asociados a la subálgebra de movimiento planos</b>	<b>18</b>
3.1. Características de los mecanismos . . . . .	18
3.2. Determinación de los centros instantáneos de un mecanismo plano de seis barras . . . . .	19
3.2.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los centros instantáneos secundarios . . . . .	20
3.3. Determinación de los centros instantáneos de un mecanismo plano parcialmente indeterminado: Mecanismo de ocho barras “single flyer” . . . . .	30
3.3.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los centros instantáneos secundarios . . . . .	32
3.3.2. Obtención del sistema de ecuaciones y su solución . . . . .	37
3.3.3. Verificación de los resultados . . . . .	47
3.4. Mecanismo de ocho barras “double butterfly” . . . . .	53
3.4.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los centros instantáneos secundarios . . . . .	54
3.4.2. Obtención del sistema de ecuaciones y su solución . . . . .	55
3.4.3. Verificación de los resultados . . . . .	66
3.4.4. Comentarios finales . . . . .	66
<b>4. Capítulo 4: Mecanismos triviales asociados a la subálgebra de movimiento esférico</b>	<b>67</b>
4.1. Características de los mecanismos . . . . .	67
4.2. Mecanismo esférico de cuatro barras . . . . .	69

---

4.2.1.	Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's . . . . .	70
4.2.2.	Obtención del sistema de ecuaciones y su solución . . . . .	71
4.2.3.	Verificación de los resultados . . . . .	75
4.3.	Mecanismo de seis barras asociado a la subálgebra de movimientos esféricos . . . . .	78
4.3.1.	Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's . . . . .	79
4.3.2.	Obtención del sistema de ecuaciones y su solución . . . . .	79
4.4.	Mecanismo de ocho barras asociado a la subálgebra de movimientos esféricos indeterminado . . . . .	83
4.4.1.	Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's . . . . .	84
4.4.2.	Obtención del sistema de ecuaciones y su solución . . . . .	89
4.4.3.	Verificación de los resultados . . . . .	99
4.5.	Mecanismo indeterminado de ocho barras asociado a la subálgebra de movimientos esféricos . . . . .	100
4.5.1.	Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's . . . . .	101
4.5.2.	Obtención del sistema de ecuaciones y su solución . . . . .	101
4.5.3.	Verificación de los resultados . . . . .	113
4.5.4.	Comentarios finales . . . . .	114
<b>5.</b>	<b>Capítulo 5: Mecanismos triviales asociados a la subálgebra de movimientos <math>y_{\hat{u},p}</math></b>	<b>115</b>
5.1.	Características de los mecanismos . . . . .	115
5.2.	Aplicación de las formas de Killing y Klein . . . . .	115
5.3.	Condiciones generales de los aniquiladores ortogonales . . . . .	116
5.4.	Determinación de los ejes instantáneos secundarios . . . . .	117
5.5.	Mecanismo H-H-H-H de cuatro barras asociado a la subálgebra de movimientos $y_{\hat{u},p}$ . . . . .	118
5.5.1.	Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's . . . . .	119
5.5.2.	Obtención del sistema de ecuaciones y su solución . . . . .	121
5.5.3.	Verificación de los resultados . . . . .	123
5.6.	Mecanismo H-H-H-P de cuatro barras asociado a la subálgebra de movimientos $y_{\hat{u},p}$ . . . . .	128
5.6.1.	Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's . . . . .	129
5.6.2.	Obtención del sistema de ecuaciones y su solución . . . . .	129
5.6.3.	Verificación de los resultados . . . . .	131
<b>6.</b>	<b>Capítulo 6: Mecanismos triviales asociados a la subálgebra de Schönflies</b>	<b>133</b>
6.1.	Características de los mecanismos . . . . .	133
6.2.	La aplicación de las formas de Klein y Killing . . . . .	134
6.3.	Condiciones generales de los aniquiladores ortogonales . . . . .	134
6.4.	Determinación de los centros instantáneos secundarios . . . . .	136
6.5.	Mecanismo H-H-H-H-P de cinco barras asociado a la subálgebra de Schönflies . . . . .	137
6.5.1.	Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's . . . . .	139
6.5.2.	Obtención del sistema de ecuaciones y su solución . . . . .	142
6.5.3.	Verificación de los resultados . . . . .	147
6.6.	Mecanismo R-H-H-H-R de cinco barras asociado a la subálgebra de Schönflies . . . . .	157
6.6.1.	Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's . . . . .	158
6.7.	Mecanismo R-H-H-H-P de cinco barras asociado a la subálgebra de Schönflies . . . . .	161
6.7.1.	Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's . . . . .	162
6.8.	Mecanismo R-H-C-P de cuatro barras asociado a la subálgebra de Schönflies . . . . .	165
6.8.1.	Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's . . . . .	166

---

<b>7. Capítulo 7: Mecanismo triviales espaciales</b>	<b>171</b>
7.1. Análisis de un mecanismo espacial RCCC. . . . .	171
7.1.1. La aplicación de las formas de Klein y Killing . . . . .	171
7.2. Determinación de los ISA secundarios de un mecanismo espacial RCCC. . . . .	172
7.2.1. Determinación del eje instantáneo del tornillo ${}^1\$_O^3$ . . . . .	175
7.2.2. Determinación del eje instantáneo del tornillo ${}^2\$_O^4$ . . . . .	177
7.3. Determinación de los ISA secundarios de un mecanismo espacial RSUR. . . . .	184
7.3.1. Determinación del eje instantáneo del tornillo ${}^1\$_O^3$ . . . . .	187
7.3.2. Determinación del eje instantáneo del tornillo ${}^2\$_O^4$ . . . . .	191
<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>195</b>
<b>Referencias</b>	<b>197</b>

---

# Índice de figuras

---

2.1. Estado de velocidad de un cuerpo rígido $B$ respecto de un cuerpo rígido o sistema de referencia $A$ . . . . .	4
2.2. Cadena serial formada por cuerpos rígidos adyacentes conectados por pares helicoidales. . . . .	6
2.3. Representación de un par helicoidal. . . . .	6
2.4. Base ortonormal $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\}$ fija en el cuerpo rígido $m$ . . . . .	7
2.5. Vector $\vec{\beta}$ fijo al cuerpo rígido $m$ . . . . .	7
2.6. Vector $\vec{\beta}$ observado desde dos marcos de referencia $k$ y $l$ . . . . .	9
2.7. Tres cuerpos rígidos o sistemas de referencia. . . . .	11
2.8. Un par de tornillos y la interpretación geométrica de la forma de Killing. . . . .	14
2.9. Parámetros geométricos asociados con dos pares helicoidales arbitrarios. . . . .	16
 3.1. Mecanismo de seis barras asociado a la subálgebra de movimientos planos indeterminados	19
3.2. Mecanismo de seis barras asociado a la subálgebra de movimientos planos . . . . .	30
3.3. Mecanismo de ocho barras asociado a la subálgebra de movimientos planos indeterminados	31
3.4. Primera configuración de los centros instantáneos . . . . .	36
3.5. Segunda configuración de los centros instantáneos . . . . .	36
3.6. Mecanismo de ocho barras “single flyer” asociado a la subálgebra de movimientos planos .	47
3.7. Velocidad angular relativa del eslabón dos respecto del eslabón uno. . . . .	48
3.8. Velocidad angular relativa del eslabón dos respecto del eslabón ocho. . . . .	49
3.9. Velocidad traslacional del punto $O_8$ respecto del punto $O_2$ . . . . .	50
3.10. Velocidad angular relativa del eslabón dos respecto del eslabón seis. . . . .	51
3.11. Velocidad traslacional del punto $O_6$ respecto del punto $O_2$ . . . . .	52
3.12. Mecanismo de ocho barras asociado a la subálgebra de movimientos planos indeterminados	53
3.13. Mecanismo de ocho barras “double butterfly” asociado a la subálgebra de movimientos planos	65
 4.1. Mecanismo R-R-R-R de cuatro barras asociado al álgebra de movimientos esféricos . . . . .	69
4.2. Localización del eje instantáneo secundario ${}^1\hat{u}^3$ en la intersección de los planos formados por los ejes instantáneos ${}^1\hat{u}^2$ y ${}^2\hat{u}^3$ por un lado y por ${}^3\hat{u}^4$ y ${}^4\hat{u}^1$ por el otro. . . . .	74
4.3. Localización del eje instantáneo secundario ${}^2\hat{u}^4$ en la intersección de los planos formados por los ejes instantáneos ${}^1\hat{u}^2$ y ${}^4\hat{u}^1$ por un lado y por ${}^2\hat{u}^3$ y ${}^3\hat{u}^4$ por el otro. . . . .	74
4.4. Velocidad angular del par de revoluta asociado a ${}^1\hat{u}^2$ . . . . .	75
4.5. Velocidad angular del par de revoluta asociado a ${}^1\hat{u}^3$ . . . . .	76
4.6. Velocidad angular del par de revoluta asociado a ${}^2\hat{u}^4$ . . . . .	77
4.7. Mecanismo de seis barras asociado a una subálgebra de movimientos esféricos . . . . .	78
4.8. Velocidad angular del par de revoluta ${}^1\hat{u}^5$ . . . . .	83
4.9. Mecanismo de ocho barras asociado a la subálgebra de movimientos esféricos . . . . .	84
4.10. Eje instantáneo secundario ${}^j\hat{u}^k$ contenido en el plano definido por ${}^i\hat{u}^k$ e ${}^i\hat{u}^j$ . . . . .	88

---

4.11. Mecanismo indeterminado de 8 barras asociado a la subálgebra de movimientos esféricos . . . . .	100
5.1. Mecanismo H-H-H-H de cuatro barras asociado a una subálgebra de movimientos $y_{\hat{u},p}$ . . . . .	118
5.2. Mecanismo H-H-H-H de cuatro barras asociado a la subálgebra de movimientos $y_{\hat{u},p}$ . . . . .	123
5.3. Velocidad angular relativa del eslabón cuatro respecto del eslabón dos. . . . .	124
5.4. Velocidad traslacional del punto $O$ rígidamente unido al eslabón dos. . . . .	124
5.5. Velocidad angular del par de revoluta asociado a ${}^1\$^3_O$ . . . . .	125
5.6. Velocidad traslacional del punto $O$ rígidamente unido al eslabón tres. . . . .	126
5.7. Velocidad angular del par de revoluta asociado a ${}^2\$^4_O$ . . . . .	127
5.8. Velocidad traslacional del punto $O_4$ respecto del punto $O_2$ . . . . .	127
5.9. Mecanismo H-H-H-P de cuatro barras asociado a la subálgebra de movimientos $y_{\hat{u},P}$ . . . . .	128
5.10. Mecanismo H-H-H-P de cuatro barras asociado a la subálgebra de movimientos $y_{\hat{u},p}$ . . . . .	131
6.1. Mecanismo H-H-H-H-P de cinco barras asociado al álgebra de Schönflies . . . . .	138
6.2. Mecanismo H-H-H-H-P de cinco barras asociado al álgebra de Schönflies . . . . .	147
6.3. Velocidad angular del par de revoluta asociado a ${}^1\$^2_O$ . . . . .	148
6.4. Velocidad traslacional del punto $O$ rígidamente unido al eslabón dos. . . . .	149
6.5. Velocidad angular del par de revoluta asociado a ${}^1\$^3_O$ . . . . .	150
6.6. Velocidad traslacional del punto $O$ rígidamente unido al eslabón tres. . . . .	150
6.7. Velocidad angular del par de revoluta asociado a ${}^1\$^4_O$ . . . . .	151
6.8. Velocidad traslacional del punto $O$ rígidamente unido al eslabón cuatro. . . . .	152
6.9. Velocidad angular relativa del eslabón cuatro respecto del eslabón dos. . . . .	153
6.10. Velocidad traslacional del punto $O_4$ respecto del punto $O_2$ . . . . .	153
6.11. Velocidad angular relativa del eslabón cinco respecto del eslabón dos. . . . .	154
6.12. Velocidad traslacional del punto $O_5$ respecto del punto $O_2$ . . . . .	155
6.13. Velocidad angular relativa del eslabón cinco respecto del eslabón tres. . . . .	156
6.14. Velocidad traslacional del punto $O_5$ respecto del punto $O_3$ . . . . .	156
6.15. Mecanismo R-H-H-H-R de cinco barras asociado al álgebra de Schönflies . . . . .	157
6.16. Mecanismo de cinco barras asociado al álgebra de Schönflies R-H-H-H-R . . . . .	160
6.17. Mecanismo R-H-H-H-P de cinco barras asociado al álgebra de Schönflies . . . . .	161
6.18. Mecanismo R-H-H-H-P de cinco barras asociado al álgebra de Schönflies . . . . .	164
6.19. Mecanismo R-H-C-P de cuatro barras asociado a la subálgebra de Schönflies . . . . .	165
6.20. Mecanismo R-H-C-P de cuatro barras asociado al álgebra de Schönflies . . . . .	169
7.1. Mecanismo espacial RCCC . . . . .	173
7.2. Velocidad angular del par de revoluta asociado a ${}^1\$^2_O$ . . . . .	180
7.3. Velocidad angular del par esférico asociado a $J_{23}$ . . . . .	181
7.4. Velocidad traslacional del punto $O$ rígidamente unido al eslabón tres. . . . .	182
7.5. Velocidad angular relativa del eslabón 4 respecto del eslabón dos. . . . .	183
7.6. Velocidad traslacional del punto $O_4$ respecto del punto $O_2$ . . . . .	184
7.7. Mecanismo espacial RSUR . . . . .	185

---

# Índice de tablas

---

3.1. Centros instantáneos asociados al mecanismo plano de seis barras . . . . .	21
3.2. Centros instantáneos de tornillos asociados al mecanismo esférico de ocho barras . . . . .	33
3.3. Centros instantáneos de tornillos asociados al mecanismo esférico de 8 barras . . . . .	35
3.4. Centros instantáneos secundarios cuyo vector de posición puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de posición de dos centros instantáneos primarios . . . . .	37
3.5. Centros instantáneos de tornillos asociados a mecanismos planos de ocho barras . . . . .	55
3.6. Centros instantáneos secundarios cuyo vector de posición puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de posición de dos centros instantáneos primarios . . . . .	55
4.1. Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo esférico de cuatro barras . . . . .	70
4.2. Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo esférico de 6 barras . . . . .	79
4.3. Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo esférico de 8 barras . . . . .	85
4.4. Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo esférico de ocho barras . . . . .	87
4.5. Ejes instantáneos secundarios cuyo vector unitario asociado a la dirección del eje de rotación puede escribirse como una combinación lineal de las direcciones asociadas a los dos ejes instantáneos primarios . . . . .	89
4.6. Ejes instantáneos de tronillos asociados al mecanismo esférico de 8 barras . . . . .	101
4.7. Ejes instantáneos secundarios cuyo vector unitario asociado a la dirección del eje de rotación puede escribirse como una combinación lineal de las direcciones asociadas a los dos ejes instantáneos primarios . . . . .	101
5.1. Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo H-H-H-H . . . . .	119
5.2. Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo H-H-H-P . . . . .	129
6.1. Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo H-H-H-H-P . . . . .	139
6.2. Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo R-H-H-H-R . . . . .	158
6.3. Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo R-H-H-H-P . . . . .	162
6.4. Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo R-H-C-P . . . . .	166
7.1. Ejes instantáneos de tornillos o matrices Jacobianas asociadas al mecanismo espacial RCCC	173
7.2. Ejes instantáneos de tornillos o matrices Jacobianas asociadas al mecanismo espacial RSUR	185

---

# Capítulo 1: Introducción

---

El teorema de Aronhold-Kennedy formulado independientemente por Aronhold [1], en Alemania, y por Kennedy [17], en Inglaterra, en la segunda mitad del siglo XIX, permitió relacionar los centros instantáneos de rotación, o de velocidad, asociados a los movimientos relativos de tres eslabones arbitrarios de un mecanismo plano.

Desde su formulación hasta la aparición de la computadora digital, a mediados del siglo XX, fue una herramienta gráfica eficaz para realizar los análisis de velocidad de mecanismos planos. Además, mediante diferenciación numérica, permitió aproximar los análisis de aceleración de esos mecanismos planos, por ejemplo Church [7], Shigley [27]. La gran mayoría de los mecanismos planos permiten localizar la totalidad de los centros instantáneos de velocidad aplicando de manera sistemática el teorema de Aronhold-Kennedy.

Desde principios del siglo XX, Klein [19], mostró que existían mecanismos planos para los cuales la aplicación del teorema de Aronhold-Kennedy era incapaz de determinar la totalidad de sus centros instantáneos de velocidad. A estos mecanismos se les denominó complejos o indeterminados, [27]. El mismo Klein [19], propuso un método gráfico de prueba y error para localizar aquellos centros instantáneos de velocidad que no podían localizarse mediante la aplicación del teorema de Aronhold-Kennedy.

Con la aparición de la computadora digital, la solución del análisis de velocidad de mecanismos planos pudo realizarse de una manera rápida y sencilla y el empleo de los centros instantáneos de velocidad para llevar a cabo el análisis de velocidad de mecanismos planos cayó en desuso.

Más aún, la solución, del análisis de velocidad de mecanismos planos permitió la localización de todos los centros instantáneos de mecanismos complejos o indeterminados, esta técnica de solución fue propuesta a mediados del siglo XX, pero reaparece en fechas posteriores, Yan et al [28], y aún en la actualidad, Kim, Han, Seo, y Lee, [18].

Por otro lado hace 15 años aproximadamente, Foster y Pennock [11], mostraron una técnica gráfica que permite encontrar todos los centros instantáneos de mecanismos planos complejos o indeterminados que mejoraba, por mucho el método propuesto por Klein. Unos años después, Di Gregorio [8], presentó una técnica analítica que mediante la generación de un sistema de ecuaciones que involucran las ecuaciones de clausura del mecanismo plano y la localización de los centros instantáneos indeterminados permitía resolver el problema. En 2009, Kung y Wang [20], empleando teoría de gráficas presentaron un método que formulando un sistema de ecuaciones, cuyas incógnitas son las coordenadas de los centros instantáneos

---

indeterminados, que resuelven el problema mediante la solución de una ecuación cuadrática o cuártica.

La extensión del teorema de Aronhold-Kennedy de la cinemática plana a la cinemática espacial está sujeta a controversia. Beggs [3], en su tesis doctoral presentó una prueba del teorema, vea también Beggs [4]. Por otro lado, Phillips y Hunt [22], presentaron también una prueba del mismo teorema. El autor del presente trabajo y sus asesores no emiten juicio alguno acerca de la controversia.

Para estas fechas, el análisis de velocidad de mecanismos, tanto planos como espaciales, ya se empezaba a realizar mediante computadora digital, de manera que la versión espacial del teorema de Aronhold-Kennedy no se empleó de manera sistemática en la determinación de los ejes instantáneos de tornillos del movimiento relativo entre dos eslabones arbitrarios de un mecanismo espacial. No obstante, Beyer [5], en la Alemania de los años 40 y 50, presentó métodos gráficos para el análisis de velocidad y aceleración de mecanismos espaciales. Aparentemente, Beyer no aplicó los resultados encontrados por Beggs.

En los párrafos anteriores únicamente se comentó la aplicación del teorema de Aronhold-Kennedy para mecanismos planos y espaciales. Sin embargo, es posible aplicar la extensión espacial del teorema de Aronhold-Kennedy a otros subgrupos del grupo Euclídeo,  $SE(3)$ , o las subálgebras del álgebra de Lie correspondiente,  $se(3)$ . En este aspecto, es importante señalar diferentes contribuciones en la subálgebra de movimientos esféricos. En 2008, Di Gregorio, [9],[10], aplicó las técnicas desarrolladas para mecanismos planos a mecanismos esféricos; como se indicó, esas técnicas involucran las ecuaciones de clausura del mecanismo y la orientación de los ejes instantáneos de rotación del mecanismo esférico. Zarkandi [29],[30], aplicó a mecanismos esféricos la técnica, basada en la teoría de gráficas, desarrollada por Kung y Wang [20], para mecanismos planos, Zarkandi [29],[30], indica que la solución del problema se reduce a la solución de tres ecuaciones cúbicas.

Hasta donde el autor de este trabajo y sus asesores tienen conocimiento, no existen trabajos asociados a la determinación de los ejes de tornillo en mecanismos asociados a las subálgebras denominadas por Hervé [15] como,  $y_{\hat{u}}$  o de Schönflies,  $x_{\hat{u}}$ . Mayores detalles de estas subálgebras se presentan en los capítulos 5 y 6 respectivamente.

## 1.1. La hipótesis central

La hipótesis central de este trabajo de tesis es que la ecuación fundamental del teorema de los tres ejes asociados al movimiento de tres cuerpos está dado por

$${}^i\vec{V}_O^k = {}^i\vec{V}_O^j + {}^j\vec{V}_O^k \quad (1.1)$$

donde  $i, j$  y  $k$  son los tres cuerpos y  ${}^m\vec{V}_O^n$  es el estado de velocidad del cuerpo  $n$  respecto al cuerpo  $m$  con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ . El teorema de Aronhold-Kennedy o su extensión al espacio son simples corolarios de la ecuación (1.1) aplicando a ambos lados de la ecuación las formas de Klein o Killing. Una indicación de este posible resultado se presentó en Rico y Gallardo [23]

## 1.2. Descripción de la tesis

Una breve descripción del resto de la tesis se presenta en esta sección.

---

El capítulo 2 presenta los fundamentos cinemáticos indispensables para analizar los temas de la tesis. El capítulo 3 presenta la teoría desarrollada en el capítulo 2 a la determinación de los centros instantáneos de velocidad de mecanismos planos de un grado de libertad tanto determinados como indeterminados. El capítulo 4 repite el tratamiento desarrollado en el capítulo 3 a mecanismos esféricos. Los capítulos 5 y 6 aplican la teoría desarrollada a mecanismos de un grado de libertad asociados a la subálgebra  $y_u$  y  $x_u$  respectivamente. El capítulo 7 determina los ejes instantáneos de tornillo de dos mecanismos espaciales, RSSS y RUSR, ambos de un grado de libertad.

La tesis finaliza con una breve recopilación de los resultados obtenidos en el desarrollo de la tesis y una evidente extensión de los resultados.

Es importante señalar que los resultados obtenidos en la tesis se verificaron llevando a cabo el análisis de velocidad de los mecanismos analizados y, a partir de esos resultados, determinando los ejes instantáneos de tornillo, o su equivalente para la subálgebra considerada. Mas aún estos resultados se verificaron simulando el mecanismo en el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>.

---

## Capítulo 2: Fundamentos teóricos

---

Esta sección comienza con una definición formal de la velocidad angular de un cuerpo rígido  $B$  con respecto a otro cuerpo rígido  $A$ . Cabe señalar que, a diferencia de la velocidad de un punto, la velocidad angular no es la derivada de ninguna función vectorial. Toda la información correspondiente a los fundamentos teóricos contenida de este capítulo fue tomada de las tesis de Gallardo [13] y Rocha [26].

### 2.1. El estado de velocidad de un cuerpo rígido

El objetivo principal de conocer el estado de velocidad de un cuerpo rígido, respecto a un sistema de referencia, es la determinación de la velocidad de cualquier punto fijo del cuerpo rígido.

Imagine dos cuerpos rígidos,  $A$  y  $B$ , vea Figura 2.1, moviéndose uno respecto del otro, y suponga que el cuerpo  $A$  actúa como un sistema de referencia a partir del cual es posible observar el movimiento del cuerpo  $B$ . Si se desea conocer la velocidad de un punto arbitrario pero fijo al cuerpo  $B$ , entonces es necesario conocer dos elementos fundamentales.

1. La velocidad angular del cuerpo rígido  $B$ , como se observa desde el cuerpo rígido  $A$ ,  ${}^A\vec{\omega}^B$ .
2. La velocidad de un punto arbitrario  $O$ , fijo al cuerpo  $B$ , como se observa desde el cuerpo  $A$ ,  ${}^A\vec{v}_O^B$ .

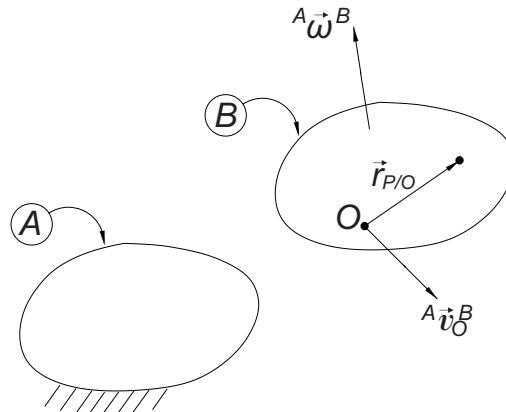


Figura 2.1: Estado de velocidad de un cuerpo rígido  $B$  respecto de un cuerpo rígido o sistema de referencia  $A$ .

Resulta pues razonable establecer que el estado de velocidad del cuerpo  $B$ , como se observa desde el cuerpo o sistema de referencia  $A$ , puede formalmente representarse como

$${}^A\vec{V}_O^B \equiv \begin{bmatrix} {}^B\vec{\omega}^B \\ {}^A\vec{v}_O^B \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Si se conoce una representación del estado de velocidad,  ${}^A\vec{V}^B$ , entonces es posible determinar las velocidades de todos los puntos fijos al cuerpo  $B$ , como se observan desde el sistema de referencia  $A$ . En efecto, si  $P$  es otro punto fijo al cuerpo  $B$  y  $\vec{r}_{P/O}$  es un vector que inicia en el punto  $O$  y termina en el punto  $P$ , la velocidad del punto  $P$  vendrá dada por

$${}^A\vec{v}_P^B = {}^A\vec{v}_O^B + {}^A\vec{\omega}^B \times \vec{r}_{P/O} \quad (2.2)$$

Debe reconocerse que diferentes selecciones del punto de referencia  $O$ , conducen a diferentes, pero equivalentes, respresentaciones del estado de velocidad de un cuerpo rígido. Por lo tanto, debe probarse que las diferentes operaciones que se realizan sobre los estados de velocidad son independientes de las diferentes representaciones. Sin embargo estos resultados son bien conocidos y no representan una adición importante, para mayor información, vea por ejemplo Gallardo y Rico [13],[25].

## 2.2. Análisis de velocidad de cadenas cinemáticas

El análisis de velocidad de cadenas cinemáticas consiste en establecer y resolver las ecuaciones cuya solución determina las velocidades articulares de los pares cinemáticos que forman la cadena cinemática. Desde los años setenta el análisis de velocidad se ha formulado, de manera compacta, en términos de los tornillos infinitesimales asociados a la cadena cinemática. Así pues, este capítulo no es una contribucion original; sin embargo, constituye una base importante para el desarrollo de capítulos subsecuentes.

### 2.2.1. Notación

La notación que se emplea en el presente trabajo es una adaptación de la utilizada por Kane y Levinson [16], la cual proporciona de manera compacta la información relativa a las variables cinemáticas de los mecanismos.

Considere la cadena serial de la Figura 2.2, la velocidad angular del cuerpo rígido  $l$  con respecto al cuerpo rígido  $k$  se denota como  ${}^k\vec{\omega}^l$ , mientras que su magnitud se denota como  ${}_k\omega_l$ . Los cuerpos  $k$  y  $l$  pueden identificarse con cualesquiera de los cuerpos rígidos de la cadena serial.

Similarmente, la velocidad de un punto  $O$ , fijo en un cuerpo  $l$ , vea Figura 2.3, con respecto a un cuerpo  $k$ , se denota como  ${}^k\vec{v}_O^l$ .

Si los cuerpo  $k$  y  $l$  se encuentran conectados por un par helicoidal, vea Figura 2.3, que pasa por un punto  $B$ , fijo en  $l$ , con una dirección  ${}^k\hat{s}^l$  y un paso  ${}_k h_l$ , entonces la velocidad angular,  ${}^k\vec{\omega}^l$ , viene dada por

$${}^k\vec{\omega}^l \equiv {}_k\omega_l {}^k\hat{s}^l, \quad (2.3)$$

donde  ${}_k\omega_l$  es su magnitud. Puesto que  ${}^k\hat{s}^l$  es un vector fijo en los cuerpos  $k$  y  $l$  entonces, necesariamente

$$\frac{d {}^k\vec{s}^l}{dt} = \vec{0}$$

Si la velocidad angular  ${}_k\omega_l$  es normalizada o unitaria, esto es si  $|{}_k\omega_l| = 1$ , el par-momento del cuerpo  $l$  respecto del cuerpo  $k$ ,  ${}^k\vec{s}_O^l$ , es la velocidad del punto  $O$  fijo en el cuerpo  $l$  respecto del cuerpo  $k$  y se determina como

$${}^k\vec{s}_O^l \equiv {}^k\vec{v}_O^l = {}_k h_l {}^k\hat{s}^l + {}^k\hat{s}^l \times \vec{q}, \quad (2.4)$$

donde  $\vec{q}$  es el vector de posición del punto  $B$  al punto  $O$  del cuerpo  $l$ , vea Figura 2.3

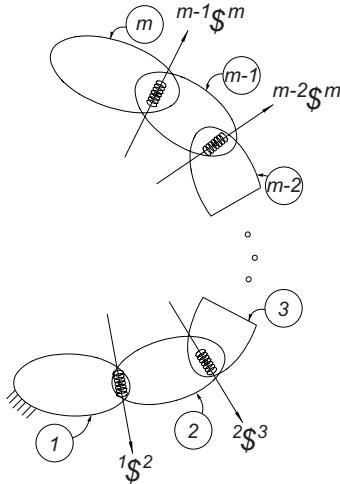


Figura 2.2: Cadena serial formada por cuerpos rígidos adyacentes conectados por pares helicoidales.

Esta notación puede extenderse, sin mayores problemas, a los análisis cinemáticos de orden superior.

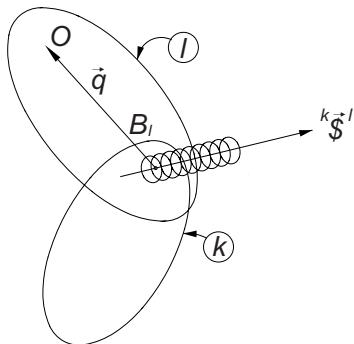


Figura 2.3: Representación de un par helicoidal.

### 2.2.2. Ecuaciones de velocidad

En esta sección se deducen las ecuaciones de velocidad de un cuerpo rígido con respecto a un sistema de referencia, las derivadas temporales de vectores con respecto a sistemas de referencia fijos o móviles juegan un papel fundamental en el desarrollo de la presente sección.

**Definición 2.1** Sea  $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\}$  una base ortonormal y a derechas de  $R^3$  fija en el cuerpo  $m$ , entonces la velocidad angular del cuerpo  $m$ , con respecto a un cuerpo  $j$ , vea Figura 2.4, se define como

$${}^j\vec{\omega}^m \equiv \hat{b}_1 \frac{^j\hat{b}_2}{dt} \cdot \hat{b}_3 + \hat{b}_2 \frac{^j\hat{b}_3}{dt} \cdot \hat{b}_1 + \hat{b}_3 \frac{^j\hat{b}_1}{dt} \cdot \hat{b}_2 \quad (2.5)$$

donde,  $(\cdot)$  representa al producto interno o escalar usual del álgebra vectorial tridimensional.

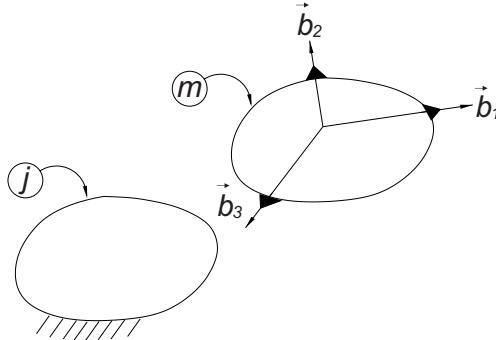


Figura 2.4: Base ortonormal  $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\}$  fija en el cuerpo rígido  $m$ .

En la siguiente proposición se muestra la relación que existe entre la velocidad angular,  ${}^j\vec{\omega}^m$ , de un cuerpo rígido  $m$  tomando como sistema de referencia a un cuerpo rígido  $j$ , y un vector arbitrario  $\vec{\beta}$  fijo a  $m$  cuya orientación, con respecto a este, es invariante.

**Proposición 2.2** Sean  $m$  y  $j$  dos cuerpos rígidos,  ${}^j\vec{\omega}^m$  es la velocidad angular de  $m$  respecto de  $j$  si, y sólo si para todo vector arbitrario  $\vec{\beta}$  fijo en el cuerpo rígido  $m$ , vea Figura 2.5 se cumple que

$$\frac{{}^j d\vec{\beta}}{dt} = {}^j\vec{\omega}^m \times \vec{\beta} \quad (2.6)$$

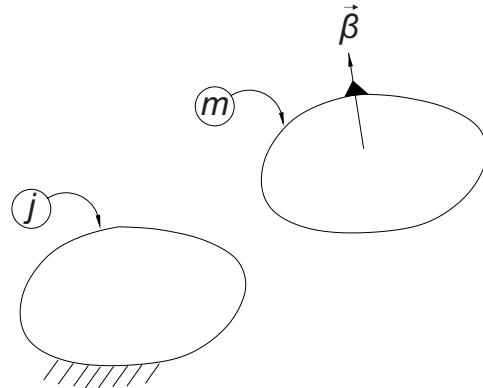


Figura 2.5: Vector  $\vec{\beta}$  fijo al cuerpo rígido  $m$ .

**Prueba:** suponga que  ${}^j\vec{\omega}^m$  está dada por la ecuación (2.5), sea  $\vec{\beta}$  un vector arbitrario fijo en el cuerpo  $m$ , y sea  $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\}$  una base ortonormal y a derechas fija en el cuerpo  $m$ , entonces

$$\vec{\beta} = \beta_1 \hat{b}_1 + \beta_2 \hat{b}_2 + \beta_3 \hat{b}_3$$

donde  $\beta_1, \beta_2$  y  $\beta_3$  son escalares constantes. Debe notarse que

$$\begin{aligned} {}^j\vec{\omega}^m \times \hat{b}_1 &= \left( \hat{b}_1 \frac{{}^j d\hat{b}_2}{dt} \cdot \hat{b}_3 + \hat{b}_2 \frac{{}^j d\hat{b}_3}{dt} \cdot \hat{b}_1 + \hat{b}_3 \frac{{}^j d\hat{b}_1}{dt} \cdot \hat{b}_2 \right) \times \hat{b}_1 \\ &= -\hat{b}_3 \frac{{}^j d\hat{b}_3}{dt} \cdot \hat{b}_1 + \hat{b}_2 \frac{{}^j d\hat{b}_1}{dt} \cdot \hat{b}_2 \end{aligned}$$

Sin embargo

$$\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_1 = 1,$$

por lo tanto

$$\frac{^j d\hat{b}_1}{dt} \cdot \hat{b}_1 + \hat{b}_1 \cdot \frac{^j d\hat{b}_1}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{^j d\hat{b}_1}{dt} \cdot \hat{b}_1 = 0$$

y en particular

$$\hat{b}_1 \frac{^j d\hat{b}_1}{dt} \cdot \hat{b}_1 = \vec{0}.$$

Similarmente

$$\hat{b}_3 \cdot \hat{b}_1 = 0,$$

y por lo tanto

$$\frac{^j d\hat{b}_3}{dt} \cdot \hat{b}_1 + \hat{b}_3 \cdot \frac{^j d\hat{b}_1}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{^j d\hat{b}_3}{dt} \cdot \hat{b}_1 = -\frac{^j d\hat{b}_1}{dt} \cdot \hat{b}_3$$

La sustitución de estos resultados conduce a

$${}^j \vec{\omega}^m \times \hat{b}_1 = \frac{^j d\hat{b}_1}{dt} \cdot \hat{b}_1 \hat{b}_1 + \frac{^j d\hat{b}_1}{dt} \cdot \hat{b}_2 \hat{b}_2 + \frac{^j d\hat{b}_1}{dt} \cdot \hat{b}_3 \hat{b}_3 = \frac{^j d\hat{b}_1}{dt}$$

De manera semejante puede probarse que

$${}^j \vec{\omega}^m \times \hat{b}_2 = \frac{^j d\hat{b}_2}{dt}$$

y

$${}^j \vec{\omega}^m \times \hat{b}_3 = \frac{^j d\hat{b}_3}{dt}$$

Entonces

$$\begin{aligned} {}^j \vec{\omega}^m \times \vec{\beta} &= {}^j \vec{\omega}^m \times (\beta_1 \hat{b}_1 + \beta_2 \hat{b}_2 + \beta_3 \hat{b}_3) \\ &= \vec{\beta}_1 {}^j \vec{\omega}^m \times \beta_1 + \beta_2 {}^j \vec{\omega}^m \times \beta_2 + \beta_3 {}^j \vec{\omega}^m \times \beta_3 \\ &= \beta_1 \frac{^j d\hat{b}_1}{dt} + \beta_2 \frac{^j d\hat{b}_2}{dt} + \beta_3 \frac{^j d\hat{b}_3}{dt} \\ &= \frac{^j d}{dt} \times (\beta_1 \hat{b}_1 + \beta_2 \hat{b}_2 + \beta_3 \hat{b}_3) = \frac{^j d\vec{\beta}}{dt} \end{aligned}$$

En la dirección opuesta, suponga que para todo vector  $\vec{\beta}$  fijo en  $m$  se tiene que

$${}^j \vec{\omega}^m \times \vec{\beta} = \frac{^j d\vec{\beta}}{dt},$$

entonces en particular

$${}^j \vec{\omega}^m \times \hat{b}_i = \frac{^j d\hat{b}_i}{dt} \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Suponga que

$${}^j \vec{\omega}^m = \omega_1 \hat{b}_1 + \omega_2 \hat{b}_2 + \omega_3 \hat{b}_3,$$

entonces

$$\omega_1 = ({}^j \vec{\omega}^m \times \hat{b}_2) \cdot \hat{b}_3 = \frac{^j d\hat{b}_2}{dt} \cdot \hat{b}_3,$$

$$\omega_2 = \left( {}^j\vec{\omega}^m \times \hat{b}_3 \right) \cdot \hat{b}_1 = \frac{{}^j d\hat{b}_3}{dt} \cdot \hat{b}_1,$$

y

$$\omega_3 = \left( {}^j\vec{\omega}^m \times \hat{b}_1 \right) \cdot \hat{b}_2 = \frac{{}^j d\hat{b}_1}{dt} \cdot \hat{b}_2.$$

Por lo tanto

$${}^j\vec{\omega}^m = \hat{b}_1 \frac{{}^j d\hat{b}_2}{dt} \cdot \hat{b}_3 + \hat{b}_2 \frac{{}^j d\hat{b}_3}{dt} \cdot \hat{b}_1 + \hat{b}_3 \frac{{}^j d\hat{b}_1}{dt} \cdot \hat{b}_2 \quad (2.7)$$

La siguiente proposición muestra cómo la velocidad angular,  ${}^k\vec{\omega}^l$ , permite relacionar las derivadas temporales de un vector cuando se observa desde dos diferentes sistemas de referencia  $k$  y  $l$ . Es importante mencionar que si bien para un escalar sus derivadas temporales son independientes del sistema de referencia; para un vector sus derivadas temporales dependerán, definitivamente, del sistema de referencia que se seleccione.

**Proposición 2.3** Sean  $k$  y  $l$  dos cuerpos rígidos arbitrarios y  $\vec{\beta}$  un vector arbitrario, vea Figura 2.6. Las derivadas temporales de  $\vec{\beta}$ , con respecto a esos cuerpos o sistemas de referencia, están relacionadas mediante la velocidad angular,  ${}^k\vec{\omega}^l$ , del cuerpo  $l$  como se observa desde el cuerpo  $k$ , de acuerdo a

$$\frac{{}^k d\vec{\beta}}{dt} = \frac{{}^l d\vec{\beta}}{dt} + {}^k\vec{\omega}^l \times \vec{\beta} \quad (2.8)$$

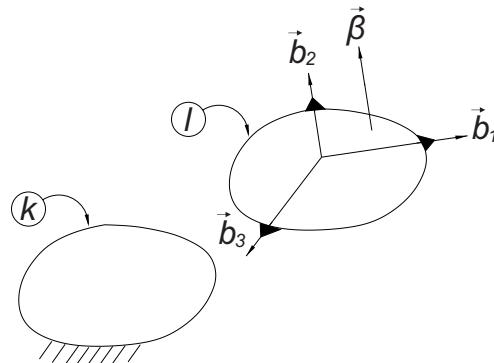


Figura 2.6: Vector  $\vec{\beta}$  observado desde dos marcos de referencia  $k$  y  $l$ .

**Prueba:** Sea  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$  una base ortonormal y a derechas fija en el cuerpo o sistema de referencia  $l$ . Entonces, cualquier vector arbitrario  $\vec{\beta}$  fijo en el cuerpo  $l$  puede expresarse como

$$\vec{\beta} = \beta_1 \hat{b}_1 + \beta_2 \hat{b}_2 + \beta_3 \hat{b}_3$$

De aquí que, la derivada temporal de  $\vec{\beta}$  respecto al sistema de referencia  $k$  estará dada por

$$\begin{aligned} \frac{{}^k d\vec{\beta}}{dt} &= \frac{{}^k d}{dt} (\beta_1 \hat{b}_1 + \beta_2 \hat{b}_2 + \beta_3 \hat{b}_3) \\ &= \frac{{}^k d\vec{\beta}_1}{dt} \hat{b}_1 + \frac{{}^k d\vec{\beta}_2}{dt} \hat{b}_2 + \frac{{}^k d\vec{\beta}_3}{dt} \hat{b}_3 + \beta_1 \frac{{}^j d\hat{b}_1}{dt} + \beta_2 \frac{{}^j d\hat{b}_2}{dt} + \beta_3 \frac{{}^j d\hat{b}_3}{dt} \end{aligned}$$

Sin embargo, como  $\beta_1, \beta_2$  y  $\beta_3$  son escalares, sus derivadas temporales son independientes del sistema de referencia. Por otro lado, los vectores  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  y  $\vec{b}_3$  están fijos en el sistema de referencia  $l$  y sus derivadas temporales, de acuerdo a la proposición 2.2, vienen dadas por

$$\frac{^j d\vec{\beta}}{dt} = {}^j \vec{\omega}_1^m \times \hat{b}_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{^k d\vec{\beta}}{dt} &= \frac{{}^l d\beta}{dt} \hat{b}_1 + \frac{{}^l d\beta}{dt} \hat{b}_2 + \frac{{}^l d\beta}{dt} \hat{b}_3 + \beta_1 {}^k \vec{\omega}^l \times \hat{b}_1 + \beta_2 {}^k \vec{\omega}^l \times \hat{b}_2 + \beta_3 {}^k \vec{\omega}^l \times \hat{b}_3 \\ &= \frac{^j d}{dt} (\beta_1 \hat{b}_1 + \beta_2 \hat{b}_2 + \beta_3 \hat{b}_3) + {}^k \vec{\omega}^l \times (\beta_1 \hat{b}_1 + \beta_2 \hat{b}_2 + \beta_3 \hat{b}_3) \end{aligned}$$

Así pues, finalmente, se tiene que

$$\frac{^k d\vec{\beta}}{dt} = \frac{{}^l d\vec{\beta}}{dt} + {}^k \vec{\omega}^l \times \vec{\beta} \quad (2.9)$$

**Proposición 2.4** Sean  $j, k$  y  $m$  tres cuerpos rígidos diferentes o sistemas de referencia. Sea  $O^m$  un punto arbitrario fijo en el cuerpo  $m$  y sea  $O^k$  un punto arbitrario fijo en el cuerpo  $k$  que, en el instante considerado, coincide con el punto  $O^m$ . Entonces, se satisface que

$${}^j \vec{\omega}^m = {}^j \vec{\omega}^m + {}^j \vec{\omega}^m \quad (2.10)$$

y

$${}^j \vec{v}_O^m = {}^j \vec{v}_O^m + {}^j \vec{v}_O^m \quad (2.11)$$

**Prueba:** Sea  $\beta$  un vector arbitrario fijo en el cuerpo  $m$ ; entonces, de acuerdo con la proposición 2.2,  ${}^j \vec{\omega}^k$  y  ${}^k \vec{\omega}^m$  deben satisfacer las relaciones

$$\frac{^j d\vec{\beta}}{dt} = {}^j \vec{\omega}^m \times \vec{\beta} \quad (2.12)$$

y

$$\frac{^j d\vec{\beta}}{dt} = {}^k \vec{\omega}^m \times \vec{\beta} \quad (2.13)$$

Sin embargo, se sabe de la proposición 2.3 que

$$\frac{^j d\vec{\beta}}{dt} = \frac{^j d\vec{\beta}}{dt} {}^j \vec{\omega}^k \times \vec{\beta} \quad (2.14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.12) y (2.13) en la ecuación (2.17), se tiene que

$${}^j \vec{\omega}^m \times \vec{\beta} = {}^k \vec{\omega}^m \times \vec{\beta} + {}^j \vec{\omega}^k \times \vec{\beta} = \left( {}^j \vec{\omega}^k + {}^k \vec{\omega}^m \right) \times \vec{\beta}$$

Puesto que  $\vec{\beta}$  es un vector arbitrario, entonces

$${}^j \vec{\omega}^m = {}^j \vec{\omega}^k + {}^k \vec{\omega}^m \quad (2.15)$$

Para la segunda parte de la prueba, considere que el punto  $\tilde{A}$  está fijo al cuerpo rígido  $j$  y que el punto  $\tilde{B}$  está fijo al cuerpo rígido  $k$ , vea la Figura 2.7. Entonces es posible escribir la ecuación vectorial

$$\vec{P} = \vec{r} + \vec{q} \quad (2.16)$$

donde:

$\vec{P}$  =vector de posición del punto  $O^m$ , con respecto al punto  $\tilde{A}$ .

$\vec{r}$  =vector de posición del punto  $\tilde{B}$ , con respecto al punto  $\tilde{A}$ .

$\vec{q}$  =vector de posición del punto  $O^m$ , con respecto al punto  $\tilde{B}$ .

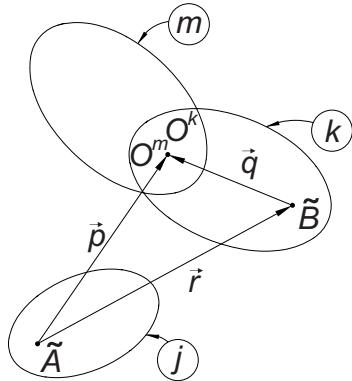


Figura 2.7: Tres cuerpos rígidos o sistemas de referencia.

La derivada temporal de la ecuación (2.16) conduce a

$${}^j\vec{v}_O{}^m \equiv \frac{^j d}{dt}(\vec{p}) = \frac{^j d}{dt}(\vec{r} + \vec{q}) = \frac{^j d\vec{r}}{dt} + \frac{^j d\vec{q}}{dt},$$

y aplicando la proposición 2.3. a la derivada temporal de  $\vec{q}$  se tiene que

$${}^j\vec{v}_O{}^m = \frac{^j d\vec{r}}{dt} + \frac{^k d\vec{q}}{dt} + {}^j\vec{\omega}^k \times \vec{q} = {}^j\vec{v}_{\tilde{B}}{}^k + {}^k\vec{\omega}^m \times \vec{q} + {}^k\vec{v}_O{}^m.$$

Sin embargo, de la cinemática elemental se sabe que

$${}^j\vec{v}_O{}^k = {}^j\vec{v}_{\tilde{B}}{}^k + {}^j\vec{\omega}^k \times \vec{q}$$

por lo tanto

$${}^j\vec{v}_O{}^m = {}^j\vec{v}_O{}^k + {}^k\vec{v}_O{}^m \quad (2.17)$$

Los resultados que se obtienen en la proposición 2.4 permiten probar fácilmente el siguiente corolario.

**Proposición 2.5** Sean  $j$ ,  $k$  y  $m$  tres cuerpos rígidos diferentes o sistemas de referencia. Entonces, sus estados de velocidad están relacionados mediante

$${}^j\vec{V}_O{}^m = {}^j\vec{V}_O{}^k + {}^k\vec{V}_O{}^m \quad (2.18)$$

${}^j\vec{\alpha}^m$  **Prueba:** por definición,

$${}^j\vec{V}_O{}^m \equiv \begin{bmatrix} {}^j\vec{\omega}^m \\ {}^j\vec{v}_O{}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^j\vec{\omega}^k + {}^k\vec{\omega}^m \\ {}^j\vec{v}_O{}^k + {}^k\vec{v}_O{}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^j\vec{\omega}^k \\ {}^j\vec{v}_O{}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^k\vec{\omega}^m \\ {}^k\vec{v}_O{}^m \end{bmatrix} = {}^j\vec{V}_O{}^k + {}^k\vec{V}_O{}^m$$

La proposición 2.5 puede emplearse para extenderse a sí misma y aplicarse a una serie finita de cuerpos rígidos o sistemas de referencia.

### 2.3. Estados de velocidad y tornillos infinitesimales, su equivalencia

Utilizando los resultados obtenidos en la sección 2.1, para el estado de velocidad, esta sección introduce el concepto de tornillo infinitesimal.

El teorema de Chasles establece que todo desplazamiento Euclídeo es equivalente a un desplazamiento de tornillo; es decir, una rotación alrededor de un eje y una traslación a lo largo del mismo eje, este eje se conoce como el eje instantáneo del tornillo —ISA por su abreviación en inglés “Instantaneous Screw Axis”.

Entonces, una representación del estado de velocidad de un cuerpo rígido  $B$ , tal como se observa desde un sistema de referencia  $A$ , sometido únicamente a traslación; es decir la  ${}^A\omega_B = \vec{0}$  al no tener rotación respecto del sistema de referencia  $A$ , se escribe de la forma

$${}^A\vec{V}_P^B = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ {}^A\vec{v}_O^B \end{bmatrix} = {}^A\vec{v}_P^B = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ {}^A\hat{s}_O^B \end{bmatrix}$$

Por otro lado, si el cuerpo  $B$  está sometido únicamente a rotación, una representación de su estado de velocidad, tal como se observa desde  $A$  se escribe de la forma

$${}^A\vec{V}_P^B = \begin{bmatrix} {}^A\vec{\omega}^B \\ {}^A\vec{v}_P^B \end{bmatrix} = {}^A\vec{\omega}_B = \begin{bmatrix} {}^A\hat{s}^B \\ \vec{r}_{P/O} \times {}^A\hat{s}^B \end{bmatrix}$$

donde  $O$  es el origen de un sistema coordenado fijo fijo en el sistema de referencia  $A$ .

El caso más general ocurre cuando el cuenpo  $B$  está sometido a un movimiento de tornillo; en este caso, una representación de su estado de velocidad, tal como se observa desde  $A$ , se escribe de la forma

$${}^A\vec{V}_P^B = \begin{bmatrix} {}^A\vec{\omega}^B \\ {}^A\vec{v}_P^B \end{bmatrix} = {}^A\vec{\omega}_B = \begin{bmatrix} {}^A\hat{s}^B \\ \vec{r}_{P/O} \times {}^A\hat{s}^B + {}_A h_B {}^A\hat{s}^B \end{bmatrix}$$

donde  $O$  s el origen de un sistema coordenado fijo fijo en el sistema de referencia  $A$ . y  ${}_A h_B$  es el paso del tornillo, dado por

$$h = \frac{{}^A\vec{v}_O^B \cdot {}^A\vec{\omega}^B}{{}^A\omega_B^2}$$

### 2.4. Representación de un tornillo mediante coordenadas de plücker

Una vez que se ha introducido el concepto de tornillo infinitesimal y se ha mostrado la equivalencia entre el estado de velocidad de un cuerpo rígido y el movimiento infinitesimal de tornillo, esta sección indica cómo se representa un tornillo infinitesimal mediante coordenadas de Plücker.

Sean  $A$  y  $B$  un par de cuerpos rígidos, y sea  $O$  un punto arbitrario fijo al cuerpo  $B$ ; más aún, sea  ${}^A\hat{s}^B$  un vector unitario a lo largo de la dirección de la velocidad angular  ${}^A\omega_B$ , entonces de la ecuación

Ahora bien, sean  ${}_A h_B$  el paso del tornillo dado por la ecuación y  $\vec{r}_{P/O}$  el vector de posición del punto  $O$  respecto a un punto  $P_2$  a los largo del ISA del movimiento del cuerpo  $B$ , vestido desde el sistema de referencia  $A$ . Entonces, el par-momento,  ${}^A\vec{S}_O^B$ , se define como

$${}^A\vec{S}_O^B \equiv_A h_B {}^A\vec{s}^B + {}^A\vec{s}^B \times \vec{r}_{P/O}$$

Un tornillo normalizado, esto es si  $|{}^A\vec{s}^B| = 1$ , se representa en coordenadas de Plücker como

$${}^A\$^B \equiv \begin{bmatrix} {}^A\vec{s}^B \\ {}^A\vec{S}_O^B \end{bmatrix}$$

**Proposición 2.9** El estado de velocidad del cuerpo B, visto desde el cuerpo A, puede expresarse en términos del tornillo infinitesimal asociado al movimiento como

$${}^A\vec{V}_0^B = {}_A\omega_B {}^A\$^B$$

**Prueba.** Consideré

$${}_A\omega_B {}^A\$^B = \begin{bmatrix} {}^A\vec{s}^B \\ {}^A\vec{S}_O^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_A\omega_B {}^A\vec{s}^B \\ {}_A\omega_B {}^A\vec{S}_O^B \end{bmatrix},$$

sin embargo

$$\begin{aligned} {}_A\omega_B {}^A\vec{S}_O^B &= {}_A\omega_B({}_Ah_B {}^A\vec{s}^B + {}^A\vec{s}^B \times {}^A\vec{r}_{P/O}) \\ &= {}_A\omega_B {}_Ah_B {}^A\vec{s}^B + {}_A\omega_B {}^A\vec{s}^B \times \left(-\frac{{}^A\vec{\omega}^B \times {}^A\vec{v}_O^B}{{}^A\omega_B^2}\right) \\ &= \frac{{}^A\vec{v}_O^B \cdot {}^A\vec{\omega}^B}{{}^A\omega_B^2} {}^A\vec{\omega}^B + {}^A\vec{\omega}^B \times \left(-\frac{{}^A\vec{\omega}^B \times {}^A\vec{v}_O^B}{{}^A\omega_B^2}\right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Más aún, descomponiendo el triple producto vectorial en dos productos internos se tiene que

$${}_A\vec{\omega}^B \times \left(\frac{-{}^A\vec{\omega}^B \times {}^A\vec{v}_O^B}{{}^A\omega_B^2}\right) = -\frac{({}_A\omega_B \cdot {}^A\vec{v}_O^B) {}_A\omega_B + ({}_A\omega_B \cdot {}_A\omega_B) {}^A\vec{v}_O^B}{{}^A\omega_B^2},$$

entonces

$${}_A\omega_B {}^A\vec{S}_O^B = \frac{({}_A\omega_B \cdot {}_A\omega_B) {}^A\vec{v}_O^B}{{}^A\omega_B^2} = {}^A\vec{v}_O^B.$$

De donde

$${}_A\omega_B {}^A\$^B \begin{bmatrix} {}^A\vec{s}^B \\ {}^A\vec{S}_O^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A\omega_B \\ {}^A\vec{S}_O^B \end{bmatrix} = {}^A\vec{V}^B$$

Queda verificado.

## 2.5. Forma de Killing

En esta sección se presenta la forma de Killing. Esta forma convierte el álgebra de Lie,  $se(3)$ , del grupo Euclídeo  $SE(3)$ , en un espacio vectorial ortogonal degenerado y semidefinido positivo.

**Definición 2.3.1. Forma de Killing.** Considere el álgebra de Lie,  $se(3)$ , del grupo Euclídeo,  $SE(3)$ . Entonces, como es posible, que la prueba de que una operación este bien definida es equivalente a decir que es geométricamente invariante, para dos estados de velocidad  $\vec{V}_{O_1}, \vec{V}_{O_2} \in se(3)$ , como sigue

$$Ki : se(3) \times se(3) \rightarrow \mathbf{R} \quad Ki(\vec{V}_{O_1} \vec{V}_{O_2}) = Ki((\vec{\omega}_1; \vec{v}_{O_1}), (\vec{\omega}_2; \vec{v}_{O_2})) = \vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2$$

donde  $(\cdot)$  representa el producto escalar usual del álgebra vectorial de dimensión 3, además  $\vec{V}_{O_1}$  y  $\vec{V}_{O_2}$  son dos diferentes estados de velocidad. El primer paso es probar que la forma de Killing es geométricamente invariante.

**Proposición 2.3.1.** La forma de Killing está bien definida.

**Prueba.** Considere

$$\begin{aligned} Ki(\vec{V}_{O_1}, \vec{V}_{O_2}) &= Ki((\vec{\omega}_1; \vec{v}_{O_1}), (\vec{\omega}_2; \vec{v}_{O_2})) = \vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2 = (\omega_1 \hat{s}_1) \cdot (\omega_2 \hat{s}_2) \\ &= \omega_1 \omega_2 \hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 = \omega_1 \omega_2 \cos \alpha_{12} \end{aligned}$$

donde  $\alpha_{12}$  es el ángulo entre los vectores unitarios  $\hat{s}_1$  y  $\hat{s}_2$ . Dado que  $\alpha_{12}$  es un invariante geométrico, se prueba que la forma de Killing está bien definida.

Un par de estados de velocidad  $(\vec{\omega}_1; \vec{v}_{O_1}), (\vec{\omega}_2; \vec{v}_{O_2})$  de manera que  $\vec{\omega}_1 \neq \vec{0}$  y  $\vec{\omega}_2 \neq \vec{0}$

$$Ki((\vec{\omega}_1; \vec{v}_{O_1}), (\vec{\omega}_2; \vec{v}_{O_2})) = (\omega_1 \hat{s}_1) \cdot (\omega_2 \hat{s}_2) = 0$$

se denotan como ortogonales con respecto a la forma de Killing o perpendiculares.

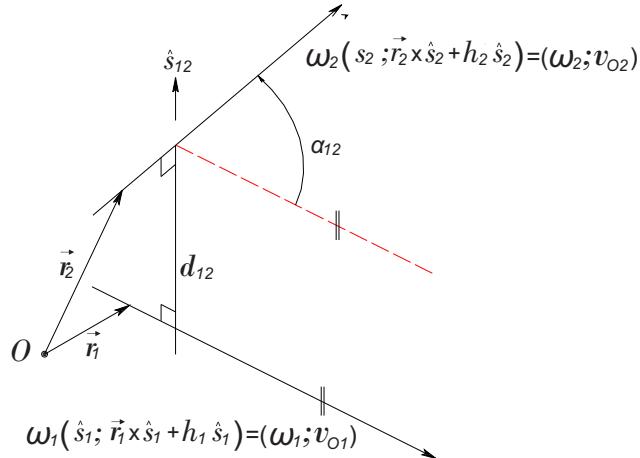


Figura 2.8: Un par de tornillos y la interpretación geométrica de la forma de Killing.

**La forma de Killing es simétrica.** Sean  $(\vec{\omega}_1; \vec{v}_{O_1}), (\vec{\omega}_2; \vec{v}_{O_2})$  dos estados de velocidad, entonces

$$\begin{aligned} Ki(\vec{\omega}_1; \vec{v}_{O_1}), (\vec{\omega}_2; \vec{v}_{O_2}) &= \vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2 = (\vec{\omega}_1 \hat{s}_1) \cdot (\vec{\omega}_2 \hat{s}_2) = \vec{\omega}_1 \vec{\omega}_2 \hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 = \vec{\omega}_1 \vec{\omega}_2 \cos \alpha_{12} \\ &= \vec{\omega}_1 \vec{\omega}_2 \cos \alpha_{12} = \vec{\omega}_1 \vec{\omega}_2 \hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 = (\vec{\omega}_1 \hat{s}_1) \cdot (\vec{\omega}_2 \hat{s}_2) = \vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2 \\ &= Ki((\vec{\omega}_1; \vec{v}_{O_1}), (\vec{\omega}_2; \vec{v}_{O_2})) \end{aligned}$$

**La forma de Killing es lineal en la primera variable.** Sean  $\lambda_a, \lambda_b \in \mathbf{R}$  y sea  $(\vec{\omega}_{1a}; \vec{v}_{O_{1a}}), (\vec{\omega}_{1b}; \vec{v}_{O_{1b}})$ ,  $(\vec{\omega}_2; \vec{v}_{O_2})$  estados de velocidad arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned} Ki(\lambda_a (\vec{\omega}_{1a}; \vec{v}_{O_{1a}}) + \lambda_b (\vec{\omega}_{1b}; \vec{v}_{O_{1b}}), (\vec{\omega}_2; \vec{v}_{O_2})) &= [\lambda_a \vec{\omega}_{1a} + \lambda_b \vec{\omega}_{1b}] \cdot \vec{\omega}_2 = [\lambda_a \vec{\omega}_{1a}] \cdot \vec{\omega}_2 + [\lambda_b \vec{\omega}_{1b}] \cdot \vec{\omega}_2 \\ &= \lambda_a \vec{\omega}_{1a} \cdot \vec{\omega}_2 + \lambda_b \vec{\omega}_{1b} \cdot \vec{\omega}_2 \\ &= \lambda_a Ki((\vec{\omega}_{1a}; \vec{v}_{O_{1a}}), (\vec{\omega}_2; \vec{v}_{O_{2a}})) \\ &\quad + \lambda_b Ki((\vec{\omega}_{2a}; \vec{v}_{O_{2a}}), (\vec{\omega}_2; \vec{v}_{O_2})) \end{aligned}$$

**La forma de Killing es lineal en la segunda variable.** Sea  $\lambda_a, \lambda_b \in \mathbf{R}$  y sea  $(\vec{\omega}_1; \vec{v}_{O_1}), (\vec{\omega}_{2a}; \vec{v}_{O_{2a}}), (\vec{\omega}_{2b}; \vec{v}_{O_{2b}})$  estados de velocidad arbitraria, entonces

$$\begin{aligned} Ki((\vec{\omega}_1; \vec{v}_{O_1}), \lambda_a(\vec{\omega}_{2a}; \vec{v}_{O_{2a}}) + \lambda_b(\vec{\omega}_{2b}; \vec{v}_{O_{2b}})) &= \vec{\omega}_1 [\lambda_a \vec{\omega}_{2a} + \lambda_b \vec{\omega}_{2b}] = \vec{\omega}_1 \cdot [\lambda_a \vec{\omega}_{2a}] + \vec{\omega}_1 \cdot [\lambda_b \vec{\omega}_{2b}] \\ &= \lambda_a \vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_{2a} + \lambda_b \vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_{2b} \\ &= \lambda_a Ki((\vec{\omega}_1; \vec{v}_{O_1}), (\vec{\omega}_{2a}; \vec{v}_{O_{2a}})) \\ &\quad + \lambda_b Ki((\vec{\omega}_1; \vec{v}_{O_1}), (\vec{\omega}_{2b}; \vec{v}_{O_{2b}})) \end{aligned}$$

**La forma de Killing es degenerada.** Considere  $(\vec{0}; \vec{v}_{O*}) \in se(3)$  donde  $\vec{v}_{O*} \in \mathbf{R}^3$  es arbitrario entonces para cualquier  $(\vec{\omega}; \vec{v}_O) \in se(3)$ , resulta que

$$Ki(\vec{0}; \vec{v}_{O*}), (\vec{\omega}; \vec{v}_{O*}) = \vec{0} \cdot \vec{\omega} = 0$$

Por lo tanto,  $(\vec{0}; \vec{v}_{O*})$  es ortogonal a toda la subálgebra de  $se(3)$ . La forma de Killing es degenerada. Finalmente, se comprobará que la forma de Killing es semidefinida positiva.

**La forma de Killing es positiva semidefinida.** Considere  $(\vec{\omega}; \vec{v}_O) \in se(3)$ , entonces se sigue que

$$Ki((\vec{\omega}; \vec{v}_O), (\vec{\omega}; \vec{v}_O)) = \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = |\vec{\omega}|^2 \geq 0$$

Pero si  $\vec{\omega} = \vec{0}$  resulta que

$$Ki((\vec{0}; \vec{v}_O), (\vec{0}; \vec{v}_O)) = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$$

## 2.6. Forma de Klein

En esta sección se presenta la forma de Klein que permite convertir el álgebra de Lie,  $se(3)$ , del grupo Euclídeo,  $SE(3)$ , en un espacio ortogonal no degenerado e indefinido.

**Definición 2.4.1 Forma de Klein.** Considere el álgebra de Lie,  $se(3)$ , del grupo Euclídeo,  $SE(3)$ . Entonces, como es posible que la prueba de que una operación este bien definida es equivalente a decir que es geometricamente invariable, para dos estados de velocidad  $\vec{V}_{O1}, \vec{V}_{O2} \in se(3)$ , como sigue

1. La forma de Klein,

$$Kl : se(3) \times se(3) \rightarrow \mathbf{R} \quad Kl(\vec{V}_{O1}, \vec{V}_{O2}) = Kl((\vec{\omega}_1; \vec{v}_{O1}), (\vec{\omega}_2; \vec{v}_{O2})) = \vec{\omega}_1 \cdot \vec{v}_{O2} + \vec{\omega}_2 \cdot \vec{v}_{O1},$$

donde  $(\cdot)$  representa el producto escalar usual del álgebra vectorial de dimensión 3, además  $(\vec{\omega}_1; \vec{v}_{O1})$  y  $(\vec{\omega}_2; \vec{v}_{O2})$  son dos diferentes estados de velocidad  $\vec{V}_{O1}$  y  $\vec{V}_{O2}$  respectivamente. La forma de Klein también se le conoce como producto recíproco.

para probar la invarianza de la forma de Klein consiste en hacer explícita la interpretación geométrica y por lo tanto invariante de la forma de Klein.

**Proposición 2.4.1.** La forma de Klein que se presenta en la definición 2.4.1 está bien definida; es decir, es invariante respecto a las diferentes posibles representaciones del estado de velocidad.

Considere dos tornillos asociados a dos pares helicoidales arbitrarios, como se muestra en la Figura 2.9. En esta Figura,  $O$  denota a un punto fijo,  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  son los vectores de posición de puntos arbitrarios

sobre las líneas  $L_1$  y  $L_2$ ,  $h_1$  y  $h_2$  son los pasos de los tornillos  $\$_1$  y  $\$_2$ ,  $\hat{s}_1$  y  $\hat{s}_2$  son vectores unitarios paralelos a las líneas  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente. Por lo tanto, los tornillos involucrados están dados por

$$\$_1 = \begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \vec{r}_1 \times \hat{s}_1 + h_1 \hat{s}_1 \end{bmatrix}, \$_2 = \begin{bmatrix} \hat{s}_2 \\ \vec{r}_2 \times \hat{s}_2 + h_2 \hat{s}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Entonces, la forma de Klein, también conocido como producto recíproco está definido como

$$\begin{aligned} Kl(\$_1; \$_2) &\equiv \hat{s}_1 \cdot (\vec{r}_2 \times \hat{s}_2 + h_2 \hat{s}_2) + \hat{s}_2 \cdot (\vec{r}_1 \times \hat{s}_1 + h_1 \hat{s}_1) \\ &\equiv \hat{s}_1 \cdot (h_2 \hat{s}_2) + \hat{s}_2 \cdot (h_1 \hat{s}_1) + \hat{s}_1 \cdot (\vec{r}_2 \times \hat{s}_2) + \hat{s}_2 \cdot (\vec{r}_1 \times \hat{s}_1) \\ &\equiv (h_1 + h_2) \hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 - \vec{r}_2 \cdot (\hat{s}_1 \times \hat{s}_2) + \vec{r}_1 \cdot (\hat{s}_1 \times \hat{s}_2) \\ &\equiv (h_1 + h_2) \cos \alpha_{12} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \hat{s} \sin \alpha_{12} \\ &\equiv (h_1 + h_2) \cos \alpha_{12} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot d_{12} \sin \alpha_{12} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Por lo tanto puede probarse el siguiente resultado.

**Teorema 2.4.1** Independientemente de cuales sean los puntos escogidos para especificar los tornillos asociados a dos líneas arbitrarias, la forma de Klein de tales tornillos estás siempre dado por

$$Kl(\$_1; \$_2) = (h_1 + h_2) \cos \alpha_{12} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot d_{12} \sin \alpha_{12}$$

**Proposición 2.4.2** La forma de Klein que se presenta en la definición 2.4.1, es efectivamente una forma simétrica bilineal.

**Prueba.** Puede probarse que la forma de Klein es una forma no degenerada e indefinida usualmente conocida como el producto recíproco, debido a lo extenso de la prueba, se pide al lector revisar [21],[24]

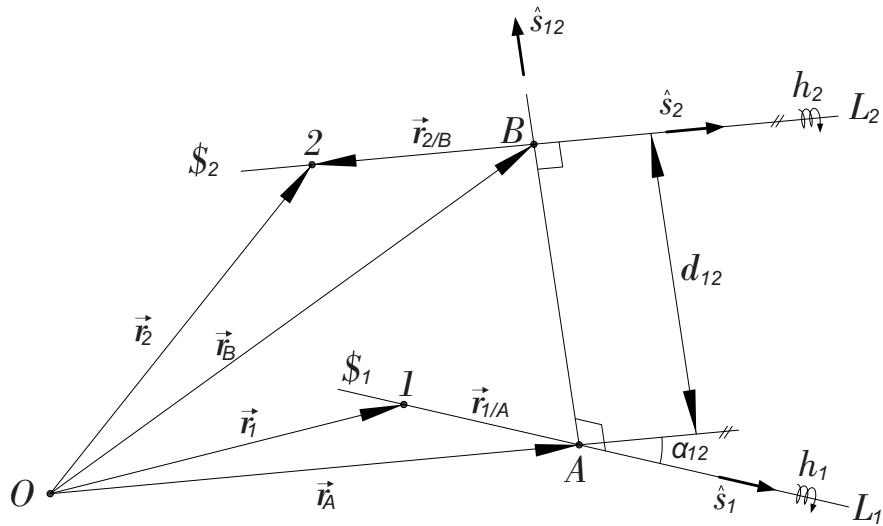


Figura 2.9: Parámetros geométricos asociados con dos pares helicoidales arbitrarios.

## 2.7. Aplicación de las formas de Klein y Killing en la determinación de los ejes instantáneos de tornillos

En esta última sección se presentará, de manera general, como se aplicarán las formas de Klein y Killing para la determinación de los ejes instantáneos de tornillos asociados a tres eslabones de un mecanismo.

La ecuación fundamental está dada por

$${}^i\vec{V}_O^k = {}^i\vec{V}_O^j + {}^j\vec{V}_O^k$$

donde  $i, j$  y  $k$  son los tres cuerpos y  ${}^m\vec{V}_O^n$  es el estado de velocidad del cuerpo  $n$  respecto al cuerpo  $m$  tomando como referencia el origen del sistema coordenado,  $O$ . En términos de la teoría de tornillos, la ecuación está dada por

$${}_i\omega_k {}^i\$_O^k = {}_i\omega_j {}^i\$_O^j + {}_j\omega_k {}^j\$_O^k$$

donde  $i, j$  y  $k$  son los tres cuerpos y  ${}_m\omega_n$  y  ${}^m\$_O^n$  son la magnitud de la velocidad relativa del cuerpo  $n$  respecto al cuerpo  $m$  y  ${}^m\$_O^n$  es el tornillo infinitesimal asociado al estado de velocidad del cuerpo  $n$  respecto al cuerpo  $m$  tomando como referencia el origen del sistema coordenado,  $O$ .

La determinación de los ejes instantáneos del tornillo, por ejemplo  ${}^i\$_O^k$ , requiere determinar los aniquiladores ortogonales respecto a las formas de Klein y de Killing, es decir aquellos tornillos  $\$_{aik}$  tal que

$$Kl(\$_{aik}, {}^i\$_O^j) = Kl(\$_{aik}, {}^j\$_O^k) = 0 \quad (2.22)$$

y

$$Ki(\$_{aik}, {}^i\$_O^j) = Ki(\$_{aik}, {}^j\$_O^k) = 0 \quad (2.23)$$

pues, aprovechando las propiedades de las formas bilineales, se tiene que

$$Kl(\$_{aik}, {}^i\$_O^k) = Kl(\$_{aik}, \frac{{}^i\omega_j}{{}^i\omega_k} {}^i\$_O^j + \frac{{}^j\omega_k}{{}^i\omega_k} {}^j\$_O^k) = \frac{{}^i\omega_j}{{}^i\omega_k} Kl(\$_{aik}, {}^i\$_O^j) + \frac{{}^j\omega_k}{{}^i\omega_k} Kl(\$_{aik}, {}^j\$_O^k) = \frac{{}^i\omega_j}{{}^i\omega_k} 0 + \frac{{}^j\omega_k}{{}^i\omega_k} 0 = 0 \quad (2.24)$$

de manera semejante, se tiene que

$$Ki(\$_{aik}, {}^i\$_O^k) = Ki(\$_{aik}, \frac{{}^i\omega_j}{{}^i\omega_k} {}^i\$_O^j + \frac{{}^j\omega_k}{{}^i\omega_k} {}^j\$_O^k) = \frac{{}^i\omega_j}{{}^i\omega_k} Ki(\$_{aik}, {}^i\$_O^j) + \frac{{}^j\omega_k}{{}^i\omega_k} Ki(\$_{aik}, {}^j\$_O^k) = \frac{{}^i\omega_j}{{}^i\omega_k} 0 + \frac{{}^j\omega_k}{{}^i\omega_k} 0 = 0 \quad (2.25)$$

La conclusión es que los aniquiladores ortogonales del subespacio generado por  $\{{}^i\$_O^j, {}^j\$_O^k\}$  aniquilan también al tornillo  ${}^i\$_O^k$  asociado al eje instantáneo del tornillo del movimiento relativo entre los eslabones  $i$  y  $k$ . Este es el fundamento del teorema de Aronhold-Kennedy aplicable a cualquier tipo de mecanismo. Sin embargo, la metodología puede simplificarse por las características especiales de los pares cinemáticos y por consiguiente de los tornillos infinitesimales que los representan.

---

# Capítulo 3: Mecanismos triviales asociados a la subálgebra de movimiento planos

---

En este capítulo se mostrará que, nuevamente, la ecuación que relaciona los estados de velocidad de tres cuerpos arbitrarios

$${}^i\vec{V}_O^k = {}^i\vec{V}_O^j + {}^j\vec{V}_O^k$$

que en términos de tornillos está dado por

$${}^i\omega_k {}^i\$_O^k = {}^i\omega_j {}^i\$_O^j + {}^j\omega_k {}^j\$_O^k$$

permite determinar la localización de todos los centros instantáneos de los mecanismos triviales asociados a un subgrupo,  $G_{\hat{u}}$ , o subálgebra,  $g_{\hat{u}}$ , de movimientos planos de un grado de libertad.

## 3.1. Características de los mecanismos

Los mecanismos que forman parte de esta subálgebra,  $g_{\hat{u}}$ , están formados por: Pares de revoluta cuya dirección es perpendicular al plano  $X Y$  o bien pares prismáticos cuya dirección de movimiento está contenida en el plano  $X Y$ .

El número mínimo de pares cinemáticos que un lazo cerrado de esta clase de mecanismos puede tener es cuatro, pues los pares indicados son de la clase I y de la ecuación de movilidad

$$F = \sum_{i=1}^4 f_i - \dim(g_{\hat{u}}) = 4 - \dim(g_{\hat{u}}) = 4 - 3 = 1 \quad (3.1)$$

Como ya se indicó, los pares cinemáticos que forman parte de estos mecanismos son:

1. Pares de revoluta cuya dirección es la del vector unitario  $\hat{u}$ .
2. Pares prismáticos cuya dirección de movimiento  $\hat{u}_2$  es perpendicular a  $\hat{u}$ .

Sin pérdida de generalidad suponga que  $\hat{u} = \hat{k}$ , entonces los tornillos están dados por:

$$\$1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r_y \\ -r_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \$2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\hat{r} = (r_x, r_y)$  es un punto a lo largo del eje del tornillo y  $\hat{u}_2 = (u_x, u_y, 0)$  es un vector unitario en la dirección del par prismático.

### 3.2. Determinación de los centros instantáneos de un mecanismo plano de seis barras

Consideré el mecanismo plano mostrado en la Figura 3.1. Este mecanismo es un mecanismo determinado que fue analizado por Di Gregorio [8] para ilustrar parte del método propuesto para determinar los centros instantáneos secundarios indeterminados. Este mecanismo está formado por seis eslabones, uno de ellos ternario y los restantes cinco binarios y siete pares de revoluta, el mecanismo es trivial y su movilidad de acuerdo al criterio de Grübler está dado por

$$F = 3(N - 1) - 2P_I = 3(6 - 1) - 2(7) = 15 - 14 = 1 \quad (3.2)$$

donde,  $N$  es el número de eslabones y  $P_I$  es el número de pares cinemáticos de la clase I, las revolutas pertenecen a la clase I.

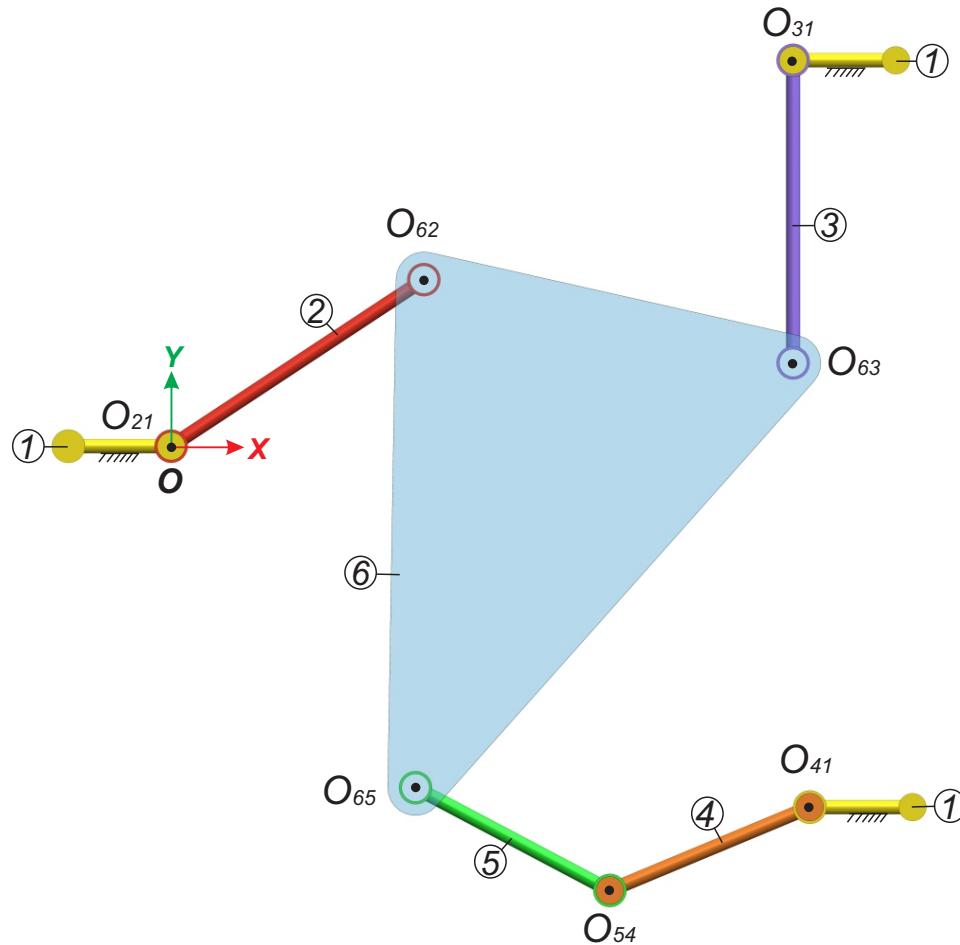


Figura 3.1: Mecanismo de seis barras asociado a la subálgebra de movimientos planos indeterminados

Los parámetros necesarios para la determinación de los tornillos asociados a los pares cinemáticos, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , son:

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde  $\hat{u}$ , representa la dirección de los ejes de los pares de revoluta, los vectores de posición de puntos localizados a lo largo de los ejes de revoluta, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , están dados en términos de una unidad de longitud no especificada por

$$\vec{r}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{31} = \begin{bmatrix} 224 \\ 139 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{41} = \begin{bmatrix} 230 \\ -130 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{54} = \begin{bmatrix} 158 \\ -160 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{62} = \begin{bmatrix} 91 \\ 60 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{63} = \begin{bmatrix} 224 \\ 340 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{65} = \begin{bmatrix} 88 \\ 123 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los tornillos infinitesimales asociados a los pares cinemáticos, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , están dados por:

$${}^2\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -139 \\ -224 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^4\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -130 \\ -230 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^5\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -160 \\ -158 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^6\$^2_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 60 \\ -91 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^6\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 30 \\ -224 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^6\$^5_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -123 \\ -88 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 3.2.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los centros instantáneos secundarios

Con base a la numeración de los eslabones mostrada en la Figura 3.1 los centros instantáneos primarios; es decir, aquellos que se pueden determinar mediante la examinación del mecanismo son:

$$O_{21}, \quad O_{31}, \quad O_{41}, \quad O_{54}, \quad O_{62}, \quad O_{63}, \quad O_{65}$$

El arreglo diagonal de los centros instantáneos del mecanismo mostrado en la Figura 3.1, donde el número -1 indica los centros instantáneos de velocidad que son primarios; es decir aquellos que determinan el centro alrededor del cual un eslabón realiza un movimiento relativo respecto del eslabón adyacente, estos centros instantáneos se pueden ubicar directamente mediante la inspección de la estructura cinemática del mecanismo; el número -2 indica aquellos centros instantáneos secundarios que se determinarán mediante la aplicación directa del teorema de Aronhold-Kennedy, ambas clases de centros se muestran en la Tabla 3.1

Tabla 3.1: Centros instantáneos asociados al mecanismo plano de seis barras

$$\begin{array}{cccccc}
 O_{21}(-1) & O_{31}(-1) & O_{41}(-1) & O_{51}(-2) & O_{61}(-2) \\
 O_{32}(-2) & O_{42}(-2) & O_{52}(-2) & O_{62}(-1) \\
 O_{43}(-2) & O_{53}(-2) & O_{63}(-1) \\
 O_{54}(-1) & O_{64}(-2) \\
 O_{65}(-1)
 \end{array}$$

A partir de la ubicación de los centros instantáneos primarios es posible determinar los centros instantáneos secundarios.

Por ejemplo, si se desea determinar el centro instantáneo secundario  $O_{61}$  este debe estar localizado en la intersección de las líneas rectas que conectan los centros instantáneos primarios  $O_{21}$ ,  $O_{62}$  y  $O_{31}$ ,  $O_{63}$  los cuales se indican con un cuadrilátero y en un círculo se indica el centro secundario que se desea determinar; es decir,

$$\textcircled{O_{61}} \implies [O_{21}] [O_{62}] \quad {}_1\omega_6^6\$^1_O = {}_1\omega_2^2\$^1_O + {}_2\omega_6^6\$^2_O$$

$$\textcircled{O_{61}} \implies [O_{31}] [O_{63}] \quad {}_1\omega_6^6\$^1_O = {}_1\omega_3^3\$^1_O + {}_3\omega_6^6\$^3_O$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl(\$,_{a,Kl}^2, {}^6\$^1) = 0 \quad (3.3)$$

y

$$Kl(\$,_{a,Kl}^3, {}^6\$^1) = 0 \quad (3.4)$$

donde  $\{\$,_{a1,Kl}^2\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^2\$^1, {}^6\$^2]$  y  $\{\$,_{a1,Kl}^3\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^3\$^1, {}^6\$^3]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

De las ecuaciones (3.3) y (3.4) y aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Klein se obtiene las ecuaciones necesarias para determinar el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{61}$

$$Ec61_2 = \left[ 0, \frac{91}{60}y_{61} - x_{61}, 0, 0 \right] \quad (3.5)$$

$$Ec61_3 = \left[ 0, 224 - x_{61}, 0, 0 \right] \quad (3.6)$$

Donde los dos primeros números de la ecuación vectorial, pues las componentes se igualan a cero, indican cual es el eje instantáneo que se desea determinar y el subíndice indica cual es el eslabón intermedio que

se emplea para determinar el eje instantáneo.

De las ecuaciones (3.5) a las (3.6) se tiene

$$0 = \frac{91}{60} y_{61} - x_{61} \quad (3.7)$$

$$0 = 224 - x_{61} \quad (3.8)$$

Se tiene un sistema lineal de 2 ecuaciones y 2 incógnitas, que representan las coordenadas  $x_{61}$  y  $y_{61}$  asociadas al centro instantáneo secundario  $O_{61}$ .

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene que el vector de posición  $\vec{r}_{32}$  es igual a

$$\vec{r}_{61} = \begin{bmatrix} 224 \\ \frac{1920}{13} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además se tiene que el tornillo infinitesimal asociado al centro instantáneo secundario  $O_{61}$  está dado por

$${}^6\$_O^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1920}{13} \\ -224 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De manera semejante, el centro instantáneo secundario  $O_{32}$  debe estar localizado en la intersección de las líneas rectas que conectan los centros instantáneos primarios  $O_{21}$ ,  $O_{31}$  y  $O_{62}$ ,  $O_{63}$ ; es decir

$$\textcircled{O_{32}} \Rightarrow [O_{21}] [O_{31}] \quad {}^2\omega_3 {}^3\$_O^2 = {}^1\omega_2 {}^2\$_O^1 + {}^1\omega_3 {}^3\$_O^1$$

$$\textcircled{O_{32}} \Rightarrow [O_{62}] [O_{63}] \quad {}^2\omega_3 {}^3\$_O^2 = {}^2\omega_6 {}^6\$_O^2 + {}^3\omega_6 {}^6\$_O^3$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl(\${}_{a,Kl}^1, {}^3\$^2) = 0 \quad (3.9)$$

y

$$Kl(\${}_{a,Kl}^6, {}^3\$^2) = 0 \quad (3.10)$$

donde  $\{\${}_{a1,Kl}^1\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^2\$^1, {}^3\$^1]$  y  $\{\${}_{a1,Kl}^6\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^6\$^2, {}^6\$^3]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

De las ecuaciones (3.9) y (3.10) se obtiene el sistema de ecuaciones necesario para determinar el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{32}$

$$Ec32_1 = \left[ 0, \frac{224}{139} y_{32} - x_{32}, 0, 0 \right] \quad (3.11)$$

$$Ec32_6 = \left[ 0, 357 - \frac{133}{30} y_{32} - x_{32}, 0, 0 \right] \quad (3.12)$$

De las ecuaciones (3.11) a las (3.12) se tiene

$$0 = \frac{224}{139} y_{32} - x_{32} \quad (3.13)$$

$$0 = 357 - \frac{133}{30} y_{32} - x_{32} \quad (3.14)$$

Como resultado el vector de posición  $\vec{r}_{32}$  es igual a

$$\vec{r}_{32} = \begin{bmatrix} \frac{342720}{3601} \\ \frac{212670}{3601} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además se tiene que el tornillo infinitesimal asociado al centro instantáneo secundario  $O_{32}$  está dado por

$${}^3\$^2_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{212670}{3601} \\ -\frac{342720}{3601} \\ 0 \end{bmatrix}$$

El centro instantáneo secundario  $O_{64}$  debe estar localizado en la intersección de las líneas rectas que conectan los centros instantáneos primarios  $O_{41}$ ,  $O_{61}$  y  $O_{54}$ ,  $O_{65}$ ; es decir

$$\textcircled{O_{64}} \Rightarrow [O_{41}] [O_{61}] \quad {}^4\omega_6 {}^6\$^4_O = {}^1\omega_4 {}^4\$^1_O + {}^1\omega_6 {}^6\$^1_O$$

$$\textcircled{O_{64}} \Rightarrow [O_{54}] [O_{65}] \quad {}^4\omega_6 {}^6\$^4_O = {}^4\omega_5 {}^5\$^4_O + {}^5\omega_6 {}^6\$^5_O$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl({}^1\$^1_{a,Kl}, {}^6\$^4) = 0 \quad (3.15)$$

y

$$Kl({}^5\$^5_{a,Kl}, {}^6\$^4) = 0 \quad (3.16)$$

donde  $\{{}^1\$^1_{a1,Kl}\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^4\$^1, {}^6\$^1]$  y  $\{{}^5\$^5_{a1,Kl}\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^5\$^4, {}^6\$^5]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

De las ecuaciones (3.15) y (3.16) se obtiene el sistema de ecuaciones necesarias para determinar el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{64}$

$$Ec64_1 = \left[ 0, \frac{82016}{361} - \frac{39}{1805} y_{64} - x_{64}, 0, 0 \right] \quad (3.17)$$

$$Ec64_5 = \left[ 0, -\frac{5354}{37} - \frac{70}{37} y_{64} - x_{64}, 0, 0 \right] \quad (3.18)$$

De las ecuaciones (3.17) a las (3.18) se tiene

$$0 = \frac{82016}{361} - \frac{39}{1805} y_{64} - x_{64} \quad (3.19)$$

$$0 = -\frac{5354}{37} - \frac{70}{37} y_{64} - x_{64} \quad (3.20)$$

Como resultado el vector de posición  $\vec{r}_{64}$  es igual a

$$\vec{r}_{64} = \begin{bmatrix} \frac{28914406}{124907} \\ -\frac{24836930}{124907} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además se tiene que el tornillo infinitesimal asociado al centro instantáneo secundario  $O_{64}$  está dado por

$${}^6\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{24836930}{124907} \\ -\frac{28914406}{124907} \\ 0 \end{bmatrix}$$

El centro instantáneo secundario  $O_{51}$  este debe estar localizado en la intersección de las líneas rectas que conectan los centros instantáneos primarios  $O_{41}$ ,  $O_{54}$  y  $O_{61}$ ,  $O_{65}$ ; es decir

$$\textcircled{O_{51}} \Rightarrow [O_{41} \ O_{54}] \quad {}_1\omega_5 {}^5\$^1_O = {}_1\omega_4 {}^4\$^1_O + {}_4\omega_5 {}^5\$^4_O$$

$$\textcircled{O_{51}} \Rightarrow [O_{61} \ O_{65}] \quad {}_1\omega_5 {}^5\$^1_O = {}_1\omega_6 {}^6\$^1_O + {}_5\omega_6 {}^6\$^5_O$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl({}^4\$^4_{a,Kl}, {}^5\$^1) = 0 \quad (3.21)$$

y

$$Kl({}^6\$^6_{a,Kl}, {}^5\$^1) = 0 \quad (3.22)$$

donde  $\{{}^4\$^4_{a1,Kl}\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^4\$^1, {}^5\$^4]$  y  $\{{}^6\$^6_{a1,Kl}\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^6\$^1, {}^6\$^5]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

De las ecuaciones (3.21) y (3.22) se obtiene el sistema de ecuaciones necesarias para determinar el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{51}$

$$Ec51_4 = \left[ 0, 542 + \frac{12}{5} y_{51} - x_{51}, 0, 0 \right] \quad (3.23)$$

$$Ec51_6 = \left[ 0, \frac{10336}{69} + \frac{104}{207} y_{51} - x_{51}, 0, 0 \right] \quad (3.24)$$

De las ecuaciones (3.23) a las (3.24) se tiene

$$0 = 542 + \frac{12}{5} y_{51} - x_{51} \quad (3.25)$$

$$0 = \frac{10336}{69} + \frac{104}{207} y_{51} - x_{51} \quad (3.26)$$

Como resultado el vector de posición  $\vec{r}_{51}$  es igual a

$$\vec{r}_{51} = \begin{bmatrix} \frac{22564}{491} \\ -\frac{202965}{982} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además se tiene que el tornillo infinitesimal asociado al centro instantáneo secundario  $O_{51}$  está dado por

$${}^5\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{202965}{982} \\ -\frac{22564}{491} \\ 0 \end{bmatrix}$$

El centro instantáneo secundario  $O_{42}$  debe estar localizado en la intersección de las líneas rectas que conectan los centros instantáneos primarios  $O_{21}$ ,  $O_{41}$  y  $O_{62}$ ,  $O_{64}$ ; es decir

$$\textcircled{O_{42}} \Rightarrow [O_{21}] [O_{41}] \quad {}_2\omega_4 {}^4\$^2_O = {}_1\omega_2 {}^2\$^1_O + {}_1\omega_4 {}^4\$^1_O$$

$$\textcircled{O_{42}} \Rightarrow [O_{62}] [O_{64}] \quad {}_2\omega_4 {}^4\$^2_O = {}_2\omega_6 {}^6\$^2_O + {}_4\omega_6 {}^6\$^4_O$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl({}^1\$^1_{a,Kl}, {}^4\$^2) = 0 \quad (3.27)$$

y

$$Kl({}^6\$^6_{a,Kl}, {}^4\$^2) = 0 \quad (3.28)$$

donde  $\{\$_{a1,Kl}^1\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[^2\$^1, ^4\$^1]$  y  $\{\$_{a1,Kl}^6\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[^6\$^2, ^6\$^4]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

De las ecuaciones (3.27) y (3.28) se obtiene el sistema de ecuaciones necesarias para determinar el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{42}$

$$Ec42_1 = \left[ 0, -\frac{23}{13}y_{42} - x_{42}, 0, 0 \right] \quad (3.29)$$

$$Ec42_6 = \left[ 0, \frac{399502499}{3233135} - \frac{17547869}{32331350}y_{42} - x_{42}, 0, 0 \right] \quad (3.30)$$

De las ecuaciones (3.29) a las (3.30) se tiene

$$0 = -\frac{23}{13}y_{42} - x_{42} \quad (3.31)$$

$$0 = \frac{399502499}{3233135} - \frac{17547869}{32331350}y_{42} - x_{42} \quad (3.32)$$

Como resultado el vector de posición  $\vec{r}_{42}$  es igual a

$$\vec{r}_{42} = \begin{bmatrix} \frac{35850790}{201131} \\ -\frac{20263490}{201131} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además se tiene que el tornillo infinitesimal asociado al centro instantáneo secundario  $O_{42}$  está dado por

$${}^4\$_O^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{20263490}{201131} \\ -\frac{35850790}{201131} \\ 0 \end{bmatrix}$$

El centro instantáneo secundario  $O_{52}$  debe estar localizado en la intersección de las líneas rectas que conectan los centros instantáneos primarios  $O_{21}$ ,  $O_{51}$  y  $O_{42}$ ,  $O_{54}$ ; es decir

$$\textcircled{O_{52}} \Rightarrow [O_{21}] [O_{51}] \quad {}^2\omega_5 {}^5\$_O^2 = {}^1\omega_2 {}^2\$_O^1 + {}^1\omega_5 {}^5\$_O^1$$

$$\textcircled{O_{52}} \Rightarrow [O_{42}] [O_{54}] \quad {}^2\omega_5 {}^5\$_O^2 = {}^2\omega_4 {}^4\$_O^2 + {}^4\omega_5 {}^5\$_O^4$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl(\$_{a,Kl}^1, {}^5\$^2) = 0 \quad (3.33)$$

y

$$Kl(\$_{a,Kl}^4, {}^5\$^2) = 0 \quad (3.34)$$

donde  $\{\$_{a1,Kl}^1\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[^2\$^1, ^5\$^1]$  y  $\{\$_{a1,Kl}^4\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[^4\$^2, ^5\$^4]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

De las ecuaciones (3.33) y (3.34) se obtiene el sistema de ecuaciones necesarias para determinar el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{52}$

$$Ec52_1 = \left[ 0, -\frac{45128}{202965} y_{52} - x_{52}, 0, 0 \right] \quad (3.35)$$

$$Ec52_4 = \left[ 0, \frac{84483166}{397249} + \frac{678682}{1986245} y_{52} - x_{52}, 0, 0 \right] \quad (3.36)$$

De las ecuaciones (3.35) a las (3.36) se tiene

$$0 = -\frac{45128}{202965} y_{52} - x_{52} \quad (3.37)$$

$$0 = \frac{84483166}{397249} + \frac{678682}{1986245} y_{52} - x_{52} \quad (3.38)$$

Como resultado el vector de posición  $\vec{r}_{52}$  es igual a

$$\vec{r}_{52} = \begin{bmatrix} \frac{767176}{9151} \\ -\frac{3450405}{9151} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además se tiene que el tornillo infinitesimal asociado al centro instantáneo secundario  $O_{52}$  está dado por

$$^5\$_O^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{3450405}{9151} \\ -\frac{767176}{9151} \\ 0 \end{bmatrix}$$

El centro instantáneo secundario  $O_{43}$  debe estar localizado en la intersección de las líneas rectas que conectan los centros instantáneos primarios  $O_{31}, O_{41}$  y  $O_{32}, O_{42}$ ; es decir

$$(O_{43}) \Rightarrow [O_{31} \ O_{41}] \quad {}_3\omega_4 {}^4\$_O^3 = {}_1\omega_3 {}^3\$_O^1 + {}_1\omega_4 {}^4\$_O^1$$

$$(O_{43}) \Rightarrow [O_{32} \ O_{42}] \quad {}_3\omega_4 {}^4\$_O^3 = {}_2\omega_3 {}^3\$_O^2 + {}_2\omega_4 {}^4\$_O^2$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl(\$_{a,Kl}^1, {}^4\$^3) = 0 \quad (3.39)$$

y

$$Kl(\$_{a,Kl}^2, {}^4\$^3) = 0 \quad (3.40)$$

donde  $\{\$_{a1,Kl}^1\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^3\$^1, {}^4\$^1]$  y  $\{\$_{a1,Kl}^2\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^2\$^2, {}^4\$^2]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

De las ecuaciones (3.39) y (3.40) se obtiene el sistema de ecuaciones necesarias para determinar el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{43}$

$$Ec43_1 = \left[ 0, \frac{61090}{269} - \frac{6}{269} y_{43} - x_{43}, 0, 0 \right] \quad (3.41)$$

$$Ec43_2 = \left[ 0, \frac{42850267065}{340421639} - \frac{353923991}{680843278} y_{43} - x_{43}, 0, 0 \right] \quad (3.42)$$

De las ecuaciones (3.41) a las (3.42) se tiene

$$0 = \frac{61090}{269} - \frac{6}{269} y_{43} - x_{43} \quad (3.43)$$

$$0 = \frac{42850267065}{340421639} - \frac{353923991}{680843278} y_{43} - x_{43} \quad (3.44)$$

Como resultado el vector de posición  $\vec{r}_{43}$  es igual a

$$\vec{r}_{43} = \begin{bmatrix} \frac{181845710}{785041} \\ -\frac{159723550}{785041} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además se tiene que el tornillo infinitesimal asociado al centro instantáneo secundario  $O_{43}$  está dado por

$${}^4\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{159723550}{785041} \\ -\frac{181845710}{785041} \\ 0 \end{bmatrix}$$

El centro instantáneo secundario  $O_{53}$  debe estar localizado en la intersección de las líneas rectas que conectan los centros instantáneos primarios  $O_{31}, O_{51}$  y  $O_{43}, O_{54}$ ; es decir

$$\textcircled{O_{53}} \Rightarrow [O_{31}] [O_{51}] \quad {}_3\omega_5 {}^5\$^3_O = {}_1\omega_3 {}^3\$^1_O + {}_1\omega_5 {}^5\$^1_O$$

$$\textcircled{O_{53}} \Rightarrow [O_{43}] [O_{54}] \quad {}_3\omega_5 {}^5\$^3_O = {}_3\omega_4 {}^4\$^3_O + {}_4\omega_5 {}^5\$^4_O$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl(\${}_{a,Kl}^1, {}^5\$^3) = 0 \quad (3.45)$$

y

$$Kl(\${}_{a,Kl}^4, {}^5\$^3) = 0 \quad (3.46)$$

donde  $\{\${}_{a1,Kl}^1\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^3\$^1, {}^5\$^1]$  y  $\{\${}_{a1,Kl}^4\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^4\$^3, {}^5\$^4]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

De las ecuaciones (3.45) y (3.46) se obtiene el sistema de ecuaciones necesarias para determinar el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{53}$

$$Ec53_1 = \left[ 0, \frac{51736952}{339463} + \frac{174840}{339463} y_{53} - x_{53}, 0, 0 \right] \quad (3.47)$$

$$Ec53_4 = \left[ 0, -\frac{128633090}{1137233} - \frac{9634872}{5686165} y_{53} - x_{53}, 0, \right] \quad (3.48)$$

De las ecuaciones (3.47) a las (3.48) se tiene

$$0 = \frac{51736952}{339463} + \frac{174840}{339463} y_{53} - x_{53} \quad (3.49)$$

$$0 = -\frac{128633090}{1137233} - \frac{9634872}{5686165} y_{53} - x_{53} \quad (3.50)$$

Como resultado, el vector de posición  $\vec{r}_{53}$  es igual a

$$\vec{r}_{53} = \begin{bmatrix} \frac{1615309}{17846} \\ -\frac{17156715}{142768} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además se tiene que el tornillo infinitesimal asociado al centro instantáneo secundario  $O_{53}$  está dado por

$${}^5\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{17156715}{142768} \\ -\frac{1615309}{17846} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los valores determinados para los vectores de posición correspondientes a los centros instantáneos secundarios se muestran en la Figura 3.2, donde se puede observar que los tres centros instantáneos asociados

a los tres movimientos relativos,  $i\$^k$ ,  $i\$^j$  y  $j\$^k$  entre tres eslabones arbitrarios en cada uno de los casos yacen sobre una línea recta de acuerdo a lo establecido por el teorema de Aronhold-Kennedy.

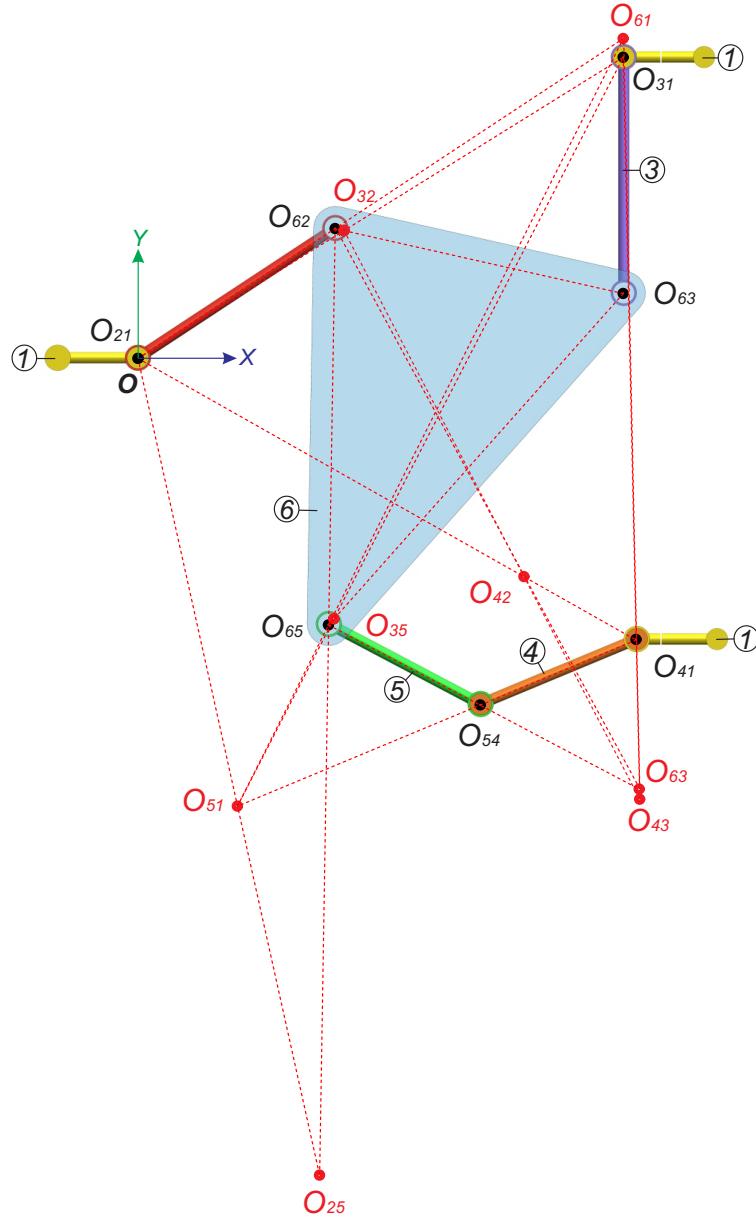


Figura 3.2: Mecanismo de seis barras asociado a la subálgebra de movimientos planos

### 3.3. Determinación de los centros instantáneos de un mecanismo plano parcialmente indeterminado: Mecanismo de ocho barras “single flyer”

En esta sección se determinarán los centros instantáneos secundarios de los movimientos relativos entre eslabones que pertenecen a un mecanismo asociado a la subálgebra de movimientos planos. Se presenta

un ejemplo, que trata de un mecanismo parcialmente indeterminado.

Considere el mecanismo plano mostrado en la Figura 3.3, conocido como mecanismo de 8 barras “single flyer”. Este mecanismo fue propuesto por Klein [19] quien determinó los centros instantáneos secundarios indeterminados mediante un método de prueba y error. Foster y Pennock [12] determinaron los centros instantáneos secundarios indeterminados mediante un método gráfico. Di Gregorio [8] determinó los centros instantáneos secundarios indeterminados mediante un método analítico que combina las ecuaciones de clausura del mecanismo y la misma localización de los centros instantáneos. Este mecanismo está formado por ocho eslabones, cuatro de ellos ternarios y los restantes cuatro binarios y 10 pares de revoluta, el mecanismo es trivial y su movilidad de acuerdo al criterio de Grübler está dada por

$$F = 3(N - 1) - 2P_I = 3(8 - 1) - 2(10) = 21 - 20 = 1 \quad (3.51)$$

Donde,  $N$  es el número de eslabones y  $P_I$  es el número de pares cinemáticos de la clase I las revolutas pertenecen a la clase I. Cuando sea evidente el origen del sistema coordenado,  $O$ , se suprimirá.

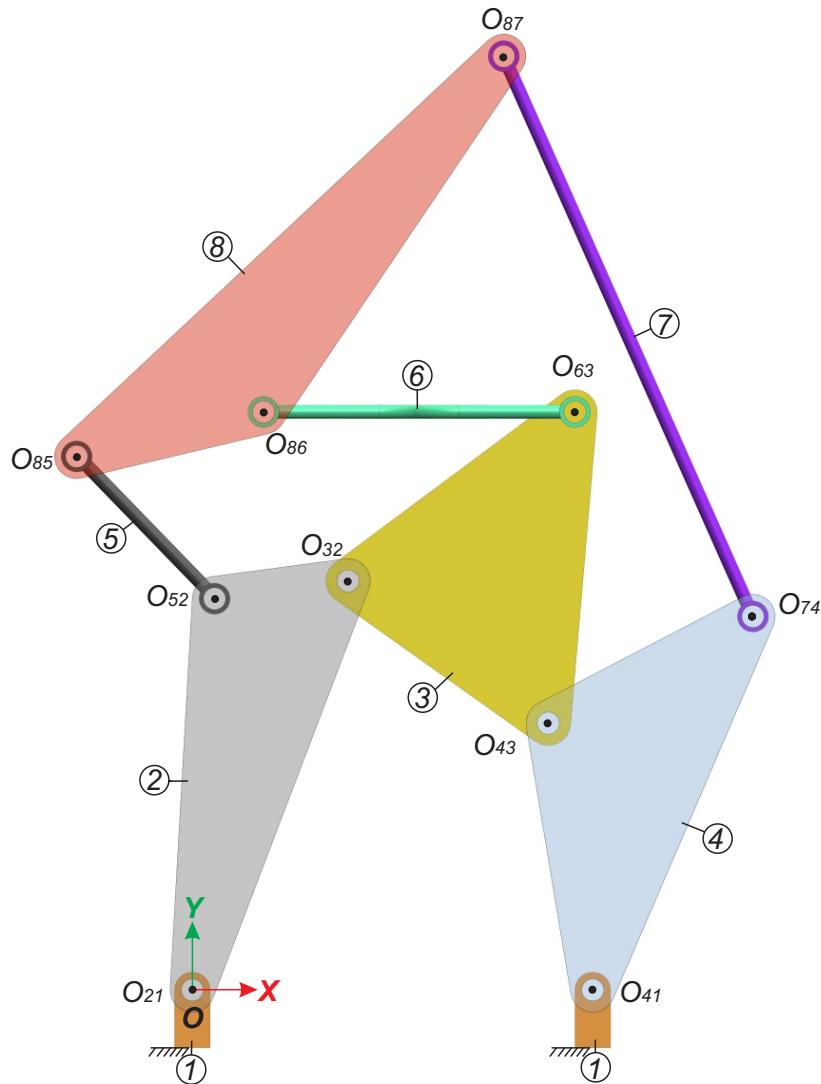


Figura 3.3: Mecanismo de ocho barras asociado a la subálgebra de movimientos planos indeterminados

Los parámetros necesarios para la determinación de los tornillos asociados a los pares cinemáticos, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , son:

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde  $\hat{u}$ , representa la dirección de los ejes de los pares de revoluta, los vectores de posición de puntos localizados a lo largo de los ejes de revoluta, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , están dados en términos de una unidad de longitud no especificada. Por lo tanto

$$\vec{r}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{32} = \begin{bmatrix} 70 \\ 184 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{43} = \begin{bmatrix} 60 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{41} = \begin{bmatrix} 180 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{52} = \begin{bmatrix} 10 \\ 176 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{85} = \begin{bmatrix} -52 \\ 240 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{86} = \begin{bmatrix} 32 \\ 260 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{63} = \begin{bmatrix} 172 \\ 260 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{87} = \begin{bmatrix} 140 \\ 420 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{74} = \begin{bmatrix} 252 \\ 168 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los tornillos infinitesimales asociados a los pares cinemáticos, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , están dados por:

$${}^2\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$^2_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 184 \\ -70 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^4\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 120 \\ -160 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^4\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -180 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^5\$^2_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 176 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^8\$^5_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 240 \\ 52 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^8\$^7_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 420 \\ -140 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^7\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 168 \\ -252 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^8\$^6_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 260 \\ -32 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^6\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 260 \\ -172 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 3.3.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los centros instantáneos secundarios

Con base a la numeración de los eslabones mostrada en la Figura 3.3 los centros instantáneos primarios; es decir, aquellos que se pueden determinar mediante la examinación del mecanismo son:

$$O_{21}, \quad O_{32}, \quad O_{43}, \quad O_{41}, \quad O_{52}, \quad O_{85}, \quad O_{87}, \quad O_{74}, \quad O_{86}, \quad O_{63}$$

El arreglo diagonal de los centros instantáneos del mecanismo mostrado en la Figura 3.3, donde los centros primarios se indican con el número -1 y los centros secundarios se indican con el número -2 se muestra en la Tabla 3.2

Tabla 3.2: Centros instantáneos de tornillos asociados al mecanismo esférico de ocho barras

$O_{21}(-1)$	$O_{31}(-2)$	$O_{41}(-1)$	$O_{51}(-2)$	$O_{61}(-2)$	$O_{71}(-2)$	$O_{81}(-2)$
	$O_{32}(-1)$	$O_{42}(-2)$	$O_{52}(-1)$	$O_{62}(-2)$	$O_{72}(-2)$	$O_{82}(-2)$
		$O_{43}(-1)$	$O_{53}(-2)$	$O_{63}(-1)$	$O_{73}(-2)$	$O_{83}(-2)$
			$O_{54}(-2)$	$O_{64}(-2)$	$O_{74}(-1)$	$O_{84}(-2)$
				$O_{65}(-2)$	$O_{75}(-2)$	$O_{85}(-1)$
					$O_{76}(-2)$	$O_{86}(-1)$
						$O_{81}(-1)$

El mecanismo se denomina parcialmente indeterminado por que la aplicación directa del teorema de Aronhold-Kennedy permite determinar dos centros instantáneos secundarios. Note que  $O_{31}$  está localizado en la intersección de las líneas determinadas por

$$\textcircled{O_{31}} \Rightarrow [O_{21}] [O_{32}] \quad {}_1\omega_3^3 \$^1_O = {}_1\omega_2^2 \$^1_O + {}_2\omega_3^3 \$^2_O$$

$$\textcircled{O_{31}} \Rightarrow [O_{43}] [O_{41}] \quad {}_1\omega_3^3 \$^1_O = {}_3\omega_4^4 \$^3_O + {}_1\omega_4^4 \$^1_O$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl(\$,^2_{a,Kl}, ^3\$^1) = 0 \quad (3.52)$$

y

$$Kl(\$,^4_{a,Kl}, ^3\$^1) = 0 \quad (3.53)$$

donde  $\{\$\^2_{a1,Kl}\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[^2\$^1, ^3\$^2]$  y  $\{\$\^4_{a1,Kl}\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[^4\$^3, ^4\$^1]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

De las ecuaciones (3.52) y (3.53) y aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Klein se obtiene las ecuaciones necesarias para determinar el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{31}$

$$Ec31_2 = \left[ 0, 180 - \frac{1}{6} y_{31} - x_{31}, 0, 0 \right] \quad (3.54)$$

$$Ec31_4 = \left[ 0, \frac{35}{92} y_{31} - x_{31}, 0, 0 \right] \quad (3.55)$$

De las ecuaciones (3.54) a las (3.55) se tiene

$$0 = 180 - \frac{1}{6} y_{31} - x_{31} \quad (3.56)$$

$$0 = \frac{35}{92} y_{31} - x_{31} \quad (3.57)$$

Se tiene un sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas, que representan las coordenadas  $x_{31}$  y  $y_{31}$  asociadas al centro instantáneo secundario  $O_{31}$ .

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene que el vector de posición  $\vec{r}_{31}$  es igual a

$$\vec{r}_{31} = \begin{bmatrix} \frac{18900}{151} \\ \frac{49680}{151} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además se tiene que el tornillo infinitesimal asociado al centro instantáneo secundario  $O_{31}$  está dado por

$${}^3\$_O^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{49680}{151} \\ -\frac{18900}{151} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De manera semejante, el centro instantáneo  $O_{42}$  está localizado en la intersección de las líneas determinadas por

$$\textcircled{O_{42}} \Rightarrow [O_{21}] [O_{41}] \quad {}_2\omega_4 {}^4\$_O^2 = {}_2\omega_3 {}^3\$_O^2 + {}_1\omega_4 {}^4\$_O^1$$

$$\textcircled{O_{42}} \Rightarrow [O_{32}] [O_{43}] \quad {}_2\omega_4 {}^4\$_O^2 = {}_2\omega_3 {}^3\$_O^2 + {}_3\omega_4 {}^4\$_O^3$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl({\$}_{a,Kl}^1, {}^4\$^2) = 0 \quad (3.58)$$

y

$$Kl({\$}_{a,Kl}^3, {}^4\$^2) = 0 \quad (3.59)$$

donde  $\{{\$}_{a1,Kl}^1\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^2\$^1, {}^4\$^1]$  y  $\{{\$}_{a1,Kl}^3\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^3\$^2, {}^4\$^3]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

De las ecuaciones (3.58) y (3.59) se obtiene el sistema de ecuaciones necesario para determinar el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{42}$

$$Ec42_1 = \begin{bmatrix} 0, y_{42}, 0, 0 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$Ec42_3 = \left[ 0, \frac{1315}{4} - \frac{45}{32} y_{42} - x_{42}, 0, 0 \right] \quad (3.61)$$

De las ecuaciones (3.60) a las (3.61) se tiene

$$0 = y_{42} \quad (3.62)$$

$$0 = \frac{1315}{4} - \frac{45}{32} y_{42} - x_{42} \quad (3.63)$$

De manera semejante se resuelve el sistema de ecuaciones para el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{42}$ , se obtiene

$$\vec{r}_{42} = \begin{bmatrix} \frac{1315}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se tiene que el tornillo infinitesimal asociado al centro instantáneo secundario  $O_{42}$  está dado por

$${}^4\$^2_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1315}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ningún otro centro instantáneo se puede localizar mediante la aplicación directa del teorema de Aronhold-Kennedy. Después de localizar los centros instantáneos  $O_{31}$  y  $O_{42}$  que se van a indicar con el número -1, el arreglo diagonal de los centros instantáneos después de esta etapa está dado por

Tabla 3.3: Centros instantáneos de tornillos asociados al mecanismo esférico de 8 barras

$$\begin{array}{cccccccc} O_{21}(-1) & O_{31}(-1) & O_{41}(-1) & O_{51}(-2) & O_{61}(-2) & O_{71}(-2) & O_{81}(-2) \\ O_{32}(-1) & O_{42}(-1) & O_{52}(-1) & O_{62}(-2) & O_{72}(-2) & O_{82}(-2) \\ O_{43}(-1) & O_{53}(-2) & O_{63}(-1) & O_{73}(-2) & O_{83}(-2) \\ O_{54}(-2) & O_{64}(-2) & O_{74}(-1) & O_{84}(-2) \\ O_{65}(-2) & O_{75}(-2) & O_{85}(-1) \\ O_{76}(-2) & O_{86}(-1) \\ O_{81}(-1) \end{array}$$

Para determinar los restantes centros instantáneos secundarios, se recurrirá a un proceso que consta de los siguientes pasos:

1. Seleccione un centro instantáneo secundario arbitrario  $O_{ij}$  que se marcará con el número 0 y asuma que su localización se conoce.
2. Determine los centros instantáneos secundarios que pueden determinarse con los centros instantáneos marcados con el número -1<sup>1</sup> y con el centro secundario arbitrario seleccionado y marcado con el número 0. Los centros instantáneos obtenidos en esta etapa del proceso se marcan con el número 1.
3. Repita el proceso del paso dos, pero ahora determinando los centros instantáneos marcados con los números -1, 0, 1. Los centros instantáneos obtenidos en esta etapa se marcarán con el número 2.
4. El proceso de los pasos dos y tres se repite indefinidamente, marcando los nuevos centros instantáneos con los números 3, 4..... hasta encontrar un centro instantáneo sobredeterminado; es decir, un centro instantáneo que pueda determinarse por la intersección de más de dos líneas diferentes.

<sup>1</sup>La gran mayoría de estos centros son primarios pero, como en este caso con los centros  $O_{13}$  y  $O_{24}$ , puede haber centros secundarios obtenidos mediante la aplicación directa del teorema de Aronhold-Kennedy.

**Nota 1:** En sentido estricto, el centro instantáneo secundario inicial puede elegirse arbitrariamente; sin embargo, es más conveniente, desde el punto de vista computacional, seleccionar un centro instantáneo secundario localizado en la línea que une dos centros instantáneos primarios —o marcados con el número -1.

Suponga que  $O_{jk}$  es un centro instantáneo secundario que de acuerdo con el teorema de Aronhold-Kennedy es colineal con los centros instantáneos  $O_{ij}$  y  $O_{ik}$ , ambos marcados con el número -1, entonces las dos posibles configuraciones de los centros son:



Figura 3.4: Primera configuración de los centros instantáneos

ó



Figura 3.5: Segunda configuración de los centros instantáneos

En ambos casos se tiene la relación

$$\vec{r}_{j,k}/O - \vec{r}_{i,j}/O = \lambda(\vec{r}_{i,k}/O - \vec{r}_{i,j}/O)$$

En la primera Figura 3.4,  $\lambda < 1$  mientras que en la segunda Figura 3.5,  $\lambda > 1$ . En cualquier caso se tiene que.

$$\vec{r}_{j,k}/O = \lambda \vec{r}_{i,k}/O + (1 - \lambda) \vec{r}_{i,j}/O$$

Como puede observarse, el vector de posición del centro instantáneo secundario puede escribirse como una combinación lineal de dos centros instantáneos primarios. Entonces la localización del centro secundario seleccionado puede escribirse en términos de una única variable  $\lambda$ , pues  $\vec{r}_{i,k}/O$  y  $\vec{r}_{i,j}/O$  son conocidos.

Un procedimiento implementado en Maple<sup>©</sup> determina todos los centros instantáneos secundarios que satisfacen esta condición.

La localización del centro instantáneo sobre determinado conduce a una ecuación, usualmente cuadrática, en la variable  $\lambda$  que determina la localización del centro instantáneo seleccionado.

5. El proceso indicado en los pasos 1 a 4 se repite para un nuevo centro instantáneo secundario, cuya localización pueda escribirse como una combinación lineal de dos centros instantáneos primarios. La localización de un centro instantáneo sobre determinado conduce a otra ecuación, usualmente cuadrática en la variable  $\lambda^*$  que determina la localización del centro instantáneo seleccionado.

La localización correcta de los centros instantáneos seleccionados; es decir, los valores de  $\lambda$  y  $\lambda^*$  correctos, se determinan comparando la localización de un centro secundario que pueda determinarse

empleando cualquiera de los centros instantáneos secundarios seleccionados.

**Nota 2:** En sentido estricto cualquier pareja de centros instantáneos que pueden describirse como la combinación lineal de dos centros instantáneos marcados con el número 1 —es decir centros instantáneos primarios o aquellos que pueden determinarse por la aplicación directa del teorema de Aronhold-Kennedy, pueden emplearse; sin embargo, conviene emplear aquellos centros instantáneos que conduzcan a un número mínimo de ecuaciones.

### 3.3.2. Obtención del sistema de ecuaciones y su solución

El objetivo de este análisis es determinar los vectores de posición de un punto a lo largo del eje de rotación de los movimientos relativos de los eslabones cinco, seis, siete y ocho respecto del eslabón uno, de los eslabones seis, siete y ocho respecto del eslabón dos, de los eslabones cinco, siete y ocho respecto del eslabón tres, de los eslabones cinco, seis y ocho respecto del eslabón cuatro, de los eslabones seis y siete respecto del eslabón cinco y del eslabón ocho respecto del eslabón siete. Por lo tanto la Tabla 3.4 muestra todos los centro instantáneos secundarios que se pueden escribir en términos de dos centros instantáneos primarios empleando una variable  $\lambda$ .

Tabla 3.4: Centros instantáneos secundarios cuyo vector de posición puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de posición de dos centros instantáneos primarios

$O_{51}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{21}$	$O_{52}$
$O_{61}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{31}$	$O_{63}$
$O_{71}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{41}$	$O_{74}$
$O_{62}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{32}$	$O_{63}$
$O_{72}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{42}$	$O_{74}$
$O_{82}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{52}$	$O_{82}$
$O_{53}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{32}$	$O_{52}$
$O_{73}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{43}$	$O_{74}$
$O_{83}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{63}$	$O_{86}$
$O_{54}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{42}$	$O_{52}$
$O_{64}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{43}$	$O_{63}$
$O_{84}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{74}$	$O_{87}$
$O_{65}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{85}$	$O_{86}$
$O_{75}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{85}$	$O_{87}$
$O_{76}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{86}$	$O_{87}$

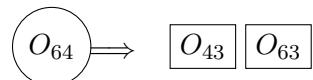
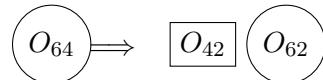
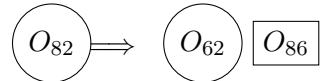
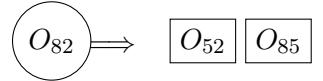
De la Tabla 3.4 se selecciona el centro instantáneo secundario  $O_{62}$  que puede escribirse como

$$\vec{r}_{62} = \vec{r}_{32}(1 - \lambda) + \vec{r}_{63} \lambda \quad (3.64)$$

El arreglo diagonal de los centros instantáneos después de esta etapa sería

$$\begin{array}{cccccccc}
 O_{21}(-1) & O_{31}(-1) & O_{41}(-1) & O_{51}(-2) & O_{61}(-2) & O_{71}(-2) & O_{81}(-2) \\
 O_{32}(-1) & O_{42}(-1) & O_{52}(-1) & O_{62}(0) & O_{72}(-2) & O_{82}(-2) & \\
 O_{43}(-1) & O_{53}(-2) & O_{63}(-1) & O_{73}(-2) & O_{83}(-2) & & \\
 & O_{54}(-2) & O_{64}(-2) & O_{74}(-1) & O_{84}(-2) & & \\
 & O_{65}(-2) & O_{75}(-2) & O_{85}(-1) & & & \\
 & O_{76}(-2) & O_{86}(-1) & & & & \\
 & & O_{87}(-1) & & & & 
 \end{array}$$

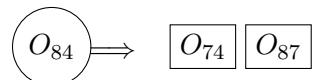
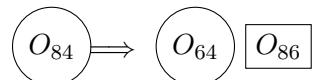
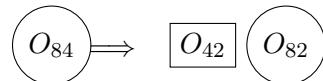
Por lo tanto pueden determinarse los siguientes centros instantáneos<sup>2</sup>  $O_{82}$ ,  $O_{64}$



Después de identificar los centros instantáneos secundarios  $O_{82}$  y  $O_{64}$  que se van a marcar con el número 1, el arreglo diagonal de los centros instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc}
 O_{21}(-1) & O_{31}(-1) & O_{41}(-1) & O_{51}(-2) & O_{61}(1) & O_{71}(-2) & O_{81}(-2) \\
 O_{32}(-1) & O_{42}(-1) & O_{52}(-1) & O_{62}(0) & O_{72}(-2) & O_{82}(1) \\
 O_{43}(-1) & O_{53}(-2) & O_{63}(-1) & O_{73}(-2) & O_{83}(-2) \\
 O_{54}(-2) & O_{64}(1) & O_{74}(-1) & O_{84}(-2) \\
 O_{65}(1) & O_{75}(-2) & O_{85}(-1) \\
 O_{76}(-2) & O_{86}(-1) \\
 O_{87}(-1)
 \end{array}$$

El siguiente paso consiste en hacer uso de todos los centros instantáneos secundarios que se han obtenido hasta ahora, y de esta forma encontrar que centros instantáneos adicionales se pueden obtener<sup>3</sup>. Por lo tanto



Después de identificar los centros instantáneos secundarios sobredeterminado  $O_{84}$  que se va a marcar con el número 2, el arreglo diagonal de los centros instantáneos después de esta etapa está dado por

<sup>2</sup>Sólo se indican los centros instantáneos requeridos.

<sup>3</sup>Sólo se indican los centros instantáneos requeridos, sin embargo en el arreglo diagonal se indican todos los centros instantáneos encontrados.

$$\begin{array}{ccccccc}
 O_{21}(-1) & O_{31}(-1) & O_{41}(-1) & O_{51}(2) & O_{61}(1) & O_{71}(-2) & O_{81}(2) \\
 O_{32}(-1) & O_{42}(-1) & O_{52}(-1) & O_{62}(0) & O_{72}(2) & O_{82}(1) & \\
 O_{43}(-1) & O_{53}(2) & O_{63}(-1) & O_{73}(-2) & O_{83}(2) & & \\
 O_{54}(2) & O_{64}(1) & O_{74}(-1) & O_{84}(2) & & & \\
 O_{65}(1) & O_{75}(-2) & O_{85}(-1) & & & & \\
 O_{76}(2) & O_{86}(-1) & & & & & \\
 O_{81}(-1) & & & & & &
 \end{array}$$

De la ecuación (3.64) el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{62}$  está dado por

$$\vec{r}_{62} = \begin{bmatrix} 70 + 102\lambda \\ 184 + 76\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

A continuación se escriben los vectores de posición asociados a los centros instantáneos secundarios involucrados

$$\vec{r}_{82} = \begin{bmatrix} x_{82} \\ y_{82} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{64} = \begin{bmatrix} x_{64} \\ y_{64} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{84} = \begin{bmatrix} x_{84} \\ y_{84} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones necesarias se obtienen aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Klein de una manera sistemática vea las ecuaciones (3.52)-(3.59)

$$E82_5 = \left[ 0, \frac{361}{2} - \frac{31}{32} y_{82} - x_{82}, 0, 0 \right] \quad (3.66)$$

$$E82_6 = \left[ 0, -\frac{1}{38} \frac{38\lambda x_{82} - 51\lambda y_{82} + 12044\lambda + 70 y_{82} - 18200}{\lambda}, 0, 0 \right] \quad (3.67)$$

$$E64_3 = \left[ 0, \frac{1048}{7} + \frac{3}{35} y_{64} - x_{64}, 0, 0 \right] \quad (3.68)$$

$$E64_2 = \left[ 0, -\frac{1}{16} \frac{304\lambda x_{64} - 408\lambda y_{64} - 99940\lambda - 1040 x_{64} - 627 y_{64} + 341900}{19\lambda - 65}, 0, 0 \right] \quad (3.69)$$

$$E84_7 = \left[ 0, \frac{980}{3} - \frac{4}{9} y_{84} - x_{84}, 0, 0 \right] \quad (3.70)$$

$$E84_2 = \left[ 0, \frac{1}{4} \frac{4 x_{82} y_{84} - 4 x_{84} y_{82} + 1315 y_{82} - 1315 y_{84}}{y_{82}}, 0, 0 \right] \quad (3.71)$$

$$E84_6 = \left[ 0, \frac{x_{64} y_{84} - x_{84} y_{64} - 260 x_{64} + 260 x_{84} + 32 y_{64} - 32 y_{84}}{y_{64} - 260}, 0, 0 \right] \quad (3.72)$$

De las ecuaciones (3.66) - (3.72) se forma el conjunto final de ecuaciones

$$0 = \frac{361}{2} - \frac{31}{32} y_{82} - x_{82} \quad (3.73)$$

$$0 = -\frac{1}{38} \frac{38\lambda x_{82} - 51\lambda y_{82} + 12044\lambda + 70 y_{82} - 18200}{\lambda} \quad (3.74)$$

$$0 = \frac{1048}{7} + \frac{3}{35} y_{64} - x_{64} \quad (3.75)$$

$$0 = -\frac{1}{16} \frac{304\lambda x_{64} - 408\lambda y_{64} - 99940\lambda - 1040 x_{64} - 627 y_{64} + 341900}{19\lambda - 65} \quad (3.76)$$

$$0 = \frac{980}{3} - \frac{4}{9} y_{84} - x_{84} \quad (3.77)$$

$$0 = \frac{1}{4} \frac{4x_{82}y_{84} - 4x_{84}y_{82} + 1315y_{82} - 1315y_{84}}{y_{82}} \quad (3.78)$$

$$0 = \frac{x_{64}y_{84} - x_{84}y_{64} - 260x_{64} + 260x_{84} + 32y_{64} - 32y_{84}}{y_{64} - 260} \quad (3.79)$$

De una manera sistemática se despejan las coordenadas  $y_{ij}$  de cada una de las ecuaciones lineales para expresarlas en términos de las coordenadas  $x_{ij}$ . De esa manera, se despejan las coordenadas  $y_{82}$ ,  $y_{64}$  y  $y_{84}$  de las ecuaciones (3.73), (3.75) y (3.77) respectivamente

$$y_{82} = -\frac{32x_{82}}{31} + \frac{5776}{31} \quad (3.80)$$

$$y_{64} = \frac{35x_{64}}{3} - \frac{5240}{3} \quad (3.81)$$

$$y_{84} = -\frac{9}{4}x_{84} + 735 \quad (3.82)$$

Sustituyendo los resultados recién encontrados en las ecuaciones (3.74), (3.76), (3.78) y (3.79) se tiene

$$0 = -\frac{1405x_{82}\lambda + 39394\lambda - 1120x_{82} - 79940}{589\lambda} \quad (3.83)$$

$$0 = \frac{4456x_{64}\lambda - 612700\lambda + 8355x_{64} - 1437060}{304\lambda - 1040} \quad (3.84)$$

$$0 = \frac{604x_{82}x_{84} - 196240x_{82} - 274469x_{84} + 89467340}{-92416 + 512x_{82}} \quad (3.85)$$

$$0 = -\frac{167x_{64}x_{84} - 10180x_{64} - 24944x_{84} + 952960}{-24080 + 140x_{64}} \quad (3.86)$$

De una manera sistemática se despejan y sustituyen las coordenadas  $x_{ij}$  de cada una de las ecuaciones (3.83) - (3.86)

$$x_{84} = 20 \frac{509x_{64} - 47648}{167x_{64} - 24944} \quad (3.87)$$

$$x_{82} = \frac{1}{2} \frac{37959223x_{64} - 6156610471}{41599x_{64} - 6749098} \quad (3.88)$$

$$x_{64} = \frac{296186633709\lambda - 257240306960}{-1585973480 + 1826135817\lambda} \quad (3.89)$$

$$0 = \frac{200934224731404\lambda^2 - 324164269157085\lambda + 129896284518000}{(-25375575680 + 29218173072\lambda)(19\lambda - 65)} \quad (3.90)$$

Se obtiene una ecuación cuadrática en  $\lambda$ , resolviendo la ecuación se obtienen dos soluciones

$$\lambda_a = \frac{711865}{816796}, \quad \lambda_b = \frac{36400}{49073} \quad (3.91)$$

Los resultados recién obtenidos se sustituyen en la ecuación (3.65)

$$\vec{r}_{62a} = \begin{bmatrix} \frac{33939341}{408398} \\ \frac{39566305}{204199} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{62b} = \begin{bmatrix} \frac{4727756}{49073} \\ \frac{9992580}{49073} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Finalmente con el resultado anterior se obtienen los dos posibles valores para el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{82}$ . Por lo tanto

$$\vec{r}_{82a} = \begin{bmatrix} \frac{1286974}{2949} \\ -\frac{779024}{2949} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{82b} = \begin{bmatrix} -\frac{935697}{1436} \\ \frac{308360}{359} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

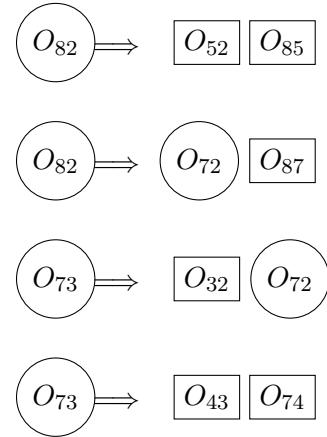
El procedimiento debe repetirse para otro centro instantáneo secundario. De la Tabla 3.4 se selecciona el centro instantáneo secundario  $O_{72}$  que puede escribirse como

$$\vec{r}_{O72} = \vec{r}_{O42}(1 - \lambda^*) + \vec{r}_{O74}\lambda^* \quad (3.94)$$

El arreglo diagonal de los entros instantáneos sería

$$\begin{array}{cccccccc} O_{21}(-1) & O_{31}(-1) & O_{41}(-1) & O_{51}(-2) & O_{61}(-2) & O_{71}(-2) & O_{81}(-2) \\ O_{32}(-1) & O_{42}(-1) & O_{52}(-1) & O_{62}(0) & O_{72}(0) & O_{82}(-2) \\ O_{43}(-1) & O_{53}(-2) & O_{63}(-1) & O_{73}(-2) & O_{83}(-2) \\ O_{54}(-2) & O_{64}(-2) & O_{74}(-1) & O_{84}(-2) \\ O_{65}(-2) & O_{75}(-2) & O_{85}(-1) & \\ O_{76}(-2) & O_{86}(-1) & \\ O_{87}(-1) & \end{array}$$

Por lo tanto pueden determinarse los siguientes centros instantáneos<sup>4</sup>  $O_{82}$ ,  $O_{73}$

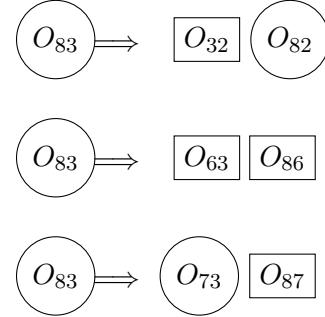


Después de identificar los centros instantáneos secundarios  $O_{82}$  y  $O_{73}$  que se van a marcar con el número 1, el arreglo diagonal de los centros instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc} O_{21}(-1) & O_{31}(-1) & O_{41}(-1) & O_{51}(-2) & O_{61}(-2) & O_{71}(1) & O_{81}(-2) \\ O_{32}(-1) & O_{42}(-1) & O_{52}(-1) & O_{62}(-2) & O_{72}(0) & O_{82}(1) \\ O_{43}(-1) & O_{53}(-2) & O_{63}(-1) & O_{73}(1) & O_{83}(-2) \\ O_{54}(-2) & O_{64}(-2) & O_{74}(-1) & O_{84}(-2) \\ O_{65}(-2) & O_{75}(1) & O_{85}(-1) & \\ O_{76}(-2) & O_{86}(-1) & \\ O_{87}(-1) & \end{array}$$

<sup>4</sup>Sólo se indican los centros instantáneos requeridos.

El siguiente paso consiste en hacer uso de todos los centros instantáneos secundarios que se han obtenido hasta ahora, y de esta forma encontrar que centros instantáneos adicionales se pueden obtener<sup>5</sup>. Por lo tanto



Después de identificar los centros instantáneos secundarios sobredeterminado  $O_{83}$  que se va a marcar con el número 2, el arreglo diagonal de los centros instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc} O_{21}(-1) & O_{31}(-1) & O_{41}(-1) & O_{51}(2) & O_{61}(-2) & O_{71}(1) & O_{81}(2) \\ O_{32}(-1) & O_{42}(-1) & O_{52}(-1) & O_{62}(2) & O_{72}(0) & O_{82}(1) \\ O_{43}(-1) & O_{53}(2) & O_{63}(-1) & O_{73}(1) & O_{83}(2) \\ O_{54}(2) & O_{64}(-2) & O_{74}(-1) & O_{84}(2) \\ O_{65}(-2) & O_{75}(1) & O_{85}(-1) \\ O_{76}(2) & O_{86}(-1) \\ O_{87}(-1) \end{array}$$

De la ecuación (3.94) el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{72}$  está dado por la localización del centro secundario seleccionado . Por lo tanto

$$\vec{r}_{72} = \begin{bmatrix} \frac{1315}{4} - \frac{307\lambda^*}{4} \\ 168\lambda^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

A continuación se escriben los vectores de posición asociados a los centros instantáneos secundarios involucrados

$$\vec{r}_{82} = \begin{bmatrix} x_{82} \\ y_{82} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{73} = \begin{bmatrix} x_{73} \\ y_{73} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{83} = \begin{bmatrix} x_{83} \\ y_{83} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones necesarias se obtienen aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Klein de una manera sistemática vea las ecuaciones (3.52)-(3.59)

$$E82_5 = \left[ 0, \frac{361}{2} - \frac{31}{32}y_{82} - x_{82}, 0, 0 \right] \quad (3.96)$$

$$E82_7 = \left[ 0, -\frac{1}{336} \frac{672\lambda^* x_{82} + 307\lambda^* y_{82} - 223020\lambda + 1008x_{82} + 448y_{82} - 329280}{3 + 2\lambda^*}, 0, 0 \right] \quad (3.97)$$

$$E73_4 = \left[ 0, -70 + \frac{23}{12}y_{73} - x_{73}, 0, 0 \right] \quad (3.98)$$

<sup>5</sup>Sólo se indican los centros instantáneos requeridos, sin embargo en el arreglo diagonal se indican todos los centros instantáneos encontrados.

$$E73_2 = 0, -\frac{1}{32} \frac{672\lambda^* x_{73} + 307\lambda^* y_{73} - 103528\lambda^* + 64x_{73} + 728y_{73} - 138432}{2 + 21\lambda^*}, 0, 0 \quad (3.99)$$

$$E83_6 = \left[ 0, -260 + y_{83}, 0, 0 \right] \quad (3.100)$$

$$E83_2 = \left[ 0, \frac{x_{82}y_{83} - x_{83}y_{82} - 184x_{82} + 184x_{83} + 70y_{82} - 70y_{83}}{y_{82} - 184}, 0, 0 \right] \quad (3.101)$$

$$E83_7 = \left[ 0, \frac{x_{73}y_{83} - x_{83}y_{73} - 420x_{73} + 420x_{83} + 140y_{73} - 140y_{83}}{y_{73} - 420}, 0, 0 \right] \quad (3.102)$$

De las ecuaciones (3.96) - (3.102) se forma el conjunto final de ecuaciones

$$0 = \frac{361}{2} - \frac{31}{32}y_{82} - x_{82} \quad (3.103)$$

$$0 = -\frac{1}{336} \frac{672\lambda^* x_{82} + 307\lambda^* y_{82} - 223020\lambda + 1008x_{82} + 448y_{82} - 329280}{3 + 2\lambda^*} \quad (3.104)$$

$$0 = -70 + \frac{23}{12}y_{73} - x_{73} \quad (3.105)$$

$$0 = -\frac{1}{32} \frac{672\lambda^* x_{73} + 307\lambda^* y_{73} - 103528\lambda^* + 64x_{73} + 728y_{73} - 138432}{2 + 21\lambda^*} \quad (3.106)$$

$$0 = -260 + y_{83} \quad (3.107)$$

$$0 = \frac{x_{82}y_{83} - x_{83}y_{82} - 184x_{82} + 184x_{83} + 70y_{82} - 70y_{83}}{y_{82} - 184} \quad (3.108)$$

$$0 = \frac{x_{73}y_{83} - x_{83}y_{73} - 420x_{73} + 420x_{83} + 140y_{73} - 140y_{83}}{y_{73} - 420} \quad (3.109)$$

De una manera sistemática se despejan las coordenadas  $y_{ij}$  de cada una de las ecuaciones lineales para expresarlas en términos de las coordenadas  $x_{ij}$ . De esa manera, se despejan las coordenadas  $y_{82}$ ,  $y_{73}$  y  $y_{83}$  de las ecuaciones (3.103), (3.105) y (3.107) respectivamente

$$y_{82} = \frac{5776}{31} - \frac{32x_{82}}{31} \quad (3.110)$$

$$y_{73} = \frac{840}{23} + \frac{12x_{73}}{23} \quad (3.111)$$

$$y_{83} = 260 \quad (3.112)$$

Sustituyendo los resultados recién encontrados en las ecuaciones (3.104), (3.106), (3.108) y (3.109) se tiene

$$0 = -\frac{2752\lambda^* x_{82} - 1285097\lambda^* + 4228x_{82} - 1905008}{7812 + 5208\lambda^*} \quad (3.113)$$

$$0 = -\frac{4785\lambda^* x_{73} - 530816\lambda^* + 2552x_{73} - 643104}{368 + 3864\lambda^*} \quad (3.114)$$

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{8x_{82}x_{83} + 29x_{82} - 18x_{83} - 39970}{-9 + 4x_{82}} \quad (3.115)$$

$$0 = -\frac{1}{3} \frac{3x_{73}x_{83} + 500x_{73} - 2205x_{83} + 179900}{-735 + x_{73}} \quad (3.116)$$

De una manera sistemática se despejan y sustituyen las coordenadas  $x_{ij}$  de cada una de las ecuaciones (3.113) - (3.116)

$$x_{83} = -\frac{500x_{73} + 179900}{-2205 + 3x_{73}} \quad (3.117)$$

$$x_{73} = -35 \frac{42947x_{82} - 2610630}{3913x_{82} + 110910} \quad (3.118)$$

$$x_{82} = \frac{51566370\lambda^* + 22060080}{1263409\lambda^* + 865816} \quad (3.119)$$

$$0 = \frac{47796531143\lambda^{*2} + 104539672384\lambda^* + 50197302848}{(106126356\lambda^* + 72728544)(3 + 2\lambda^*)} \quad (3.120)$$

Se obtiene una ecuación cuadrática en  $\lambda^*$ , resolviendo la ecuación se obtienen dos soluciones

$$\lambda_a^* = -\frac{1138984}{1599991}, \quad \lambda_b^* = -\frac{44072}{29873} \quad (3.121)$$

Los resultados recién obtenidos se sustituyen en la ecuación (3.95)

$$\vec{r}_{72a} = \begin{bmatrix} \frac{315780710}{1599991} \\ \frac{460147800}{1599991} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{72b} = \begin{bmatrix} \frac{4145470}{29873} \\ \frac{12422760}{29873} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

Finalmente con el resultado anterior se obtienen los dos posibles valores para el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{82}$ . Por lo tanto

$$\vec{r}_{82a} = \begin{bmatrix} \frac{1286974}{2949} \\ -\frac{779024}{2949} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{82b} = \begin{bmatrix} \frac{129290}{2389} \\ \frac{311664}{2389} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

Resumiendo para el primer caso se supone el centro instantáneo secundario  $O_{62}$  como conocido, obteniendo así los resultados dados por (3.92) y (3.93), por otra parte se supone el centro instantáneo  $O_{72}$  como conocido y se obtienen los resultados (3.122) y (3.123), al comparar los resultados obtenidos en los dos casos para el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{82}$  se observa que la única respuesta coincidente para los dos casos es:

$$\vec{r}_{82a} = \begin{bmatrix} \frac{1286974}{2949} \\ -\frac{779024}{2949} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 436.4103 \\ -264.1654 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se tiene que el tornillo infinitesimal asociado al centro instantáneo secundario  $O_{82}$  está dado por

$${}^8\$^2_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{779024}{2949} \\ -\frac{1286974}{2949} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -264.1654 \\ -436.4103 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

Así el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{62}$  está dado por

$$\vec{r}_{62} = \begin{bmatrix} \frac{33939341}{408398} \\ \frac{39566305}{204199} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83.1035 \\ 193.7634 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además el tornillo infinitesimal asociado al centro instantáneo secundario  $O_{62}$  es igual a

$${}^6\mathbb{S}_O^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{39566305}{204199} \\ -\frac{33939341}{408398} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 193.7634 \\ -83.1035 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

Finalmente a partir de este resultado, junto con los centros instantáneos primarios y aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Klein se pueden determinar los restantes centros instantáneos secundarios uno a uno siguiendo el procedimiento llevado a cabo para determinar los centros instantáneos secundarios  $O_{31}$  y  $O_{42}$  vea las ecuaciones (3.52) -(3.63). Por lo tanto los vectores de posición correspondientes a cada uno de los centros instantáneos secundarios están dados por

$$\begin{aligned} \vec{r}_{72} &= \begin{bmatrix} \frac{315780710}{1599991} \\ \frac{460147800}{1599991} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{64} = \begin{bmatrix} \frac{144519259}{897343} \\ \frac{118698915}{897343} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{84} = \begin{bmatrix} \frac{72796180}{206947} \\ -\frac{11685360}{206947} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{73} = \begin{bmatrix} -\frac{41572265}{133901} \\ -\frac{16799580}{133901} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{r}_{83} &= \begin{bmatrix} \frac{68378}{8695} \\ 260 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{76} = \begin{bmatrix} -\frac{112144664}{850397} \\ \frac{14647860}{850397} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{71} = \begin{bmatrix} \frac{5684052780}{11857451} \\ \frac{8282660400}{11857451} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{81} = \begin{bmatrix} -\frac{347482980}{1624111} \\ \frac{210336480}{1624111} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{r}_{75} &= \begin{bmatrix} -\frac{9105880}{26227} \\ -\frac{3854865}{104908} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{51} = \begin{bmatrix} \frac{62723700}{3852029} \\ \frac{1103937120}{3852029} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{53} = \begin{bmatrix} -\frac{99285}{241} \\ \frac{86570}{723} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{54} = \begin{bmatrix} \frac{56976220}{511177} \\ \frac{61329840}{511177} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{r}_{61} &= \begin{bmatrix} \frac{3665448828}{27164597} \\ \frac{8546321880}{27164597} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{64} = \begin{bmatrix} \frac{144519259}{897343} \\ \frac{118698915}{897343} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Además se tiene que los tornillos infinitesimales asociados a los centros instantáneos secundarios están dados por

$${}^7\$_O^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{460147800}{1599991} \\ -\frac{315780710}{1599991} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^6\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{118698915}{897343} \\ -\frac{144519259}{897343} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^8\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{11685360}{206947} \\ -\frac{72796180}{206947} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^7\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{16799580}{133901} \\ \frac{41572265}{133901} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^8\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 260 \\ -\frac{68378}{8695} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^7\$_O^6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{14647860}{850397} \\ \frac{112144664}{850397} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^7\$_O^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{8282660400}{11857451} \\ -\frac{5684052780}{11857451} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^8\$_O^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{210336480}{1624111} \\ \frac{347482980}{1624111} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^7\$_O^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{3854865}{104908} \\ \frac{9105880}{26227} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^5\$_O^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1103937120}{3852029} \\ -\frac{62723700}{3852029} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^5\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{86570}{723} \\ \frac{99285}{241} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^5\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{61329840}{511177} \\ -\frac{56976220}{511177} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^6\$_O^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{8546321880}{27164597} \\ -\frac{3665448828}{27164597} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^6\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{118698915}{897343} \\ -\frac{144519259}{897343} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los valores determinados para los vectores de posición correspondientes a los centros instantáneos secundarios se muestran en la Figura 3.6, donde se puede observar que los tres centros instantáneos asociados a los tres movimientos relativos,  $i\$^k$ ,  $i\$^j$  y  $j\$^k$  entre tres eslabones arbitrarios en cada uno de los casos yacen sobre una línea recta de acuerdo a lo establecido por el teorema de Aronhold- Kennedy.

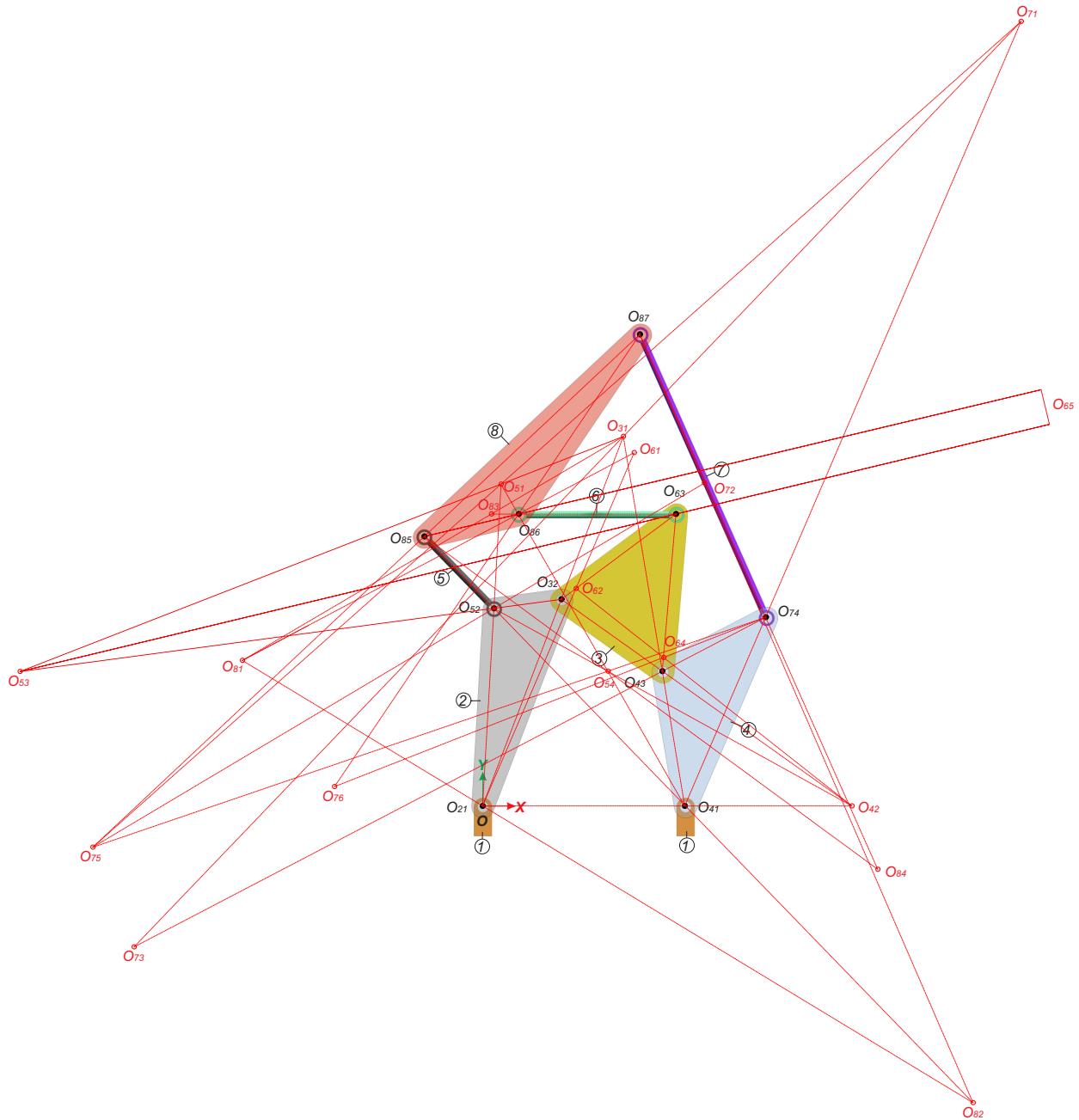


Figura 3.6: Mecanismo de ocho barras “single flyer” asociado a la subálgebra de movimientos planos

### 3.3.3. Verificación de los resultados

Los resultados obtenidos para los vectores de posición de los centros instantáneos secundarios se comprobaron mediante la realización del análisis de velocidad del mecanismo para una velocidad angular de magnitud arbitraria de  $5 \text{ rad/s}$  en sentido antihorario del eslabón dos, seleccionado como eslabón motriz, y, a partir de los resultados, determinando los estados de velocidad entre los diferentes eslabones del mecanismo y finalmente el ISA correspondiente para cada movimiento relativo, este proceso se llevó a cabo mediante un programa implementado en Maple<sup>©</sup>.

Finalmente los resultados del análisis de velocidad fueron verificados satisfactoriamente mediante el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>. Los resultados de la simulación se muestran en las Figuras (3.7) - (3.11); sin embargo, por razones de espacio sólo se seleccionan los centros instantáneos secundarios  $O_{21}$ ,  $O_{82}$  y  $O_{62}$ . Es importante reconocer que puesto que la posición relativa de los eslabones cambia durante el tiempo de la simulación, los únicos resultados importantes son los iniciales; es decir aquellos que se obtienen para  $t = 0$ .

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^1\$^2_O$ , debe recordarse que<sup>6</sup>

$${}^1\vec{V}_O^2 = {}_1\omega_2 \begin{bmatrix} {}^1\vec{s}^2 \\ {}^1\vec{s}_O^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\vec{\omega}^2 \\ {}^1\vec{v}_O^2 \end{bmatrix} = {}_1\omega_2 {}^1\$^2_O = -5 \text{ rad/s}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \text{ rad/s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde  ${}^1\$^2_O$  se obtiene a partir de los datos del mecanismo.

La Figura 3.7 obtenida a partir de la simulación realizada en Adams<sup>©</sup> corrobora las componentes de la velocidad angular  ${}_1\omega_2$ .

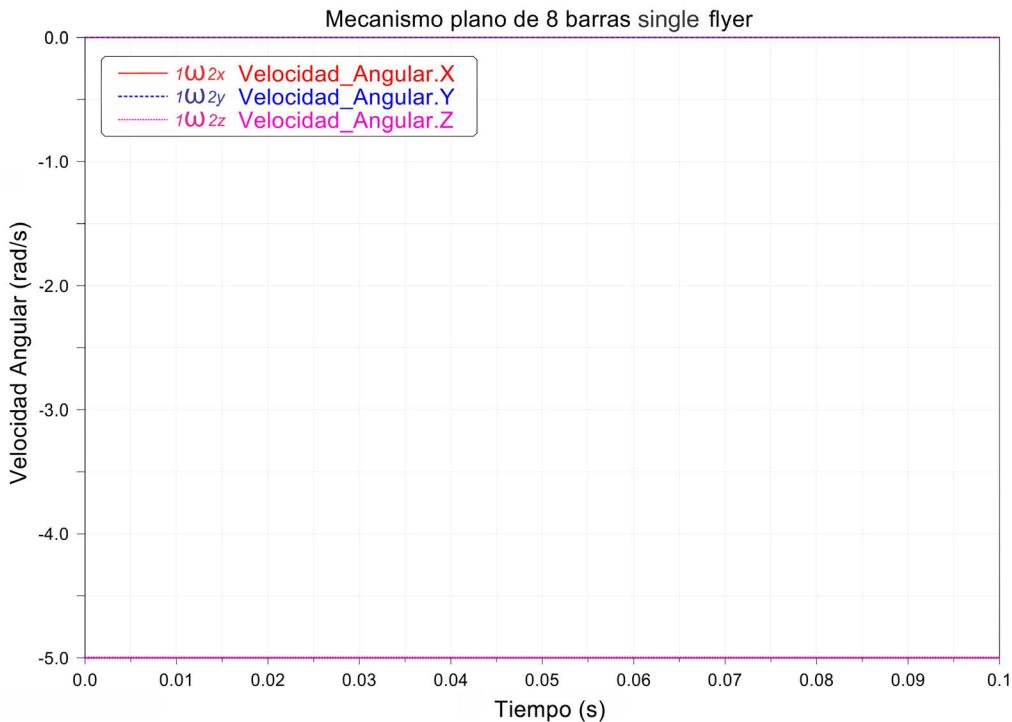


Figura 3.7: Velocidad angular relativa del eslabón dos respecto del eslabón uno.

<sup>6</sup>Para la verificación de los centros instantáneos secundarios se empleó un programa Maple<sup>©</sup> que determina los estados de velocidad entre los diferentes eslabones del mecanismo. Para facilitar su empleo, los estados de velocidad de dos eslabones arbitrarios se denotan  ${}^i\vec{V}_O^j$  donde  $i < j$ , excepto para el eslabón que vuelve a conectar la cadena cerrada con el eslabón incial. Debe advertirse que esta notación va en contra de la notación usual de centros instantáneos de mecanismos planos.

Para verificar los resultados correspondientes al centro instantáneo secundario  $O_{28}$ , debe recordarse que

$${}^2\vec{V}_O^8 = {}^2\omega_8 \begin{bmatrix} {}^2\hat{s}_O^8 \\ {}^2\vec{s}_O^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2\vec{\omega}_O^8 \\ {}^2\vec{v}_O^8 \end{bmatrix} = {}^2\omega_8 {}^8\$O^2 = \frac{3981150}{2420341} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{779024}{2949} \\ -\frac{1286974}{2949} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\vec{V}_O^8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3981150}{2420341} \text{ rad/s} \\ -\frac{1051682400}{2420341} \text{ u.l./s} \\ -\frac{1737414900}{2420341} \text{ u.l./s} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.6448 \text{ rad/s} \\ -434.5182 \text{ u.l./s} \\ -717.8388 \text{ u.l./s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde la magnitud de la velocidad angular  ${}^2\omega_8$  y  ${}^8\$O^2$  se obtienen mediante el programa Maple<sup>©</sup>.

De la simulación realizada en Adams<sup>©</sup> vea Figura 3.8, se encontró que

$${}^2\vec{\omega}^8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.6449 \text{ rad/s} \end{bmatrix} = 1.6449 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

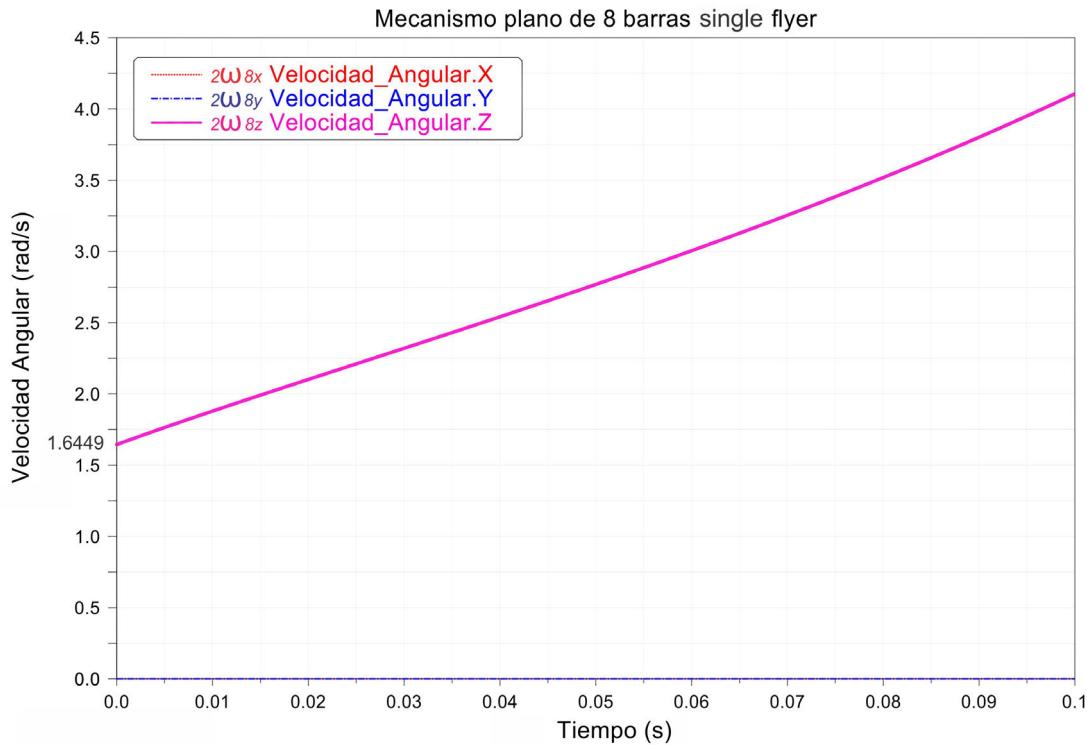


Figura 3.8: Velocidad angular relativa del eslabón dos respecto del eslabón ocho.

Con el resultado de la magnitud de la velocidad angular  ${}_2\omega_8$  se tiene que

$${}^2\vec{v}_O^8 = {}_2\omega_8 {}^2\vec{s}_O^8 = \frac{3981150}{2420341} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} -\frac{779024}{2949} \\ -\frac{1286974}{2949} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1051682400}{2420341} \text{ u.l/s} \\ -\frac{1737414900}{2420341} \text{ u.l/s} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -434.5182 \text{ u.l/s} \\ -717.8388 \text{ u.l/s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la simulación realizada en Adams<sup>©</sup> vea Figura 3.9, se encontró que

$${}^2\vec{v}^8 = \begin{bmatrix} -434.5183 \text{ u.l/s} \\ -717.8389 \text{ u.l/s} \\ 0 \end{bmatrix} = 1.6449 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} -\frac{779024}{2949} \\ -\frac{1286974}{2949} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -264.1654 \\ -436.4103 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se corrobora que las componentes de la velocidad translacional,<sup>7</sup>  ${}^2\vec{v}^8$  corresponden a las indicadas en la ecuación (3.109)

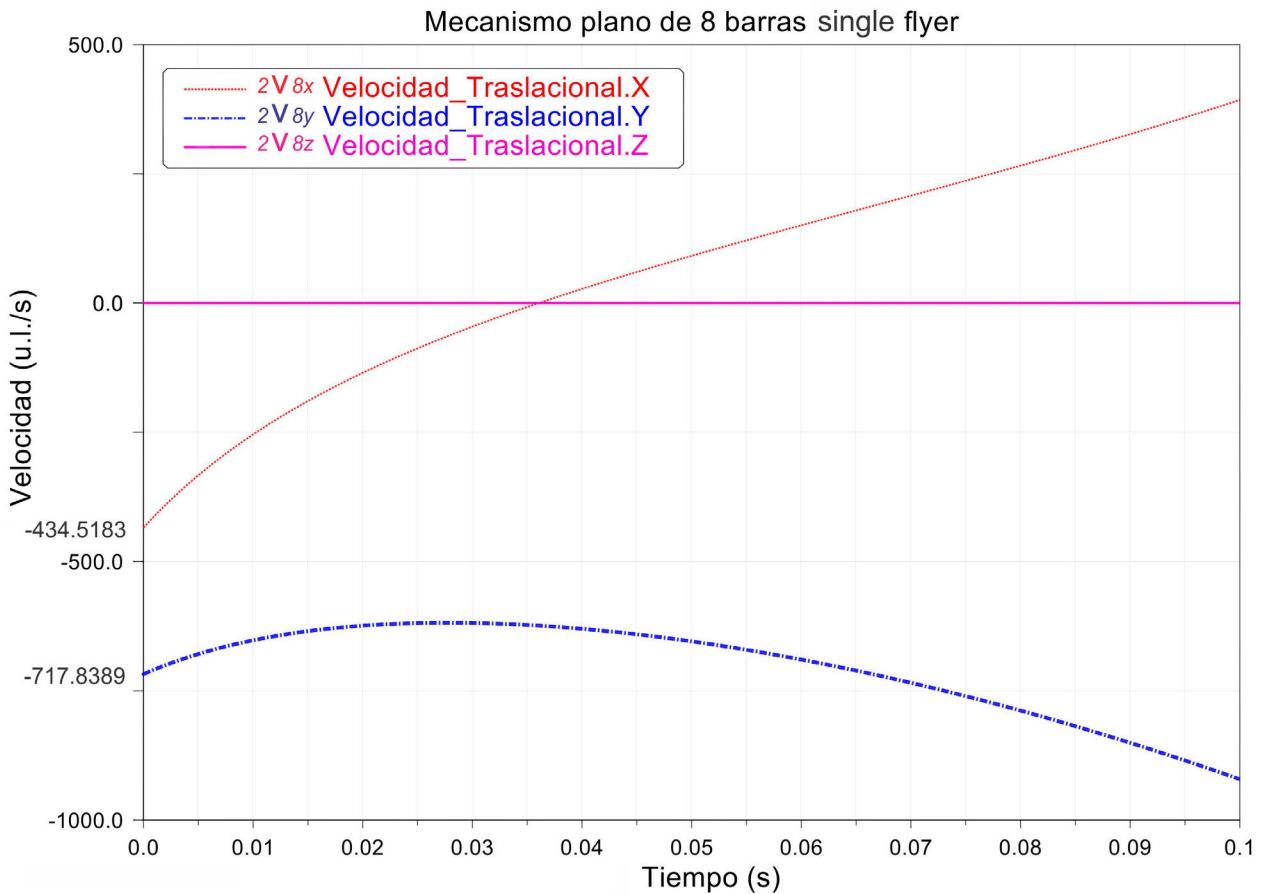


Figura 3.9: Velocidad translacional del punto  $O_8$  respecto del punto  $O_2$ .

<sup>7</sup>El título correcto de la Figura 3.9 debe ser velocidad translacional del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón ocho respecto a un sistema de referencia sujeto a traslación con la velocidad del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón dos; sin embargo por razones de espacio, se usa el título mostrado

Para verificar los resultados correspondientes al centro instantáneo secundario  $O_{62}$ , debe recordarse que

$${}^2\vec{V}_O^6 = {}^2\omega_6 \begin{bmatrix} {}^2\hat{s}_6 \\ {}^2\bar{s}_O^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2\bar{\omega}_6 \\ {}^2\bar{v}_O^6 \end{bmatrix} = {}^2\omega_6 {}^6\$O^2 = \frac{220534920}{16942387} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{39566305}{204199} \\ -\frac{33939341}{408398} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\vec{V}_O^6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{220534920}{16942387} \text{ rad/s} \\ \frac{42731609400}{16942387} \text{ u.l/s} \\ -\frac{426214980}{394009} \text{ u.l/s} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 13.01675614 \\ 2522.171722 \\ -1081.739199 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde la magnitud de la velocidad angular  ${}^2\omega_6$  y  ${}^6\$O^2$  se obtienen mediante el programa Maple<sup>©</sup>.

De la simulación realizada en Adams<sup>©</sup> vea Figura 3.10, se encontró que

$${}^2\bar{\omega}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.0168 \text{ rad/s} \end{bmatrix} = 13.0168 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

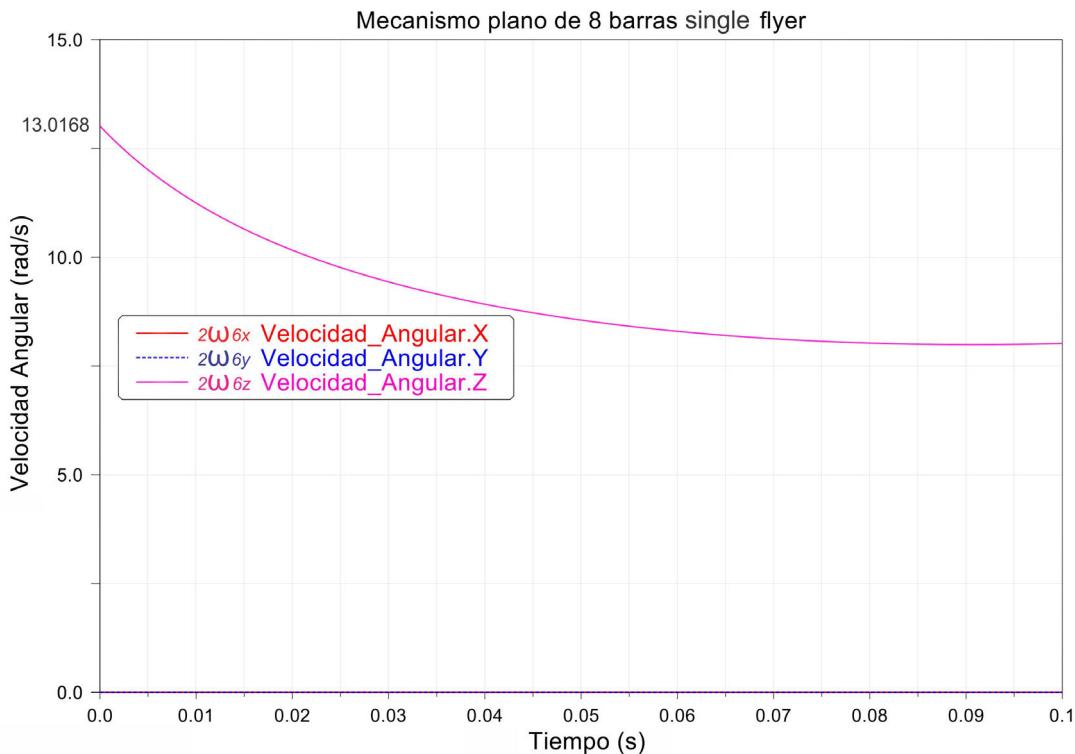


Figura 3.10: Velocidad angular relativa del eslabón dos respecto del eslabón seis.

Con el resultado de la magnitud de la velocidad angular  ${}_2\omega_6$  se tiene que

$${}^2\vec{v}_O^6 = {}_2\omega_6 {}^2\vec{s}_O^6 = \frac{220534920}{16942387} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} \frac{39566305}{204199} \\ -\frac{33939341}{408398} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{42731609400}{16942387} \text{ u.l/s} \\ -\frac{426214980}{394009} \text{ u.l/s} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 193.7634 \text{ u.l/s} \\ -83.1035 \text{ u.l/s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la simulación realizada en Adams<sup>©</sup> vea Figura 3.11, se encontró que

$${}^2\vec{v}_O^6 = \begin{bmatrix} 2522.1717 \text{ u.l/s} \\ -1081.7392 \text{ u.l/s} \\ 0 \end{bmatrix} = 13.01675 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} \frac{39566305}{204199} \\ -\frac{33939341}{408398} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 193.7634 \\ -83.1035 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se corrobora que las componentes de la velocidad translacional<sup>8</sup>  ${}^2\vec{v}^8$  corresponden a las indicadas en la ecuación (3.110)

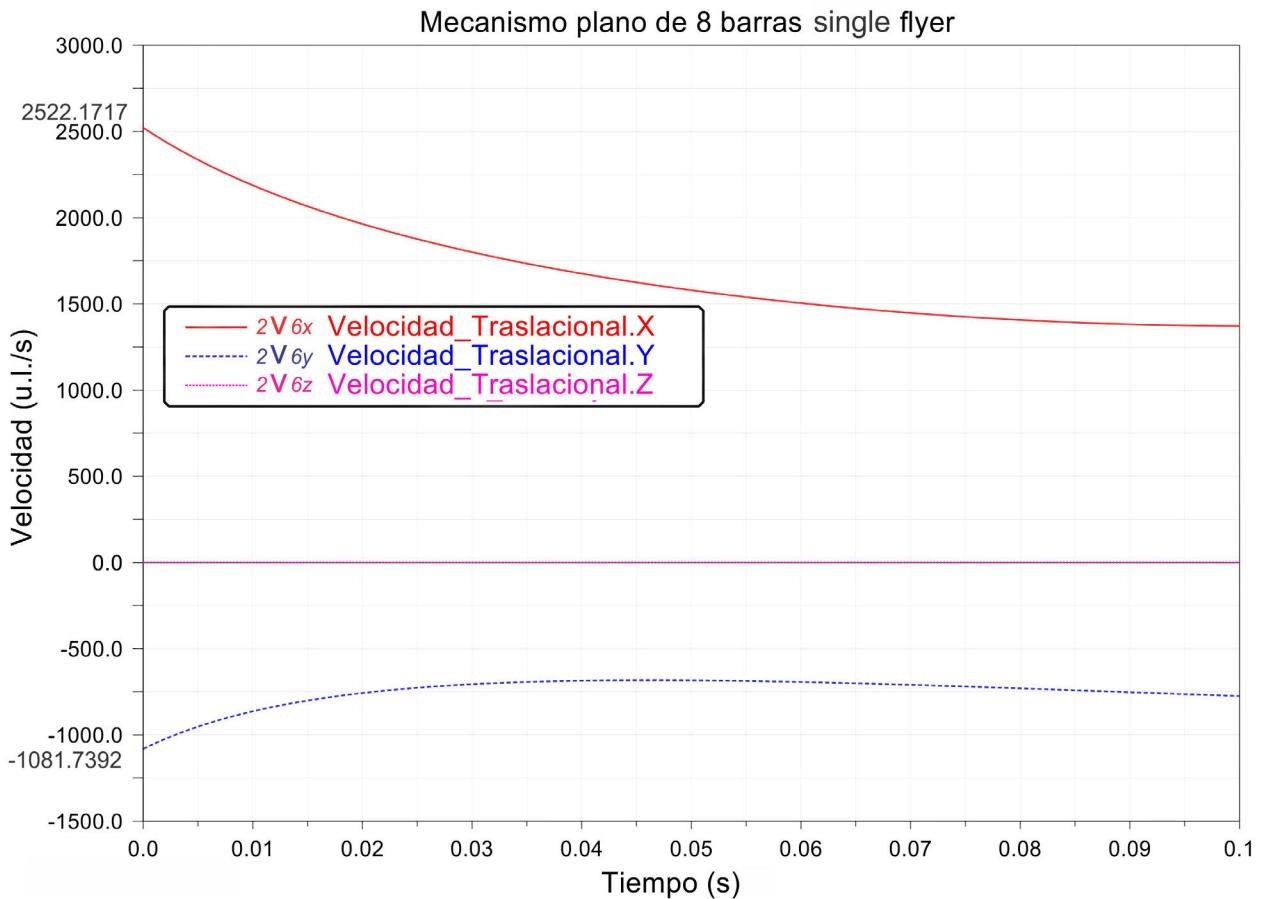


Figura 3.11: Velocidad translacional del punto  $O_6$  respecto del punto  $O_2$ .

<sup>8</sup>El título correcto de la Figura 3.11 debe ser velocidad translacional del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón seis respecto a un sistema de referencia sujeto a traslación con la velocidad del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón dos; sin embargo por razones de espacio, se usa el título mostrado

### 3.4. Mecanismo de ocho barras “double butterfly”

Considere el mecanismo plano mostrado en la Figura 3.12 conocido como mecanismo de 8 barras “double butterfly”. Este mecanismo fue propuesto por Klein [19] quien determinó los centros instantáneos secundarios indeterminados mediante un método de prueba y error. Foster y Pennock [11] determinaron los centros instantáneos secundarios indeterminados mediante un método gráfico. Di Gregorio [8] determinó los centros instantáneos secundarios indeterminados mediante un método analítico que combina las ecuaciones de clausura del mecanismo y la misma localización de los centros instantáneos. Este mecanismo está formado por ocho eslabones, cuatro de ellos ternarios y los restantes cuatro binarios y 10 pares de revoluta, el mecanismo es trivial y su movilidad de acuerdo al criterio de Grübler está dado por

$$F = 3(N - 1) - 2P_I = 3(8 - 1) - 2(10) = 21 - 20 = 1 \quad (3.126)$$

donde,  $N$  es el número de eslabones y  $P_I$  es el número de pares cinemáticos de la clase I las revolutas pertenecen a la clase I.

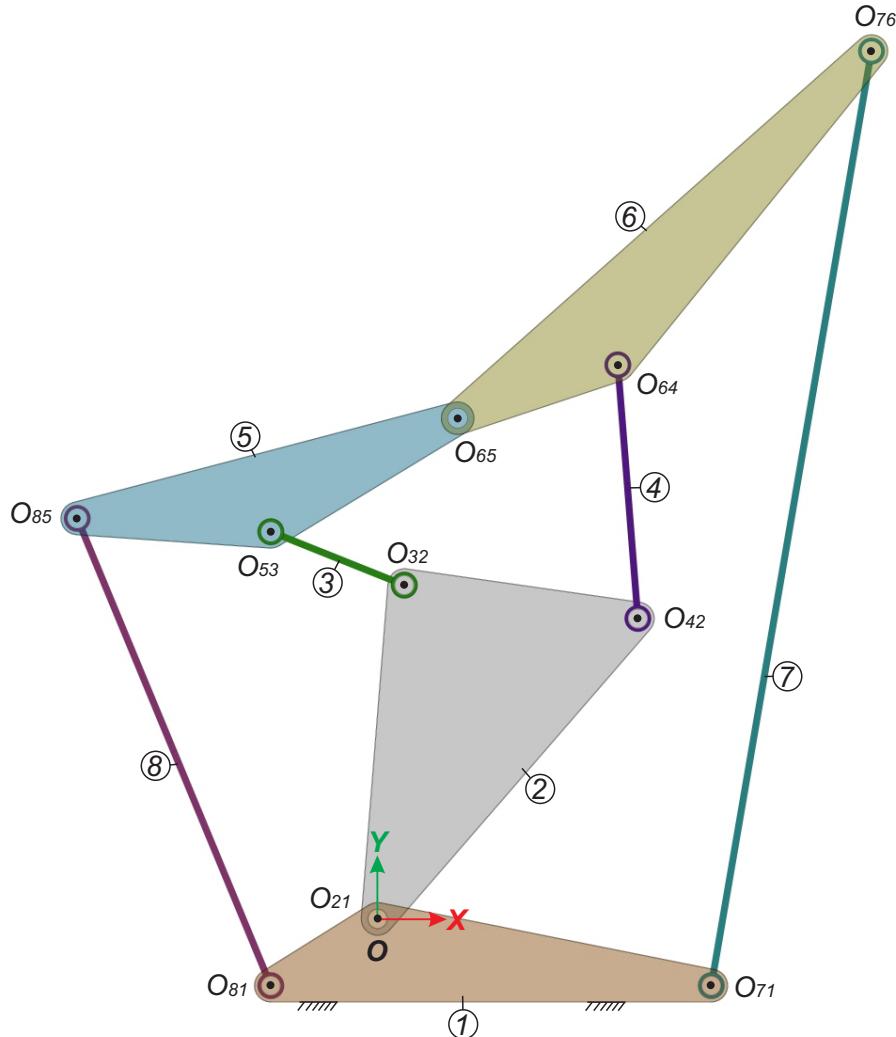


Figura 3.12: Mecanismo de ocho barras asociado a la subálgebra de movimientos planos indeterminados Los parámetros necesarios para la determinación de los tornillos asociados a los pares cinemáticos, con

respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , son:

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde  $\hat{u}$ , representa la dirección de los ejes de los pares de revoluta, los vectores de posición de puntos localizados a lo largo de los ejes de revoluta, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , están dados en términos de una unidad de longitud no especificada. Por lo tanto

$$\vec{r}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{81} = \begin{bmatrix} -80 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{71} = \begin{bmatrix} 250 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{32} = \begin{bmatrix} 20 \\ 250 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{53} = \begin{bmatrix} 80 \\ -290 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{85} = \begin{bmatrix} -225 \\ 300 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{65} = \begin{bmatrix} 60 \\ 375 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{42} = \begin{bmatrix} 195 \\ 225 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{64} = \begin{bmatrix} 180 \\ 415 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{76} = \begin{bmatrix} 370 \\ 650 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los tornillos infinitesimales asociados a los pares cinemáticos, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , están dados por:

$${}^2\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$^2_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 250 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^5\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 290 \\ 80 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^8\$^5_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 300 \\ 225 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^8\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -50 \\ 80 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^4\$^2_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 225 \\ -195 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^6\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 415 \\ -180 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^6\$^5_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 375 \\ -60 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^7\$^6_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 650 \\ -370 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^7\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -50 \\ -250 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 3.4.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los centros instantáneos secundarios

Con base a la numeración de los eslabones mostrada en la Figura 3.12 los centros instantáneos primarios; es decir, aquellos que se pueden determinar mediante la examinación del mecanismo son:

$$O_{21}, \quad O_{32}, \quad O_{53}, \quad O_{85}, \quad O_{81}, \quad O_{42}, \quad O_{64}, \quad O_{65}, \quad O_{76}, \quad O_{71}$$

El arreglo diagonal de los centros instantáneos del mecanismo, donde los centros primarios se indican con el número -1 y los centros secundarios se indican con el número -2 se muestran en la Tabla 3.5

Tabla 3.5: Centros instantáneos de tornillos asociados a mecanismos planos de ocho barras

$$\begin{array}{cccccccc}
 O_{21}(-1) & O_{31}(-2) & O_{41}(-2) & O_{51}(-2) & O_{61}(-2) & O_{71}(-1) & O_{81}(-1) \\
 O_{32}(-1) & O_{42}(-1) & O_{52}(-2) & O_{62}(-2) & O_{72}(-2) & O_{82}(-2) \\
 O_{43}(-2) & O_{53}(-1) & O_{63}(-2) & O_{73}(-2) & O_{83}(-2) \\
 O_{54}(-2) & O_{64}(-1) & O_{74}(-2) & O_{84}(-2) \\
 O_{65}(-1) & O_{75}(-2) & O_{85}(-1) \\
 O_{76}(-1) & O_{86}(-2) \\
 O_{87}(-2)
 \end{array}$$

Este mecanismo es completamente indeterminado pues ningún eslabón secundario puede encontrarse por la aplicación directa del teorema de Aronhold-Kennedy.

### 3.4.2. Obtención del sistema de ecuaciones y su solución

El objetivo de este análisis es determinar los tornillos infinitesimales asociados a los movimientos relativos de los eslabones tres, cuatro, cinco y seis respecto del eslabón uno, de los eslabones cinco, seis, siete y ocho respecto del eslabón dos, de los eslabones cuatro, seis, siete y ocho respecto del eslabón tres, de los eslabones cinco, siete y ocho respecto del eslabón cuatro, del eslabón siete respecto del eslabón cinco, del eslabón ocho respecto del eslabón seis y del eslabón ocho respecto del eslabón siete. Por lo tanto la Tabla 3.6 muestra todos los centro instantáneos secundarios que se pueden escribir en términos de dos centros instantáneos primarios empleando una variable  $\lambda$ . como

Tabla 3.6: Centros instantáneos secundarios cuyo vector de posición puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de posición de dos centros instantáneos primarios

$O_{31}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{21}$	$O_{32}$
$O_{41}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{21}$	$O_{42}$
$O_{51}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{81}$	$O_{85}$
$O_{61}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{71}$	$O_{76}$
$O_{52}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{32}$	$O_{53}$
$O_{62}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{42}$	$O_{64}$
$O_{72}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{21}$	$O_{71}$
$O_{82}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{21}$	$O_{81}$
$O_{43}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{32}$	$O_{42}$
$O_{63}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{53}$	$O_{63}$
$O_{83}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{53}$	$O_{85}$
$O_{54}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{64}$	$O_{65}$
$O_{74}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{64}$	$O_{76}$
$O_{75}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{65}$	$O_{76}$
$O_{86}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{65}$	$O_{85}$
$O_{87}$	se	encuentra	en	la	línea	determinada	por	$O_{71}$	$O_{81}$

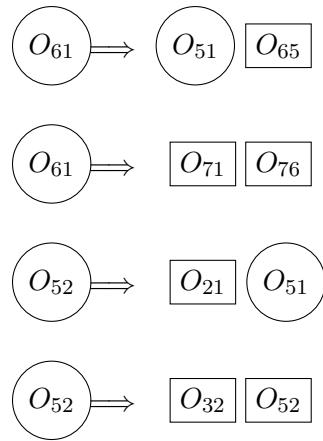
De la Tabla 3.6 se selecciona el centro instantáneo secundario  $O_{51}$  que puede escribirse como

$$\vec{r}_{51} = \vec{r}_{81}(1 - \lambda) + \vec{r}_{85}\lambda \quad (3.127)$$

De esta manera se tiene que el arreglo diagonal de los centros instantáneos sería

$$\begin{array}{cccccccc}
 O_{21}(-1) & O_{31}(-2) & O_{41}(-2) & O_{51}(0) & O_{61}(-2) & O_{71}(-1) & O_{81}(-1) \\
 O_{32}(-1) & O_{42}(-1) & O_{52}(-2) & O_{62}(-2) & O_{72}(-2) & O_{82}(-2) \\
 O_{43}(-2) & O_{53}(-1) & O_{63}(-2) & O_{73}(-2) & O_{83}(-2) \\
 O_{54}(-2) & O_{64}(-1) & O_{74}(-2) & O_{84}(-2) \\
 O_{65}(-1) & O_{75}(-2) & O_{85}(-1) \\
 O_{76}(-1) & O_{86}(-2) \\
 O_{81}(-2)
 \end{array}$$

Por lo tanto mediante la aplicación del teorema de Aronhold-Kennedy pueden determinarse los siguientes centros instantáneos<sup>9</sup>  $O_{61}$ ,  $O_{52}$



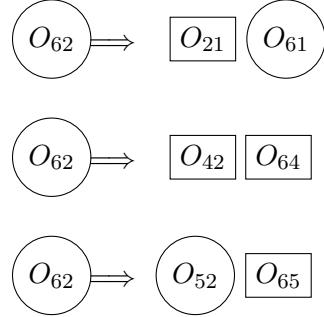
Después de identificar los centros instantáneos secundarios  $O_{61}$  y  $O_{52}$  que se van a marcar con el número 1, el arreglo diagonal de los centros instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc}
 O_{21}(-1) & O_{31}(1) & O_{41}(-2) & O_{51}(0) & O_{61}(1) & O_{71}(-1) & O_{81}(-1) \\
 O_{32}(-1) & O_{42}(-1) & O_{52}(1) & O_{62}(-2) & O_{72}(-2) & O_{82}(-2) \\
 O_{43}(-2) & O_{53}(-1) & O_{63}(-2) & O_{73}(-2) & O_{83}(-2) \\
 O_{54}(-2) & O_{64}(-1) & O_{74}(-2) & O_{84}(-2) \\
 O_{65}(-1) & O_{75}(1) & O_{85}(-1) \\
 O_{76}(-1) & O_{86}(-2) \\
 O_{81}(-2)
 \end{array}$$

El siguiente paso consiste en hacer uso de todos los centros instantáneos secundarios que se han obtenido hasta ahora, y de esta forma encontrar que centros instantáneos adicionales se pueden obtener<sup>10</sup>. Por lo tanto

<sup>9</sup>Sólo se indican los centros instantáneos requeridos, sin embargo en el arreglo diagonal se indican todos los centros instantáneos encontrados.

<sup>10</sup>Sólo se indican los centros instantáneos requeridos, sin embargo en el arreglo diagonal se indican todos los centros instantáneos encontrados.



Después de identificar el centro instantáneo sobredeterminado  $O_{62}$  que se va a marcar con el número 2, el arreglo diagonal de los centros instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc} O_{21}(-1) & O_{31}(1) & O_{41}(2) & O_{51}(0) & O_{61}(1) & O_{71}(-1) & O_{81}(-1) \\ O_{32}(-1) & O_{42}(-1) & O_{52}(1) & O_{62}(2) & O_{72}(2) & O_{82}(2) & \\ O_{43}(-2) & O_{53}(-1) & O_{63}(2) & O_{73}(2) & O_{83}(2) & & \\ O_{54}(2) & O_{64}(-1) & O_{74}(-2) & O_{84}(-2) & & & \\ O_{65}(-1) & O_{75}(1) & O_{85}(-1) & & & & \\ O_{76}(-1) & O_{86}(2) & & & & & \\ O_{81}(2) & & & & & & \end{array}$$

De la ecuación (3.127) el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{51}$  está dado por

$$\vec{r}_{51} = \begin{bmatrix} -80 - 145\lambda \\ -50 + 350\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

A continuación se escriben los vectores de posición asociados a los centros instantáneos secundarios involucrados

$$\vec{r}_{61} = \begin{bmatrix} x_{61} \\ y_{61} \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{r}_{52} = \begin{bmatrix} x_{52} \\ y_{52} \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{r}_{62} = \begin{bmatrix} x_{62} \\ y_{62} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones necesarias se obtienen aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Klein de una manera sistemática vea las ecuaciones (3.52)-(3.59)

$$E61_7 = \left[ 0, \frac{1810}{7} + \frac{6}{35} y_{61} - x_{61}, 0, 0 \right] \quad (3.129)$$

$$E61_5 = \left[ 0, -\frac{1}{5} \frac{70\lambda x_{61} + 29\lambda y_{61} - 15075\lambda + 15x_{61} - 57y_{61} + 20475}{(3+14\lambda)}, 0, 0 \right] \quad (3.130)$$

$$E52_3 = \left[ 0, 645 - \frac{5}{2} y_{52} - x_{52}, 0, 0 \right] \quad (3.131)$$

$$E52_1 = \left[ 0, -\frac{1}{10} \frac{70\lambda x_{52} + 29\lambda y_{52} - 60x_{52} - 45y_{52}}{7\lambda - 6}, 0, 0 \right] \quad (3.132)$$

$$E62_4 = \left[ 0, \frac{8085}{38} - \frac{3}{38} y_{62} - x_{62}, 0, 0 \right] \quad (3.133)$$

$$E62_1 = \left[ 0, \frac{x_{61}y_{62} - x_{62}y_{61}}{y_{61}}, 0, 0 \right] \quad (3.134)$$

$$E62_5 = \left[ 0, \frac{x_{52}y_{62} - x_{62}y_{52} - 375x_{52} + 375x_{62} + 60y_{52} - 60y_{62}}{y_{52} - 375}, 0, 0 \right] \quad (3.135)$$

De las ecuaciones (3.129) - (3.135) se forma el conjunto final de ecuaciones

$$0 = \frac{1810}{7} + \frac{6}{35}y_{61} - x_{61} \quad (3.136)$$

$$0 = -\frac{1}{5} \frac{70\lambda x_{61} + 29\lambda y_{61} - 15075\lambda + 15x_{61} - 57y_{61} + 20475}{(3+14\lambda)} \quad (3.137)$$

$$0 = 645 - \frac{5}{2}y_{52} - x_{52} \quad (3.138)$$

$$0 = -\frac{1}{10} \frac{70\lambda x_{52} + 29\lambda y_{52} - 60x_{52} - 45y_{52}}{7\lambda - 6} \quad (3.139)$$

$$0 = \frac{8085}{38} - \frac{3}{38}y_{62} - x_{62} \quad (3.140)$$

$$0 = \frac{x_{61}y_{62} - x_{62}y_{61}}{y_{61}} \quad (3.141)$$

$$0 = \frac{x_{52}y_{62} - x_{62}y_{52} - 375x_{52} + 375x_{62} + 60y_{52} - 60y_{62}}{y_{52} - 375} \quad (3.142)$$

De una manera sistemática se despejan las coordenadas  $y_{ij}$  de cada una de las ecuaciones lineales para expresarlas en términos de las coordenadas  $x_{ij}$ . De esa manera, se despejan las coordenadas  $y_{61}$ ,  $y_{52}$  y  $y_{62}$  de las ecuaciones (3.136), (3.138) y (3.140) respectivamente

$$y_{61} = -\frac{4525}{3} + \frac{35x_{61}}{6} \quad (3.143)$$

$$y_{52} = 258 - \frac{2}{5}x_{52} \quad (3.144)$$

$$y_{62} = 2695 - \frac{38x_{62}}{3} \quad (3.145)$$

Sustituyendo los resultados recién encontrados en las ecuaciones (3.137), (3.139), (3.141) y (3.142) se tiene

$$0 = -\frac{1}{6} \frac{287\lambda x_{61} - 70580\lambda - 381x_{61} + 127740}{3+14\lambda} \quad (3.146)$$

$$0 = -\frac{1}{25} \frac{146\lambda x_{52} + 18705\lambda - 105x_{52} - 29025}{7\lambda - 6} \quad (3.147)$$

$$0 = -1/5 \frac{111x_{61}x_{62} - 16170x_{61} - 9050x_{62}}{-1810 + 7x_{61}} \quad (3.148)$$

$$0 = \frac{1}{3} \frac{184x_{52}x_{62} - 34440x_{52} - 13155x_{62} + 2193300}{585 + 2x_{52}} \quad (3.149)$$

De una manera sistemática se despejan y sustituyen las coordenadas  $x_{ij}$  de cada una de las ecuaciones (3.146) - (3.149)

$$x_{62} = 60 \frac{574x_{52} - 36555}{184x_{52} - 13155} \quad (3.150)$$

$$x_{52} = \frac{1024665x_{61} - 661645500}{28252x_{61} - 10389400} \quad (3.151)$$

$$x_{61} = 3620 \frac{214316\lambda - 273315}{-2473611 + 1808146\lambda} \quad (3.152)$$

$$0 = \frac{-60(264007001\lambda^2 - 483296570\lambda + 169395681)}{(-2473611 + 1808146\lambda)(3 + 14\lambda)} \quad (3.153)$$

Se obtiene una ecuación cuadrática en  $\lambda$ , resolviendo la ecuación se obtienen dos soluciones

$$\lambda_a = \frac{1861491}{3940403}, \quad \lambda_b = \frac{91}{67} \quad (3.154)$$

Los resultados recién obtenidos se sustituyen en la ecuación (3.128)

$$\vec{r}_{51a} = \begin{bmatrix} -\frac{616674480}{3940403} \\ \frac{530599050}{3940403} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{51b} = \begin{bmatrix} -\frac{1880}{67} \\ -\frac{11750}{67} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

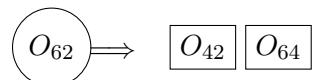
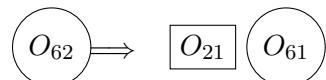
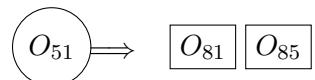
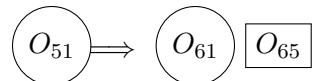
El procedimiento debe repetirse para otro centro instantáneo secundario. De la Tabla 3.6 se selecciona el centro instantáneo secundario  $O_{61}$  que puede escribirse como

$$\vec{r}_{61} = \vec{r}_{71}(1 - \lambda^*) + \vec{r}_{76}\lambda^* \quad (3.156)$$

De esta manera se tiene que el arreglo diagonal de los centros instantáneos sería

$$\begin{array}{cccccccc} O_{21}(-1) & O_{31}(-2) & O_{41}(-2) & O_{51}(-2) & O_{61}(0) & O_{71}(-1) & O_{81}(-1) \\ O_{32}(-1) & O_{42}(-1) & O_{52}(-2) & O_{62}(-2) & O_{72}(-2) & O_{82}(-2) & \\ O_{43}(-2) & O_{53}(-1) & O_{63}(-2) & O_{73}(-2) & O_{83}(-2) & & \\ O_{54}(-2) & O_{64}(-1) & O_{74}(-2) & O_{84}(-2) & & & \\ O_{65}(-1) & O_{75}(-2) & O_{85}(-1) & & & & \\ O_{76}(-1) & O_{86}(-2) & & & & & \\ O_{81}(-2) & & & & & & \end{array}$$

Por lo tanto pueden determinarse los siguientes centros instantáneos<sup>11</sup>  $O_{51}$ ,  $O_{62}$



<sup>11</sup>Sólo se indican los centros instantáneos requeridos, sin embargo en el arreglo diagonal se indican todos los centros instantáneos encontrados.

Después de identificar los centros instantáneos secundarios  $O_{51}$  y  $O_{62}$  que se van a marcar con el número 1, el arreglo diagonal de los centros instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc} O_{21}(-1) & O_{31}(-2) & O_{41}(1) & O_{51}(1) & O_{61}(0) & O_{71}(-1) & O_{81}(-1) \\ O_{32}(-1) & O_{42}(-1) & O_{52}(-2) & O_{62}(1) & O_{72}(-2) & O_{82}(-2) \\ O_{43}(-2) & O_{53}(-1) & O_{63}(-2) & O_{73}(-2) & O_{83}(-2) \\ O_{54}(-2) & O_{64}(-1) & O_{74}(-2) & O_{84}(-2) \\ O_{65}(-1) & O_{75}(-2) & O_{85}(-1) \\ O_{76}(-1) & O_{86}(1) \\ O_{81}(-2) \end{array}$$

El siguiente paso consiste en hacer uso de todos los centros instantáneos secundarios que se han obtenido hasta ahora, y de esta forma encontrar que centros instantáneos adicionales se pueden obtener<sup>12</sup>. Por lo tanto

$$\begin{array}{c} O_{52} \Rightarrow O_{21} O_{51} \\ O_{52} \Rightarrow O_{32} O_{53} \\ O_{52} \Rightarrow O_{62} O_{65} \end{array}$$

Después de identificar el centro instantáneo sobredeterminado  $O_{52}$  que se va a marcar con el número 2, el arreglo diagonal de los centros instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc} O_{21}(-1) & O_{31}(2) & O_{41}(1) & O_{51}(1) & O_{61}(0) & O_{71}(-1) & O_{81}(-1) \\ O_{32}(-1) & O_{42}(-1) & O_{52}(2) & O_{62}(1) & O_{72}(2) & O_{82}(2) \\ O_{43}(-2) & O_{53}(-1) & O_{63}(2) & O_{73}(-2) & O_{83}(-2) \\ O_{54}(2) & O_{64}(-1) & O_{74}(2) & O_{84}(2) \\ O_{65}(-1) & O_{75}(2) & O_{85}(-1) \\ O_{76}(-1) & O_{86}(1) \\ O_{81}(2) \end{array}$$

De la ecuación (3.156) el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{61}$  está dado por

$$\vec{r}_{61} = \begin{bmatrix} 250 + 120 \lambda^* \\ -50 + 700 \lambda^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

A continuación se escriben los vectores de posición asociados a los centros instantáneos secundarios involucrados

$$\vec{r}_{51} = \begin{bmatrix} x_{51} \\ y_{51} \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{r}_{62} = \begin{bmatrix} x_{62} \\ y_{62} \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{r}_{52} = \begin{bmatrix} x_{52} \\ y_{52} \\ 0 \end{bmatrix}$$

<sup>12</sup>Sólo se indican los centros instantáneos requeridos, sin embargo en el arreglo diagonal se indican todos los centros instantáneos encontrados.

Las ecuaciones necesarias se obtienen aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Klein de una manera sistemática vea las ecuaciones (3.52)-(3.59)

$$E51_8 = \left[ 0, -\frac{705}{7} - \frac{29}{70} y_{51} - x_{51}, 0, 0 \right] \quad (3.158)$$

$$E51_6 = \left[ 0, -\frac{1}{5} \frac{1140 x_{51} \lambda^* - 24 y_{51} \lambda^* - 55 x_{51} + 62 y_{51} + 600 \lambda^* - 19950}{-11 + 28 \lambda^*}, 0, 0 \right] \quad (3.159)$$

$$E62_4 = \left[ 0, \frac{8085}{38} - \frac{3}{38} y_{62} - x_{62}, 0, 0 \right] \quad (3.160)$$

$$E62_1 = \left[ 0, -\frac{1}{5} \frac{170 x_{62} \lambda^* - 12 y_{62} \lambda^* - 65 x_{62} + 37 y_{62}}{14 \lambda^* - 13}, 0, 0 \right] \quad (3.161)$$

$$E52_3 = \left[ 0, 645 - \frac{5}{2} y_{52} - x_{52}, 0, 0 \right] \quad (3.162)$$

$$E52_1 = \left[ 0, \frac{x_{51} y_{52} - x_{52} y_{51}}{y_{51}}, 0, 0 \right] \quad (3.163)$$

$$E52_6 = \left[ 0, -\frac{x_{52} y_{62} - x_{62} y_{52} - 375 x_{52} + 375 x_{62} + 60 y_{52} - 60 y_{62}}{y_{62} - 375}, 0, 0 \right] \quad (3.164)$$

De las ecuaciones (3.158) - (3.164) se forma el conjunto final de ecuaciones

$$0 = -\frac{705}{7} - \frac{29}{70} y_{51} - x_{51} \quad (3.165)$$

$$0 = -\frac{1}{5} \frac{1140 x_{51} \lambda^* - 24 y_{51} \lambda^* - 55 x_{51} + 62 y_{51} + 600 \lambda^* - 19950}{-11 + 28 \lambda^*} \quad (3.166)$$

$$0 = \frac{8085}{38} - \frac{3}{38} y_{62} - x_{62} \quad (3.167)$$

$$0 = -\frac{1}{5} \frac{170 x_{62} \lambda^* - 12 y_{62} \lambda^* - 65 x_{62} + 37 y_{62}}{14 \lambda^* - 13} \quad (3.168)$$

$$0 = 645 - \frac{5}{2} y_{52} - x_{52} \quad (3.169)$$

$$0 = \frac{x_{51} y_{52} - x_{52} y_{51}}{y_{51}} \quad (3.170)$$

$$0 = -\frac{x_{52} y_{62} - x_{62} y_{52} - 375 x_{52} + 375 x_{62} + 60 y_{52} - 60 y_{62}}{y_{62} - 375} \quad (3.171)$$

De una manera sistemática se despejan las coordenadas  $y_{ij}$  de cada una de las ecuaciones lineales para expresarlas en términos de las coordenadas  $x_{ij}$ . De esa manera, se despejan las coordenadas  $y_{51}$ ,  $y_{62}$  y  $y_{52}$  de las ecuaciones (3.165), (3.167) y (3.169) respectivamente

$$y_{51} = -\frac{7050}{29} - \frac{70 x_{51}}{29} \quad (3.172)$$

$$y_{62} = 2695 - \frac{38 x_{62}}{3} \quad (3.173)$$

$$y_{52} = 258 - \frac{2}{5} x_{52} \quad (3.174)$$

Sustituyendo los resultados recién encontrados en las ecuaciones (3.166), (3.168), (3.170) y (3.171) se tiene

$$0 = -\frac{1}{29} \frac{1148 x_{51} \lambda^* - 1187 x_{51} + 37320 \lambda^* - 203130}{-11 + 28 \lambda^*} \quad (3.175)$$

$$0 = -\frac{1}{15} \frac{666x_{62}\lambda^* - 1601x_{62} - 97020\lambda^* + 299145}{14\lambda^* - 13} \quad (3.176)$$

$$0 = -\frac{1}{25} \frac{146x_{51}x_{52} + 18705x_{51} + 17625x_{52}}{705 + 7x_{51}} \quad (3.177)$$

$$0 = -\frac{1}{10} \frac{184x_{52}x_{62} - 34440x_{52} - 13155x_{62} + 2193300}{-3480 + 19x_{62}} \quad (3.178)$$

De una manera sistemática se despejan y sustituyen las coordenadas  $x_{ij}$  de cada una de las ecuaciones (3.175) - (3.178)

$$x_{52} = \frac{13155x_{62} - 2193300}{184x_{62} - 34440} \quad (3.179)$$

$$x_{62} = 60 \frac{214316x_{51} + 8590425}{3091425 + 71498x_{51}} \quad (3.180)$$

$$x_{51} = -\frac{192637020\lambda^* + 442613805}{7232584\lambda^* + 3560330} \quad (3.181)$$

$$0 = -\frac{15}{2} \frac{112121232\lambda^{*2} - 3714353512\lambda_1 - 454775279}{(3616292\lambda^* + 1780165)(-11 + 28\lambda^*)} \quad (3.182)$$

Se obtiene una ecuación cuadrática en  $\lambda^*$ , resolviendo la ecuación se obtienen dos soluciones

$$\lambda_a^* = -\frac{3419363}{28030308}, \quad \lambda_b^* = \frac{133}{4} \quad (3.183)$$

Los resultados recién obtenidos se sustituyen en la ecuación (3.157)

$$\vec{r}_{61a} = \begin{bmatrix} \frac{898461460}{2335859} \\ \frac{5153313575}{7007577} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{61b} = \begin{bmatrix} -3620 \\ -22625 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.184)$$

Finalmente con el resultado anterior se obtienen los posibles valores para el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{51}$ . Por lo tanto

$$\vec{r}_{51a} = \begin{bmatrix} -\frac{616674480}{3940403} \\ \frac{530599050}{3940403} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{51b} = \begin{bmatrix} -\frac{1880}{67} \\ -\frac{11750}{67} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.185)$$

Resumiendo para el primer caso se asume el centro instantáneo secundario  $O_{51}$  como conocido, obteniendo así el resultado (3.155), por otra parte se asume el centro instantáneo  $O_{61}$  como conocido y se obtienen los resultados (3.184) y (3.185), al comparar los resultados obtenidos en los dos casos para el vector de posición asociado al centro instantáneo secundario  $O_{51}$  se observa que la única respuesta coincidente para los dos casos es:

$$\vec{r}_{51a} = \begin{bmatrix} -\frac{616674480}{3940403} \\ \frac{530599050}{3940403} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se tiene que el tornillo infinitesimal asociado al centro instantáneo secundario  $O_{51}$  está dado por

$${}^5\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{530599050}{3940403} \\ \frac{616674480}{3940403} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente a partir de este resultado, junto con los centros instantáneos primarios y aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Klein se pueden determinar los restantes centros instantáneos secundarios uno a uno siguiendo el procedimiento llevado a cabo para determinar los centros instantáneos secundarios  $O_{31}$  y  $O_{42}$  vea las ecuaciones (3.52) -(3.63). Por lo tanto los vectores de posición correspondientes a cada uno de los centros instantáneos secundarios están dados por

$$\vec{r}_{61} = \begin{bmatrix} \frac{898461460}{2335859} \\ \frac{5153313575}{7007577} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{62} = \begin{bmatrix} \frac{2695384380}{14580649} \\ \frac{5153313575}{14580649} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{52} = \begin{bmatrix} -\frac{616674480}{1100501} \\ \frac{530599050}{1100501} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{31} = \begin{bmatrix} \frac{52863440}{1223221} \\ \frac{660793000}{1223221} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{75} = \begin{bmatrix} -\frac{2027100510}{10530437} \\ \frac{1590188550}{10530437} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{41} = \begin{bmatrix} -\frac{115159785}{356071} \\ -\frac{132876675}{356071} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{72} = \begin{bmatrix} -\frac{34193630}{1074917} \\ \frac{6838726}{1074917} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{82} = \begin{bmatrix} \frac{49639760}{326137} \\ \frac{31024850}{326137} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{63} = \begin{bmatrix} \frac{1448067620}{290239} \\ \frac{977450545}{290239} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{73} = \begin{bmatrix} \frac{5947782410}{88544233} \\ \frac{41777847550}{88544233} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{83} = \begin{bmatrix} -\frac{43192400}{4307933} \\ \frac{1228511450}{4307933} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{54} = \begin{bmatrix} -\frac{54239025}{574438} \\ \frac{185845815}{574438} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{86} = \begin{bmatrix} \frac{208933300}{1088323} \\ \frac{445919525}{1088323} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{87} = \begin{bmatrix} -\frac{74039790}{498077} \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{43} = \begin{bmatrix} -\frac{47950495}{702931} \\ \frac{184591195}{702931} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{74} = \begin{bmatrix} -\frac{4539953870}{7974909} \\ -\frac{4081085450}{7974909} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{84} = \begin{bmatrix} \frac{65520025}{264426} \\ \frac{101851825}{264426} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además se tiene que los tornillos infinitesimales asociados a los centros instantáneos secundarios están dados por

$${}^6\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{5153313575}{7007577} \\ -\frac{898461460}{2335859} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^6\$^2_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{5153313575}{14580649} \\ -\frac{2695384380}{14580649} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^5\$^2_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{530599050}{1100501} \\ \frac{616674480}{1100501} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{660793000}{1223221} \\ -\frac{52863440}{1223221} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^7\$_O^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1590188550}{10530437} \\ \frac{2027100510}{10530437} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^4\$_O^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{132876675}{356071} \\ \frac{115159785}{356071} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^7\$_O^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{6838726}{1074917} \\ \frac{34193630}{1074917} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^8\$_O^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{31024850}{326137} \\ -\frac{49639760}{326137} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^6\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{977450545}{290239} \\ -\frac{1448067620}{290239} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^7\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{41777847550}{88544233} \\ -\frac{5947782410}{88544233} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^8\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1228511450}{4307933} \\ \frac{43192400}{4307933} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^5\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{185845815}{574438} \\ \frac{54239025}{574438} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^8\$_O^6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{445919525}{1088323} \\ -\frac{208933300}{1088323} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^8\$_O^7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -50 \\ \frac{74039790}{498077} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^4\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{184591195}{702931} \\ \frac{47950495}{702931} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^7\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{4081085450}{7974909} \\ \frac{4539953870}{7974909} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^8\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{101851825}{264426} \\ -\frac{65520025}{264426} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los valores determinados para los vectores de posición correspondientes a los centros instantáneos secundarios se muestran en la Figura 3.13, donde se puede observar que los tres centros instantáneos asociados a los tres movimientos relativos,  $i\$^k$ ,  $i\$^j$  y  $j\$^k$  entre tres eslabones arbitrarios en cada uno de los casos yacen sobre una línea recta de acuerdo a lo establecido por el teorema de Aronhold-Kennedy.

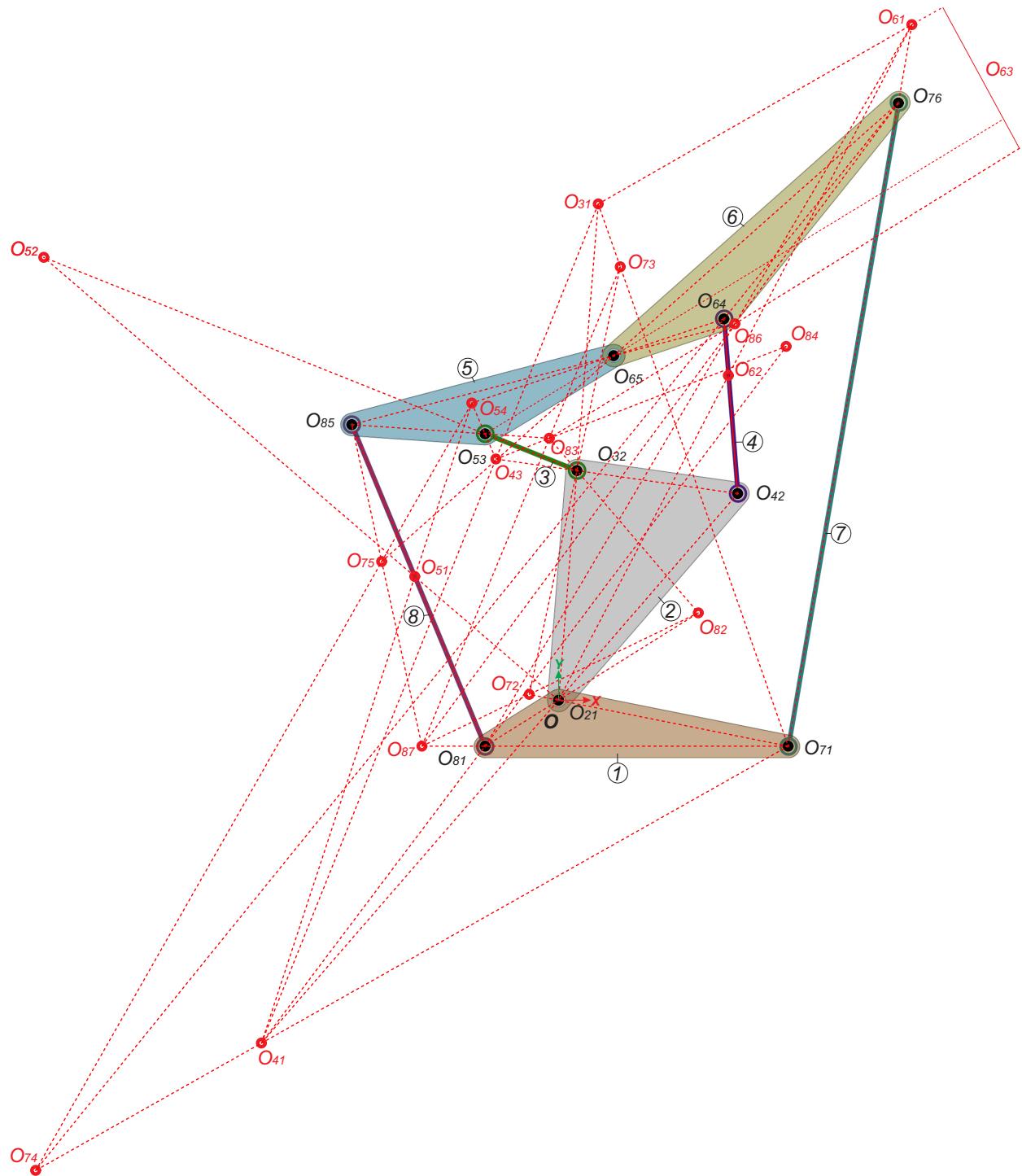


Figura 3.13: Mecanismo de ocho barras “double butterfly” asociado a la subálgebra de movimientos planos

### 3.4.3. Verificación de los resultados

Los resultados obtenidos para los vectores de posición de los centros instantáneos secundarios se comprobaron mediante la realización del análisis de velocidad del mecanismo para una velocidad angular de magnitud arbitraria de  $5 \text{ rad/s}$  en sentido antihorario del eslabón dos, seleccionado como eslabón motriz, y, a partir de los resultados, determinando los estados de velocidad entre los diferentes eslabones del mecanismo y finalmente el ISA correspondiente para cada movimiento relativo, este proceso se llevó a cabo mediante un programa implementado en Maple<sup>©</sup>.

Finalmente los resultados del análisis de velocidad fueron verificados satisfactoriamente mediante el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>; sin embargo, los resultados de la simulación no se muestran por razones de espacio.

### 3.4.4. Comentarios finales

En este capítulo se presentó un método analítico para la determinación de todos los centros instantáneos secundarios indeterminados de los mecanismos “single flyer” and “double butterfly”. El método se basa en seleccionar dos centros instantáneos secundarios:

1. Que puedan escribirse como la combinación lineal de dos centros instantáneos primarios o secundarios ya conocidos.
2. Que conduzcan a un centro instantáneo sobre determinado, empleando un número mínimo de ecuaciones.
3. Que ambos centros instantáneos secundarios conduzcan a la localización de otro centro instantáneo secundario e indeterminado —mediante la solución de una ecuación cuadrática— de tal manera que, comparando las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, se llegue al resultado correcto.

El método desarrollado presenta ventajas respecto a los métodos conocidos hasta ahora en cuanto a su simplicidad.

---

## Capítulo 4: Mecanismos triviales asociados a la subálgebra de movimiento esférico

---

En este capítulo se mostrará que, nuevamente, la ecuación que relaciona los estados de velocidad de tres cuerpos arbitrarios

$${}^i\vec{V}_O^k = {}^i\vec{V}_O^j + {}^j\vec{V}_O^k$$

que en términos de tornillos unitarios está dado por

$${}_i\omega_k {}^i\$_O^k = {}_i\omega_j {}^i\$_O^j + {}_j\omega_k {}^j\$_O^k$$

permite determinar la localización de todos los ejes instantáneos de los mecanismos triviales asociados a un subgrupo,  $SO(3)$ , o subálgebra,  $so(3)$ , de movimientos esféricos de un grado de libertad. En este caso se analizarán tanto mecanismos determinados, de uno o varios lazos, como mecanismos indeterminados.

### 4.1. Características de los mecanismos

Para este caso la determinación del número de pares cinemáticos que forman parte de mecanismos esféricos no se llevará a cabo, pues con mecanismos de varios lazos, el número es altamente variable. El único punto importante y general respecto al número de pares cinemáticos es que un lazo móvil debe tener como mínimo cuatro eslabones y cuatro pares cinemáticos.

Por otro lado, el único tipo de par cinemático que pueden formar parte de este tipo de mecanismos son todos los pares de revoluta que pasen por un punto común  $O$ ;  $\vec{r}_{O,\hat{u}}$ , donde  $\hat{u}$  representa la dirección del par de revoluta. Como resultado de esta característica y suponiendo que el punto  $O$ , se selecciona como el origen del sistema coordenado, los tornillos infinitesimales están dados por

$$\$ = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

más aún, los ejes instantáneos de tornillo, ISA, de los movimientos relativos de dos eslabones en un mecanismo esférico debe, necesariamente pertenecer a la subálgebra,  $so(3)$ , y por lo tanto la traslación a lo largo del eje del tornillo es cero y el eje se convierte en un eje instantáneo de rotación.

Como ya se ha explicado anteriormente, la determinación de los ejes instantáneos del tornillo  ${}^i\$^j$  requiere determinar los aniquiladores ortogonales respecto a las formas de Klein y de Killing, es decir aquellos tornillos  $\$_{aik}$  tal que

$$Kl(\$_{aik}, {}^i\$^j) = Kl(\$_{aik}, {}^j\$^k) = 0 \quad (4.2)$$

y

$$Ki(\$_{aik}, {}^i\$^j) = Ki(\$_{aik}, {}^j\$^k) = 0 \quad (4.3)$$

pues, aprovechando las propiedades de las formas bilineales, se tiene que

$$Kl(\$_{aik}, {}^i\$^k) = Kl(\$_{aik}, \frac{i\omega_j}{i\omega_k} {}^i\$^j + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} {}^j\$^k) = \frac{i\omega_j}{i\omega_k} Kl(\$_{aik}, {}^i\$^j) + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} Kl(\$_{aik}, {}^j\$^k) = \frac{i\omega_j}{i\omega_k} 0 + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} 0 = 0 \quad (4.4)$$

de manera semejante, se tiene que

$$Ki(\$_{aik}, {}^i\$^k) = Ki(\$_{aik}, \frac{i\omega_j}{i\omega_k} {}^i\$^j + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} {}^j\$^k) = \frac{i\omega_j}{i\omega_k} Ki(\$_{aik}, {}^i\$^j) + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} Ki(\$_{aik}, {}^j\$^k) = \frac{i\omega_j}{i\omega_k} 0 + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} 0 = 0 \quad (4.5)$$

La conclusión es que los aniquiladores ortogonales del subespacio generado por  $\{{}^i\$^j, {}^j\$^k\}$  aniquilan también al tornillo  ${}^i\$^k$  asociado al eje instantáneo del tornillo del movimiento relativo entre los eslabones  $i$  y  $k$ . Este es el fundamento del teorema de Aronhold-Kennedy aplicable a cualquier tipo de mecanismo. Sin embargo, la metodología puede simplificarse por las características especiales de los pares cinemáticos y por consiguiente de los tornillos infinitesimales que los representan.

Suponga que el aniquilador dual de un par cinemático, respecto a la forma de Klein que forma parte de un mecanismo esférico, está dado por

$$\$_{a,Kl} = \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \vec{v}_o \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

entonces se tiene que

$$Kl(\$_{a,Kl}, \$) = Kl((\vec{v}, \vec{v}_O), (\vec{u}, \vec{0})) = \vec{v} \cdot \vec{0} + \vec{u} \cdot \vec{v}_O \quad (4.7)$$

Como ya se mencionó, cualquier lazo móvil en un mecanismo esférico debe tener al menos cuatro pares cinemáticos de la forma dada por la ecuación (4.1) y si el lazo no se encuentra en una posición singular los tornillos correspondientes  $\{\$, 1, \$, 2, \$, 3, \$, 4\}$ , donde

$$\$_i = \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

deben generar un espacio de dimensión tres; sin pérdida de generalidad, suponga que  $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$ , forman una base para  $R^3$ , entonces empleando la ecuación (4.6) se tiene que

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_O = \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_O = \vec{u}_3 \cdot \vec{v}_O = 0 \quad (4.8)$$

La ecuación (4.8) representa un sistema lineal homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, donde el sistema y la matriz de coeficientes está dado por

$$\mathbf{A} \vec{v}_O = 0 \quad \text{con} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1^T \\ \hat{u}_2^T \\ \hat{u}_3^T \end{bmatrix}$$

donde el rango de la matriz de coeficientes,  $\mathbf{A}$  es tres pues  $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$  forman una base para  $R^3$ , entonces la única solución es la trivial y

$$\vec{v}_O = \vec{0}$$

Concluyendo, los aniquiladores duales  $\$_{aik}$  asociados a una pareja de tornillos infinitesimales,  $\{^i\$^j, ^j\$^k\}$ , son, por las restricciones impuestas por la forma de Klein, de la forma

$$\$_{a,Kl} = \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

Este resultado corrobora el comentario realizado al inicio de este capítulo acerca de que, para mecanismos esféricos, los ejes instantáneos de tornillo resultan ejes instantáneos de rotación. Geométricamente, este resultado implica que todos los aniquiladores duales de un mecanismo esférico pasarán por la intersección común,  $O$ , de los pares cinemáticos del mecanismo. Por lo tanto, la determinación de los ejes instantáneos de rotación de los movimientos relativos de mecanismos esféricos estará determinada únicamente por la aplicación de la forma de Killing.

En el resto de este capítulo se determinarán los ISA de los movimientos relativos entre eslabones que pertenecen a diferentes mecanismos asociados a la subálgebra de movimientos esféricos. Se presentan cuatro ejemplos, los dos primeros son mecanismos determinados, mientras que los dos últimos son mecanismos indeterminados.

## 4.2. Mecanismo esférico de cuatro barras

Considere el mecanismo mostrado en la Figura 4.1. Este mecanismo está formado por cuatro eslabones binarios y cuatro pares de revoluta cuyas direcciones de sus ejes son arbitrarias y que pasan por un punto común  $O$ .

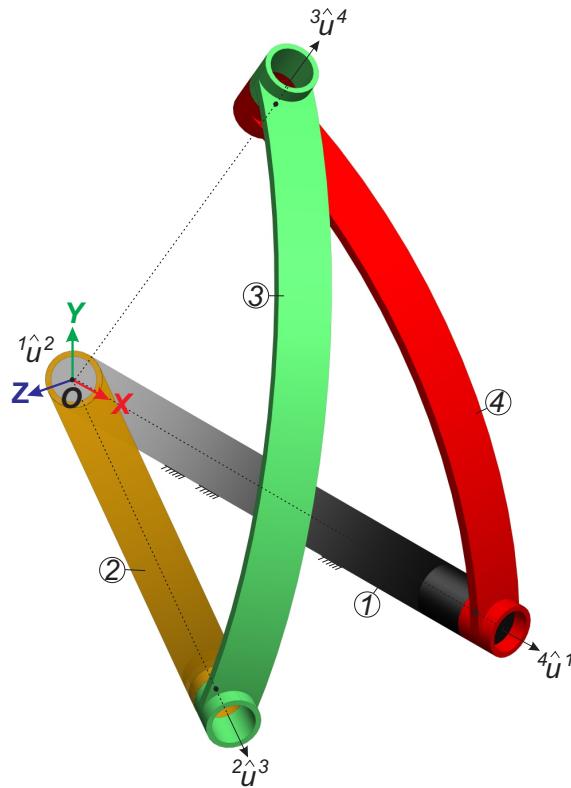


Figura 4.1: Mecanismo R-R-R-R de cuatro barras asociado al álgebra de movimientos esféricos

Los parámetros necesarios para la determinación de los tornillos asociados a los pares cinemáticos, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , son:

$$\vec{r}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\hat{u}^2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad {}^2\hat{u}^3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad {}^3\hat{u}^4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^4\hat{u}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\vec{r}_O$ , representa el punto de intersección de los ejes de los pares de tornillo, y  ${}^1\hat{u}^2$ ,  ${}^2\hat{u}^3$ ,  ${}^3\hat{u}^4$ ,  ${}^4\hat{u}^1$ , representan las direcciones de los ejes de los pares de rotación, donde las direcciones de los ejes de los pares de revoluta están dados en términos de una unidad de longitud no especificada.

Los tornillos infinitesimales asociados a los pares cinemáticos están dados por:

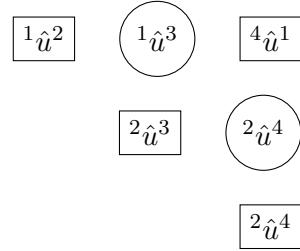
$${}^1\$^2_O = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$^3_O = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$^4_O = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^4\$^1_O = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En lo que resta del capítulo y para simplificar la notación, se sustituirá  ${}^i\$^{i+1}$  por  $\hat{u}^{i+1}$ .

#### 4.2.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's

La Tabla 4.1 enumera los ejes instantáneos de rotación asociados con todos los movimientos relativos entre los eslabones del mecanismo propuesto.

Tabla 4.1: Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo esférico de cuatro barras



Donde un cuadrilátero indica aquellos ejes instantáneos de tornillo que son primarios; es decir aquellos que determinan el eje alrededor del cual un eslabón realiza un movimiento relativo respecto al eslabón adyacente, estos ejes instantáneos se pueden ubicar directamente mediante la inspección de la estructura cinemática del mecanismo. El círculo indica aquellos ejes instantáneos secundarios que se determinarán mediante la aplicación del teorema de Aronhold-Kennedy.

Debe notarse que los ejes instantáneos de los tornillos asociados a los movimientos relativos de los eslabones del mecanismo deben pertenecer forzosamente a la subálgebra de movimientos esféricos. Esto

significa que el movimiento relativo entre los eslabones está dado por un movimiento de rotación asociado a un eje de rotación que pasa por el punto en común,  $O$ , y el tornillo será de la forma

$$\$_{\hat{u}, \vec{r}_O} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y siempre que sea conveniente se escribirá como

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

#### 4.2.2. Obtención del sistema de ecuaciones y su solución

El objetivo de este análisis es determinar los tornillos infinitesimales asociados a los movimientos relativos del eslabón tres respecto del eslabón uno y del eslabón cuatro respecto del eslabón dos. Por lo tanto el primer paso consiste en escribir los tornillos asociados a los ejes instantáneos secundarios. Como ya se indicó, estos tornillos deben representar pares de revoluta cuyo eje pasa por el punto común  $O$ . Por lo tanto

$${}^1\hat{u}^3 = \begin{bmatrix} u_{13x} \\ u_{13y} \\ u_{13z} \end{bmatrix}, \quad {}^2\hat{u}^4 = \begin{bmatrix} u_{24x} \\ u_{24y} \\ u_{24z} \end{bmatrix}$$

A partir de la ubicación de los ejes instantáneos primarios es posible determinar los ejes instantáneos secundarios.

Por ejemplo, si se desea determinar el eje instantáneo del tornillo  ${}^1\$^3$  ó  ${}^1\hat{u}^3$  se empleará

$$\textcircled{1\$^3} \implies \boxed{1\$^2} \quad \boxed{2\$^3} \quad {}_1\omega_3 {}^1\$^3_O = {}_1\omega_2 {}^1\$^2_O + {}_2\omega_3 {}^2\$^3_O \quad \text{ó} \quad {}_1\omega_3 {}^1\hat{u}^3 = {}_1\omega_2 {}^1\hat{u}^2 + {}_2\omega_3 {}^2\hat{u}^3$$

$$\textcircled{1\$^3} \implies \boxed{3\$^4} \quad \boxed{4\$^1} \quad {}_1\omega_3 {}^1\$^3_O = {}_3\omega_4 {}^3\$^4_O + {}_4\omega_1 {}^4\$^1_O \quad \text{ó} \quad {}_1\omega_3 {}^1\hat{u}^3 = {}_3\omega_4 {}^3\hat{u}^4 + {}_4\omega_1 {}^4\hat{u}^1$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Ki(\$,_{a,Ki}^2, {}^1\$^3) = 0 \tag{4.9}$$

y

$$Ki(\$,_{a,Ki}^4, {}^1\$^3) = 0 \tag{4.10}$$

donde  $\{\$,_{a1,Kl}^2\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^1\$^2, {}^2\$^3]$  y  $\{\$,_{a1,Kl}^4\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^1\$^4, {}^3\$^4]$ , ambos respecto a la forma de Killing.

De las ecuaciones (4.9) y (4.10) y aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Killing se obtiene las ecuaciones necesarias para determinar el vector unitario asociado a la dirección del eje de rotación  ${}^1\hat{u}^3$

$$Ec13_2 = \left[ -\frac{\sqrt{3}}{3} u_{13x} - u_{13y} + \frac{\sqrt{3}}{3} u_{13y} + u_{13z} \right] \quad (4.11)$$

$$Ec13_4 = \left[ u_{13z} \right] \quad (4.12)$$

donde los dos primeros números de la ecuación escalar, pues la única componente se iguala a 0, indican cual es el eje instantáneo que se desea determinar y el subíndice indica cual es el eslabón intermedio que se emplea para determinar el eje instantáneo.

De las ecuaciones (4.11) y (4.12)

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} u_{13x} - u_{13y} + \frac{\sqrt{3}}{3} u_{13y} + u_{13z} \quad (4.13)$$

$$0 = u_{13z} \quad (4.14)$$

Este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas geométricamente representan un plano que pasa por el origen y que contiene a  ${}^1\hat{u}^2$  y  ${}^2\hat{u}^3$ . Además permite escribir la coordenada  $u_{13y}$  en términos de  $u_{13x}$  como

$$u_{13y} = \frac{u_{13x} \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3}$$

y la dirección del eje instantáneo está dado por:

$${}^1\hat{u}^3 = \begin{bmatrix} u_{13x} \\ \frac{u_{13x}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Puesto que el vector que define la dirección del eje del tornillo debe ser unitario, las componentes de  ${}^1\hat{u}^3$  deben satisfacer la condición

$$u_{13x}^2 + \left[ \frac{u_{13x}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3} \right]^2 = 1$$

Por lo tanto, se tiene que el vector unitario  ${}^1\hat{u}^3$  es igual a:

$${}^1\hat{u}^3 = \begin{bmatrix} -\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{5-2}\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{5-2}\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

De manera semejante, para determinar el eje instantáneo del tornillo  ${}^2\hat{u}^4$  ó  ${}^2\$^4$  se empleará

$$\textcircled{2\$^4} \implies \boxed{2\$^3} \quad \boxed{3\$^4} \quad {}_2\omega_4 {}^2\$^4_O = {}_2\omega_3 {}^2\$^3_O + {}_3\omega_4 {}^3\$^4_O \quad \text{ó} \quad {}_2\omega_4 {}^2\hat{u}^4 = {}_2\omega_3 {}^2\hat{u}^3 + {}_3\omega_4 {}^3\hat{u}^4$$

$$\textcircled{2\$^4} \implies \boxed{1\$^2} \quad \boxed{4\$^1} \quad {}_2\omega_4 {}^2\$^4_O = {}_1\omega_2 {}^1\$^2_O + {}_4\omega_1 {}^4\$^1_O \quad \text{ó} \quad {}_2\omega_4 {}^2\hat{u}^4 = {}_1\omega_2 {}^1\hat{u}^2 + {}_4\omega_1 {}^4\hat{u}^1$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Ki(\$_{a,Ki}^3, {}^2\$^4) = 0 \quad (4.16)$$

y

$$Ki(\$_{a,Ki}^1, {}^2\$^4) = 0 \quad (4.17)$$

donde  $\{\$_{a1,Kl}^3\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^2\$^3, {}^3\$^4]$  y  $\{\$_{a1,Kl}^1\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^1\$^2, {}^1\$^4]$ , ambos respecto a la forma de Killing.

De manera semejante de las ecuaciones (4.16) y (4.17) y aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Killing se obtienen las ecuaciones necesarias para determinar el vector unitario asociado a la dirección del eje de rotación  ${}^2\hat{u}^4$

$$Ec24_3 = \left[ -\frac{\sqrt{3}}{3} u_{24x} + \frac{1}{3} u_{24y} + u_{24z} \right] \quad (4.18)$$

$$Ec24_1 = [-u_{24y} + u_{24z}] \quad (4.19)$$

El sistema de ecuaciones lineales necesario para determinar el vector  ${}^2\hat{u}^4$  está dado por

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} u_{24x} + \frac{1}{3} u_{24y} + u_{24z} \quad (4.20)$$

$$0 = -u_{24y} + u_{24z} \quad (4.21)$$

Este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas geométricamente representan un plano que pasa por el origen y que contiene a  ${}^2\hat{u}^3$  y  ${}^3\hat{u}^4$ . Además permite escribir las coordenadas  $u_{24x}$  y  $u_{24y}$  en términos de  $u_{24z}$  como

$$u_{24x} = \frac{4}{\sqrt{3}} u_{24z}$$

y la dirección del eje instantáneo está dada por:

$${}^2\hat{u}^4 = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} u_{24z} \\ u_{24z} \\ u_{24z} \end{bmatrix}$$

Puesto que el vector que define la dirección del eje del tornillo debe ser unitario, las componentes de  ${}^2\hat{u}^4$  deben satisfacer la condición

$$\left[ \frac{4}{\sqrt{3}} u_{24z} \right]^2 + u_{24z}^2 + u_{24z}^2 = 1$$

Por lo tanto, se tiene que el vector unitario  ${}^2\hat{u}^4$  es igual a:

$${}^2\hat{u}^4 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{22}}{11} \\ \frac{\sqrt{22}\sqrt{3}}{22} \\ \frac{\sqrt{22}\sqrt{3}}{22} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Las direcciones correspondientes a los ejes instantáneos secundarios se muestran en las Figuras 4.2 y 4.3 respectivamente. En estas figuras, se puede observar que los tres ejes  $i\$^k$ ,  $i\$^j$  e  $j\$^k$  se encuentran

localizados en un plano, para los dos posibles valores de  $j$  y el eje instantáneo secundario se ubica en la intersección de ambos planos.

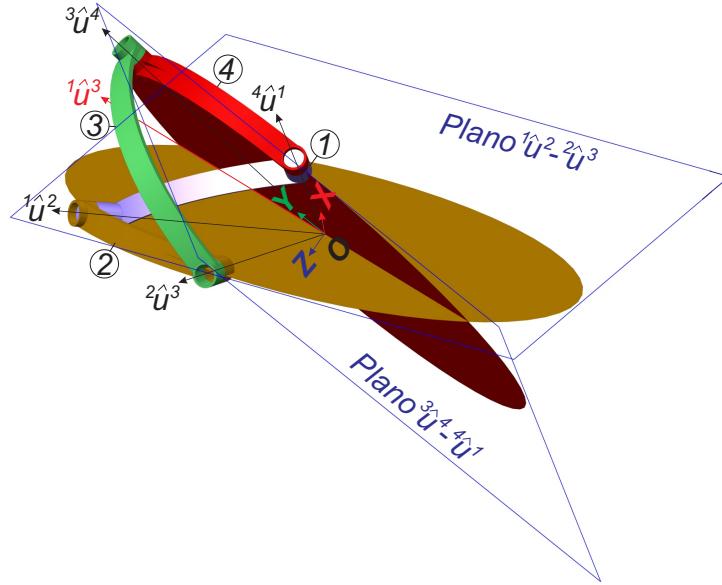


Figura 4.2: Localización del eje instantáneo secundario  ${}^1\hat{u}^3$  en la intersección de los planos formados por los ejes instantáneos  ${}^1\hat{u}^2$  y  ${}^2\hat{u}^3$  por un lado y por  ${}^3\hat{u}^4$  y  ${}^4\hat{u}^1$  por el otro.

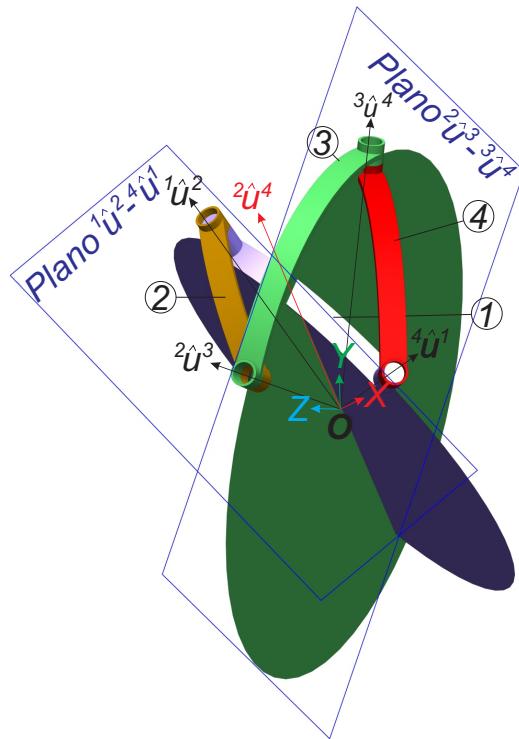


Figura 4.3: Localización del eje instantáneo secundario  ${}^2\hat{u}^4$  en la intersección de los planos formados por los ejes instantáneos  ${}^1\hat{u}^2$  y  ${}^4\hat{u}^1$  por un lado y por  ${}^2\hat{u}^3$  y  ${}^3\hat{u}^4$  por el otro.

#### 4.2.3. Verificación de los resultados

Los resultados obtenidos para las direcciones de los ejes instantáneos secundarios se comprobaron mediante la realización del análisis de velocidad del mecanismo para una velocidad angular de magnitud arbitraria de  $10 \text{ rad/s}$  en sentido antihorario del eslabón dos, seleccionado como eslabón motriz, y a partir de los resultados determinando los estados de velocidad entre los diferentes eslabones del mecanismo y finalmente el ISA correspondiente para cada movimiento relativo, este proceso se llevó a cabo mediante un programa implementado en Maple<sup>©</sup>.

Finalmente los resultados del análisis de velocidad fueron verificados satisfactoriamente mediante el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>; los resultados de la simulación se muestran en las Figuras 4.4 - 4.6. Es importante reconocer que puesto que la posición relativa de los eslabones cambia durante el tiempo de la simulación, los únicos resultados importantes son los iniciales; es decir, aquellos que se obtienen para  $t = 0$ .

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^1\vec{\omega}_O^2$ , debe recordarse que, como se trata de un mecanismo esférico y el movimiento relativo del eslabón dos respecto del eslabón uno no tiene componentes de velocidad translacional, entonces la parte dual del tornillo  ${}^1\vec{\omega}_O^2$  es exclusivamente el vector  $\vec{0}$ . Como esta información no es relevante para el análisis sólo se trabajará con las componentes del vector unitario asociadas a la dirección del eje de rotación. Por lo tanto

$${}^1\vec{\omega}^2 = {}_1\omega_2 \hat{u}_{12} = 10 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s} \\ \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s} \\ \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.7735 \text{ rad/s} \\ 5.7735 \text{ rad/s} \\ 5.7735 \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

Donde  $\hat{u}_{12}$  las componentes del vector unitario asociadas a la dirección del eje de rotación se obtienen a partir de los datos.

La Figura 4.4 obtenida a partir de la simulación realizada en Adams<sup>©</sup> corrobora las componentes de la velocidad angular  ${}_1\omega_2$ .

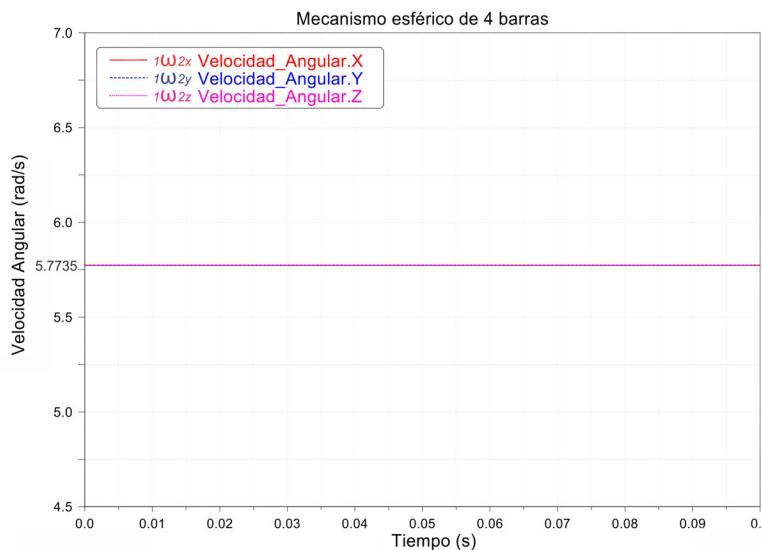


Figura 4.4: Velocidad angular del par de revoluta asociado a  ${}^1\hat{u}^2$

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^1\hat{\omega}_O^3$ , debe recordarse que

$$\begin{aligned} {}^1\vec{\omega}^3 &= {}_1\omega_3 \hat{u}_{13} = \frac{10}{3} \sqrt{15 - 6\sqrt{3}} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} -\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}} \\ 0 \end{bmatrix} = 7.1551 \text{ rad/s} = \begin{bmatrix} -0.5906 \text{ rad/s} \\ 0.8068 \text{ rad/s} \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}^1\vec{\omega}^3 &= \begin{bmatrix} \frac{10}{3}\sqrt{3} - 10 \text{ rad/s} \\ \frac{10}{3}\sqrt{3} \text{ rad/s} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.2264 \text{ rad/s} \\ 5.7735 \text{ rad/s} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde la magnitud de la velocidad angular  ${}_1\omega_3$  y  $\hat{u}_{13}$  se obtienen mediante el programa Maple<sup>©</sup>.

De la simulación realizada en Adams<sup>©</sup> vea la Figura 4.5, se encontró que

$${}^1\vec{\omega}^3 = \begin{bmatrix} -4.2264 \text{ rad/s} \\ 5.7735 \text{ rad/s} \\ 0 \end{bmatrix} = 7.1551 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} -0.5906 \text{ rad/s} \\ 0.8068 \text{ rad/s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se corroboró que las componentes de la velocidad angular  ${}^1\vec{\omega}^3$  corresponden a las indicadas en la ecuación (4.17)

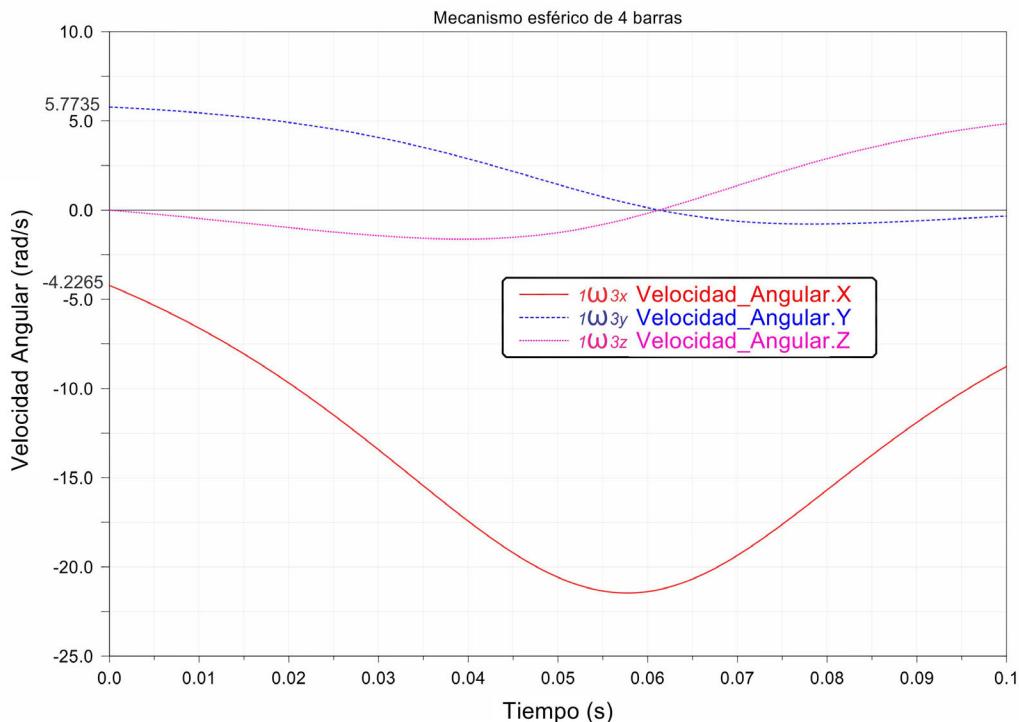


Figura 4.5: Velocidad angular del par de revoluta asociado a  ${}^1\hat{u}^3$

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^2\hat{\omega}_O^4$ , debe recordarse que

$${}^2\vec{\omega}^4 = {}_2\omega_4 \hat{u}_{24} = \frac{10}{3}\sqrt{22} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} \frac{2}{11}\sqrt{22} \\ \frac{1}{22}\sqrt{22}\sqrt{3} \\ \frac{1}{22}22\sqrt{3} \end{bmatrix} = 15.6347 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0.8528 \\ 0.3692 \\ 0.3692 \end{bmatrix}$$

$${}^2\vec{\omega}^4 = \begin{bmatrix} -\frac{40}{3} \text{ rad/s} \\ -\frac{10}{3}\sqrt{3} \text{ rad/s} \\ -\frac{10}{3}\sqrt{3} \text{ rad/s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.3333 \text{ rad/s} \\ -5.7735 \text{ rad/s} \\ -5.7735 \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

Donde la magnitud de la velocidad angular  ${}_2\omega_4$  y  $\hat{u}_{24}$  se obtuvieron mediante el programa Maple<sup>©</sup>.

De la simulación realizada en Adams<sup>©</sup> vea la Figura 4.6, se encontró que

$${}^2\vec{\omega}^4 = \begin{bmatrix} -13.3333 \text{ rad/s} \\ -5.7735 \text{ rad/s} \\ -5.7735 \text{ rad/s} \end{bmatrix} = 15.6347 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0.8528 \\ 0.3692 \\ 0.3692 \end{bmatrix}$$

Se corrobora que las componentes de la velocidad angular  ${}^2\vec{\omega}^4$  corresponden a las indicadas en la ecuación (4.22)

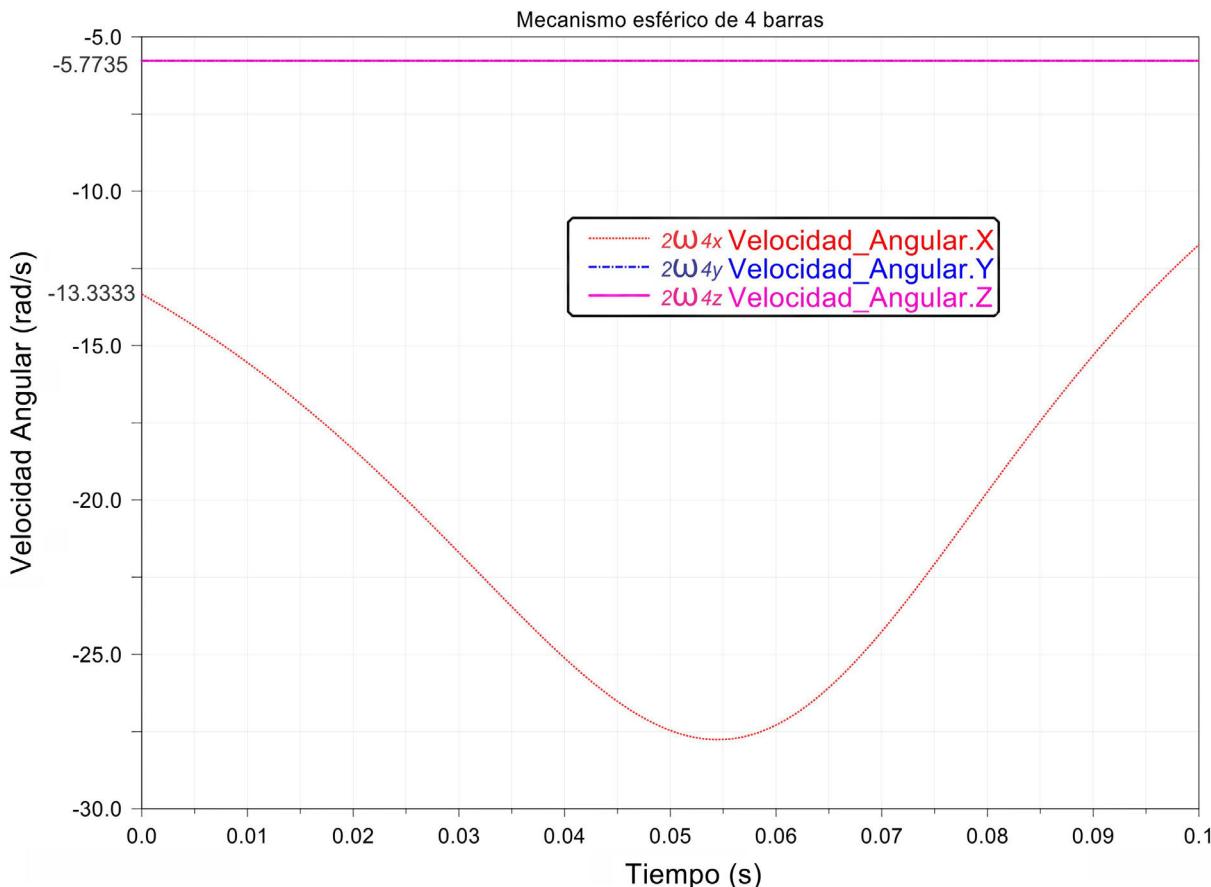


Figura 4.6: Velocidad angular del par de revoluta asociado a  ${}^2\hat{u}^4$

### 4.3. Mecanismo de seis barras asociado a la subálgebra de movimientos esféricos

Considere el mecanismo mostrado en la Figura 4.7. Este mecanismo fue analizado por Di Gregorio [9] mediante un método analítico utilizado para ilustrar parte del método propuesto para determinar centros instantáneos secundarios indeterminados en mecanismos planos[8]. El mecanismo está formado por seis eslabones, dos de ellos ternarios y los restantes cuatro binarios y siete pares de revoluta cuyas direcciones de sus ejes son arbitrarias y pasan por un punto común  $O$ .

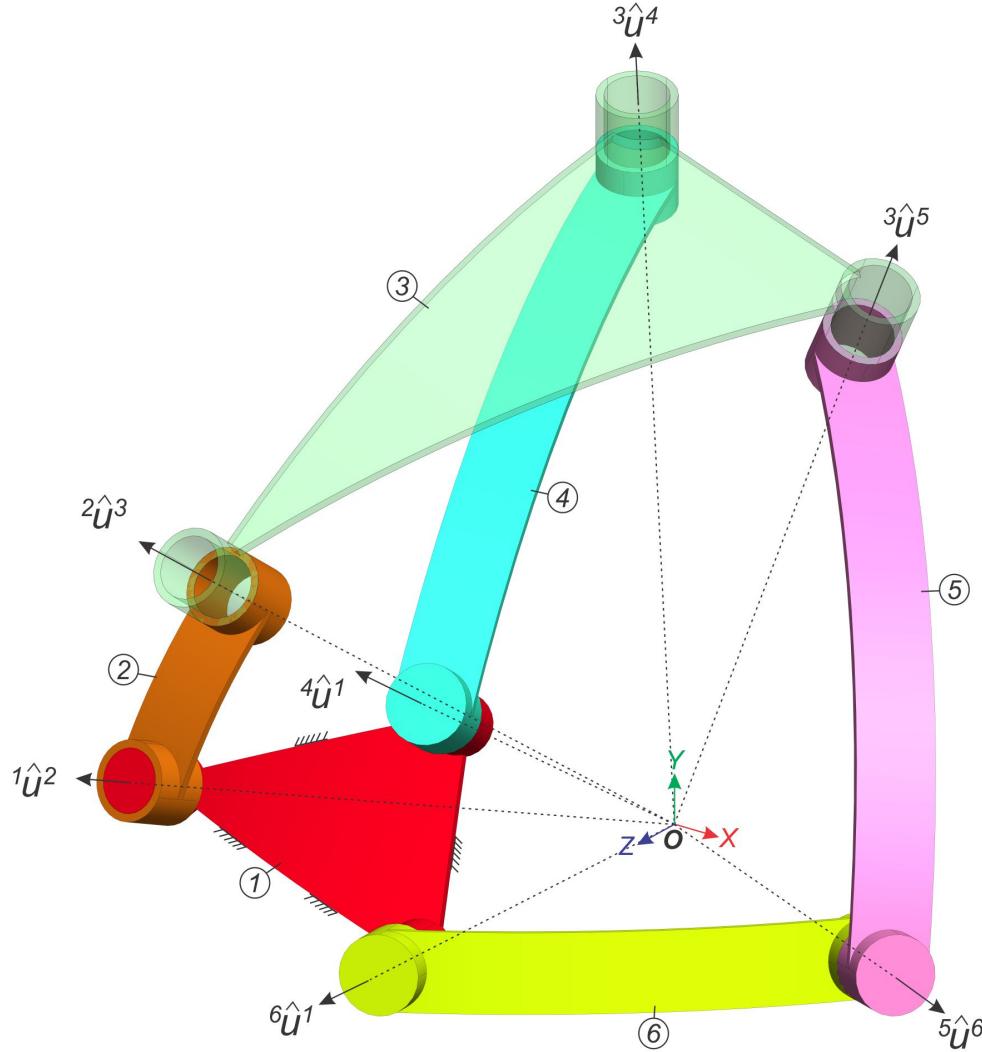


Figura 4.7: Mecanismo de seis barras asociado a una subálgebra de movimientos esféricos

Los parámetros necesarios para la determinación de los tornillos asociados a los pares cinemáticos, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , son:

$$\vec{r}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\hat{u}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad {}^2\hat{u}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad {}^3\hat{u}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^4\hat{u}^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad {}^3\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \\ 0 \end{bmatrix}$$

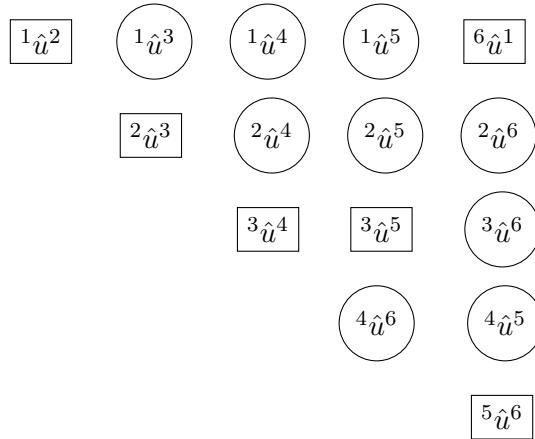
$${}^5\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \quad {}^6\hat{u}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

donde  $\vec{r}_O$ , representa el punto de intersección de los ejes de los pares de revoluta y  ${}^1\hat{u}^2, {}^2\hat{u}^3, {}^3\hat{u}^4, {}^4\hat{u}^1, {}^3\hat{u}^5, {}^5\hat{u}^6$  y  ${}^6\hat{u}^1$  representan las direcciones de los ejes de los pares de rotación, donde las direcciones de los ejes de los pares de revoluta están dados en términos de una unidad de longitud no especificada.

#### 4.3.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's

La Tabla 4.2 enumera los ejes instantáneos de rotación asociados con todos los movimientos relativos entre los eslabones del mecanismo propuesto.

Tabla 4.2: Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo esférico de 6 barras



La sección que selecciona los tornillos necesarios para la determinación de los tornillos secundarios se omite por razones de espacio.

#### 4.3.2. Obtención del sistema de ecuaciones y su solución

El objetivo de este análisis es determinar los tornillos infinitesimales asociados a los movimientos relativos de los eslabones tres, cuatro y cinco respecto del eslabón uno, de los eslabones cuatro, cinco y seis respecto del eslabón dos, del eslabón seis respecto del eslabón tres, de los eslabones cinco y seis respecto del eslabón cuatro. Por lo tanto el primer paso consiste en escribir los tornillos asociados a los ejes instantáneos secundarios. Como ya se indicó, estos tornillos deben representar pares de revoluta cuyo eje pasa por el punto común,  $O$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} {}^1\hat{u}^3 &= \begin{bmatrix} u_{13x} \\ u_{13y} \\ u_{13z} \end{bmatrix}, & {}^2\hat{u}^4 &= \begin{bmatrix} u_{24x} \\ u_{24y} \\ u_{24z} \end{bmatrix}, & {}^1\hat{u}^5 &= \begin{bmatrix} u_{15x} \\ u_{15y} \\ u_{15z} \end{bmatrix}, & {}^2\hat{u}^5 &= \begin{bmatrix} u_{25x} \\ u_{25y} \\ u_{25z} \end{bmatrix}, & {}^4\hat{u}^5 &= \begin{bmatrix} u_{45x} \\ u_{45y} \\ u_{45z} \end{bmatrix} \\ {}^2\hat{u}^6 &= \begin{bmatrix} u_{26x} \\ u_{26y} \\ u_{26z} \end{bmatrix}, & {}^3\hat{u}^6 &= \begin{bmatrix} u_{36x} \\ u_{36y} \\ u_{36z} \end{bmatrix}, & {}^4\hat{u}^6 &= \begin{bmatrix} u_{46x} \\ u_{46y} \\ u_{46z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las ecuaciones necesarias para determinar las direcciones correspondientes a cada uno de los ejes instantáneos secundarios se obtienen aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Killing de una manera sistemática vea las ecuaciones (4.9 - 4.12).

El sistema de ecuaciones necesario para determinar el eje instantáneo de rotación  ${}^1\hat{u}^3$  está dado por:

$$Ec13_2 = \begin{bmatrix} u_{13x} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$Ec13_4 = \begin{bmatrix} -2 u_{13x} + u_{13z} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

donde los dos primeros números de la ecuación escalar, pues la única componente se iguala a 0, indican cual es el eje instantáneo que se desea determinar y el subíndice indica cual es el eslabón intermedio que se emplea para determinar el eje instantáneo.

De las ecuaciones (4.21) y (4.22)

$$0 = u_{13x} \quad (4.25)$$

$$0 = -2 u_{13x} + u_{13z} \quad (4.26)$$

Este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas geométricamente representan un plano que pasa por el origen y que contiene a  ${}^1\hat{u}^2$  y  ${}^2\hat{u}^3$ , y la dirección del eje instantáneo está dado por:

$${}^1\hat{u}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ u_{13y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Puesto que el vector que define la dirección del eje del tornillo debe ser unitario, las componentes de  ${}^1\hat{u}^3$  deben satisfacer la condición

$$u_{13y}^2 = 1$$

Por lo tanto, se tiene que el vector unitario  ${}^1\hat{u}^3$  está dado por:

$${}^1\hat{u}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones necesario para determinar el eje instantáneo de rotación  ${}^2\hat{u}^4$  está dado por:

$$Ec24_3 = \begin{bmatrix} u_{24x} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$Ec24_1 = \begin{bmatrix} 2 u_{24x} \sqrt{3} - u_{24y} \sqrt{3} - 2 u_{24x} + u_{24z} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Como resultado, la dirección del eje instantáneo está dada por:

$${}^2\hat{u}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones necesario para determinar el eje instantáneo de rotación  ${}^1\hat{u}^5$  está dado por:

$$Ec15_3 = \begin{bmatrix} u_{15z} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$Ec15_6 = \begin{bmatrix} u_{15x} - 3u_{15y} + u_{15z} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Como resultado, la dirección del eje instantáneo está dada por:

$${}^1\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones necesario para determinar el eje instantáneo de rotación  ${}^2\hat{u}^5$  está dado por:

$$Ec25_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}u_{25x}\sqrt{3} - u_{25y}\sqrt{3} + u_{25z} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$Ec25_3 = \begin{bmatrix} \frac{12}{5}u_{25x} - u_{25y} + u_{25z} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Como resultado, la dirección del eje instantáneo está dada por:

$${}^2\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} \frac{15}{\sqrt{3939+1767\sqrt{3}}} \\ -\frac{1}{2}\frac{21+31\sqrt{3}}{\sqrt{3939+1767\sqrt{3}}} \\ -\frac{31}{2}\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3939+1767\sqrt{3}}} \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones necesario para determinar el eje instantáneo de rotación  ${}^4\hat{u}^5$  está dado por:

$$Ec45_3 = \begin{bmatrix} u_{45z} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$Ec45_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}u_{45x} - \frac{6}{5}u_{45y} + u_{45z} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Como resultado, la dirección del eje instantáneo está dada por:

$${}^4\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones necesario para determinar el eje instantáneo de rotación  ${}^2\hat{u}^6$  está dado por:

$$Ec26_1 = \begin{bmatrix} u_{26x}\sqrt{3} - u_{26y}\sqrt{3} - 2 u_{26x} + u_{26z} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$Ec26_5 = \begin{bmatrix} 12 u_{26x}\sqrt{3} - 36 u_{26y}\sqrt{3} + 12 u_{26z}\sqrt{3} - 31 u_{26y} + 31 u_{26z} \\ 31 + 12\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Como resultado, la dirección del eje instantáneo está dada por:

$${}^2\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{5079+2387\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{2} \frac{31\sqrt{3}+41}{\sqrt{5079+2387\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{2} \frac{31\sqrt{3}+113}{\sqrt{5079+2387\sqrt{3}}} \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones necesario para determinar el eje instantáneo de rotación  ${}^3\hat{u}^6$  está por:

$$Ec36_1 = \begin{bmatrix} -2 u_{36x} + u_{36z} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$Ec36_5 = \begin{bmatrix} -\frac{12}{19} u_{36x} + \frac{5}{19} u_{36y} + u_{36z} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Como resultado, la dirección del eje instantáneo está dada por:

$${}^3\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{89}}{267} \\ -\frac{26\sqrt{89}}{267} \\ \frac{10\sqrt{89}}{267} \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones necesario para determinar el eje instantáneo de rotación  ${}^4\hat{u}^6$  está dado por:

$$Ec46_1 = \begin{bmatrix} -2 u_{46x} + u_{46z} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$Ec46_2 = \begin{bmatrix} u_{46x}\sqrt{3} - u_{46y}\sqrt{3} - 2 u_{46x} + u_{46z} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Como resultado, la dirección del eje instantáneo está dada por:

$${}^4\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

Por razones de espacio sólo se muestra la dirección correspondiente al eje instantáneo secundario  ${}^1\hat{u}^5$  en la Figura 4.8. En esta figura, se puede observar que los tres ejes  $i\$k$ ,  $i\$j$  e  $j\$k$  se encuentran localizados en un plano, el eje instantáneo secundario se ubica en la intersección de ambos planos.

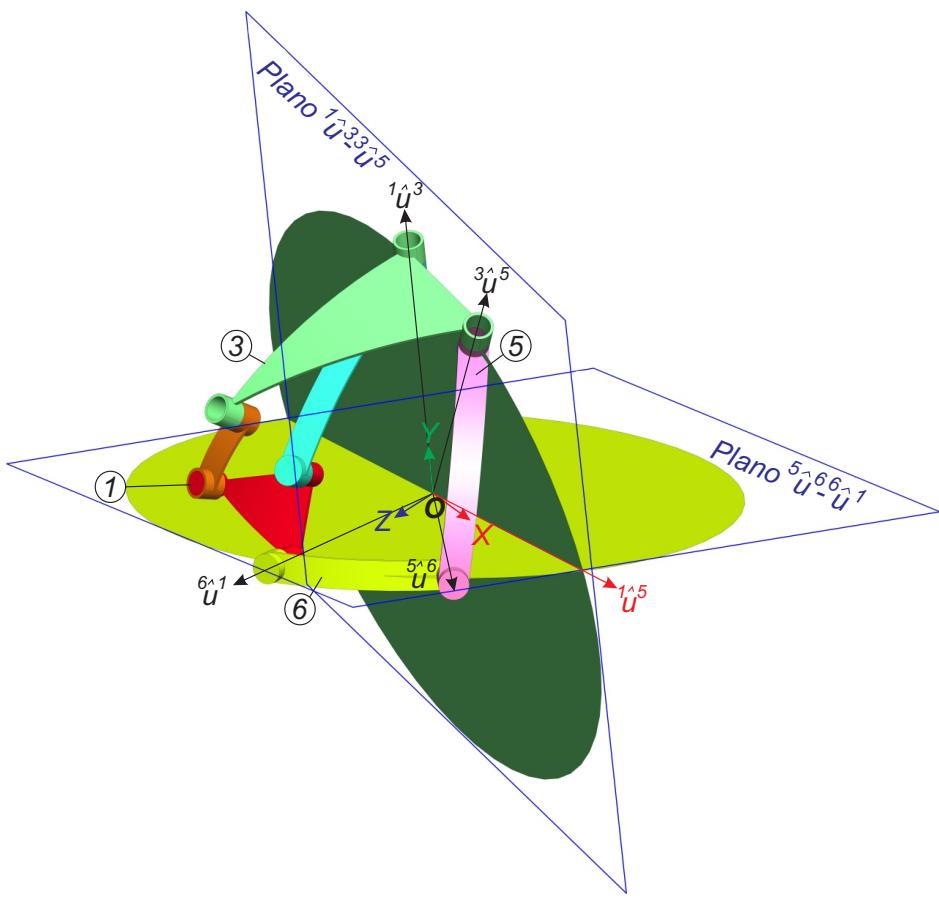


Figura 4.8: Velocidad angular del par de revoluta  ${}^1\hat{u}^5$

Los resultados obtenidos para las direcciones de los ejes instantáneos secundarios se comprobaron mediante la realización del análisis de velocidad del mecanismo para una velocidad angular de magnitud arbitraria de  $10 \text{ rad/s}$  en sentido antihorario del eslabón dos, seleccionado como eslabón motriz y, a partir de los resultados, determinando los estados de velocidad entre los diferentes eslabones del mecanismo y, finalmente, el ISA correspondiente para cada movimiento relativo, este proceso se llevó a cabo mediante un programa implementado en Maple<sup>©</sup>.

Finalmente los resultados del análisis de velocidad fueron verificados satisfactoriamente mediante el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>; sin embargo, por razones de espacio estos resultados no se muestran.

#### 4.4. Mecanismo de ocho barras asociado a la subálgebra de movimientos esféricos indeterminado

Consideré el mecanismo esférico mostrado en la Figura 4.9. Este mecanismo fue analizado por Zarkandi [29],[30] quien determinó los ejes instantáneos secundarios indeterminados mediante un método analítico resolviendo tres ecuaciones polinomiales de grado tres. Este mecanismo está formado por ocho eslabones, cuatro de ellos ternarios y los restantes cuatro binarios y 10 pares de revoluta cuyas direcciones de sus ejes son arbitrarias y pasan por un punto común  $O$ .

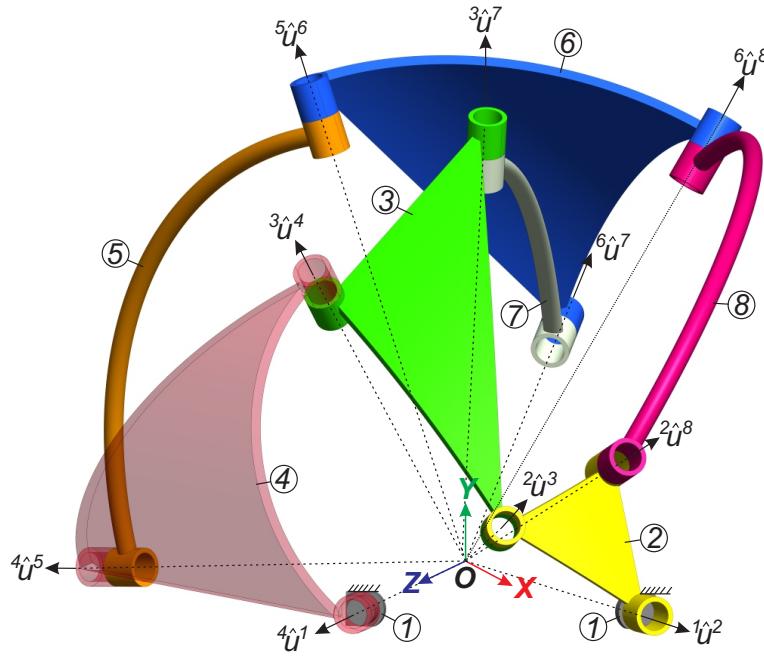


Figura 4.9: Mecanismo de ocho barras asociado a la subálgebra de movimientos esféricos

Los parámetros necesarios para la determinación de los tornillos asociados a los pares cinemáticos, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , son:

$$\vec{r}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\hat{u}^2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \quad {}^2\hat{u}^3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad {}^3\hat{u}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad {}^4\hat{u}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}, \quad {}^4\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} -\frac{12}{13} \\ -\frac{13}{13} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^5\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^6\hat{u}^7 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad {}^3\hat{u}^7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^6\hat{u}^8 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad {}^2\hat{u}^8 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

donde  $\vec{r}_O$ , representa el punto de intersección de los ejes de los pares de tornillo y  ${}^1\hat{u}^2$ ,  ${}^2\hat{u}^3$ ,  ${}^3\hat{u}^4$ ,  ${}^4\hat{u}^1$ ,  ${}^4\hat{u}^5$ ,  ${}^5\hat{u}^6$ ,  ${}^6\hat{u}^7$ ,  ${}^3\hat{u}^7$ ,  ${}^6\hat{u}^8$  y  ${}^2\hat{u}^8$  representan las direcciones de los ejes de los pares de rotación, donde las direcciones de los ejes de los pares de revoluta están dados en términos de una unidad de longitud no especificada.

#### 4.4.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's

Con base a la numeración de los eslabones mostrada en la Figura 4.9 los ejes instantáneos primarios; es decir, aquellos que se pueden determinar mediante la examinación del mecanismo son:

$${}^1\hat{u}^2, \quad {}^2\hat{u}^3, \quad {}^3\hat{u}^4, \quad {}^4\hat{u}^1, \quad {}^4\hat{u}^5, \quad {}^5\hat{u}^6, \quad {}^6\hat{u}^7, \quad {}^2\hat{u}^8, \quad {}^3\hat{u}^7, \quad {}^6\hat{u}^8$$

El arreglo diagonal de los ejes instantáneos correspondientes al mecanismo mostrado en la Figura 4.9, donde los ejes primarios se indican con el número -1 y los ejes secundarios se indican con el número -2 se muestran en la Tabla 4.3

Tabla 4.3: Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo esférico de 8 barras

$$\begin{array}{cccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(-2) & {}^4\hat{u}^1(-1) & {}^1\hat{u}^5(-2) & {}^1\hat{u}^6(-2) & {}^1\hat{u}^7(-2) & {}^1\hat{u}^8(-2) \\ {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-2) & {}^2\hat{u}^5(-2) & {}^2\hat{u}^6(-2) & {}^2\hat{u}^7(-2) & {}^2\hat{u}^8(-1) & \\ {}^3\hat{u}^4(-1) & {}^3\hat{u}^5(-2) & {}^3\hat{u}^6(-2) & {}^3\hat{u}^7(-1) & {}^3\hat{u}^8(-2) & & \\ & {}^4\hat{u}^5(-1) & {}^4\hat{u}^6(-2) & {}^4\hat{u}^7(-2) & {}^4\hat{u}^8(-2) & & \\ & & {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(-2) & {}^5\hat{u}^8(-2) & & \\ & & & {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(-1) & & \\ & & & & {}^7\hat{u}^8(-2) & & \end{array}$$

El mecanismo se denomina parcialmente indeterminado por que la aplicación directa del teorema de Aronhold-Kennedy permite determinar dos ejes instantáneos secundarios. Note que  $\hat{u}_{13}$  está localizado en la intersección de los planos formados por los ejes

$$\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ {}^1\hat{u}^3 \end{array} \implies \boxed{{}^1\hat{u}^2} \quad \boxed{{}^2\hat{u}^3}$$
  

$$\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ {}^1\hat{u}^3 \end{array} \implies \boxed{{}^3\hat{u}^4} \quad \boxed{{}^4\hat{u}^1}$$

Las ecuaciones necesarias para determinar las componentes del vector unitario asociado a la dirección del eje de rotación  ${}^1\hat{u}^3$ , se obtienen aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Killing de una manera sistemática vea las ecuaciones (4.9 - 4.12). Por lo tanto

$$E13_2 = [-u_{13y} + u_{13z}] \tag{4.41}$$

$$E13_4 = \left[ \frac{\sqrt{3}}{3} u_{13x} - 2 u_{13x} - \frac{\sqrt{3}}{3} u_{13y} + u_{13z} \right] \tag{4.42}$$

donde los dos primeros números de la ecuación escalar, pues la única componente se iguala a cero, indican cual es el eje instantáneo que se desea determinar y el subíndice indica cual es el eslabón intermedio que se emplea para determinar el eje instantáneo.

De las ecuaciones (4.41) y (4.42) se tiene

$$0 = -u_{13y} + u_{13z} \tag{4.43}$$

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{3} u_{13x} - 2 u_{13x} - \frac{\sqrt{3}}{3} u_{13y} + u_{13z} \tag{4.44}$$

Este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas geométricamente representan un plano que pasa por el origen y que contiene a  ${}^1\hat{u}^2$  y  ${}^2\hat{u}^3$ . Además permite escribir la coordenada  $u_{13x}$  en términos de  $u_{13z}$  como

$$u_{13x} = \frac{5 - \sqrt{3} u_{13z}}{11}$$

y la dirección del eje instantáneo está dado por:

$${}^1\hat{u}^3 = \begin{bmatrix} \frac{5 - \sqrt{3} u_{13z}}{11} \\ u_{13y} \\ u_{13z} \end{bmatrix}$$

Puesto que el vector que define la dirección del eje del tornillo debe ser unitario, las componentes de  ${}^1\hat{u}^3$  deben satisfacer la condición

$$\left[ \frac{5 - \sqrt{3} u_{13z}}{11} \right]^2 + u_{13y}^2 + u_{13z}^2 = 1$$

Por lo tanto, se tiene que el vector unitario  ${}^1\hat{u}^3$  está dado por:

$${}^1\hat{u}^3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{270-10\sqrt{3}}} \\ \frac{11}{\sqrt{270-10\sqrt{3}}} \\ \frac{11}{\sqrt{270-10\sqrt{3}}} \end{bmatrix}$$

De manera semejante, el eje instantáneo  ${}^2\hat{u}^4$  está localizado en la intersección de los planos formados por los ejes

$$\textcircled{{}^2\hat{u}^4} \implies [{}^1\hat{u}^2] [{}^4\hat{u}^1]$$

$$\textcircled{{}^2\hat{u}^4} \implies [{}^2\hat{u}^3] [{}^3\hat{u}^4]$$

De manera semejante el sistema de ecuaciones necesario para determinar las componentes del vector unitario asociado a la dirección del eje instantáneo  ${}^2\hat{u}^4$  están dadas por

$$E24_1 = [u_{24x} - 3u_{24y} + u_{24z}] \quad (4.45)$$

$$E24_3 = \left[ -u_{24x} + \frac{\sqrt{3}}{3}u_{24x} - \frac{\sqrt{3}}{3}u_{24y} + u_{24z} \right] \quad (4.46)$$

De las ecuaciones (4.45) y (4.46) se tiene

$$0 = u_{24x} - 3u_{24y} + u_{24z} \quad (4.47)$$

$$0 = -u_{24x} + \frac{\sqrt{3}}{3}u_{24x} - \frac{\sqrt{3}}{3}u_{24y} + u_{24z} \quad (4.48)$$

Este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas geométricamente representan un plano que pasa por el origen y que contiene a  ${}^1\hat{u}^2$  y  ${}^2\hat{u}^3$ . Además permite escribir las coordenadas  $u_{24x}$  y  $u_{24y}$  en términos de  $u_{24z}$  como

$$u_{24x} = \frac{25 + 3\sqrt{3}u_{24z}}{23}$$

$$u_{24y} = \frac{16 + \sqrt{3}u_{24z}}{23}$$

y la dirección del eje instantáneo está dada por:

$${}^2\hat{u}^4 = \begin{bmatrix} \frac{25+3\sqrt{3}u_{24z}}{23} \\ \frac{16+\sqrt{3}u_{24z}}{23} \\ u_{24z} \end{bmatrix}$$

Puesto que el vector que define la dirección del eje del tornillo debe ser unitario, las componentes de  ${}^2\hat{u}^4$  deben satisfacer la condición

$$\left[ \frac{25 + 3\sqrt{3}u_{24z}}{23} \right]^2 + \left[ \frac{16 + \sqrt{3}u_{24z}}{23} \right]^2 + u_{24z}^2 = 1$$

Como resultado la dirección del eje instantáneo está dada por:

$${}^2\hat{u}^4 = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}+25}{\sqrt{1440+182\sqrt{3}}} \\ \frac{\sqrt{3}+16}{\sqrt{1440+182\sqrt{3}}} \\ \frac{23}{\sqrt{1440+182\sqrt{3}}} \end{bmatrix}$$

Ningún otro eje instantáneo se puede localizar mediante la aplicación directa del teorema de Aronhold-Kennedy. Después de localizar los ejes instantáneos  $\hat{u}_{13}$  y  $\hat{u}_{24}$  que se van a indicar con el número -1, el arreglo diagonal de los ejes instantáneos después de esta etapa está dado por

Tabla 4.4: Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo esférico de ocho barras

$$\begin{array}{cccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(-1) & {}^4\hat{u}^1(-1) & {}^1\hat{u}^5(-2) & {}^1\hat{u}^6(-2) & {}^1\hat{u}^7(-2) & {}^1\hat{u}^8(-2) \\ {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-1) & {}^2\hat{u}^5(-2) & {}^2\hat{u}^6(-2) & {}^2\hat{u}^7(-2) & {}^2\hat{u}^8(-1) & \\ {}^3\hat{u}^4(-1) & {}^3\hat{u}^5(-2) & {}^3\hat{u}^6(-2) & {}^3\hat{u}^7(-1) & {}^3\hat{u}^8(-2) & & \\ & {}^4\hat{u}^5(-1) & {}^4\hat{u}^6(-2) & {}^4\hat{u}^7(-2) & {}^4\hat{u}^8(-2) & & \\ & & {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(-2) & {}^5\hat{u}^8(-2) & & \\ & & & {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(-1) & & \\ & & & & {}^7\hat{u}^8(-2) & & \end{array}$$

Para determinar los restantes ejes instantáneos secundarios, se recurrirá a un proceso que consta de los siguientes pasos:

1. Seleccione un eje instantáneo secundario arbitrario  ${}^i\hat{u}^j$  que se marcará con el número 0 y asuma que su localización se conoce.
2. Determine los ejes instantáneos secundarios que pueden determinarse con los ejes instantáneos marcados con el número -1<sup>1</sup> y con el eje secundario arbitrario seleccionado y marcado con 0. Los ejes instantáneos obtenidos en esta etapa del proceso se marcan con el número 1.
3. Repita el proceso del paso dos, pero ahora determinando los ejes instantáneos secundarios que pueden obtenerse empleando los ejes instantáneos marcados con los números -1, 0, 1. Los ejes instantáneos obtenidos en esta etapa se marcarán con el número 2.
4. El proceso de los pasos dos y tres se repite indefinidamente, marcando los nuevos ejes instantáneos con los números 3, 4..... hasta encontrar un eje instantáneo sobredeterminado; es decir, un eje instantáneo que pueda determinarse por la intersección de más de dos planos diferentes.

<sup>1</sup>La gran mayoría de estos ejes son primarios pero, como en este caso con los ejes  ${}^1\hat{u}^3$  y  ${}^2\hat{u}^4$ , puede haber ejes secundarios obtenidos mediante la aplicación directa del teorema de Aronhold-Kennedy.

**Nota 1:** En sentido estricto, el eje instantáneo secundario inicial puede elegirse arbitrariamente; sin embargo, es más conveniente, desde el punto de vista computacional, seleccionar un eje instantáneo secundario localizado en la intersección de dos planos que une los dos ejes instantáneos primarios (o marcados con el número -1).

Suponga que  ${}^j\hat{u}^k$  es un eje instantáneo secundario que de acuerdo con el teorema de Aronhold-Kennedy está contenido en el plano definido por los ejes instantáneos  ${}^i\hat{u}^k$  y  ${}^i\hat{u}^j$ , ambos marcados con el número -1, entonces

$${}^j\hat{u}^k = \lambda_1 {}^i\hat{u}^k + \lambda_2 {}^i\hat{u}^j \quad \text{donde } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \quad (4.49)$$

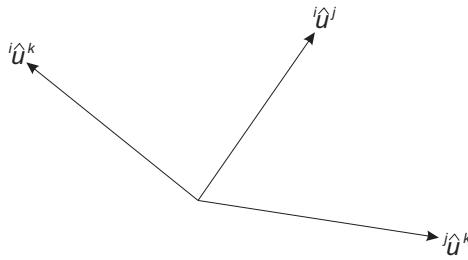


Figura 4.10: Eje instantáneo secundario  ${}^j\hat{u}^k$  contenido en el plano definido por  ${}^i\hat{u}^k$  e  ${}^i\hat{u}^j$

La ecuación (4.49) puede escribirse sin pérdida de generalidad, como

$$\frac{1}{\lambda_1} {}^j\hat{u}^k = {}^i\hat{u}^k + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} {}^i\hat{u}^j \quad \text{donde } \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbf{R} \quad -\infty < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < \infty \quad (4.50)$$

Compare la ecuación (4.50) con la ecuación (4.51) dada por

$${}^j\hat{u}^k = \lambda {}^i\hat{u}^k + (1 - \lambda) {}^i\hat{u}^j \quad (4.51)$$

que puede reescribirse como

$$\frac{1}{\lambda} {}^j\hat{u}^k = {}^i\hat{u}^k + \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} {}^i\hat{u}^j \quad (4.52)$$

Para que las ecuaciones (4.50) y (4.52) sean equivalentes, se tiene que  $\lambda = \lambda_1$ , falta probar que  $\frac{1-\lambda}{\lambda}$  es equivalente a  $-\infty < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < \infty$ .

La prueba es sencilla, pues

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} = +\infty \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} = -\infty$$

Entonces la localización del eje secundario seleccionado puede escribirse en términos de una única variable  $\lambda$ , pues  ${}^i\hat{u}^k$  y  ${}^i\hat{u}^j$  son conocidos.

Un procedimiento implementado en Maple<sup>©</sup> determina todos los ejes instantáneos secundarios que satisfacen esta condición. Para este mecanismo, la localización del eje instantáneo sobre determinado conduce a una ecuación, usualmente cuadrática en la variable  $\lambda$  que determina la localización del eje instantáneo seleccionado.

5. El proceso indicado en los pasos uno a cuatro se repite para un nuevo eje instantáneo secundario, cuyo dirección del eje pueda escribirse como una combinación lineal de dos ejes instantáneos primarios. La localización de un eje instantáneo sobre determinado conduce a otra ecuación, usualmente cuadrática en la variable  $\lambda^*$  que determina la localización del eje instantáneo seleccionado.

La localización correcta de los ejes instantáneos seleccionados; es decir, los valores de  $\lambda$  y  $\lambda^*$  correctos, se determinan comparando la localización de un eje secundario que pueda determinarse empleando cualquiera de los ejes instantáneos secundarios seleccionados.

**Nota 2:** En sentido estricto cualquier pareja de ejes instantáneos que pueden escribirse como una combinación lineal de dos ejes instantáneos marcados con el número 1—es decir ejes instantáneos primarios o aquellos que pueden determinarse por la aplicación directa del teorema de Aronhold-Kennedy, pueden emplearse; sin embargo, conviene emplear aquellos ejes instantáneos que conduzcan a un número mínimo de ecuaciones.

#### 4.4.2. Obtención del sistema de ecuaciones y su solución

El objetivo de este análisis es determinar los tornillos infinitesimales asociados a los movimientos relativos de los eslabones tres, cinco, seis, siete y ocho respecto del eslabón uno, de los eslabones cuatro, cinco, seis y siete respecto del eslabón dos, de los eslabones cinco, seis y siete respecto del eslabón tres, de los eslabones seis, siete y ocho respecto del eslabón cuatro, de los eslabones siete y ocho respecto del eslabón cinco y del eslabón siete respecto del eslabón ocho. Por lo tanto la Tabla 4.5 muestra todos los ejes secundarios que se pueden escribir en términos de dos ejes instantáneos primarios empleando una variable  $\lambda$ .

Tabla 4.5: Ejes instantáneos secundarios cuyo vector unitario asociado a la dirección del eje de rotación puede escribirse como una combinación lineal de las direcciones asociadas a los dos ejes instantáneos primarios

${}^1\hat{u}^5$	se encuentra en el plano determinado por	${}^4\hat{u}^1$	${}^4\hat{u}^5$
${}^1\hat{u}^7$	se encuentra en el plano determinado por	${}^1\hat{u}^3$	${}^3\hat{u}^7$
${}^1\hat{u}^8$	se encuentra en el plano determinado por	${}^1\hat{u}^2$	${}^2\hat{u}^8$
${}^2\hat{u}^5$	se encuentra en el plano determinado por	${}^2\hat{u}^4$	${}^4\hat{u}^5$
${}^2\hat{u}^6$	se encuentra en el plano determinado por	${}^2\hat{u}^8$	${}^6\hat{u}^8$
${}^2\hat{u}^7$	se encuentra en el plano determinado por	${}^2\hat{u}^3$	${}^3\hat{u}^7$
${}^3\hat{u}^5$	se encuentra en el plano determinado por	${}^3\hat{u}^4$	${}^4\hat{u}^5$
${}^3\hat{u}^6$	se encuentra en el plano determinado por	${}^3\hat{u}^7$	${}^6\hat{u}^7$
${}^3\hat{u}^8$	se encuentra en el plano determinado por	${}^2\hat{u}^3$	${}^2\hat{u}^8$
${}^4\hat{u}^6$	se encuentra en el plano determinado por	${}^4\hat{u}^5$	${}^5\hat{u}^6$
${}^4\hat{u}^7$	se encuentra en el plano determinado por	${}^3\hat{u}^4$	${}^3\hat{u}^7$
${}^4\hat{u}^8$	se encuentra en el plano determinado por	${}^2\hat{u}^4$	${}^2\hat{u}^8$
${}^5\hat{u}^7$	se encuentra en el plano determinado por	${}^5\hat{u}^6$	${}^6\hat{u}^7$
${}^5\hat{u}^8$	se encuentra en el plano determinado por	${}^5\hat{u}^6$	${}^6\hat{u}^8$
${}^7\hat{u}^8$	se encuentra en el plano determinado por	${}^6\hat{u}^7$	${}^6\hat{u}^8$

De la Tabla 4.5 se selecciona el eje instantáneo secundario  ${}^3\hat{u}^5$  que puede escribirse como

$${}^3\hat{u}^5 = -\frac{12\lambda}{13} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} (1-\lambda) - \frac{5\lambda}{13} \quad \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \quad (4.53)$$

El arreglo diagonal de los ejes instantáneos después de esta etapa sería

$$\begin{array}{cccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(-1) & {}^4\hat{u}^1(-1) & {}^1\hat{u}^5(-2) & {}^1\hat{u}^6(-2) & {}^1\hat{u}^7(-2) & {}^1\hat{u}^8(-2) \\ {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-1) & {}^2\hat{u}^5(-2) & {}^2\hat{u}^6(-2) & {}^2\hat{u}^7(-2) & {}^2\hat{u}^8(-1) & \\ {}^3\hat{u}^4(-1) & & {}^3\hat{u}^5(0) & {}^3\hat{u}^6(-2) & {}^3\hat{u}^7(-1) & {}^3\hat{u}^8(-2) & \\ & & {}^4\hat{u}^5(-1) & {}^4\hat{u}^6(-2) & {}^4\hat{u}^7(-2) & {}^4\hat{u}^8(-2) & \\ & & & {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(-2) & {}^5\hat{u}^8(-2) & \\ & & & & {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(-1) & \\ & & & & & {}^7\hat{u}^8(-2) & \end{array}$$

Por lo tanto pueden determinarse los siguientes ejes instantáneos secundarios<sup>2</sup>  ${}^1\hat{u}^5$ ,  ${}^2\hat{u}^5$

$$\textcircled{{}^2\hat{u}^5} \implies \boxed{{}^2\hat{u}^3} \textcircled{{}^3\hat{u}^5}$$

$$\textcircled{{}^2\hat{u}^5} \implies \boxed{{}^2\hat{u}^4} \boxed{{}^4\hat{u}^5}$$

$$\textcircled{{}^3\hat{u}^6} \implies \textcircled{{}^3\hat{u}^5} \boxed{{}^5\hat{u}^6}$$

$$\textcircled{{}^3\hat{u}^6} \implies \boxed{{}^3\hat{u}^7} \boxed{{}^6\hat{u}^7}$$

Después de identificar los ejes instantáneos secundarios  ${}^2\hat{u}^5$  y  ${}^3\hat{u}^6$  que se van a marcar con el número 1, el arreglo diagonal de los ejes instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(-1) & {}^4\hat{u}^1(-1) & {}^1\hat{u}^5(1) & {}^1\hat{u}^6(-2) & {}^1\hat{u}^7(-2) & {}^1\hat{u}^8(-2) \\ {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-1) & {}^2\hat{u}^5(1) & {}^2\hat{u}^6(-2) & {}^2\hat{u}^7(-2) & {}^2\hat{u}^8(-1) & \\ {}^3\hat{u}^4(-1) & & {}^3\hat{u}^5(0) & {}^3\hat{u}^6(1) & {}^3\hat{u}^7(-1) & {}^3\hat{u}^8(-2) & \\ & & {}^4\hat{u}^5(-1) & {}^4\hat{u}^6(-2) & {}^4\hat{u}^7(-2) & {}^4\hat{u}^8(-2) & \\ & & & {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(1) & {}^5\hat{u}^8(-2) & \\ & & & & {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(-1) & \\ & & & & & {}^7\hat{u}^8(-2) & \end{array}$$

El siguiente paso consiste en hacer uso de todos los ejes instantáneos secundarios que se han obtenido hasta ahora, y de esta forma encontrar que ejes instantáneos secundarios adicionales se pueden obtener<sup>3</sup>. Por lo tanto

<sup>2</sup>Sólo se indican los ejes instantáneos requeridos.

<sup>3</sup>Sólo se indican los ejes instantáneos requeridos, sin embargo en el arreglo diagonal se indican todos los ejes instantáneos encontrados.

$$\left( \begin{array}{c} 2\hat{u}^6 \\ \hline \end{array} \right) \Rightarrow \left[ \begin{array}{c} 2\hat{u}^3 \\ \hline \end{array} \right] \left( \begin{array}{c} 3\hat{u}^6 \\ \hline \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{c} 2\hat{u}^6 \\ \hline \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c} 2\hat{u}^5 \\ \hline \end{array} \right) \left[ \begin{array}{c} 5\hat{u}^6 \\ \hline \end{array} \right]$$

$$\left( \begin{array}{c} 2\hat{u}^6 \\ \hline \end{array} \right) \Rightarrow \left[ \begin{array}{c} 2\hat{u}^8 \\ \hline \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 6\hat{u}^8 \\ \hline \end{array} \right]$$

Después de identificar el eje instantáneo secundario sobredeterminado  ${}^2\hat{u}^6$  que se va a marcar con el número 2, el arreglo diagonal de los ejes instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{ccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(-1) & {}^4\hat{u}^1(-1) & {}^1\hat{u}^5(1) & {}^1\hat{u}^6(2) & {}^1\hat{u}^7(2) & {}^1\hat{u}^8(-2) \\ {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-1) & {}^2\hat{u}^5(1) & {}^2\hat{u}^6(2) & {}^2\hat{u}^7(2) & {}^2\hat{u}^8(-1) & \\ {}^3\hat{u}^4(-1) & {}^3\hat{u}^5(0) & {}^3\hat{u}^6(1) & {}^3\hat{u}^7(-1) & {}^3\hat{u}^8(2) & & \\ {}^4\hat{u}^5(-1) & {}^4\hat{u}^6(2) & {}^4\hat{u}^7(2) & {}^4\hat{u}^8(-2) & & & \\ {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(1) & {}^5\hat{u}^8(-2) & & & & \\ {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(-1) & & & & & \\ {}^7\hat{u}^8(-2) & & & & & & \end{array}$$

De la ecuación (4.49) el vector unitario asociado a la dirección del eje instantáneo secundario  ${}^3\hat{u}^5$  está dada por

$${}^3\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} -\frac{12\lambda}{13} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda) - \frac{5\lambda}{13} \\ \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

A continuación se escriben los vectores unitarios asociados a las direcciones de los ejes instantáneos secundarios involucrados

$${}^3\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} u_{36x} \\ u_{36y} \\ u_{36z} \end{bmatrix} \quad {}^2\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} u_{25x} \\ u_{25y} \\ u_{25z} \end{bmatrix} \quad {}^2\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} u_{26x} \\ u_{26y} \\ u_{26z} \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones necesarias para determinar las componentes de los vectores unitarios asociados a los ejes de rotación se obtienen aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Killing de una manera sistemática vea las ecuaciones (4.9 - 4.12)

$$E36_7 = -u_{36x}\sqrt{3} + u_{36z} \quad (4.55)$$

$$E36_5 = \frac{-2857(13\sqrt{3}(\lambda u_{36z} - u_{36z}) + \lambda(-26u_{36x} - 13u_{36y} + 58u_{36z}) + 26u_{36x} + 13u_{36y})}{(13\sqrt{3} + 58)(-2857\lambda - 507 + 754\sqrt{3})} \quad (4.56)$$

$$E25_4 = \frac{3r_{25z}\sqrt{3} + 276r_{25y} - 67r_{25z} - 115}{3\sqrt{3} - 67} \quad (4.57)$$

$$E25_3 = \frac{311(13\sqrt{3}(\lambda u_{25x} - \lambda u_{25z} - u_{25x} + u_{25z}) - 3\lambda u_{25x} - 11u_{25y}\lambda + 14\lambda u_{25z} + 13u_{25x} - 13u_{25y})}{(13\sqrt{3} - 14)(-311\lambda + 507 + 182\sqrt{3})} \quad (4.58)$$

$$E26_8 = -\frac{3}{2} + u_{26y} + u_{26z} \quad (4.59)$$

$$E26_8 = -\frac{u_{26y} u_{36z} - u_{26z} u_{36y} - u_{26y} + u_{26z} + u_{36y} - u_{36z}}{u_{36y} - 1} \quad (4.60)$$

$$E26_5 = \frac{u_{25y} u_{26z} - u_{25z} u_{26y} - 2 u_{25z} + 2 u_{26z}}{2 + u_{25y}} \quad (4.61)$$

Se tiene un sistema de siete ecuaciones con nueve incógnitas, por lo tanto es conveniente normalizar las componentes  $(u_{ijx}, u_{ijy}, u_{ijz})$  del vector unitario en términos de una de ellas para reducir el número de incógnitas; es decir, si se selecciona la componente  $u_{ijx}$  el vector unitario se reduce a  $(r_{ijx} = 1, r_{ijy} = \frac{u_{ijy}}{u_{ijx}}, r_{ijz} = \frac{u_{ijz}}{u_{ijx}})$ . Esta condición es válida siempre y cuando la componente seleccionada no sea igual a 0, este resultado puede extenderse a cada una de las ecuaciones (4.55) - (4.61). Por lo tanto

$$\begin{aligned} {}^3\hat{u}^6 &= \begin{bmatrix} 1 \\ r_{36y} \\ r_{36z} \end{bmatrix} & {}^2\hat{u}^5 &= \begin{bmatrix} 1 \\ r_{25y} \\ r_{25z} \end{bmatrix} & {}^2\hat{u}^6 &= \begin{bmatrix} 1 \\ r_{26y} \\ r_{26z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando esta condición a las ecuaciones (4.55) - (4.61) se forma el conjunto final de ecuaciones para determinar los ejes instantáneos de rotación, dado por

$$0 = -\sqrt{3} + r_{36z} \quad (4.62)$$

$$0 = \frac{-2857(13\sqrt{3}\lambda r_{36z} - 13\sqrt{3}r_{36z} - 13r_{36y}\lambda + 58\lambda r_{36z} - 26\lambda + 13r_{36y} + 26)}{(13\sqrt{3} + 58)(-2857\lambda - 507 + 754\sqrt{3})} \quad (4.63)$$

$$0 = \frac{3u_{25z}\sqrt{3} - 115u_{25x} + 276u_{25y} - 67u_{25z}}{3\sqrt{3} - 67} \quad (4.64)$$

$$0 = \frac{-311(13\sqrt{3}(\lambda r_{25z} - \lambda - r_{25z}) + 11r_{25y}\lambda - 14\lambda r_{25z} + 13\sqrt{3} + 3\lambda + 13r_{25y} - 13)}{(13\sqrt{3} - 14)(-311\lambda + 507 + 182\sqrt{3})} \quad (4.65)$$

$$0 = -\frac{3}{2}u_{26x} + u_{26y} + u_{26z} \quad (4.66)$$

$$0 = \frac{u_{26x}u_{36y} - u_{26x}u_{36z} - u_{26y}u_{36x} + u_{26y}u_{36z} + u_{26z}u_{36x} - u_{26z}u_{36y}}{-u_{36y} + u_{36x}} \quad (4.67)$$

$$0 = \frac{2u_{25x}u_{26z} + u_{25y}u_{26z} - 2u_{25z}u_{26x} - u_{25z}u_{26y}}{2u_{25x} + u_{25y}} \quad (4.68)$$

De la ecuación (4.62) se obtiene directamente el valor de la componente  $r_{36z}$ , Además de las ecuaciones lineales (4.64) y (4.66) se resuelven las variables  $r_{36z}, r_{25z}$  y  $r_{26z}$  en términos de sus contrapartes  $r_{25y}$  y  $r_{26y}$

$$r_{36z} = \sqrt{3} \quad (4.69)$$

$$r_{25z} = \frac{(67 + 3\sqrt{3})(12r_{25y} - 5)}{194} \quad (4.70)$$

$$r_{26z} = \frac{3}{2} - r_{26y} \quad (4.71)$$

Sustituyendo los resultados recién encontrados en las ecuaciones (4.63), (4.65), (4.67), y (4.68) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$0 = \frac{-2857(13\lambda - 13 - 13r_{36y}\lambda + 58\sqrt{3}\lambda + 13r_{36y})}{(13\sqrt{3} + 58)(-2857\lambda - 507 + 754\sqrt{3})} \quad (4.72)$$

$$0 = \frac{(-7718r_{25y}\lambda + 4687\lambda + 1118r_{25y} + 9948\sqrt{3}\lambda r_{25y} - 1937 - 6667\sqrt{3}\lambda - 10452\sqrt{3}r_{25y} + 6877\sqrt{3}}{(13\sqrt{3} - 14)(-311\lambda + 507 + 182\sqrt{3})} \quad (4.73)$$

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{2r_{26y}\sqrt{3} + 2r_{36y}r_{26y} - 2\sqrt{3} - 4r_{26y} - r_{36y} + 3}{r_{36y} - 1} \quad (4.74)$$

$$0 = -\frac{36\sqrt{3}r_{25y}r_{26y} + 72\sqrt{3}r_{25y} - 15r_{26y}\sqrt{3} + 998r_{25y}r_{26y} - 30\sqrt{3} + 1317r_{25y} + 53r_{26y} - 1252}{388 + 194r_{25y}} \quad (4.75)$$

De manera sistemática se despejan y sustituyen las componentes  $r_{ijy}$  de cada una de las ecuaciones (4.72) - (4.75) por lo tanto

$$r_{26y} = -\frac{72\sqrt{3}r_{25y} - 30\sqrt{3} + 1317r_{25y} - 1252}{36\sqrt{3}r_{25y} - 15\sqrt{3} + 998r_{25y} + 53} \quad (4.76)$$

$$0 = \frac{-7614r_{25y} + r_{25y}r_{36y}(180\sqrt{3} + 3632) + 4579 + 4234\sqrt{3}r_{25y} - 75\sqrt{3}r_{36y} - 2233\sqrt{3} - 2451r_{36y}}{(53 + 36\sqrt{3}r_{25y} - 15\sqrt{3} + 998r_{25y})(r_{36y} - 1)} \quad (4.77)$$

$$r_{25y} = \frac{1}{2} \frac{75\sqrt{3}r_{36y} + 2233\sqrt{3} + 2451r_{36y} - 4579}{90\sqrt{3}r_{36y} + 2117\sqrt{3} + 1816r_{36y} - 3807} \quad (4.78)$$

$$0 = -\frac{40315\sqrt{3}\lambda + r_{36y}(-16781\lambda + 2231\sqrt{3}\lambda - 15119 - 4667\sqrt{3}) - 52611\sqrt{3} - 94787\lambda + 138983}{(90\sqrt{3}r_{36y} + 2117\sqrt{3} + 1816r_{36y} - 3807)(13\sqrt{3} - 14)(-311\lambda + 507 + 182\sqrt{3})} \quad (4.79)$$

$$r_{36y} = -\frac{40315\sqrt{3}\lambda - 52611\sqrt{3} - 94787\lambda + 138983}{-15119 - 16781\lambda + 2231\sqrt{3}\lambda - 4667\sqrt{3}} \quad (4.80)$$

$$0 = \frac{5714(210100\sqrt{3}\lambda^2 + 1087307\sqrt{3}\lambda + 531095\lambda^2 - 372307\sqrt{3} - 1124279\lambda + 805116)}{(-15119 - 16781\lambda + 2231\sqrt{3}\lambda - 4667\sqrt{3})(13\sqrt{3} + 58)(-2857\lambda - 507 + 754\sqrt{3})} \quad (4.81)$$

Se obtiene una ecuación cuadrática en  $\lambda$ , resolviendo la ecuación (4.81) se obtienen dos soluciones

$$\lambda_a = -\frac{13(14567\sqrt{3} - 19764)}{(42020\sqrt{3} + 106219)} \quad (4.82)$$

$$\lambda_b = -\frac{949}{5} \frac{148\sqrt{3} + 169}{42020\sqrt{3} + 106219} \quad (4.83)$$

Los resultados recién obtenidos se sustituyen en la ecuación (4.54), y posteriormente se hacen unitarios para obtener las dos direcciones para el eje instantáneo secundario  ${}^3\hat{u}^5$

$${}^3\hat{u}^{5a} = \begin{bmatrix} \frac{12(14567\sqrt{3} - 19764)}{\sqrt{255408252634 - 101604653995\sqrt{3}}} \\ -\frac{3}{2} \frac{-165511 + 1681\sqrt{3}}{\sqrt{255408252634 - 101604653995\sqrt{3}}} \\ \frac{29}{2} \frac{7979\sqrt{3} - 5197}{2\sqrt{255408252634 - 101604653995\sqrt{3}}} \end{bmatrix} \quad {}^3\hat{u}^{5b} = \begin{bmatrix} \frac{876(148\sqrt{3} + 169)}{\sqrt{1108633531681 + 629312408108\sqrt{3}}} \\ \frac{587513 + 399758\sqrt{3}}{\sqrt{1108633531681 + 629312408108\sqrt{3}}} \\ \frac{58(3022\sqrt{3} + 5961)}{\sqrt{1108633531681 + 629312408108\sqrt{3}}} \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Finalmente con el resultado anterior se obtiene los ejes instantáneos secundarios  ${}^3\hat{u}^{6a}$ ,  ${}^3\hat{u}^{6b}$ ,  ${}^4\hat{u}^{6a}$  y  ${}^4\hat{u}^{6b}$

$${}^3\hat{u}^{6a} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{105-36\sqrt{3}}} \\ \frac{-2\sqrt{3}+9}{\sqrt{105-36\sqrt{3}}} \\ \frac{3}{\sqrt{105-36\sqrt{3}}} \end{bmatrix} \quad {}^3\hat{u}^{6b} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{187-72\sqrt{3}}} \\ \frac{-3(\sqrt{3}-4)}{\sqrt{187-72\sqrt{3}}} \\ \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{187-72\sqrt{3}}} \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

$${}^4\hat{u}^{6a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{53-30\sqrt{3}}} \\ \frac{-5+3\sqrt{3}}{\sqrt{53-30\sqrt{3}}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^4\hat{u}^{6b} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{67-36\sqrt{3}}} \\ \frac{-3(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{67-36\sqrt{3}}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Los resultados obtenidos en este paso para el eje instantáneo secundario  ${}^4\hat{u}^6$  se emplearán posteriormente para determinar la solución correcta.

El procedimiento debe repetirse para otro eje instantáneo secundario. De la Tabla 4.5 se selecciona el eje instantáneo  ${}^2\hat{u}^7$  que puede escribir como

$${}^2\hat{u}^7 = -\frac{12}{13}\lambda^*\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda^*) - \frac{5}{13}\lambda^*\frac{1}{2} - \frac{\lambda^*}{2} \quad (4.87)$$

El arreglo diagonal de los ejes instantáneos después de esta condición sería

$$\begin{array}{cccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(-1) & {}^4\hat{u}^1(-1) & {}^1\hat{u}^5(-2) & {}^1\hat{u}^6(-2) & {}^1\hat{u}^7(-2) & {}^1\hat{u}^8(-2) \\ {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-1) & {}^2\hat{u}^5(-2) & {}^2\hat{u}^6(-2) & {}^2\hat{u}^7(0) & {}^2\hat{u}^8(-1) \\ {}^3\hat{u}^4(-1) & {}^3\hat{u}^5(-2) & {}^3\hat{u}^6(-2) & {}^3\hat{u}^7(-1) & {}^3\hat{u}^8(-2) \\ {}^4\hat{u}^5(-1) & {}^4\hat{u}^6(-2) & {}^4\hat{u}^7(-2) & {}^4\hat{u}^8(-2) \\ {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(-2) & {}^5\hat{u}^8(-2) \\ {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(-1) \\ {}^7\hat{u}^8(-2) \end{array}$$

Por lo tanto pueden determinarse los siguientes ejes instantáneos<sup>4</sup>  ${}^2\hat{u}^6$ ,  ${}^4\hat{u}^7$

$$\left( \begin{array}{c} {}^2\hat{u}^6 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c} {}^2\hat{u}^7 \\ {}^6\hat{u}^7 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{c} {}^2\hat{u}^6 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c} {}^2\hat{u}^8 \\ {}^6\hat{u}^8 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{c} {}^4\hat{u}^7 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c} {}^2\hat{u}^4 \\ {}^2\hat{u}^7 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{c} {}^4\hat{u}^7 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c} {}^3\hat{u}^4 \\ {}^3\hat{u}^7 \end{array} \right)$$

<sup>4</sup>Sólo se indican los ejes instantáneos requeridos.

Después de identificar los ejes instantáneos secundarios  ${}^2\hat{u}^6$ ,  ${}^4\hat{u}^7$  que se van a marcar con el número 1, el arreglo diagonal de los ejes instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(-1) & {}^4\hat{u}^1(-1) & {}^1\hat{u}^5(-2) & {}^1\hat{u}^6(-2) & {}^1\hat{u}^7(1) & {}^1\hat{u}^8(-2) \\ {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-1) & {}^2\hat{u}^5(-2) & {}^2\hat{u}^6(1) & {}^2\hat{u}^7(0) & {}^2\hat{u}^8(-1) & \\ {}^3\hat{u}^4(-1) & {}^3\hat{u}^5(-2) & {}^3\hat{u}^6(-2) & {}^3\hat{u}^7(-1) & {}^3\hat{u}^8(-2) & & \\ & {}^4\hat{u}^5(-1) & {}^4\hat{u}^6(-2) & {}^4\hat{u}^7(1) & {}^4\hat{u}^8(-2) & & \\ & & {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(-2) & {}^5\hat{u}^8(-2) & & \\ & & & {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(-1) & & \\ & & & & {}^7\hat{u}^8(1) & & \end{array}$$

El siguiente paso consiste en hacer uso de todos los ejes instantáneos secundarios que se han obtenido hasta ahora, y de esta forma encontrar que ejes instantáneos adicionales se pueden obtener<sup>5</sup>. Por lo tanto

$$\boxed{{}^4\hat{u}^6} \implies \boxed{{}^2\hat{u}^4} \boxed{{}^2\hat{u}^6}$$

$$\boxed{{}^4\hat{u}^6} \implies \boxed{{}^4\hat{u}^5} \boxed{{}^5\hat{u}^6}$$

$$\boxed{{}^4\hat{u}^6} \implies \boxed{{}^4\hat{u}^7} \boxed{{}^6\hat{u}^7}$$

Después de identificar el eje instantáneo secundario sobredeterminado  ${}^4\hat{u}^6$  que se va a marcar con el número 2, el arreglo diagonal de los centros instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(-1) & {}^4\hat{u}^1(-1) & {}^1\hat{u}^5(-2) & {}^1\hat{u}^6(2) & {}^1\hat{u}^7(1) & {}^1\hat{u}^8(2) \\ {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-1) & {}^2\hat{u}^5(2) & {}^2\hat{u}^6(1) & {}^2\hat{u}^7(0) & {}^2\hat{u}^8(-1) & \\ {}^3\hat{u}^4(-1) & {}^3\hat{u}^5(-2) & {}^3\hat{u}^6(2) & {}^3\hat{u}^7(-1) & {}^3\hat{u}^8(2) & & \\ & {}^4\hat{u}^5(-1) & {}^4\hat{u}^6(2) & {}^4\hat{u}^7(1) & {}^4\hat{u}^8(2) & & \\ & & {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(2) & {}^5\hat{u}^8(-2) & & \\ & & & {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(-1) & & \\ & & & & {}^7\hat{u}^8(1) & & \end{array}$$

De la ecuación (4.89) el vector unitario asociado a la dirección del eje instantáneo secundario  ${}^2\hat{u}^7$  está dado por

$${}^2\hat{u}^7 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \lambda^*) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \lambda^*) + \lambda^* \\ \frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \lambda^*) \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

A continuación se escriben los vectores unitarios asociados a las direcciones de los ejes instantáneos secundarios involucrados.

$${}^2\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} u_{26x} \\ u_{26y} \\ u_{26z} \end{bmatrix} \quad {}^4\hat{u}^7 = \begin{bmatrix} u_{47x} \\ u_{47y} \\ u_{47z} \end{bmatrix} \quad {}^4\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} u_{46x} \\ u_{46y} \\ u_{46z} \end{bmatrix}$$

<sup>5</sup>Sólo se indican los ejes instantáneos requeridos, sin embargo en el arreglo diagonal se indican todos los ejes instantáneos encontrados.

Las ecuaciones necesarias se obtienen aplicando el teorema de Aronhod-Kennedy usando la forma de Killing de una manera sistemática vea las ecuaciones (4.9) - (4.12)

$$E26_8 = -\frac{3}{2} u_{26x} + u_{26y} + u_{26z} \quad (4.89)$$

$$E26_7 = -\frac{3 u_{26x} + 2 u_{26x} \sqrt{3} \lambda^* + u_{26x} \sqrt{3} - u_{26z} \sqrt{3} + 2 u_{26y} \lambda^* - 2 u_{26z} \lambda^* - 2 u_{26y} - u_{26z}}{2 \lambda^* + 1 + \sqrt{3}} \quad (4.90)$$

$$E47_3 = u_{47x} \quad (4.91)$$

$$E47_2 = \frac{r_{47x} \lambda^* (-72 + 7\sqrt{3}) + r_{47y} \lambda^* (9 + 2\sqrt{3}) + 69 r_{47z} + r_{47x} (3 - 7\sqrt{3}) + r_{47y} (-9 - 2\sqrt{3}) + r_{47z} (6 + 9\sqrt{3})}{23 \lambda^* + 2 + 3\sqrt{3}} \quad (4.92)$$

$$E46_2 = \frac{1}{(u_{26x} \sqrt{3} - 17 u_{26x} + 26 u_{26y}) (3 \sqrt{3} + 25)} [u_{26x} u_{46z} (\sqrt{3} + 16) + u_{26y} u_{46z} (-3 \sqrt{3} - 25) \\ u_{26z} u_{46x} (-\sqrt{3} - 16) + u_{26z} u_{46y} (3 \sqrt{3} + 25) - 23 u_{26x} r_{46y} + 23 u_{26y} u_{46x}] \quad (4.93)$$

$$E46_5 = u_{46z} \quad (4.94)$$

$$E46_7 = -\frac{u_{46x} \sqrt{3} u_{47y} - \sqrt{3} u_{46y} u_{47x} + u_{46y} u_{47z} - u_{46z} u_{47y}}{u_{47y}} \quad (4.95)$$

De las ecuaciones lineales (4.91) y (4.94) se obtienen directamente los valores de las componentes  $r_{47x}$  y  $r_{46z}$ , por lo tanto

$$r_{47x} = 0 \quad (4.96)$$

$$r_{46z} = 0 \quad (4.97)$$

De las ecuaciones (4.89) - (4.97) se forma un sistema de siete ecuaciones con nueve incógnitas, por lo tanto es conveniente normalizar las componentes  $(u_{ijx}, u_{ijy}, u_{ijz})$  del vector unitario en términos de una de ellas para reducir el número de incógnitas; es decir, si se selecciona la componente  $u_{ijy}$  el vector unitario se reduce a ( $r_{ijx} = \frac{u_{ijx}}{u_{ijy}}$ ,  $r_{ijy} = 1$ ,  $r_{ijz} = \frac{u_{ijz}}{u_{ijy}}$ ). Esta condición es válida siempre y cuando la componente seleccionada no sea igual a 0, este resultado puede extenderse a cada una de las ecuaciones (4.89) - (4.97). Por lo tanto

$${}^2\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} r_{26x} \\ 1 \\ r_{26z} \end{bmatrix} \quad {}^4\hat{u}^7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ r_{47z} \end{bmatrix} \quad {}^4\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} r_{46x} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando esta condición a las ecuaciones (4.89) - (4.97) se forma el conjunto final de ecuaciones para determinar los ejes instantáneos de rotación, dado por

$$0 = 1 - \frac{3}{2} r_{26x} + r_{26z} \quad (4.98)$$

$$0 = -\frac{3 r_{26x} + 2 r_{26x} \sqrt{3} \lambda^* + r_{26x} \sqrt{3} - r_{26z} \sqrt{3} - 2 r_{26z} \lambda^* + 2 \lambda^* - r_{26z} - 2}{2 \lambda^* + 1 + \sqrt{3}} \quad (4.99)$$

$$0 = \frac{-23 \sqrt{3} \lambda^* - 207 \sqrt{3} r_{47z} - 1725 \lambda^* r_{47z} + 23 \sqrt{3} + 207}{(-75 + 9\sqrt{3}) (23 \lambda^* + 2 + 3\sqrt{3})} \quad (4.100)$$

$$0 = \frac{-286 (\sqrt{3} r_{26z} r_{46x} - 3 r_{26z} \sqrt{3} + 16 r_{26z} r_{46x} + 23 r_{26x} - 25 r_{26z} - 23 r_{46x})}{(-17 + \sqrt{3}) (-11 r_{26x} + 17 + \sqrt{3}) (3 \sqrt{3} + 25)} \quad (4.101)$$

$$0 = -r_{46x} \sqrt{3} - r_{47z} \quad (4.102)$$

De la ecuación (4.96) se resuelve la variable  $r_{26z}$  en términos de su contraparte  $r_{26x}$

$$r_{47x} = 0 \quad (4.103)$$

$$r_{26z} = -1 + \frac{3}{2} r_{26x} \quad (4.104)$$

Sustituyendo los resultados recién encontrados en las ecuaciones (4.98) - (4.102) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{4r_{26x}\sqrt{3}\lambda^* - r_{26x}\sqrt{3} - 6r_{26x}\lambda^* + 2\sqrt{3} + 8\lambda + 3r_{26x} - 2}{2\lambda^* + 1 + \sqrt{3}} \quad (4.105)$$

$$0 = \frac{23}{3} \frac{9\sqrt{3}\lambda^* r_{47z} - \sqrt{3}\lambda^* - 9\sqrt{3}r_{47z} - 75\lambda^* r_{47z} + \sqrt{3} - 9\lambda^* - 3r_{47z} + 9}{(-25 + 3\sqrt{3})(23\lambda^* + 2 + 3\sqrt{3})} \quad (4.106)$$

$$0 = \frac{3r_{46x}\sqrt{3}r_{26x} - 9r_{26x}\sqrt{3} - 2r_{46x}\sqrt{3} + 48r_{46x}r_{26x} + 6\sqrt{3} - 29r_{26x} - 78r_{46x} + 50}{(-17 + \sqrt{3})(-11r_{26x} + 17 + \sqrt{3})(3\sqrt{3} + 25)} \quad (4.107)$$

$$0 = -r_{46x}\sqrt{3} - r_{47z} \quad (4.108)$$

Se despeja la coordenada  $r_{46x}$  de la ecuación (4.108) y se sustituye en la ecuación (4.107)

$$r_{46x} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}r_{47z} \quad (4.109)$$

$$0 = \frac{16\sqrt{3}r_{47z}r_{26x} + 9r_{26x}\sqrt{3} - 26\sqrt{3}r_{47z} + 3r_{47z}r_{26x} - 6\sqrt{3} + 29r_{26x} - 2r_{47z} - 50}{(-17 + \sqrt{3})(-11r_{26x} + 17 + \sqrt{3})(3\sqrt{3} + 25)} \quad (4.110)$$

Se despeja la coordenada  $r_{47z}$  de la ecuación (4.110) y se sustituye en la ecuación (4.106)

$$r_{47z} = -\frac{9r_{26x}\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 29r_{26x} - 50}{16r_{26x}\sqrt{3} - 26\sqrt{3} + 3r_{26x} - 2} \quad (4.111)$$

$$0 = \frac{(267r_{26x}\sqrt{3}\lambda^* + 236\sqrt{3}\lambda^* + 435r_{26x}\sqrt{3} + 1857r_{26x}\lambda^* - 704\sqrt{3} - 3492\lambda^* + 405r_{26x} - 408}{(16r_{26x}\sqrt{3} - 26\sqrt{3} + 3r_{26x} - 2)(-25 + 3\sqrt{3})(23\lambda^* + 2 + 3\sqrt{3})} \quad (4.112)$$

Se despeja la coordenada  $r_{26x}$  de la ecuación (4.112) y se sustituye en la ecuación (4.105)

$$r_{26x} = -\frac{4}{3} \frac{59\sqrt{3}\lambda^* - 176\sqrt{3} - 873\lambda^* - 102}{89\sqrt{3}\lambda^* + 145\sqrt{3} + 619\lambda^* + 135} \quad (4.113)$$

$$0 = \frac{-2(1460\sqrt{3}\lambda^{*2} - 11\sqrt{3}\lambda^* - 744\lambda^{*2} + 137\sqrt{3} + 1526\lambda^* + 76)}{(89\sqrt{3}\lambda^* + 145\sqrt{3} + 619\lambda^* + 135)(2\lambda^* + 1 + \sqrt{3})} \quad (4.114)$$

Se obtiene una ecuación cuadrática en  $\lambda$ , resolviendo la ecuación (4.114) se obtienen dos soluciones

$$\lambda_a^* = -\frac{1}{4} \frac{97\sqrt{3} + 678}{365\sqrt{3} - 186} \quad (4.115)$$

$$\lambda_b^* = \frac{27\sqrt{3} - 212}{365\sqrt{3} - 186} \quad (4.116)$$

Los resultados recién obtenidos se sustituyen en la ecuación (4.88), y posteriormente se hacen unitarios para obtener las dos direcciones para el eje instantáneo  ${}^2\hat{u}^7$

$${}^2\hat{u}^{7a} = \begin{bmatrix} \frac{(519\sqrt{3}-22)\sqrt{3}}{\sqrt{5666526-346218}\sqrt{3}} \\ -\frac{-879+119\sqrt{3}}{\sqrt{5666526-346218}\sqrt{3}} \\ \frac{(519\sqrt{3}-22)\sqrt{3}}{\sqrt{5666526-346218}\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad {}^2\hat{u}^{7b} = \begin{bmatrix} \frac{26(13\sqrt{3}+1)}{\sqrt{745893+62116}\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}(378+107\sqrt{3})}{\sqrt{745893+62116}\sqrt{3}} \\ \frac{26(13\sqrt{3}+1)}{\sqrt{745893+62116}\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

Finalmente con el resultado anterior se obtienen los ejes instantáneos secundarios  ${}^2\hat{u}^{6a}$ ,  ${}^2\hat{u}^{6b}$ ,  ${}^4\hat{u}^{6a}$  y  ${}^4\hat{u}^{6b}$

$${}^2\hat{u}^{6a} = \begin{bmatrix} \frac{-4(\sqrt{3}-12)}{\sqrt{5294-684}\sqrt{3}} \\ \frac{-6\sqrt{3}+25}{\sqrt{5294-684}\sqrt{3}} \\ \frac{47}{\sqrt{5294-684}\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad {}^2\hat{u}^{6b} = \begin{bmatrix} \frac{102-28\sqrt{3}}{\sqrt{33537-15792}\sqrt{3}} \\ \frac{33}{\sqrt{33537-15792}\sqrt{3}} \\ \frac{-42\sqrt{3}+120}{\sqrt{33537-15792}\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

$${}^4\hat{u}^{6a} = \begin{bmatrix} \frac{73}{2\sqrt{2188+351}\sqrt{3}} \\ \frac{13/2\sqrt{3}+27}{\sqrt{2188+351}\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^4\hat{u}^{6b} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{67-36}\sqrt{3}} \\ \frac{-3(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{67-36}\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

Resumiendo para el primer caso se supone el eje instantáneo secundario  ${}^3\hat{u}^5$  como conocido, obteniendo así los resultados dados por (4.85) y (4.86), por otra parte se supone el eje instantáneo  ${}^2\hat{u}^7$  como conocido y se obtienen los resultados dados por (4.118) y (4.119), al comparar los resultados obtenidos en los dos casos para la dirección del eje instantáneo secundario  $\hat{u}_{46}$  se observa que la única respuesta coincidente para los dos casos es:

$${}^4\hat{u}^{6b} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{67-36}\sqrt{3}} \\ \frac{-3(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{67-36}\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente a partir de este resultado, junto con los ejes instantáneos primarios y aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy se pueden determinar los restantes ejes instantáneos secundarios uno a uno siguiendo el procedimiento llevado a cabo para determinar los ejes instantáneos secundarios  ${}^1\hat{u}^3$  y  ${}^2\hat{u}^4$  vea las ecuaciones (4.41) - (4.48). Por lo tanto los vectores unitarios asociados a los ejes instantáneos secundarios restantes están dados por

$${}^2\hat{u}^7 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}(492+71\sqrt{3})\sqrt{2}}{\sqrt{1521522+450839\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{2}\frac{(293+267\sqrt{3})\sqrt{2}}{\sqrt{1521522+450839\sqrt{3}}} \\ \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}(492+71\sqrt{3})\sqrt{2}}{\sqrt{1521522+450839\sqrt{3}}} \end{bmatrix}, \quad {}^1\hat{u}^7 = \begin{bmatrix} -\frac{2(\sqrt{3}-5)}{\sqrt{609-36\sqrt{3}}} \\ \frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{609-36\sqrt{3}}} \\ \frac{22}{\sqrt{609-36\sqrt{3}}} \end{bmatrix}, \quad {}^2\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} \frac{102-28\sqrt{3}}{\sqrt{33537-15792\sqrt{3}}} \\ \frac{33}{\sqrt{33537-15792\sqrt{3}}} \\ -\frac{42\sqrt{3}+120}{\sqrt{33537-15792\sqrt{3}}} \end{bmatrix}$$

$${}^4\hat{u}^7 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{25-12\sqrt{3}}} \\ \frac{2}{\sqrt{25-12\sqrt{3}}} \end{bmatrix}, \quad {}^7\hat{u}^8 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{234-80\sqrt{3}}} \\ \frac{3\sqrt{3}-10}{\sqrt{234-80\sqrt{3}}} \\ -\frac{\text{sqrt}3-10}{\sqrt{234-80\sqrt{3}}} \end{bmatrix}, \quad {}^1\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} \frac{732}{\sqrt{36836364+8533830\sqrt{3}}} \\ \frac{203\sqrt{3}+1929}{\sqrt{36836364+8533830\sqrt{3}}} \\ \frac{696(8+\sqrt{3})}{\sqrt{36836364+8533830\sqrt{3}}} \end{bmatrix}$$

$${}^2\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} \frac{606\sqrt{3}+3486}{\sqrt{5276727+5238264\sqrt{3}}} \\ \frac{2424+209\sqrt{3}}{\sqrt{35276727+5238264\sqrt{3}}} \\ \frac{4002}{\sqrt{35276727+5238264\sqrt{3}}} \end{bmatrix}, \quad {}^3\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{(187-72\sqrt{3})}} \\ -\frac{3(\sqrt{3}-4)}{\sqrt{187-72\sqrt{3}}} \\ \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{187-72\sqrt{3}}} \end{bmatrix}, \quad {}^5\hat{u}^7 = \begin{bmatrix} \frac{522\sqrt{3}+888}{\sqrt{6483439+3742740\sqrt{3}}} \\ \frac{22}{\sqrt{6483439+3742740\sqrt{3}}} \\ \frac{(1566+899\sqrt{3})}{\sqrt{6483439+3742740\sqrt{3}}} \end{bmatrix}$$

$${}^5\hat{u}^8 = \begin{bmatrix} \frac{174\sqrt{3}-296}{\sqrt{7349070+958392\sqrt{3}}} \\ -\frac{348\sqrt{3}-1525}{\sqrt{7349070+958392\sqrt{3}}} \\ \frac{2117}{\sqrt{7349070+958392\sqrt{3}}} \end{bmatrix}, \quad {}^3\hat{u}^8 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{111-20\sqrt{3}}} \\ \frac{2}{\sqrt{111-20\sqrt{3}}} \\ -\frac{\sqrt{3}-10}{\sqrt{111-20\sqrt{3}}} \end{bmatrix}, \quad {}^3\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} \frac{438\sqrt{2}(97\sqrt{3}+103)}{\sqrt{225722088686+127341064687\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{2}\frac{368717+257951\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{(225722088686+127341064687\sqrt{3})}} \\ \frac{(55187\sqrt{3}+111273)\sqrt{2}}{\sqrt{225722088686+127341064687\sqrt{3}}} \end{bmatrix}$$

$${}^1\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{3}-6}{\sqrt{669-336\sqrt{3}}} \\ \frac{3}{\sqrt{669-336\sqrt{3}}} \\ \frac{12(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{669-336\sqrt{3}}} \end{bmatrix}, \quad {}^1\hat{u}^8 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{309+168\sqrt{3}}} \\ \frac{6\sqrt{3}+14}{\sqrt{309+168\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{\sqrt{309+168\sqrt{3}}} \end{bmatrix}, \quad {}^4\hat{u}^8 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{147-60\sqrt{3}}} \\ -\frac{4}{\sqrt{147-60\sqrt{3}}} \\ -\frac{3\sqrt{3}+10}{\sqrt{147-60\sqrt{3}}} \end{bmatrix}$$

Las imágenes que ilustran la localización de los ejes instantáneos secundarios con la intersección de los planos correspondientes, no se muestran por razones de espacio.

#### 4.4.3. Verificación de los resultados

Los resultados obtenidos para los vectores unitarios asociados a las direcciones de los ejes instantáneos secundarios se comprobaron mediante la realización del análisis de velocidad del mecanismo para una velocidad angular de magnitud arbitraria de  $10 \text{ rad/s}$  en sentido horario del eslabón dos, seleccionado como eslabón motriz, y, a partir de los resultados, determinando los estados de velocidad entre los diferentes eslabones del mecanismo y finalmente el ISA correspondiente para cada movimiento relativo, este proceso se llevó a cabo mediante un programa implementado en Maple<sup>©</sup>.

Finalmente los resultados del análisis de velocidad fueron verificados satisfactoriamente mediante el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>; sin embargo, los resultados de la simulación no se muestran por razones de espacio.

## 4.5. Mecanismo indeterminado de ocho barras asociado a la subálgebra de movimientos esféricos

Considere el mecanismo mostrado en la Figura 4.11. Este mecanismo fue analizado por Zarkandi [20],[30] quien determinó los ejes instantáneos secundarios indeterminados mediante un método analítico resolviendo tres ecuaciones polinomiales de grado tres. Este mecanismo está formado por ocho eslabones, tres de ellos ternarios y los restantes cinco binarios y nueve pares pares de revoluta y un par prismático cuyas direcciones de sus ejes son arbitrarias y pasan por un punto común  $O$ .

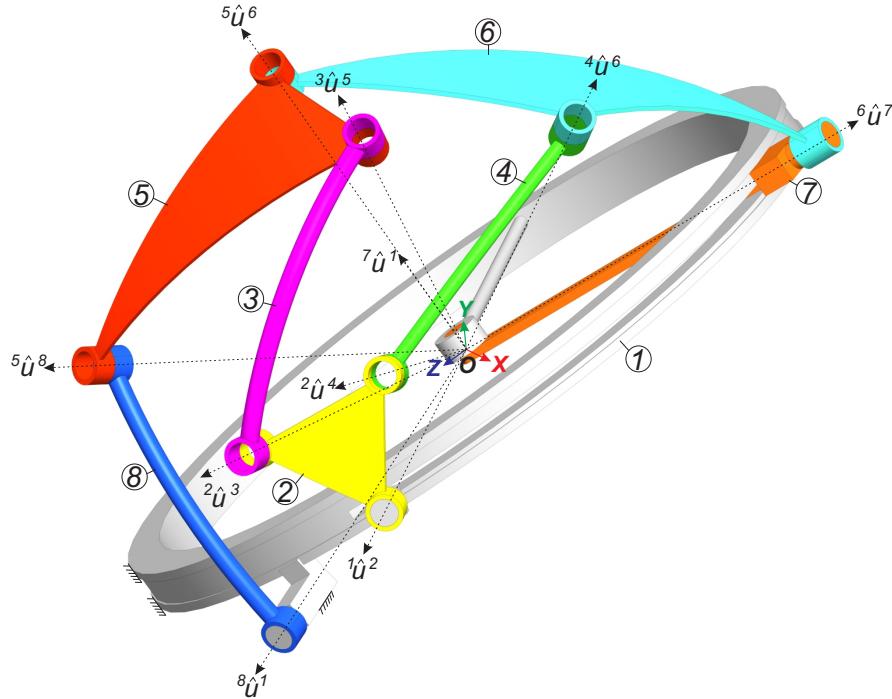


Figura 4.11: Mecanismo indeterminado de 8 barras asociado a la subálgebra de movimientos esféricos

Los parámetros necesarios para la determinación de los tornillos asociados a los pares cinemáticos con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , son:

$$\vec{r}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\hat{u}^2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad {}^2\hat{u}^3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}, \quad {}^3\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{5}}{25} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{4\sqrt{5}}{25} \end{bmatrix}, \quad {}^5\hat{u}^8 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}, \quad {}^8\hat{u}^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$${}^2\hat{u}^4 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad {}^4\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^5\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{12}{13} \\ \frac{5}{13} \end{bmatrix}, \quad {}^6\hat{u}^7 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad {}^7\hat{u}^1 = \begin{bmatrix} -\frac{59}{100} \\ \frac{39}{50} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

donde  $\vec{r}_O$ , representa el punto de intersección de los ejes de los pares de tornillo y  ${}^1\hat{u}^2$ ,  ${}^2\hat{u}^3$ ,  ${}^3\hat{u}^5$ ,  ${}^5\hat{u}^8$ ,  ${}^8\hat{u}^1$ ,  ${}^2\hat{u}^4$ ,  ${}^4\hat{u}^6$ ,  ${}^5\hat{u}^6$ ,  ${}^6\hat{u}^7$  y  ${}^7\hat{u}^1$  representan las direcciones de los ejes de los pares de rotación, donde las direcciones de los ejes de los pares de revoluta están dados en términos de una unidad de longitud no especificada.

#### 4.5.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's

Con base a la numeración de los eslabones mostrada en la Figura 4.11 los ejes instantáneos primarios; es decir, aquellos que se pueden determinar mediante la examinación del mecanismo son:

$${}^1\hat{u}^2, \quad {}^7\hat{u}^1, \quad {}^8\hat{u}^1, \quad {}^2\hat{u}^3, \quad {}^2\hat{u}^4, \quad {}^3\hat{u}^3, \quad {}^4\hat{u}^6, \quad {}^5\hat{u}^6, \quad {}^6\hat{u}^7, \quad {}^6\hat{u}^8$$

El arreglo diagonal de los ejes instantáneos del mecanismo se muestran a continuación en la Tabla 4.6.

Tabla 4.6: Ejes instantáneos de tronillos asociados al mecanismo esférico de 8 barras

$$\begin{array}{cccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(-2) & {}^4\hat{u}^1(-2) & {}^1\hat{u}^5(-2) & {}^1\hat{u}^6(-2) & {}^7\hat{u}^1(-1) & {}^8\hat{u}^1(-1) \\ & {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-1) & {}^2\hat{u}^5(-2) & {}^2\hat{u}^6(-2) & {}^2\hat{u}^7(-2) & {}^2\hat{u}^8(-2) \\ & & {}^3\hat{u}^4(-2) & {}^3\hat{u}^5(-1) & {}^3\hat{u}^6(-2) & {}^3\hat{u}^7(-2) & {}^3\hat{u}^8(-2) \\ & & & {}^4\hat{u}^5(-2) & {}^4\hat{u}^6(-1) & {}^4\hat{u}^7(-2) & {}^4\hat{u}^8(-2) \\ & & & & {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(-2) & {}^5\hat{u}^8(-1) \\ & & & & & {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(-2) \\ & & & & & & {}^7\hat{u}^8(-2) \end{array}$$

#### 4.5.2. Obtención del sistema de ecuaciones y su solución

El objetivo de este análisis es determinar los tornillos infinitesimales asociados a los movimientos relativos de los eslabones tres, cuatro, cinco, y seis respecto del eslabón uno, de los eslabones cinco, seis, siete y ocho respecto del eslabón dos, de los eslabones cuatro, seis, siete y ocho respecto del eslabón tres, de los eslabones cinco, siete y ocho respecto del eslabón cuatro, del eslabón siete respecto del eslabón cinco, del eslabón ocho respecto del eslabón seis y del eslabón ocho respecto del eslabón siete. Por lo tanto la Tabla 4.7 muestra todos los ejes instantáneos secundarios que se pueden escribir en términos de dos ejes instantáneos primarios empleando una variable  $\lambda$ .

Tabla 4.7: Ejes instantáneos secundarios cuyo vector unitario asociado a la dirección del eje de rotación puede escribirse como una combinación lineal de las direcciones asociadas a los dos ejes instantáneos primarios

${}^1\hat{u}^3$	se encuentra en el plano determinado por	${}^1\hat{u}^2$	${}^2\hat{u}^3$
${}^1\hat{u}^4$	se encuentra en el plano determinado por	${}^1\hat{u}^2$	${}^2\hat{u}^4$
${}^1\hat{u}^5$	se encuentra en el plano determinado por	${}^1\hat{u}^8$	${}^8\hat{u}^5$
${}^1\hat{u}^6$	se encuentra en el plano determinado por	${}^1\hat{u}^7$	${}^6\hat{u}^7$
${}^2\hat{u}^5$	se encuentra en el plano determinado por	${}^2\hat{u}^3$	${}^3\hat{u}^5$
${}^2\hat{u}^6$	se encuentra en el plano determinado por	${}^2\hat{u}^4$	${}^4\hat{u}^6$
${}^2\hat{u}^7$	se encuentra en el plano determinado por	${}^1\hat{u}^2$	${}^1\hat{u}^7$
${}^2\hat{u}^8$	se encuentra en el plano determinado por	${}^1\hat{u}^2$	${}^1\hat{u}^8$
${}^3\hat{u}^4$	se encuentra en el plano determinado por	${}^2\hat{u}^3$	${}^2\hat{u}^4$
${}^3\hat{u}^6$	se encuentra en el plano determinado por	${}^3\hat{u}^5$	${}^5\hat{u}^6$
${}^3\hat{u}^8$	se encuentra en el plano determinado por	${}^3\hat{u}^5$	${}^5\hat{u}^8$
${}^4\hat{u}^5$	se encuentra en el plano determinado por	${}^4\hat{u}^6$	${}^6\hat{u}^5$
${}^4\hat{u}^7$	se encuentra en el plano determinado por	${}^4\hat{u}^6$	${}^6\hat{u}^7$
${}^5\hat{u}^7$	se encuentra en el plano determinado por	${}^5\hat{u}^6$	${}^6\hat{u}^7$
${}^6\hat{u}^8$	se encuentra en el plano determinado por	${}^5\hat{u}^6$	${}^5\hat{u}^8$
${}^7\hat{u}^8$	se encuentra en el plano determinado por	${}^1\hat{u}^7$	${}^1\hat{u}^8$

De la Tabla 4.7 se selecciona el eje instantáneo secundario  ${}^2\hat{u}^6$  que puede escribirse como

$${}^2\hat{u}^6 = \left[ \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\lambda \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda) + \frac{\sqrt{3}}{3}\lambda \quad \frac{\sqrt{3}}{3}\lambda \right] \quad (4.120)$$

De esta manera se tiene que el arreglo diagonal de los ejes instantáneos  ${}^2\hat{u}^6 = (1-\lambda){}^4\hat{u}^6 + \lambda {}^2\hat{u}^4$  sería

$$\begin{array}{cccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(-2) & {}^4\hat{u}^1(-2) & {}^1\hat{u}^5(-2) & {}^1\hat{u}^6(-2) & {}^7\hat{u}^1(-1) & {}^8\hat{u}^1(-1) \\ {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-1) & {}^2\hat{u}^5(-2) & {}^2\hat{u}^6(0) & {}^2\hat{u}^7(-2) & {}^2\hat{u}^8(-2) & \\ {}^3\hat{u}^4(-2) & {}^3\hat{u}^5(-1) & {}^3\hat{u}^6(-2) & {}^3\hat{u}^7(-2) & {}^3\hat{u}^8(-2) & & \\ & {}^4\hat{u}^5(-2) & {}^4\hat{u}^6(-1) & {}^4\hat{u}^7(-2) & {}^4\hat{u}^8(-2) & & \\ & & {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(-2) & {}^5\hat{u}^8(-1) & & \\ & & & {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(-2) & & \\ & & & & {}^7\hat{u}^8(-2) & & \end{array}$$

Por lo tanto, pueden determinarse los siguientes ejes instantáneos<sup>6</sup>  ${}^1\hat{u}^6$ ,  ${}^2\hat{u}^5$

$$\circlearrowleft {}^1\hat{u}^6 \Rightarrow \boxed{{}^1\hat{u}^2} \circlearrowright {}^2\hat{u}^6$$

$$\circlearrowleft {}^1\hat{u}^6 \Rightarrow \boxed{{}^7\hat{u}^1} \boxed{{}^6\hat{u}^7}$$

$$\circlearrowleft {}^2\hat{u}^5 \Rightarrow \boxed{{}^2\hat{u}^3} \boxed{{}^3\hat{u}^5}$$

$$\circlearrowleft {}^2\hat{u}^5 \Rightarrow \circlearrowright {}^2\hat{u}^6 \boxed{{}^5\hat{u}^6}$$

Después de identificar los ejes instantáneos secundarios  ${}^1\hat{u}^6$ ,  ${}^2\hat{u}^5$  que se van a marcar con el número 1, el arreglo diagonal de los ejes instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(-2) & {}^4\hat{u}^1(-2) & {}^1\hat{u}^5(-2) & {}^1\hat{u}^6(-1) & {}^7\hat{u}^1(-1) & {}^8\hat{u}^1(-1) \\ {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-1) & {}^2\hat{u}^5(1) & {}^2\hat{u}^6(0) & {}^2\hat{u}^7(1) & {}^2\hat{u}^8(-2) & \\ {}^3\hat{u}^4(-2) & {}^3\hat{u}^5(-1) & {}^3\hat{u}^6(1) & {}^3\hat{u}^7(-2) & {}^3\hat{u}^8(-2) & & \\ & {}^4\hat{u}^5(-2) & {}^4\hat{u}^6(-1) & {}^4\hat{u}^7(-2) & {}^4\hat{u}^8(-2) & & \\ & & {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(-2) & {}^5\hat{u}^8(-1) & & \\ & & & {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(-2) & & \\ & & & & {}^7\hat{u}^8(-2) & & \end{array}$$

El siguiente paso consiste en hacer uso de todos los ejes instantáneos secundarios que se han obtenido hasta ahora, y de esta forma encontrar que centros instantáneos adicionales se pueden obtener<sup>7</sup>. Por lo tanto

<sup>6</sup>Sólo se indican los ejes instantáneos requeridos, sin embargo en el arreglo diagonal se indican todos los ejes instantáneos encontrados.

<sup>7</sup>Sólo se indican los ejes instantáneos requeridos, sin embargo en el arreglo diagonal se indican todos los ejes instantáneos encontrados.

$$\textcircled{1}\hat{u}^5 \implies \boxed{1\hat{u}^2} \textcircled{2}\hat{u}^5$$

$$\textcircled{1}\hat{u}^5 \implies \textcircled{1}\hat{u}^6 \boxed{5\hat{u}^6}$$

$$\textcircled{1}\hat{u}^5 \implies \boxed{8\hat{u}^1} \boxed{5\hat{u}^8}$$

Después de identificar el eje instantáneo sobre determinado  $\textcircled{1}\hat{u}^5$  que se va a marcar con el número 2, el arreglo diagonal de los ejes instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc} \textcircled{1}\hat{u}^2(-1) & \textcircled{1}\hat{u}^3(2) & \textcircled{4}\hat{u}^1(2) & \textcircled{1}\hat{u}^5(2) & \textcircled{1}\hat{u}^6(1) & \textcircled{7}\hat{u}^1(-1) & \textcircled{8}\hat{u}^1(-1) \\ \textcircled{2}\hat{u}^3(-1) & \textcircled{2}\hat{u}^4(-1) & \textcircled{2}\hat{u}^5(1) & \textcircled{2}\hat{u}^6(0) & \textcircled{2}\hat{u}^7(1) & \textcircled{2}\hat{u}^8(2) & \\ \textcircled{3}\hat{u}^4(2) & \textcircled{3}\hat{u}^5(-1) & \textcircled{3}\hat{u}^6(1) & \textcircled{3}\hat{u}^7(2) & \textcircled{3}\hat{u}^8(-2) & & \\ \textcircled{4}\hat{u}^5(2) & & \textcircled{4}\hat{u}^6(-1) & \textcircled{4}\hat{u}^7(2) & \textcircled{4}\hat{u}^8(-2) & & \\ & & \textcircled{5}\hat{u}^6(-1) & \textcircled{5}\hat{u}^7(2) & \textcircled{5}\hat{u}^8(-1) & & \\ & & & \textcircled{6}\hat{u}^7(-1) & \textcircled{6}\hat{u}^8(2) & & \\ & & & & \textcircled{7}\hat{u}^8(-2) & & \end{array}$$

De la ecuación (4.120) el vector unitario asociado a la dirección del eje instantáneo de rotación  $\textcircled{2}\hat{u}^6$  está dado por

$$\textcircled{2}\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\lambda \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda) + \frac{\sqrt{3}}{3}\lambda \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\lambda \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

A continuación se escriben los vectores unitarios asociados a las direcciones de los ejes instantáneos secundarios involucrados

$$\textcircled{2}\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} u_{25x} \\ u_{25y} \\ u_{25z} \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} u_{16x} \\ u_{16y} \\ u_{16z} \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} u_{15x} \\ u_{15y} \\ u_{15z} \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones necesarias se obtienen aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Killing de una manera sistemática vea las ecuaciones (4.9) - (4.12)

$$E25_3 = -\frac{16}{7}u_{25x} + \frac{2}{7}u_{25y} + u_{25z} \quad (4.122)$$

$$E25_6 = \frac{15u_{25y} - 36u_{25z} + 29u_{25x}\sqrt{3}\lambda + 10\sqrt{3}\lambda u_{25y} - 24\sqrt{3}\lambda u_{25z} - 15u_{25x}\sqrt{3} - 15\lambda u_{25y} + 36\lambda u_{25z}}{(-3+2\sqrt{3})(3+\lambda+2\sqrt{3})} \quad (4.123)$$

$$E16_7 = \frac{98u_{16x}}{137} + \frac{39u_{16y}}{137} + u_{16z} \quad (4.124)$$

$$E16_2 = \frac{4u_{16x}\sqrt{3}\lambda - 4\sqrt{3}\lambda u_{16z} - 6u_{16x}\sqrt{3} + 6\sqrt{3}u_{16z} - 6\lambda u_{16y} + 3\lambda u_{16z} + 6u_{16y} - 3u_{16z}}{(-3+2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+5)(-13\lambda+21+2\sqrt{3})} \quad (4.125)$$

$$E15_2 = \frac{2u_{15x}u_{25y} - u_{15x}u_{25z} - 2u_{15y}u_{25x} + 2u_{15y}u_{25z} + u_{15z}u_{25x} - 2u_{15z}u_{25y}}{-2u_{25y} + u_{25x}} \quad (4.126)$$

$$E15_6 = \frac{1}{12} \frac{5 u_{15x} u_{16y} - 12 u_{15x} u_{16z} - 5 u_{15y} u_{16x} + 12 u_{15z} u_{16x}}{u_{16x}} \quad (4.127)$$

$$E15_8 = -u_{15x} \sqrt{3} - 2 u_{15y} + u_{15z} \quad (4.128)$$

Se tiene un sistema de siete ecuaciones con nueve incógnitas, por lo tanto es conveniente normalizar las componentes ( $u_{ijx}$ ,  $u_{ijy}$ ,  $u_{ijz}$ ) del vector unitario en términos de una de ellas para reducir el número de incógnitas; es decir, si se selecciona la componente  $u_{ijz}$  el vector unitario se reduce a ( $r_{ijx} = \frac{u_{ijx}}{u_{ijz}}$ ,  $r_{ijy} = \frac{u_{ijy}}{u_{ijz}}$ ,  $r_{ijz} = 1$ ). Esta condición es válida siempre y cuando la componente seleccionada no sea igual a 0, este resultado puede extenderse a cada una de las ecuaciones (4.122) - (4.128). Por lo tanto

$${}^2\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} r_{25x} \\ r_{25y} \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} r_{16x} \\ r_{16y} \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} r_{15x} \\ r_{15y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando esta condición a las ecuaciones (4.122) - (4.128) se forma el conjunto final de ecuaciones para determinar los ejes instantáneos de rotación están dados por:

$$0 = 1 - \frac{16 r_{25x}}{7} + \frac{2}{7} r_{25y} \quad (4.129)$$

$$0 = -\frac{15 r_{25y} + 29 r_{25x} \sqrt{3} \lambda + 10 \sqrt{3} \lambda r_{25y} - 36 - 24 \lambda \sqrt{3} - 15 r_{25x} \sqrt{3} - 15 \lambda r_{25y} + 36 \lambda}{12 (-3 + 2 \sqrt{3}) (3 + \lambda + 2 \sqrt{3})} \quad (4.130)$$

$$0 = 1 + \frac{98 r_{16x}}{137} + \frac{39 r_{16y}}{137} \quad (4.131)$$

$$0 = \frac{13 (4 r_{16x} \sqrt{3} \lambda - 4 \lambda \sqrt{3} - 6 r_{16x} \sqrt{3} - 6 \lambda r_{16y} + 6 \sqrt{3} + 3 \lambda + 6 r_{16y} - 3)}{(-3 + 2 \sqrt{3}) (2 \sqrt{3} + 5) (-13 \lambda + 21 + 2 \sqrt{3})} \quad (4.132)$$

$$0 = 1 - r_{15x} \sqrt{3} - 2 r_{15y} \quad (4.133)$$

$$0 = \frac{2 r_{15x} r_{25y} - 2 r_{15y} r_{25x} - r_{15x} + 2 r_{15y} + r_{25x} - 2 r_{25y}}{-2 r_{25y} + r_{25x}} \quad (4.134)$$

$$0 = \frac{1}{12} \frac{5 r_{15x} r_{16y} - 5 r_{15y} r_{16x} - 12 r_{15x} + 12 r_{16x}}{r_{16x}} \quad (4.135)$$

De las ecuaciones lineales (4.129), (4.131) y (4.133) se resuelven las variables  $r_{25x}$ ,  $r_{16x}$  y  $r_{15x}$  en términos de sus contrapartes  $r_{25y}$ ,  $r_{16y}$  y  $r_{15y}$

$$r_{25x} = \frac{7}{16} + \frac{1}{8} r_{25y} \quad (4.136)$$

$$r_{16x} = -\frac{137}{98} - \frac{39}{98} r_{16y} \quad (4.137)$$

$$r_{15x} = -\frac{\sqrt{3}}{3} (2 r_{15y} - 1) \quad (4.138)$$

Sustituyendo los resultados recién encontrados en las ecuaciones (4.130), (4.132), (4.134), y (4.135) se obtiene las siguientes ecuaciones

$$0 = \frac{218 \sqrt{3} \lambda r_{25ya} - 181 \sqrt{3} \lambda - 30 \sqrt{3} r_{25ya} - 240 \lambda r_{25ya} - 105 \sqrt{3} + 576 \lambda + 240 r_{25ya} - 576}{(-576 + 384 \sqrt{3}) (3 + \lambda + 2 \sqrt{3})} \quad (4.139)$$

$$0 = \frac{78\sqrt{3}\lambda r_{16y} + 470\sqrt{3}\lambda - 117\sqrt{3}r_{16y} + 294\lambda r_{16y} - 705\sqrt{3} - 147\lambda - 294r_{16y} + 147}{(-3 + 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 5)(-13\lambda + 21 + 2\sqrt{3})} \quad (4.140)$$

$$0 = \frac{r_{25y}r_{15y}(12 + 64\sqrt{3}) - 32\sqrt{3}r_{15y} - 32\sqrt{3}r_{25y} + 16\sqrt{3} - 54r_{15y} + 90r_{25y} - 21}{30r_{25y} - 7} \quad (4.141)$$

$$0 = \frac{r_{16y}r_{15y}(980\sqrt{3} - 585) - r_{15y}(2352\sqrt{3} + 2055) - 490\sqrt{3}r_{16y} + 1176\sqrt{3} + 1404r_{16y} + 4932}{137 + 39r_{16y}} \quad (4.142)$$

De manera sistemática se despejan y sustituyen las componentes  $r_{ijy}$  de cada una de las ecuaciones (4.139) - (4.142). Por lo tanto

$$r_{15y} = \frac{2(245\sqrt{3}r_{16y} - 588\sqrt{3} - 702r_{16y} - 2466)}{980\sqrt{3}r_{16y} - 2352\sqrt{3} - 585r_{16y} - 2055} \quad (4.143)$$

$$0 = \frac{1}{(980\sqrt{3}r_{16y} - 2352\sqrt{3} - 585r_{16y} - 2055)(30r_{25y} - 7)} [r_{16y}r_{25y}(7648\sqrt{3} - 23166) - 3824\sqrt{3}r_{16y} - 158560\sqrt{3}r_{25y} + 79280\sqrt{3} + 29367r_{16y} - 81378r_{25y} + 103161] \quad (4.144)$$

$$r_{16y} = \frac{158560\sqrt{3}r_{25y} - 79280\sqrt{3} + 81378r_{25y} - 103161}{7648\sqrt{3}r_{25y} - 3824\sqrt{3} - 23166r_{25y} + 29367} \quad (4.145)$$

$$0 = \frac{1}{(7648\sqrt{3}r_{25y} - 3824\sqrt{3} - 23166r_{25y} + 29367)(-3 + 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 5)(-13\lambda + 21 + 2\sqrt{3})} [\lambda r_{25y}(278584\sqrt{3} + 511682) - \lambda(115580\sqrt{3} + 398569) - r_{25y}(263140\sqrt{3} + 674562) + 96002\sqrt{3} + 480009] \quad (4.146)$$

$$r_{25y} = \frac{1}{2} \frac{115580\lambda\sqrt{3} - 96002\sqrt{3} + 398569\lambda - 480009}{139292\lambda\sqrt{3} - 131570\sqrt{3} + 255841\lambda - 337281} \quad (4.147)$$

$$0 = -\frac{1}{8} \frac{2645808\sqrt{3}\lambda^2 - 6447568\lambda\sqrt{3} + 2570635\lambda^2 + 4453280\sqrt{3} - 10218214\lambda + 7601559}{(139292\lambda\sqrt{3} - 131570\sqrt{3} + 255841\lambda - 337281)(-3 + 2\sqrt{3})(3 + \lambda + 2\sqrt{3})} \quad (4.148)$$

Se obtiene una ecuación cuadrática en  $\lambda$ , resolviendo la ecuación (4.148) se tienen dos soluciones

$$\lambda_a = \frac{4025955 + 2586158\sqrt{3}}{2570635 + 2645808\sqrt{3}} \quad (4.149)$$

$$\lambda_b = \frac{6192259 + 3861410\sqrt{3}}{2570635 + 2645808\sqrt{3}} \quad (4.150)$$

Los resultados recién obtenidos se sustituyen en la ecuación (4.121), y posteriormente se hacen unitarios para obtener las dos direcciones para el eje instantáneo  ${}^2\hat{u}^6$

$${}^2\hat{u}^{6a} = \left[ \begin{array}{c} \frac{2(929249+685905\sqrt{3})}{\sqrt{29481784833507+15327599255470\sqrt{3}}} \\ \frac{\sqrt{3}(1842975+2675633\sqrt{3})}{\sqrt{29481784833507+15327599255470\sqrt{3}}} \\ \frac{(4025955+2586158\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{29481784833507+15327599255470\sqrt{3}}} \end{array} \right] \quad {}^2\hat{u}^{6b} = \left[ \begin{array}{c} \frac{2}{3} \frac{3075897+2184428\sqrt{3}}{\sqrt{42605013632135+22945428529226\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}(759823+2038007\sqrt{3})}{\sqrt{42605013632135+22945428529226\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{3} \frac{(6192259+3861410\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{42605013632135+22945428529226\sqrt{3}}} \end{array} \right] \quad (4.151)$$

Los resultados obtenidos en este paso para el eje instantáneo secundario  ${}^2\hat{u}^6$  se emplearán posteriormente para determinar la solución correcta.

El procedimiento debe repetirse para otro eje instantáneo secundario. De la Tabla 4.7 se selecciona el eje instantáneo secundario  ${}^1\hat{u}^3$  que puede escribirse como

$${}^1\hat{u}^3 = \left[ \frac{\sqrt{6}}{6} (1 - \lambda^*) + \frac{2}{3} \lambda^* \quad \frac{\sqrt{6}}{6} (1 - \lambda^*) + \frac{\lambda^*}{3} \quad \frac{\sqrt{6}}{3} (1 - \lambda^*) + \frac{2}{3} \lambda^* \right] \quad (4.152)$$

De esta manera se tiene que el arreglo diagonal de los ejes instantáneos  ${}^1\hat{u}^3 = (1 - \lambda) {}^2\hat{u}^3 + \lambda {}^1\hat{u}^2$  sería

$$\begin{array}{cccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(0) & {}^4\hat{u}^1(-2) & {}^1\hat{u}^5(-2) & {}^1\hat{u}^6(-2) & {}^7\hat{u}^1(-1) & {}^8\hat{u}^1(-1) \\ {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-1) & {}^2\hat{u}^5(-2) & {}^2\hat{u}^6(-2) & {}^2\hat{u}^7(-2) & {}^2\hat{u}^8(-2) & \\ {}^3\hat{u}^4(-2) & {}^3\hat{u}^5(-1) & {}^3\hat{u}^6(-2) & {}^3\hat{u}^7(-2) & {}^3\hat{u}^8(-2) & & \\ {}^4\hat{u}^5(-2) & & {}^4\hat{u}^6(-1) & {}^4\hat{u}^7(-2) & {}^4\hat{u}^8(-2) & & \\ & & {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(-2) & {}^5\hat{u}^8(-1) & & \\ & & {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(-2) & & & \\ & & {}^7\hat{u}^8(-2) & & & & \end{array}$$

Por lo tanto pueden determinarse los siguientes ejes instantáneos  ${}^1\hat{u}^5$ ,  ${}^3\hat{u}^8$

$$\circlearrowleft {}^1\hat{u}^5 \Rightarrow \circlearrowleft {}^1\hat{u}^3 \boxed{{}^3\hat{u}^5}$$

$$\circlearrowleft {}^1\hat{u}^5 \Rightarrow \boxed{{}^8\hat{u}^1} \boxed{{}^5\hat{u}^8}$$

$$\circlearrowleft {}^3\hat{u}^8 \Rightarrow \circlearrowleft {}^1\hat{u}^3 \boxed{{}^8\hat{u}^1}$$

$$\circlearrowleft {}^3\hat{u}^8 \Rightarrow \boxed{{}^3\hat{u}^5} \boxed{{}^5\hat{u}^8}$$

Después de marcar los ejes instantáneos secundarios  ${}^1\hat{u}^5$ ,  ${}^3\hat{u}^8$  con el número 1, el arreglo diagonal de los ejes instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(0) & {}^4\hat{u}^1(-2) & {}^1\hat{u}^5(1) & {}^1\hat{u}^6(-2) & {}^7\hat{u}^1(-1) & {}^8\hat{u}^1(-1) \\ {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-1) & {}^2\hat{u}^5(-2) & {}^2\hat{u}^6(-2) & {}^2\hat{u}^7(-2) & {}^2\hat{u}^8(-2) & \\ {}^3\hat{u}^4(-2) & {}^3\hat{u}^5(-1) & {}^3\hat{u}^6(-2) & {}^3\hat{u}^7(-2) & {}^3\hat{u}^8(1) & & \\ {}^4\hat{u}^5(-2) & & {}^4\hat{u}^6(-1) & {}^4\hat{u}^7(-2) & {}^4\hat{u}^8(-2) & & \\ & & {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(-2) & {}^5\hat{u}^8(-1) & & \\ & & {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(-2) & & & \\ & & {}^7\hat{u}^8(-2) & & & & \end{array}$$

Por lo tanto pueden determinarse los siguientes ejes instantáneos<sup>8</sup>  ${}^1\hat{u}^6, {}^2\hat{u}^5$

$$\textcircled{{}^1\hat{u}^6} \Rightarrow \textcircled{{}^1\hat{u}^5} \boxed{{}^5\hat{u}^6}$$

$$\textcircled{{}^1\hat{u}^6} \Rightarrow \boxed{{}^7\hat{u}^1} \boxed{{}^6\hat{u}^7}$$

$$\textcircled{{}^2\hat{u}^5} \Rightarrow \textcircled{{}^1\hat{u}^2} \boxed{{}^1\hat{u}^5}$$

$$\textcircled{{}^2\hat{u}^5} \Rightarrow \boxed{{}^2\hat{u}^3} \boxed{{}^3\hat{u}^5}$$

Después de identificar los ejes instantáneos secundarios  ${}^1\hat{u}^6, {}^2\hat{u}^5$  que se van a marcar con el número 2, el arreglo diagonal de los ejes instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(0) & {}^4\hat{u}^1(-2) & {}^1\hat{u}^5(1) & {}^1\hat{u}^6(2) & {}^7\hat{u}^1(-1) & {}^8\hat{u}^1(-1) \\ {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-1) & {}^2\hat{u}^5(2) & {}^2\hat{u}^6(-2) & {}^2\hat{u}^7(-2) & {}^2\hat{u}^8(2) & \\ {}^3\hat{u}^4(-2) & {}^3\hat{u}^5(-1) & {}^3\hat{u}^6(-2) & {}^3\hat{u}^7(-2) & {}^3\hat{u}^8(1) & \\ {}^4\hat{u}^5(-2) & {}^4\hat{u}^6(-1) & {}^4\hat{u}^7(-2) & {}^4\hat{u}^8(-2) & & \\ {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(2) & {}^5\hat{u}^8(-1) & & & \\ {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(-2) & & & & \\ {}^7\hat{u}^8(-2) & & & & & \end{array}$$

El siguiente paso consiste en hacer uso de todos los ejes instantáneos secundarios que se han obtenido hasta ahora, y de esta forma encontrar que centros instantáneos adicionales se pueden obtener<sup>9</sup>. Por lo tanto

$$\textcircled{{}^2\hat{u}^6} \Rightarrow \textcircled{{}^1\hat{u}^2} \textcircled{{}^1\hat{u}^6}$$

$$\textcircled{{}^2\hat{u}^6} \Rightarrow \boxed{{}^2\hat{u}^4} \boxed{{}^4\hat{u}^6}$$

$$\textcircled{{}^2\hat{u}^6} \Rightarrow \textcircled{{}^2\hat{u}^5} \boxed{{}^5\hat{u}^6}$$

Después de identificar el eje instantáneo sobredeterminado  ${}^2\hat{u}^6$  que se va a marcar con el número 3, el arreglo diagonal de los centros instantáneos después de esta etapa está dado por

$$\begin{array}{cccccccc} {}^1\hat{u}^2(-1) & {}^1\hat{u}^3(0) & {}^4\hat{u}^1(3) & {}^1\hat{u}^5(1) & {}^1\hat{u}^6(2) & {}^7\hat{u}^1(-1) & {}^8\hat{u}^1(-1) \\ {}^2\hat{u}^3(-1) & {}^2\hat{u}^4(-1) & {}^2\hat{u}^5(2) & {}^2\hat{u}^6(3) & {}^2\hat{u}^7(3) & {}^2\hat{u}^8(2) & \\ {}^3\hat{u}^4(-2) & {}^3\hat{u}^5(-1) & {}^3\hat{u}^6(3) & {}^3\hat{u}^7(-2) & {}^3\hat{u}^8(1) & \\ {}^4\hat{u}^5(3) & {}^4\hat{u}^6(-1) & {}^4\hat{u}^7(-2) & {}^4\hat{u}^8(-2) & & \\ {}^5\hat{u}^6(-1) & {}^5\hat{u}^7(2) & {}^5\hat{u}^8(-1) & & & \\ {}^6\hat{u}^7(-1) & {}^6\hat{u}^8(3) & & & & \\ {}^7\hat{u}^8(3) & & & & & \end{array}$$

<sup>8</sup>Sólo se indican los ejes instantáneos requeridos, sin embargo en el arreglo diagonal se indican todos los ejes instantáneos encontrados.

<sup>9</sup>Sólo se indican los ejes instantáneos requeridos, sin embargo en el arreglo diagonal se indican todos los ejes instantáneos encontrados.

De la ecuación (4.152) el vector unitario asociado a la dirección del eje de rotación  ${}^1\hat{u}^3$  está dado por

$${}^1\hat{u}^3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} (1 - \lambda) + \frac{2}{3} \lambda \\ \frac{\sqrt{6}}{6} (1 - \lambda) + \frac{\lambda}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} (1 - \lambda) + \frac{2}{3} \lambda \end{bmatrix} \quad (4.153)$$

A continuación se escriben los vectores unitarios asociados a las direcciones de los ejes instantáneos secundarios involucrados.

$${}^1\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} u_{15x} \\ u_{15y} \\ u_{15z} \end{bmatrix} \quad {}^2\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} u_{25x} \\ u_{25y} \\ u_{25z} \end{bmatrix} \quad {}^1\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} u_{16x} \\ u_{16y} \\ u_{16z} \end{bmatrix} \quad {}^2\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} u_{26x} \\ u_{26y} \\ u_{26z} \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones necesarias se obtienen aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Killing de una manera sistemática, vea las ecuaciones (4.9) - (4.12)

$$E15_8 = -u_{15x} \sqrt{3} - 2u_{15y} + u_{15z} \quad (4.154)$$

$$E15_3 = \frac{\lambda^* [u_{15x} (16\sqrt{6} - 32) - u_{15y} (4 + 2\sqrt{6}) + u_{15z} (34 - 7\sqrt{6})] - 16\sqrt{6}u_{15x} + 2\sqrt{6}u_{15y} + 7\sqrt{6}u_{15z}}{(7\sqrt{6} - 34)(119\sqrt{6} + 431\lambda^* + 147)} \quad (4.155)$$

$$E25_3 = -\frac{16u_{25x}}{7} + 2/7u_{25y} + u_{25z} \quad (4.156)$$

$$E25_1 = \frac{-2u_{15x}u_{25y} - u_{15x}u_{25z} - 2u_{15y}u_{25x} + 2u_{15y}u_{25z} + u_{15z}u_{25x} - 2u_{15z}u_{25y}}{-2u_{15y} + u_{15x}} \quad (4.157)$$

$$E16_7 = \frac{98u_{16x}}{137} + \frac{39u_{16y}}{137} + u_{16z} \quad (4.158)$$

$$E16_5 = -\frac{1}{12} \frac{5u_{15x}u_{16y} - 12u_{15x}u_{16z} - 5u_{15y}u_{16x} + 12u_{15z}u_{16x}}{u_{15x}} \quad (4.159)$$

$$E26_4 = -\frac{u_{26y}\sqrt{3} - u_{26z}\sqrt{3} - 3u_{26x} + 3u_{26z}}{\sqrt{3} - 3} \quad (4.160)$$

$$E26_1 = -\frac{2u_{16x}u_{26y} - u_{16x}u_{26z} - 2u_{16y}u_{26x} + 2u_{16y}u_{26z} + u_{16z}u_{26x} - 2u_{16z}u_{26y}}{-2u_{16y} + u_{16x}} \quad (4.161)$$

$$E26_5 = -\frac{1}{12} \frac{5u_{25x}u_{26y} - 12u_{25x}u_{26z} - 5u_{25y}u_{26x} + 12u_{25z}u_{26x}}{u_{25x}} \quad (4.162)$$

Se tiene un sistema de nueve ecuaciones con 13 incógnitas, por lo tanto es conveniente normalizar las componentes  $(u_{ijx}, u_{ijy}, u_{ijz})$  del vector unitario en términos de una de ellas para reducir el número de incógnitas; es decir, si se selecciona la componente  $u_{ijz}$  el vector unitario se reduce a ( $r_{ijx} = \frac{u_{ijx}}{u_{ijz}}$ ,  $r_{ijy} = \frac{u_{ijy}}{u_{ijz}}$ ,  $r_{ijz} = 1$ ). Esta condición es válida siempre y cuando la componente seleccionada no sea igual a 0, este resultado puede extenderse a cada una de las ecuaciones (4.154) - (4.162). Por lo tanto

$${}^1\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} r_{15x} \\ r_{15y} \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^2\hat{u}^5 = \begin{bmatrix} r_{25x} \\ r_{25y} \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} r_{16x} \\ r_{16y} \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^2\hat{u}^6 = \begin{bmatrix} r_{26x} \\ r_{26y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando esta condición a las ecuaciones (4.154) - (4.162) se forma el conunto final de ecuaciones para determinar los ejes instantáneos de rotación, dado por

$$0 = 1 - r_{15x} \sqrt{3} - 2r_{15y} \quad (4.163)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{(7\sqrt{6}-34)(119\sqrt{6}+431\lambda^*+147)} [-431(16\sqrt{6}\lambda^*r_{15xa}-2\sqrt{6}\lambda^*r_{15y}) \\ & -7\sqrt{6}\lambda^*-16\sqrt{6}r_{15x}+2\sqrt{6}r_{15y}-32\lambda^*r_{15x}-4\lambda^*r_{15y}+7\sqrt{6}+34\lambda] \end{aligned} \quad (4.164)$$

$$0 = 1 - \frac{16r_{25x}}{7} + \frac{2}{7}r_{25y} \quad (4.165)$$

$$0 = -\frac{2r_{15x}r_{25y}-2r_{15y}r_{25x}-r_{15x}+2r_{15y}+r_{25x}-2r_{25y}}{-2r_{15y}+r_{15x}} \quad (4.166)$$

$$0 = 1 + \frac{98r_{16x}}{137} + \frac{39r_{16y}}{137} \quad (4.167)$$

$$0 = -\frac{1}{12} \frac{5r_{15x}r_{16y}-5r_{15y}r_{16x}-12r_{15x}+12r_{16x}}{r_{15x}} \quad (4.168)$$

$$0 = -\frac{r_{26y}\sqrt{3}-\sqrt{3}-3r_{26x}+3}{\sqrt{3}-3} \quad (4.169)$$

$$0 = -\frac{2r_{16x}r_{26y}-2r_{16y}r_{26x}-r_{16x}+2r_{16y}+r_{26x}-2r_{26y}}{-2r_{16y}+r_{16x}} \quad (4.170)$$

$$0 = -\frac{1}{12} \frac{5r_{25x}r_{26y}-5r_{25y}r_{26x}-12r_{25x}+12r_{26x}}{r_{25x}} \quad (4.171)$$

De las ecuaciones lineales (4.163), (4.165), (4.167), y (4.169) se resuelven las variables  $r_{15x}, r_{25x}, r_{16x}$  y  $r_{26x}$  entérminos de sus contrapartes  $r_{15y}, r_{25y}, r_{16y}$  y  $r_{26y}$

$$r_{15x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(2r_{15y}-1) \quad (4.172)$$

$$r_{25x} = \frac{7}{16} + \frac{1}{8}r_{25y} \quad (4.173)$$

$$r_{16x} = -\frac{137}{98} - \frac{39r_{16y}}{98} \quad (4.174)$$

$$r_{26x} = \frac{\sqrt{3}}{3} (r_{26y}-1+\sqrt{3}) \quad (4.175)$$

Sustituyendo los resultados recién encontrados en las ecuaciones (4.164), (4.166), (4.168), (4.170) y (4.171) se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{(7\sqrt{2}\sqrt{3}-34)(119\sqrt{2}\sqrt{3}+431\lambda^*+147)} [6\sqrt{2}\sqrt{3}r_{15y}(\lambda^*-1)+21\sqrt{2}\sqrt{3}(\lambda^*-1) \\ & +96\sqrt{2}(\lambda^*-1)r_{15y}-64\lambda^*\sqrt{3}r_{15y}-48\sqrt{2}\lambda^*+32\lambda^*\sqrt{3}+12\lambda^*r_{15y}+48\sqrt{2}-102\lambda^*] \end{aligned} \quad (4.176)$$

$$0 = \frac{r_{25y}r_{15y}(64\sqrt{3}+12)-32\sqrt{3}r_{15y}-32\sqrt{3}r_{25y}+16\sqrt{3}-54r_{15y}+90r_{25y}-21}{2\sqrt{3}r_{15y}-\sqrt{3}+6r_{15y}} \quad (4.177)$$

$$0 = \frac{r_{16y}r_{15y}(980\sqrt{3}-585)-2352\sqrt{3}r_{15y}-490\sqrt{3}r_{16y}+1176\sqrt{3}-2055r_{15y}+1404r_{16y}+4932}{7056r_{15y}-3528} \quad (4.178)$$

$$0 = \frac{-r_{16y}(117 + 196\sqrt{3}) + r_{16y}r_{26y}(196\sqrt{3} + 234) - 705 - r_{26y}(98\sqrt{3} + 1410) + 98\sqrt{3}}{235r_{16y} + 137} \quad (4.179)$$

$$0 = \frac{r_{25y}(312 - 80\sqrt{3}) + r_{25y}r_{26y}(80\sqrt{3} - 30) - 324 - 192r_{26y}\sqrt{3} + 192\sqrt{3} - 105r_{26y}}{7 + 2r_{25y}} \quad (4.180)$$

De manera sistemática se despejan y sustituyen las componentes  $r_{ijy}$  de cada una de las ecuaciones (4.177) - (4.180). Por lo tanto

$$r_{26y} = \frac{4(20\sqrt{3}r_{25y} - 48\sqrt{3} - 78r_{25y} + 81)}{80\sqrt{3}r_{25y} - 192\sqrt{3} - 30r_{25y} - 105} \quad (4.181)$$

$$0 = \frac{1}{(80\sqrt{3}r_{25y} - 192\sqrt{3} - 30r_{25y} - 105)(235r_{16y} + 137)} [r_{16y}r_{25y}(15304\sqrt{3} + 23166) - 20540\sqrt{3}r_{16y} - 28012\sqrt{3}r_{25y} + 59134\sqrt{3} - 29367r_{16y} + 139590r_{25y} - 176955] \quad (4.182)$$

$$r_{16y} = \frac{28012\sqrt{3}r_{25y} - 59134\sqrt{3} - 139590r_{25y} + 176955}{15304\sqrt{3}r_{25y} - 20540\sqrt{3} + 23166r_{25y} - 29367} \quad (4.183)$$

$$0 = \frac{1}{(15304\sqrt{3}r_{25y} - 20540\sqrt{3} + 23166r_{25y} - 29367)(2r_{15y} - 1)} [1039357\sqrt{3} - 401594r_{15y}(-1086021\sqrt{3} + 245215) - r_{25y}(715818\sqrt{3} - 234404) + r_{25y}r_{15y}(813338\sqrt{3} - 28654)] \quad (4.184)$$

$$r_{25y} = \frac{1}{2} \frac{1086021\sqrt{3}r_{15y} - 1039357\sqrt{3} - 245215r_{15y} + 401594}{406669\sqrt{3}r_{15y} - 357909\sqrt{3} - 14327r_{15y} + 117202} \quad (4.185)$$

Se obtienen una ecuación cuadrática para la variable  $r_{15y}$

$$0 = \frac{-8065020r_{15y}^2 + 14085132r_{15y} + 2854052\sqrt{3}r_{15y}^2 - 6039999 - 8277074\sqrt{3}r_{15y} + 5475656\sqrt{3}}{(406669\sqrt{3}r_{15y} - 357909\sqrt{3} - 14327r_{15y} + 117202)(2\sqrt{3}r_{15y} - \sqrt{3} + 6r_{15y})} \quad (4.186)$$

Resolviendo la ecuación (4.186) se obtienen dos soluciones para la variable  $r_{15y}$

$$r_{15ya} = \frac{1}{2} \frac{-2708919 + 2547488\sqrt{3}}{-2016255 + 713513\sqrt{3}} \quad r_{15yb} = \frac{1}{2} \frac{-4333647 + 1591049\sqrt{3}}{-2016255 + 713513\sqrt{3}} \quad (4.187)$$

Sustituyendo los resultados de la ecuación (4.186) en la ecuación (4.176), y simplificando se obtienen dos ecuaciones para  $\lambda^*$

$$0 = \frac{4173632\sqrt{2}\sqrt{3}\lambda^* - 4173632\sqrt{2}\sqrt{3} - 3925350\lambda^*\sqrt{3} + 3847871\sqrt{2}\lambda^* - 3847871\sqrt{2} + 1482544\lambda^*}{(-2016255 + 713513\sqrt{3})(7\sqrt{2}\sqrt{3} - 34)(119\sqrt{2}\sqrt{3} + 431\lambda^* + 147)} \quad (4.188)$$

$$0 = \frac{550857\sqrt{2}\sqrt{3}\lambda^* - 550857\sqrt{2}\sqrt{3} - 455188\lambda^*\sqrt{3} + 2165169\sqrt{2}\lambda^* - 2165169\sqrt{2} - 3975528\lambda^*}{(-2016255 + 713513\sqrt{3})(7\sqrt{2}\sqrt{3} - 34)(119\sqrt{2}\sqrt{3} + 431\lambda^* + 147)} \quad (4.189)$$

Resolviendo de manera independiente las ecuaciones (4.188) y (4.189) se obtienen las dos soluciones de  $\lambda^*$

$$\lambda_a^* = \frac{\sqrt{2}(4173632\sqrt{3} + 3847871)}{4173632\sqrt{2}\sqrt{3} + 3847871\sqrt{2} - 3925350\sqrt{3} + 1482544} \quad (4.190)$$

$$\lambda_b^* = \frac{3\sqrt{2}(183619\sqrt{3} + 721723)}{-3975528 + 2165169\sqrt{2} + 550857\sqrt{2}\sqrt{3} - 455188\sqrt{3}} \quad (4.191)$$

Los resultados recién encontrados se sustituyen en la ecuación (4.153), y posteriormente se hacen unitarios para obtener las dos direcciones para el eje instantáneo  ${}^1\hat{u}^3$ . Además sustituyendo los resultados obtenidos para  $\lambda$  en las ecuaciones (4.188) y (4.189) se comprueba que estos valores satisfacen estas ecuaciones.

$${}^1\hat{u}^3a = \begin{bmatrix} \frac{19\sqrt{2}(95143+478344\sqrt{3})}{\sqrt{1268455324557594-134825216975072}\sqrt{3}} \\ \frac{2\sqrt{2}(-1020077+2457452\sqrt{3})}{\sqrt{1268455324557594-134825216975072}\sqrt{3}} \\ \frac{4\sqrt{2}(-1020077+2457452\sqrt{3})}{\sqrt{1268455324557594-134825216975072}\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad {}^1\hat{u}^{3b} = \begin{bmatrix} \frac{33\sqrt{2}(-18422+4475\sqrt{3})}{\sqrt{3200988920512-1542464253205}\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}(-494129+478969\sqrt{3})}{\sqrt{3200988920512-1542464253205}\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}(-494129+478969\sqrt{3})}{\sqrt{3200988920512-1542464253205}\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (4.192)$$

Finalmente con el resultado anterior se obtienen los ejes instantáneos secundarios  ${}^1\hat{u}^{5a}$ ,  ${}^1\hat{u}^{5b}$ ,  ${}^1\hat{u}^{6a}$ ,  ${}^1\hat{u}^{6b}$ ,  ${}^2\hat{u}^{6a}$  y  ${}^2\hat{u}^{6b}$

$${}^1\hat{u}^{5a} = \begin{bmatrix} \frac{190\sqrt{3}+722}{\sqrt{1347732+273638}\sqrt{3}} \\ \frac{1-361\sqrt{3}}{\sqrt{1347732+273638}\sqrt{3}} \\ \frac{572}{\sqrt{1347732+273638}\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad {}^1\hat{u}^{5b} = \begin{bmatrix} \frac{-2170981488\sqrt{3}+270039696}{\sqrt{87886565190199379933-2850662163406542384}\sqrt{3}} \\ \frac{6214493003-135019848\sqrt{3}}{\sqrt{87886565190199379933-2850662163406542384}\sqrt{3}} \\ \frac{5916041542}{\sqrt{87886565190199379933-2850662163406542384}\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (4.193)$$

$${}^1\hat{u}^{6a} = \begin{bmatrix} \frac{-1153\sqrt{189938634958}}{1192083483} \\ \frac{4955\sqrt{189938634958}}{2384166966} \\ \frac{\sqrt{189938634958}}{9975594} \end{bmatrix} \quad {}^1\hat{u}^{6b} = \begin{bmatrix} \frac{331033872\sqrt{3}-731495664}{\sqrt{4863359650505119554-2781570477066741312}\sqrt{3}} \\ \frac{-831828704\sqrt{3}+1380855687}{\sqrt{4863359650505119554-2781570477066741312}\sqrt{3}} \\ \frac{130169367}{\sqrt{4863359650505119554-2781570477066741312}\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (4.194)$$

$${}^2\hat{u}^{6a} = \begin{bmatrix} \frac{50\sqrt{3}-34}{\sqrt{83973-43490}\sqrt{3}} \\ \frac{-95\sqrt{3}+211}{\sqrt{83973-43490}\sqrt{3}} \\ \frac{61}{\sqrt{83973-43490}\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad {}^2\hat{u}^{6b} = \begin{bmatrix} \frac{-4829412908+6108507066\sqrt{3}}{\sqrt{1592101255916815155465-844010536641692794038}\sqrt{3}} \\ \frac{-14181374901\sqrt{3}+27677483191}{\sqrt{1592101255916815155465-844010536641692794038}\sqrt{3}} \\ \frac{9351961993}{\sqrt{1592101255916815155465-844010536641692794038}\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (4.195)$$

Resumiendo para el primer caso se asume el eje instantáneo secundario  ${}^2\hat{u}^6$  como conocido, obteniendo así el resultados dado por (4.151), por otra parte se asume el eje instantáneo secundario  ${}^1\hat{u}^3$  como conocido y se obtienen los resultados dados por (4.193), (4.194) y (4.195), al comparar los resultados obtenidos en los dos casos para la dirección del eje instantáneo secundario  ${}^2\hat{u}^6$  se observa que la única respuesta coincidente para los dos casos es:

$${}^2\hat{u}^{6b} = \begin{bmatrix} \frac{-4829412908+6108507066\sqrt{3}}{\sqrt{1592101255916815155465-844010536641692794038}\sqrt{3}} \\ \frac{-14181374901\sqrt{3}+27677483191}{\sqrt{1592101255916815155465-844010536641692794038}\sqrt{3}} \\ \frac{9351961993}{\sqrt{1592101255916815155465-844010536641692794038}\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Finalmente a partir de este resultado, junto con los centros instantáneos primarios y aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy se pueden determinar los restantes ejes instantáneos secundarios uno a uno siguiendo el procedimiento llevado a cabo para determinar los ejes instantáneos secundarios  ${}^1\hat{u}^3$  y  ${}^2\hat{u}^4$  vea las ecuaciones (4.41) - (4.48). Por lo tanto los vectores unitarios asociados a los ejes instantáneos secundarios restantes están dados por

$$\begin{aligned} {}^5\hat{u}^7 &= \begin{bmatrix} \frac{1260665459}{\sqrt{100882978597060927278-49763124632110486848\sqrt{3}}} \\ \frac{-7092807313+2743783488\sqrt{3}}{\sqrt{100882978597060927278-49763124632110486848\sqrt{3}}} \\ \frac{1143243120\sqrt{3}-4741279114}{\sqrt{100882978597060927278-49763124632110486848\sqrt{3}}} \end{bmatrix} \\ {}^7\hat{u}^8 &= \begin{bmatrix} \frac{1260665459}{\sqrt{36154018466729796413-14060853723749836800\sqrt{3}}} \\ \frac{1986203232\sqrt{3}-2831619102}{\sqrt{36154018466729796413-14060853723749836800\sqrt{3}}} \\ \frac{-371917392\sqrt{3}+3781097308}{\sqrt{36154018466729796413-14060853723749836800\sqrt{3}}} \end{bmatrix} \\ {}^6\hat{u}^8 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2245368016\sqrt{3}-4869443415}{\sqrt{82547517882922652514-21867384999525629280\sqrt{3}}} \\ \frac{6611429961}{\sqrt{82547517882922652514-21867384999525629280\sqrt{3}}} \end{bmatrix} \\ {}^2\hat{u}^5 &= \begin{bmatrix} \frac{4737954814}{\sqrt{163550519079273531960-12822179639706161514\sqrt{3}}} \\ \frac{7977459103-1158385263\sqrt{3}}{\sqrt{163550519079273531960-12822179639706161514\sqrt{3}}} \\ \frac{330967218\sqrt{3}+8550336974}{\sqrt{163550519079273531960-12822179639706161514\sqrt{3}}} \end{bmatrix} \\ {}^4\hat{u}^5 &= \begin{bmatrix} \frac{-1047954336\sqrt{3}-903193671}{\sqrt{8247965999504505973+1936577109873889800\sqrt{3}}} \\ \frac{-24117564-903193671\sqrt{3}}{\sqrt{8247965999504505973+1936577109873889800\sqrt{3}}} \\ \frac{1299893935}{\sqrt{8247965999504505973+1936577109873889800\sqrt{3}}} \end{bmatrix} \\ {}^1\hat{u}^4 &= \begin{bmatrix} \frac{130169367}{\sqrt{186911967013987206+23138314515874434\sqrt{3}}} \\ \frac{29836327\sqrt{3}+387754071}{\sqrt{186911967013987206+23138314515874434\sqrt{3}}} \\ \frac{130169367}{\sqrt{186911967013987206+23138314515874434\sqrt{3}}} \end{bmatrix} \\ {}^3\hat{u}^6 &= \begin{bmatrix} \frac{-474857316-124080570\sqrt{3}}{\sqrt{5719420987298660584+130526656185695350\sqrt{3}}} \\ \frac{2144987148}{\sqrt{5719420987298660584+130526656185695350\sqrt{3}}} \\ \frac{6893365\sqrt{3}+920125607}{\sqrt{5719420987298660584+130526656185695350\sqrt{3}}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^3\hat{u}^4 &= \left[ \begin{array}{c} \frac{-3812502333\sqrt{3}-4986149082}{\sqrt{142540954617695789191+76038820031243233224}\sqrt{3}} \\ \frac{-3812502333\sqrt{3}-4986149082}{\sqrt{142540954617695789191+76038820031243233224}\sqrt{3}} \\ \frac{2367814403}{\sqrt{142540954617695789191+76038820031243233224}\sqrt{3}} \end{array} \right] \\
{}^2\hat{u}^7 &= \left[ \begin{array}{c} \frac{\frac{1606120481\sqrt{3}}{2}-268513038}{\sqrt{8602660749967282554-3069866045197027440}\sqrt{3}} \\ \frac{-691241726\sqrt{3}+\frac{3817191087}{2}}{\sqrt{8602660749967282554-3069866045197027440}\sqrt{3}} \\ \frac{1232745687}{\sqrt{8602660749967282554-3069866045197027440}\sqrt{3}} \end{array} \right] \\
{}^3\hat{u}^7 &= \left[ \begin{array}{c} \frac{-\frac{533959713\sqrt{3}}{4}-709323620}{\sqrt{2975225867858782509-544978420076450955}\sqrt{3}} \\ \frac{\frac{3721382371}{4}-394667070\sqrt{3}}{\sqrt{2975225867858782509-544978420076450955}\sqrt{3}} \\ \frac{2084032607}{2\sqrt{2975225867858782509-544978420076450955}\sqrt{3}} \end{array} \right] \\
{}^3\hat{u}^8 &= \left[ \begin{array}{c} \frac{55727298}{\sqrt{257603964581902344+12231656939779818}\sqrt{3}} \\ \frac{-98534811-5625827\sqrt{3}}{\sqrt{257603964581902344+12231656939779818}\sqrt{3}} \\ \frac{-11251654\sqrt{3}-494281878}{\sqrt{257603964581902344+12231656939779818}\sqrt{3}} \end{array} \right] \\
{}^4\hat{u}^8 &= \left[ \begin{array}{c} -\frac{3}{2}\frac{62294813\sqrt{3}-147073421}{\sqrt{247392936572885731-132290738742772449}\sqrt{3}} \\ \frac{89569097}{\sqrt{247392936572885731-132290738742772449}\sqrt{3}} \\ \frac{3}{2}\frac{-161765331+125094979\sqrt{3}}{\sqrt{247392936572885731-132290738742772449}\sqrt{3}} \end{array} \right] \\
{}^2\hat{u}^8 &= \left[ \begin{array}{c} \frac{2468193744\sqrt{3}-2090217070}{\sqrt{207475303497258829737-114242122933455127296}\sqrt{3}} \\ \frac{1467609361}{\sqrt{207475303497258829737-114242122933455127296}\sqrt{3}} \\ \frac{10339799954-5025435792\sqrt{3}}{\sqrt{207475303497258829737-114242122933455127296}\sqrt{3}} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Es importante tener en cuenta que, en algunos casos, los vectores unitarios asociados a las direcciones de los eje de rotación instantáneos obtenidos mediante la aplicación del teorema de Aronhold-Kennedy, son los negativos de los obtenidos empleando la solución del análisis de velocidad.

Las imágenes que ilustran la localización de los ejes instantáneos secundarios con la intersección de los planos correspondientes, no se muestran por razones de espacio.

#### 4.5.3. Verificación de los resultados

Los resultados obtenidos para los vectores unitarios asociados a las direcciones de los ejes instantáneos secundarios se comprobaron mediante la realización del análisis de velocidad del mecanismo para una velocidad angular de magnitud arbitraria de  $10 \text{ rad/s}$  en sentido antihorario del eslabón dos, seleccionado

como eslabón motriz, y, a partir de los resultados, determinando los estados de velocidad entre los diferentes eslabones del mecanismo y finalmente el ISA correspondiente para cada movimiento relativo, este proceso se llevó a cabo mediante un programa implementado en Maple<sup>©</sup>.

Finalmente los resultados del análisis de velocidad fueron verificados satisfactoriamente mediante el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>; sin embargo, los resultados de la simulación no se muestran por razones de espacio.

#### 4.5.4. Comentarios finales

En este capítulo se presentó un método analítico para la determinación de todos los ejes instantáneos secundarios indeterminados de los mecanismos “single flier” and “double butterfly”. El método se basa en seleccionar dos ejes instantáneos secundarios:

1. Que puedan escribirse como la combinación lineal de dos ejes instantáneos primarios o secundarios ya conocidos.
2. Que conduzcan a un eje instantáneo sobredeterminado, empleando un número mínimo de ecuaciones.
3. Que ambos ejes instantáneos secundarios conduzcan a la localización de otro eje instantáneo secundario e indeterminado —mediante la solución de una ecuación cuadrática— de tal manera que, comparando las soluciones de las dos ecuaciones cuadráticas, resueltas de manera independiente se llegue al resultado correcto.

El método desarrollado presenta ventajas respecto a los métodos conocidos hasta ahora en cuanto a su simplicidad.

---

# Capítulo 5: Mecanismos triviales asociados a la subálgebra de movimientos $y_{\hat{u},p}$

---

En este capítulo se mostrará que, nuevamente, la ecuación que relaciona los estados de velocidad de tres cuerpos arbitrarios

$${}^i\vec{V}_O^k = {}^i\vec{V}_O^j + {}^j\vec{V}_O^k$$

que en términos de tornillos está dado por

$${}_i\omega_k \mathbb{S}_O^k = {}_i\omega_j \mathbb{S}_O^j + {}_j\omega_k \mathbb{S}_O^k$$

permite determinar la localización de todos los ejes instantáneos de los mecanismos triviales de un grado de libertad asociados a un subgrupo,  $Y_{\hat{u},p}$ , o subálgebra,  $y_{\hat{u},p}$ . Este subgrupo de desplazamientos contiene todas las traslaciones planas añadido a los movimientos de tornillo, cuyo eje es perpendicular al plano de las traslaciones y de un paso definido.

## 5.1. Características de los mecanismos

Los mecanismos que forman parte de esta subálgebra,  $y_{\hat{u},p}$ , están formados por: Pares de tornillo, cuya dirección es paralela a  $\hat{u}$  y de paso  $p$  o bien pares prismáticos cuya dirección de movimiento es perpendicular a  $\hat{u}$ .

El número mínimo de pares cinemáticos que un lazo cerrado de esta clase de mecanismos puede tener es 4, pues los pares indicados son de la clase I y de la ecuación de movilidad

$$F = \sum_{i=1}^4 f_i - \dim(y_{\hat{u},p}) = 4 - \dim(y_{\hat{u},p}) = 4 - 3 = 1 \quad (5.1)$$

## 5.2. Aplicación de las formas de Killing y Klein

Como ya se ha explicado anteriormente, la determinación de los ejes instantáneos de tornillo,  ${}^i\mathbb{S}^k$ , requiere determinar los aniquiladores ortogonales, respecto a las formas de Klein o Killing del subespacio generado por  $\{{}^i\mathbb{S}^j, {}^j\mathbb{S}^k\}$  es decir aquellos tornillos  $\mathbb{S}_{aik}$  tal que.

$$Kl(\mathbb{S}_{aik}, {}^i\mathbb{S}^j) = Kl(\mathbb{S}_{aik}, {}^j\mathbb{S}^k) = 0 \quad (5.2)$$

y

$$Ki(\$_{aik}, {}^i\$^j) = Ki(\$_{aik}, {}^j\$^k) = 0 \quad (5.3)$$

pues, aprovechando las propiedades de las formas bilineales, se tiene que:

$$\begin{aligned} Kl(\$_{aik}, {}^i\$^k) &= Kl(\$_{aik}, \frac{i\omega_j}{i\omega_k} {}^i\$^j + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} {}^j\$^k) = \frac{i\omega_j}{i\omega_k} Kl(\$_{aik}, {}^i\$^j) + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} Kl(\$_{aik}, {}^j\$^k) \\ &= \frac{i\omega_j}{i\omega_k} 0 + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} 0 = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

de manera semejante, se tiene:

$$\begin{aligned} Ki(\$_{aik}, {}^i\$^k) &= Ki(\$_{aik}, \frac{i\omega_j}{i\omega_k} {}^i\$^j + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} {}^j\$^k) = \frac{i\omega_j}{i\omega_k} Ki(\$_{aik}, {}^i\$^j) + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} Ki(\$_{aik}, {}^j\$^k) \\ &= \frac{i\omega_j}{i\omega_k} 0 + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} 0 = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

La conclusión es que los aniquiladores ortogonales del subespacio generado por  $\{{}^i\$^j, {}^j\$^k\}$  aniquilan también al tornillo  ${}^i\$^k$  asociado al eje instantáneo del tornillo del movimiento relativo entre los eslabones  $i$  y  $k$ . Este es el fundamento del teorema de Aronhold-Kennedy aplicable a cualquier tipo de mecanismo. Sin embargo, la metodología puede simplificarse por las características especiales de los pares cinemáticos y por consiguiente de los tornillos infinitesimales que los representan.

### 5.3. Condiciones generales de los aniquiladores ortogonales

Como se indicó en la sección 5.1, los pares cinemáticos que forman parte de estos mecanismos son:

1. Pares de tornillo cuya dirección es la del vector unitario  $\hat{u}$  y paso  $h = p$ .
2. Pares prismáticos cuya dirección de movimiento  $\hat{u}_2$  es perpendicular a  $\hat{u}$

Sin pérdida de generalidad suponga que  $\hat{u} = \hat{k}$ , entonces los tornillos están dados por:

$$\$1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r_y \\ -r_x \\ P \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \$2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\hat{r} = (r_x, r_y, r_z)$  es un punto a lo largo del eje del tornillo y  $\hat{u}_2 = (u_x, u_y, 0)$  es un vector unitario en la dirección del par prismático; entonces, los aniquiladores ortogonales de los pares cinemáticos asociados a esta subálgebra, deben satisfacer la condición que

$$Ki(\$1, \$a) = 0 = Ki((\hat{u}_a; S_{Oa}), (\hat{u}; S_O)) = \hat{u}_a \cdot \hat{u} = (u_{ax}, u_{ay}, u_{az}) \cdot (0, 0, 1) = u_{az} = 0 \quad (5.6)$$

y

$$Ki(\$2, \$a) = 0 = Ki((\hat{u}_a; S_{Oa}), (\vec{0}; \hat{u})) = \hat{u}_a \cdot \vec{0} = 0 \quad (5.7)$$

Concluyendo los aniquiladores ortogonales de los pares cinemáticos que forman parte de esta subálgebra,  $y_{\hat{u},p}$ , deben satisfacer la condición  $u_{az} = 0$ .

## 5.4. Determinación de los ejes instantáneos secundarios

En esta sección se mostrará el procedimiento para determinar los ejes instantáneos secundarios en mecanismos asociados a la subálgebra de movimientos  $y_{\hat{u},p}$ .

Suponga que se desea conocer el eje instantáneo asociado al movimiento relativo de los eslabones  $i$  y  $k$ . Considere entonces los eslabones  $i, m$  y  $k$  por un lado e  $i, n$  y  $k$  por el otro. Entonces, los estados de velocidad están dados por

$${}^i\vec{V}^k = {}^i\vec{V}^m + {}^m\vec{V}^k \quad \text{o} \quad {}_i\omega_k {}^i\$^k = {}_i\omega_m {}^i\$^m + {}_m\omega_k {}^m\$^k \quad (5.8)$$

$${}^i\vec{V}^k = {}^i\vec{V}^n + {}^n\vec{V}^k \quad \text{o} \quad {}_i\omega_k {}^i\$^k = {}_i\omega_n {}^i\$^n + {}_n\omega_k {}^n\$^k \quad (5.9)$$

Los aniquiladores ortogonales respecto a la forma simétrica bilineal, de Klein, deben satisfacer las condiciones:

1. Cuando se consideran los cuerpos  $i, m$  y  $k$

$$Kl(\$_{a,Kl}, {}^i\$^m) = Kl(\$_{a,Kl}, {}^m\$^k) = 0 \quad (5.10)$$

entonces por las propiedades de la forma de Klein; estas ecuaciones son equivalentes a los aniquiladores ortogonales de  $[{}^i\$^m, {}^m\$^k]$ , el subespacio de,  $se(3)$ , generado por el conjunto  $\{{}^i\$^m, {}^m\$^k\}$ . Puesto que la forma de Klein es no-singular, las ecuaciones (5.10) generan un sistema de dos ecuaciones lineales en seis incógnitas las componentes de  $\$_{a,Kl}$ . Como el conjunto  $\{{}^i\$^m, {}^m\$^k\}$  es linealmente independiente, el subespacio de aniquiladores ortogonales de  $[{}^i\$^m, {}^m\$^k]$  tiene dimensión 4. Suponga que una base para este espacio de aniquiladores ortogonales está dado por

$$\{\$_{a1,Kl}^m, \$_{a2,Kl}^m, \$_{a3,Kl}^m, \$_{a4,Kl}^m\}$$

Entonces de la ecuación (6.4) se tiene que

$$Kl(\$_{as,Kl}^m, {}^i\$^k) = 0 \quad \forall s = 1, 2, 3, 4 \quad (5.11)$$

La ecuación (5.11) representa 4 ecuaciones, algunas de ellas triviales, que el eje instantáneo del tornillo  ${}^i\$^k$  debe satisfacer, cuando se considera  $m$  como un eslabón intermedio entre  $i$  y  $k$ .

2. Cuando se consideran los cuerpos  $i, n$  y  $k$

$$Kl(\$_{a,Kl}, {}^i\$^n) = Kl(\$_{a,Kl}, {}^n\$^k) = 0 \quad (5.12)$$

entonces por las propiedades de la forma de Klein; estas ecuaciones son equivalentes a los aniquiladores ortogonales de  $[{}^i\$^n, {}^n\$^k]$ , el subespacio de,  $se(3)$ , generado por el conjunto  $\{{}^i\$^n, {}^n\$^k\}$ . Puesto que la forma de Klein es no-singular, las ecuaciones (5.12) generan un sistema de 2 ecuaciones lineales en 6 incógnitas las componentes de  $\$_{a,Kl}$ . Como el conjunto  $\{{}^i\$^n, {}^n\$^k\}$  es linealmente independiente, el subespacio de aniquiladores ortogonales de  $[{}^i\$^n, {}^n\$^k]$  tiene dimensión 4. Suponga que una base para este espacio de aniquiladores ortogonales está dado por

$$\{\$_{a1,Kl}^n, \$_{a2,Kl}^n, \$_{a3,Kl}^n, \$_{a4,Kl}^n\}$$

entonces de la ecuación (5.4) se tiene que

$$Kl(\$_{as,Kl}^n, {}^i\$^k) = 0 \quad \forall s = 1, 2, 3, 4 \quad (5.13)$$

La ecuación (5.13) representa 4 ecuaciones, algunas de ellas triviales, que el eje instantáneo del tornillo  ${}^i\$^k$  debe satisfacer, cuando se considera  $n$  como un eslabón intermedio entre  $i$  y  $k$ .

En el resto de este capítulo se determinarán los ISA's de los movimientos relativos entre eslabones que pertenecen a dos diferentes mecanismos asociados a la subálgebra de  $y_{\hat{u},p}$ .

## 5.5. Mecanismo H-H-H-H de cuatro barras asociado a la subálgebra de movimientos $y_{\hat{u},p}$

Considere el mecanismo mostrado en la Figura 5.1. Este mecanismo está formado por cuatro eslabones binarios y cuatro pares helicoidales cuyos ejes son paralelos al eje  $Z$  y del mismo paso.

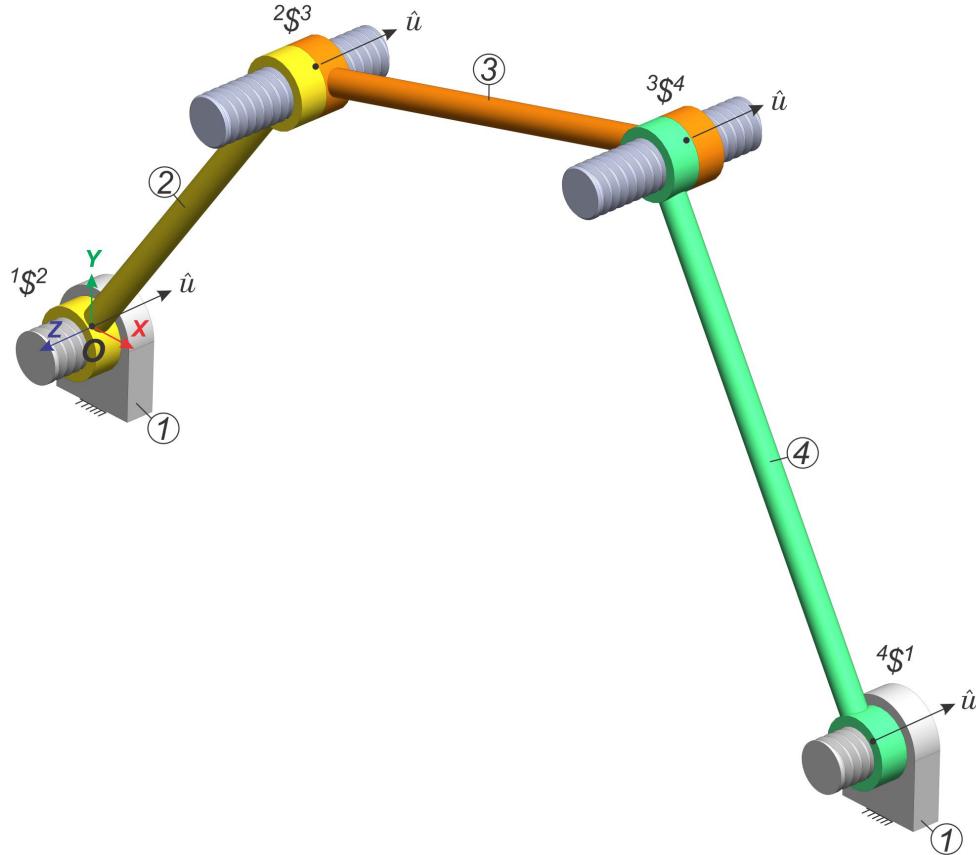


Figura 5.1: Mecanismo H-H-H-H de cuatro barras asociado a una subálgebra de movimientos  $y_{\hat{u},p}$

Los parámetros necesarios para la determinación de los tornillos asociados a los pares cinemáticos, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , son:

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde  $\hat{u}$  representa la dirección de los ejes de los pares de tornillo, los puntos a lo largo de los ejes de los pares cinemáticos con respecto al origen,  $O$ , están dados por:

$$\vec{r}_{2/1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{3/2} = \begin{bmatrix} 125 \\ 175 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/3} = \begin{bmatrix} 360 \\ 235 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/1} = \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

los pasos de los tornillos son iguales entre si y dados por:

$$_1 h_2 = _2 h_3 = _3 h_4 = _4 h_1 = 5$$

donde los vectores de posición y pasos están dados en términos de una unidad de longitud no especificada. Los tornillos infinitesimales asociados a los pares cinemáticos son:

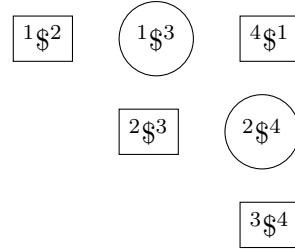
$${}^1\$_O^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 175 \\ -125 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 235 \\ -360 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad {}^4\$_O^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -500 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Cuando sea evidente el origen del sistema coordenado,  $O$ , se suprimirá.

### 5.5.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's

La Tabla 5.1 enumera los ejes instantáneos de tornillo asociados con todos los movimientos relativos entre los eslabones del mecanismo propuesto.

Tabla 5.1: Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo H-H-H-H



Donde un cuadrilátero indica aquellos ejes instantáneos de tornillo que son primarios; es decir aquellos que determinan el eje alrededor del cual un eslabón realiza un movimiento relativo respecto al eslabón adyacente, estos ejes instantáneos se pueden ubicar directamente mediante la inspección de la estructura cinemática del mecanismo. El círculo indica aquellos ejes instantáneos secundarios que se determinarán mediante la aplicación del teorema de Aronhold-Kennedy.

Debe notarse que los ejes instantáneos de los tornillos asociados a los movimientos relativos de los eslabones del mecanismo deben pertenecer forzosamente a la subálgebra de movimientos  $y_{\hat{u},p}$ . Esto significa que

- Si el movimiento relativo entre los eslabones incluye movimiento de rotación, el tornillo será de la forma

$$\$_{\vec{r}_P,h,\hat{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r_{Py} \\ -r_{Px} \\ h \end{bmatrix}$$

- Si el movimiento relativo entre los eslabones es exclusivamente de traslación, el tornillo será de la forma

$$\$_{\hat{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

A partir de la ubicación de los ejes instantáneos primarios es posible determinar los ejes instantáneos secundarios.

Por ejemplo, si se desea determinar el eje instantáneo del tornillo  ${}^1\$_O^3$  se empleará

$$\textcircled{1\$^3} \Rightarrow \boxed{1\$^2} \quad \boxed{2\$^3} \quad {}_1\omega_3 {}^1\$_O^3 = {}_1\omega_2 {}^1\$_O^2 + {}_2\omega_3 {}^2\$_O^3$$

$$\textcircled{1\$^3} \Rightarrow \boxed{3\$^4} \quad \boxed{4\$^1} \quad {}_1\omega_3 {}^1\$_O^3 = {}_3\omega_4 {}^3\$_O^4 + {}_4\omega_1 {}^4\$_O^1$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl({\$}_{as,Kl}^2, {}^1\$_O^3) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (5.14)$$

y

$$Kl({\$}_{as,Kl}^4, {}^1\$_O^3) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (5.15)$$

donde  $\{{\$}_{a1,Kl}^2, \$_{a2,Kl}^2, \$_{a3,Kl}^2, \$_{a4,Kl}^2\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^1\$^2, {}^2\$^3]$  y  $\{{\$}_{a1,Kl}^4, \$_{a2,Kl}^4, \$_{a3,Kl}^4, \$_{a4,Kl}^4\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^1\$^4, {}^3\$^4]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

De manera semejante, para determinar el eje instantáneo del tornillo  ${}^2\$_O^4$  se empleará

$$\textcircled{2\$^4} \Rightarrow \boxed{2\$^3} \quad \boxed{3\$^4} \quad {}_2\omega_4 {}^2\$_O^4 = {}_2\omega_3 {}^2\$_O^3 + {}_3\omega_4 {}^3\$_O^4$$

$$\textcircled{2\$^4} \Rightarrow \boxed{1\$^2} \quad \boxed{4\$^1} \quad {}_2\omega_4 {}^2\$_O^4 = {}_1\omega_2 {}^1\$_O^2 + {}_4\omega_1 {}^4\$_O^1$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl({\$}_{as,Kl}^3, {}^2\$_O^4) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (5.16)$$

y

$$Kl({\$}_{as,Kl}^1, {}^2\$_O^4) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (5.17)$$

donde  $\{{\$}_{a1,Kl}^3, \$_{a2,Kl}^3, \$_{a3,Kl}^3, \$_{a4,Kl}^3\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^2\$^3, {}^3\$^4]$  y  $\{{\$}_{a1,Kl}^1, \$_{a2,Kl}^1, \$_{a3,Kl}^1, \$_{a4,Kl}^1\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^1\$^2, {}^1\$^4]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

### 5.5.2. Obtención del sistema de ecuaciones y su solución

El objetivo de este análisis es determinar los tornillos infinitesimales asociados a los movimientos relativos del eslabón tres respecto del eslabón uno y del eslabón cuatro respecto del eslabón dos. Por lo tanto el primer paso consiste en escribir los tornillos asociados a los ejes instantáneos secundarios, de los cuales sólo se conocen las direcciones de los ejes de los pares de tornillo; es decir, su dirección debe ser la del eje  $Z$  y la componente  $Z$  de la traslación deberá ser el paso. Por lo tanto

$${}^1\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{13} \\ -x_{13} \\ {}_1h_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^2\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{24} \\ -x_{24} \\ {}_2h_4 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones necesarias se obtienen aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Klein de una manera sistemática, vea las ecuaciones (5.14 - 5.17).

Como se trata de un mecanismo de 4 barras determinado, sus dos ejes instantáneos secundarios se pueden encontrar de manera independiente por lo tanto se tiene para el eje instantáneo  ${}^1\$^3_O$

$$Ec13_2 = \left[ -5 + {}_1h_3, \frac{5}{7} y_{13} - x_{13}, 0, 0 \right] \quad (5.18)$$

$$Ec13_4 = \left[ -5 + {}_1h_3, 500 - \frac{28}{47} y_{13} - x_{13}, 0, 0 \right] \quad (5.19)$$

Donde los dos primeros números de la ecuación vectorial, pues las componentes se igualan a cero, indican cual es el eje instantáneo que se desea determinar y el subíndice indica cual es el eslabón intermedio que se emplea para determinar el eje instantáneo.

De las ecuaciones (5.18) y (5.19) se forma el conjunto final de ecuaciones:

$$0 = -5 + {}_1h_3 \quad (5.20)$$

$$0 = \frac{5}{7} y_{13} - x_{13} \quad (5.21)$$

$$0 = -5 + {}_1h_3 \quad (5.22)$$

$$0 = 500 - \frac{28}{47} y_{13} - x_{13} \quad (5.23)$$

De inmediato se observa que las ecuaciones (5.20) y (5.22) son iguales y además se puede obtener el valor del paso  ${}_1h_3$  directamente. De las ecuaciones (5.21) y (5.23) se tiene un sistema lineal de 2 ecuaciones y dos incógnitas, que representan las coordenadas  $x_{13}$  y  $y_{13}$  asociadas al eje instantáneo secundario  ${}^1\$^3_O$ .

Resolviendo el sistema de ecuaciones se encuentra que el vector de posición para el eje instantáneo secundario, está dado por

$$\vec{r}_{3/1} = \begin{bmatrix} \frac{117500}{431} \\ \frac{164500}{431} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además, se tiene que el paso correspondiente al eje instantáneo secundario, es igual a:

$${}_1h_3 = 5$$

El tornillo infinitesimal asociado al eje instantáneo secundario  ${}^1\$^3_O$  está dado por

$${}^1\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{164500}{431} \\ -\frac{117500}{431} \\ 5 \end{bmatrix}$$

De una manera semejante se determina el ISA asociado a  ${}^2\$^4_O$ . El sistema de ecuaciones lineales necesario para determinar el vector de posición  $\vec{r}_{4/2}$  y el paso  ${}_2h_4$  están dado por

$$Ec24_3 = \left[ -5 + {}_2h_4, -\frac{6725}{12} + \frac{47}{12} y_{24} - x_{24}, 0, 0 \right] \quad (5.24)$$

$$Ec24_1 = \left[ -5 + {}_2h_4, y_{24}, 0, 0 \right] \quad (5.25)$$

De las ecuaciones (5.24) y (5.25) se tiene el sistema de ecuaciones escalares:

$$0 = -5 + {}_2h_4 \quad (5.26)$$

$$0 = -\frac{6725}{12} + \frac{47}{12} y_{24} - x_{24} \quad (5.27)$$

$$0 = -5 + {}_2h_4 \quad (5.28)$$

$$0 = y_{24} \quad (5.29)$$

De manera semejante se resuelve el sistema de ecuaciones para el vector de posición asociado al eje instantáneo  ${}^2\$^4_O$ . El vector de posición para el eje instantáneo secundario, está dado por:

$$\vec{r}_{4/2} = \begin{bmatrix} -\frac{6725}{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se tiene que el paso correspondiente al eje instantáneo secundario, es igual a:

$${}_2h_4 = 5$$

El tornillo infinitesimal asociado al eje instantáneo secundario  ${}^2\$^4_O$  está dado por:

$${}^2\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{6725}{12} \\ 5 \end{bmatrix}$$

Los valores determinados para los vectores de posición correspondientes a los ejes instantáneos secundarios se muestran en la Figura 5.2, donde se puede observar que los tres ejes instantáneos asociados a los tres movimientos relativos,  ${}^i\$^k$ ,  ${}^i\$^j$ ,  ${}^j\$^k$  entre los tres cuerpos para los dos posibles valores de  $j$ , en cada uno de los casos yacen sobre una línea recta de acuerdo a lo establecido por el teorema de Aronhold-Kennedy, para mecanismos planos.

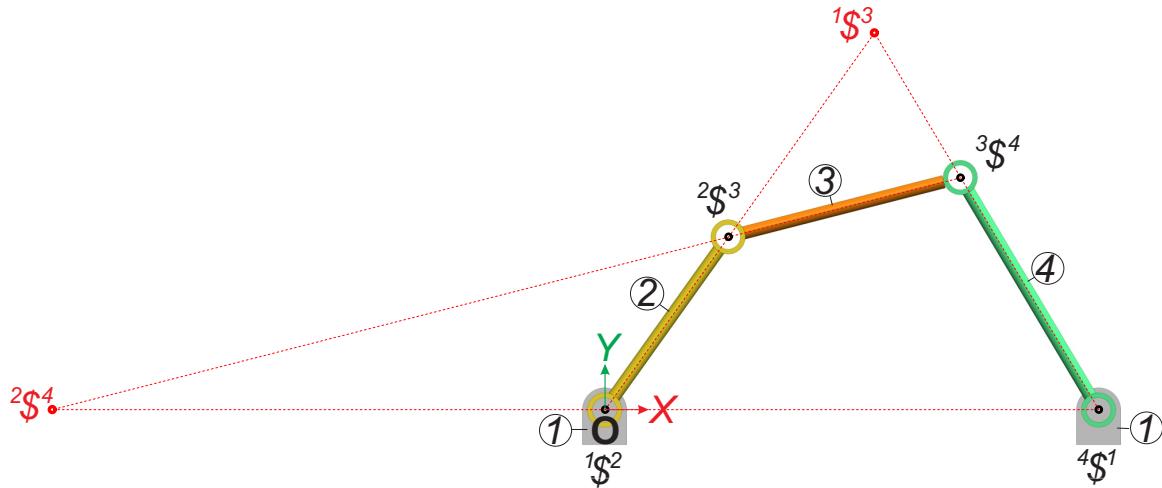


Figura 5.2: Mecanismo H-H-H-H de cuatro barras asociado a la subálgebra de movimientos  $y_{\hat{u},p}$

### 5.5.3. Verificación de los resultados

Los resultados obtenidos para los vectores de posición de los ejes instantáneos secundarios, así como sus pasos se comprobaron mediante la realización del análisis de velocidad del mecanismo para una velocidad angular de magnitud arbitraria de  $10 \text{ rad/s}$  en sentido horario del eslabón dos, seleccionado como eslabón motriz, y, a partir de los resultados, determinando los estados de velocidad entre los diferentes eslabones del mecanismo y finalmente el ISA correspondiente para cada movimiento relativo, este proceso se llevó a cabo mediante un programa implementado en Maple<sup>©</sup>.

Finalmente los resultados del análisis de velocidad fueron verificados satisfactoriamente mediante el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>; los resultados de la simulación se muestran en las Figuras (5.3) - (5.8). Es importante reconocer que puesto que la posición relativa de los eslabones cambia durante el tiempo de la simulación, los únicos resultados importantes son los iniciales; es decir aquellos que se obtienen para  $t = 0$ .

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^1\$^2_O$ , debe recordarse que

$${}^1\vec{V}_O^2 = {}_1\omega_2 \begin{bmatrix} {}^1\hat{s}^2 \\ {}^1s_O^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\vec{\omega}^2 \\ {}^1\vec{v}_O^2 \end{bmatrix} = {}_1\omega_2 {}^1\$^2_O = -10 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \text{ rad/s} \\ 0 \\ 0 \\ -50 \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

donde  ${}^1\$^2_O$  se conoce de los datos del mecanismo.

La simulación realizada en Adams<sup>©</sup> obtiene que  ${}_1\omega_2 = -10 \text{ rad/s}$ , por lo tanto

$${}^1\vec{\omega}^2 = {}_1\omega_2 {}^1\hat{s}^2 = -10 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

De aquí que,  ${}_1\omega_{2x} = 0$ ,  ${}_1\omega_{2y} = 0$  y  ${}_1\omega_{2z} = -10 \text{ rad/s}$ , tal como se indica en la Figura 5.3 obtenida mediante el programa Adams<sup>©</sup>.

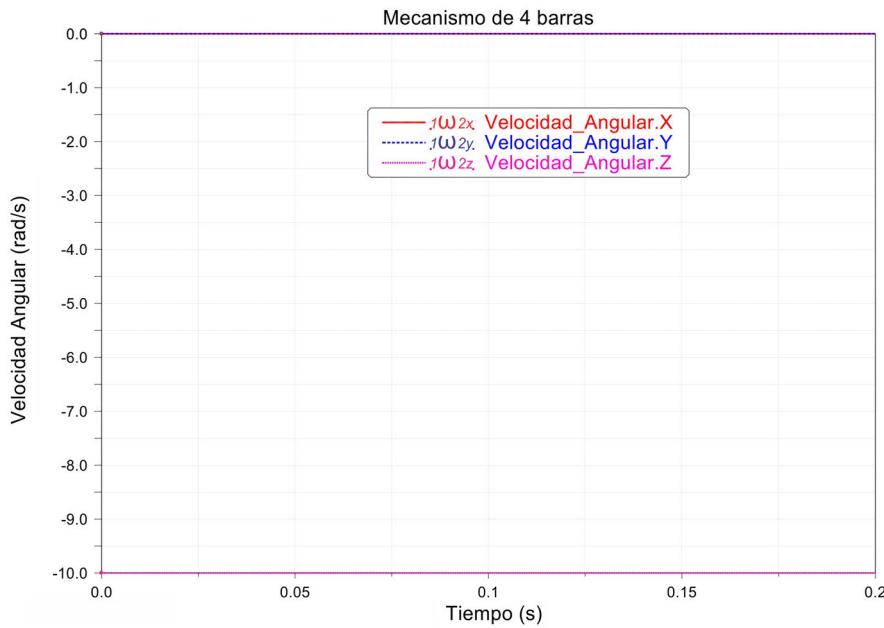


Figura 5.3: Velocidad angular relativa del eslabón cuatro respecto del eslabón dos.

Con el resultado de la velocidad angular  ${}_1\omega_2$  se tiene que

$${}^1\vec{v}_O^2 = {}_1\omega_2 {}^1\vec{s}_O^2 = -10 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -50 \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

Consecuentemente,  ${}_1v_{2x} = 0$ ,  ${}_1v_{2y} = 0$  y  ${}_1v_{2z} = -50 \text{ u.l./s}$ . Estos resultados se verifican en la simulación para el tiempo  $t = 0 \text{ s}$ , vea la Figura 5.4.

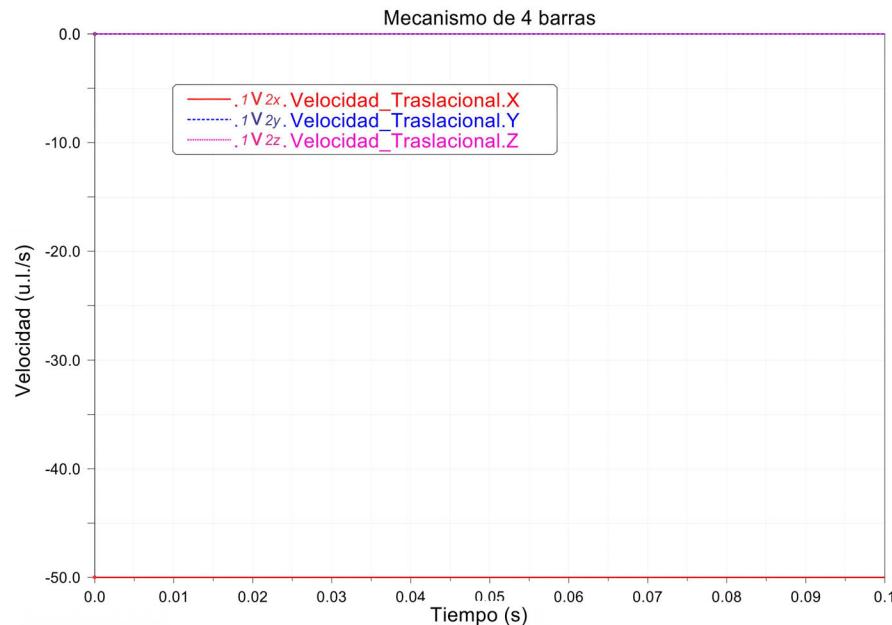


Figura 5.4: Velocidad translacional del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón dos.

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^1\$^3_O$ , debe recordarse que

$${}^1\vec{V}_O^3 = {}_1\omega_3 \begin{bmatrix} {}^1\hat{s}^3 \\ {}^1\vec{s}_O^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\vec{\omega}^3 \\ {}^1\vec{v}_O^3 \end{bmatrix} = {}_1\omega_3 {}^1\$^3_O = 8.4676 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{164500}{431} \text{ u.l./s} \\ -\frac{117500}{431} \text{ u.l./s} \\ 5 \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8.46760 \text{ rad/s} \\ 3231.8334 \text{ u.l./s} \\ -2308.4524 \text{ u.l./s} \\ 42.3380 \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

donde  ${}^1\$^3_O$  se determinó mediante el programa Maple<sup>©</sup>.

La simulación realizada en Adams<sup>©</sup> obtiene que  ${}_1\omega_3 = 8.4676 \text{ rad/s}$ , por lo tanto

$${}^1\vec{\omega}^3 = {}_1\omega_3 {}^1\hat{s}^3 = 8.4676 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8.4676 \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

De aquí que,  ${}_1\omega_{3x} = 0$ ,  ${}_1\omega_{3y} = 0$  y  ${}_1\omega_{3z} = 8.4676 \text{ rad/s}$ , tal como se indica en la Figura 5.5 obtenida mediante el programa Adams<sup>©</sup>.

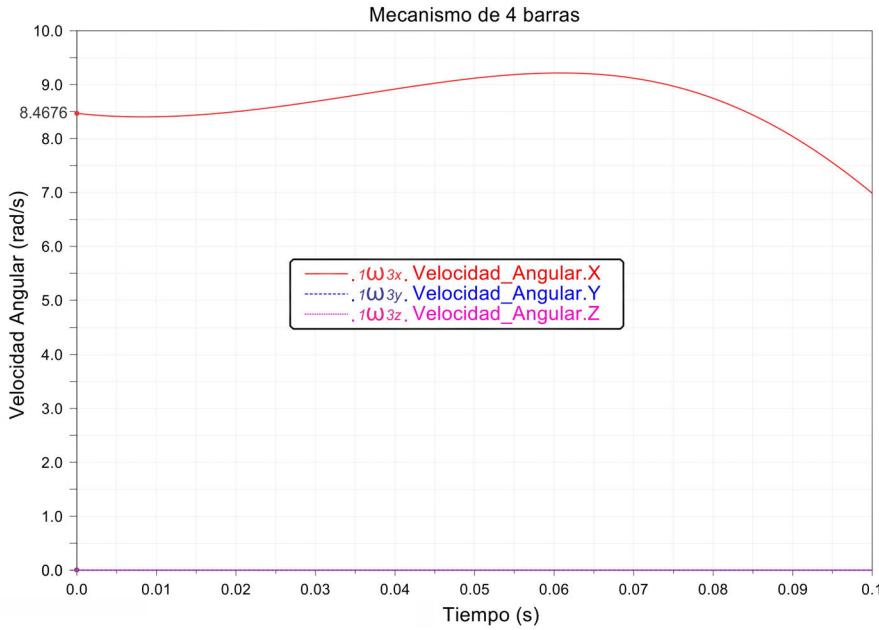


Figura 5.5: Velocidad angular del par de revoluta asociado a  ${}^1\$^3_O$

Con el resultado de la velocidad angular  ${}_1\omega_3$  se tiene que

$${}^1\vec{v}_O^3 = {}_1\omega_3 {}^1\vec{s}_O^3 = 8.4676 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} \frac{164500}{431} \text{ u.l./s} \\ -\frac{117500}{431} \text{ u.l./s} \\ 5 \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3231.8334 \text{ u.l./s} \\ -2308.4524 \text{ u.l./s} \\ 42.3380 \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

Consecuentemente,  ${}_1v_{3x} = 3231.8334 \text{ u.l./s}$ ,  ${}_1v_{3y} = -2308.4524 \text{ u.l./s}$  y  ${}_1v_{3z} = 42.3380 \text{ u.l./s}$ . Estos resultados se verifican en la simulación para el tiempo  $t = 0 \text{ s}$ , vea la Figura 5.6.

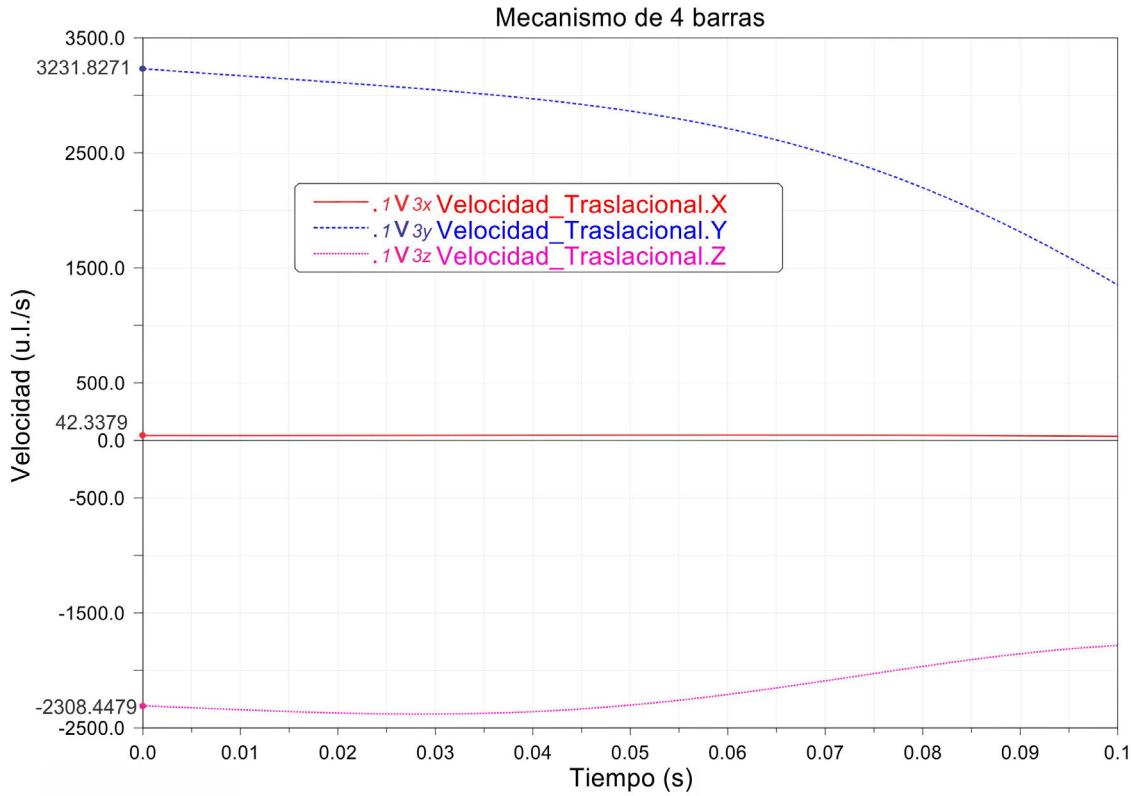


Figura 5.6: Velocidad translacional del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón tres.

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^2\$O^4$ , debe recordarse que

$${}^2\vec{V}_O^4 = {}_2\omega_4 \begin{bmatrix} {}^2\hat{s}^4 \\ {}^2\vec{s}_O^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2\vec{\omega}^4 \\ {}^2\vec{v}_O^4 \end{bmatrix} = {}_2\omega_4 {}^2\$O^4 = 4.7151 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{6725}{12} \text{ u.l./s} \\ 5 \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.7151 \text{ rad/s} \\ 0 \\ 2642.42062 \text{ u.l./s} \\ 23.5755 \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

Donde  ${}^2\$O^4$  se determinó mediante el programa Maple<sup>©</sup>.

La simulación realizada en Adams<sup>©</sup> obtiene que  ${}_2\omega_4 = 4.7151 \text{ rad/s}$ , por lo tanto

$${}^2\vec{\omega}^4 = {}_2\omega_4 {}^2\hat{s}^4 = 4.7151 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.7151 \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

De aquí que,  ${}_2\omega_{4x} = 0$ ,  ${}_2\omega_{4y} = 0$  y  ${}_2\omega_{4z} = 4.7151 \text{ rad/s}$ , tal como se indica en la Figura 5.7 obtenida mediante el programa Adams<sup>©</sup>.

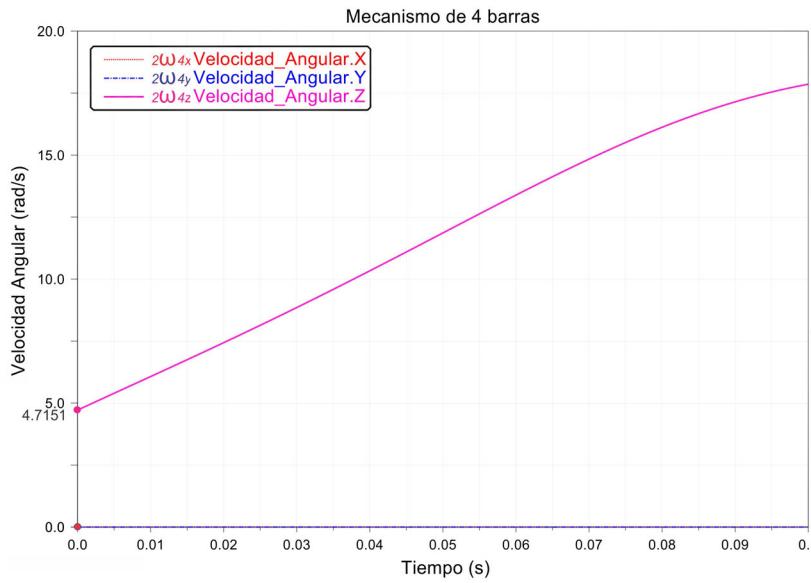


Figura 5.7: Velocidad angular del par de revoluta asociado a  ${}^2\bar{v}_O^4$

Con el resultado de la velocidad angular  ${}_2\omega_4$  se tiene que

$${}^2\bar{v}_O^4 = {}_2\omega_4 {}^2\bar{s}_O^4 = 4.7151 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6725}{12} \text{ u.l./s} \\ 5 \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2642.4206 \text{ u.l./s} \\ 23.5755 \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

Consecuentemente,  ${}_2v_{4x} = 0$ ,  ${}_2v_{4y} = 2642.4206 \text{ u.l./s}$  y  ${}_2v_{4z} = 23.5755 \text{ u.l./s}$ . Estos resultados se verifican en la simulación para el tiempo  $t = 0 \text{ s}$ , vea la Figura 5.8<sup>1</sup>

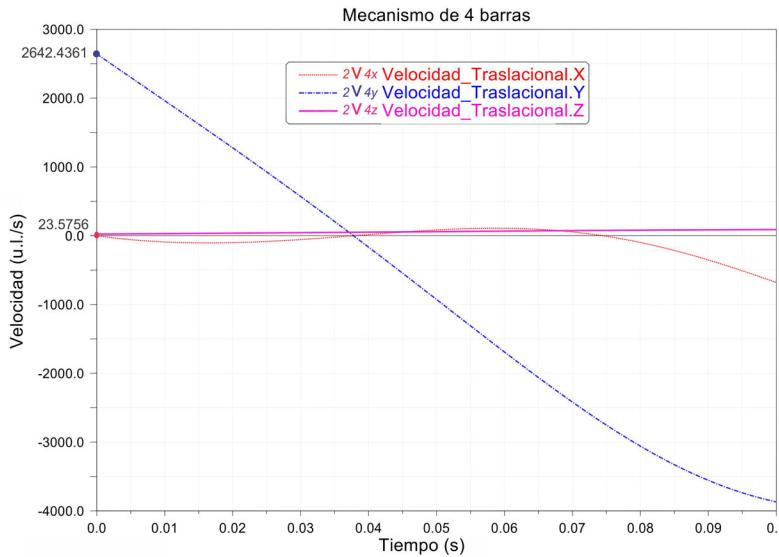


Figura 5.8: Velocidad translacional del punto  $O_4$  respecto del punto  $O_2$

<sup>1</sup>El título correcto de la Figura 5.8 debe ser velocidad translacional del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón cuatro respecto a un sistema de referencia sujeto a traslación con la velocidad del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón dos; sin embargo por razones de espacio, se usa el título mostrado

## 5.6. Mecanismo H-H-H-P de cuatro barras asociado a la subálgebra de movimientos $y_{\hat{u},p}$

Considere el mecanismo mostrado en la Figura 5.9. Este mecanismo está formado por cuatro eslabones binarios y tres pares helicoidales cuyos ejes son paralelos al eje  $Z$  y del mismo paso, y un par primático cuya dirección está contenida en el plano  $X - Y$ .

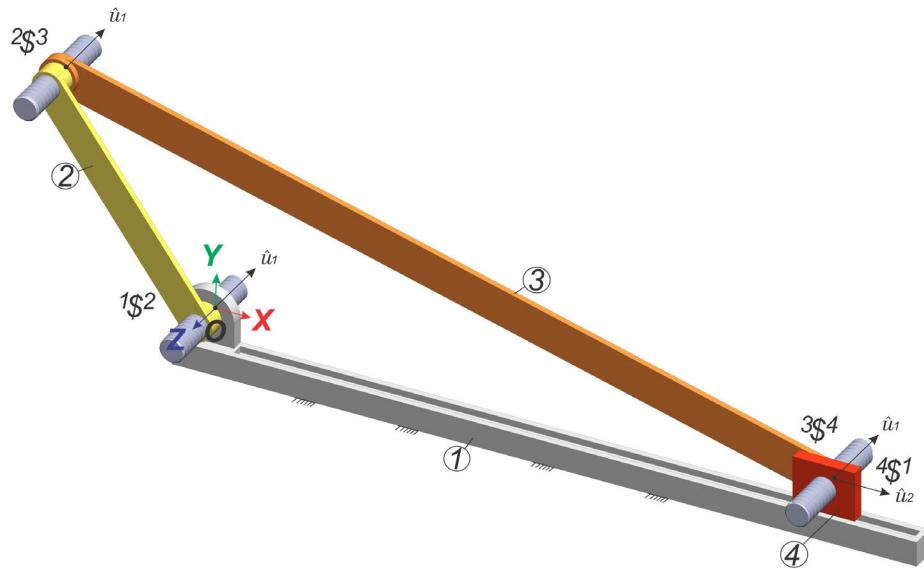


Figura 5.9: Mecanismo H-H-H-P de cuatro barras asociado a la subálgebra de movimientos  $y_{\hat{u},P}$

Los parámetros necesarios para la determinación de los tornillos asociados a los pares cinemáticos, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , son:

$$\hat{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\hat{u}_1$  representa la dirección de los ejes de los pares de tornillo y  $\hat{u}_2$  representa al dirección del par prismático. Los puntos a lo largo de los ejes de los pares cinemáticos con respecto al origen del sistema coordenado  $O$  están dados por:

$$\vec{r}_{2/1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{3/2} = \begin{bmatrix} -120 \\ 165 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/3} = \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/1} = \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

los pasos de los tornillos son iguales entre si y dados por:

$$_1 h_2 = _2 h_3 = _3 h_4 = 5$$

donde los vectores de posición y los pasos están dados en términos de una unidad de longitud no especificada.

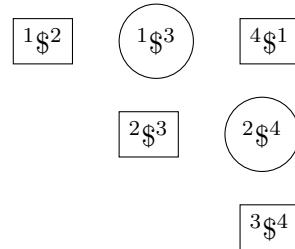
Los tornillos infinitesimales asociados a los pares cinemáticos son:

$${}^1\$_O^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 165 \\ 120 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -500 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad {}^4\$_O^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 5.6.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's

La Tabla 5.2 enumera los ejes instantáneos de tornillo asociados con todos los movimientos relativos entre los eslabones del mecanismo propuesto. La sección que selecciona los tornillos necesarios para la determinación de los tornillos secundarios se omite por razones de espacio.

Tabla 5.2: Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo H-H-H-P



### 5.6.2. Obtención del sistema de ecuaciones y su solución

El objetivo de este análisis es determinar los tornillos infinitesimales asociados a los movimientos relativos del eslabón tres respecto del eslabón un y del eslabón cuatro respecto del eslabón dos. Por lo tanto el primer paso consiste en escribir los tornillos asociados a los ejes instantáneos secundarios, de los cuales sólo se conocen las direcciones de los ejes de los pares de tornillo; es decir, su dirección debe ser la del eje  $Z$  y la componente  $Z$  de la traslación deberá ser el paso.

$${}^1\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{13} \\ -x_{13} \\ 1h_3 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{24} \\ -x_{24} \\ 2h_4 \end{bmatrix}$$

Como se trata de un mecanismo de cuatro barras determinado, sus dos ejes instantáneos secundarios se pueden encontrar de manera independiente; por lo tanto, para el eje instantáneo  ${}^1\$^3$  se tiene que:

$$Ec13_2 = \left[ -5 + {}_1h_3, -\frac{8}{11}y_{13} - x_{13}, 0, 0 \right] \quad (5.30)$$

$$Ec13_4 = \left[ -5 + {}_1h_3, 500 - x_{13}, 0, 0 \right] \quad (5.31)$$

donde los dos primeros números de la ecuación vectorial, pues las componentes se igualan a cero, indican cual es el eje instantáneo que se desea determinar y el subíndice indica cual es el eslabón intermedio que

se emplea para determinar el eje instantáneo.

El sistema de ecuaciones escalares está dado:

$$0 = -5 + {}_1h_3 \quad (5.32)$$

$$0 = -\frac{8}{11} y_{13} - x_{13} \quad (5.33)$$

$$0 = -5 + {}_1h_3 \quad (5.34)$$

$$0 = 500 - x_{13} \quad (5.35)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones de la misma forma que en la sección 5.5.2 se encuentra que el vector de posición asociado al eje instantáneo secundario  ${}^1\$^3_O$ , está dado por:

$$\vec{r}_{3/1} = \begin{bmatrix} 500 \\ -\frac{1375}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además, se tiene que el paso correspondiente al eje instantáneo secundario, está dado por:

$${}_1h_3 = 5$$

Este resultado era esperado. El tornillo infinitesimal asociado al eje instantáneo secundario  ${}^1\$^3_O$  es igual a:

$${}^1\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1375}{2} \\ -500 \\ 5 \end{bmatrix}$$

De una manera semejante se determina el ISA asociado a  ${}^2\$^4_O$ . El sistema de ecuaciones lineales necesario para determinar el vector de posición  $\vec{r}_{4/2}$  está dado por:

$$Ec24_3 = \left[ -5 + {}_2h_4, 500 - \frac{124}{33} y_{24} - x_{24}, 0, 0 \right] \quad (5.36)$$

$$Ec24_1 = \left[ -5 + {}_2h_4, -x_{24}, 0, 0 \right] \quad (5.37)$$

El sistema de ecuaciones escalares está dado por:

$$0 = -5 + {}_2h_4 \quad (5.38)$$

$$0 = 500 - \frac{124}{33} y_{24} - x_{24} \quad (5.39)$$

$$0 = -5 + {}_2h_4 \quad (5.40)$$

$$0 = -x_{24} \quad (5.41)$$

De manera semejante se resuelve el sistema de ecuaciones para el vector de posición asociado al eje instantáneo  ${}^2\$^4_O$ . El vector de posición para el eje instantáneo secundario, está dado por:

$$\vec{r}_{4/2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4125}{31} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además, se tiene que el paso correspondiente al eje instantáneo secundario, como se esperaba, es igual a:

$${}_2h_4 = 5$$

El tornillo infinitesimal asociado al eje instantáneo secundario  ${}^2\$^4_O$  está dado por:

$${}^2\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{4125}{31} \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Los valores determinados para los vectores de posición correspondientes a los ejes instantáneos secundarios se muestran en la Figura 5.10, donde se puede observar que los tres ejes instantáneos asociados a los tres movimientos relativos,  ${}^i\$^k$ ,  ${}^i\$^j$ ,  ${}^j\$^k$  entre los tres cuerpos para los dos posibles valores de  $j$ , en cada uno de los casos yacen sobre una línea recta de acuerdo a lo establecido por el teorema de Aronhold-Kennedy.

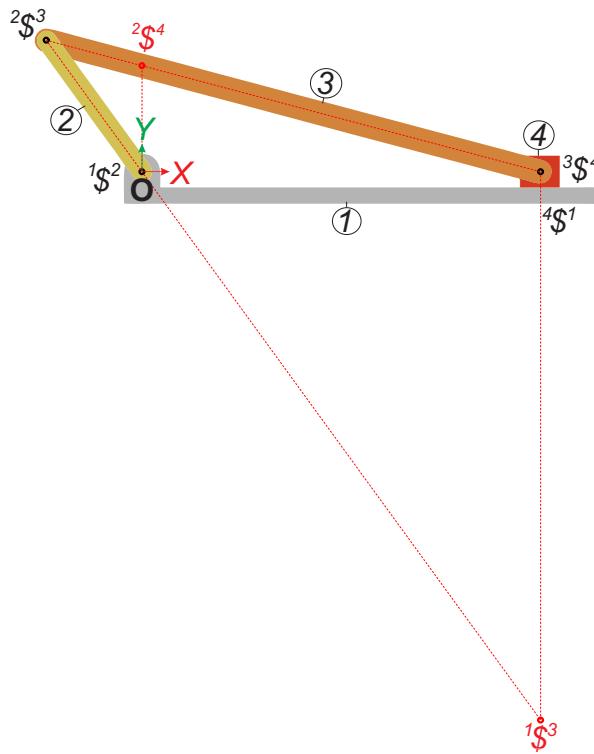


Figura 5.10: Mecanismo H-H-H-P de cuatro barras asociado a la subálgebra de movimientos  $y_{\hat{u},p}$

### 5.6.3. Verificación de los resultados

Los resultados obtenidos para los vectores de posición de los ejes instantáneos secundarios, así como sus pasos se comprobaron mediante la realización del análisis de velocidad del mecanismo para una velocidad angular de magnitud arbitraria de  $10 \text{ rad/s}$  en sentido horario del eslabón dos, seleccionado como eslabón motriz, determinando los estados de velocidad entre los diferentes eslabones del mecanismo y finalmente el ISA correspondiente para cada movimiento relativo, este proceso se llevó a cabo mediante un programa implementado en Maple<sup>©</sup>.

Finalmente los resultados del análisis de velocidad fueron verificados satisfactoriamente mediante el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>; sin embargo, los resultados de la simulación no se muestran por razones de espacio.

---

## Capítulo 6: Mecanismos triviales asociados a la subálgebra de Schönflies

---

En este capítulo se mostrará que, nuevamente, la ecuación que relaciona los estados de velocidad de tres cuerpos arbitrarios

$${}^i\vec{V}_O^k = {}^i\vec{V}_O^j + {}^j\vec{V}_O^k$$

que en términos de tornillos unitarios está dado por

$${}_i\omega_k {}^i\$_O^k = {}_i\omega_j {}^i\$_O^j + {}_j\omega_k {}^j\$_O^k$$

permite determinar la localización de todos los ejes instantáneos de los mecanismos triviales asociados a un subgrupo,  $X_{\hat{u}}$ , o subálgebra,  $x_{\hat{u}}$ , de Schönflies de un grado de libertad.

### 6.1. Características de los mecanismos

El primer paso consiste en determinar el número de pares cinemáticos que un mecanismo trivial asociado al subgrupo de Schönflies debe tener. De la ecuación de movilidad

$$F = \sum_{i=1}^n f_i - \dim(X_{\hat{u}}) \tag{6.1}$$

donde,  $F$  es el número de grados de libertad del mecanismo,  $n$  es el número de pares cinemáticos,  $f_i$  es el número de grados de libertad del  $i$ -ésimo par cinemático del mecanismo y finalmente  $\dim(X_{\hat{u}})$  es la dimensión del subgrupo de Schönflies, en este caso igual a 4.

Suponiendo que todos los pares cinemáticos poseen un grado de libertad y que se desea un mecanismo de un grado de libertad, la ecuación (6.1) se reduce a

$$1 = n - 4 \quad o \quad n = 1 + 4 = 5$$

entonces, los mecanismos triviales de un grado de libertad asociados al subgrupo de Schönflies tienen cinco pares cinemáticos de un grado de libertad o de la clase I.

Falta determinar el tipo de pares cinemáticos de la clase I que pueden formar parte del mecanismo. La condición es que el tornillo asociado al par cinemático forme parte del álgebra de Lie,  $x_{\hat{u}}$ , asociado al subgrupo,  $X_{\hat{u}}$ . Por lo tanto, los posibles pares cinemáticos son:

1. Un par de tornillo,  $\vec{r}_{P,\hat{u},h}$ , que pasa por un punto arbitrario  $P$ , de paso arbitrario  $h$ , y cuya dirección,  $\hat{u}$ , coincide con la determinada por el subgrupo,  $X_{\hat{u}}$ , o subálgebra,  $x_{\hat{u}}$ , de Schönflies.
2. Un par de revoluta,  $\vec{r}_{P,\hat{u}}$ , que pase por un punto arbitrario  $P$ , y cuya dirección  $\hat{u}$ , coincide con la determinada por el subgrupo,  $X_{\hat{u}}$ , o subálgebra,  $x_{\hat{u}}$ , de Schönflies.
3. Un par prismático,  $t_{\hat{v}}$ , cuya dirección,  $\hat{v}$ , es arbitraria.

Debe notarse que un par cilíndrico,  $C_{P,\hat{u}}$ , cuyo eje sea paralelo al vector  $\hat{u}$  también puede formar parte de este tipo de mecanismos; sin embargo, como se puede modelar como la combinación de un par de revoluta y un par prismático, este tipo de par no aporta más información que la que se obtiene considerando estos 3 tipos de pares cinemáticos.

Concluyendo, un mecanismo de un grado de libertad asociado al subgrupo  $X_{\hat{u}}$ , está formado por 5 pares de la clase I de las características indicadas anteriormente.

## 6.2. La aplicación de las formas de Klein y Killing

Como ya se ha explicado anteriormente, la determinación de los ejes instantáneos de tornillo,  ${}^i\$^k$ , requiere determinar los aniquiladores ortogonales, respecto a las formas de Klein o Killing del subespacio generado por  $\{{}^i\$^j, {}^j\$^k\}$  es decir aquellos tornillos  $\$_{aik}$  tal que

$$Kl(\$_{aik}, {}^i\$^j) = Kl(\$_{aik}, {}^j\$^k) = 0 \quad (6.2)$$

y

$$Ki(\$_{aik}, {}^i\$^j) = Ki(\$_{aik}, {}^j\$^k) = 0 \quad (6.3)$$

pues, aprovechando las propiedades de las formas bilineales, se tiene que:

$$Kl(\$_{aik}, {}^i\$^k) = Kl(\$_{aik}, \frac{i\omega_j}{i\omega_k} {}^i\$^j + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} {}^j\$^k) = \frac{i\omega_j}{i\omega_k} Kl(\$_{aik}, {}^i\$^j) + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} Kl(\$_{aik}, {}^j\$^k) = \frac{i\omega_j}{i\omega_k} 0 + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} 0 = 0 \quad (6.4)$$

de manera semejante, se tiene que

$$Ki(\$_{aik}, {}^i\$^k) = Ki(\$_{aik}, \frac{i\omega_j}{i\omega_k} {}^i\$^j + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} {}^j\$^k) = \frac{i\omega_j}{i\omega_k} Ki(\$_{aik}, {}^i\$^j) + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} Ki(\$_{aik}, {}^j\$^k) = \frac{i\omega_j}{i\omega_k} 0 + \frac{j\omega_k}{i\omega_k} 0 = 0 \quad (6.5)$$

La conclusión es que los aniquiladores ortogonales del subespacio generado por  $\{{}^i\$^j, {}^j\$^k\}$  aniquilan también al tornillo  ${}^i\$^k$  asociado al eje instantáneo del tornillo del movimiento relativo entre los eslabones  $i$  y  $k$ . Este es el fundamento del teorema de Aronhold-Kennedy aplicable a cualquier tipo de mecanismo. Sin embargo, la metodología puede simplificarse por las características especiales de los pares cinemáticos y por consiguiente de los tornillos infinitesimales que los representan.

## 6.3. Condiciones generales de los aniquiladores ortogonales

En esta sección se determinarán las condiciones generales que deben satisfacer los aniquiladores duales de los pares cinemáticos que forman parte de un mecanismo asociado a la subálgebra de Schönflies. Estas condiciones generales se obtendrán aplicando las formas de Killing y Klein a los diferentes tipos de pares

cinemáticos descritos en la sección 6.1.

Suponga sin pérdida de generalidad que el vector unitario asociado al subgrupo,  $X_{\hat{u}}$ , y a su subálgebra  $x_{\hat{u}}$ , es  $\hat{k}$ . En este caso, los tornillos que representan los pares cinemáticos de revoluta, prismáticos y de tornillo son:

$$\$_{\vec{r}_P, \hat{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r_{Py} \\ -r_{Px} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

donde  $r_{Px}$  y  $r_{Py}$  son las coordenadas  $x$  y  $y$  del punto arbitrario  $P$ ,

$$\$_{\hat{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

donde  $\hat{v} = (v_x, v_y, v_z)$  son las componentes cartesianas del vector unitario  $\hat{v}$ , asociado a la dirección del movimiento del par prismático, y

$$\$_{\vec{r}_P, h, \hat{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r_{Py} \\ -r_{Px} \\ h \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

donde  $r_{Px}$  y  $r_{Py}$  son las coordenadas  $x$  y  $y$  del punto arbitrario  $P$  y  $h$  es el paso del par de tornillo.

Por otro lado, si un aniquilador ortogonal respecto a la forma de Killing, está dado por

$$\$_{a, Ki} = \begin{bmatrix} u_{ax} \\ u_{ay} \\ u_{az} \\ v_{ax} \\ v_{ay} \\ v_{az} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Entonces, se tiene que para los diferentes pares cinemáticos se deben satisfacer las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} Ki(\$_{a, Ki}, \$_{\vec{r}_P, \hat{u}}) &= u_{az} = 0 \\ Ki(\$_{a, Ki}, \$_{\vec{r}_P, h, \hat{u}}) &= u_{az} = 0 \\ Ki(\$_{a, Ki}, \$_{\hat{v}}) &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que los mecanismos asociados al subgrupo de Schönflies,  $X_{\hat{u}}$ , deben tener al menos un par de revoluta o tornillo, se tiene como conclusión, que los aniquiladores ortogonales respecto a la forma de Killing yacen en el plano  $X-Y$ ; es decir el vector unitario,  $\hat{u}_a$ , que determina la dirección del aniquilador ortogonal respecto a la forma de Killing debe satisfacer la condición

$$u_{az} = 0 \quad (6.10)$$

aplicando la condición dada por la ecuación (6.10), los aniquiladores ortogonales respecto a la forma de Killing son de la forma

$$\$_{a,Ki} = \begin{bmatrix} u_{ax} \\ u_{ay} \\ 0 \\ v_{ax} \\ v_{ay} \\ v_{az} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Por otro lado, evaluando la forma de Klein del aniquilador ortogonal  $\$_{a,Kl}$  con los tornillos asociados a los pares cinemáticos que forman los mecanismos asociados al subgrupo de Schönflies no aporta ninguna restricción general adicional. Sin embargo, debe notarse que puesto que la dirección de los tornillos asociados a esta subálgebra,  $x_{\hat{u}}$ , tienen la dirección del eje  $Z$ , el resultado  $u_{az} = 0$  es intrascendente.

## 6.4. Determinación de los centros instantáneos secundarios

En esta sección se mostrará el procedimiento para determinar los ejes instantáneos secundarios en mecanismos asociados al subgrupo de Schönflies.

Suponga que se desea conocer el eje instantáneo asociado al movimiento relativo de los eslabones  $i$  y  $k$ . Considere entonces los eslabones  $i, m$  y  $k$  por un lado e  $i, n$  y  $k$  por el otro. Entonces, los estados de velocidad están dados por

$${}^i\vec{V}^k = {}^i\vec{V}^m + {}^m\vec{V}^k \quad \text{o} \quad {}_i\omega_k {}^i\$^k = {}_i\omega_m {}^i\$^m + {}_m\omega_k {}^m\$^k \quad (6.12)$$

$${}^i\vec{V}^k = {}^i\vec{V}^n + {}^n\vec{V}^k \quad \text{o} \quad {}_i\omega_k {}^i\$^k = {}_i\omega_n {}^i\$^n + {}_n\omega_k {}^n\$^k \quad (6.13)$$

Los aniquiladores ortogonales respecto a la forma simétrica bilineal, de Klein, deben satisfacer las condiciones:

1. Cuando se consideran los cuerpos  $i, m$  y  $k$

$$Kl(\$_{a,Kl}, {}^i\$^m) = Kl(\$_{a,Kl}, {}^m\$^k) = 0 \quad (6.14)$$

entonces por las propiedades de la forma de Klein; estas ecuaciones son equivalentes a los aniquiladores ortogonales de  $[{}^i\$^m, {}^m\$^k]$  el subespacio de,  $se(3)$ , generado por el conjunto  $\{{}^i\$^m, {}^m\$^k\}$ . Puesto que la forma de Klein es no-singular, las ecuaciones (6.13) generan un sistema de 2 ecuaciones lineales en 6 incógnitas las componentes de  $\$_{a,Kl}$ , donde se usó el resultado obtenido en (6.11). Como el conjunto  $\{{}^i\$^m, {}^m\$^k\}$  es linealmente independiente, el subespacio de aniquiladores ortogonales de  $[{}^i\$^m, {}^m\$^k]$  tiene dimensión 4. Suponga que una base para este espacio de aniquiladores ortogonales está dado por

$$\{\$_{a1,Kl}^m, \$_{a2,Kl}^m, \$_{a3,Kl}^m, \$_{a4,Kl}^m\}$$

Entonces de la ecuación (6.4) se tiene que

$$Kl(\$_{as,Kl}^m, {}^i\$^m) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (6.15)$$

La ecuación (6.15) representa 4 ecuaciones, algunas de ellas triviales, que el eje instantáneo del tornillo  ${}^i\$^k$  debe satisfacer, cuando se considera  $m$  como un eslabón intermedio entre  $i$  y  $k$ .

2. Cuando se consideran los cuerpos  $i, n$  y  $k$

$$Kl(\$_{a,Kl}, {}^i\$^n) = Kl(\$_{a,Kl}, {}^n\$^k) = 0 \quad (6.16)$$

entones por las propiedades de la forma de Klein; estas ecuaciones son equivalentes a los aniquiladores ortogonales de  $[{}^i\$^n, {}^n\$^k]$  el subespacio de,  $se(3)$ , generado por el conjunto  $\{{}^i\$^n, {}^n\$^k\}$ . Puesto que la forma de Klein es no-singular, las ecuaciones (6.15) generan un sistema de 2 ecuaciones lineales en 6 incógnitas las componentes de  $\$_{a,Kl}$ , donde se usó el resultado obtenido en (6.11). Como el conjunto  $\{{}^i\$^n, {}^n\$^k\}$  es linealmente independiente, el subespacio de aniquiladores ortogonales de  $[{}^i\$^n, {}^n\$^k]$  tiene dimensión cuatro. Suponga que una base para este espacio de aniquiladores ortogonales está dado por

$$\{\$_{a1,Kl}^n, \$_{a2,Kl}^n, \$_{a3,Kl}^n, \$_{a4,Kl}^n\}$$

entonces la ecuación (6.4) se tiene que

$$Kl(\$_{as,Kl}^n, {}^i\$^n) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (6.17)$$

La ecuación (6.17) representa cuatro ecuaciones, algunas de ellas triviales, que el eje instantáneo del tornillo  ${}^i\$^k$  debe satisfacer, cuando se considera  $n$  como un eslabón intermedio entre  $i$  y  $k$ .

Desafortunadamente, en general, los mecanismos triviales formados mediante pares cinemáticos de la clase I y que están asociados a la subálgebra de Schönflies son indeterminados; es decir; el eje instantáneo de tornillo  ${}^i\$^k$  no puede determinarse a partir de las ecuaciones (6.15) y (6.17) sino que el conjunto de los ejes de tornillos instantáneos secundarios deben encontrarse simultáneamente. Este proceso se lleva a cabo formulando las ecuaciones correspondiente para cada uno de los ejes instantáneos de tornillos secundarios y resolviendo el conjunto de las ecuaciones. A primera vista el proceso parece demasiado complicado; pero es relativamente sencillo y puede llevarse a cabo de manera simple empleando programas de matemática simbólica, como Maple<sup>©</sup>.

En lo que resta de este capítulo se determinarán los ISA de los movimientos relativos entre eslabones que pertenecen a diferentes mecanismos asociados a la subálgebra de Schönflies, 3 de esos mecanismos son indeterminados, mientras que el mecanismo final es determinado.

## 6.5. Mecanismo H-H-H-H-P de cinco barras asociado a la subálgebra de Schönflies

Considere el mecanismo mostrado en la Figura 6.1. Este mecanismo está formado por cuatro eslabones binarios y cuatro pares de tornillo paralelos al eje  $Z$  y de diferente paso y un par prismático cuya dirección está contenida en el plano  $X-Y$ .

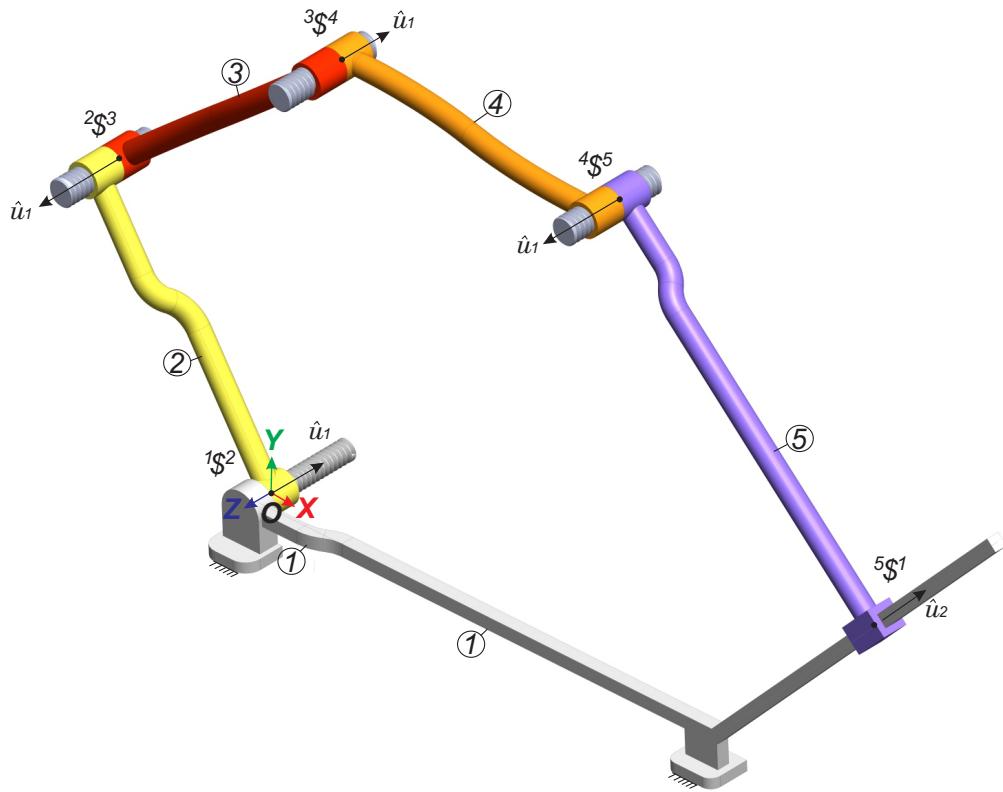


Figura 6.1: Mecanismo H-H-H-H-P de cinco barras asociado al álgebra de Schönflies

Los parámetros necesarios para la determinación de los tornillos asociados a los pares cinemáticos son:

$$\hat{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\hat{u}_1$  representa la dirección de los ejes de los pares de tornillo, y  $\hat{u}_2$  representa la dirección del eje del par prismático, los puntos a lo largo de los ejes de tornillo de los pares cinemáticos, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , están dados por:

$$\vec{r}_{2/1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{3/2} = \begin{bmatrix} -150 \\ 250 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/3} = \begin{bmatrix} 100 \\ 450 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{5/4} = \begin{bmatrix} 400 \\ 450 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{5/1} = \begin{bmatrix} 675 \\ 175 \\ 0 \end{bmatrix}$$

los pasos de los tornillos están dados por:

$${}_1h_2 = -5, \quad {}_2h_3 = 3, \quad {}_3h_4 = -5, \quad {}_4h_5 = 5$$

donde los vectores de posición y pasos están dados en términos de una unidad de longitud no especificada. Los tornillos infinitesimales que pasan por los puntos indicados por  $\vec{r}_{2/1}$ ,  $\vec{r}_{3/2}$ ,  $\vec{r}_{4/3}$  y  $\vec{r}_{5/4}$  son pares de tornillo y el que pasa por el punto indicado por  $\vec{r}_{5/1}$ , que no es necesario, representa un par prismático.

Los tornillos infinitesimales están dados por:

$${}^1\$_O^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 250 \\ 150 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 450 \\ -100 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad {}^4\$_O^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 450 \\ -400 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad {}^5\$_O^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

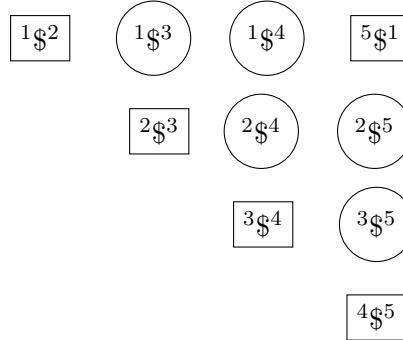
Cuando sea evidente el origen del sistema coordenado,  $O$ , se suprimirá.

### 6.5.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's

La Tabla 6.1 enumera los ejes instantáneos de tornillo asociados con todos los movimientos relativos entre los eslabones del mecanismo propuesto.

Donde un cuadrilátero indica aquellos ejes instantáneos de tornillo que son primarios; es decir aquellos que determinan el eje alrededor del cual un eslabón realiza un movimiento relativo respecto al eslabón adyacente, estos ejes instantáneos se pueden ubicar directamente mediante la inspección de la estructura cinemática del mecanismo. El círculo indica aquellos ejes instantáneos secundarios que se determinarán mediante la aplicación del teorema de Aronhold-Kennedy.

Tabla 6.1: Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo H-H-H-H-P



Debe notarse que los ejes instantáneos de los tornillos asociados a los movimientos relativos de los eslabones del mecanismo debe pertenecer forzosamente a la subálgebra de Schönflies,  $x_{\hat{u}}$ . Esto significa que

- Si el movimiento relativo entre los eslabones incluye movimiento de rotación, el tornillo será de la forma

$$\$_{\vec{r}_P, h, \hat{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r_{Py} \\ -r_{Px} \\ h \end{bmatrix}$$

2. Si el movimiento relativo entre los eslabones es exclusivamente de traslación, el tornillo será de la forma

$$\$_{\hat{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

A partir de la ubicación de los ejes instantáneos primarios es posible determinar los ejes instantáneos secundarios.

Por ejemplo, si se desea determinar el eje instantáneo del tornillo  ${}^1\$_O^3$  se empleará

$$\textcircled{{}^1\$^3} \implies \boxed{{}^1\$^2} \quad \boxed{{}^2\$^3} \quad {}^1\omega_3 {}^1\$_O^3 = {}^1\omega_2 {}^1\$_O^2 + {}^2\omega_3 {}^2\$_O^3$$

$$\textcircled{{}^1\$^3} \implies \boxed{{}^1\$^4} \quad \boxed{{}^3\$^4} \quad {}^1\omega_3 {}^1\$_O^3 = {}^1\omega_4 {}^1\$_O^4 + {}^3\omega_4 {}^3\$_O^4$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl({}^1\$_{as,Kl}^2, {}^1\$_O^3) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (6.18)$$

y

$$Kl({}^1\$_{as,Kl}^4, {}^1\$_O^3) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (6.19)$$

donde  $\{{}^2\$_{a1,Kl}, {}^2\$_{a2,Kl}, {}^2\$_{a3,Kl}, {}^2\$_{a4,Kl}\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^1\$^2, {}^2\$^3]$  y  $\{{}^4\$_{a1,Kl}, {}^4\$_{a2,Kl}, {}^4\$_{a3,Kl}, {}^4\$_{a4,Kl}\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^1\$^4, {}^3\$^4]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

De manera semejante, para determinar el eje instantáneo del tornillo  ${}^1\$_O^4$  se empleará

$$\textcircled{{}^1\$^4} \implies \boxed{{}^4\$^5} \quad \boxed{{}^1\$^5} \quad {}^1\omega_4 {}^1\$_O^4 = {}^4\omega_5 {}^4\$_O^5 + {}^1\omega_5 {}^1\$_O^5$$

$$\textcircled{{}^1\$^4} \implies \boxed{{}^1\$^2} \quad \boxed{{}^2\$^4} \quad {}^1\omega_4 {}^1\$_O^4 = {}^1\omega_2 {}^1\$_O^2 + {}^2\omega_4 {}^2\$_O^4$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl({}^1\$_{as,Kl}^5, {}^1\$_O^4) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (6.20)$$

y

$$Kl({}^1\$_{as,Kl}^2, {}^1\$_O^4) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (6.21)$$

donde  $\{\$_{a1,Kl}^5, \$_{a2,Kl}^5, \$_{a3,Kl}^5, \$_{a4,Kl}^5\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[^4\$^5, ^1\$^5]$  y  $\{\$_{a1,Kl}^2, \$_{a2,Kl}^2, \$_{a3,Kl}^2, \$_{a4,Kl}^2\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[^1\$^2, ^2\$^4]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

Para determinar el eje instantáneo del tornillo  ${}^2\$_O^4$  se empleará

$$\textcircled{2\$^4} \Rightarrow \boxed{2\$^3} \quad \boxed{3\$^4} \quad {}_2\omega_4 {}^2\$_O^4 = {}_2\omega_3 {}^2\$_O^3 + {}_3\omega_4 {}^3\$_O^4$$

$$\textcircled{2\$^4} \Rightarrow \boxed{1\$^2} \quad \boxed{1\$^4} \quad {}_2\omega_4 {}^2\$_O^4 = {}_1\omega_2 {}^1\$_O^2 + {}_1\omega_4 {}^1\$_O^4$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl(\$_{as,Kl}^3, {}^2\$_O^4) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (6.22)$$

y

$$Kl(\$_{as,Kl}^1, {}^2\$_O^4) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (6.23)$$

donde  $\{\$_{a1,Kl}^3, \$_{a2,Kl}^3, \$_{a3,Kl}^3, \$_{a4,Kl}^3\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[^2\$^3, ^3\$^4]$  y  $\{\$_{a1,Kl}^1, \$_{a2,Kl}^1, \$_{a3,Kl}^1, \$_{a4,Kl}^1\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[^1\$^2, ^1\$^4]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

Para determinar el eje instantáneo del tornillo  ${}^2\$_O^5$  se empleará

$$\textcircled{2\$^5} \Rightarrow \boxed{1\$^2} \quad \boxed{1\$^5} \quad {}_2\omega_5 {}^2\$_O^5 = {}_1\omega_2 {}^1\$_O^2 + {}_1\omega_5 {}^1\$_O^5$$

$$\textcircled{2\$^5} \Rightarrow \boxed{2\$^4} \quad \boxed{4\$^5} \quad {}_2\omega_5 {}^2\$_O^5 = {}_2\omega_4 {}^2\$_O^4 + {}_4\omega_5 {}^4\$_O^5$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl(\$_{as,Kl}^1, {}^2\$_O^5) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (6.24)$$

y

$$Kl(\$_{as,Kl}^4, {}^2\$_O^5) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (6.25)$$

donde  $\{\$_{a1,Kl}^1, \$_{a2,Kl}^1, \$_{a3,Kl}^1, \$_{a4,Kl}^1\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[^1\$^2, ^1\$^5]$  y  $\{\$_{a1,Kl}^4, \$_{a2,Kl}^4, \$_{a3,Kl}^4, \$_{a4,Kl}^4\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[^2\$^4, ^4\$^5]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

Para determinar el eje instantáneo del tornillo  ${}^3\$_O^5$  se empleará

$$\textcircled{3\$^5} \Rightarrow \boxed{3\$^4} \quad \boxed{4\$^5} \quad {}_3\omega_5 {}^3\$_O^5 = {}_3\omega_4 {}^3\$_O^4 + {}_4\omega_5 {}^4\$_O^5$$

$$\textcircled{3\$^5} \Rightarrow \boxed{1\$^3} \quad \boxed{1\$^5} \quad {}_3\omega_5 {}^3\$_O^5 = {}_1\omega_3 {}^1\$_O^3 + {}_1\omega_5 {}^1\$_O^5$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl({}_s\$_{as,Kl}^4, {}^3\$_O^5) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (6.26)$$

y

$$Kl({}_s\$_{as,Kl}^1, {}^3\$_O^5) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (6.27)$$

donde  $\{{}_1\$_{a1,Kl}^4, {}_2\$_{a2,Kl}^4, {}_3\$_{a3,Kl}^4, {}_4\$_{a4,Kl}^4\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^3\$^4, {}^4\$^5]$  y  $\{{}_1\$_{a1,Kl}^1, {}_2\$_{a2,Kl}^1, {}_3\$_{a3,Kl}^1, {}_4\$_{a4,Kl}^1\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^1\$^3, {}^1\$^5]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

### 6.5.2. Obtención del sistema de ecuaciones y su solución

El objetivo de este análisis es determinar los tornillos infinitesimales asociados a los movimientos relativos de los eslabones tres y cuatro respecto del eslabón uno, de los eslabones cuatro y cinco respecto del eslabón dos y del eslabón cinco respecto del eslabón tres. Por lo tanto el primer paso consiste en escribir los tornillos asociados a los ejes instantáneos secundarios, de los cuales sólo se conocen las direcciones de los ejes de los pares de tornillo; es decir, su dirección debe ser la del eje  $Z$  y la componente  $Z$  de la traslación deberá ser el paso.

$${}^1\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{13} \\ -x_{13} \\ {}_1h_3 \end{bmatrix}, \quad {}^1\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{14} \\ -x_{14} \\ {}_1h_4 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{24} \\ -x_{24} \\ {}_2h_4 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$_O^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{25} \\ -x_{25} \\ {}_2h_5 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$_O^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{35} \\ -x_{35} \\ {}_3h_5 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones necesarias se obtienen aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Klein de una manera sistemática vea las ecuaciones (6.18 - 6.27)

$$Ec13_2 = \left[ 5 - \frac{4}{125} y_{13} + {}_1h_3, -\frac{3}{5} y_{13} - x_{13}, 0, 0 \right] \quad (6.28)$$

$$Ec13_4 = \left[ \frac{5(90 {}_1h_4 + y_{14})}{(y_{14} - 450)} - \frac{({}_1h_4 + 5) y_{13}}{(y_{14} - 450)} + {}_1h_3, \right. \\ \left. \frac{5(-90 x_{14} + 20 y_{14})}{(y_{14} - 450)} - \frac{(-x_{41} + 100) y_{13}}{(y_{14} - 450)} - x_{13}, 0, 0 \right] \quad (6.29)$$

$$Ec14_5 = \left[ -5 + {}_1h_4, 850 - y_{14} - x_{14}, 0, 0 \right] \quad (6.30)$$

$$Ec14_3 = \left[ \frac{5(90 {}_1h_3 + y_{13})}{y_{13} - 450} - \frac({}_1h_3 + 5) y_{14}}{y_{13} - 450} + {}_1h_4, \frac{5(-90 x_{13} + 20 y_{13})}{y_{13} - 450} \right. \\ \left. - \frac{(-x_{13} + 100) y_{14}}{y_{13} - 450} - x_{14}, 0, 0 \right] \quad (6.31)$$

$$Ec24_3 = \left[ -13 + \frac{1}{25} y_{24} + {}_2 h_4, -\frac{925}{2} + \frac{5}{4} y_{24} - x_{24}, 0, 0 \right] \quad (6.32)$$

$$Ec24_1 = \left[ 5 - \frac{({}_1 h_4 + 5) y_{24}}{y_{14}} + {}_2 h_4, \frac{x_{14} y_{24}}{y_{14}} - x_{24}, 0, 0 \right] \quad (6.33)$$

$$Ec25_1 = \left[ 5 + {}_2 h_5, -y_{25} - x_{25}, 0, 0 \right] \quad (6.34)$$

$$Ec25_4 = \left[ \frac{5 (90 {}_2 h_4 - y_{24})}{(y_{24} - 450)} - \frac{({}_2 h_4 - 5) y_{25}}{(y_{24} - 450)} + {}_2 h_5, \frac{5 (-90 x_{24} + 80 y_{24})}{(y_{24} - 450)} - \frac{(-x_{24} + 400) y_{25}}{(y_{24} - 450)} - x_{25}, 0, 0 \right] \quad (6.35)$$

$$Ec35_4 = \left[ \frac{25}{3} - \frac{1}{30} x_{35} + {}_3 h_5, -450 + y_{35}, 0, 0 \right] \quad (6.36)$$

$$Ec35_1 = \left[ -{}_1 h_3 + {}_3 h_5, x_{13} + y_{13} - y_{35} - x_{35}, 0, 0 \right] \quad (6.37)$$

Donde los dos primeros números de la ecuación vectorial, pues las componentes se igualan a cero, indican cual es el eje instantáneo que se desea determinar y el subíndice indica cual es el eslabón intermedio que se emplea para determinar el eje instantáneo.

De las ecuaciones (6.28) a las (6.37) se forma el conjunto final de ecuaciones:

$$0 = 5 - \frac{4 y_{13}}{125} + {}_1 h_3 \quad (6.38)$$

$$0 = -\frac{3}{5} y_{13} - x_{13} \quad (6.39)$$

$$0 = \frac{5 (90 {}_1 h_4 + y_{14})}{y_{14} - 450} - \frac{({}_1 h_4 + 5) y_{13}}{y_{14} - 450} + {}_1 h_3 \quad (6.40)$$

$$0 = \frac{5 (-90 x_{14} + 20) y_{14}}{y_{14} - 450} - \frac{(-x_{14} + 100) y_{13}}{y_{14} - 450} - x_{13} \quad (6.41)$$

$$0 = -5 + {}_1 h_4 \quad (6.42)$$

$$0 = 850 - y_{14} - x_{14} \quad (6.43)$$

$$0 = \frac{5 (90 {}_1 h_3 + y_{13})}{y_{13} - 450} - \frac{({}_1 h_3 + 5) y_{14}}{y_{13} - 450} + {}_1 h_4 \quad (6.44)$$

$$0 = \frac{5 (-90 x_{13} + 20) y_{13}}{y_{13} - 450} - \frac{(-x_{13} + 100) y_{14}}{y_{13} - 450} - x_{14} \quad (6.45)$$

$$0 = -13 + \frac{1}{25} y_{24} + {}_2 h_4 \quad (6.46)$$

$$0 = -\frac{925}{2} + \frac{5}{4} y_{24} - 24 \quad (6.47)$$

$$0 = 5 - \frac{({}_1 h_4 + 5) y_{24}}{y_{14}} + {}_2 h_4 \quad (6.48)$$

$$0 = \frac{x_{14} y_{24}}{y_{14}} - x_{24} \quad (6.49)$$

$$0 = 5 + {}_2 h_5 \quad (6.50)$$

$$0 = -y_{25} - x_{25} \quad (6.51)$$

$$0 = \frac{5 (90 {}_2 h_4 - y_{24})}{y_{24} - 450} - \frac{({}_2 h_4 - 5) y_{25}}{y_{24} - 450} + {}_2 h_5 \quad (6.52)$$

$$0 = \frac{5(-90x_{24} + 80y_{24})}{y_{24} - 450} - \frac{(-x_{24} + 400)y_{25}}{y_{24} - 450} - x_{25} \quad (6.53)$$

$$0 = \frac{25}{3} - \frac{1}{30}x_{35} + {}_3h_5 \quad (6.54)$$

$$0 = -450 + y_{35} \quad (6.55)$$

$$0 = -{}_1h_3 + {}_3h_5 \quad (6.56)$$

$$0 = x_{13} + y_{13} - y_{35} - x_{35} \quad (6.57)$$

De manera sistemática se despejan las coordenadas  $y_{ij}$  e  ${}_ih_j$  de cada una de las ecuaciones lineales para expresarlas en términos de las coordenadas  $x_{ij}$ . De esa manera, se despejan las coordenadas  $y_{13}$ ,  $y_{14}$ ,  $y_{24}$ ,  $y_{25}$  de las ecuaciones (6.39), (6.43), (6.46) y (6.51) respectivamente y los pasos  ${}_1h_3$ ,  ${}_3h_5$  de las ecuaciones (6.38), (6.54). Además se obtienen los valores numéricos de los pasos  ${}_1h_4$ ,  ${}_2h_5$  y la coordenada  $y_{35}$  de las ecuaciones (6.42), (6.50) y (6.55)

$$y_{13} = -\frac{5}{3}x_{13} \quad (6.58)$$

$${}_1h_3 = -5 - \frac{4x_{13}}{75} \quad (6.59)$$

$$y_{14} = 850 - x_{14} \quad (6.60)$$

$$y_{24} = 370 + \frac{4}{5}x_{24} \quad (6.61)$$

$$y_{25} = -x_{25} \quad (6.62)$$

$${}_3h_5 = -\frac{25}{3} + \frac{1}{30}x_{35} \quad (6.63)$$

$${}_1h_4 = 5 \quad (6.64)$$

$${}_2h_5 = -5 \quad (6.65)$$

$$y_{35} = 450 \quad (6.66)$$

sustituyendo la ecuación (6.61) en (6.46)

$${}_2h_4 = -\frac{9}{5} - \frac{4}{125}x_{24} \quad (6.67)$$

Sustituyendo los resultados recién encontrados en las ecuaciones (6.40), (6.41), (6.44), (6.45), (6.48), (6.52), (6.53), (6.57) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$0 = \frac{2}{125} \frac{2x_{13}x_{14} - 175x_{13} + 168750}{x_{13} + 270} \quad (6.68)$$

$$0 = -\frac{2}{5} \frac{x_{13}x_{14} + 350x_{13} + 825x_{14} - 127500}{x_{13} + 270} \quad (6.69)$$

$$0 = -\frac{2}{75} \frac{2x_{13}x_{14} - 175x_{13} + 168750}{-400 + x_{14}} \quad (6.70)$$

$$0 = \frac{2}{3} \frac{x_{13}x_{14} + 350x_{13} + 825x_{14} - 127500}{-400 + x_{14}} \quad (6.71)$$

$$0 = -\frac{4}{125} \frac{x_{14}x_{24} - 100x_{14} - 1100x_{24} - 30625}{-850 + x_{14}} \quad (6.72)$$

$$0 = -\frac{1}{5} \frac{9x_{14}x_{24} + 1850x_{14} - 4250x_{24}}{-850 + x_{14}} \quad (6.73)$$

$$0 = -\frac{1}{50} \frac{2x_{24}x_{25} + 1400x_{24} + 425x_{25} + 141250}{x_{24} - 100} \quad (6.74)$$

$$0 = -\frac{1}{4} \frac{9x_{24}x_{25} + 650x_{24} - 2400x_{25} - 740000}{x_{24} - 100} \quad (6.75)$$

$$0 = -\frac{10}{3} + \frac{4}{75}x_{13} + \frac{4}{75}x_{35} \quad (6.76)$$

$$0 = -\frac{2}{3}x_{13} - 450 - x_{35} \quad (6.77)$$

de las ecuaciones (6.76) y (6.77) se tiene un sistema de dos ecuaciones lineales que al resolverlo se obtiene el valor de las coordenadas  $x_{13}$  y  $x_{35}$ , que al sustituirse en las ecuaciones (6.58), (6.59), (6.63) se pueden obtener los valores de las coordenadas  $y_{13}$ ,  ${}_1h_3$  y  ${}_3h_5$  respectivamente

$$x_{13} = \frac{4125}{7} \quad (6.78)$$

$$x_{35} = -\frac{5900}{7} \quad (6.79)$$

$$y_{13} = -\frac{6875}{7} \quad (6.80)$$

$${}_1h_3 = -\frac{225}{7} \quad (6.81)$$

$${}_3h_5 = -\frac{225}{7} \quad (6.82)$$

al sustituir los valores de  $x_{13}$ ,  $x_{35}$ ,  $y_{13}$ ,  ${}_1h_3$ ,  ${}_3h_5$ , en las ecuaciones (6.68) a la (6.75) el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$0 = \frac{44}{2005}x_{14} + \frac{490}{401} \quad (6.83)$$

$$0 = -\frac{264}{401}x_{14} - \frac{14700}{401} \quad (6.84)$$

$$0 = -\frac{10}{7} \frac{22x_{14} + 1225}{-400 + x_{14}} \quad (6.85)$$

$$0 = \frac{300}{7} \frac{22x_{14} + 1225}{-400 + x_{14}} \quad (6.86)$$

$$0 = -\frac{4}{125} \frac{x_{14}x_{24} - 100x_{14} - 1100x_{24} - 30625}{-850 + x_{14}} \quad (6.87)$$

$$0 = -\frac{1}{5} \frac{9x_{14}x_{24} + 1850x_{14} - 4250x_{24}}{-850 + x_{14}} \quad (6.88)$$

$$0 = -\frac{1}{50} \frac{2x_{24}x_{25} + 1400x_{24} + 425x_{25} + 141250}{-100 + x_{24}} \quad (6.89)$$

$$0 = -\frac{1}{4} \frac{9x_{24}x_{25} + 650x_{24} - 2400x_{25} - 740000}{-100 + x_{24}} \quad (6.90)$$

la coordenada  $x_{14}$  se puede despejar de cualquiera de las ecuaciones (6.83), (6.84), (6.85), (6.86) ya que el resultado es consistente, y sustituirse en la ecuación (6.60) para obtener la coordenada  $y_{14}$ , y en las ecuaciones (6.87) a la (6.90):

$$x_{14} = -\frac{1225}{22} \quad (6.91)$$

$$y_{14} = \frac{19925}{22} \quad (6.92)$$

$$0 = -\frac{4068}{99625} x_{24} - \frac{3528}{3985} \quad (6.93)$$

$$0 = -\frac{4181}{3985} x_{24} - \frac{18130}{797} \quad (6.94)$$

$$0 = -\frac{1}{50} \frac{2 x_{24} x_{25} + 1400 x_{24} + 425 x_{25} + 141250}{x_{24} - 100} \quad (6.95)$$

$$0 = -\frac{1}{4} \frac{9 x_{24} x_{25} + 650 x_{24} - 2400 x_{25} - 740000}{x_{24} - 100} \quad (6.96)$$

La coordenada  $x_{24}$  se puede despejar de cualquiera de las ecuaciones (6.90) o (6.91) y se sustituye en cualquiera de las ecuaciones (6.95) - (6.96) para obtener el valor de  $x_{25}$  puesto que los valores son consistentes:

$$x_{24} = -\frac{2450}{113} \quad (6.97)$$

$$x_{25} = -\frac{20050}{69} \quad (6.98)$$

Una vez determinadas todas las coordenadas se escriben los vectores de posición correspondientes a cada uno de los ejes instantáneos secundarios

$$\vec{r}_{3/1} = \begin{bmatrix} \frac{4125}{7} \\ -\frac{6875}{7} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/1} = \begin{bmatrix} -\frac{1225}{22} \\ \frac{19925}{22} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/2} = \begin{bmatrix} -\frac{2450}{113} \\ \frac{39850}{113} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{5/2} = \begin{bmatrix} -\frac{20050}{69} \\ \frac{20050}{69} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{5/3} = \begin{bmatrix} -\frac{5900}{7} \\ 450 \\ 0 \end{bmatrix}$$

los pasos correspondientes a los ejes instantáneos secundarios son iguales a:

$${}_1 h_3 = -\frac{225}{7}, \quad {}_1 h_4 = 5, \quad {}_2 h_4 = -\frac{125}{113}, \quad {}_2 h_5 = -5, \quad {}_3 h_5 = -\frac{225}{7}$$

los tornillos infinitesimales asociados a los ejes instantáneos secundarios están dados por:

$${}^1 \$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{6875}{7} \\ -\frac{4125}{7} \\ -\frac{225}{7} \end{bmatrix}, \quad {}^1 \$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{19925}{22} \\ \frac{1225}{22} \\ 5 \end{bmatrix}, \quad {}^2 \$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{39850}{113} \\ \frac{2450}{113} \\ -\frac{125}{113} \end{bmatrix}, \quad {}^2 \$^5_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{20050}{69} \\ \frac{20050}{69} \\ -5 \end{bmatrix}, \quad {}^3 \$^5_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 450 \\ \frac{5900}{7} \\ -\frac{225}{7} \end{bmatrix}$$

Los valores determinados para los vectores de posición correspondientes a los ejes instantáneos secundarios se muestran en la Figura 6.2, donde se puede observar que los tres ejes instantáneos asociados a los tres movimientos relativos,  ${}^i \$^k$ ,  ${}^j \$^k$ ,  ${}^i \$^j$ , entre los tres cuerpos para cada uno de los casos yacen sobre una línea recta, de acuerdo a lo establecido por el teorema de Aronhold-Kennedy. Para el caso del movimiento relativo de los tres cuerpos cuando se tiene un par prismático, la línea pasa por dos de los pares de tornillo y sería perpendicular a la dirección del desplazamiento del par prismático.

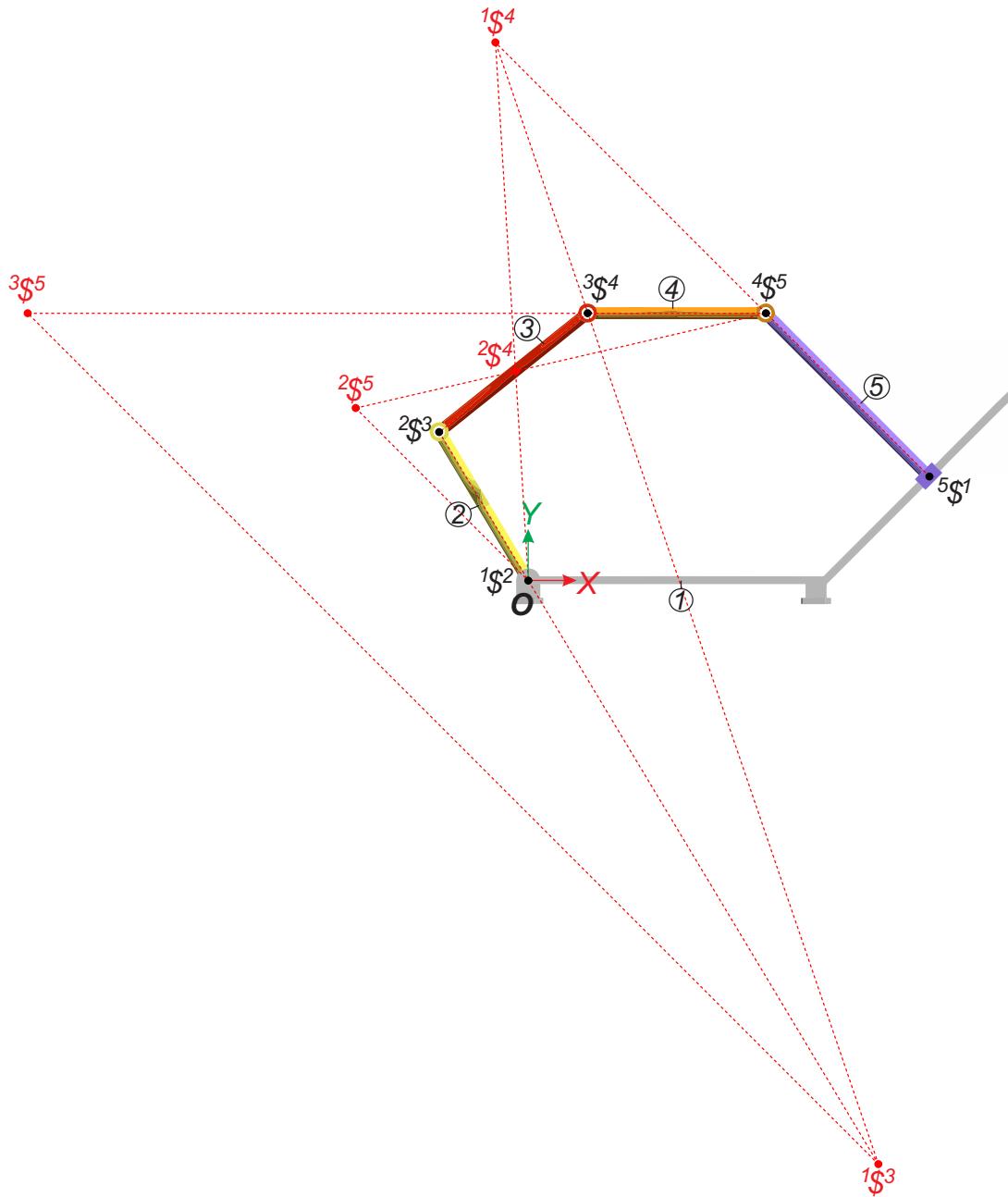


Figura 6.2: Mecanismo H-H-H-H-P de cinco barras asociado al álgebra de Schönflies

### 6.5.3. Verificación de los resultados

Los resultados obtenidos para los vectores de posición de los ejes instantáneos secundarios, así como sus pasos se comprobaron mediante la realización del análisis de velocidad del mecanismo para una velocidad angular arbitraria del eslabón dos, seleccionado como eslabón motriz, y a partir de los resultados determinando los estados de velocidad y finalmente el ISA correspondiente para cada movimiento relativo, este proceso se llevó a cabo mediante un programa en Maple<sup>©</sup>.

Finalmente los resultados del análisis de velocidad fueron verificados satisfactoriamente mediante el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>.

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^1\$^2_O$ , debe recordarse que

$${}^1\vec{V}_O^2 = {}_1\omega_2 \begin{bmatrix} {}^1\hat{s}^2 \\ {}^1\vec{s}_O^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\vec{\omega}^2 \\ {}^1\vec{v}_O^2 \end{bmatrix} = {}_1\omega_2 {}^1\$^2_O = -5 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

donde  ${}^1\$^2_O$  se conoce de los datos del mecanismo.

La simulación realizada en Adams<sup>©</sup> obtiene que  ${}_1\omega_2 = -5 \text{ rad/s}$ , por lo tanto

$${}^1\vec{\omega}^2 = {}_1\omega_2 {}^1\hat{s}^2 = -5 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

De aquí que,  ${}_1\omega_{2x} = 0$ ,  ${}_1\omega_{2y} = 0$  y  ${}_1\omega_{2z} = -5 \text{ rad/s}$ , tal como se indica en la Figura 6.3 obtenida mediante el programa Adams<sup>©</sup>.

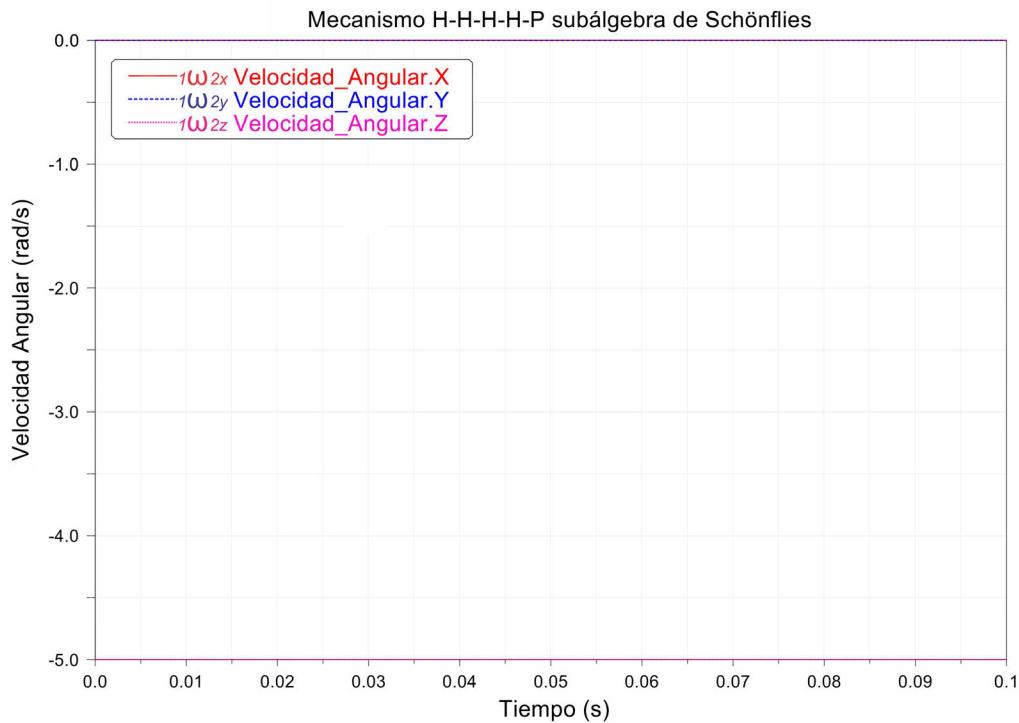


Figura 6.3: Velocidad angular del par de revoluta asociado a  ${}^1\$^2_O$

Con el resultado de la velocidad angular  ${}_1\omega_2$  se tiene que

$${}^1\vec{v}_O^2 = {}_1\omega_2 {}^1\vec{s}_O^2 = -5 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

Consecuentemente,  ${}_1v_{2x} = 0$ ,  ${}_1v_{2y} = 0$  y  ${}_1v_{2z} = 25 \text{ u.l./s}$ . Estos resultados se verifican en la simulación para el tiempo  $t = 0 \text{ s}$ , vea la Figura 6.4.

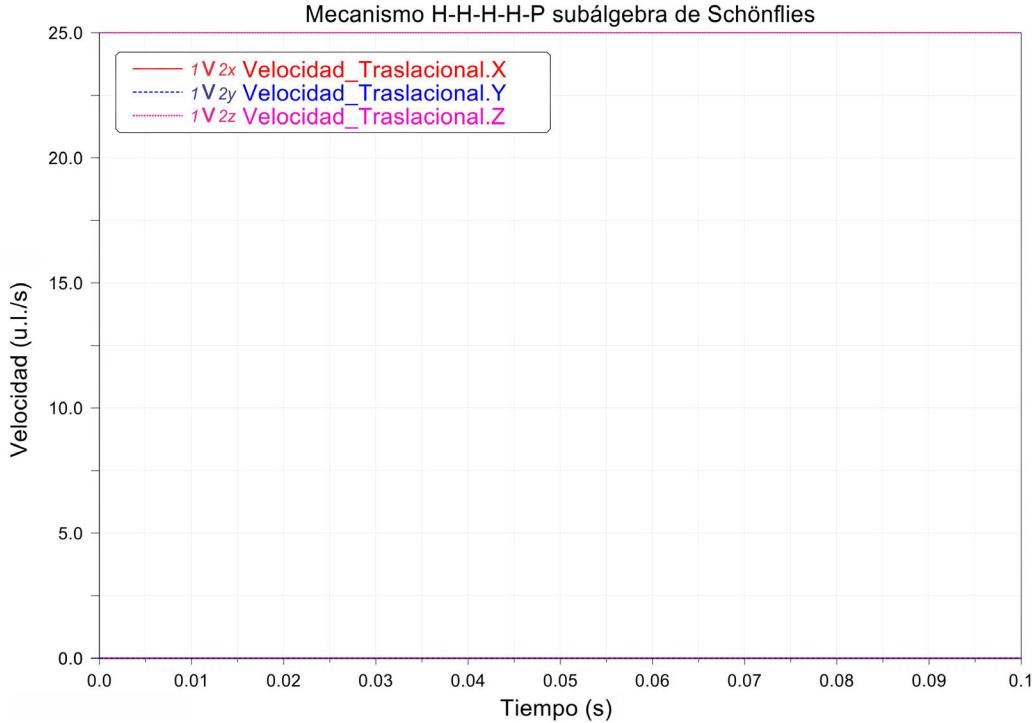


Figura 6.4: Velocidad translacional del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón dos.

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^1\$^3_O$ , debe recordarse que

$${}^1\vec{V}_O^3 = {}_1\omega_3 \begin{bmatrix} {}^1\hat{s}^3 \\ {}^1\vec{s}_O^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\vec{\omega}^3 \\ {}^1\vec{v}_O^3 \end{bmatrix} = {}_1\omega_3 {}^1\$^3_O = \frac{70}{69} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{6875}{7} \text{ u.l./s} \\ -\frac{4125}{7} \text{ u.l./s} \\ -\frac{255}{7} \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{70}{69} \text{ rad/s} \\ \frac{68750}{69} \text{ u.l./s} \\ \frac{13750}{23} \text{ u.l./s} \\ \frac{850}{23} \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

donde  ${}^1\$^3_O$  se conoce de los datos del mecanismo.

La simulación realizada en Adams<sup>©</sup> obtiene que  ${}_1\omega_3 = \frac{70}{69} \text{ rad/s}$ , por lo tanto

$${}^1\vec{\omega}^3 = {}_1\omega_3 {}^1\hat{s}^3 = \frac{70}{69} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{70}{69} \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

De aquí que,  ${}_1\omega_{3x} = 0$ ,  ${}_1\omega_{3y} = 0$  y  ${}_1\omega_{3z} = \frac{70}{69} = 1.01449 \text{ rad/s}$ , tal como se indica en la Figura 6.5 obtenida mediante el programa Adams<sup>©</sup>.

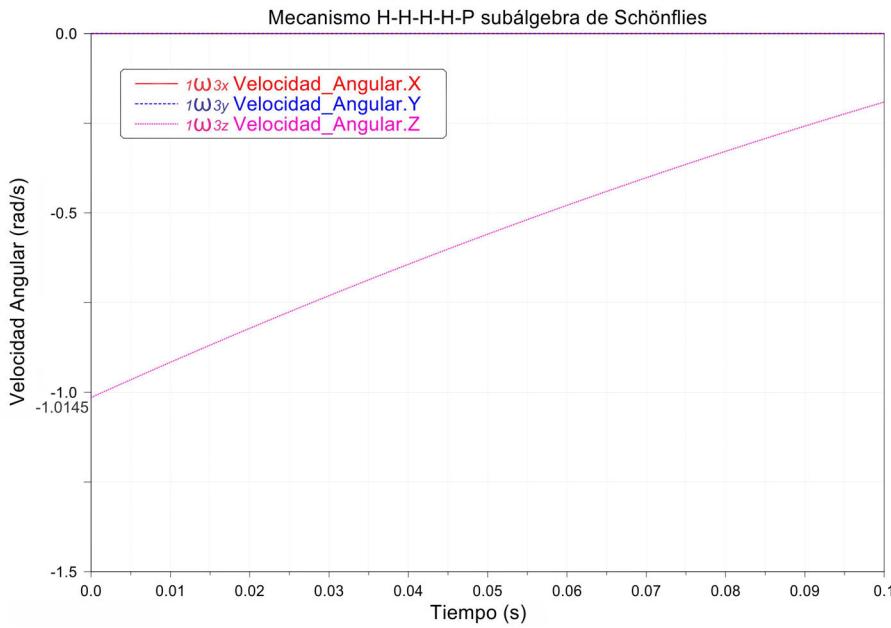


Figura 6.5: Velocidad angular del par de revoluta asociado a  ${}^1\mathbf{v}_O^3$

Con el resultado de la velocidad angular  ${}_1\omega_3$  se tiene que

$${}^1\bar{v}_O^3 = {}_1\omega_3 {}^1\bar{s}_O^3 = \frac{70}{69} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} -\frac{6875}{7} \text{ u.l./s} \\ -\frac{4125}{7} \text{ u.l./s} \\ -\frac{255}{7} \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{68750}{69} \text{ u.l./s} \\ \frac{13750}{23} \text{ u.l./s} \\ \frac{850}{23} \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

Consecuentemente,  ${}_1v_{3x} = \frac{68750}{69} = 996.3768 \text{ u.l./s}$ ,  ${}_1v_{3y} = \frac{13750}{23} = 597.8260 \text{ u.l./s}$  y  ${}_1v_{3z} = \frac{850}{23} = 36.9565 \text{ u.l./s}$ . Estos resultados se verifican en la simulación para el tiempo  $t = 0 \text{ s}$ , vea la Figura 6.6.

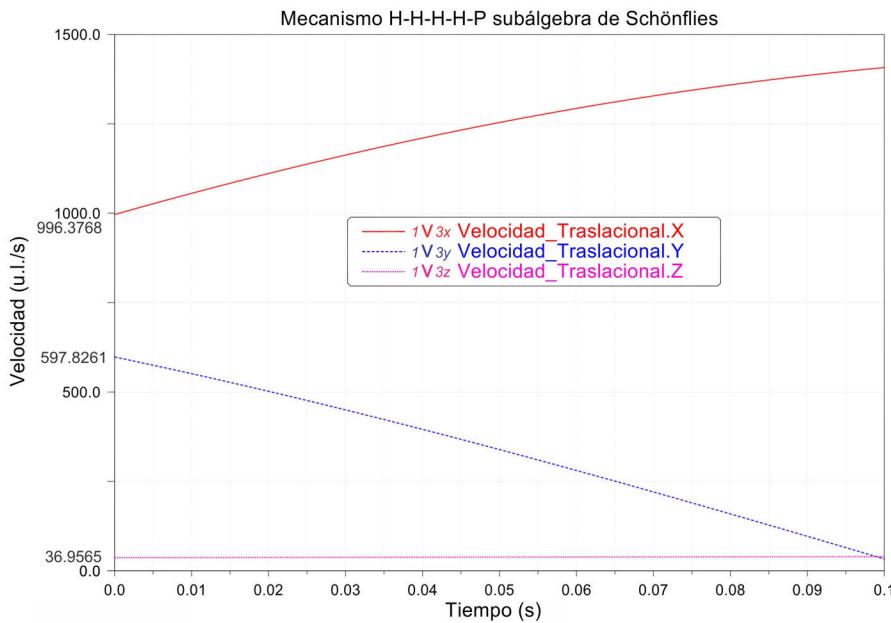


Figura 6.6: Velocidad translacional del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón tres.

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^1\$^4_O$ , debe recordarse que

$${}^1\vec{V}_O^4 = {}_1\omega_4 \begin{bmatrix} {}^1\hat{s}^4 \\ {}^1\vec{s}_O^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\vec{\omega}^4 \\ {}^1\vec{v}_O^4 \end{bmatrix} = {}_1\omega_4 {}^1\$^4_O = \frac{220}{69} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{19925}{22} \text{ u.l./s} \\ \frac{1225}{22} \text{ u.l./s} \\ 5 \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{220}{69} \text{ rad/s} \\ \frac{199250}{69} \text{ u.l./s} \\ \frac{12250}{69} \text{ u.l./s} \\ \frac{1100}{69} \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

donde  ${}^1\$^4_O$  se conoce de los datos del mecanismo.

La simulación realizada en Adams<sup>©</sup> obtiene que  ${}_1\omega_4 = \frac{220}{69} \text{ rad/s}$ , por lo tanto

$${}^1\vec{\omega}^4 = {}_1\omega_4 {}^1\hat{s}^4 = \frac{220}{69} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{220}{69} \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

De aquí que,  ${}_1\omega_{4x} = 0$ ,  ${}_1\omega_{4y} = 0$  y  ${}_1\omega_{4z} = \frac{220}{69} = 3.1884 \text{ rad/s}$ , tal como se indica en la Figura 6.7 obtenida mediante el programa Adams<sup>©</sup>.

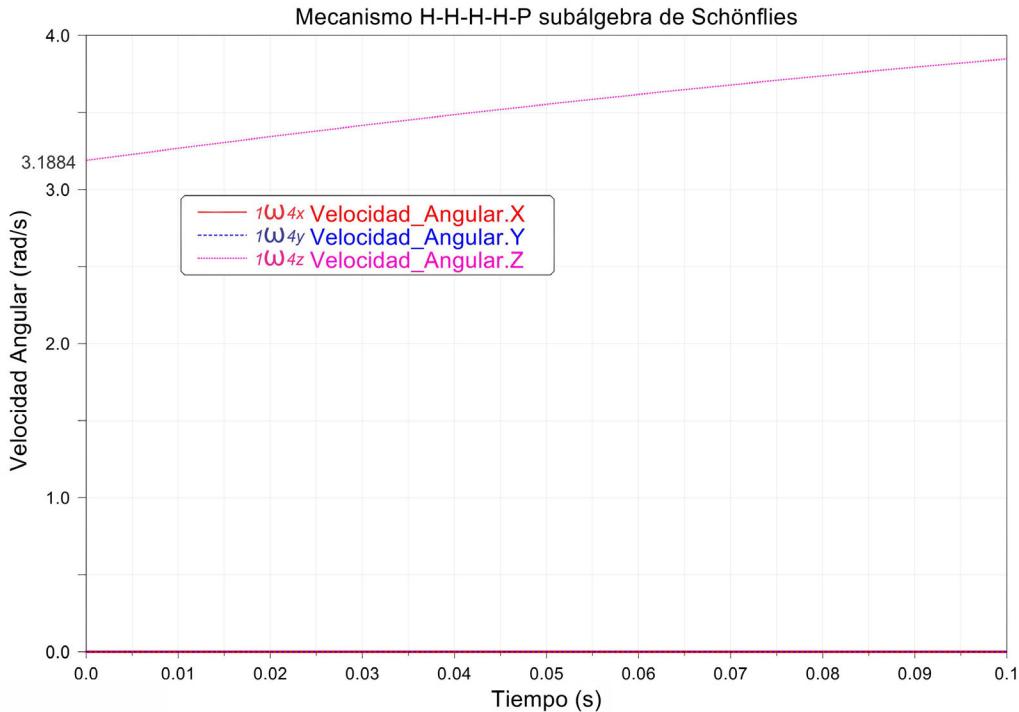


Figura 6.7: Velocidad angular del par de revoluta asociado a  ${}^1\$^4_O$

Con el resultado de la velocidad angular  ${}_1\omega_4$  se tiene que

$${}^1\vec{v}_O^4 = {}_1\omega_4 {}^1\vec{s}_O^4 = \frac{220}{69} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} \frac{19925}{22} \text{ u.l./s} \\ \frac{1225}{22} \text{ u.l./s} \\ 5 \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{199250}{69} \text{ u.l./s} \\ \frac{12250}{69} \text{ u.l./s} \\ \frac{1100}{69} \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

Consecuentemente,  ${}_1v_{4x} = \frac{199250}{69} = 2887.6811 \text{ u.l./s}$ ,  ${}_1v_{4y} = \frac{12250}{69} = 177.5362 \text{ u.l./s}$  y  ${}_1v_{4z} = \frac{1100}{69} = 15.9420 \text{ u.l./s}$ . Estos resultados se verifican en la simulación para el tiempo  $t = 0 \text{ s}$ , vea la Figura 6.8.

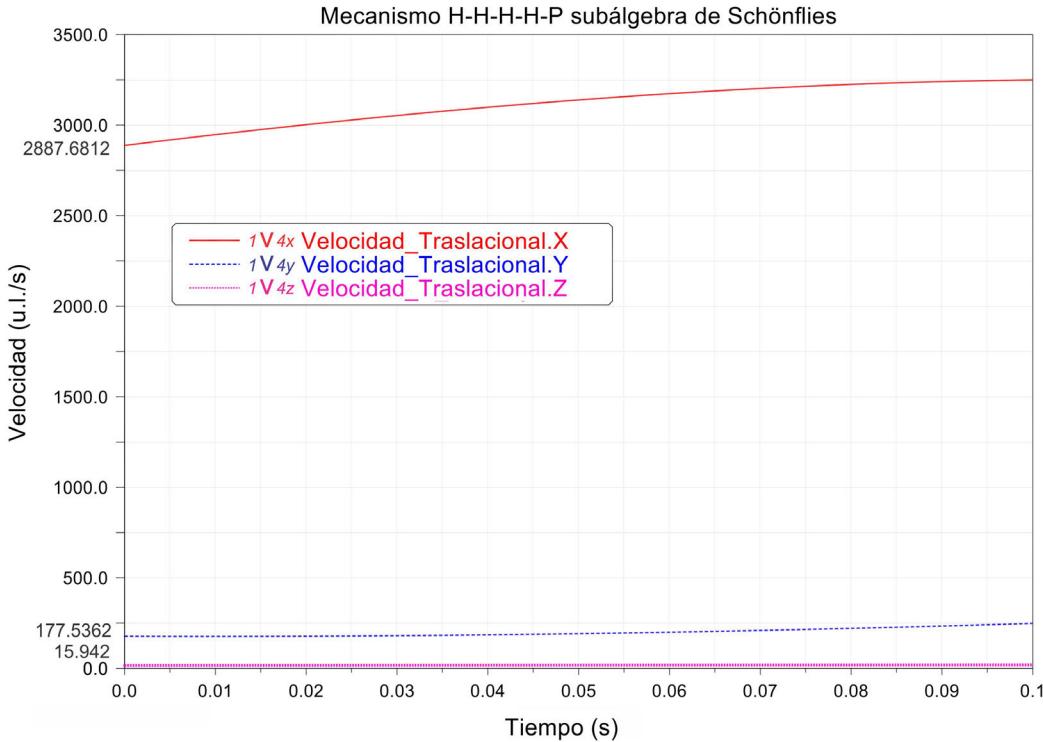


Figura 6.8: Velocidad traslacional del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón cuatro.

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^2\$^4_O$ , debe recordarse que

$${}^2\vec{V}_O^4 = {}_2\omega_4 \begin{bmatrix} {}^2\hat{s}^4 \\ {}^2\vec{s}_O^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2\vec{\omega}^4 \\ {}^2\vec{v}_O^4 \end{bmatrix} = {}_2\omega_4 {}^2\$^4_O = \frac{565}{69} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{39850}{113} \text{ u.l./s} \\ \frac{2450}{113} \text{ u.l./s} \\ -\frac{125}{113} \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{565}{69} \text{ rad/s} \\ \frac{199250}{69} \text{ u.l./s} \\ \frac{12250}{69} \text{ u.l./s} \\ -\frac{625}{69} \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

donde  ${}^2\$^4_O$  se determinó mediante el programa Maple<sup>©</sup>.

La simulación realizada en Adams<sup>©</sup> obtiene que  ${}_2\omega_4 = \frac{565}{69} \text{ rad/s}$ , por lo tanto

$${}^2\vec{\omega}^4 = {}_2\omega_4 {}^2\hat{s}^4 = \frac{565}{69} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{565}{69} \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

De aquí que,  ${}_2\omega_{4x} = 0$ ,  ${}_2\omega_{4y} = 0$  y  ${}_2\omega_{4z} = \frac{565}{69} = 8.1884 \text{ rad/s}$ , tal como se indica en la Figura 6.9 obtenida mediante el programa Adams<sup>©</sup>.

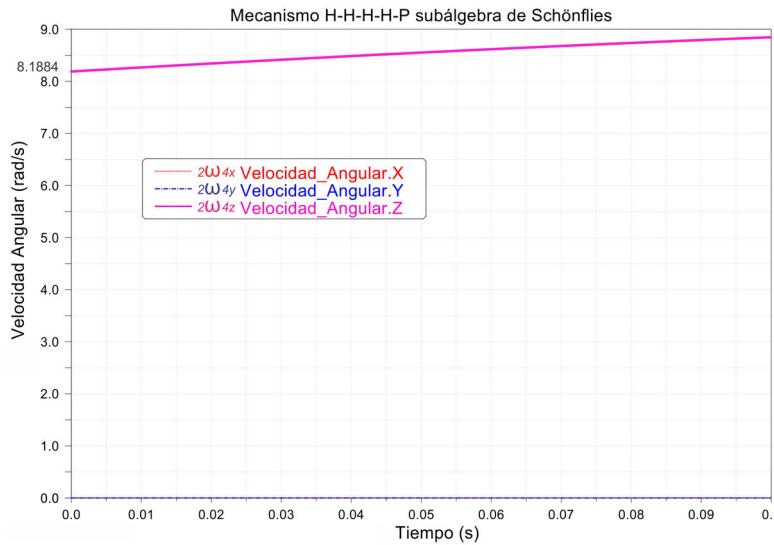


Figura 6.9: Velocidad angular relativa del eslabón cuatro respecto del eslabón dos.

Con el resultado de la velocidad angular  $2\omega_4$  se tiene que

$$2\vec{v}_O^4 = 2\omega_4^2 \vec{s}_O^4 = \frac{220}{69} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} \frac{39850}{113} \text{ u.l./s} \\ \frac{2450}{113} \text{ u.l./s} \\ -\frac{125}{113} \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{199250}{69} \text{ u.l./s} \\ \frac{12250}{69} \text{ u.l./s} \\ -\frac{625}{69} \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

Consecuentemente,  $2v_{4x} = \frac{199250}{69} = 2887.6811 \text{ u.l./s}$ ,  $2v_{4y} = \frac{12250}{69} = 177.5362 \text{ u.l./s}$  y  $2v_{4z} = -\frac{625}{69} = -9.0579 \text{ u.l./s}$ . Estos resultados se verifican en la simulación para el tiempo  $t = 0 \text{ s}$ , vea la Figura 6.10.<sup>1</sup>

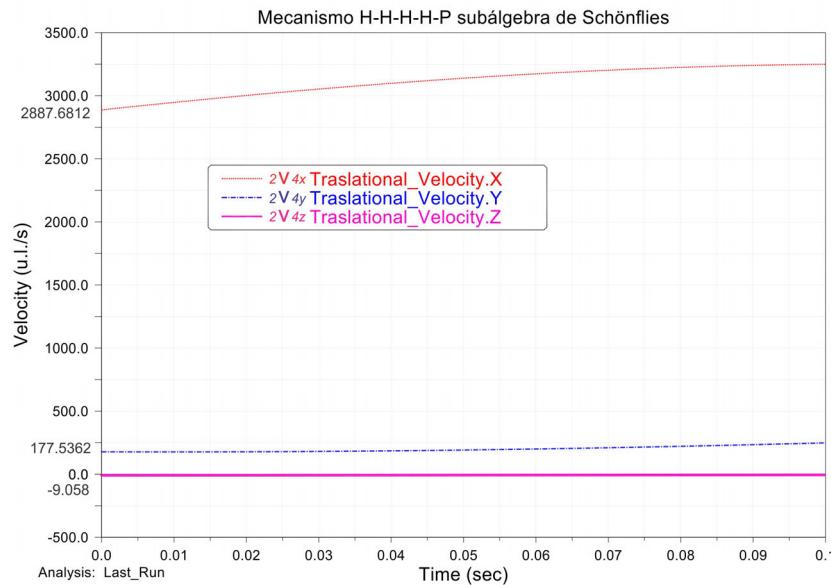


Figura 6.10: Velocidad translacional del punto  $O_4$  respecto del punto  $O_2$

<sup>1</sup>El título correcto de la Figura 6.10 debe ser velocidad translacional del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón cuatro respecto a un sistema de referencia sujeto a traslación con la velocidad del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón dos; sin embargo, por razones de espacio, se usa el título mostrado.

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^2\$^5_O$ , debe recordarse que

$${}^2\vec{V}_O^5 = {}^2\omega_5 \begin{bmatrix} {}^2\hat{s}^5 \\ {}^2\vec{s}_O^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2\vec{\omega}^5 \\ {}^2\vec{v}_O^5 \end{bmatrix} = {}^2\omega_5 {}^2\$^5_O = 5 \text{ rad/s}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{20050}{69} \text{ u.l./s} \\ \frac{20050}{69} \text{ u.l./s} \\ -5 \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \text{ rad/s} \\ \frac{100250}{69} \text{ u.l./s} \\ \frac{100250}{69} \text{ u.l./s} \\ -25 \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

donde  ${}^2\$^5_O$  se determinó mediante el programa Maple<sup>©</sup>.

La simulación realizada en Adams<sup>©</sup> obtiene que  ${}^2\omega_5 = 5 \text{ rad/s}$ , por lo tanto

$${}^2\vec{\omega}^5 = {}^2\omega_5 {}^2\hat{s}^5 = 5 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

De aquí que,  ${}^2\omega_{5x} = 0$ ,  ${}^2\omega_{5y} = 0$  y  ${}^2\omega_{5z} = 5 \text{ rad/s}$ , tal como se indica en la Figura 6.11 obtenida mediante el programa Adams<sup>©</sup>.

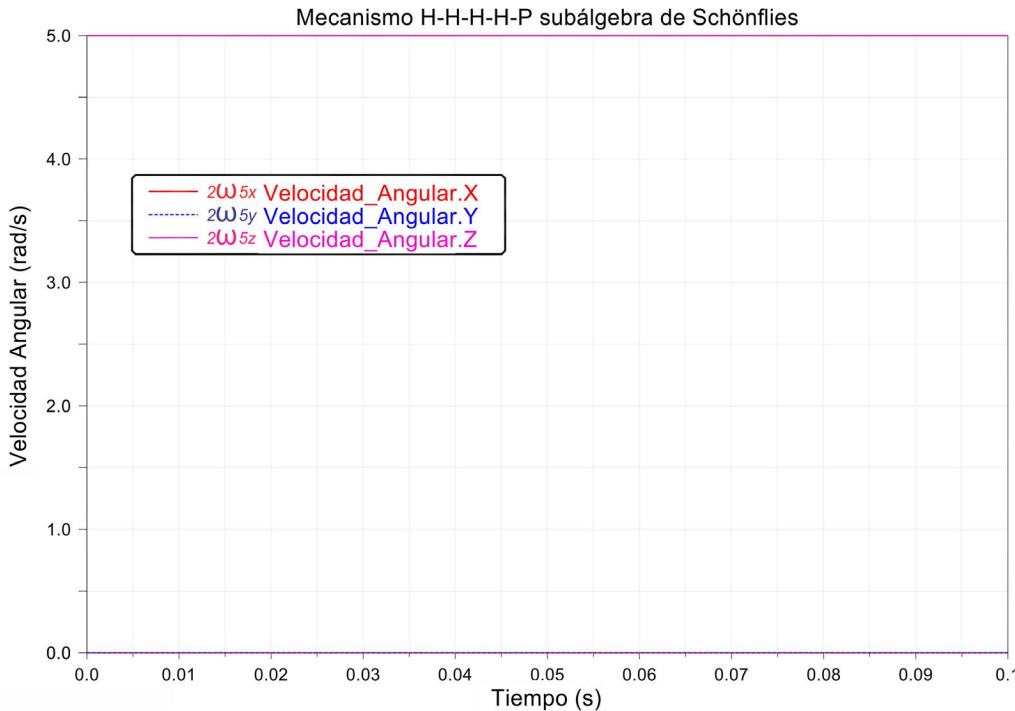


Figura 6.11: Velocidad angular relativa del eslabón cinco respecto del eslabón dos.

Con el resultado de la velocidad angular  ${}^2\omega_5$  se tiene que

$${}^2\vec{v}_O^5 = {}^2\omega_5 {}^2\vec{s}_O^5 = 5 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} \frac{20050}{69} \text{ u.l./s} \\ \frac{20050}{69} \text{ u.l./s} \\ -5 \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{100250}{69} \text{ u.l./s} \\ \frac{100250}{69} \text{ u.l./s} \\ -25 \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

Consecuentemente,  ${}_2v_{5x} = \frac{100250}{69} = 1452.8985 \text{ u.l./s}$ ,  ${}_2v_{5y} = \frac{100250}{69} = 1452.8985 \text{ u.l./s}$  y  ${}_2v_{5z} = -25 \text{ u.l./s}$ . Estos resultados se verifican en la simulación para el tiempo  $t = 0 \text{ s}$ , vea la Figura 6.12.<sup>2</sup>

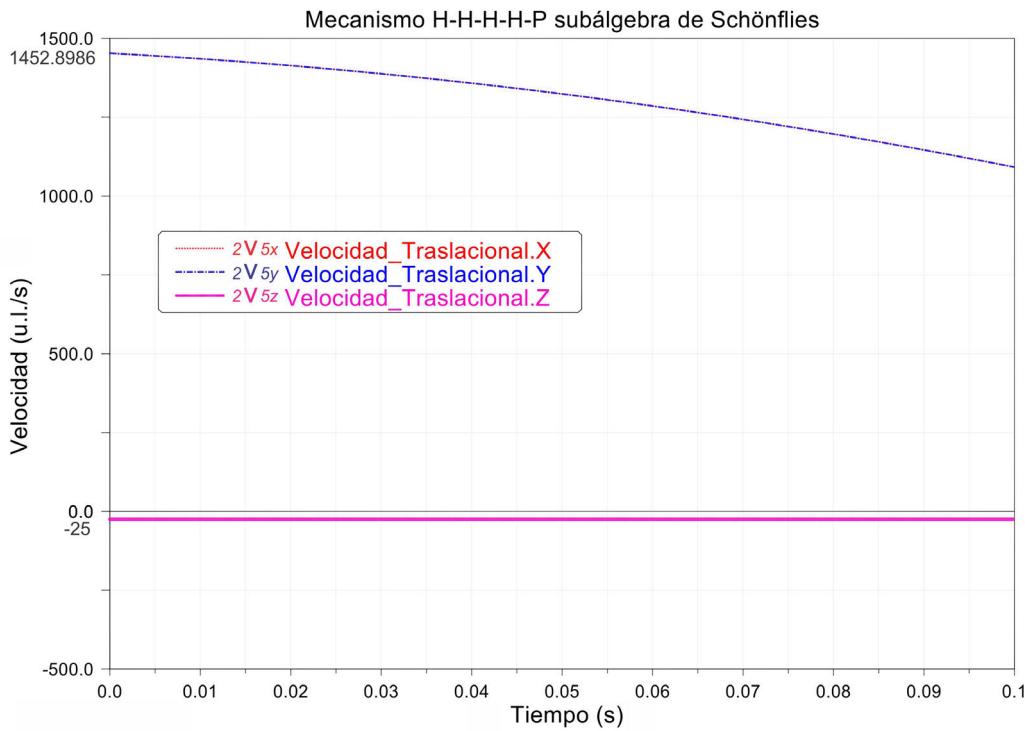


Figura 6.12: Velocidad traslacional del punto  $O_5$  respecto del punto  $O_2$

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^3\$O^5$ , debe recordarse que

$${}^3\vec{V}_O^5 = {}_3\omega_5 \begin{bmatrix} {}^3\hat{s}^5 \\ {}^3\vec{s}_O^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^3\vec{\omega}^5 \\ {}^3\vec{v}_O^5 \end{bmatrix} = {}_3\omega_5 {}^3\$O^5 = \frac{70}{69} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 450 \text{ u.l./s} \\ \frac{5900}{7} \text{ u.l./s} \\ -\frac{255}{7} \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{70}{69} \text{ rad/s} \\ \frac{10500}{23} \text{ u.l./s} \\ \frac{59000}{69} \text{ u.l./s} \\ -\frac{850}{23} \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

donde  ${}^3\$O^5$  se determinó mediante el programa Maple<sup>®</sup>.

La simulación realizada en Adams<sup>®</sup> obtiene que  ${}_3\omega_5 = \frac{70}{69} \text{ rad/s}$ , por lo tanto

$${}^3\vec{\omega}^5 = {}_3\omega_5 {}^3\hat{s}^5 = \frac{70}{69} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{70}{69} \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

De aquí que,  ${}_3\omega_{5x} = 0$ ,  ${}_3\omega_{5y} = 0$  y  ${}_3\omega_{5z} = \frac{70}{69} = 1.01449 \text{ rad/s}$ , tal como se indica en la Figura 6.11 obtenida mediante el programa Adams<sup>®</sup>.

<sup>2</sup>El título correcto de la Figura 6.12 de ser velocidad traslacional del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón cinco respecto a un sistema de referencia sujeto a traslación con la velocidad del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón dos; sin embargo, por razones de espacio, se usa el título mostrado.

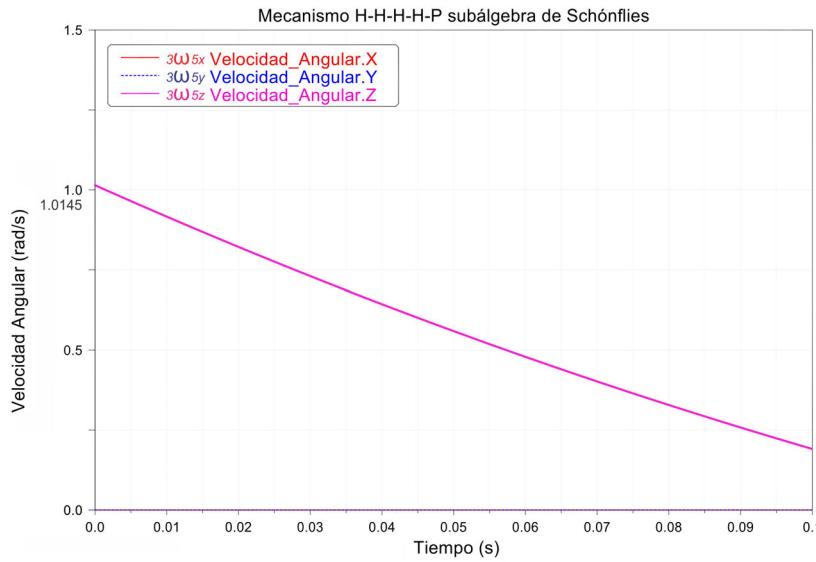


Figura 6.13: Velocidad angular relativa del eslabón cinco respecto del eslabón tres.

Con el resultado de la velocidad angular  $3\omega_5$  se tiene que

$$3\vec{v}_O^5 = 3\omega_5 3\vec{s}_O^5 = \frac{70}{69} \text{ rad/s} \begin{bmatrix} 450 \text{ u.l./s} \\ \frac{5900}{7} \text{ u.l./s} \\ -\frac{255}{7} \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10500}{23} \text{ u.l./s} \\ \frac{59000}{69} \text{ u.l./s} \\ -\frac{850}{23} \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

Consecuentemente,  $3v_{5x} = \frac{10500}{23} = 456.5217 \text{ u.l./s}$ ,  $3v_{5y} = \frac{59000}{69} = 855.0724 \text{ u.l./s}$  y  $3v_{5z} = -\frac{850}{23} = -36.9565 \text{ u.l./s}$ . Estos resultados se verifican en la simulación para el tiempo  $t = 0 \text{ s}$ , vea la Figura 6.14<sup>3</sup>

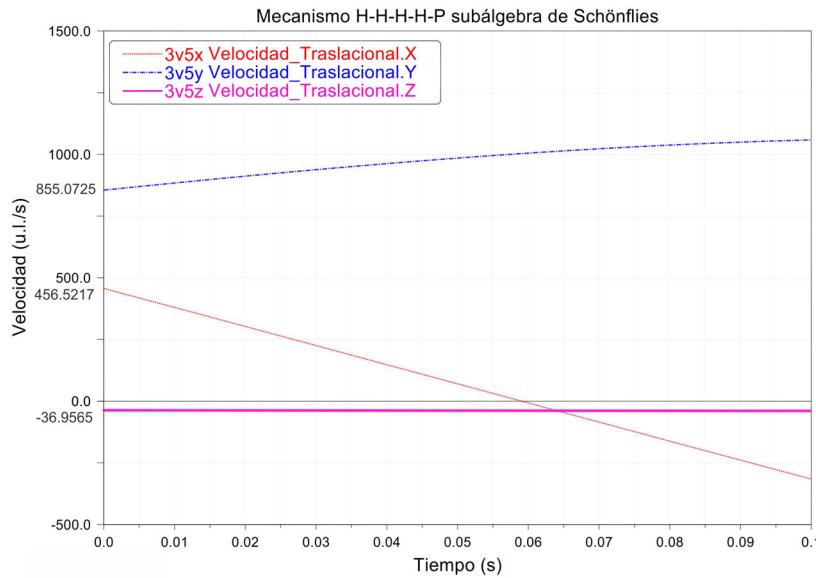


Figura 6.14: Velocidad traslacional del punto  $O_5$  respecto del punto  $O_3$

<sup>3</sup>El título correcto de la Figura 6.14 debe ser velocidad traslacional del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón cinco respecto a un sistema de referencia sujeto a traslación con la velocidad del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón tres; sin embargo, por razones de espacio, se usa el título mostrado.

## 6.6. Mecanismo R-H-H-H-R de cinco barras asociado a la subálgebra de Schönflies

Considere el mecanismo mostrado en la Figura 6.15. Este mecanismo está formado por cinco eslabones binarios, dos pares de revoluta y tres pares de tornillo paralelos al eje  $Z$  y de diferente paso.

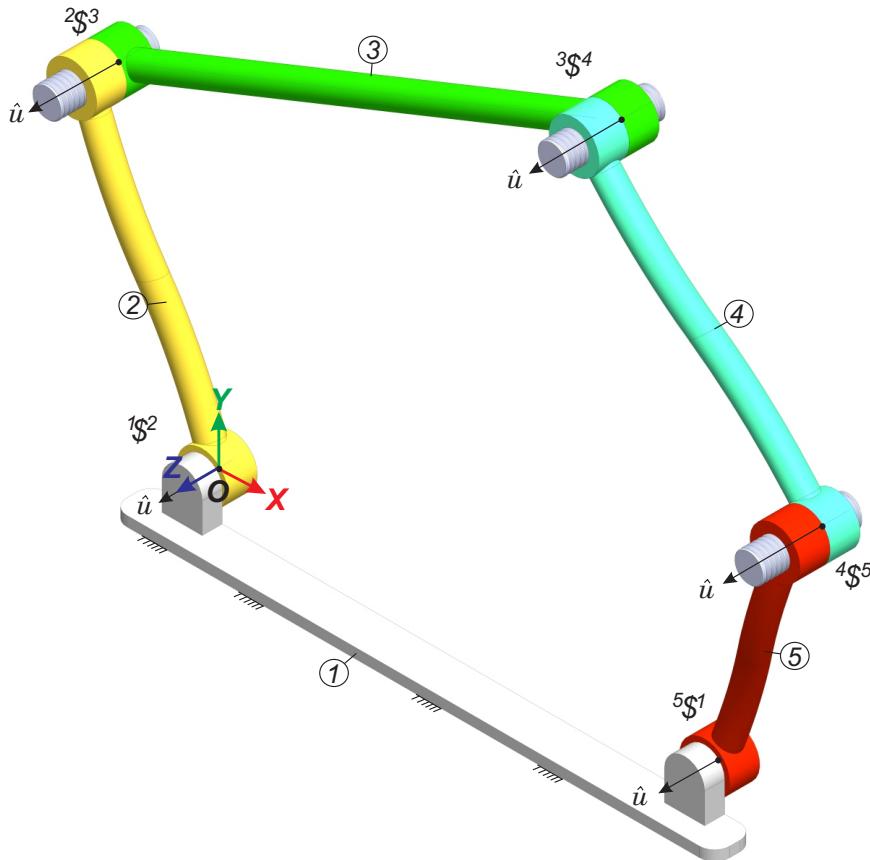


Figura 6.15: Mecanismo R-H-H-H-R de cinco barras asociado al álgebra de Schönflies

Los parámetros necesarios para la determinación de los tornillos asociados a los pares cinemáticos son:

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde  $\hat{u}_1$  representa la dirección de los ejes de los pares de los tornillos, los puntos a lo largo de los ejes de los pares cinemáticos, con respecto al origen del sistema coordenado  $O$  están dados por:

$$\vec{r}_{2/1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{3/2} = \begin{bmatrix} -100 \\ 300 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/3} = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{5/4} = \begin{bmatrix} 600 \\ 250 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{5/1} = \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

los pasos de los tornillos están dados por:

$${}_2h_3 = 8, \quad {}_3h_4 = -3, \quad {}_4h_5 = 5$$

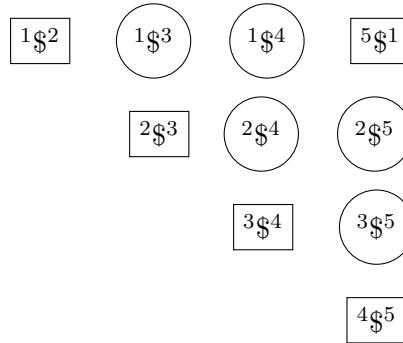
donde los vectores de posición y pasos están dados en términos de una unidad de longitud no especificada. Los tornillos infinitesimales que pasan por los puntos indicados por  $\vec{r}_{2/1}$ ,  $\vec{r}_{5/1}$ , representan pares de revoluta, los puntos indicados por  $\vec{r}_{3/2}$ ,  $\vec{r}_{4/3}$  y  $\vec{r}_{5/4}$  representan pares de tornillo. Los tornillos infinitesimales están dados por:

$${}^1\$^2_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 300 \\ 100 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 500 \\ -400 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad {}^4\$^5_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 250 \\ -600 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad {}^5\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -500 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 6.6.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's

La Tabla 6.2 enumera los ejes instantáneos de tornillo asociados con todos los movimientos relativos entre los eslabones del mecanismo propuesto.

Tabla 6.2: Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo R-H-H-H-R



La sección que selecciona los tornillos necesarios para la determinación de los tornillos secundarios se omite por razones de espacio.

El objetivo de este análisis es determinar los tornillos infinitesimales asociados a los movimientos relativos de los eslabones tres y cuatro respecto del eslabón uno, de los eslabones cuatro y cinco respecto del eslabón dos y del eslabón cinco respecto del eslabón tres. Por lo tanto el primer paso consiste en escribir los tornillos asociados a los ejes instantáneos secundarios, de los cuales sólo se conocen las direcciones de los ejes de los pares de tornillo; es decir, su dirección debe ser la del eje  $Z$  y la componente  $Z$  de la traslación deberá ser el paso.

$${}^1\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{13} \\ -x_{13} \\ {}_1h_3 \end{bmatrix}, \quad {}^1\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{14} \\ -x_{14} \\ {}_1h_4 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{24} \\ -x_{24} \\ {}_2h_4 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$^5_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{25} \\ -x_{25} \\ {}_2h_5 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$^5_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{35} \\ -x_{35} \\ {}_3h_5 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones necesarias se obtienen aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Klein de una manera sistemática.

$$Ec13_2 = \left[ -\frac{2}{75} y_{13} + {}_1 h_3, -\frac{1}{3} y_{13} - x_{13}, 0, 0, \right] \quad (6.99)$$

$$Ec13_4 = \left[ \begin{array}{l} \frac{500 {}_1 h_4 + 3 y_{14}}{y_{14} - 500} - \frac{({}_1 h_4 + 3) y_{13}}{y_{14} - 500} + {}_1 h_3, \frac{-500 x_{14} + 400 y_{14}}{y_{14} - 500} \\ - \frac{(-x_{14} + 400) y_{13}}{y_{14} - 500} - x_{13}, 0, 0, \end{array} \right] \quad (6.100)$$

$$Ec14_5 = \left[ -\frac{1}{50} y_{14} + {}_1 h_4, 500 + \frac{2}{5} y_{14} - x_{14}, 0, 0, \right] \quad (6.101)$$

$$Ec14_3 = \left[ \begin{array}{l} \frac{500 {}_1 h_3 + 3 y_{13}}{y_{13} - 500} - \frac{({}_1 h_3 + 3) y_{14}}{y_{13} - 500} + {}_1 h_4, \frac{-500 x_{13} + 400 y_{13}}{y_{13} - 500} \\ - \frac{(-x_{13} + 400) y_{14}}{y_{13} - 500} - x_{14}, 0, 0, \end{array} \right] \quad (6.102)$$

$$Ec24_1 = \left[ -\frac{{}_1 h_4 y_{24}}{y_{14}} + {}_2 h_4, \frac{x_{14} y_{24}}{y_{14}} - x_{24}, 0, 0, \right] \quad (6.103)$$

$$Ec24_3 = \left[ -\frac{49}{2} + \frac{11}{200} y_{24} + {}_2 h_4, -850 + \frac{5}{2} y_{24} - x_{24}, 0, 0, \right] \quad (6.104)$$

$$Ec25_1 = \left[ {}_2 h_5, y_{25}, 0, 0, \right] \quad (6.105)$$

$$Ec25_4 = \left[ \begin{array}{l} \frac{5(50 {}_2 h_4 - y_{24})}{y_{24} - 250} - \frac{({}_2 h_4 - 5) y_{25}}{(y_{24} - 250)} + {}_2 h_5, \frac{5 (-50 x_{24} + 120 y_{24})}{y_{24} - 250} \\ - \frac{(-x_{24} + 600) y_{25}}{(y_{24} - 250)} - x_{25}, 0, 0, \end{array} \right] \quad (6.106)$$

$$Ec35_4 = \left[ -13 + \frac{4}{125} y_{35} + {}_3 h_5, 800 - \frac{4}{5} y_{35} - x_{35}, 0, 0, \right] \quad (6.107)$$

$$Ec35_1 = \left[ -\frac{{}_1 h_3 y_{35}}{y_{13}} + {}_3 h_5, 500 - \frac{(-x_{13} + 500) y_{35}}{y_{13}} - x_{35}, 0, 0, \right] \quad (6.108)$$

Donde los dos primeros números de la ecuación vectorial, pues las componentes se igualan a 0, indican cual es el eje instantáneo que se desea determinar y el subíndice indica cual es el eslabón intermedio que se emplea para determinar el eje instantáneo.

Resolviendo el sistema de ecuaciones de la misma forma que en la sección 6.5.2 se encuentra que los vectores de posición de los ejes instantáneos secundarios, están dados por:

$$\vec{r}_{3/1} = \begin{bmatrix} \frac{32500}{173} \\ -\frac{97500}{173} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/1} = \begin{bmatrix} \frac{12500}{123} \\ -\frac{122500}{123} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/2} = \begin{bmatrix} -\frac{100}{3} \\ \frac{980}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{5/2} = \begin{bmatrix} \frac{61300}{23} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{5/3} = \begin{bmatrix} \frac{6850}{11} \\ \frac{4875}{22} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los pasos correspondientes a los ejes instantáneos secundarios, son iguales a:

$${}_1 h_3 = -\frac{2600}{173}, \quad {}_1 h_4 = -\frac{2450}{123}, \quad {}_2 h_4 = \frac{98}{15}, \quad {}_2 h_5 = 0, \quad {}_3 h_5 = \frac{65}{11}$$

Los tornillos infinitesimales asociados a los ejes instantáneos secundarios están dados por:

$${}^1\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{97500}{173} \\ -\frac{32500}{173} \\ -\frac{2600}{173} \end{bmatrix}, \quad {}^1\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{122500}{123} \\ -\frac{12500}{123} \\ -\frac{2450}{123} \end{bmatrix}, \quad {}^2\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{980}{3} \\ \frac{100}{3} \\ \frac{98}{15} \end{bmatrix}, \quad {}^2\$_O^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{61300}{23} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$_O^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{4875}{22} \\ -\frac{6850}{11} \\ \frac{65}{11} \end{bmatrix}$$

Los valores determinados para los vectores de posición correspondientes a los ejes instantáneos secundarios se muestran en la Figura 6.16, donde se puede observar que los tres ejes instantáneos asociados a los tres movimientos relativos,  ${}^i\$^k$ ,  ${}^j\$^k$ ,  ${}^i\$^j$ , entre los tres cuerpos para los dos posibles valores de  $j$ , en cada uno de los casos yacen sobre una línea recta de acuerdo a lo establecido por el teorema de Aronhold- Kennedy en mecanismos planos.

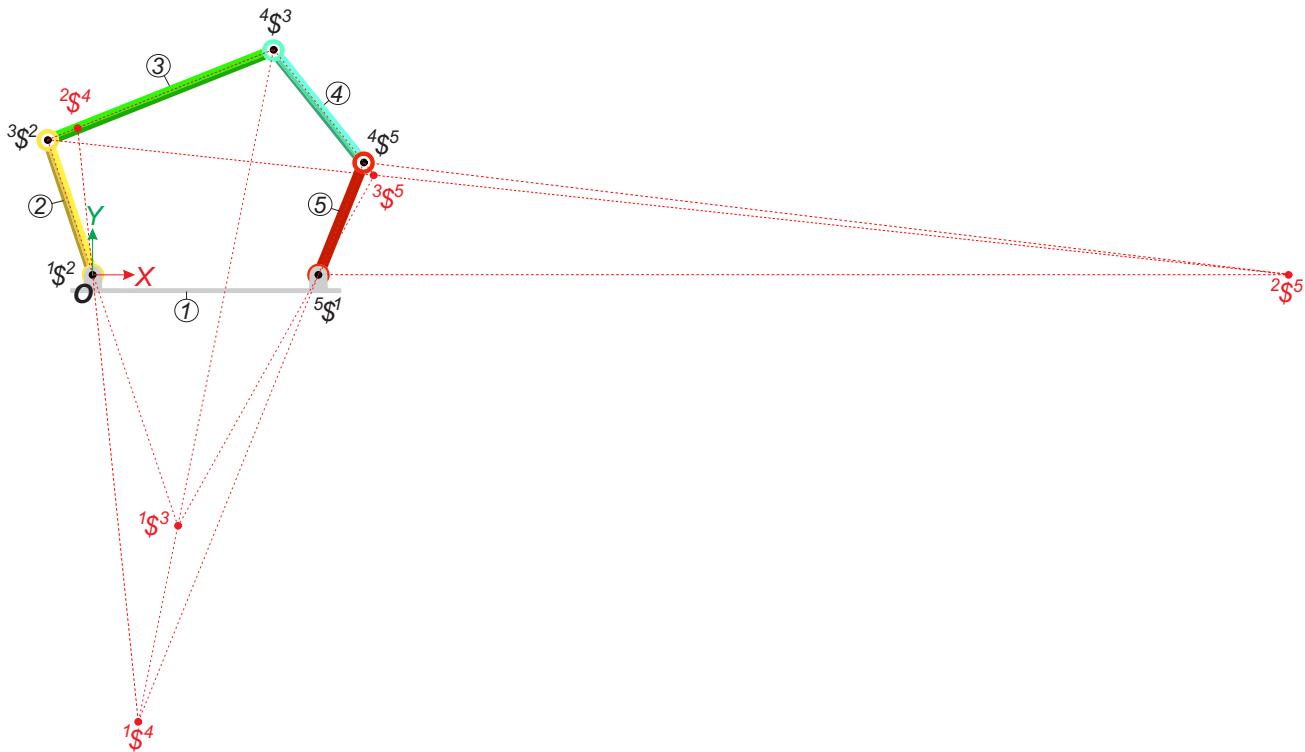


Figura 6.16: Mecanismo de cinco barras asociado al álgebra de Schönflies R-H-H-H-R

Los resultados obtenidos para los vectores de posición de los ejes instantáneos secundarios, así como sus pasos se comprobaron mediante la realización del análisis de velocidad del mecanismo para una velocidad angular de magnitud arbitraria de  $100 \text{ rad/s}$  en sentido horario del eslabón dos, seleccionado como eslabón motriz, y, a partir de los resultados, determinando los estados de velocidad entre los diferentes eslabones del mecanismo y finalmente el ISA correspondiente para cada movimiento relativo, este proceso se llevó a cabo mediante un programa en Maple<sup>©</sup>.

Finalmente los resultados del análisis de velocidad fueron verificados satisfactoriamente mediante el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>; sin embargo, los resultados de la simulación no se muestran por razones de espacio.

## 6.7. Mecanismo R-H-H-H-P de cinco barras asociado a la subálgebra de Schönflies

Consideré el mecanismo mostrado en la Figura 6.17. Este mecanismo está formado por cinco eslabones binarios, un par de revoluta y tres pares de tornillo paralelos al eje  $Z$  y de diferente paso, un par prismático cuya dirección es arbitraria y en particular no está contenida en el plano  $X-Y$ .

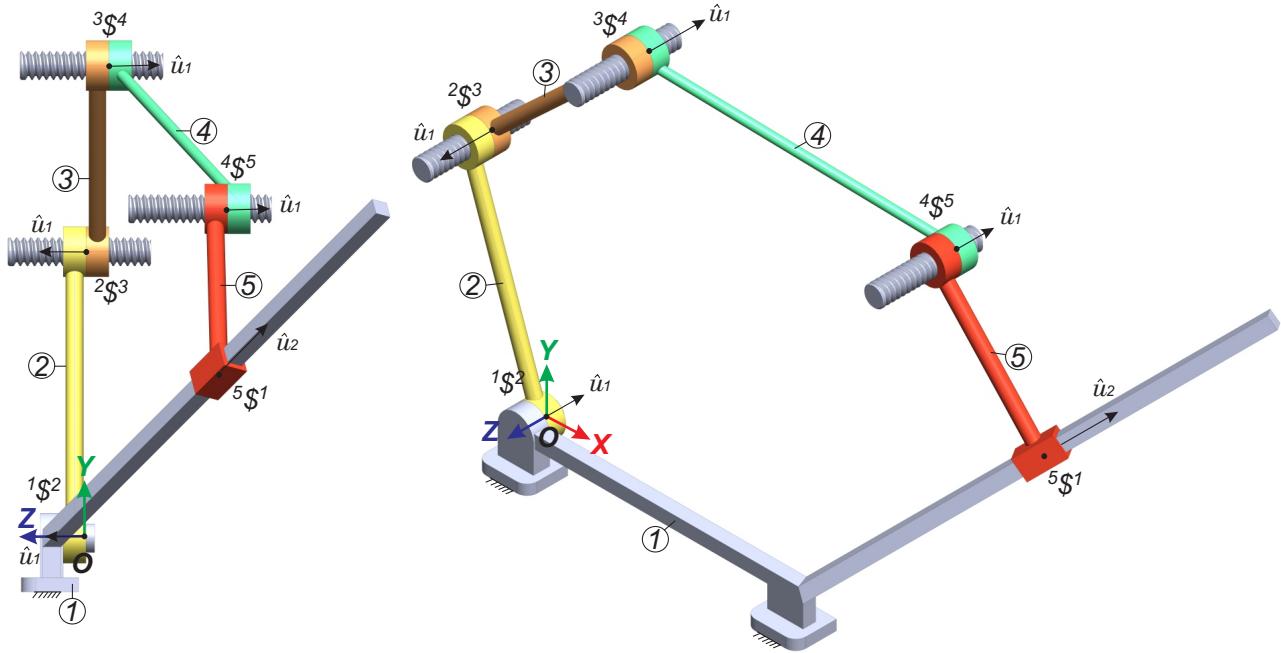


Figura 6.17: Mecanismo R-H-H-H-P de cinco barras asociado al álgebra de Schönflies

Los parámetros necesarios para la determinación de los tornillos asociados a los pares cinemáticos son:

$$\hat{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

donde  $\hat{u}_1$  representa la dirección de los ejes de los pares de tornillo y  $\hat{u}_2$  representa la dirección del eje del par prismático, los puntos a lo largo de los ejes de los tornillos de los pares cinemáticos, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , están dados por:

$$\vec{r}_{2/1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{3/2} = \begin{bmatrix} -70 \\ 200 \\ -16 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/3} = \begin{bmatrix} 70 \\ 330 \\ -32 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{5/4} = \begin{bmatrix} 290 \\ 230 \\ -115 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{5/1} = \begin{bmatrix} 391 \\ 115 \\ -107 \end{bmatrix}$$

los pasos de los tornillos están dados por:

$${}_2h_3 = -20, \quad {}_3h_4 = 30, \quad {}_4h_5 = 40$$

donde los vectores de posición y pasos están dados en términos de una unidad de longitud no especificada.

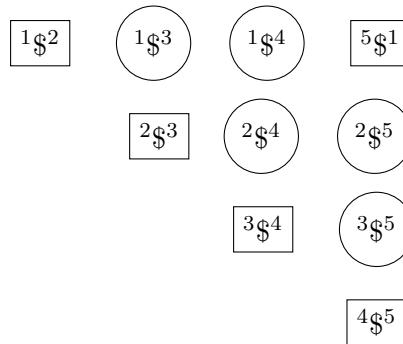
Los tornillos infinitesimales que pasan por los puntos indicados por  $\vec{r}_{2/1}$ , representa un par de revoluta, los puntos  $\vec{r}_{3/2}$ ,  $\vec{r}_{4/3}$  y  $\vec{r}_{5/4}$  representan pares de tornillo y el par que pasa por  $\vec{r}_{5/1}$ , que no es necesario, es un par prismático. Los tornillos infinitesimales están dados:

$${}^1\$^2_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 200 \\ 70 \\ -20 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 330 \\ -70 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad {}^4\$^5_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 230 \\ -290 \\ 40 \end{bmatrix}, \quad {}^5\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

### 6.7.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's

La Tabla 6.3 enumera los ejes instantáneos de tornillo asociados con todos los movimientos relativos entre los eslabones del mecanismo propuesto.

Tabla 6.3: Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo R-H-H-H-P



La sección que selecciona los tornillos necesarios para la determinación de los tornillos secundarios se omite por razones de espacio.

El objetivo de este análisis es determinar los tornillos infinitesimales asociados a los movimientos relativos de los eslabones tres y cuatro respecto del eslabón uno, de los eslabones cuatro y cinco respecto del eslabón dos y del eslabón cinco respecto del eslabón tres. Por lo tanto el primer paso consiste en escribir los tornillos asociados a los ejes instantáneos secundarios, de los cuales sólo se conocen las direcciones de los ejes de los pares de tornillo; es decir, su dirección debe ser la del eje  $Z$  y la componente  $Z$  de la traslación deber ser el paso.

$${}^1\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{13} \\ -x_{13} \\ {}_1 h_3 \end{bmatrix}, \quad {}^1\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{14} \\ -x_{14} \\ {}_1 h_4 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{24} \\ -x_{24} \\ {}_2 h_4 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$^5_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{25} \\ -x_{25} \\ {}_2 h_5 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$^5_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{35} \\ -x_{35} \\ {}_3 h_5 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones necesarias se obtienen aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Klein de una manera sistemática.

$$Ec13_2 = \left[ \frac{1}{10} y_{13} + {}_1h_3, -\frac{7}{20} y_{13} - x_{13}, 0, 0, \right] \quad (6.109)$$

$$\begin{aligned} Ec13_4 = & \left[ \frac{10(33 {}_1h_4 + 3 y_{14})}{y_{14} - 330} - \frac{({}_1h_4 - 30) y_{13}}{y_{14} - 330} + {}_1h_3, \frac{10(-33 x_{14} + 7 y_{14})}{y_{14} - 330} \right. \\ & \left. - \frac{(-x_{14} + 70) y_{13}}{y_{14} - 330} - x_{13}, 0, 0, \right] \end{aligned} \quad (6.110)$$

$$Ec14_5 = \left[ -270 + y_{14} + {}_1h_4, 520 - y_{14} - x_{14}, 0, 0, \right] \quad (6.111)$$

$$\begin{aligned} Ec14_3 = & \left[ \frac{10(33 {}_1h_3 - 3 y_{13})}{y_{13} - 330} - \frac{({}_1h_3 - 30) y_{14}}{y_{13} - 330} + {}_1h_4, \frac{10(-33 x_{13} + 7 y_{13})}{y_{13} - 330} \right. \\ & \left. - \frac{(-x_{13} + 70) y_{14}}{y_{13} - 330} - x_{14}, 0, 0, \right] \end{aligned} \quad (6.112)$$

$$Ec24_3 = \left[ \frac{1260}{13} - \frac{5}{13} y_{24} + {}_2h_4, -\frac{3710}{13} + \frac{14}{13} y_{24} - x_{24}, 0, 0, \right] \quad (6.113)$$

$$Ec24_1 = \left[ -\frac{{}_1h_4 y_{24}}{y_{14}} + {}_2h_4, \frac{x_{14} y_{24}}{y_{14}} - x_{24}, 0, 0, \right] \quad (6.114)$$

$$Ec25_1 = \left[ y_{25} + {}_2h_5, -y_{25} - x_{25}, 0, 0, \right] \quad (6.115)$$

$$\begin{aligned} Ec25_4 = & \left[ \frac{10(23 {}_2h_4 - y_{24})}{y_{24} - 230} - \frac{({}_2h_4 - 40) y_{25}}{y_{24} - 230} + {}_2h_5, \frac{10(-23 x_{24} + 29 y_{24})}{y_{24} - 230} - \right. \\ & \left. \frac{(-x_{24} + 290) y_{25}}{y_{24} - 230} - x_{25}, 0, 0, \right] \end{aligned} \quad (6.116)$$

$$Ec35_4 = \left[ -63 + \frac{1}{10} y_{35} + {}_3h_5, 796 - \frac{11}{5} y_{35} - x_{35}, 0, 0, \right] \quad (6.117)$$

$$Ec35_1 = \left[ -{}_1h_3 y_{13} + y_{35} + {}_3h_5, x_{13} + y_{13} - y_{35}, 0, 0, \right] \quad (6.118)$$

Donde los dos primeros números de la ecuación vectorial, pues las componentes se igualan a cero, indican cual es el eje instantáneo que se desea determinar y el subíndice indica cual es el eslabón intermedio que se emplea para determinar el eje instantáneo.

Resolviendo el sistema de ecuaciones de la misma forma que en la sección 6.5.2 se encuentra que los vectores de posición de los ejes instantáneos secundarios, están dados por:

$$\vec{r}_{3/1} = \begin{bmatrix} -\frac{6160}{37} \\ \frac{17600}{37} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/1} = \begin{bmatrix} \frac{765}{2} \\ \frac{275}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/2} = \begin{bmatrix} \frac{10710}{23} \\ \frac{3850}{23} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{5/2} = \begin{bmatrix} -\frac{2590}{51} \\ \frac{2590}{51} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{5/3} = \begin{bmatrix} -\frac{3570}{37} \\ \frac{15010}{37} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los pasos correspondientes a los ejes instantáneos secundarios, son iguales a:

$${}_1h_3 = -\frac{1760}{37}, \quad {}_1h_4 = \frac{265}{2}, \quad {}_2h_4 = -\frac{3710}{23}, \quad {}_2h_5 = -\frac{2590}{51}, \quad {}_3h_5 = \frac{830}{37}$$

Los tornillos infinitesimales asociados a los ejes instantáneos secundarios están dados por:

$${}^1\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{17600}{37} \\ \frac{6160}{37} \\ -\frac{1760}{37} \end{bmatrix}, \quad {}^1\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{275}{2} \\ -\frac{765}{2} \\ \frac{265}{2} \end{bmatrix}, \quad {}^2\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{3850}{23} \\ \frac{10710}{23} \\ -\frac{3710}{23} \end{bmatrix}, \quad {}^2\$^5_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{2590}{51} \\ \frac{2590}{51} \\ -\frac{2590}{51} \end{bmatrix}, \quad {}^3\$^5_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{15010}{37} \\ \frac{3570}{37} \\ \frac{830}{37} \end{bmatrix}$$

Los valores determinados para los vectores de posición correspondientes a los ejes instantáneos secundarios se muestran en la Figura 6.18, donde se puede observar que los tres ejes instantáneos asociados a los tres movimientos relativos,  ${}^i\$^k$ ,  ${}^j\$^k$ ,  ${}^i\$^j$ , entre los tres cuerpos para los dos posibles valores de  $j$ , en cada uno de los casos yacen sobre una línea recta de acuerdo a lo establecido por el teorema de Aronhold-Kennedy en mecanismos planos. Para el caso del movimiento relativo de los tres cuerpos cuando se tiene un par prismático, la línea pasa por dos de los pares de tornillo y sería perpendicular a la dirección del desplazamiento del par prismático.

Los resultados obtenidos para los vectores de posición de los ejes instantáneos secundarios, así como sus pasos se comprobaron mediante la realización del análisis de velocidad del mecanismo para una velocidad angular de magnitud arbitraria de  $10 \text{ rad/s}$  en sentido antihorario del eslabón dos, seleccionado como eslabón motriz, y, a partir de los resultados, determinando los estados de velocidad y finalmente el ISA correspondiente para cada tornillo, este proceso se llevó a cabo mediante un programa en Maple<sup>©</sup>.

Finalmente los resultados del análisis de velocidad fueron verificados satisfactoriamente mediante el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>; sin embargo, los resultados de la simulación no se muestran por razones de espacio.

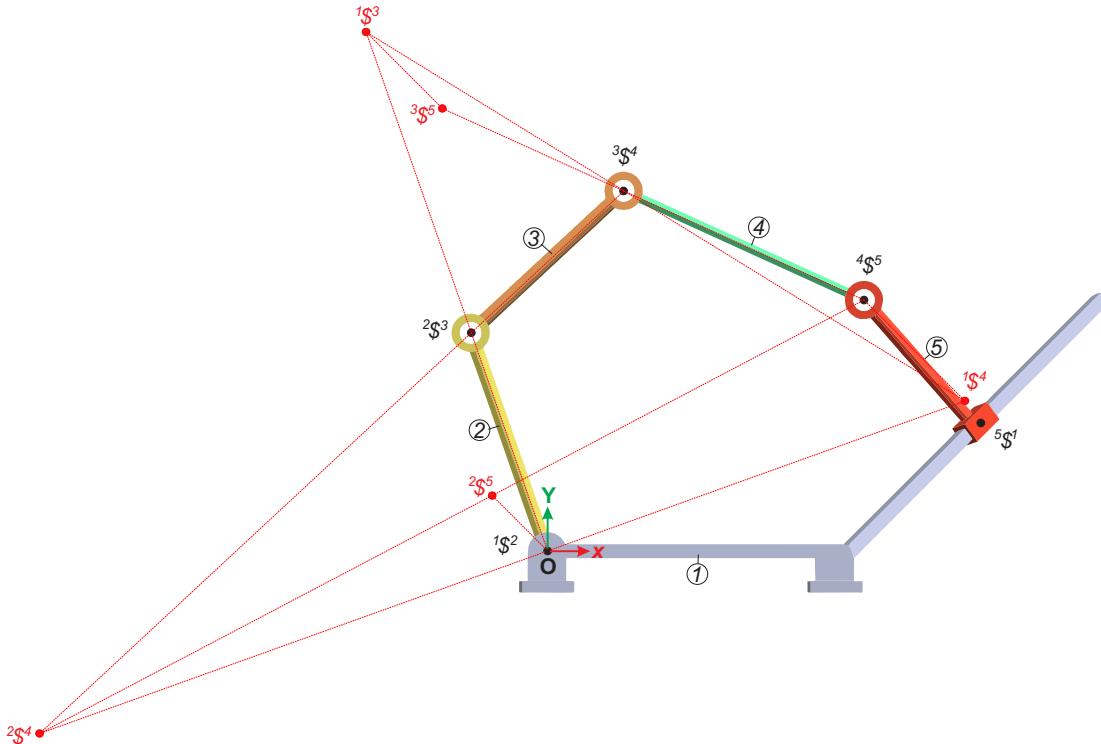


Figura 6.18: Mecanismo R-H-H-H-P de cinco barras asociado al álgebra de Schönflies

## 6.8. Mecanismo R-H-C-P de cuatro barras asociado a la subálgebra de Schönflies

Consideré el mecanismo mostrado en la Figura 6.19. Este mecanismo está formado por cuatro eslabones binarios, un par de revoluta, un par de tornillo y un par cilíndrico paralelos al eje  $Z$ , un par prismático cuya dirección es arbitraria y en particular no está contenida en el plano  $X-Y$ .

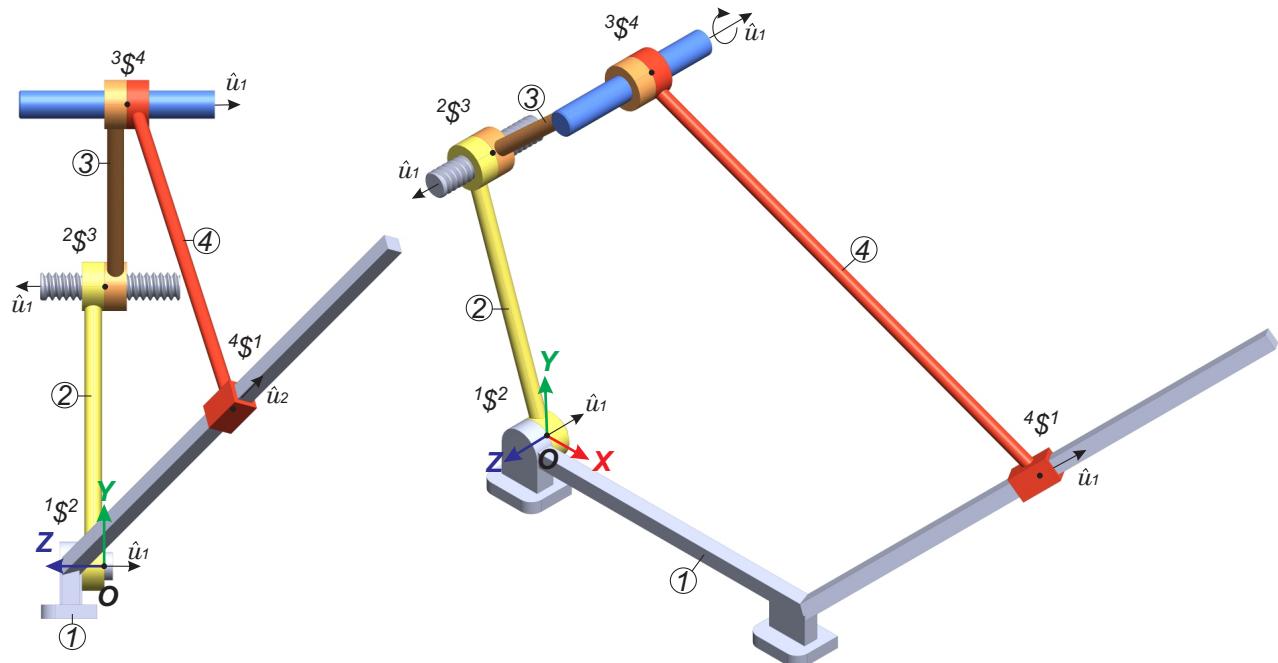


Figura 6.19: Mecanismo R-H-C-P de cuatro barras asociado a la subálgebra de Schönflies

Los parámetros necesarios para la determinación de los tornillos asociados a los pares cinemáticos son:

$$\hat{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

donde  $\hat{u}_1$  representa la dirección de los ejes de los pares de tornillo y  $\hat{u}_2$  representa la dirección del eje del par prismático, los puntos a lo largo de los ejes del tornillo de los pares cinemáticos, con respecto al origen del sistema coordenado,  $O$ , están dados por:

$$\vec{r}_{2/1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{3/2} = \begin{bmatrix} -70 \\ 200 \\ -16 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/3a} = \begin{bmatrix} 70 \\ 330 \\ -32 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/3b} = \begin{bmatrix} 70 \\ 330 \\ -32 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{4/1} = \begin{bmatrix} 391 \\ 115 \\ -107 \end{bmatrix}$$

el paso del tornillo está dado por:

$$2h_3 = -20$$

donde los vectores de posición y el paso están dados en términos de una unidad de longitud no especificada.

Los tornillos infinitesimales que pasan por los puntos indicados por  $\vec{r}_{2/1}$ , representa un par de revoluta,  $\vec{r}_{3/2}$ , representa un par de tornillo,  $\vec{r}_{4/3}$ , representa un par cilíndrico y el punto que pasa por  $\vec{r}_{4/1}$ , representa un par prismático. Cabe la pena resaltar que un par cilíndrico puede escribirse como la combinación de un par de revoluta cuya dirección de rotación está dada por el vector unitario  $\hat{u}_1$  y un par prismático, con traslación a lo largo de la dirección dada por el vector unitario  $\hat{u}_1$ , de esta manera los tornillos infinitesimales están dados por<sup>4</sup>:

$${}^1\$^2_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 200 \\ 70 \\ -20 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$^{4a}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 330 \\ -70 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3\$^{4b}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^4\$^1_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

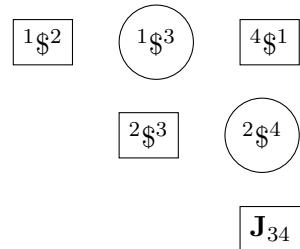
La matriz Jacobiana asociada asociada al par cinemático cilíndrico entre los eslabones 3 y 4 está dada por:

$$\mathbf{J}_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 330 & 0 \\ -70 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 6.8.1. Determinación de las ecuaciones para la localización de los ISA's

La Tabla 6.4 enumera los ejes instantáneos de tornillo asociados con todos los movimientos relativos entre los eslabones del mecanismo propuesto.

Tabla 6.4: Ejes instantáneos de tornillos asociados al mecanismo R-H-C-P



La sección que selecciona los tornillos necesarios para la determinación de los tornillos secundarios se omite por razones de espacio.

El objetivo de este análisis es determinar los tornillos infinitesimales asociados a los movimientos relativos del eslabón tres respecto del eslabón uno y del eslabón cuatro respecto del eslabón dos. Por lo tanto el primer paso consiste en escribir los tornillos asociados a los ejes instantáneos secundarios, de los

<sup>4</sup>Debe notarse que el par cilíndrico tiene dos tornillos infinitesimales asociados al par, un par de revoluta y un par prismático.

cuales sólo se conocen las direcciones de los ejes de los pares de tornillo; es decir, su dirección debe ser la del eje  $Z$  y la componente  $Z$  de la traslación deber ser el paso.

$${}^1\$^3_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{13} \\ -x_{13} \\ {}_1 h_3 \end{bmatrix}, \quad {}^2\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ y_{24} \\ -x_{24} \\ {}_2 h_4 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones necesarias se obtienen aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy usando la forma de Klein de una manera sistemática; sin embargo, debe tenerse en cuenta que cuando se tiene un par cinemático que genere subgrupos o subágebras de dimensión dos como lo es el par cilíndrico, la determinación de los aniquiladores ortogonales requiere la inclusión de los dos tornillos asociados al par cinemático.

En este caso el mecanismo R-H-C-P de cuatro barras no es un mecanismo indeterminado, dado que sus ejes instantáneos secundarios pueden determinarse de manera independiente por lo tanto se tiene para el eje instantáneo  ${}^1\$^3_O$ .

$$Ec13_2 = \left[ \frac{1}{10} y_{13} + {}_1 h_3, -\frac{7}{20} y_{13} - x_{13}, 0, 0, \right] \quad (6.119)$$

$$Ec13_4 = \left[ 400 - y_{13} - x_{13}, 0, 0, \right] \quad (6.120)$$

Donde los dos primeros números de la ecuación vectorial, pues las componentes se igualan a cero, indican cual es el eje instantáneo que se desea determinar y el subíndice indica cual es el eslabón intermedio que se emplea para determinar el eje instantáneo.

El sistema de ecuaciones escalares está dado:

$$0 = \frac{1}{10} y_{13} + {}_1 h_3 \quad (6.121)$$

$$0 = -\frac{7}{20} y_{13} - x_{13} \quad (6.122)$$

$$0 = 400 - y_{13} - x_{13} \quad (6.123)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones de lineales, se encuentra que el vector de posición asociado al eje instantáneo secundario  ${}^1\$^3_O$ , está dado por:

$$\vec{r}_{3/1} = \begin{bmatrix} -\frac{2800}{13} \\ \frac{8000}{13} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además se tiene que el paso correspondiente al eje instantáneo secundario, está dado por:

$${}_1 h_3 = 5$$

El tornillo infinitesimal asociado al eje instantáneo secundario  ${}^1\$_O^3$  es igual a:

$${}^1\$_O^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{8000}{13} \\ \frac{2800}{13} \\ -\frac{800}{13} \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales para determinar el eje instantáneo secundario  ${}^2\$_O^4$  están dadas por:

$$Ec24_3 = \left[ -\frac{3710}{13} + \frac{14}{13} y_{24} - x_{24}, 0, 0, \right] \quad (6.124)$$

$$Ec24_1 = \left[ y_{24} + {}_2h_4, -y_{24} - x_{24}, 0, 0, \right] \quad (6.125)$$

De las ecuaciones (6.124) y (6.125) se tiene el sistema de ecuaciones escalares:

$$0 = -\frac{3710}{13} + \frac{14}{13} y_{24} - x_{24} \quad (6.126)$$

$$0 = y_{24} + {}_2h_4 \quad (6.127)$$

$$0 = -y_{24} - x_{24} \quad (6.128)$$

De manera semejante se resuelve el sistema de ecuaciones para el eje instantáneo  ${}^2\$_O^4$ . El vector de posición para el eje instantáneo secundario, está dado por:

$$\vec{r}_{4/2} = \begin{bmatrix} -\frac{3710}{27} \\ \frac{3710}{27} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además se tiene que el paso correspondiente al eje instantáneo secundario, está dado por:

$${}_2h_4 = -\frac{3710}{27}$$

El tornillo infinitesimal asociado al eje instantáneo secundario  ${}^2\$_O^4$  es igual a:

$${}^2\$_O^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{3710}{27} \\ \frac{3710}{27} \\ -\frac{3710}{27} \end{bmatrix}$$

Los valores determinados para los vectores de posición correspondientes a los ejes instantáneos secundarios se muestran en la Figura 6.20, donde se puede observar que los tres ejes instantáneos asociados a los tres movimientos relativos,  ${}^i\$^k$ ,  ${}^j\$^k$ ,  ${}^i\$^j$ , entre los tres cuerpos para los dos posibles valores de  $j$ , en

cada uno de los casos yacen sobre una línea recta de acuerdo a lo establecido por el teorema de Aronhold-Kennedy en mecanismos planos. Para el caso del movimiento relativo de los tres cuerpos cuando se tiene un par prismático, la línea pasa por dos de los pares de tornillo y sería perpendicular a la dirección del desplazamiento del par prismático.

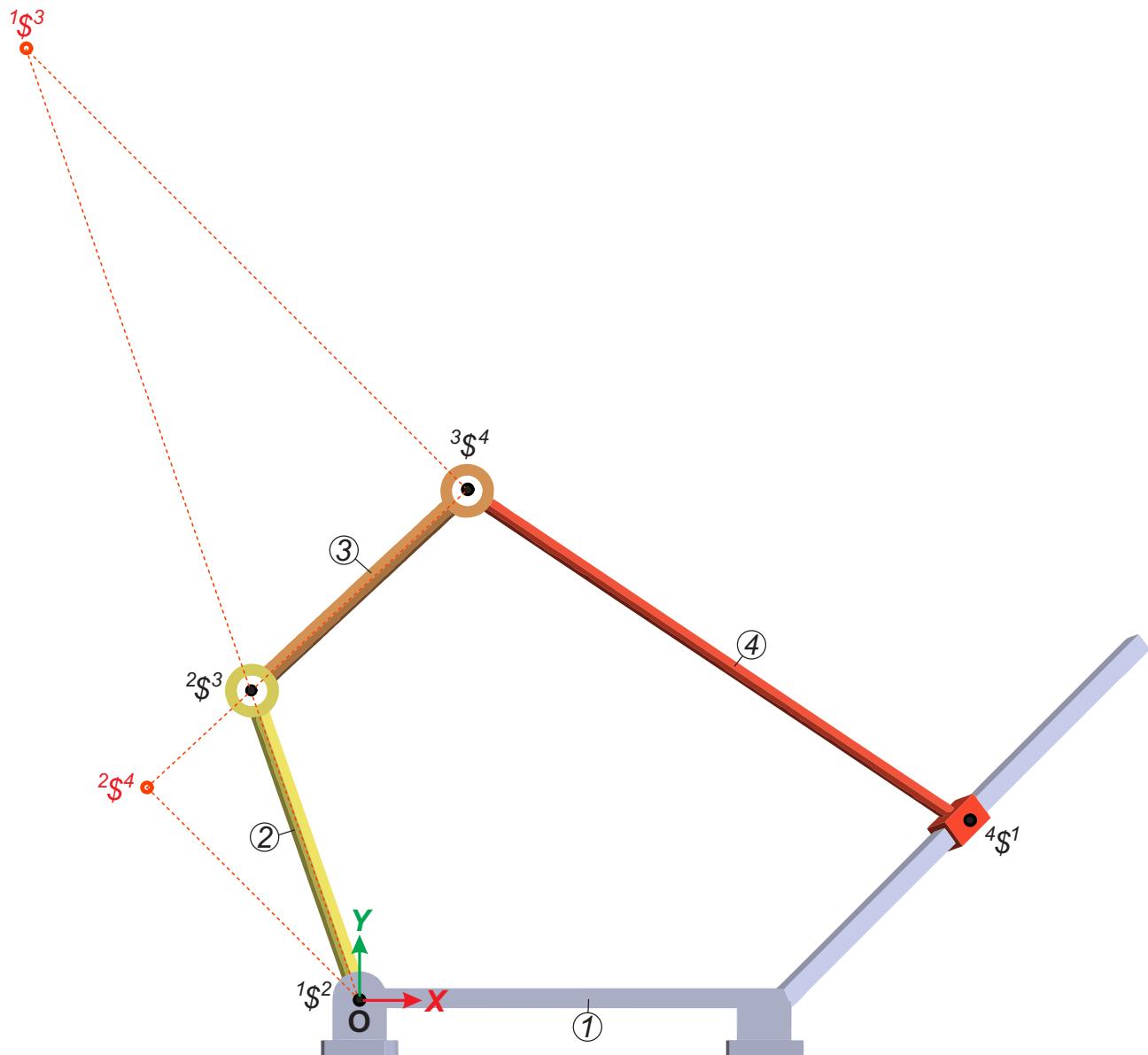


Figura 6.20: Mecanismo R-H-C-P de cuatro barras asociado al álgebra de Schönflies

Los resultados obtenidos para los vectores de posición de los ejes instantáneos secundarios, así como sus pasos se comprobaron mediante la realización del análisis de velocidad del mecanismo para una velocidad angular de magnitud arbitraria de  $10 \text{ rad/s}$  en sentido horario del eslabón dos, seleccionado como eslabón motriz, y, a partir de los resultados, determinando los estados de velocidad entre los diferentes eslabones del mecanismo y finalmente el ISA correspondiente para cada movimiento relativo, este proceso se llevó a cabo mediante un programa en Maple<sup>©</sup>.

Finalmente los resultados del análisis de velocidad fueron verificados satisfactoriamente mediante el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>; sin embargo, los resultados de la simulación no se muestran por razones de espacio.

---

# Capítulo 7: Mecanismo triviales espaciales

---

En este capítulo se mostrará que, nuevamente, la ecuación que relaciona los estados de velocidad de tres cuerpos arbitrarios

$${}^i\vec{V}_O^k = {}^i\vec{V}_O^j + {}^j\vec{V}_O^k$$

que en términos de tornillos unitarios está dado por

$${}_i\omega_k {}^i\$_O^k = {}_i\omega_j {}^i\$_O^j + {}_j\omega_k {}^j\$_O^k$$

permite determinar la localización de todos los ejes instantáneos de los mecanismos triviales espaciales; es decir, aquellos asociados al álgebra de Lie,  $se(3)$ , de un grado de libertad. Estos mecanismos pueden tener tal variedad de pares cinemáticos que no se realizará un análisis del número y tipo de pares cinemáticos, simplemente se analizarán dos ejemplos de mecanismos espaciales ambos determinados. Sin embargo, la posible presencia de pares cinemáticos de mas de un grado de libertad, en el movimiento relativo entre los eslabones que conecta el par cinemático, obliga a generalizar el procedimiento.

## 7.1. Análisis de un mecanismo espacial RCCC.

Considere un mecanismo espacial RCCC, el mecanismo es un mecanismo trivial y su movilidad está dada por

$$F = \sum_{i=1}^4 f_i - \dim se(3) = (1 + 2 + 2 + 2) - 6 = 1$$

El mecanismo tiene un grado de libertad. Note que, en general, los pares cinemáticos entre los eslabones del mecanismo pueden tener más de un grado de libertad, de manera que es necesario generalizar el tratamiento de los aniquiladores ortogonales respecto a las formas de Klein y Killing.

### 7.1.1. La aplicación de las formas de Klein y Killing

Como ya se ha explicado anteriormente, la determinación de los ejes instantáneos  ${}^i\$^k$ , requiere determinar los aniquiladores ortogonales, respecto a las formas de Klein o Killing del subespacio generado por  $\{{}^iS^j, {}^jS^k\}$  —donde  ${}^iS^j$  es una base para el subespacio de tornillos asociado al par cinemático entre los eslabones  $i$  y  $j$  y  ${}^jS^k$  es una base para el subespacio de tornillos asociado al par cinemático entre los eslabones  $j$  y  $k$ ; es decir aquellos tornillos  $\$_{aik}$ , tal que

$$Kl(\$, {}^i\$^j) = Kl(\$, {}^j\$^k) = 0 \quad \forall \quad {}^i\$^j \in {}^iS^j \quad \text{y} \quad {}^j\$^k \in {}^jS^k \quad (7.1)$$

y

$$Ki(\$, {}^i\$^j) = Ki(\$, {}^j\$^k) = 0 \quad \forall \quad {}^i\$^j \in {}^iS^j \quad \text{y} \quad {}^j\$^k \in {}^jS^k \quad (7.2)$$

pues, aprovechando las propiedades de las formas bilineales, se tiene que para cualquier

$$\$ \in [{}^iS^j, {}^jS^k] \quad \text{donde} \quad \dim [{}^iS^j] = m \quad \text{y} \quad \dim [{}^jS^k] = n$$

se tiene que

$$\$ = \lambda_{i1} {}^{i1}\$^j + \dots + \lambda_{im} {}^{im}\$^j + \lambda_{j1} {}^{i\$^j} + \dots + \lambda_{jn} {}^{i\$^jn}$$

donde  ${}^{ir}\$^j \in {}^iS^j \forall ir, r = 1, 2, \dots, m$  y  ${}^{js}\$^k \in {}^jS^k \forall js, s = 1, 2, \dots, n$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} Kl(\$, \$) &= Kl(\$, \sum_{r=1}^{r=m} \lambda_{ir} {}^{ir}\$^j + \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_{js} {}^{js}\$^k) \\ &= \sum_{r=1}^{r=m} \lambda_{ir} Kl(\$, {}^{ir}\$^j) + \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_{js} Kl(\$, {}^{js}\$^k) \\ &= \sum_{r=1}^{r=m} \lambda_{ir} 0 + \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_{js} 0 = 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

De manera semejante, se tiene que

$$\begin{aligned} Ki(\$, \$) &= Ki(\$, \sum_{r=1}^{r=m} \lambda_{ir} {}^{ir}\$^j + \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_{js} {}^{js}\$^k) \\ &= \sum_{r=1}^{r=m} \lambda_{ir} Ki(\$, {}^{ir}\$^j) + \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_{js} Ki(\$, {}^{js}\$^k) \\ &= \sum_{r=1}^{r=m} \lambda_{ir} 0 + \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_{js} 0 = 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

La conclusión es que los aniquiladores ortogonales del subespacio generado por  $\{{}^iS^j, {}^jS^k\}$  aniquilan también al tornillo  ${}^i\$^k$  asociado al eje instantáneo del tornillo del movimiento relativo entre los eslabones  $i$  y  $k$ . Este es el fundamento del teorema de Aronhold-Kennedy aplicable a cualquier tipo de mecanismo.

## 7.2. Determinación de los ISA secundarios de un mecanismo espacial RCCC.

Considere el mecanismo espacial *RCCC* mostrado en la Figura 7.1, donde el par cinemático entre los eslabones uno y dos es un par de revoluta, mientras que el resto de los eslabones están conectados entre si mediante pares cilíndricos.

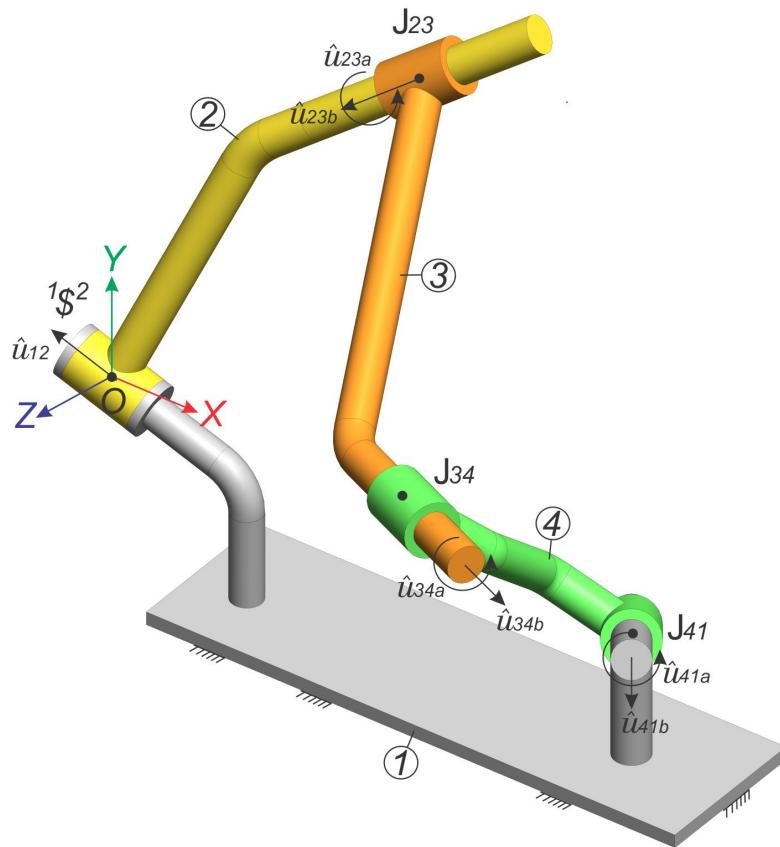
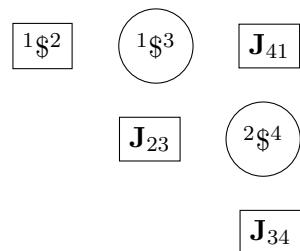


Figura 7.1: Mecanismo espacial RCCC

La Tabla 7.1 muestra los tornillos infinitesimales o matrices Jacobianas asociados a los pares cinemáticos del mecanismo espacial RCCC. La Tabla muestra los tornillos o matrices Jacobianas asociados a los pares primarios dentro de un rectángulo para indicar que estos resultados se obtienen de la geometría del mecanismo. Por otro lado, los ejes instantáneos secundarios, que se obtienen mediante la aplicación del teorema de Aronhold-Kennedy se encierran en un círculo.

Tabla 7.1: Ejes instantáneos de tornillos o matrices Jacobianas asociadas al mecanismo espacial RCCC



Los vectores unitarios asociados a los ejes de la revoluta y de los pares cilíndricos están dados por

$$\hat{u}_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{30} \end{bmatrix} \quad \hat{u}_{23a} = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{29}}{29} \\ \frac{3\sqrt{29}}{29} \\ -\frac{2\sqrt{29}}{29} \end{bmatrix} \quad \hat{u}_{23b} = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{29}}{29} \\ \frac{3\sqrt{29}}{29} \\ -\frac{2\sqrt{29}}{29} \end{bmatrix} \quad \hat{u}_{34a} = \begin{bmatrix} \frac{12\sqrt{161}}{161} \\ \frac{\sqrt{161}}{161} \\ \frac{4\sqrt{161}}{161} \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}_{34b} = \begin{bmatrix} \frac{12\sqrt{161}}{161} \\ \frac{\sqrt{161}}{161} \\ \frac{4\sqrt{161}}{161} \end{bmatrix} \quad \hat{u}_{41a} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{\sqrt{22}}{11} \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} \end{bmatrix} \quad \hat{u}_{41b} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{\sqrt{22}}{11} \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} \end{bmatrix}$$

De manera semejante, los vectores de posición localizados a lo largo de los ejes de la revoluta y de los pares cilíndricos, con respecto al origen  $O$ , están dados por

$$\vec{r}_{2/1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{3/2} = \begin{bmatrix} 246 \\ 388 \\ -176 \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{4/3} = \begin{bmatrix} 580 \\ 224 \\ 175 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_{4/1} = \begin{bmatrix} 671 \\ 27 \\ -28 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los tornillos infinitesimales asociados a cada uno de los pares cinemáticos del mecanismo RCCC están dados por<sup>1</sup>

$${}^1\$^2_O = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{30} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\$^3_O = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{29}}{29} \\ \frac{3\sqrt{29}}{29} \\ -\frac{2\sqrt{29}}{29} \\ -\frac{248\sqrt{29}}{29} \\ -\frac{212\sqrt{29}}{29} \\ -\frac{814\sqrt{29}}{29} \end{bmatrix} \quad {}^2\$^3b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4\sqrt{29}}{29} \\ \frac{3\sqrt{29}}{29} \\ -\frac{2\sqrt{29}}{29} \end{bmatrix} \quad {}^3\$^4_O = \begin{bmatrix} \frac{12\sqrt{161}}{161} \\ \frac{\sqrt{161}}{161} \\ \frac{4\sqrt{161}}{161} \\ \frac{103\sqrt{161}}{23} \\ -\frac{220\sqrt{161}}{161} \\ -\frac{2108\sqrt{161}}{161} \end{bmatrix}$$

y

$${}^3\$^4_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{12\sqrt{161}}{161} \\ \frac{\sqrt{161}}{161} \\ \frac{4\sqrt{161}}{161} \end{bmatrix} \quad {}^4\$^1_O = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{\sqrt{22}}{11} \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{137\sqrt{22}}{22} \\ -\frac{2097\sqrt{22}}{22} \\ \frac{1261\sqrt{22}}{22} \end{bmatrix} \quad {}^4\$^1b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{\sqrt{22}}{11} \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} \end{bmatrix}$$

Cuando del contexto sea evidente el origen  $O$ , del sistema coordenado podrá eliminarse de los tornillos.

Las matrices Jacobianas asociadas a los pares cinemáticos cilíndricos entre los eslabones dos y tres, tres y cuatro y, finalmente, cuatro y uno están dadas por:

$$\mathbf{J}_{23} = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{29}}{29} & 0 \\ \frac{3\sqrt{29}}{29} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{29}}{29} & 0 \\ -\frac{248\sqrt{29}}{29} & \frac{4\sqrt{29}}{29} \\ -\frac{212\sqrt{29}}{29} & \frac{3\sqrt{29}}{29} \\ -\frac{814\sqrt{29}}{29} & -\frac{2\sqrt{29}}{29} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{34} = \begin{bmatrix} \frac{12\sqrt{161}}{161} & 0 \\ \frac{\sqrt{161}}{161} & 0 \\ \frac{4\sqrt{161}}{161} & 0 \\ \frac{103\sqrt{161}}{23} & \frac{12\sqrt{161}}{161} \\ -\frac{220\sqrt{161}}{161} & \frac{\sqrt{161}}{161} \\ -\frac{2108\sqrt{161}}{161} & \frac{4\sqrt{161}}{161} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{41} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{22}}{22} & 0 \\ \frac{\sqrt{22}}{11} & 0 \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} & 0 \\ \frac{137\sqrt{22}}{22} & \frac{3\sqrt{22}}{22} \\ -\frac{2097\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{22}}{11} \\ \frac{1261\sqrt{22}}{22} & \frac{3\sqrt{22}}{22} \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup>Debe notarse que cada par cilíndrico tiene dos tornillos infinitesimales asociados al par, un par de revoluta y un par prismático.

El objetivo de este análisis es determinar los tornillos infinitesimales asociados a los movimientos relativos del eslabón tres respecto del eslabón uno y del eslabón cuatro respecto del eslabón dos. Estos tornillos son completamente desconocidos de manera que sus direcciones, los vectores de posición de un punto a lo largo del eje de los tornillos se supondrán completamente generales. Por lo tanto

$${}^1\$^3_O = \begin{bmatrix} u_{13x} \\ u_{13y} \\ u_{13z} \\ {}_1h_3 u_{13x} + r_{13y} u_{13z} - r_{13z} u_{13y} \\ {}_1h_3 u_{13y} - r_{13x} u_{13z} + r_{13z} u_{13x} \\ {}_1h_3 u_{13z} + r_{13x} u_{13y} - r_{13y} u_{13x} \end{bmatrix} \quad {}^2\$^4_O = \begin{bmatrix} u_{24x} \\ u_{24y} \\ u_{24z} \\ {}_2h_4 u_{24x} + r_{24y} u_{24z} - r_{24z} u_{24y} \\ {}_2h_4 u_{24y} - r_{24x} u_{24z} + r_{24z} u_{24x} \\ {}_2h_4 u_{24z} + r_{24x} u_{24y} - r_{24y} u_{24x} \end{bmatrix}$$

Debe notarse que los tornillos infinitesimales  ${}^1\$^3_O$  y  ${}^2\$^4_O$  están sujetos, cada uno de ellos, a otras dos condiciones adicionales:

1. La magnitud unitaria de los vectores asociados a la dirección del tornillo

$$\hat{u}_{13} \cdot \hat{u}_{13} = 1 \quad u_{13x}^2 + u_{13y}^2 + u_{13z}^2 = 1 \quad (7.5)$$

$$\hat{u}_{24} \cdot \hat{u}_{24} = 1 \quad u_{24x}^2 + u_{24y}^2 + u_{24z}^2 = 1 \quad (7.6)$$

2. La perpendicularidad entre el vector de posición de un punto a lo largo del eje del tornillo y el vector asociado a la dirección del tornillo

$$\hat{u}_{13} \cdot \hat{r}_{13} = 0 \quad u_{13x} r_{13x} + u_{13y} r_{13y} + u_{13z} r_{13z} = 0 \quad (7.7)$$

$$\hat{u}_{24} \cdot \hat{r}_{24} = 0 \quad u_{24x} r_{24x} + u_{24y} r_{24y} + u_{24z} r_{24z} = 0 \quad (7.8)$$

### 7.2.1. Determinación del eje instantáneo del tornillo ${}^1\$^3_O$

En esta sección, se mostrará como determinar el ISA asociado al movimiento relativo del eslabón tres respecto del eslabón uno. Aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy, el ISA puede determinarse empleando como eslabones intermedios los eslabones dos y cuatro, de esa manera se obtienen los siguientes resultados.

$$\textcircled{{}^1\$^3} \implies \boxed{{}^1\$^2} \boxed{\mathbf{J}_{23}} \quad {}_1\omega_3 {}^1\$^3_O = {}_1\omega_2 {}^1\$^2_O + {}_2\omega_{3a} {}^2\$^{3a}_O + {}_2\omega_{3b} {}^2\$^{3b}_O$$

$$\textcircled{{}^1\$^3} \implies \boxed{\mathbf{J}_{41}} \boxed{\mathbf{J}_{34}} \quad {}_1\omega_3 {}^1\$^3_O = {}_4\omega_{1a} {}^4\$^{1a}_O + {}_4\omega_{1b} {}^4\$^{1b}_O + {}_3\omega_{4a} {}^3\$^{4a}_O + {}_3\omega_{4b} {}^3\$^{4b}_O$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl({}^2\$^2_{as,Kl}, {}^1\$^3_O) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3 \quad (7.9)$$

y

$$Kl({}^4\$^4_{as,Kl}, {}^1\$^3_O) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2 \quad (7.10)$$

donde  $\{\$^2_{a1,Kl}, \$^2_{a2,Kl}, \$^2_{a3,Kl}\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[1\$^2, 2\$^{3a}, 2\$^{3b}]$  y  $\{\$^4_{a1,Kl}, \$^4_{a2,Kl}\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[4\$^{1a}, 4\$^{1b}, 3\$^{4a}, 3\$^{4b}]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

Las ecuaciones vectoriales, note que cada una de las componentes del vector se iguala a cero, son

$$Ec13_2 = \begin{bmatrix} \frac{1876}{23} u_{13x} + \frac{4690}{23} u_{13y} + \frac{1}{2} {}_1 h_3 u_{13x} + \frac{1}{2} r_{13y} u_{13z} - \frac{1}{2} r_{13z} u_{13y} + {}_1 h_3 u_{13z} + r_{13x} u_{13y} - r_{13y} u_{13x} \\ \frac{52}{23} u_{13x} + \frac{130}{23} u_{13y} - \frac{3}{4} {}_1 h_3 u_{13x} - \frac{3}{4} r_{13y} u_{13z} + \frac{3}{4} r_{13z} u_{13y} + {}_1 h_3 u_{13y} - r_{13x} u_{13z} + r_{13z} u_{13x} \\ \frac{7}{23} u_{13x} + \frac{6}{23} u_{13y} + u_{13z} \end{bmatrix}$$

donde los dos primeros números indican el eje instantáneo que se desea obtener y el subíndice indica el eslabón intermedio que se emplea para determinarlo. De manera semejante

$$Ec13_4 = \begin{bmatrix} \frac{53770}{147} u_{13x} - \frac{347089}{147} u_{13y} - \frac{5}{21} {}_1 h_3 u_{13x} - \frac{5}{21} r_{13y} u_{13z} + \frac{5}{21} r_{13z} u_{13y} \\ -\frac{8}{7} {}_1 h_3 u_{13y} + \frac{8}{7} r_{13x} u_{13z} - \frac{8}{7} r_{13z} u_{13x} + {}_1 h_3 u_{13z} + r_{13x} u_{13y} - r_{13y} u_{13x} \\ -\frac{5}{21} u_{13x} - \frac{8}{7} u_{13y} + u_{13z} \end{bmatrix}$$

En esta última ecuación vectorial, la primera ecuación escalar ocupa las dos primeras líneas. En resumen, las ecuaciones escalares necesarias para la determinación del tornillo  ${}^1\$^3$  son:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1876}{23} u_{13x} + \frac{4690}{23} u_{13y} + \frac{1}{2} {}_1 h_3 u_{13x} + \frac{1}{2} r_{13y} u_{13z} - \frac{1}{2} r_{13z} u_{13y} + {}_1 h_3 u_{13z} + r_{13x} u_{13y} \\ &\quad - r_{13y} u_{13x} \end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{52}{23} u_{13x} + \frac{130}{23} u_{13y} - \frac{3}{4} {}_1 h_3 u_{13x} - \frac{3}{4} r_{13y} u_{13z} + \frac{3}{4} r_{13z} u_{13y} + {}_1 h_3 u_{13y} - r_{13x} u_{13z} \\ &\quad + r_{13z} u_{13x} \end{aligned} \tag{7.12}$$

$$0 = \frac{7}{23} u_{13x} + \frac{6}{23} u_{13y} + u_{13z} \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{53770}{147} u_{13x} - \frac{347089}{147} u_{13y} - \frac{5}{21} {}_1 h_3 u_{13x} - \frac{5}{21} r_{13y} u_{13z} + \frac{5}{21} r_{13z} u_{13y} - \frac{8}{7} {}_1 h_3 u_{13y} \\ &\quad + \frac{8}{7} r_{13x} u_{13z} - \frac{8}{7} r_{13z} u_{13x} + {}_1 h_3 u_{13z} + r_{13x} u_{13y} - r_{13y} u_{13x} \end{aligned} \tag{7.14}$$

$$0 = -\frac{5}{21} u_{13x} - \frac{8}{7} u_{13y} + u_{13z} \tag{7.15}$$

$$1 = u_{13x}^2 + u_{13y}^2 + u_{13z}^2 \tag{7.16}$$

$$0 = u_{13x} r_{13x} + u_{13y} r_{13y} + u_{13z} r_{13z} \tag{7.17}$$

De las ecuaciones (7.13) y (7.15) es posible resolver linealmente  $u_{13x}$  y  $u_{13y}$  en términos de  $u_{13z}$ , los resultados son

$$u_{13x} = -\frac{113}{23} u_{13z} \tag{7.18}$$

$$u_{13y} = -\frac{131}{69} u_{13z} \tag{7.19}$$

La sustitución de las ecuaciones (7.18) y (7.19) en la ecuación (7.16), conduce a una ecuación cuadrática en  $u_{13z}$ ; escogiendo arbitrariamente, y sin pérdida de generalidad, el signo positivo para  $u_{13z}$ , se tiene que

$$u_{13x} = -\frac{3\sqrt{136843}}{1211} \quad u_{13y} = \frac{131\sqrt{136843}}{136843} \quad u_{13z} = \frac{69\sqrt{136843}}{136843} \tag{7.20}$$

La sustitución de los resultados proporcionados por la ecuación (7.20) en las ecuaciones (7.11), (7.12), (7.14), (7.17), conducen a un sistema lineal de cuatro ecuaciones en cuatro incógnitas— $r_{13x}, r_{13y}, r_{13z}, {}_1h_3$ —que en forma matricial, está dado por

$$\begin{bmatrix} \frac{131\sqrt{136843}}{136843} & \frac{747\sqrt{136843}}{273686} & -\frac{131\sqrt{136843}}{273686} & -\frac{201\sqrt{136843}}{273686} \\ -\frac{69\sqrt{136843}}{136843} & -\frac{207\sqrt{136843}}{547372} & -\frac{963\sqrt{136843}}{547372} & \frac{1541\sqrt{136843}}{547372} \\ \frac{13\sqrt{136843}}{8477} & \frac{2258\sqrt{136843}}{957901} & \frac{8791\sqrt{136843}}{2873703} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{136843}}{1211} & \frac{131\sqrt{136843}}{136843} & \frac{69\sqrt{136843}}{136843} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{13x} \\ r_{13y} \\ r_{13z} \\ {}_1h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{134\sqrt{136843}}{19549} \\ \frac{26\sqrt{136843}}{136843} \\ \frac{9099527\sqrt{136843}}{2873703} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Los resultados de este sistema de ecuaciones son

$$r_{13x} = \frac{63805339}{273686} \quad r_{13y} = \frac{27559341}{136843} \quad r_{13z} = \frac{208832791}{273686} \quad {}_1h_3 = \frac{10006707905}{18336962} \quad (7.22)$$

Por lo tanto, un vector unitario en la dirección del tornillo y el vector de posición de un punto a lo largo del eje del tornillo con respecto al origen  $O$ , están dados por

$$\hat{u}_{13} = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{136843}}{1211} \\ \frac{131\sqrt{136843}}{136843} \\ \frac{69\sqrt{136843}}{136843} \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{13} = \begin{bmatrix} \frac{63805339}{273686} \\ \frac{27559341}{136843} \\ \frac{208832791}{273686} \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

Finalmente, los valores exactos del tornillo  ${}^1\$^3_O$  y su aproximación decimal están dados por

$${}^1\$^3_O = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{136843}}{1211} \\ \frac{131\sqrt{136843}}{136843} \\ \frac{69\sqrt{136843}}{136843} \\ -\frac{18160906\sqrt{136843}}{9168481} \\ -\frac{3891125\sqrt{136843}}{2619566} \\ \frac{9143299\sqrt{136843}}{9168481} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9164070150 \\ 0.3541277845 \\ 0.1865253216 \\ -732.7425553 \\ -549.4866315 \\ 368.9069407 \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

### 7.2.2. Determinación del eje instantáneo del tornillo ${}^2\$^4_O$

En esta sección, se mostrará como determinar el ISA asociado al movimiento relativo del eslabón cuatro respecto del eslabón dos. Aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy el ISA puede determinarse empleando como eslabones intermedios los eslabones uno y tres, de manera semejante a la determinación del ISA correspondiente al movimiento relativo del eslabón cuatro respecto del eslabón dos, se obtienen los siguientes resultados.

$$\textcircled{2\$^4} \implies [\mathbf{J}_{23}] \quad [\mathbf{J}_{34}] \quad 2\omega_4 {}^2\$^4_O = 2\omega_{3a} {}^2\$^{3a}_O + 2\omega_{3b} {}^2\$^{3b}_O + 3\omega_{4a} {}^3\$^{4a}_O + 3\omega_{4b} {}^3\$^{4b}_O$$

$$\textcircled{2\$^4} \implies [{}^1\$^2] \quad [\mathbf{J}_{41}] \quad 2\omega_4 {}^2\$^4_O = {}^1\omega_2 {}^1\$^2_O + {}^4\omega_{1a} {}^4\$^{1a}_O + {}^4\omega_{1b} {}^4\$^{1b}_O$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl(\$_{as,Kl}^3, {}^2\$_O^4) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2 \quad (7.25)$$

y

$$Kl(\$_{as,Kl}^1, {}^2\$_O^4) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3 \quad (7.26)$$

donde  $\{\$_{a1,Kl}^3, \$_{a2,Kl}^3\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^2\$^{3a}, {}^2\$^{3b}, {}^3\$^{4a}, {}^3\$^{4b}]$  y  $\{\$_{a1,Kl}^1, \$_{a2,Kl}^1, \$_{a3,Kl}^1\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^1\$^2, {}^4\$^{1a}, {}^4\$^{1b}]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

Las ecuaciones vectoriales, note que cada una de las componentes del vector se iguala a cero, son

$$Ec24_1 = \begin{bmatrix} -\frac{281}{2} u_{24x} - \frac{1405}{4} u_{24y} - 2h_4 u_{24x} + 2h_4 u_{24z} + r_{24x} u_{24y} - r_{24y} u_{24x} - r_{24y} u_{24z} + r_{24z} u_{24y} \\ \frac{6565}{24} u_{24x} + \frac{32825}{48} u_{24y} - \frac{2}{3} 2h_4 u_{24x} - \frac{2}{3} r_{24y} u_{24z} + \frac{2}{3} r_{24z} u_{24y} + 2h_4 u_{24y} - r_{24x} u_{24z} + r_{24z} u_{24x} \\ -\frac{1}{4} u_{24x} - \frac{9}{8} u_{24y} + u_{24z} \end{bmatrix}$$

donde los dos primeros números indican el centro instantáneo que se desea obtener y el subíndice indica el eslabón intermedio que se emplea para determinarlo. De manera semejante

$$Ec24_3 = \begin{bmatrix} \frac{113997}{512} u_{24x} + \frac{3409}{128} u_{24y} - \frac{7}{16} 2h_4 u_{24x} - \frac{7}{16} r_{24y} u_{24z} + \frac{7}{16} r_{24z} u_{24y} + \frac{5}{4} 2h_4 u_{24y} \\ -\frac{5}{4} r_{24x} u_{24z} + \frac{5}{4} r_{24z} u_{24x} + 2h_4 u_{24z} + r_{24x} u_{24y} - r_{24y} u_{24x} \\ -\frac{7}{16} u_{24x} + \frac{5}{4} u_{24y} + u_{24z} \end{bmatrix}$$

En esta última ecuación vectorial, la primera ecuación escalar ocupa las dos primeras líneas. En resumen, las ecuaciones escalares necesarias para la determinación del tornillo  ${}^2\$_O^4$  son:

$$0 = -\frac{281}{2} u_{24x} - \frac{1405}{4} u_{24y} - 2h_4 u_{24x} + 2h_4 u_{24z} + r_{24x} u_{24y} - r_{24y} u_{24x} - r_{24y} u_{24z} + r_{24z} u_{24y} \quad (7.27)$$

$$0 = \frac{6565}{24} u_{24x} + \frac{32825}{48} u_{24y} - \frac{2}{3} 2h_4 u_{24x} - \frac{2}{3} r_{24y} u_{24z} + \frac{2}{3} r_{24z} u_{24y} + 2h_4 u_{24y} - r_{24x} u_{24z} + r_{24z} u_{24x} \quad (7.28)$$

$$0 = -\frac{1}{4} u_{24x} - \frac{9}{8} u_{24y} + u_{24z} \quad (7.29)$$

$$0 = \frac{113997}{512} u_{24x} + \frac{3409}{128} u_{24y} - \frac{7}{16} 2h_4 u_{24x} - \frac{7}{16} r_{24y} u_{24z} + \frac{7}{16} r_{24z} u_{24y} + \frac{5}{4} 2h_4 u_{24y} - \frac{5}{4} r_{24x} u_{24z} + \frac{5}{4} r_{24z} u_{24x} + 2h_4 u_{24z} + r_{24x} u_{24y} - r_{24y} u_{24x} \quad (7.30)$$

$$0 = \frac{7}{16} u_{24x} + \frac{5}{4} u_{24y} + u_{24z} \quad (7.31)$$

$$1 = u_{24x}^2 + u_{24y}^2 + u_{24z}^2 \quad (7.32)$$

$$0 = u_{24x} r_{24x} + u_{24y} r_{24y} + u_{24z} r_{24z} \quad (7.33)$$

De las ecuaciones (7.29) y (7.31) es posible resolver linealmente  $u_{24x}$  y  $u_{24y}$  en términos de  $u_{24z}$ , los resultados son

$$u_{24x} = \frac{304}{103} u_{24z} \quad (7.34)$$

$$u_{24y} = \frac{24}{103} u_{24z} \quad (7.35)$$

La sustitución de las ecuaciones (7.34) y (7.35) en la ecuación (7.32), conduce a una ecuación cuadrática en  $u_{24z}$ ; escogiendo arbitrariamente, y sin pérdida de generalidad, el signo positivo para  $u_{24z}$ , se tiene que

$$u_{24x} = \frac{304\sqrt{103601}}{103601} \quad u_{24y} = \frac{24\sqrt{103601}}{103601} \quad u_{24z} = \frac{103\sqrt{103601}}{103601} \quad (7.36)$$

La sustitución de los resultados proporcionados por la ecuación (7.36) en las ecuaciones (7.27), (7.28), (7.31), (7.33), conducen a un sistema lineal de cuatro ecuaciones en cuatro incógnitas— $r_{24x}, r_{24y}, r_{24z}, {}_2h_4$ —que en forma matricial, está dado por

$$\begin{bmatrix} \frac{24\sqrt{103601}}{103601} & -\frac{407\sqrt{103601}}{103601} & \frac{24\sqrt{103601}}{103601} & -\frac{201\sqrt{103601}}{103601} \\ -\frac{103\sqrt{103601}}{103601} & -\frac{206\sqrt{103601}}{310803} & \frac{320\sqrt{103601}}{103601} & -\frac{536\sqrt{103601}}{310803} \\ -\frac{419\sqrt{103601}}{414404} & -\frac{5585\sqrt{103601}}{1657616} & \frac{781\sqrt{103601}}{207202} & 0 \\ \frac{304\sqrt{103601}}{103601} & \frac{24\sqrt{103601}}{103601} & \frac{103\sqrt{103601}}{103601} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{24x} \\ r_{24y} \\ r_{24z} \\ {}_2h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{51142\sqrt{103601}}{103601} \\ -\frac{597415\sqrt{103601}}{621606} \\ -\frac{2186397\sqrt{103601}}{3315232} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

Los resultados de este sistema de ecuaciones son

$$r_{24x} = \frac{22646413}{207202} \quad r_{24y} = -\frac{32532767}{207202} \quad r_{24z} = -\frac{29629724}{103601} \quad {}_2h_4 = \frac{588466215}{13882534} \quad (7.38)$$

Por lo tanto, un vector unitario en la dirección del tornillo y el vector de posición de un punto a lo largo del eje del tornillo con respecto al origen  $O$ , están dados por

$$\hat{u}_{24} = \begin{bmatrix} \frac{304\sqrt{103601}}{103601} \\ \frac{24\sqrt{103601}}{103601} \\ \frac{103\sqrt{103601}}{103601} \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{24} = \begin{bmatrix} \frac{22646413}{207202} \\ -\frac{32532767}{207202} \\ -\frac{29629724}{103601} \end{bmatrix} \quad (7.39)$$

Finalmente, los valores exactos del tornillo  ${}^2\$^4_O$  y su aproximación decimal están dados por

$${}^2\$^4_O = \begin{bmatrix} \frac{304\sqrt{103601}}{103601} \\ \frac{24\sqrt{103601}}{103601} \\ \frac{103\sqrt{103601}}{103601} \\ \frac{479477\sqrt{103601}}{13882534} \\ -\frac{13022617\sqrt{103601}}{13882534} \\ \frac{7332505\sqrt{103601}}{13882534} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9444774861 \\ 0.07456401206 \\ 0.3200038851 \\ 11.11683110 \\ -301.9336352 \\ 170.0065271 \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

Debe notarse que no fue necesario emplear la forma de Killing para la determinación de los tornillos instantáneos deseados. Los resultados obtenidos en estas secciones se corroboraron realizando el análisis de velocidad del mecanismo RCCC, usando Maple<sup>©</sup>, para una magnitud arbitraria del eslabón motriz, asociado al par cinemático  ${}^1\$^2_O$ , determinando los estados de velocidad del eslabón tres respecto del eslabón uno,  ${}^1\dot{V}^3$ , y del eslabón cuatro respecto del eslabón dos,  ${}^2\dot{V}^4$  y posteriormente determinando los tornillos instantáneos  ${}^1\$^3_O$  y  ${}^2\$^4_O$ .

Finalmente, los resultados también se corroboraron mediante el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>; los resultados de la simulación se muestran en las Figuras (7.2) - (7.6). Es importante reconocer que puesto

que la posición relativa de los eslabones cambia durante el tiempo de la simulación, los únicos resultados importantes son los iniciales; es decir aquellos que se obtienen para  $t = 0$ .

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^1\$O^2$ , debe recordarse que

$${}^1\vec{V}_O^2 = {}_1\omega_2 \begin{bmatrix} {}^1\hat{s}^2 \\ {}^1\vec{s}_O^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\vec{\omega}^2 \\ {}^1\vec{v}_O^2 \end{bmatrix} = {}_1\omega_2 {}^1\$O^2 = -10 \text{ rad/s}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{30} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5\sqrt{30}}{3} \\ \frac{2\sqrt{30}}{3} \\ \frac{\sqrt{30}}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.1287 \text{ rad/s} \\ 3.6514 \text{ rad/s} \\ 1.8257 \text{ rad/s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  ${}^1\$O^2$  se conoce de los datos del mecanismo.

La simulación realizada en Adams<sup>©</sup> obtiene que  ${}_1\omega_2 = -10 \text{ rad/s}$ , por lo tanto

$${}^1\vec{\omega}^2 = {}_1\omega_2 {}^1\hat{s}^2 = -10 \text{ rad/s}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{6} \text{ rad/s} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \text{ rad/s} \\ \frac{\sqrt{30}}{30} \text{ rad/s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5\sqrt{30}}{3} \text{ rad/s} \\ \frac{2\sqrt{30}}{3} \text{ rad/s} \\ \frac{\sqrt{30}}{3} \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

De aquí que,  ${}_1\omega_{2x} = -9.1287 \text{ rad/s}$ ,  ${}_1\omega_{2y} = 3.6514 \text{ rad/s}$  y  ${}_1\omega_{2z} = 1.8257 \text{ rad/s}$ , tal como se indica en la Figura 7.2 obtenida mediante el programa Adams<sup>©</sup>.

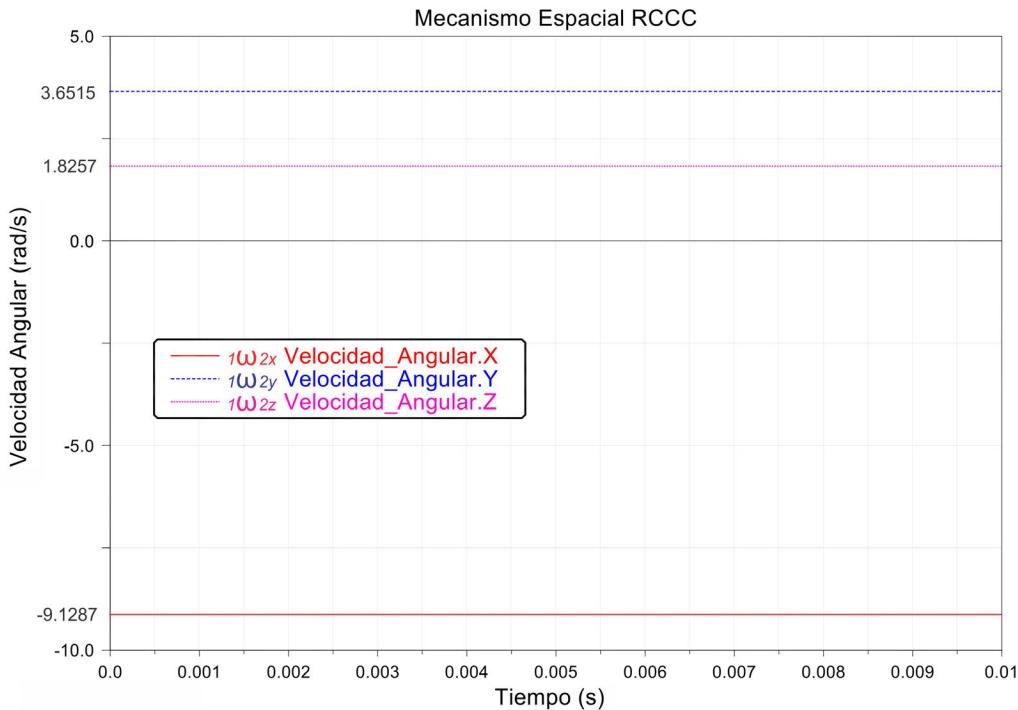


Figura 7.2: Velocidad angular del par de revoluta asociado a  ${}^1\$O^2$

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^1\$O^3$ , debe recordarse que

$${}^1\vec{V}_O^3 = {}_1\omega_3 \begin{bmatrix} {}^1\hat{s}^3 \\ {}^1\vec{s}_O^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\vec{\omega}^3 \\ {}^1\vec{v}_O^3 \end{bmatrix} = {}_1\omega_3 {}^1\$O^3 = 10.0803 \text{ rad/s}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{136843}}{1211} \\ \frac{131\sqrt{136843}}{136843} \\ \frac{69\sqrt{136843}}{136843} \\ -\frac{18160906\sqrt{136843}}{9168481} \\ -\frac{3891125\sqrt{136843}}{2619566} \\ \frac{9143299\sqrt{136843}}{9168481} \end{bmatrix}$$

$${}^1\vec{V}_O^3 = \begin{bmatrix} -\frac{113\sqrt{30}}{67} \text{ rad/s} \\ \frac{131\sqrt{30}}{201} \text{ rad/s} \\ \frac{23\sqrt{30}}{67} \text{ rad/s} \\ -\frac{18160906\sqrt{30}}{13467} \text{ u.l./s} \\ -\frac{27237875\sqrt{30}}{26934} \text{ u.l./s} \\ \frac{9143299\sqrt{30}}{13467} \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.2377 \text{ rad/s} \\ 3.5697 \text{ rad/s} \\ 1.8802 \text{ rad/s} \\ -7386.3056 \text{ u.l./s} \\ -5539.0207 \text{ u.l./s} \\ 3718.7132 \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

donde  ${}^1\$O^3$  se determinó mediante el programa Maple<sup>©</sup>.

La simulación realizada en Adams<sup>©</sup> obtiene que  ${}_1\omega_3 = 10.0803 \text{ rad/s}$ , por lo tanto

$${}^1\vec{\omega}^3 = {}_1\omega_3 {}^1\hat{s}^3 = 10.0803 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{136843}}{1211} \text{ rad/s} \\ \frac{131\sqrt{136843}}{136843} \text{ rad/s} \\ \frac{69\sqrt{136843}}{136843} \text{ rad/s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{113\sqrt{30}}{67} \text{ rad/s} \\ \frac{131\sqrt{30}}{201} \text{ rad/s} \\ \frac{23\sqrt{30}}{67} \text{ rad/s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9.2377 \text{ rad/s} \\ 3.5697 \text{ rad/s} \\ 1.8802 \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

De aquí que,  ${}_{1\omega_3x} = -9.2377 \text{ rad/s}$ ,  ${}_{1\omega_3y} = 3.5697 \text{ rad/s}$  y  ${}_{1\omega_3z} = 1.8802 \text{ rad/s}$ , tal como se indica en la Figura 7.3 obtenida mediante el programa Adams<sup>©</sup>.

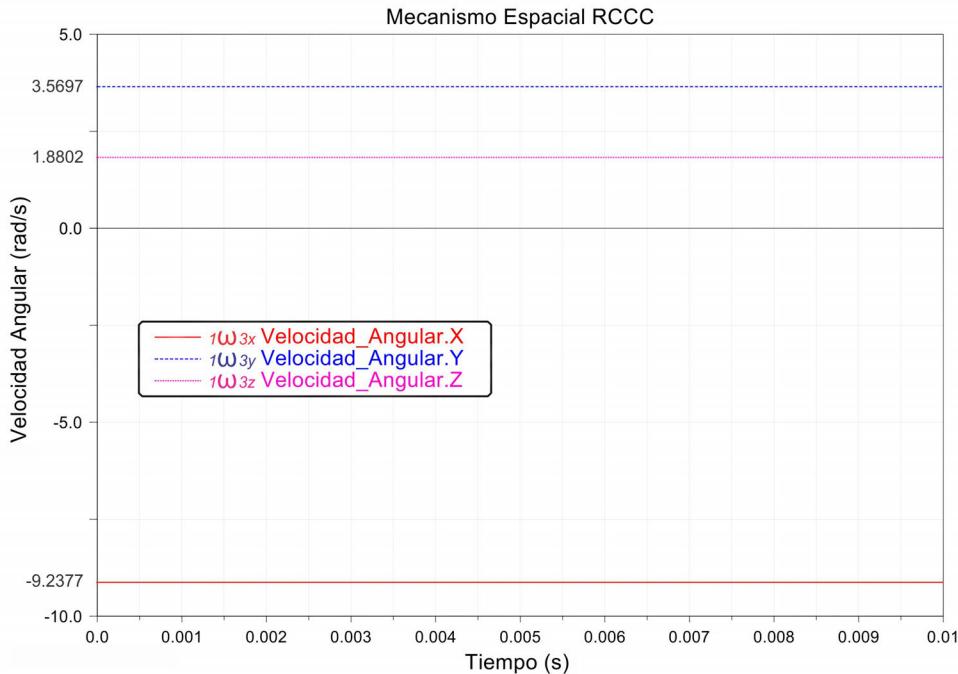


Figura 7.3: Velocidad angular del par esférico asociado a  $J_{23}$

Con el resultado de la velocidad angular  ${}_1\omega_3$  se tiene que

$${}^1\vec{v}_O^3 = {}_1\omega_3 {}^1\vec{s}_O^3 = 10.0803 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} -\frac{18160906\sqrt{30}}{13467} \\ -\frac{27237875\sqrt{30}}{26934} \\ \frac{9143299\sqrt{30}}{13467} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{18160906\sqrt{136843}}{9168481} \\ -\frac{3891125\sqrt{136843}}{2619566} \\ \frac{9143299\sqrt{136843}}{9168481} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7386.3057 \text{ u.l./s} \\ -5539.0207 \text{ u.l./s} \\ 3718.7132 \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

Consecuentemente,  ${}_1v_{3x} = -7386.3057 \text{ u.l./s}$ ,  ${}_1v_{3y} = -5539.0207 \text{ u.l./s}$  y  ${}_1v_{3z} = 3718.7132 \text{ u.l./s}$ . Estos resultados se verifican en la simulación para el tiempo  $t = 0 \text{ s}$ , vea la Figura 7.4.

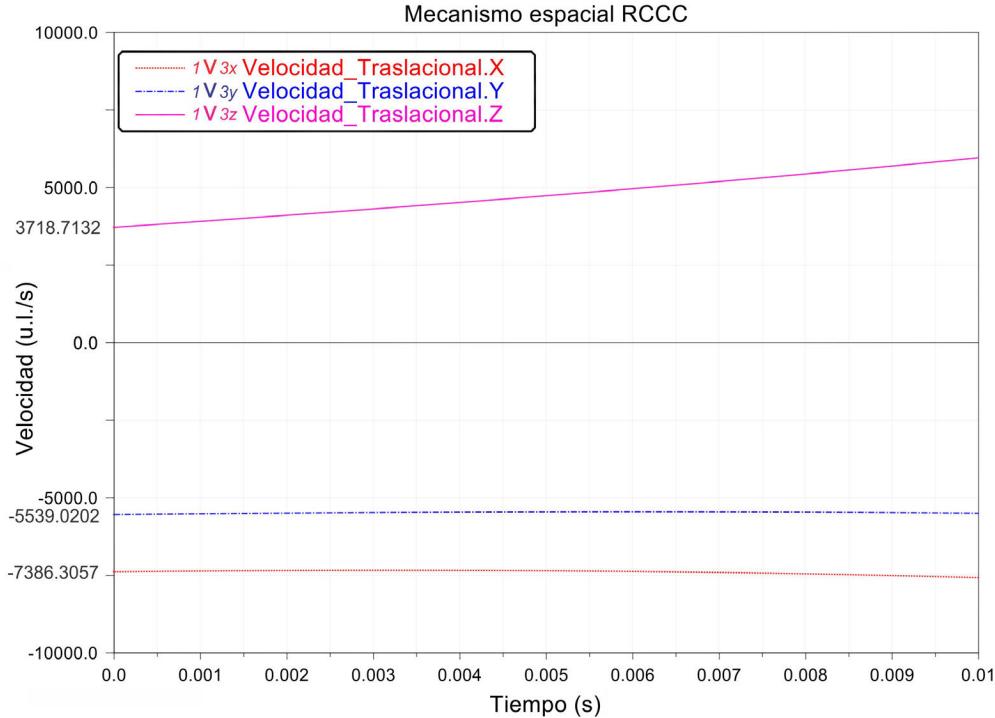


Figura 7.4: Velocidad translacional del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón tres.

Para verificar los resultados correspondientes al ISA  ${}^2\$^4$ , debe recordarse que

$${}^2\vec{V}_O^4 = {}^2\omega_4 \begin{bmatrix} {}^2\hat{s}^4 \\ {}^2\vec{s}_O^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2\vec{\omega}^4 \\ {}^2\vec{v}_O^4 \end{bmatrix} = {}^2\omega_4 {}^2\$^4_O = 17.5418 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} \frac{304\sqrt{103601}}{103601} \\ \frac{24\sqrt{103601}}{103601} \\ \frac{103\sqrt{103601}}{103601} \\ \frac{479477\sqrt{103601}}{13882534} \\ \frac{13022617\sqrt{103601}}{13882534} \\ \frac{7332505\sqrt{103601}}{13882534} \end{bmatrix}$$

$${}^2\vec{V}_O^4 = \begin{bmatrix} \frac{608\sqrt{30}}{201} \text{ rad/s} \\ \frac{16\sqrt{30}}{67} \text{ rad/s} \\ \frac{206\sqrt{30}}{201} \text{ rad/s} \\ \frac{479477\sqrt{30}}{13467} \text{ u.l./s} \\ \frac{13022617\sqrt{30}}{13467} \text{ u.l./s} \\ \frac{7332505\sqrt{30}}{13467} \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.5679 \text{ rad/s} \\ 1.3079 \text{ rad/s} \\ 5.6134 \text{ rad/s} \\ 195.0102 \text{ u.l./s} \\ -5296.4885 \text{ u.l./s} \\ 2982.2368 \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

donde  ${}^2\vec{s}_O^4$  se determinó mediante el programa Maple<sup>©</sup>.

La simulación realizada en Adams<sup>©</sup> obtiene que  ${}_2\omega_4 = 17.5418 \text{ rad/s}$ , por lo tanto

$${}^2\vec{\omega}^4 = {}_2\omega_4 {}^2\hat{s}^4 = 17.5418 \begin{bmatrix} \frac{304\sqrt{103601}}{103601} \\ \frac{24\sqrt{103601}}{103601} \\ \frac{103\sqrt{103601}}{103601} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{608\sqrt{30}}{201} \text{ rad/s} \\ \frac{16\sqrt{30}}{67} \text{ rad/s} \\ \frac{206\sqrt{30}}{201} \text{ rad/s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.5679 \text{ rad/s} \\ 1.3079 \text{ rad/s} \\ 5.6134 \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

De aquí que,  ${}_2\omega_{4x} = 16.5679 \text{ rad/s}$ ,  ${}_2\omega_{4y} = 1.3079 \text{ rad/s}$  y  ${}_2\omega_{4z} = 5.6134 \text{ rad/s}$ , tal como se indica en la Figura 7.5 obtenida mediante el programa Adams<sup>©</sup>.

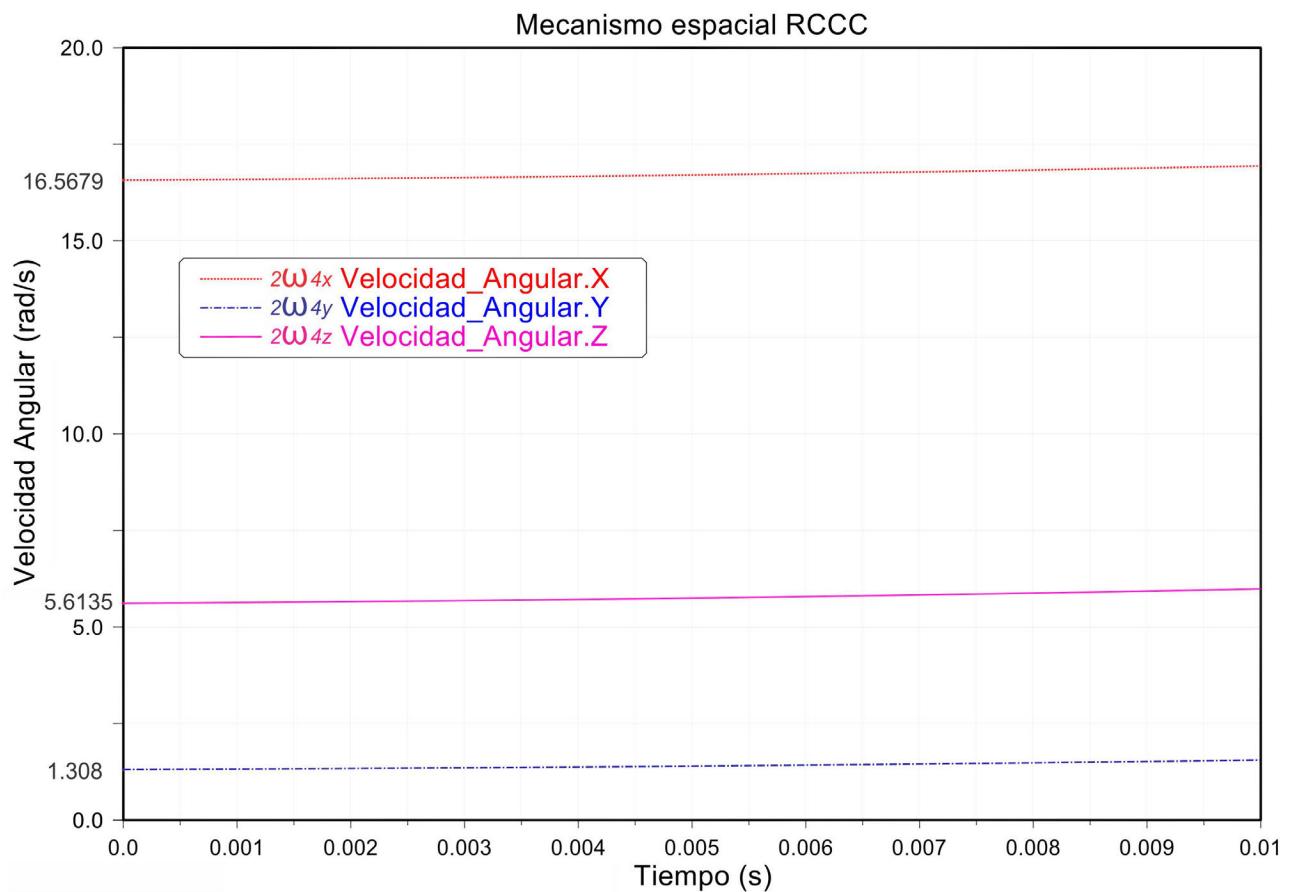


Figura 7.5: Velocidad angular relativa del eslabón 4 respecto del eslabón dos.

Con el resultado de la velocidad angular  ${}_2\omega_4$  se tiene que

$${}^2\vec{v}_O^4 = {}_2\omega_4 {}^2\vec{s}_O^4 = 17.5418 \text{ rad/s} \begin{bmatrix} \frac{479477\sqrt{103601}}{13882534} \\ -\frac{13022617\sqrt{103601}}{13882534} \\ \frac{7332505\sqrt{103601}}{13882534} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{479477\sqrt{30}}{13467} \text{ u.l./s} \\ -\frac{13022617\sqrt{30}}{13467} \text{ u.l./s} \\ \frac{7332505\sqrt{30}}{13467} \text{ u.l./s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 195.0102 \text{ u.l./s} \\ -5296.4885 \text{ u.l./s} \\ 2982.2368 \text{ u.l./s} \end{bmatrix}$$

Consecuentemente,  ${}^2v_{4x} = 195.0102 \text{ u.l./s}$ ,  ${}^2v_{4y} = -5296.4885 \text{ u.l./s}$  y  ${}^2v_{4z} = 2982.2368 \text{ u.l./s}$ . Estos resultados se verifican en la simulación para el tiempo  $t = 0 \text{ s}$ , vea la Figura 7.6<sup>2</sup>

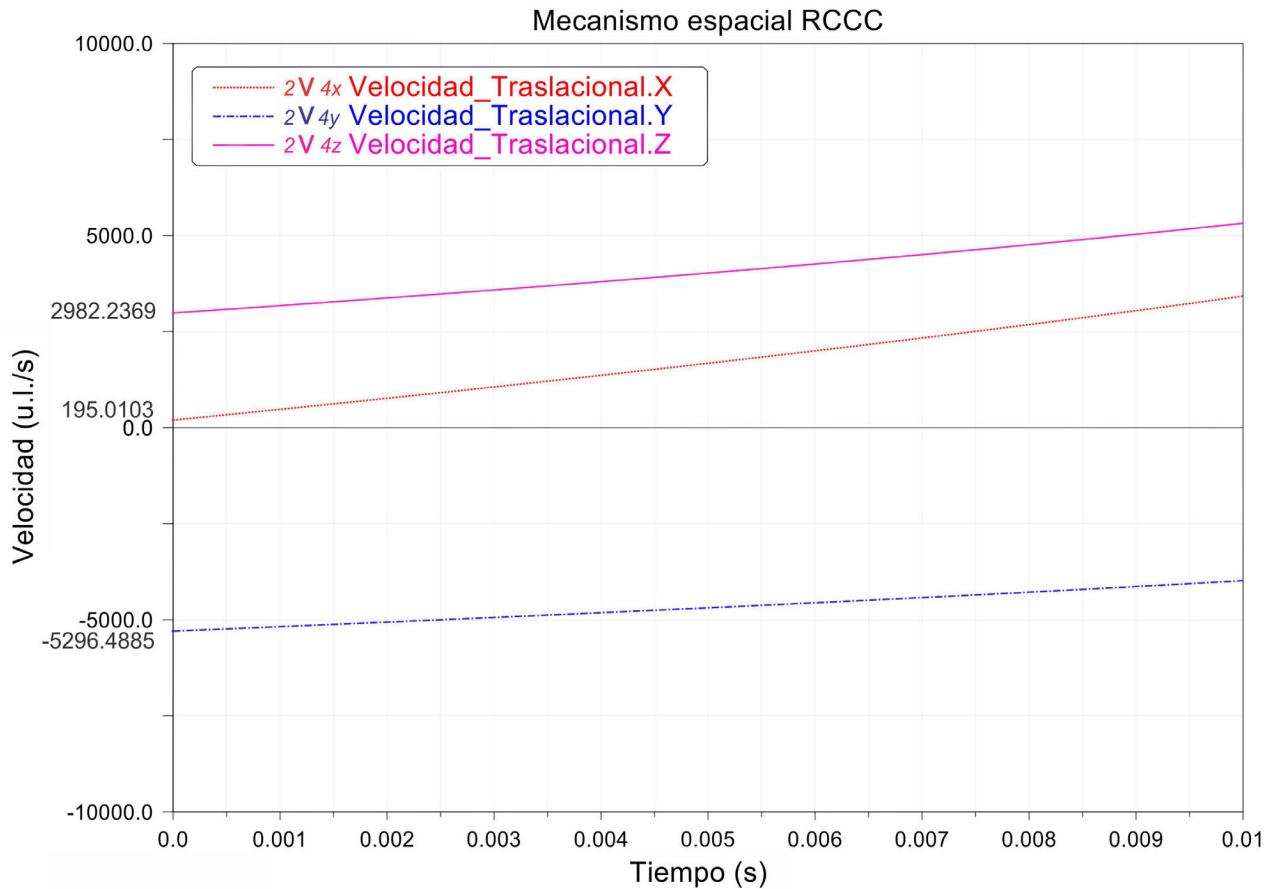


Figura 7.6: Velocidad traslacional del punto  $O_4$  respecto del punto  $O_2$ .

### 7.3. Determinación de los ISA secundarios de un mecanismo espacial RSUR.

Considere el mecanismo espacial *RSUR* mostrado en la Figura 7.7, los pares cinemáticos entre los eslabones uno y dos, por un lado y uno y cuatro, por el otro son pares de revoluta. El par cinemático entre los eslabones dos y tres es un par esférico y, finalmente, el par cinemático entre los eslabones tres y cuatro es una unión de Hooke.

Puesto que es un mecanismo trivial, la movilidad del mecanismo está dada por

$$F = \sum_{i=1}^4 f_i - \dim se(3) = (1 + 3 + 2 + 1) - 6 = 1$$

<sup>2</sup>El título correcto de la Figura 7.6 debe ser velocidad traslacional del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón 4 respecto a un sistema de referencia sujeto a traslación con la velocidad del punto  $O$  rígidamente unido al eslabón 2; sin embargo por razones de espacio, se usa el título mostrado

y el mecanismo tiene un grado de libertad.

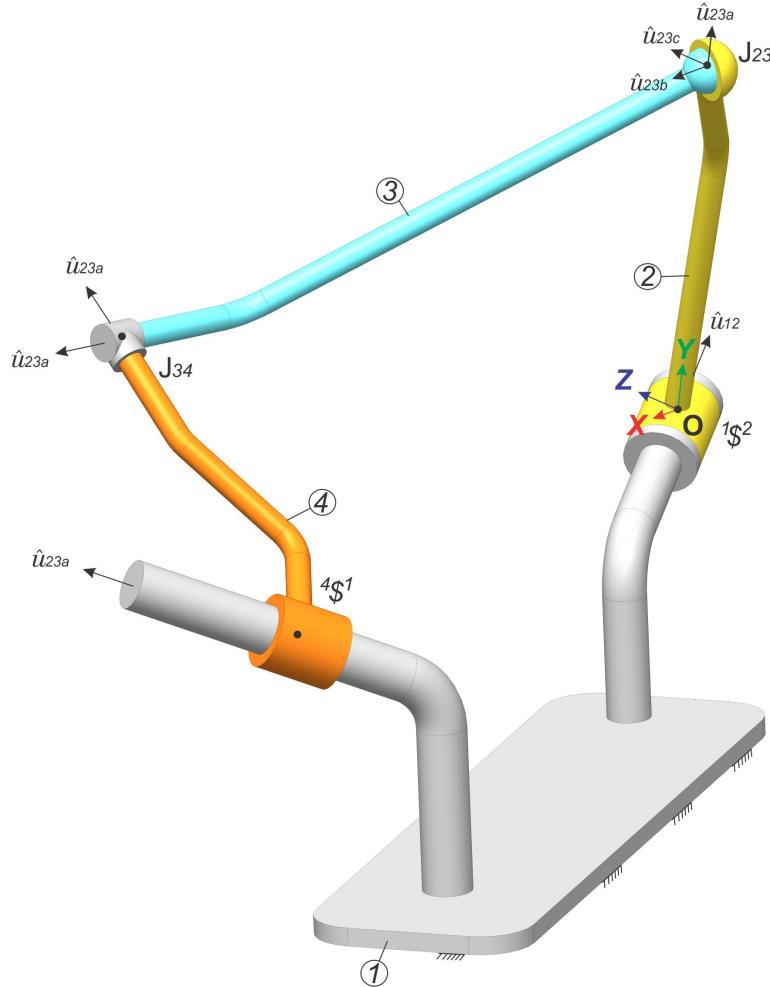


Figura 7.7: Mecanismo espacial RSUR

La Tabla 7.2 muestra los tornillos infinitesimales o matrices Jacobianas asociados a los pares cinemáticos del mecanismo espacial RSUR. La Tabla muestra los tornillos o matrices Jacobianas asociados a los pares primarios dentro de un rectángulo para indicar que estos resultados se obtienen de la geometría del mecanismo. Por otro lado, los ejes instantáneos secundarios, que se obtienen mediante la aplicación del teorema de Aronhold-Kennedy se encierran en un círculo

Tabla 7.2: Ejes instantáneos de tornillos o matrices Jacobianas asociadas al mecanismo espacial RSUR

$1\$^2$	$1\$^3$	$4\$^1$	
$\mathbf{J}_{23}$	$2\$^4$		
$\mathbf{J}_{34}$			

. Los vectores unitarios asociados a los ejes de la revoluta y de los pares esférico y unión de Hooke están dados por

$$\hat{u}_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{30} \end{bmatrix} \quad \hat{u}_{23a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{u}_{23b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{u}_{23c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{u}_{34a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}_{34b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \hat{u}_{41} = \begin{bmatrix} 3 \frac{\sqrt{22}}{22} \\ 1 \frac{\sqrt{22}}{11} \\ 3 \frac{\sqrt{22}}{22} \end{bmatrix}$$

De manera semejante, los vectores de posición localizados a lo largo de los ejes de la revoluta y de los pares cilíndricos con respecto al origen  $O$ , están dados por

$$\vec{r}_{2/1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{3/2} = \begin{bmatrix} 246 \\ 388 \\ -176 \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{4/3} = \begin{bmatrix} 580 \\ 178 \\ 178 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_{4/1} = \begin{bmatrix} 671 \\ 27 \\ -28 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los tornillos infinitesimales asociados a cada uno de los pares cinemáticos del mecanismo RSUR están dados por<sup>3</sup>

$${}^1\$^2_O = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{30} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\$^3a_O = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -176 \\ -388 \end{bmatrix} \quad {}^2\$^3b_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 176 \\ 0 \\ 246 \end{bmatrix} \quad {}^2\$^3c_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 388 \\ -246 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$${}^3\$^4a_O = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 178 \\ -178 \end{bmatrix} \quad {}^3\$^4b_O = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -290\sqrt{2} \\ 290\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad {}^4\$^1_O = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{1\sqrt{22}}{11} \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{137\sqrt{22}}{22} \\ -\frac{2097}{22}\sqrt{22} \\ \frac{1261}{22}\sqrt{22} \end{bmatrix}$$

Las matrices Jacobianas asociadas a los pares cinemáticos esféricos entre los eslabones dos y tres, y la unión de Hooke entre los eslabones tres y cuatro están dadas por:

$$\mathbf{J}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 176 & 388 \\ -176 & 0 & -246 \\ -388 & 246 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \\ 178 & -290\sqrt{2} \\ -178 & 290\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

<sup>3</sup>Debe notarse que el par esférico tiene tres tornillos infinitesimales asociados, tres pares de revoluta y el par universal tiene dos tornillos infinitesimales asociados, dos pares de revoluta

El objetivo de este análisis es determinar los tornillos infinitesimales asociados a los movimientos relativos del eslabón tres respecto del eslabón uno y del eslabón cuatro respecto del eslabón dos. Estos tornillos son completamente desconocidos de manera que sus direcciones, los vectores de posición de un punto a lo largo del eje de los tornillos se supondrán completamente generales. Por lo tanto

$${}^1\$^3_O = \begin{bmatrix} u_{13x} \\ u_{13y} \\ u_{13z} \\ {}_1h_3 u_{13x} + r_{13y} u_{13z} - r_{13z} u_{13y} \\ {}_1h_3 u_{13y} - r_{13x} u_{13z} + r_{13z} u_{13x} \\ {}_1h_3 u_{13z} + r_{13x} u_{13y} - r_{13y} u_{13x} \end{bmatrix} \quad {}^2\$^4_O = \begin{bmatrix} u_{24x} \\ u_{24y} \\ u_{24z} \\ {}_2h_4 u_{24x} + r_{24y} u_{24z} - r_{24z} u_{24y} \\ {}_2h_4 u_{24y} - r_{24x} u_{24z} + r_{24z} u_{24x} \\ {}_2h_4 u_{24z} + r_{24x} u_{24y} - r_{24y} u_{24x} \end{bmatrix}$$

Debe notarse que los tornillos infinitesimales  ${}^1\$^3_O$  y  ${}^2\$^4_O$  están sujetos, cada uno de ellos, a otras dos condiciones adicionales:

1. La magnitud unitaria de los vectores asociados a la dirección del tornillo

$$\hat{u}_{13} \cdot \hat{u}_{13} = 1 \quad u_{13x}^2 + u_{13y}^2 + u_{13z}^2 = 1 \quad (7.41)$$

$$\hat{u}_{24} \cdot \hat{u}_{24} = 1 \quad u_{24x}^2 + u_{24y}^2 + u_{24z}^2 = 1 \quad (7.42)$$

2. La perpendicularidad entre el vector de posición de un punto a lo largo del eje del tornillo y el vector asociado a la dirección del tornillo

$$\hat{u}_{13} \cdot \hat{r}_{13} = 0 \quad u_{13x} r_{13x} + u_{13y} r_{13y} + u_{13z} r_{13z} = 0 \quad (7.43)$$

$$\hat{u}_{24} \cdot \hat{r}_{24} = 0 \quad u_{24x} r_{24x} + u_{24y} r_{24y} + u_{24z} r_{24z} = 0 \quad (7.44)$$

### 7.3.1. Determinación del eje instantáneo del tornillo ${}^1\$^3_O$

En esta sección, se mostrará como determinar el ISA asociado al movimiento relativo del eslabón tres respecto del eslabón uno. Aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy el ISA puede determinarse empleando como eslabones intermedios los eslabones dos y cuatro, de esa manera se obtienen los siguientes resultados.

$$\textcircled{1\$^3} \implies \boxed{1\$^2} \quad \boxed{\mathbf{J}_{23}} \quad {}_1\omega_3 {}^1\$^3_O = {}_1\omega_2 {}^1\$^2_O + {}_2\omega_{3a} {}^2\$^{3a}_O + {}_2\omega_{3b} {}^2\$^{3b}_O + {}_2\omega_{3c} {}^2\$^{3c}_O$$

$$\textcircled{1\$^3} \implies \boxed{4\$^1} \quad \boxed{\mathbf{J}_{34}} \quad {}_1\omega_3 {}^1\$^3_O = {}_4\omega_1 {}^4\$^1_O + {}_3\omega_{4a} {}^3\$^{4a}_O + {}_3\omega_{4b} {}^3\$^{4b}_O$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl(\$^2_{as,Kl}, {}^1\$^3_O) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2 \quad (7.45)$$

y

$$Kl(\$^4_{as,Kl}, {}^1\$^3_O) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3 \quad (7.46)$$

donde  $\{{}^2\$^2_{a1,Kl}, {}^2\$^2_{a2,Kl}\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^1\$^2, {}^2\$^{3a}, {}^2\$^{3b}, {}^2\$^{3c}]$  y  $\{{}^4\$^4_{a1,Kl}, {}^4\$^4_{a2,Kl}, {}^4\$^4_{a3,Kl}\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^4\$^1, {}^3\$^{4a}, {}^3\$^{4b}]$ , ambos

respecto a la forma de Klein.

Las ecuaciones vectoriales, note que cada una de las componentes del vector se iguala a cero, son

$$Ec13_2 = \begin{bmatrix} 388 u_{13x} + \frac{61498}{185} u_{13y} + \frac{235904}{185} u_{13z} - \frac{608}{185} {}_1h_3 u_{13x} - \frac{608}{185} r_{13y} u_{13z} + \frac{608}{185} r_{13z} u_{13y} + {}_1h_3 u_{13z} \\ + r_{13x} u_{13y} - r_{13y} u_{13x} \\ 176 u_{13x} + \frac{27896}{185} u_{13y} + \frac{107008}{185} u_{13z} - \frac{317}{370} {}_1h_3 u_{13x} - \frac{317}{370} r_{13y} u_{13z} + \frac{317}{370} r_{13z} u_{13y} + {}_1h_3 u_{13y} \\ - r_{13x} u_{13z} + r_{13z} u_{13x} \end{bmatrix}$$

donde los dos primeros números de la ecuación indican el centro instantáneo que se desea obtener y el subíndice indica el eslabón intermedio que se emplea para determinarlo. De manera semejante debe notarse que, en este caso, cada ecuación escalar requiere de dos líneas.

$$Ec13_4 = \begin{bmatrix} {}_1h_3 u_{13z} + r_{13x} u_{13y} - r_{13y} u_{13x} + 178 u_{13x} + 55 u_{13y} - 635 u_{13z} \\ {}_1h_3 u_{13y} - r_{13x} u_{13z} + r_{13z} u_{13x} - 178 u_{13x} - 891 u_{13y} + 1471 u_{13z} \\ {}_1h_3 u_{13x} + r_{13y} u_{13z} - r_{13z} u_{13y} + 137 u_{13y} - 137 u_{13z} \end{bmatrix}$$

En resumen, las ecuaciones escalares necesarias para la determinación del tornillo  ${}^1\$^3$  son:

$$\begin{aligned} 0 &= 388 u_{13x} + \frac{61498}{185} u_{13y} + \frac{235904}{185} u_{13z} - \frac{608}{185} {}_1h_3 u_{13x} - \frac{608}{185} r_{13y} u_{13z} \\ &\quad + \frac{608}{185} r_{13z} u_{13y} + {}_1h_3 u_{13z} + r_{13x} u_{13y} - r_{13y} u_{13x} \end{aligned} \quad (7.47)$$

$$\begin{aligned} 0 &= 176 u_{13x} + \frac{27896}{185} u_{13y} + \frac{107008}{185} u_{13z} - \frac{317}{370} {}_1h_3 u_{13x} - \frac{317}{370} r_{13y} u_{13z} \\ &\quad + \frac{317}{370} r_{13z} u_{13y} + {}_1h_3 u_{13y} - r_{13x} u_{13z} + r_{13z} u_{13x} \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$0 = {}_1h_3 u_{13z} + r_{13x} u_{13y} - r_{13y} u_{13x} + 178 u_{13x} + 55 u_{13y} - 635 u_{13z} \quad (7.49)$$

$$0 = {}_1h_3 u_{13y} - r_{13x} u_{13z} + r_{13z} u_{13x} - 178 u_{13x} - 891 u_{13y} + 1471 u_{13z} \quad (7.50)$$

$$0 = {}_1h_3 u_{13x} + r_{13y} u_{13z} - r_{13z} u_{13y} + 137 u_{13y} - 137 u_{13z} \quad (7.51)$$

$$1 = u_{13x}^2 + u_{13y}^2 + u_{13z}^2 \quad (7.52)$$

$$0 = u_{13x} r_{13x} + u_{13y} r_{13y} + u_{13z} r_{13z} \quad (7.53)$$

De las ecuaciones (7.49) y (7.50) se despejan y resuelven simultáneamente para las coordenadas  $r_{13x}$  y  $r_{13y}$

$$r_{13x} = \frac{{}_1h_3 u_{13y} + r_{13z} u_{13x} - 178 u_{13x} - 891 u_{13y} + 1471 u_{13z}}{u_{13z}} \quad (7.54)$$

$$\begin{aligned} r_{13y} &= \frac{1}{u_{13x} u_{13z}} [{}_1h_3 u_{13y}^2 + {}_1h_3 u_{13z}^2 + r_{13z} u_{13x} u_{13y} - 178 u_{13x} u_{13y} + 178 u_{13x} u_{13z} \\ &\quad - 891 u_{13y}^2 + 1526 u_{13y} u_{13z} - 635 u_{13z}^2] \end{aligned} \quad (7.55)$$

Sustituyendo los resultados recién encontrados en las ecuaciones (7.47) - (7.53) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$0 = -\frac{1}{185} \frac{(608 u_{13x}^2 + 608 u_{13y}^2 + 608 u_{13z}^2) {}_1 h_3}{u_{13x}} - \frac{1}{185 u_{13x}} [-38850 u_{13x}^2 \\ - 159547 u_{13x} u_{13y} - 245155 u_{13x} u_{13z} - 541728 u_{13y}^2 + 927808 u_{13y} u_{13z} \\ - 386080 u_{13z}^2] \quad (7.56)$$

$$0 = -\frac{1}{370} \frac{(317 u_{13x}^2 + 317 u_{13y}^2 + 317 u_{13z}^2) {}_1 h_3}{u_{13x}} - \frac{1}{370 u_{13x}} [-130980 u_{13x}^2 \\ - 441888 u_{13x} u_{13y} + 386680 u_{13x} u_{13z} - 282447 u_{13y}^2 + 483742 u_{13y} u_{13z} \\ - 201295 u_{13z}^2] \quad (7.57)$$

$$0 = \frac{(u_{13x}^2 + u_{13y}^2 + u_{13z}^2) {}_1 h_3}{u_{13x}} + \frac{1}{u_{13x}} [-41 u_{13x} u_{13y} + 41 u_{13x} u_{13z} - 891 u_{13y}^2 \\ + 1526 u_{13y} u_{13z} - 635 u_{13z}^2] \quad (7.58)$$

$$0 = \frac{(u_{13x}^2 u_{13y} + u_{13y}^3 + u_{13y} u_{13z}^2) {}_1 h_3}{u_{13x} u_{13z}} + \frac{1}{u_{13x} u_{13z}} [r_{13z} u_{13x}^3 + r_{13z} u_{13x} u_{13y}^2 \\ + r_{13z} u_{13x} u_{13z}^2 - 178 u_{13x}^3 - 891 u_{13x}^2 u_{13y} + 1471 u_{13x}^2 u_{13z} - 178 u_{13x} u_{13y}^2 \\ + 178 u_{13x} u_{13y} u_{13z} - 891 u_{13y}^3 + 1526 u_{13y}^2 u_{13z} - 635 u_{13y} u_{13z}^2] \quad (7.59)$$

$$0 = u_{13x}^2 + u_{13y}^2 + u_{13z}^2 - 1 \quad (7.60)$$

De la ecuación (7.58) se despeja el paso  ${}_1 h_3$

$${}_1 h_3 = \frac{41 u_{13x} u_{13y} - 41 u_{13x} u_{13z} + 891 u_{13y}^2 - 1526 u_{13y} u_{13z} + 635 u_{13z}^2}{u_{13x}^2 + u_{13y}^2 + u_{13z}^2} \quad (7.61)$$

Sustituyendo el resultado recién encontrado en las ecuaciones (7.56), (7.57) y (7.59) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$0 = \frac{134619}{185} u_{13y} + \frac{270083}{185} u_{13z} + 210 u_{13x} \quad (7.62)$$

$$0 = \frac{428891}{370} u_{13y} - \frac{373683}{370} u_{13z} + 354 u_{13x} \quad (7.63)$$

$$0 = \frac{1}{u_{13z}} [r_{13z} u_{13x}^2 + r_{13z} u_{13y}^2 + r_{13z} u_{13z}^2 - 178 u_{13x}^2 - 891 u_{13x} u_{13y} + 1471 u_{13x} u_{13z} \\ - 137 u_{13y}^2 + 137 u_{13y} u_{13z}] \quad (7.64)$$

$$0 = u_{13x}^2 + u_{13y}^2 + u_{13z}^2 - 1 \quad (7.65)$$

Se despejan las componentes  $u_{13x}$  y  $u_{13y}$  de las ecuaciones (7.62) y (7.63) para expresarlas en términos de la componente  $u_{13z}$  y se tiene:

$$u_{13x} = \frac{449029729}{2621571} u_{13z} \quad (7.66)$$

$$u_{13y} = -\frac{44948699}{873857} u_{13z} \quad (7.67)$$

Sustituyendo los resultados recién encontrados en la ecuación (7.65) se obtiene una ecuación cuadrática en  $u_{13z}$ , resolviendo esta ecuación y escogiendo, sin pérdida de generalidad, el signo positivo, se tiene que

$$u_{13x} = \frac{87}{219818040036454891} \sqrt{199594272353610516780746899} \quad (7.68)$$

Sustituyendo el resultado anterior en las ecuaciones (7.66) y (7.67) se obtienen las coordenadas restantes asociadas al vector unitario  $\hat{u}_{13}$ :

$$\begin{aligned} u_{13x} &= \frac{449029729}{6623777000418495230503} \sqrt{199594272353610516780746899} \\ u_{13y} &= -\frac{134846097}{6623777000418495230503} \sqrt{199594272353610516780746899} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (7.62) los resultados de las coordenadas asociadas al vector unitario  $\hat{u}_{13}$  se tiene que el paso correspondiente al eje instantáneo secundario, es igual a:

$${}_1h_3 = \frac{14214480074595991164}{219818040036454891}$$

Sustituyendo los resultados de las componentes asociadas al vector unitario y el respectivo paso  ${}_1h_3$  en la ecuación (7.65) se obtiene:

$$0 = \frac{17252277619990758722}{17364701694764114959924980213} \sqrt{199594272353610516780746899} + \frac{1}{78995798943} r_{13z} \sqrt{199594272353610516780746899} \quad (7.69)$$

resolviendo la ecuación (7.69) se obtiene el valor de la coordenada de  $r_{13z}$  asociado al vector de posición  $\vec{r}_{13}$ :

$$r_{13z} = -\frac{17252277619990758722}{219818040036454891}$$

Sustituyendo el valor de la coordenada  $r_{13z}$  y el paso  ${}_1h_3$  en las ecuaciones (7.54) y (7.55) se obtienen las coordenadas restantes  $r_{13x}$  y  $r_{13y}$  asociadas al vector de posición  $\vec{r}_{13}$ :

$$\begin{aligned} r_{13x} &= \frac{9668865275911892700}{219818040036454891} \\ r_{13y} &= \frac{31861358834047014454}{219818040036454891} \end{aligned}$$

Por lo tanto, un vector unitario en la dirección del tornillo y el vector de posición de un punto a lo largo del eje del tornillo con respecto al origen  $O$ , están dados por

$$\hat{u}_{13} = \begin{bmatrix} \frac{449029729}{6623777000418495230503} \sqrt{199594272353610516780746899} \\ -\frac{134846097}{6623777000418495230503} \sqrt{199594272353610516780746899} \\ \frac{87}{219818040036454891} \sqrt{199594272353610516780746899} \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{13} = \begin{bmatrix} \frac{9668865275911892700}{219818040036454891} \\ \frac{31861358834047014454}{219818040036454891} \\ -\frac{17252277619990758722}{219818040036454891} \end{bmatrix}$$

Finalmente, los valores exactos del tornillo  ${}^1\$^3_O$  y su aproximación decimal están dados por

$${}^1\$^3_O = \begin{bmatrix} \frac{449029729}{6623777000418495230503} \sqrt{199594272353610516780746899} \\ -\frac{134846097}{6623777000418495230503} \sqrt{199594272353610516780746899} \\ \frac{87}{219818040036454891} \sqrt{199594272353610516780746899} \\ \frac{18833070516}{6623777000418495230503} \sqrt{199594272353610516780746899} \\ -\frac{44076911606}{6623777000418495230503} \sqrt{199594272353610516780746899} \\ -\frac{70846058842}{6623777000418495230503} \sqrt{199594272353610516780746899} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9577307458 \\ -0.2876118099 \\ 0.005591520977 \\ 40.16885632 \\ -94.01117720 \\ -151.1068074 \end{bmatrix}$$

### 7.3.2. Determinación del eje instantáneo del tornillo ${}^2\$^4_O$

En esta sección, se mostrará como determinar el ISA asociado al movimiento relativo del eslabón cuatro respecto del eslabón dos. Aplicando el teorema de Aronhold-Kennedy el ISA puede determinarse empleando como eslabones intermedios los eslabones uno y tres, de manera semejante a la determinación del ISA correspondiente al movimiento relativo del eslabón tres respecto del eslabón uno, se obtienen los siguientes resultados.

$$\textcircled{2\$^4} \implies [\mathbf{J}_{23}] \quad [\mathbf{J}_{34}] \quad {}_2\omega_4 {}^2\$^4_O = {}_2\omega_{3a} {}^2\$^{3a}_O + {}_2\omega_{3b} {}^2\$^{3b}_O + {}_2\omega_{3c} {}^2\$^{3c}_O {}_3\omega_{4a} {}^3\$^{4a}_O + {}_3\omega_{4b} {}^3\$^{4b}_O$$

$$\textcircled{2\$^4} \implies [{}^1\$^2] \quad [{}^4\$^1] \quad {}_2\omega_4 {}^2\$^4_O = {}_1\omega_2 {}^1\$^2_O + {}_4\omega_1 {}^4\$^1_O$$

Por lo tanto, las ecuaciones que determinan las características del tornillo serán:

$$Kl({\$^3_{as,Kl}, {}^2\$^4}) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2 \quad (7.70)$$

y

$$Kl({\$^1_{as,Kl}, {}^2\$^4}) = 0 \quad \forall \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (7.71)$$

donde  $\{{\$^3_{a1,Kl}, \$^3_{a2,Kl}}\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^2\$^{3a}, {}^2\$^{3b}, {}^2\$^{3c}, {}^3\$^{4a}, {}^3\$^{4b}]$  y  $\{{\$^1_{a1,Kl}, \$^1_{a2,Kl}, \$^1_{a3,Kl}, \$^1_{a4,Kl}}\}$  es una base para el aniquilador ortogonal del subespacio  $[{}^1\$^2, {}^4\$^1]$ , ambos respecto a la forma de Klein.

Las ecuaciones vectoriales, note que cada una de las componentes del vector se iguala a cero, son

$$Ec24_3 = \begin{bmatrix} \frac{16732}{59} u_{24x} - \frac{72934}{177} u_{24y} - \frac{90626}{177} u_{24z} + \frac{167}{177} {}_2h_4 u_{24x} + \frac{167}{177} r_{24y} u_{24z} - \frac{167}{177} r_{24z} u_{24y} \\ -\frac{35}{59} {}_2h_4 u_{24y} + \frac{35}{59} r_{24x} u_{24z} - \frac{35}{59} r_{24z} u_{24x} + {}_2h_4 u_{24z} + r_{24x} u_{24y} - r_{24y} u_{24x} \end{bmatrix}$$

donde los dos primeros números de la ecuación indican el centro instantáneo que se desea obtener y el subíndice indica el eslabón intermedio que se emplea para determinarlo. De manera semejante debe notarse que, en este caso, la ecuación escalar requiere de dos líneas

$$Ec24_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1261}{8} u_{24x} - \frac{6305}{16} u_{24y} + {}_2h_4 u_{24z} + r_{24x} u_{24y} - r_{24y} u_{24x} \\ \frac{2097}{8} u_{24x} + \frac{10485}{16} u_{24y} + {}_2h_4 u_{24y} - r_{24x} u_{24z} + r_{24z} u_{24x} \\ -\frac{137}{8} u_{24x} - \frac{685}{16} u_{24y} + {}_2h_4 u_{24x} + r_{24y} u_{24z} - r_{24z} u_{24y}, -\frac{1}{4} u_{24x} - \frac{9}{8} u_{24y} + u_{24z} \end{bmatrix}$$

En resumen, las ecuaciones escalares necesarias para la determinación del tornillo  ${}^2\$^4_O$  son:

$$0 = -\frac{1261}{8} u_{24x} - \frac{6305}{16} u_{24y} + {}_2h_4 u_{24z} + r_{24x} u_{24y} - r_{24y} u_{24x} \quad (7.72)$$

$$0 = \frac{2097}{8} u_{24x} + \frac{10485}{16} u_{24y} + {}_2h_4 u_{24y} - r_{24x} u_{24z} + r_{24z} u_{24x} \quad (7.73)$$

$$0 = -\frac{137}{8} u_{24x} - \frac{685}{16} u_{24y} + {}_2h_4 u_{24x} + r_{24y} u_{24z} - r_{24z} u_{24y} \quad (7.74)$$

$$0 = -\frac{1}{4} u_{24x} - \frac{9}{8} u_{24y} + u_{24z} \quad (7.75)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{16732}{59} u_{24x} - \frac{72934}{177} u_{24y} - \frac{90626}{177} u_{24z} + \frac{167}{177} {}_2h_4 u_{24x} + \frac{167}{177} r_{24y} u_{24z} \\ &\quad - \frac{167}{177} r_{24z} u_{24y} - \frac{35}{59} {}_2h_4 u_{24y} + \frac{35}{59} r_{24x} u_{24z} - \frac{35}{59} r_{24z} u_{24x} + {}_2h_4 u_{24z} + r_{24x} u_{24y} \\ &\quad - r_{24y} u_{24x} \end{aligned} \quad (7.76)$$

$$0 = r_{24x} u_{24x} + r_{24y} u_{24y} + r_{24z} u_{24z} \quad (7.77)$$

$$0 = u_{24x}^2 + u_{24y}^2 + u_{24z}^2 - 1 \quad (7.78)$$

De las ecuaciones (7.72) y (7.73) se despejan y resuelven simultáneamente para las coordenadas  $r_{24x}$  y  $r_{24y}$

$$r_{24x} = \frac{1}{16} \frac{16 - {}_2h_4 u_{24y} + 16 r_{24z} u_{24x} + 4194 u_{24x} + 10485 u_{24y}}{u_{24z}} \quad (7.79)$$

$$\begin{aligned} u_{24y} &= \frac{1}{16 u_{24x} u_{24z}} [16 {}_2h_4 u_{24y}^2 + 16 {}_2h_4 u_{24z}^2 + 16 r_{24z} u_{24x} u_{24y} + 4194 u_{24x} r_{24y} \\ &\quad - 2522 u_{24x} u_{24z} + 10485 u_{24y}^2 - 6305 u_{24y} u_{24z}] \end{aligned} \quad (7.80)$$

Sustituyendo los resultados recién encontrados en las ecuaciones (7.74) - (7.78) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{16 u_{24x}} [16 {}_2h_4 u_{24x}^2 + 16 {}_2h_4 u_{24y}^2 + 16 {}_2h_4 u_{24z}^2 - 274 u_{24x}^2 + 3509 u_{24x} u_{24y} \\ &\quad - 2522 u_{24x} u_{24z} + 10485 u_{24y}^2 - 6305 u_{24y} u_{24z}] \end{aligned} \quad (7.81)$$

$$0 = -\frac{1}{4} u_{24x} - \frac{9}{8} u_{24y} + u_{24z} \quad (7.82)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2832 u_{24x}} [2672 {}_2h_4 u_{24x}^2 + 2672 {}_2h_4 u_{24y}^2 + 2672 {}_2h_4 u_{24z}^2 + 1689900 u_{24x}^2 \\ &\quad + 1750364 u_{24x} u_{24y} - 1871190 u_{24x} u_{24z} + 1750995 u_{24y}^2 - 1052935 u_{24y} u_{24z}] \end{aligned} \quad (7.83)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{16 u_{24x} u_{24z}} [16 {}_2h_4 u_{24x}^2 u_{24y} + 16 {}_2h_4 u_{24y}^3 + 16 {}_2h_4 u_{24y} u_{24z}^2 + 16 r_{24z} u_{24x}^3 \\ &\quad + 16 r_{24z} u_{24x} u_{24y}^2 + 16 r_{24z} u_{24x} u_{24z}^2 + 4194 u_{24x}^3 + 10485 u_{24x}^2 u_{24y} \\ &\quad + 4194 u_{24x} u_{24y}^2 - 2522 u_{24x} u_{24y} u_{24z} + 10485 u_{24y}^3 - 6305 u_{24y}^2 u_{24z}] \end{aligned} \quad (7.84)$$

$$0 = u_{24x}^2 + u_{24y}^2 + u_{24z}^2 - 1 \quad (7.85)$$

De la ecuación (7.81) se despeja el paso  ${}_2h_4$

$${}_2h_4 = \frac{1}{16} \frac{274 u_{24x}^2 - 3509 u_{24x} u_{24y} + 2522 u_{24x} u_{24z} - 10485 u_{24y}^2 + 6305 u_{24y} u_{24z}}{u_{24x}^2 + u_{24y}^2 + u_{24z}^2} \quad (7.86)$$

Sustituyendo el resultado recién encontrado en las ecuaciones (7.82) - (7.85) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$0 = -\frac{1}{4} u_{24x} - \frac{9}{8} u_{24y} + u_{24z} \quad (7.87)$$

$$0 = \frac{867829}{1416} u_{24x} + \frac{1164361}{2832} u_{24y} - \frac{90626}{177} u_{24z} \quad (7.88)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{16 u_{24z}} [16 r_{24z} u_{24x}^2 + 16 r_{24z} u_{24y}^2 + 16 r_{24z} u_{24z}^2 + 4194 u_{24x}^2 \\ &\quad + 10759 u_{24x} u_{24y} + 685 u_{24y}^2] \end{aligned} \quad (7.89)$$

$$0 = u_{24x}^2 + u_{24y}^2 + u_{24z}^2 - 1 \quad (7.90)$$

Despejando las componentes  $u_{24x}$  y  $u_{24y}$  de las ecuaciones (7.87) y (7.88) para expresarlas en términos de la componente  $u_{24z}$  se tiene:

$$u_{24x} = \frac{466907}{1661525} u_{24z} \quad (7.91)$$

$$u_{24y} = \frac{1373154}{1661525} u_{24z} \quad (7.92)$$

Sustituyendo los resultados recién encontrados en la ecuación (7.90) se obtiene una ecuación cuadrática en la componente  $u_{24z}$  de la cual, sin pérdida de generalidad, se resuelve y se toma el valor positivo para encontrar:

$$u_{24z} = \frac{205}{972843875998} \sqrt{12781422275856303590} \quad (7.93)$$

Sustituyendo el valor de la coordenada  $u_{24z}$  en las ecuaciones (7.91) y (7.92) se obtienen las coordenadas restantes  $u_{24x}$  y  $u_{24y}$  asociadas al vector unitario  $\hat{u}_{24}$ :

$$\begin{aligned} u_{24x} &= \frac{466907}{7884899614963790} \sqrt{12781422275856303590} \\ u_{24y} &= \frac{686577}{3942449807481895} \sqrt{12781422275856303590} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (7.89) los resultados de las coordenadas asociadas al vector unitario  $\hat{u}_{24}$  se obtiene:

$$0 = \frac{1}{43093312400} (16 r_{24z} + \frac{4551938917275984}{2432109689995}) \sqrt{12781422275856303590} \quad (7.94)$$

Resolviendo la ecuación (7.94) se obtiene el valor de la coordenada de  $r_{24z}$  asociado al vector de posición  $\vec{r}_{24}$ :

$$r_{24z} = -\frac{284496182329749}{2432109689995}$$

Sustituyendo en la ecuación (7.86) las componentes asociadas al vector unitario  $\hat{u}_{24}$  y la coordenada  $r_{24z}$  se obtiene el paso correspondiente al eje instantáneo secundario, es igual a

$${}^2 h_4 = -\frac{175577082301998}{2432109689995}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (7.79) y (7.80) el resultado anterior, junto a las componentes asociadas al vector unitario  $\hat{u}_{24}$  y la coordenada  $r_{24z}$  se obtienen las coordenadas restantes  $r_{24x}$  y  $r_{24y}$  asociadas al vector de posición  $\vec{r}_{24}$

$$\begin{aligned} r_{24x} &= \frac{1271274942809703}{2432109689995} \\ r_{24y} &= -\frac{3827103289438}{105743899565} \end{aligned}$$

Por lo tanto, un vector unitario en la dirección del tornillo y el vector de posición de un punto a lo largo del eje del tornillo con respecto al origen  $O$ , están dados por

$$\hat{u}_{24} = \left[ \begin{array}{c} \frac{466907}{7884899614963790} \sqrt{12781422275856303590} \\ \frac{686577}{3942449807481895} \sqrt{12781422275856303590} \\ \frac{205}{972843875998} \sqrt{12781422275856303590} \end{array} \right] \quad \vec{r}_{24} = \left[ \begin{array}{c} \frac{1271274942809703}{2432109689995} \\ -\frac{3827103289438}{105743899565} \\ -\frac{284496182329749}{2432109689995} \end{array} \right]$$

Finalmente, los valores exactos del tornillo  ${}^2\$_O^4$  y su aproximación decimal están dados por

$${}^2\$_O^4 = \begin{bmatrix} \frac{466907}{7884899614963790} \sqrt{12781422275856303590} \\ \frac{686577}{3942449807481895} \sqrt{12781422275856303590} \\ \frac{205}{972843875998} \sqrt{12781422275856303590} \\ \frac{33391969}{3942449807481895} \sqrt{12781422275856303590} \\ -\frac{511116489}{3942449807481895} \sqrt{12781422275856303590} \\ \frac{307352357}{3942449807481895} \sqrt{12781422275856303590} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2117014381 \\ 0.6226050939 \\ 0.7533560900 \\ 30.28066771 \\ -463.4931400 \\ 278.7147590 \end{bmatrix}$$

Debe notarse que no fue necesario emplear la forma de Killing para la determinación de los tornillos instantáneos deseados. Los resultados obtenidos en estas secciones se corroborarán realizando el análisis de velocidad del mecanismo RSUR, usando Maple<sup>©</sup>, para una magnitud arbitraria del eslabón motriz, asociado al par cinemático  ${}^1\$^2$ , determinando los estados de velocidad del eslabón tres respecto del eslabón uno,  ${}^1\vec{V}^3$ , y del eslabón cuatro respecto del eslabón dos,  ${}^2\vec{V}^4$  y posteriormente determinando los tornillos instantáneos  ${}^1\$_O^3$  y  ${}^2\$_O^4$ .

Finalmente, los resultados también se corroboraron mediante el programa de análisis dinámico Adams<sup>©</sup>, los detalles de estos análisis no se muestran por razones de espacio.

---

## Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se mostró como la aplicación de las formas de Klein y Killing sobre la ecuación que relaciona los estados de velocidad de tres cuerpos

$${}^i\vec{V}_O^k = {}^i\vec{V}_O^j + {}^j\vec{V}_O^k \quad (7.95)$$

Constituye la forma más general del teorema de los tres ejes.

Entonces, puede formularse el argumento que la ecuación (7.95), que aparece en Ball [2], constituye el teorema de los tres ejes y que el teorema de Aronhold-Kennedy, es un corolario obtenido a partir de la ecuación (7.95) aplicando en ambos lados de la ecuación, la forma de Klein mientras que la versión espacial del teorema de Aronhold-Kennedy presentada por Beggs [3] y Phillips y Hunt [22] es otro corolario obtenido a partir de la ecuación (7.95) aplicando, en ambos lados de la ecuación las formas de Klein y Killing.

El argumento fundamental del presente trabajo, desarrollado en el capítulo inicial, se aplica en el resto de la tesis a diferentes subgrupos (subálgebras) del grupo SE(3) (del álgebra de Lie se(3)).

1. Para la subálgebra,  $g_{\hat{u}}$ , de movimientos planos generales, se muestra la determinación de los centros instantáneos de mecanismos planos, un tema incluido en la currícula de ingeniería mecánica y mecatrónica. Sin embargo, además de automatizar la determinación de los centros instantáneos, este capítulo presenta un método, más simple que los publicados hasta la fecha, para determinar la localización de los centros instantáneos de mecanismos planos indeterminados.
2. Para la subálgebra,  $so(3)$ , de movimientos esféricos, se muestra la determinación de los ejes de rotación instantáneos de mecanismos esféricos. Nuevamente, este capítulo presenta la determinación de los ejes de rotación de mecanismos esféricos determinados e indeterminados. En el caso de mecanismos indeterminados, se presenta la versión esférica del proceso presentado para mecanismos planos indeterminados. Este proceso también es más simple que los métodos publicados hasta la fecha.

El trabajo presenta la determinación de los ejes instantáneos para mecanismos asociados a las subálgebras,  $y_{\hat{u}}$ , y Schönflies,  $x_{\hat{u}}$ , hasta donde el autor y sus asesores tienen conocimiento, este es el primer trabajo en este tema. En particular, todos los mecanismos asociados a la subálgebra de Schönflies,  $x_{\hat{u}}$ , cuyos pares cinemáticos son de la clase I son indeterminados. Este trabajo presenta un método simple para determinar la localización de los ejes instantáneos de tornillo de estos mecanismos.

Para mecanismos espaciales, es decir, asociados al álgebra  $se(3)$ , este trabajo presenta un proceso analítico para determinar los ejes instantáneos de tornillo de un mecanismo R-C-C-C y R-S-U-R. El método es fácil de extender a otros mecanismos espaciales.

Es importante señalar que los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo se verificaron realizando el análisis de velocidad del mecanismo, seleccionando un eslabón como motriz y asignando una velocidad angular arbitraria— todos los pares motrices fueron de revoluta o de tornillo determinando todos los posibles estados de velocidad entre los eslabones y finalmente los ejes instantáneos de tornillo. Adicionalmente, los resultados se verificaron simulando el mecanismo mediante el programa Adams<sup>©</sup>.

---

A primera vista, un área de desarrollo futuro es la determinación de los ejes instantáneos de mecanismos espaciales indeterminados.

---

## Bibliografía

---

- [1] Aronhold, S. (1972), Gründzuge der Kinematischen Geometrie. *Verh. d. Ver. Z. Beförderung des Gewerbefleiss in Preussen*, Vol. 51, pp 129-155.
- [2] Ball, R. S. (1998), *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge university press, Cambridge, UK, 1900.
- [3] Beggs, J. (1959), *Ein Beitrag Zur Analyse räumlicher Mechanismen*. Ph. Dissertation Technische Hochschule Hannover
- [4] Beggs, J. S. (1966), *Advanced Mechanism*, New York: The Macmillan. Company.
- [5] Beyer, B. (1963), *Technische Raumkinematik: Lehr-, Hand- und Übungsbuch Zur Analyse räumlicher Getriebe*, Heidelberg: Springer Verlag.
- [6] Chang, Y. P y Her, I (2008), A virtual cam method for locating instant centers of Kinematically indeterminate linkages, *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 130 paper 062304, pp 1-7
- [7] Church, A. H. (1961), *Cinemática de las máquinas por Guillet*, México: Compañía Editorial Continental, S. A.
- [8] Di Gregorio, R. (2008), An algorithm for analytically calculating the positions of the secondary instant centers of indeterminate linkages. *ASME Journal of Mechanical Design* Vo1. 130, paper 042303. pp 1-9.
- [9] Di Gregorio, R. (2008), Determination of the instantaneous pole axes in single-Dof spherical mechanisms, *Proceedings of the ASME 2008 International Desing Engineering Technical Conferences & Computers and Informationn in Engineering Conference IDETC/CIE 2008, Brooklyn, N.Y.* Paper DETC 2008-49084.
- [10] Di Gregorio, R. (2011), A general algorithm for analitically determining all the instantaneous pole axis locations in single- Dof spherical mechanisms. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol 225, pp 2062-2075.
- [11] Foster, D. E. y Pennock, G. R. (2003), Graphical methods to locate the secondary instant centers of single-degree-of-freedom indeterminate linkages. *ASME Journal of Mechanical Design* Vol. 125, No. 2, pp. 268-274.
- [12] Foster, D. E. y Pennock, G. R. (2005), Graphical methods to locate the secondary instant centers of single-degree-of-freedom indeterminate linkages. *ASME Journal of Mechanical Design* Vol. 127, pp. 249-256.

- 
- [13] Gallardo-Alvarado, J. (1999), *Análisis Cinemáticos de Orden Superior de Cadenas Espaciales, Mediante el Álgebra de Tornillos, y sus Aplicaciones*. Tesis doctoral, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coahuila, México.
  - [14] Gallardo, J. y Rico, J.M.(1998), Screw theory and helicoidal fields, *Proceedings of the 25th Biennial Mechanisms Conference*, CD-Rom, Paper DETC/98, MECH-5893.
  - [15] Hervé, J. M. (1978), Analyse structurelle des mécanismes par groupe des déplacements, *journal Mechanism and Machine Theory*, Vol. 13, pp. 437-450.
  - [16] Kane, T. R. y Levinson, D. A., (1985), *Dynamics, theory and applications*, McGraw-Hill: New York.
  - [17] Kennedy, A. B. W. (1886), *The mechanics of machinery*, London: Macmillan.
  - [18] Kim, M., Han, M. S., Seo, T. y Lee, J. W. (2016), A new instantaneous center analysis methodology for planar closed chains via graphical representation. *International Journal of Control, Automation and Systems* Vol. 14, 1528-1534.
  - [19] Klein, A. W. (1917), *Kinematics of Machinery*, Mc-Graw Hill Book Co: New York.
  - [20] Kung, C. M. y Wang. L.C.T (2009), Analytical method for locating the secondary instant centers of indeterminate planar linkages. *Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineerind Science*, Vol 223, pp. 491-502.
  - [21] Lipkin, H. (1985), *Geometry and Mappings of Screws with Applications to The Hybrid Control of Robotic Manipulators*, Ph.D. Dissertation, University of Florida.
  - [22] Phillips, J. y Hunt, K. (1964), On the theorem of three axes in the spatial motion of three bodies. *Australian Journal of Applied Science* Vol. 15, 267-287.
  - [23] Rico-Martinez, J. M. y Gallardo-Alvarado, J. (2001), A complete kinematic analogy. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 30, pp 8-16.
  - [24] Rico, J.M. y Duffy, J. (1992b), Clasification of Screw Systems-I. One- and Two-Systems, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 27, pp. 459-470.
  - [25] Rico, J.M. (2012), Notas de clase de posgrado, cinemática infinitesimal, División de Ingenierías, Universidad de Guanajuato.
  - [26] Rocha-Chavarría, J. (2007), *Determinación de Sobre Restricciones en Mecanismos Espaciales*. Tesis Maestría, Universidad de Guanajuato, Guanajuato, Salamanca, México.
  - [27] Shigley, J. E. (1961), *Theory of machines*, New York: McGraw-Hill Book Co.
  - [28] Yan, H. S., and Hsu, M. H., (1992), An Analytical Method for Locating Instantaneous Velocity Centers, *Proceedings of the 22nd ASME Biennial Mechanisms Conference*, Scottsdale, AZ, Sep. 1316, DE-Vol. 47, pp. 353359.
  - [29] Zarkandi, S. (2010), Geometrical methods to locate secondary instantaneous poles of single - DOF indeterminate spherical mechanisms, *Journal of Mechanical Engineering transaction of Mechanical Engineering Division, The Institution of Engineers, Bangladesh*, Vol. 41, pp. 80-88.
  - [30] Zarkandi, S. (2013), An Analytical Approach to Locate the Secondary Instantaneous Poles of Single-DOF Indeterminate Spherical Mechanisms. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 41, pp 274-292.