KARPOV.COURSES >>>

Конспект №2

Структура и интуиция предела

Перед тем, как давать строгое определение предела, давайте посмотрим на его **структуру**:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,$$

где lim — оператор, с помощью которого объявляем, что хотим вычислить предел;

f(x) — функция, от которой вычисляем предел;

$x \to x_0$ — база;

a — ответ.

Смысл предела легко понять на **интуитивном уровне**. Он отвечает на вопрос: как ведёт себя функция $f(x)$, если её аргумент x приближается к некоторому значению x_0? Иными словами, к какому значению стремится $f(x)$ по некоторой базе $x \to x_0$?

Например, рассмотрим предел следующей функции:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^3 - x^2 - 17x - 15}{x^2 - 3x - 10}$$

В точке -2 данная функция не определена (на ноль делить нельзя!), но при этом мы можем посмотреть, как ведёт себя функция **предельно близко** к этой точке.

Знак минус над числом -2 означает, что мы хотим посмотреть, что происходит со значениями функции, если к точке -2 мы "подползаем" слева. Т.е. берём значения близкие, но меньшие (-3, -2.5, -2.1, -2.0001 и т.д.).

Если мы начнём перебирать значения функции в этих точках, то увидим, что с приближением слева к точке -2 значения будут всё больше расти. Таким образом, подставляя аргументы или нарисовав график, получим, что:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^3 - x^2 - 17x - 15}{x^2 - 3x - 10} = +\infty$$

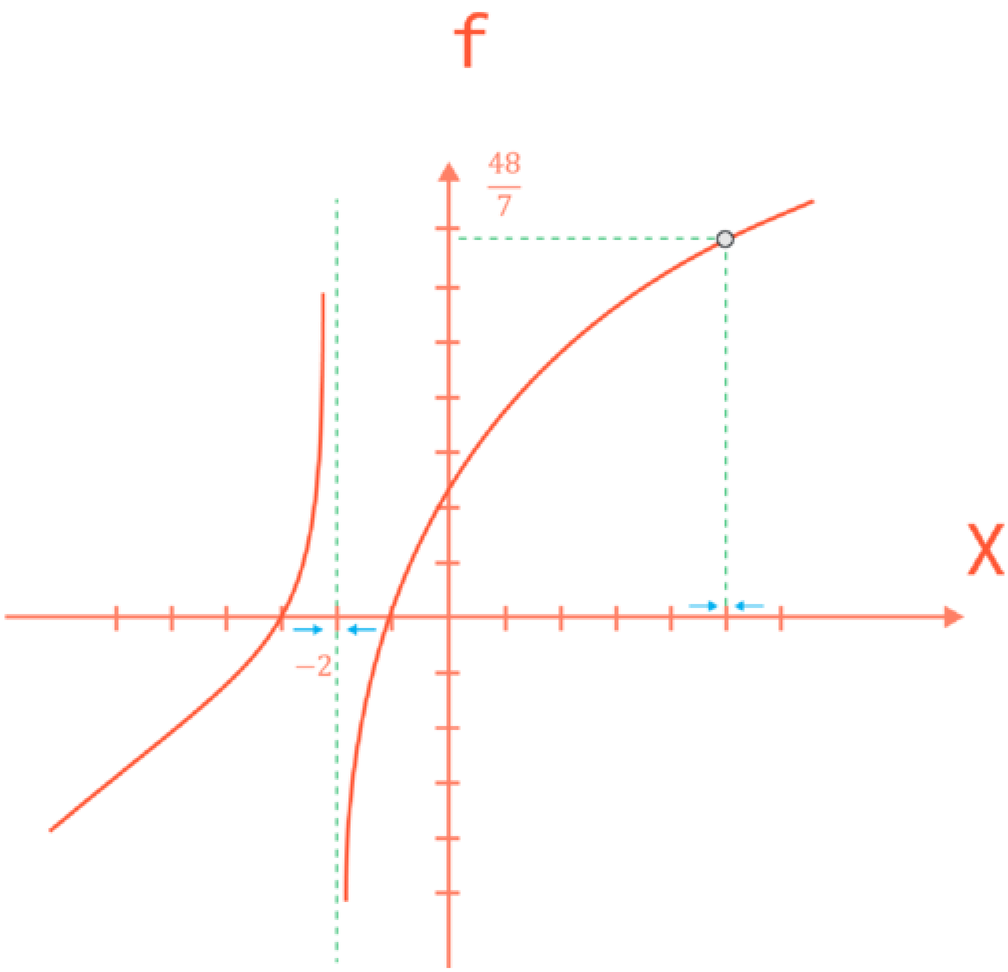


График рассматриваемой функции

Пределы в ML

В машинном обучении пределы находят множественное применение. Несколько примеров:

1. Сквозь пределы появляются производные, и мы можем минимизировать различные функционалы, максимизировать метрики.

2. В статьях по МО и алгоритмам можно встретить выражения вида $O(n \cdot logn)$, описывающие сложность алгоритмов. За этой формулировкой также кроются пределы, некоторое асимптотическое поведение функций.

Строгое определение

Математически **определение предела** записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad f(U_{\delta_\varepsilon}(x_0)) \subset V_\varepsilon(a)$$

Словами определение можно сформулировать так:

Предел некоторой функции $f(x)$ по базе $x \to x_0$ равен числу а **тогда и только тогда**, когда для любого эпсилон больше нуля существует такая дельта-окрестность больше нуля, что образ дельта-окрестности возле точки x_0 полностью содержится в эпсилон-окрестности точки а.

Иными словами, если мы утверждаем, что предел функции $f(x)$ по базе $x \to x_0$ равен числу а, то, какую бы маленькую ε-окрестность точки а мы ни взяли, всегда найдётся такая δ-окрестность точки x_0, что её образ будет полностью лежать внутри ε-окрестности точки а.

Давайте проиллюстрируем это определение на графике.

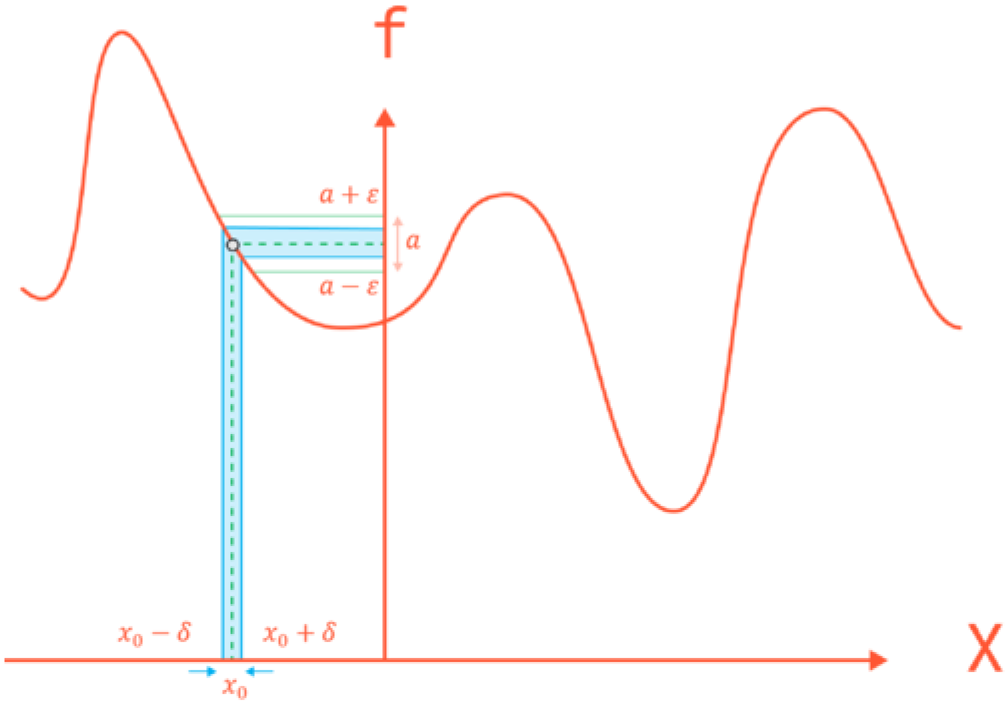


Иллюстрация определения предела

Какую бы зелёную "трубочку" возле точки а мы ни выбрали, всегда найдётся такая δ-окрестность точки x_0, что её образ будет лежать внутри этой зелёной "трубочки".

Что такое **образ δ-окрестности**? Это синяя "трубочка", которую мы отображаем на ось Of. То есть синяя "трубочка", вложенная в зелёную, иллюстрирует, что образ δ-окрестности точки x_0 лежит внутри ε -окрестности точки а.

Чтобы понять, почему это работает, приведём контрпример.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq b$$

В таком случае мы можем установить такой ε, что не найдётся ни одного δ, при котором образ δ-окрестности точки x_0 будет полностью содержаться внутри ε-окрестности точки а.

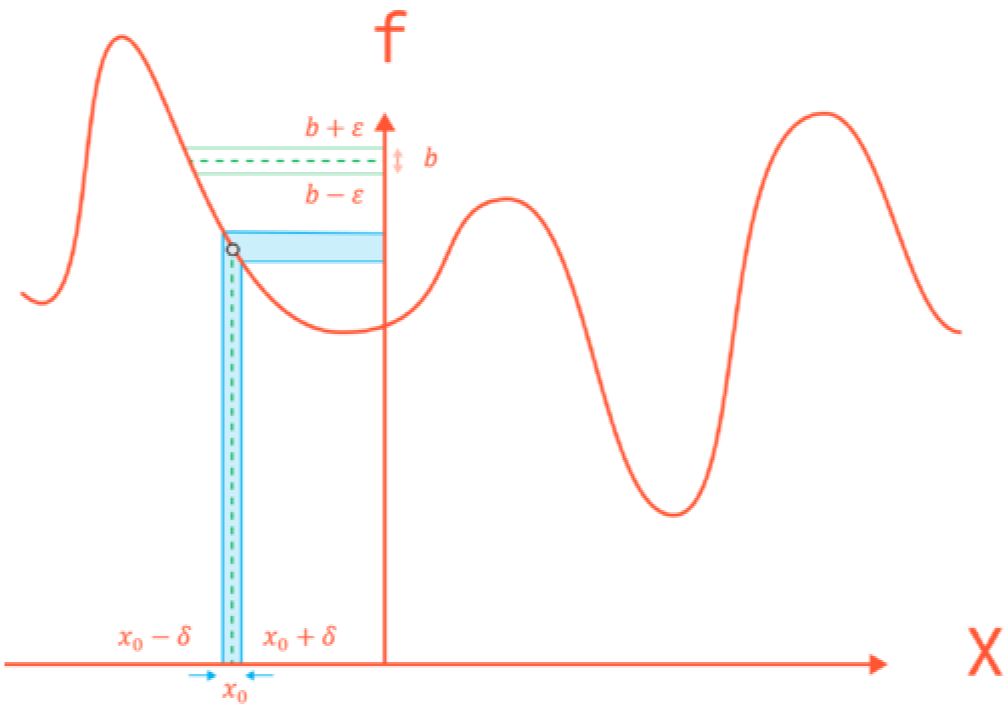


Иллюстрация контрпримера

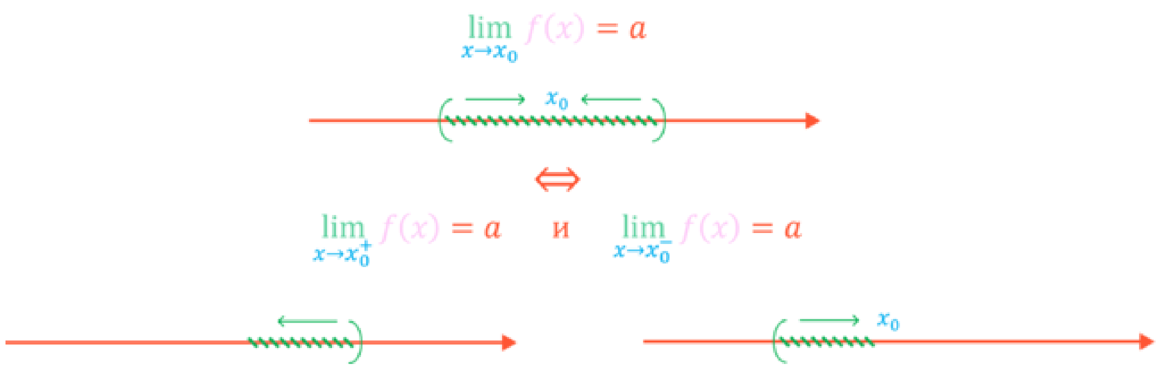
Можем ли мы подобрать такую синюю "трубочку", чтобы она полностью лежала внутри зелёной? Кажется, что нет.

Одно- и двусторонние пределы

Двусторонний предел — предел функции, подразумевающий "приближение" к предельной точке с обеих сторон.

Односторонний предел подразумевает "приближение" только с одной стороны — справа или слева. Такие пределы называются соответственно правосторонними и левосторонними.

Здесь важно отметить их связь. Если мы утверждаем, что существует двусторонний предел, и он равен числу a, то должны существовать право- и левосторонние пределы, равные числу a.



Связь односторонних пределов с двусторонними можно проиллюстрировать на примере следующей функции:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Посчитаем односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Здесь оба односторонних предела существуют, но равны разным числам, поэтому двусторонний предел существовать не будет:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) \text{ не существует}$$

Алгоритм проверки предела через определение

Строгое математическое определение можно записать в **форме неравенств**:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad \forall x : |x - x_0| < \delta \to |f(x) - a| < \varepsilon$$

Докажем с помощью него, например, что $\lim_{x \to 2} 10x + 5 = 25$:

Подставив всё необходимое в определение, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad \forall x : |x - 2| < \delta \to |(10x + 5) - 25| < \varepsilon$$

Нам нужно решить второе неравенство и убедиться, что существует некоторая δ, при которой оно будет верно для всех x, удовлетворяющих первому неравенству.

Решим второе неравенство:

$$|(10x+5)-25|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-2|<\frac{\varepsilon}{10}$$

Таким образом, утверждение выше верно: какой бы ε мы ни выбрали, найдется $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{10}$, для которого будет верно:

$$\forall x : |x-2|<\delta \to |(10x+5)-25|<\varepsilon$$

Простейшие пределы некоторых элементарных функций

1. Гипербола

$\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0,$ $\quad$ $\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$

$\cdot \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}=+\infty,$ $\quad$ $\cdot \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}=-\infty$

P.S. Если правый и левый предел равны бесконечностям с разными знаками, существует договорённость, что двусторонний предел будет равен бесконечности:

$\cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}=\infty$

2. Показательная функция

- $a>1:$

  $\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0,$ $\quad$ $\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$

- $0<a<1:$

  $\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty,$ $\quad$ $\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$

3. Логарифм

- $a>1:$

  $\cdot \lim\limits_{x\to 0^+} log_a x=-\infty,$ $\quad$ $\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} log_a x=+\infty$

- $0<a<1:$

  $\cdot \lim\limits_{x\to 0^+} log_a x=+\infty,$ $\quad$ $\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} log_a x=-\infty$

4. Обратные тригонометрические функции

$\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} arcctg\, x=\pi,$ $\quad$ $\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} arcctg\, x=0$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} arctg\ x = -\dfrac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} arctg\ x = \dfrac{\pi}{2}$

Базовые методы вычисления пределов

Метод №1: Элементарные функции в точке из D(f)

Если $f(x)$ — элементарная, а точка $x_0 \in D(F)$ (лежит в области определения $f(x)$), тогда $\lim\limits_{x \to x_0} = f(x_0)$.

Примеры:

- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} cos\ x = cos\ \dfrac{\pi}{2} = 0$
- $\lim\limits_{x \to e^2} ln(x \cdot e) = ln(e^2 \cdot e) = 3$

Метод №2: «Пристальный взгляд»

Метод состоит в том, чтобы "прикинуть", к какому значению стремится функция по указанной базе, и сразу найти ответ, если не возникает сложных неопределенностей.

Примеры:

- $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot sin\ x \cdot ln(1+x) = [0 \cdot 0 \cdot 0] = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{ln\ x}{x} = \left[\frac{-\infty}{0^+}\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{ln(2+e^{x+2}) \cdot arctg\ x}{sin^x\ 1} = \left[\frac{const}{\infty}\right] = 0$

Метод №3: Деление на старший/младший член

Метод предназначен для частного многочленов (или показательных выражений) и соответствующих ему неопределенностей $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Данный метод в основном работает в случаях, когда в базе также содержится бесконечность.

Примеры:

При неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, чаще всего необходимо делить на <u>старший член:</u>

- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^2+3}{3x^4+x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^4+5x^3+3)/x^4}{(3x^4+x^3)/x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^4}}{3+\frac{1}{x}}=\frac{1}{3}$

Когда возникает неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$, зачастую нужно делить не на старший член, а на <u>младший</u>:

- $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x+x^2+x^3}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+\sqrt{x^8}}}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{(x+x^2+x^3)/x^1}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+\sqrt{x^8}}}/x^1}=$
$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1+x+x^2}{-\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}=\frac{1}{-\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

Также метод можно применять к показательным функциям. В таком случае старший/младший член определяется <u>по основанию</u> показательной функции:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}+2^x}{3^x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\cdot3^x+2^x}{3^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3\cdot3^x+2^x)/3^x}{(3^x+1)/3^x}=$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^x}=3$

Метод №4: Домножение на сопряженное

Использование формул типа $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ или $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ для избавления от неопределенностей.

Пример:

- $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{x-1}=$
$=\lim\limits_{x\to1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)=3$

Продвинутые методы вычисления пределов I

Метод №5: Символика Ландау и связанные обозначения

Символы Ландау — новые для нас элементы математического языка, которые используются для сравнения асимптотического поведения функций. Они оказываются полезны как для решения пределов, так и в прикладных областях, например, для оценки оптимальности алгоритмов.

▷ Функцию $f(x)$ называют **бесконечно малой** по базе $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Например, $\sqrt{x}$ является бесконечно малой по базе $x \to 0$

▷ Функцию $f(x)$ называют **бесконечно большой** по базе $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Например, $\sqrt{x}$ является бесконечно большой по базе $x \to +\infty$

▷ Функцию $f(x)$ называют **финально ограниченной** по базе $x \to x_0$, если в некоторой окрестности точки x_0 она ограничена

Например, $f(x) = \frac{1}{x}$ финально ограничена по базе $x \to 5$, но не является таковой по базе $x \to 0$. Это видно из графика: в окрестности точки 5 мы можем подобрать такие числа, выше и ниже которых функция значения не принимает, в окрестности же нуля такие числа мы подобрать не можем.

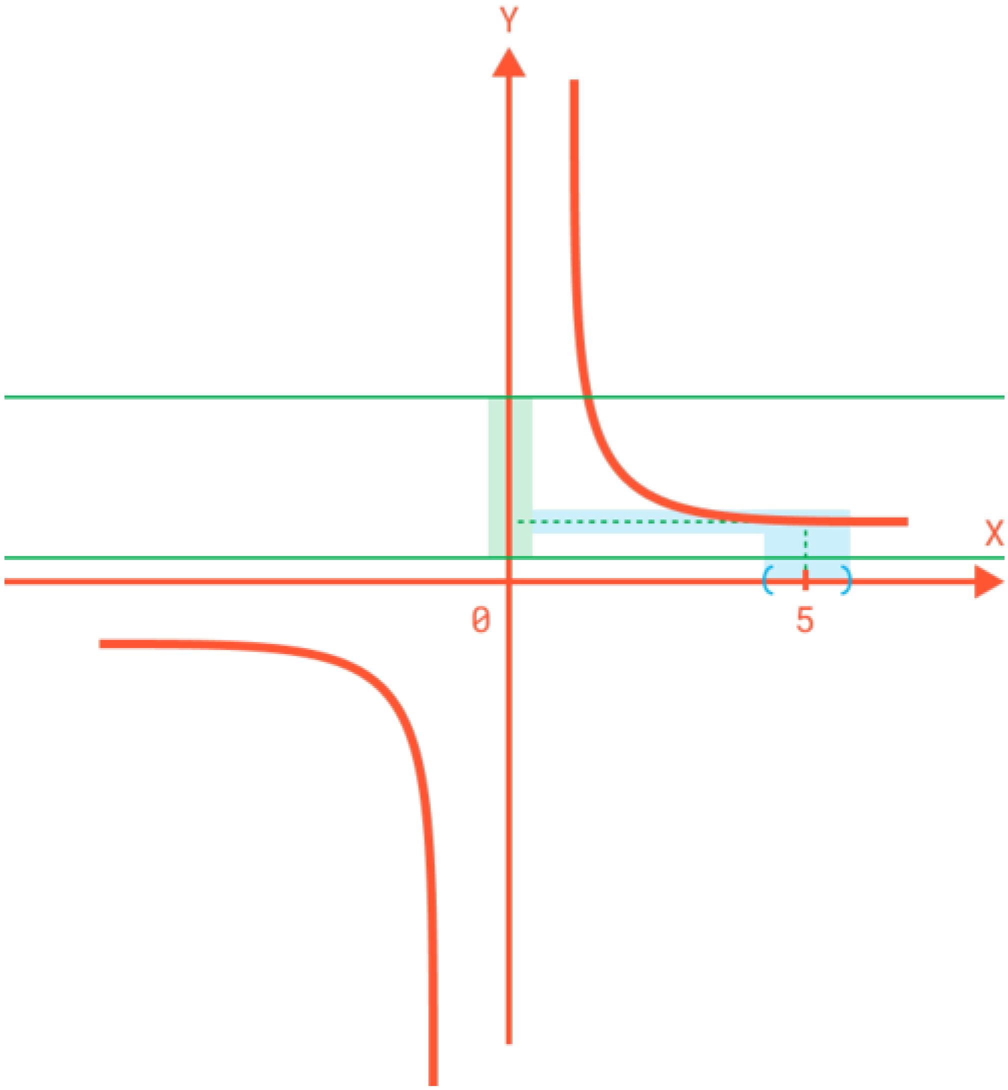


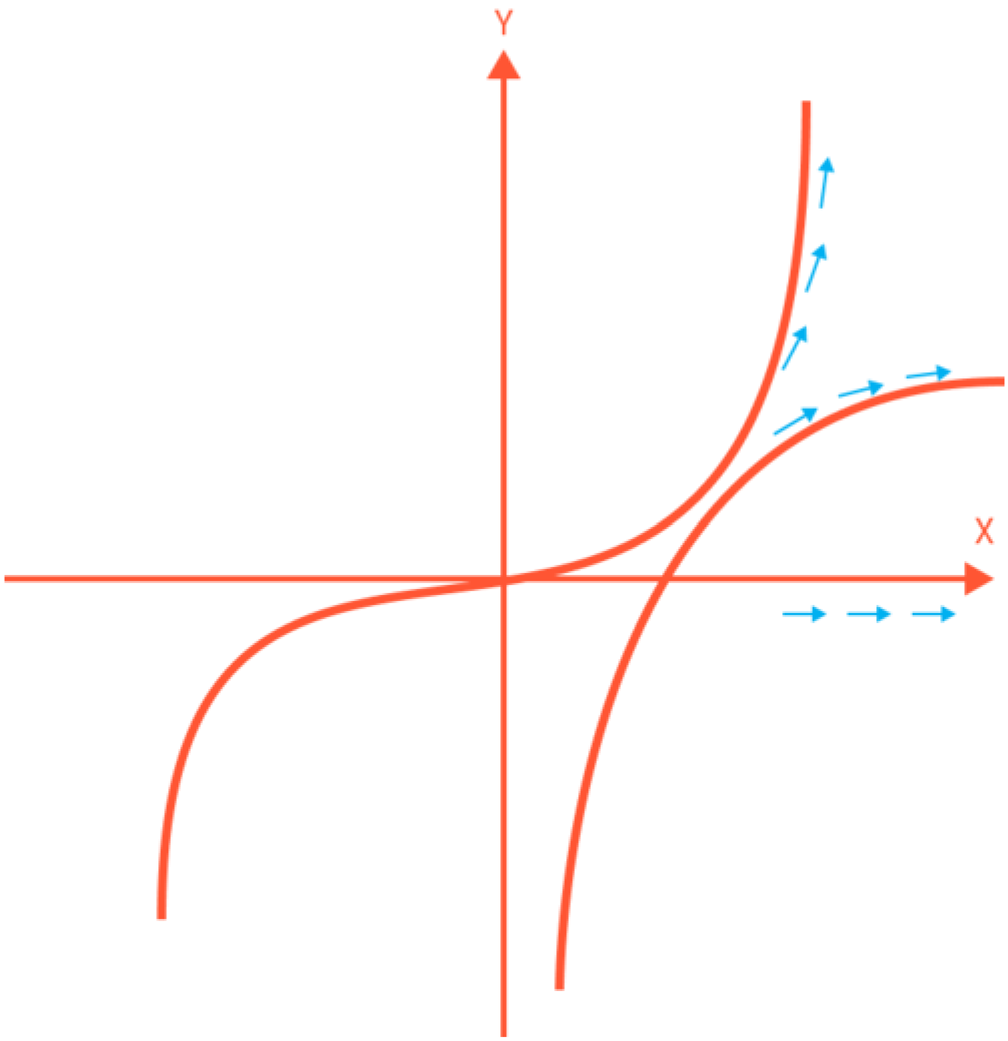
График функции y = 1/x

▷ Функция $f(x)$ есть $\mathbf{O(g(x))}$ по базе $x \to x_0$, если $\frac{f(x)}{g(x)}$ является финально ограниченной по этой же базе.

Например, $x^5 = O(x^7)$ по базе $x \to 4$, так как $\frac{x^5}{x^7} = \frac{1}{x^2}$ ф.о. по базе $x \to 4$. Причем $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{16}$. Если мы можем вычислить предел функции по некоторой базе, можно смело говорить, что эта функция финально ограничена по данной базе.

Или, например, $sin\ x = O(1)$ по любой базе, так как $\frac{sin\ x}{1}$ ограничена всюду, ведь область значений $E(\frac{sin\ x}{1}) = [-1; 1]$

Когда говорят, что $f(x)$ есть $O(g(x))$ по базе $x \to x_0$, имеют в виду, что $f(x)$ приближается к некоторому значению (или колеблется возле него) со скоростью, соизмеримой со скоростью функции $g(x)$. Например, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{log\ x} = +\infty$, то есть x^3 растет на порядок быстрее, чем $log\ x$. В таком случае $x^3 \neq O(log\ x),\ \ x \to +\infty$



▷ Функция $f(x)$ есть $\mathbf{o(g(x))}$ по базе $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Например, выше рассмотрели предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{log\ x} = +\infty$. Если перевернуть его, то как раз выйдет, что:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{log\ x}{x^3} = 0 \Rightarrow log\ x = o(x^3),\ \ x \to +\infty$, то есть логарифм растет на порядок медленнее.

▷ Функция $f(x) \sim g(x)$ **(эквивалентна)** по базе $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Эквивалентность означает идентичность функций при максимальном приближении. Например, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin\ x}{x} = 1$ (первый замечательный предел)

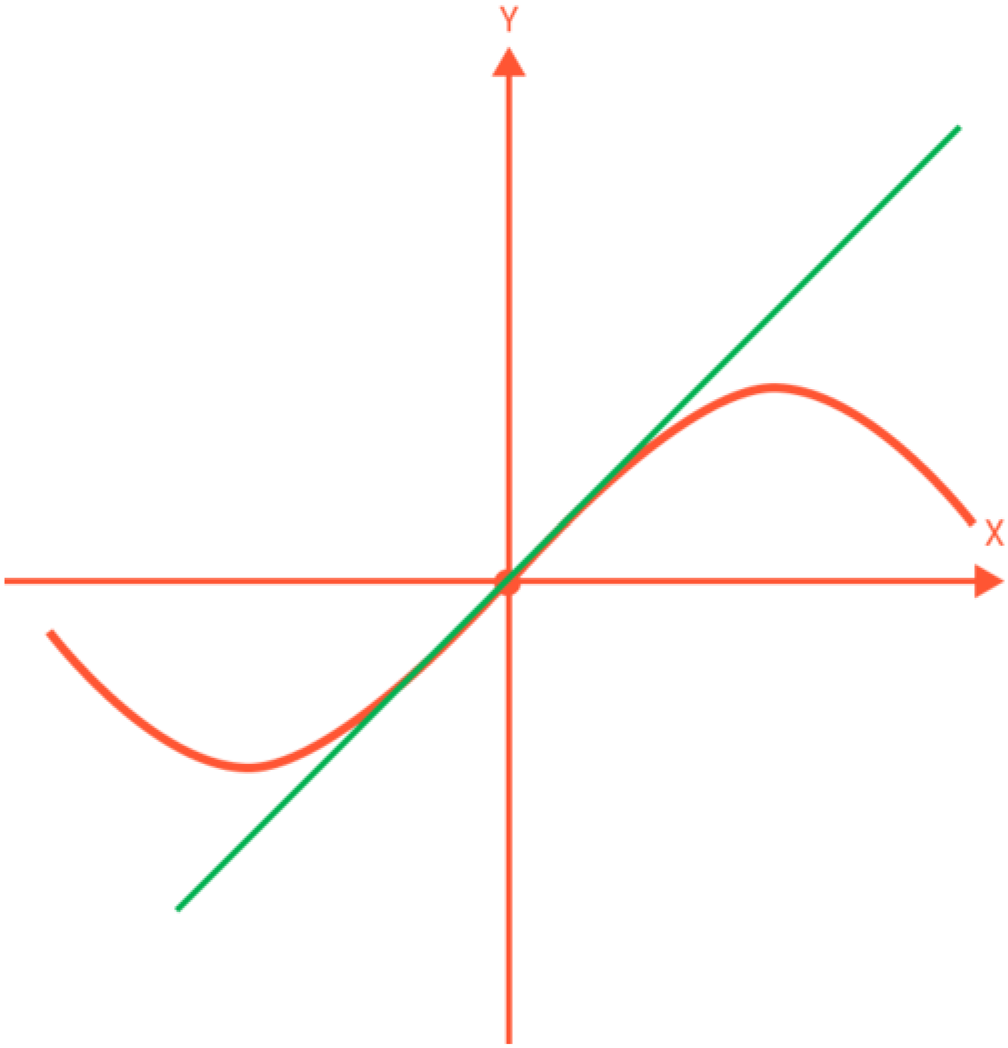


Иллюстрация эквивалентности функций sin(x) и x по базе x→ 0

Пусть $f(x)$ является бесконечно малой по некоторой базе $x \to x_0$, тогда справедливы следующие эквивалентности:

- $sin\ f(x) \sim_{x \to x_0} f(x)$,
- $tg\ f(x) \sim_{x \to x_0} f(x)$,
- $1 - cos\ f(x) \sim_{x \to x_0} \frac{f(x)^2}{2}$,
- $arcsin\ f(x) \sim_{x \to x_0} f(x)$
- $arctg\ f(x) \sim_{x \to x_0} f(x)$
- $log_a(1 + f(x)) \sim_{x \to x_0} f(x) \cdot \frac{1}{ln\ a}$

$\cdot\ a^{f(x)} - 1 \sim_{x \to x_0} f(x) \cdot ln\ a,$ $\qquad \cdot\ e^{f(x)} - 1 \sim_{x \to x_0} f(x)$

$\cdot\ (1 + f(x))^m - 1 \sim_{x \to x_0} m \cdot f(x)$

Пример:

$$1 - cos\sqrt{tg(x^4 - 256)} \sim_{x \to 4} \frac{tg(x^4-256)}{2} \sim_{x \to 4} \frac{x^4-256}{2}$$

Символика Ландау: применение

После того, как разобрались с определениями, приведем несколько фактов:

1. Произведение бесконечно малой и финально ограниченной есть бесконечно малая

$$\lim_{x \to \infty} \frac{cos\ x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot cos\ x = 0$$

2. Множители относительно функции можно заменять на эквивалентные выражения

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-cos\ x) \cdot arcsin\ x}{(\sqrt[5]{1-3x^2}-1) \cdot ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} \cdot x}{\frac{1}{5} \cdot (-3x^2) \cdot x} = -\frac{5}{6}$$

3. Бесконечно большие функции по скорости роста можно расположить в следующем порядке по убыванию: показательно-степенные, показательные, степенные, логарифмические

Тогда практически устно можно решить следующие примеры:

$\cdot \lim_{x \to \infty} \frac{x^x}{e^x} = \infty,$ $\qquad \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^x} = 0$

$\cdot \lim_{x \to \infty} \frac{3^x}{x^{100}} = \infty,$ $\qquad \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{x^{100}}{3^x} = 0$

$\cdot \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{ln\ x} = \infty,$ $\qquad \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{ln\ x}{\sqrt{x}} = 0$

$\cdot \lim_{x \to \infty} \frac{5^x}{log_3 x} = \infty,$ $\qquad \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{log_3 x}{5^x} = 0$

4. $\mathbf{f(x) + o(f(x)) \sim f(x)}$

Доказательство простое: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)+o(f(x))}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f(x)} + \lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 1 + 0 = 1$

Пример:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3^x+x^2}{4^x+ln\ x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x+o(3^x)}{4^x+o(4^x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x}{4^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0$$

Продвинутые методы вычисления пределов II

Метод №6: Логарифмирование + экспоненцирование

Решая неопределенности вида $[1^{\infty}]$ и $[\infty^{0}]$, выгодно преобразовать $f(x) = e^{ln\ f(x)}$

Пример:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{tg^4\sqrt{x}}{x}\right)^{\frac{1}{2x}} = [1^{\infty}] = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} ln(1+\frac{tg^4\sqrt{x}}{x})^{\frac{1}{2x}}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{x\to 0^+} ln\left(1+\frac{tg^4\sqrt{x}}{x}\right)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2x} ln\left(1+\frac{tg^4\sqrt{x}}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{tg^4\sqrt{x}}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\sqrt{x})^4}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

P. S. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{tg^4\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\sqrt{x})^4}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \quad \to ln\left(1+\frac{tg^4\sqrt{x}}{x}\right) \sim_{x\to 0^+} \frac{tg^4\sqrt{x}}{x}$

Метод №7: Правило Лопиталя

Для неопределенностей вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и $\left[\frac{0}{0}\right]$ в случае существования предела действует следующее правило:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Пример:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 6}\frac{(\sqrt{x-2}-2)'}{(x-6)'} = \lim_{x\to 6}\frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-2}}}{1} = \frac{1}{4}$$

Метод №8: Замена переменной

Иногда, особенно при работе с пределами тригонометрических функций, полезно совершить замену переменных, как бы сдвинув базу в другую точку. Самые популярные замены выглядят следующим образом: $x = t \pm a$ или $x = \frac{1}{t}$

Пример:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{sin\ x}{\pi^2-x^2} = \left\|\begin{matrix}\text{let} & x = t+\pi \\ \text{then} & t\to 0\end{matrix}\right\| = \lim_{t\to 0}\frac{sin(t+\pi)}{\pi^2-(t+\pi)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{-sin(t)}{-t^2-2\pi t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{t\cdot(t+2\pi)} = \frac{1}{2\pi}$$