KARPOV.COURSES >>>

Конспект №1 Элементарные функции и основные определения

1. Зачем нужна математика для DataSceince?

- Математика — самый лучший способ прокачать абстрактное мышление. Чтобы быть высокооплачиваемым DS специалистом, необходимо научиться мыслить на уровне абстракций. Например, иметь способность перевести требования заказчика на технический язык.

- Изучение новых статей и современных подходов. Без математического фундамента делать это будет практически невозможно. С большинством современных статей и новыми подходами невозможно познакомиться, имея слабую математическую базу.
- Успешно проходить собеседования. На интервью рекрутеры отмечают, если кандидат оперирует не только интуицией, но и формальным языком.

2. Математическая нотация

Математическая нотация — это способ записи математических выражений, формул и уравнений, который используется для представления математических объектов на письме или в печати. В математике существует общепринятая система символов и правил, которая позволяет удобно и точно записывать математические выражения.

Математическая нотация заключается в использовании символов для представления математических операций, неопределенных чисел, отношений и любых других математических объектов, а также объединения их в выражения и формулы.

В качестве примера рассмотрим, как записывается в математической нотации определение предела функции:

$$\lim_{x \to x_0} = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad f(U_{\delta_\varepsilon}(x_0)) \subset V_\varepsilon(a)$$

А так данное выражение выглядит на привычном языке:

"Предел функции $f(x)$ по базе x стремится к x_0 равен числу a тогда и только тогда, когда для любого эпсилона, больше нуля, найдется такая дельта, больше нуля, что образ выколотой дельта−окрестности точки x_0 будет подмножеством эпсилон−окрестности точки a."

Математическая нотация позволяет значительно сократить объем записи, а также избежать разночтений.

3. Основные символы и обозначения в математической нотации

Символы математической нотации { }, ∈, ∉, :

$\{\}$ — знак множества (некий набор элементов)

Примеры:

- $A = x_1, x_2, x_3 \leftarrow$ множество, состоящее из элементов x_1, x_2, x_3
- У Винни Пуха есть сразу 3 пуховика: осенний(x_1), весенний(x_2), зимний(x_3)
- У Винни Пуха есть $A = x_1, x_2, x_3$

$\in$, $\notin$ — знак принадлежности / не принадлежности к множеству

: (или $|$) — “такой что”

Примеры:

- $x \in A$ или $x \notin A$←элемент x принадлежит или не принадлежит множеству A

В гардеробе Винни Пуха нет летнего топика $y : y \notin A$

- $\{x \in A : P(x)\}$ ←множество элементов $x \in A$, обладающих свойством $P(\cdot)$

Гардероб B Пяточка — тот же, что у Винни Пуха, только за исключением вещей не XL размера:

$B = \{x \in A : P(x) = XL\}$, где B — гардероб Пяточка, $P(\cdot)$— свойство размера

Символы математической нотации ⊂, ∪, ∩, \, ∅

$\subset$, $\supset$ — подмножество

Пример:

- $B \subset A$←множество B является подмножеством множества A (B содержится в A)

$\cap$ — пересечение множеств

$\cup$ — объединение множеств

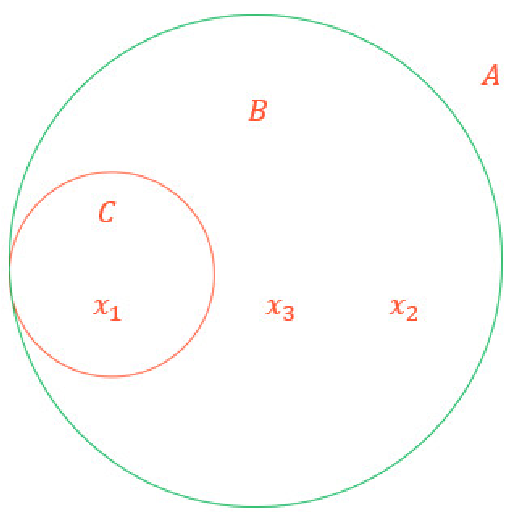
$\backslash$ — разница множеств

$\varnothing$ — пустое множество

Пусть $A = \{x_1, x_2, x_3\}$, $B = \{x_2, x_3\}$, $C = \{x_1\}$ — гардеробы Винни Пуха, Пяточка и Совы соответственно, тогда следующие утверждения верны:

- $B \cap C = \emptyset$← пересечение гардеробов Пяточка и Совы — это пустое множество
- $A \cap C = x_1$ ←пересечение гардеробов Винни Пуха и Совы — это $\{x_1\}$
- $A = B \cup C$ ← гардероб Винни Пуха — это объединение гардеробов Пяточка и Совы
- $A \backslash C = \{x_2, x_3\} = B$ ← разница гардероба Винни Пуха с гардеробом Совы — это $\{x_2, x_3\}$, то есть гардероб Пяточка.

Схематичное отображение множеств на графике:



- $B \subset A$
- $A = B \cup C$
- $B \cap C = \emptyset$
- $A \cap C = \{x_1\}$
- $A \backslash C = \{x_2, x_3\} = B$

Символы математической нотации *N*, *Z*, *Q*, *R*, *C*

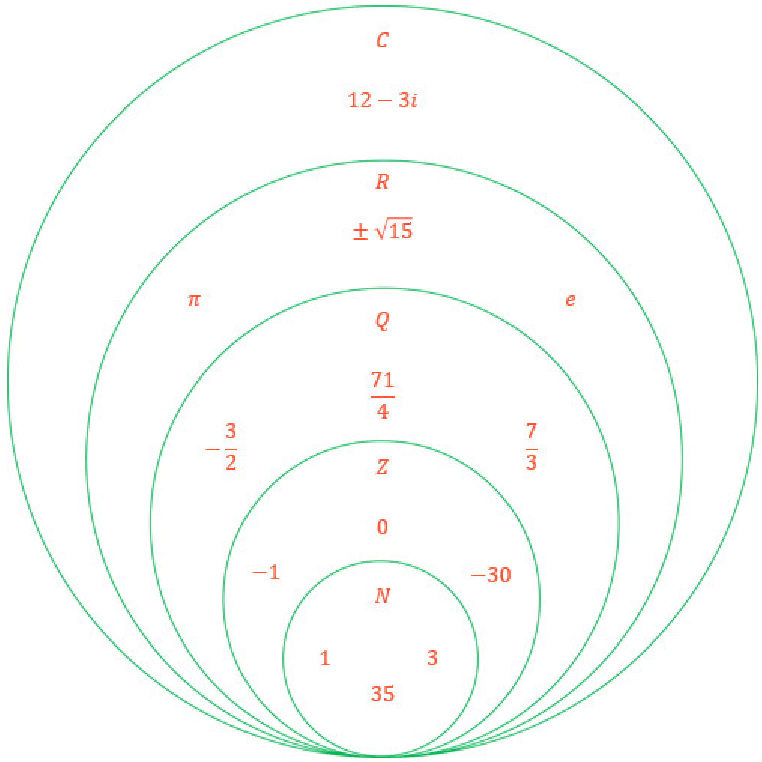
$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ — множество натуральных чисел

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$ — множество целых чисел

$Q = \{x \in R : x = p/q, p, q \in Z\}$ — множество рациональных чисел

R — множество всех вещественных (действительных) чисел

C — множество всех комплексных чисел



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, однако $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ←пример вещественного, но не рационального числа

Символы математической нотации ∃, ∀,⇔, ⇒

$\exists$ — "существует", “найдется”. Используется для выражения существования элемента или объекта. Например, $\exists x$ означает "существует такой x".

$\forall$ — "для всех", “для любого”. Используется для выражения универсального квантора. Например, $\forall x$ означает "для всех x".

$\Leftrightarrow$ — "тогда и только тогда", “равносильно”. Используется для выражения двусторонней импликации. Например, $A \Leftrightarrow B$ означает "A тогда и только тогда, когда B".

$\Rightarrow$ — "влечет", "следует", “значит, что”. Используется для выражения импликации. Например, $A \Rightarrow B$ означает "если A, то B" или "A влечет В".

Поиграем в загадки!

- $A = x_1, B = x_2, C = A \cap B \Rightarrow C = \emptyset$ ИЛИ «Мыслю $\Rightarrow$ существую»
- $N = \forall x \in \mathbb{Z} : x > 0$ ИЛИ «Я добьюсь твоего сердца $\forall$ ценой!»

$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A : x \in B$ ИЛИ «Мыслю, следовательно, $\exists$»

- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ИЛИ «Вечное наслаждение $\Leftrightarrow$ вечному лишению»

4. Окрестность точки

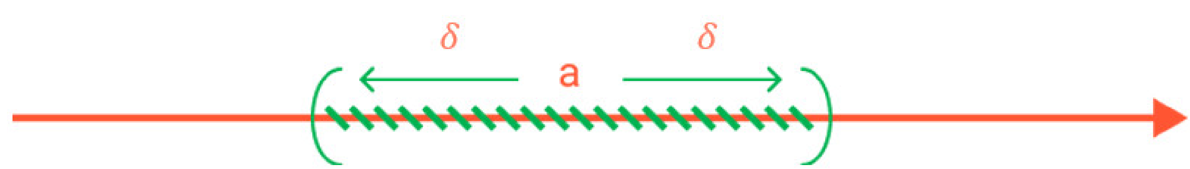
Окрестность точки — это множество всех точек, которые находятся в некотором фиксированном расстоянии от этой точки.

Это буквально некоторая область с определенным радиусом, окружающая выбранную точку.
Некоторый “район”, в котором живет и обитает точка со своими соседями.

Говоря более формально, окрестность точки x в пространстве может быть определена как множество всех точек y, для которых расстояние между x и y меньше заданного положительного числа

δ, называемого **радиусом окрестности**:

$U_\delta(a) = x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < \delta$



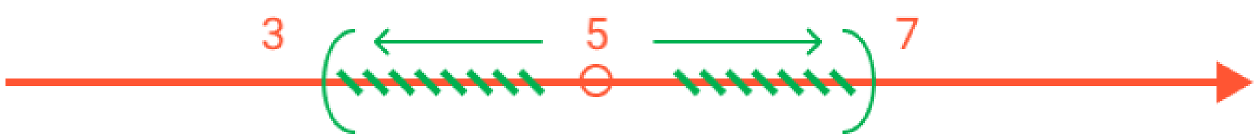
- Для одномерного случая:

$$U_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$$

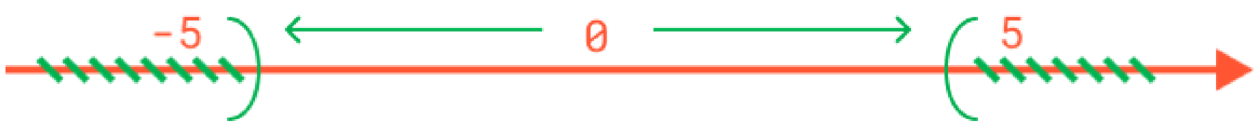
- Еще часто используют **проколотые** окрестности:

$$\mathring{U}_\delta(a) = (a-\delta; a) \cup (a; a+\delta)$$

Примеры:



$$\mathring{U}_2(5) = (3,5) \cup (5,7)$$



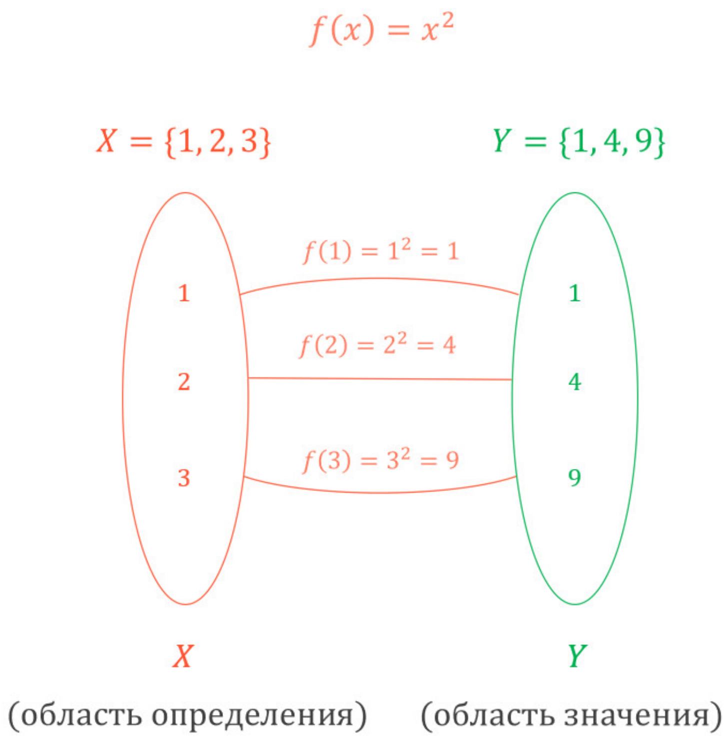
$$U_5(\infty) = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$$

5. Функции одной переменной

Значительная часть математики посвящена анализу функций.
Функция – это отображение (соответствие) элементов одного множества в элементы другого множества:

$$f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$$

Интуитивно, функция — правило, по которому связаны два множества:



- Обычно наборы элементов, из которых и в которые происходит отображение, бесконечны, они берут все доступные для конкретной функции вещественные числа, то есть $f : R \to R$.
- Вместо (x) подставляют не только числа из $\{1, 2, 3\}$, а любые, которые только могут подставиться.
- На самом деле, если вместо x мы берем любые действительные числа, то любой f получить нельзя. Например, для функции $f(x) = x^2$ область определения будет включать только числа большие либо равные нулю:

  $f : R \to [0; +\infty)$

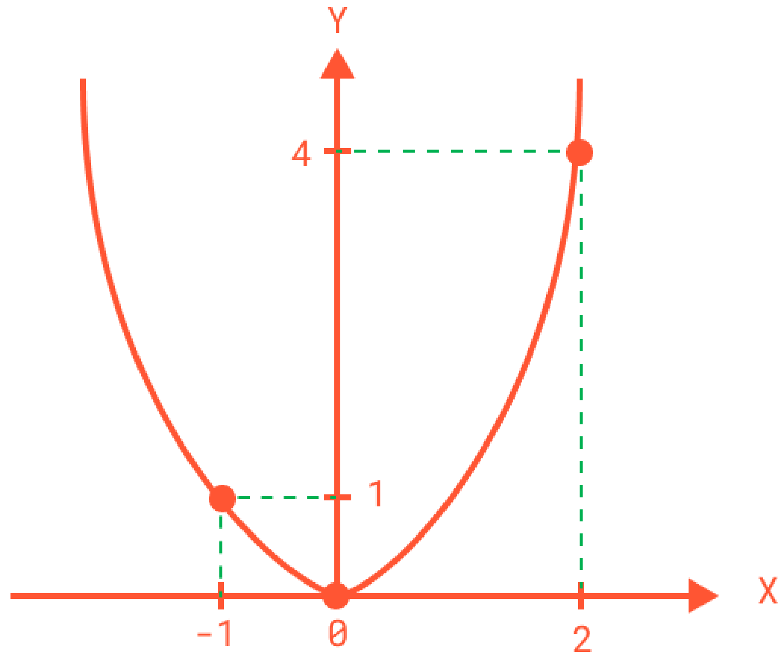


График функции $y = x^2$

- Рассмотрим еще один пример — функция $y = \frac{1}{x}$

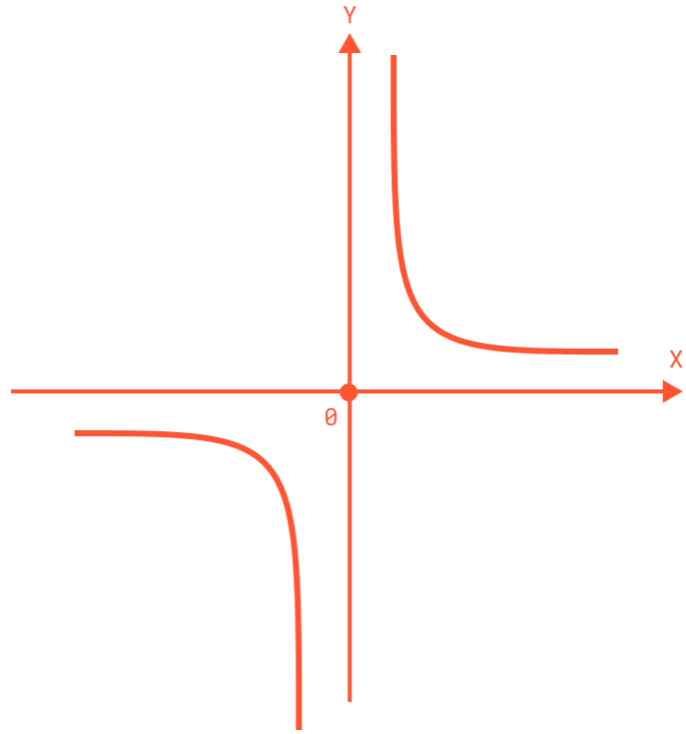


График функции $y = \frac{1}{x}$

Заметим, что $g : R \to R$ есть формулировка “с запасом” и в данную функцию нельзя “положить” $x = 0$ (на 0 делить нельзя). Ровно как невозможно получить $g = 0$.

Фактически,

$g : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$D(g) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $\leftarrow$ область определения $g(x)$

$E(g) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $\leftarrow$ область значения $g(x)$

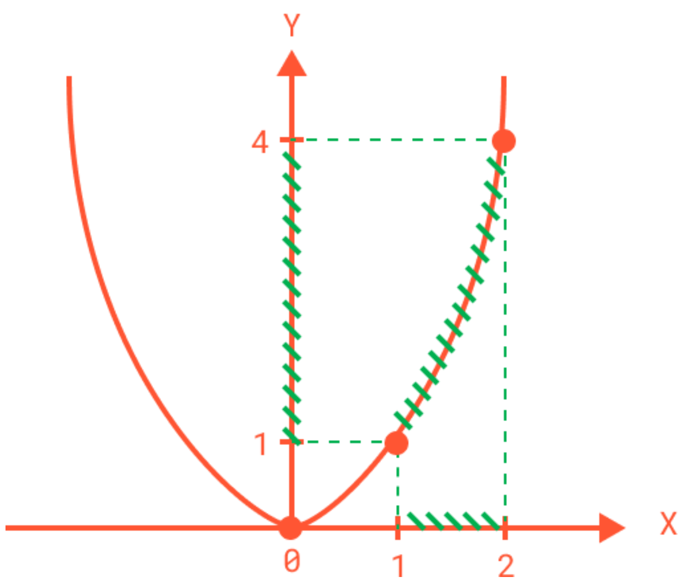
6. Образ и прообраз функции

Образ функции — это множество всех значений, которые функция может принимать при проходе через все возможные входные значения из ее области определения.

Образ множества A для функции f — это множество значений, которые принимает f при условии $x \in A$.
Так, например, если $A = D(f)$, то образом является $E(f)$.

Пример:

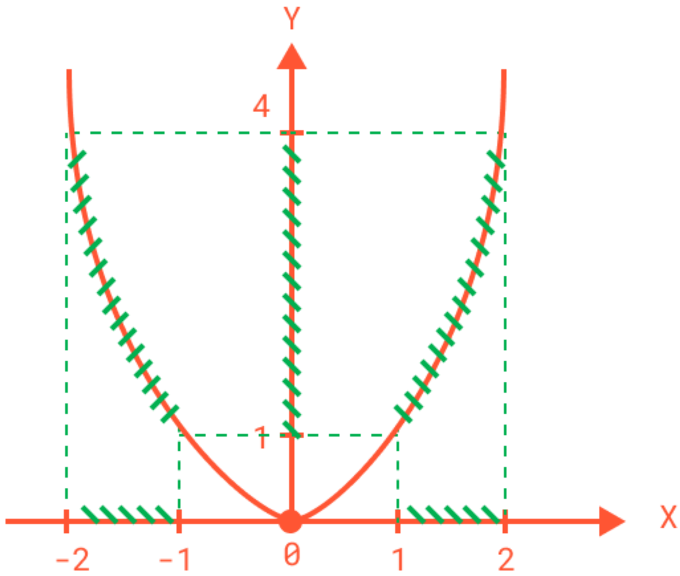
- Пусть $f(x) = x^2$
- Образ для такой функции на множестве $[1;2]$ есть $f([1;2]) = [1;4]$



Прообраз функции — это понятие, обратное образу функции. Если образ функции представляет собой множество значений, которые функция принимает, то прообраз функции — это множество входных значений, которые при применении функции дают определенный результат.

Пример:

- Пусть $f(x) = x^2$
- Прообраз для такой функции на множестве $(1;4)$ есть $f^{-1}((1;4)) = (-2;-1) \cup (1;2) f^{-1}(1;4) = (-2;-1) \cup (1;2)$



7. Композиции функций

Композиция функций — это операция, при которой результат применения одной функции используется в качестве входного значения для другой функции.

Композиция возникает в тот момент, когда мы вместо аргумента (переменной) одной функции подставляем другую функцию.

Примеры:

$g(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = x^2$

Чтобы сконструировать композицию, можно воспользоваться следующей схемой:

$x \to f \to g$

$g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2}$

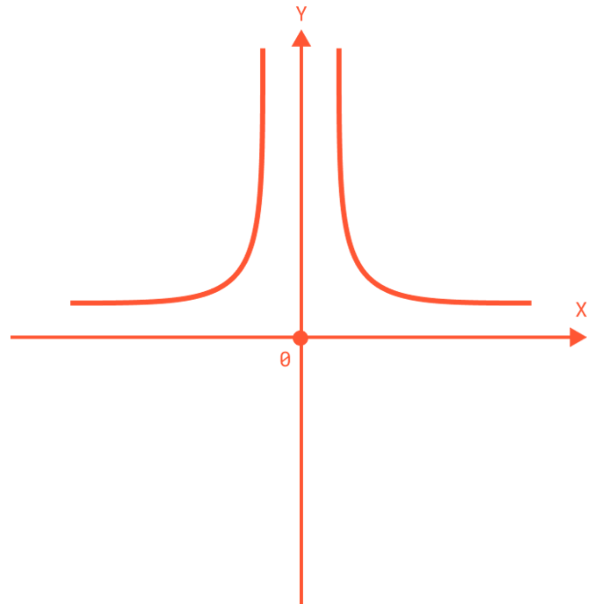


График функции $g(x) = \frac{1}{x^2}$

8. Элементарные функции

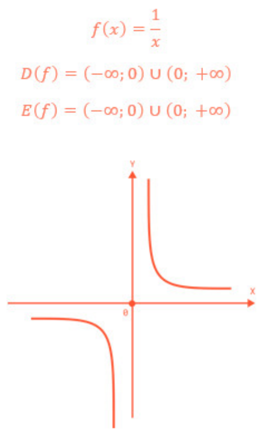
Элементарные функции — функции, которые можно получить с помощью конечного числа арифметических действий и композиций из следующих основных элементарных функций.

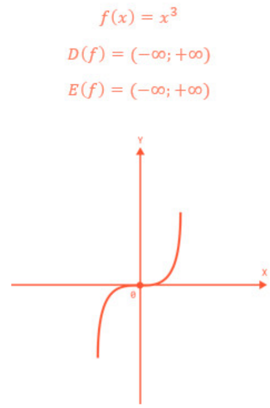
Пример элементарных функций:

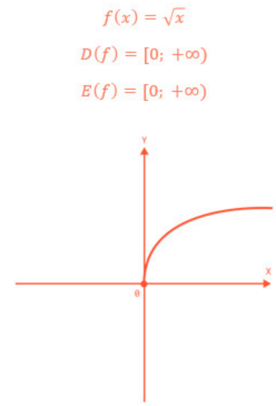
- **Степенная функция** — это функция, определенная выражением вида $f(x) = ax^b$, где a и b - постоянные числа, а x — переменная. Здесь a называется коэффициентом или масштабным множителем, а b — показателем степени.

Показатель степени b может быть любым действительным числом, включая целые числа, дроби и отрицательные числа. В зависимости от значения показателя степени, степенная функция может иметь различное поведение.

Примеры степенных функций $f(x)$, их области определения $(D(f))$, области значений $(E(f))$ и графики:





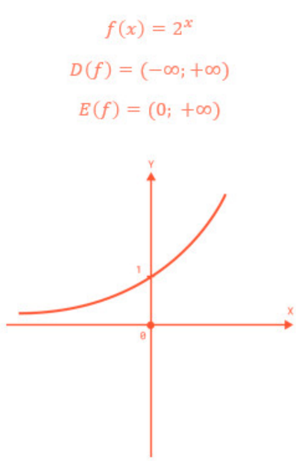


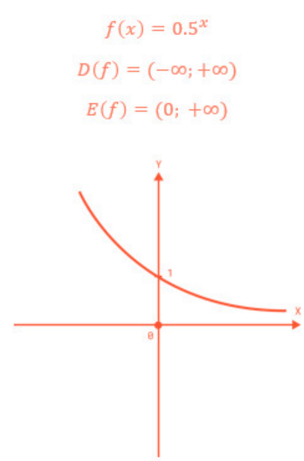
- **Показательная функция** — это функция, определенная выражением вида $f(x) = a^x$, где

a — положительное число, называемое основанием показательной функции, а x — переменная.

В показательной функции основание а может быть любым положительным числом, кроме 1. Значение x может быть любым действительным числом. Значение функции $f(x)$ будет равно а, возведенному в степень x.

Примеры показательных функций $f(x)$, их области определения $(D(f))$, области значений $(E(f))$ и графики:



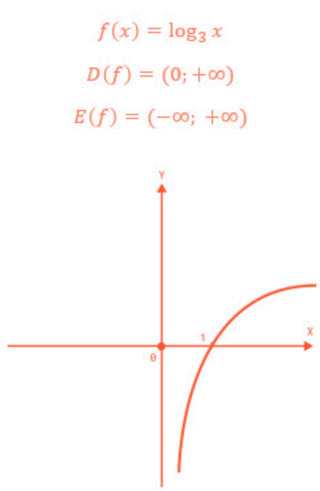


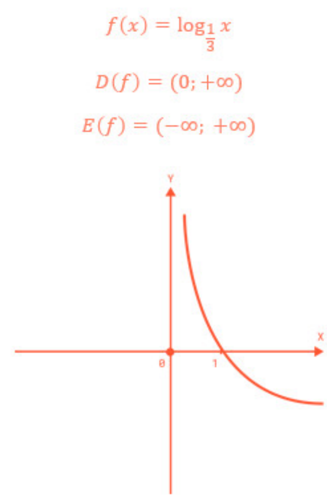
- **Логарифмическая функция** — это функция, обратная к показательной функции. Она определяется выражением вида $f(x) = log_a(x)$, где a — положительное число, называемое основанием логарифма, x — положительное число, а $f(x)$ — значение логарифма.

Логарифмическая функция позволяет найти показатель, в который нужно возвести основание a, чтобы получить значение x. Формально это означает, что если $y = log_a(x)$, то $a^y = x$.

Основание логарифма a может быть любым положительным числом, кроме 1. Значение x должно быть положительным, так как логарифм определен только для положительных чисел.

Примеры логарифмических функций $f(x)$, их области определения $(D(f))$, области значений $(E(f))$ и графики:

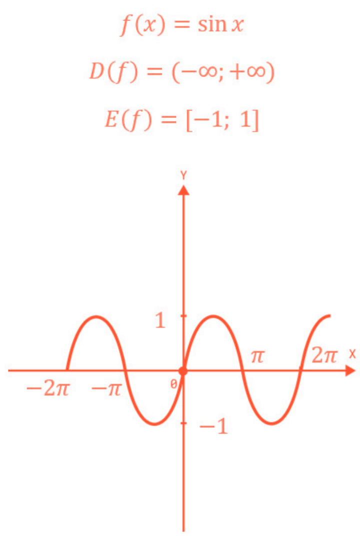


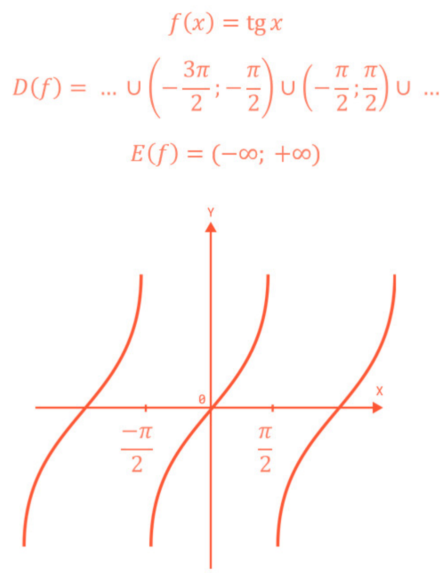


- **Тригонометрическая функция** — это функция, которая связывает углы с соответствующими значениями величин, называемых тригонометрическими функциями. Основные тригонометрические функции включают синус (sin), косинус (cos), тангенс (tan), котангенс (ctg или cot), секанс (sec) и косеканс (csc).

В тригонометрии эти функции определяются отношениями сторон в прямоугольном треугольнике или значениями координат точек на окружности единичного радиуса (треугольник на единичной окружности).

Примеры логарифмических функций $f(x)$, их области определения $(D(f))$, области значений $(E(f))$ и графики:



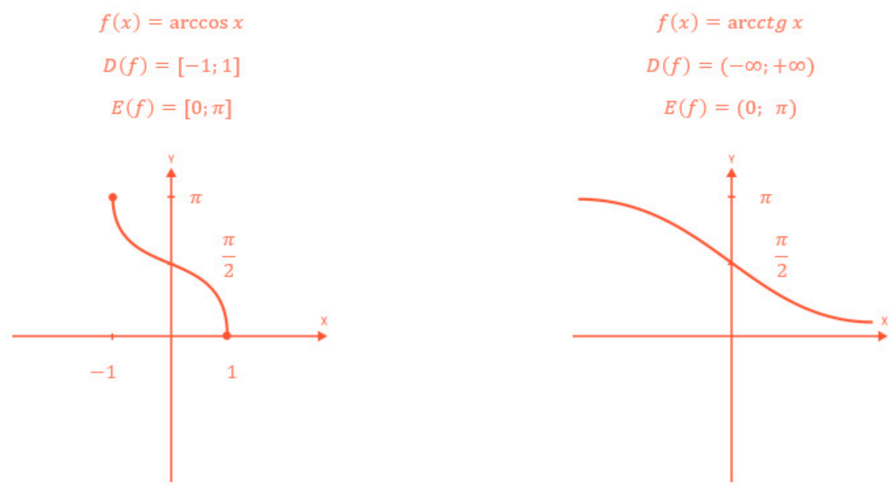


Тригонометрические функции

- **Обратные тригонометрические функции** — это функции, позволяющие находить углы, соответствующие заданным значениям тригонометрических функций.

Основные обратные тригонометрические функции включают арксинус (arcsin), арккосинус (arccos), арктангенс (arctan), арккотангенс (arccot), арксеканс (arcsec) и арккосеканс (arccsc).

Примеры обратных логарифмических функций $f(x)$, их области определения $(D(f))$, области значений $(E(f))$ и графики:



Обратные тригонометрические функции

- **Композиция функций** — это операция, при которой результатом является новая функция, полученная путем применения одной функции к результату другой функции.

Пример композиции функций:

$$f(x) = \sin(x^2) + \frac{\log(x)}{\operatorname{arctg}(e) \cdot x}$$

Композиции функций тоже являются элементарными функциями!

Это свойство нам пригодится в будущем, когда более детально начнем рассматривать пределы функций, исследовать их на непрерывность и дифференцируемость.