1. 解：(1) $((p\to q)\vee\neg r)$

p^v	q^v	r^v	$(p\to q)^v$	$(\neg r)^v$	(公式(1))^v
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

(2) $((p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r)))$

p^v	q^v	r^v	$(q\to r)^v$	$(p\to(q\to r))^v$	$(p\to q)^v$	$(p\to r)^v$	(公式(2))^v
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

2. 解：(a) 命题变元 p, q 分别表示 "Mr Jones is happy" "Mrs. Jones is happy".
则表示为：$(p\to\neg q)\wedge(\neg p\to\neg q)$

(b) p, q. "x is odd" "x is prime". $q\to p$

(c) p, q. "Sam will come to the party." "Max will come to the party"
$(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)$

(d). p, q. "A sequence s will converge". "S is bounded". $p\to q$

(e) p, q. "x is positive". "x^2 is positive". $p\to q$

3. 证明：必要性：$B \models\!\!\models C$，则对任意赋值 v，$B^v=C^v$。故对任意赋值 w，若 $B^w=1$，则 $C^w=1$，即 $B\models C$，同理 $C\models B$。

充分性：对任意赋值 v，若 $B^v=0$，假设 $C^v=1$，由 $C\models B$ 知，$B^v=1$，矛盾，故 $C^v=0$。同理，当 $C^v=0$ 时，$B^v=0$。而对任意赋值 v，若 $B^v=1$，则 $C^v=1$ 知对任意赋值 w，若 $C^w=1$，则 $B^w=1$ 是由逻辑推论的定义给出的。

综上，得证。

#

[redacted]

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

4. 证明：$B \mid\!=\!\mid C$ 当且仅当 $B^v = C^v$，当且仅当 $(\neg B)^v = (\neg C)^v$ 当且仅当 $\neg B \mid\!=\!\mid \neg C$。

#.

5. 解：任取赋值 v，$(A \wedge B)^v = 1$ 当且仅当 $A^v = 1$ 且 $B^v = 1$.

(a) $A^v = 1$，可以　(b) $B^v = 1$，可以　(c) $(A \vee B)^v = 1$，可以

(d) $\neg A = 0$，$((\neg A) \vee B)^v = 1$ 可以 (e) $(\neg B)^v = 0$，$((\neg B) \to A)^v = 1$，可以

(f) $A \leftrightarrow B$ 等价于 ~~$A^v = B^v$ 且~~ $(A \to B) \wedge (B \to A)$，$(A \to B)^v = 1$ 且 $(B \to A)^v = 1$，

故 $(A \leftrightarrow B)^v = 1$，可以．(g) $(A \to B)^v = 1$，可以

(h) $((\neg B) \to (\neg A))$，$(\neg B)^v = 0$，$(\neg A)^v = 0$，故 $((\neg B) \to (\neg A))^v = 1$，可以

(i) $(A \wedge (\neg B))$，$(\neg B)^v = 0$，$(A \wedge (\neg B))^v = 0$，不可以．

6. 解：(a) $B \leftrightarrow (B \vee B)$，显然 任取赋值 若 $B^v = 0$，则 $(B \vee B)^v = 0$；若 $B^v = 1$，则 $(B \vee B)^v = 1$，故 $(B \to (B \vee B))^v = 1$。若 $(B \vee B)^v = 1$，则 $B^v = 1$，$((B \vee B) \to B)^v = 1$；若 $(B \vee B)^v = 0$，则 $B^v = 0$，$((B \vee B) \to B)^v = 1$，故为重言式。

(b) $((A \to B) \wedge B) \to A$

A^v	~~本~~B^v	$(A \to B)^v$	$((A \to B) \wedge B)^v$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

第二行，$((A \to B) \wedge B)^v = 1$ 时，$(A)^v = 0$，（原公式）$^v = 0$；第四行，$((A \to B) \wedge B)^v = 1$ 时 $(A)^v = 1$，（原公式）$^v = 1$，故两者都不是．

(c). $(\neg A) \to (A \wedge B)$

A^v	B^v	$(\neg A)^v$	$(A \wedge B)^v$	$((\neg A) \to (A \wedge B))^v$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

故两者都不是．

(d). $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.

年　月　日

[redacted]

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

A	B	C	$(A\to B)$	$(B\to C)$	$((A\to B)\to(B\to C))$	$(A\to C)$	(原公式)
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0

这两者都不是

(B) $(A\leftrightarrow\neg B)\to A\vee B \overset{def}{=} C$

A	B	$(\neg B)$	$(A\vee B)$	$(A\leftrightarrow\neg B)$	C
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1

重言式.

(f) $A\wedge(\neg(A\vee B)) \overset{def}{=} C$

A	B	$(\neg(A\vee B))$	C
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

矛盾式

(g) $(A\to B)\leftrightarrow((\neg A)\vee B) \overset{def}{=} C$

A	B	$(A\to B)$	$((\neg A)\vee B)$	C
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1

两者都不是.

(h). $(A\to B)\leftrightarrow\neg(A\wedge(\neg B)) \overset{def}{=} C$

A	B	$(A\to B)$	$(\neg(A\wedge(\neg B)))$	C
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

重言式.

(i) $(B\leftrightarrow(B\to A))\to A \overset{def}{=} C$

A	B	$(B\to A)$	$(B\leftrightarrow(B\to A))$	$((B\leftrightarrow(B\to A))\to A)$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

重言式

年 月 日

7. 证明：(a) 任赋值 v，若 $B^v=0$，则 $(T\wedge B)^v=0$，$B^v=(T\wedge B)^v$

若 $B^v=1$，则 $(T\wedge B)^v=1$. $B^v=(T\wedge B)^v$，故 $(T\wedge B)\mid=\mid B$

(b) $(T)^v=(T\vee B)^v$ 显然

(c) $F^v=0$，若 $B^v=0$，则 $(F\vee B)^v=0=B^v$；若 $B^v=1$，则 $(F\vee B)^v=1=B^v$，

故 $(F\vee B)\mid=\mid B$

(d) 显然. . . .

[redacted]

中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences

第二次作业

1. 证明：

(1) $(A\to B)\to B \vdash (B\to A)\to A$

证明：$(A\to B)\to B, (B\to A), \neg A \vdash B\to A$

$(A\to B)\to B, B\to A, \neg A \vdash \neg A$

先证明：$\neg A \vdash A\to B$

$\neg A, A, \neg B \vdash \neg A$

$\neg A, A, \neg B \vdash A$

$\neg A, A \vdash B$

$\neg A \vdash A\to B$

接着证明：

$(A\to B)\to B, B\to A, \neg A \vdash A\to B$

$(A\to B)\to B, B\to A, \neg A \vdash (A\to B)\to B$

$(A\to B)\to B, B\to A, \neg A \vdash B$

$(A\to B)\to B, B\to A, \neg A \vdash A$

$(A\to B)\to B, B\to A \vdash A$

$(A\to B)\to B \vdash (B\to A)\to A$. 得证. 毕.

(2) $(A\to B)\to C \vdash (A\to C)\to C$

证明：
① $A\to C, \neg C, A \vdash \neg C$ (6)
② $A\to C, A \vdash C$
③ $A\to C, \neg C, A \vdash C$
④ $A\to C, \neg C \vdash \neg A$ (①, ③)
⑤ $A\to C \vdash \neg C\to \neg A$
⑥ $(A\to B)\to C, A\to C, \neg C \vdash \neg C\to\neg A$
⑦ $(A\to B)\to C, A\to C, \neg C \vdash \neg C$
⑧ $(A\to B)\to C, A\to C, \neg C \vdash \neg A$ (⑥, ⑦)
⑨ $\neg A, A, \neg B \vdash \neg A$.

⑩ $\neg A, A, \neg B \vdash A$

⑪ $\neg A, A \vdash B$

⑫ $\neg A \vdash A\to B$

⑬ $(A\to B)\to C, A\to C, \neg C \vdash A\to B$ (⑫, ⑬)

⑭ $(A\to B)\to C, A\to C, \neg C \vdash (A\to B)\to C$

⑮ $(A\to B)\to C, A\to C, \neg C \vdash C$

⑯ $(A\to B)\to C, A\to C, \neg C \vdash \neg C$

⑰ $(A\to B)\to C, A\to C \vdash C$

⑱ $(A\to B)\to C \vdash (A\to C)\to C$ #

(3) $(A\to B)\to C \vdash (C\to A)\to (D\to A)$

证明: ① $\neg A, A, \neg B \vdash \neg A$ (∈)

② $\neg A, A, \neg B \vdash A$

③ $\neg A, A \vdash B$

④ $\neg A \vdash A\to B$

⑤ $(A\to B)\to C, C\to A, D, \neg A \vdash A\to B$ (+)

⑥ $(A\to B)\to C, C\to A, D, \neg A \vdash (A\to B)\to C$

⑦ $(A\to B)\to C, C\to A, D, \neg A \vdash C$ (⑤, ⑥)

⑧ $(A\to B)\to C, C\to A, D, \neg A \vdash C\to A$

⑨ $(A\to B)\to C, C\to A, D, \neg A \vdash A$ (⑦, ⑧)

⑩ $(A\to B)\to C, C\to A, D, \neg A \vdash \neg A$

⑪ $(A\to B)\to C, C\to A, D \vdash A$ (⑨, ⑩)

⑫ $(A\to B)\to C, C\to A \vdash D\to A$

⑬ $(A\to B)\to C \vdash (C\to A)\to (D\to A)$ #

(4) $(A\wedge\neg B)\to(D\vee C), B\to\neg A, A\to\neg C \vdash A\to D$.

证明: ① $(A\wedge\neg B)\to(D\vee C), B\to\neg A, A\to\neg C, A, \neg D \vdash \neg D$ (∈)

② $(A\wedge\neg B)\to(D\vee C), B\to\neg A, A\to\neg C, A, \neg D \vdash A$

③ . . . . $\vdash A\to\neg C$

④ . . . . $\vdash \neg C$ (②, ③) ⑤ $(A\wedge\neg B)\to(D\vee C), B\to\neg A, A\to\neg C, A, \neg D, B \vdash B$

⑥ $(A\wedge\neg B)\to(D\vee C), B\to\neg A, A\to\neg C, A, \neg D, B \vdash B\to\neg A$

⑦ $(A\wedge\neg B)\to(D\vee C), B\to\neg A, A\to\neg C, A, \neg D, B \vdash \neg A$ (⑤, ⑥)

⑧ $(A\wedge\neg B)\to(D\vee C), B\to\neg A, A\to\neg C, A, \neg D, B \vdash A$

⑨ $(A\wedge\neg B)\to(D\vee C), B\to\neg A, A\to\neg C, A, \neg D, \vdash \neg B$. (⑦, ⑧)

⑩ ………… $\vdash A\wedge\neg B$ (③, ⑨)

⑪ ………… $\vdash (A\wedge\neg B)\to(D\vee C)$ (⑥)

⑫ ………… $\vdash D\vee C$ (⑩, ⑪)

若 ⑬ ………… $\vdash C$ 为真，则公式④为假，矛盾，故公式⑬为假，因此下式为真：

⑭ ………… $\vdash D$

⑮ $(A\wedge\neg B)\to(D\vee C), B\to\neg A, A\to\neg C, A, \neg D \vdash \neg D$

⑯ $(A\wedge\neg B)\to(D\vee C), B\to\neg A, A\to\neg C, A \vdash D$ (⑭, ⑮)

⑰ $(A\wedge\neg B)\to(D\vee C), B\to\neg A, A\to\neg C \vdash A\to D$

2. (1) $\neg(A\vee B) \vdash \neg A\wedge\neg B$

证明：首先证明：$\neg(A\vee B) \vdash \neg(\neg A\to B)$（断言该公式为真）

~~需再证明：$A\vee B \vdash \neg A\to B$.~~

① $A, \neg A \vdash B$ （证明简单，略）

② $B, \neg A \vdash B$

③ $A\vee B, \neg A \vdash B$ (①, ②)

④ $A\vee B \vdash \neg A\to B$

证明：$\neg A\to B \vdash$

$A\vee B$ 的定义是 $\neg A\to B$，断言 $\neg(A\to B) \vdash A$，证明如下：

① $\neg(A\to B), \neg A \vdash \neg(A\to B)$. (6)

② $\neg A, A, \neg B \vdash \neg A$

③ $\neg A, A, \neg B \vdash A$.

④ $\neg A, A \vdash B$ (②③)

⑤ $\neg A \vdash A\to B$.

⑥ $\neg(A\to B), \neg A \vdash A\to B$ ~~(⑥③)~~

⑦ $\neg(A\to B). \vdash A$ (⑥,⑥)

故⑧ $\neg(\neg A\to B) \vdash \neg A.$ (公式A表示为$\neg A$的形式)

下面证明: $\neg(\neg A\to B) \vdash \neg(\neg B\to A)$

⑨ $\neg(\neg A\to B), \neg B\to A \vdash \neg(\neg A\to B)$ (∈)

⑩ $\neg B\to A, \neg A, \neg B \vdash \neg A$

⑪ $\neg B\to A, \neg A, \neg B \vdash \neg B$

⑫ $\neg B\to A, \neg A, \neg B \vdash \neg B\to A$

⑬ $\neg B\to A, \neg A, \neg B \vdash A$ (⑪,⑫)

⑭ $\neg B\to A, \neg A \vdash B$ (⑩,⑬)

⑮ $\neg B\to A \vdash \neg A\to B$

⑯ $\neg(\neg A\to B), \neg B\to A \vdash \neg A\to B$ (+)

⑰ $\neg(\neg A\to B) \vdash \neg(\neg B\to A)$ (⑨,⑯)

⑱ $\neg(\neg B\to A) \vdash \neg B$ (⑧)

⑲ $\neg(\neg A\to B) \vdash \neg B$ (⑰,⑱,Tr)

⑳ $\neg(\neg A\to B) \vdash \neg A\wedge\neg B$. (⑧,⑲)

即: $\neg(A\vee B) \vdash \neg A\wedge\neg B.$ 证毕.

14. $\neg(A\wedge B) \vdash \neg A\vee\neg B.$

证明: 由合取的定义, $A\wedge B$: $\neg(A\to\neg B)$, $\neg A\vee\neg B$. 即: $\neg\neg A\to\neg B$

断言: $\neg\neg A \vdash A$. 证明如下:

① $\neg\neg A. \neg A \vdash \neg\neg A.$ (∈)

② $\neg\neg A, \neg A \vdash \neg A$

③ $\neg\neg A \vdash A$ (①②)

故 ④ $\neg(\neg(A\to\neg B)) \vdash A\to\neg B$ (③)

⑤ $A\to\neg B, \neg\neg A, B \vdash B$ (∈)

⑥ $A\to\neg B, \neg\neg A, B \vdash A\to\neg B$

⑦ $A\to\neg B, \neg\neg A, B \vdash A$ (③)

⑧ $A\to\neg B, \neg\neg A, B \vdash \neg B$ (⑥, ⑦)

⑨ $A\to\neg B, \neg\neg A \vdash \neg B$ (⑤, ⑧)

⑩ $A\to\neg B,$ $\vdash \neg\neg A\to\neg B$

⑪ $\neg(\neg(A\to\neg B)) \vdash \neg\neg A\to\neg B$ (⑨, ⑩)

即: $\neg(A\wedge B) \vdash \neg A\wedge\neg B$.

毕.

(3). $\vdash A\vee\neg A$.

证明: 等价证明 $\vdash \neg A\to\neg A$.

$\neg A \vdash \neg A$ (Ref)

$\vdash \neg A\to\neg A$

毕

3. 证明: 若: ① $\Sigma, \neg A \vdash B$

② $\Sigma, \neg A \vdash \neg B$ ①, ②为假设条件.

③ $\Sigma, \vdash \neg\neg A$ ($\neg+$)

④ $\Sigma \vdash A$ (题中给的形式推理规则)

故得证。

毕.