S1201 Logique

TD1

Proposition-Calcul propositionnel-Prédicat

Connecteurs logiques et Tables de vérité en ligne dans moodle cours S1201 Logique.

Ces exercices sont aussi l'occasion de faire le point sur les notions prérequises telles que les ensembles usuels, les bases de l'arithmétique, les symboles, etc

1 Propositions et valeur de vérité

1.1. *Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :*

1. *(5 est un entier naturel) ou* $(2 < 3)$
2. *(5 est un entier relatif négatif) ou* $(2 > 3)$
3. $(3 > 2)$ *et* $(2 + 3 = 4)$
4. $(3 > 2) \Rightarrow (2 + 3 = 4)$
5. $(3 > 2)$ *et* $(2 + 3 = 5)$
6. $(2 + 3 = 4) \Rightarrow (2 \leq 3)$

1.2. *Discuter suivant les valeurs de vérité de p, q, r les valeurs de :*

1. $p \vee q \Rightarrow r$
2. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
3. $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
4. $q \vee (\overline{q} \wedge p)$
5. $[(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)] \Leftrightarrow [\overline{(p \Leftrightarrow q)}]$
6. *Compléter tous les cas possibles d'une table de vérité à 4 variables p,q,r,s. Combien a-t-elle de lignes ? Que représente une ligne ?*

1.3. *Pour chaque proposition décrire les connecteurs utilisés et écrire leur valeur de vérité :*
Rappels faits par l'enseignant : x divise y, nombres premiers,premiers entre eux.

1. *Si l'année 2018 est bissextile alors* 45 *est divisible par* 5
2. *Si* 15 *et* 45 *sont premiers entre eux alors* 18 *est divisible par* 4
3. *Si* 2^{617} *est divisible par* 1024 *alors* $2^{617} \geq 2^{10}$
4. *La* $10^{400ieme}$ *décimale de* π *est* 3 *ou* 29 *est un nombre premier ou* 8 *divise* 545.524.350.256

2 Propriétés des connecteurs dans l'ensemble des propositions, tautologie, antilogie, table de vérité

2.1. *Plaçons nous dans l'ensemble des propositions :*

1. *Prouver l'associativité du connecteur* $\vee$
2. *Prouver la distributivité du connecteur* $\wedge$ *sur le connecteur* $\vee$ *et de même la distributivité du* $\vee$ *sur le* $\wedge$
3. *Le connecteur ou exclusif noté* $\oplus$ *est-il associatif ?*

Dans les deux exercices suivants p,q,r,s,v,x sont des propositions.

2.2. *Les propositions suivantes sont-elles des tautologies* ***(1)*** *des antilogies* ***(0)*** *?* ***(réponse rapide)***

1. $p \vee \overline{p}$; $q \wedge \overline{q}$; $p \vee q$; $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$
2. $r \Rightarrow (s \Rightarrow r)$; $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$
3. $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$; $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$ ***(Lois d'absorption)***

2.3. *Développer les expressions suivantes :*

1. $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \vee (x \wedge v)$ *forme disjonctive.*
2. $(p \vee q) \wedge (r \vee s \vee x)$ *forme conjonctive.*

2.4. *Retrouver des propositions simples ayant pour table de vérité :*

p	q	f(p,q)	g(p,q)
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0

et

p	q	r	h(p,q,r)	k(p,q,r)
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	0	0	0	0

3 Prédicat, théorème, implication

3.1. *Les énoncés suivants sont-ils des prédicats ?* ***(réponse rapide)***

$\boxed{x \in R,\ x = \pi}$; $\boxed{cos(t) = 1}$; $\boxed{z \in C,\ z \geq 2}$

3.2. *Les énoncés suivants sont-ils des théorèmes ?*

1. $x \in R,\ y \in R,\ x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2$
2. $a \in R,\ b \in R,\ a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

3.3. *Ecrire la négation, la réciproque et la contraposée de chacune des propositions :*

1. *Si -1 a une racine carrée réelle alors je suis bon en math.*
2. *S'il fait beau et si je suis en vacances alors j'irai à la plage.*
3. *Si mon solex est cassé ou si je n'ai plus d'essence alors j'irai à pied et je serai en retard.*

4 Applications

4.1. *Soient p et q deux propositions quelconques, on définit le connecteur $\downarrow$« ni »par :*

$$p \downarrow q = \overline{p} \wedge \overline{q}$$

1. *Exprimer $\overline{p}$, $p \wedge q$,$p \vee q$, $p \Rightarrow q$ en utilisant* ***uniquement*** $\downarrow$
2. *Le connecteur $\downarrow$ est-il associatif ?*

4.2. *Décider si le raisonnement suivant est valide, c'est-à-dire, une fois écrit sous forme propositionnelle est-ce un théorème ?*

Jean est fatigué ou malade
S'il est fatigué alors il est contrarié
Jean n'est pas contrarié

Donc Jean est malade
(On définira 3 propositions élémentaires p, q, r et les connecteurs nécessaires afin d'écrire ce raisonnement)

4.3. *Le but de cet exercice est de décrire le comportement d'un additionneur 1 bit.*

1. *Ecriture d'un entier en base b, $b \in N^*$ et $b \neq 1$*
   Pour tout entier naturel , il existe un développement unique de la forme :
   $$x = x_n b^n + x_{n-1} b^{n-1} + \cdots x_1 b^1 + x_0$$
   $$0 \leq x_i < b, x_i \in N, x_n \neq 0$$
   - *L'entier n est le plus grand entier tel que $b^n \leq x$*
   - *x s'écrit alors $(x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0)_b$*

   Chaque étudiant préparera un exemple d'écriture d'entier en base 10*, en binaire(base* 2*) et en hexadécimal* $(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\})$
2. *Ecrire les entiers suivants en base* 2 *:* $15, 229, 2018$
3. *Ecrire les entiers suivants en base* 10 *:* $(110)_2, (1011001)_2, (1111110100)_2$
4. *Effectuer les additions suivantes en base* 10 *et vérifier en base* 2 *:*$15 + 229$*,*$229 + 2018$
5. *De même, effectuer l'addition en base* 2 *et vérifier en base* 10 *:* $(1111110100)_2 + (1011001)_2$
6. *Présentation par l'enseignant de l'additionneur 1 bit et complet (comportement fonctionnel)*

7. *A partir d'une colonne quelconque d'une addition posée en base* 2 *(cf* 5.*), faire les tables de la fonction somme* s *et de la fonction retenue de sortie* rs

8. *Exprimer ces deux fonctions à l'aide de leur table de vérité. La fonction* s *à l'aide du ou exclusif* $\oplus$ *et la fonction* rs *de manière simplifiée*