Les graphes par l'exemple

IUT d'informatique de Bordeaux

11 septembre 2016

Table des matières

1 Introduction aux graphes

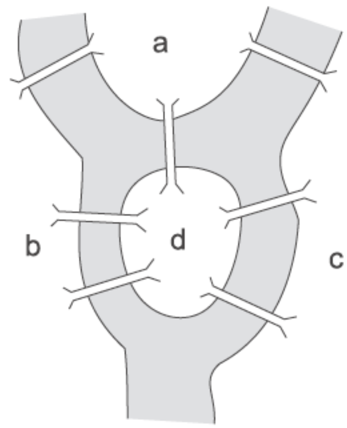
1.1 Deux petits problèmes

Problème 1. Comment tracer 5 segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement 3 autres ?

aide : représenter chaque segment par un point rouge. On reliera deux points pour indiquer que les segments se coupent.

Problème 2. Problème des ponts de Koenigsberg :

Au XVIIIe siècle, la ville de Koenigsberg comprenait 2 îles et 7 ponts suivant le plan ci-dessous.



Les habitants souhaitaient faire une promenade passant une et une seule fois sur chaque pont. Y sont ils arrivés ?

1.2 Premières définitions

1.2.1 Vocabulaire de base : Graphe, sommets, arêtes.

Définition 1. Un **graphe** G (non orienté) est constitué d'un ensemble $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ de points appelés sommets, et d'un ensemble $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ d'arêtes, tels qu'à chaque arête sont associés deux éléments de S, appelés ses extrémités.

Les deux extrémités peuvent être distinctes ou confondues ; dans ce dernier cas, l'arête s'appelle une boucle. Une première manière d'évaluer la complication d'un graphe est de compter le nombre de ses sommets ; les mathématiciens ont donné à ce nombre un nom particulier (que l'on retrouve dans d'autres domaines, par exemple en algèbre).

Définition 2. L'**ordre** d'un graphe est le nombre de ses sommets.

Définition 3. Etant donnée une arête a associée à $[s_1, s_2]$, on dit que les sommets s_1 et s_2 sont les **extrémités** de l'arête a, et s_1 et s_2 sont dits **adjacents**.
Lorsque $s_1 = s_2$, on dit que a est une **boucle**.
Un graphe est dit **simple** si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle.

Remarque 1. Deux arêtes sont dites parallèles lorsqu'elles ont mêmes extrémités.

Exercice 1. Considérons le graphe G_1 d'ordre 4 défini par : Soit $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et $A = \{a, b, c, d, e\}$ tel qu'aux arêtes a, b, c, d, e soient respectivement associés $[s_1, s_1], [s_1, s_2], [s_1, s_2], [s_1, s_3], [s_2, s_3]$.

1. Représenter ce graphe.
2. Utiliser le vocabulaire des définitions précédentes sur ce graphe.

Exercice 2. Sur la figure 1, dites si certains graphes sont identiques .

Définition 4. Un graphe simple est dit **complet** si tous ses sommets sont adjacents, c'est à dire si toutes les arêtes possibles existent (sauf les boucles). On appellera K_n le graphe complet à n sommet (il n'y en a qu'un).

Définition 5. On appelle **degré** d'un sommet le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Un sommet est pair (respectivement impair) si son degré est un nombre pair (respectivement impair).

Exercice 3. Dessiner le graphe complet d'ordre 4. Combien a-t'il d'arrêtes ?
Plus généralement, quel est le nombre d'arrêtes d'un graphe complet d'ordre $n (n \geq 2)$
Expliquez pourquoi « la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe »
Déduisez en que « Dans un graphe, le nombre de sommets impairs est toujours pair. »
Résoudre le problème 1.

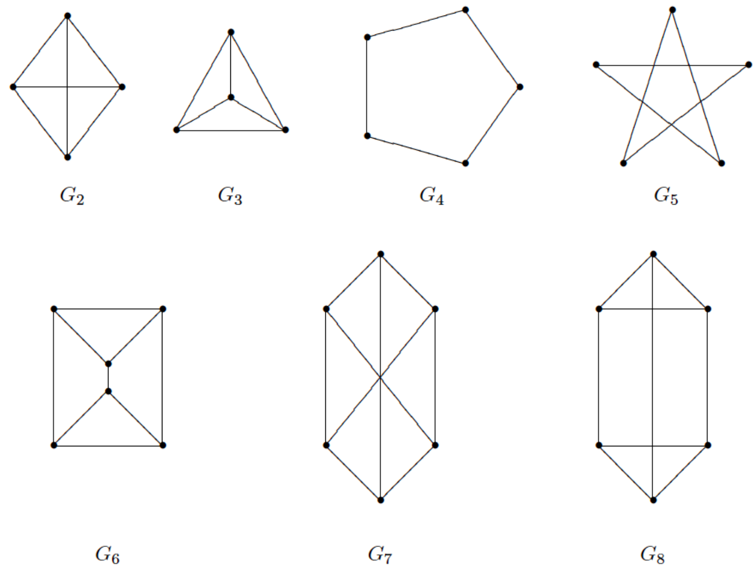


FIGURE 1 – Le même ou pas ?

1.2.2 Sous-graphes

Définition 6. Soit $G = (S, A)$ un graphe, le graphe $G_0 = (S_0, A_0)$ est un **sous-graphe** de G, si S_0 et A_0 sont des sous ensembles de S et A, tels que toutes les extrémités des arêtes de A_0 soient des éléments de S_0.

Définition 7. On dit qu'un sous-ensemble de l'ensemble des sommets est **stable** s'il ne contient pas de paire de sommets adjacents (il n'a pas d'arrête). On peut aussi parler de sous-graphe stable.

Exemple 1. Dans un groupe d'individus, on peut définir un graphe en reliant par une arête les individus qui ne peuvent se supporter. Si l'on veut choisir un sous-groupe de personnes qui travaillent ensemble, il est préférable de choisir un sous-ensemble stable ! on verra en particulier des applications de cette notion dans le chapitre sur les coloriages.

1.2.3 Chaînes et connexité

Définition 8. Une **chaîne** dans un graphe G est une suite finie : $s_0, a_1, s_1, a_2, s_2, a_3, s_3....a_n, s_n$ débutant et finissant par un sommet, alternant sommets et arêtes de telle manière que chaque arête soit encadrée par ses sommets extrémités.

La longueur de la chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la constituent ; la chaîne est fermée si $s_0 = s_n$, si de plus toutes ses arêtes sont distinctes on dit alors que c'est un **cycle**. Un k-cycle est un cycle de longueur k.

Remarque 2. Quand il n'y a pas d'ambiguïté (pas d'arêtes multiples), on peut définir une chaîne par seulement la suite de ses sommets ou de ses arêtes.

Exercice 4. Dans un tout petit pays, il n'y a que 15 villes. On peut aller de chaque ville à au moins 7 autres villes du pays par une autoroute. Peut-on se rendre, par autoroute, de la capitale du pays à chacune des autres villes ?

Définition 9. Un graphe est **connexe** si deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne (≪ c'est un graphe en un seul morceau ≫). On appelle composante connexe du graphe G un sous-graphe connexe d'ordre maximal de G (c'est à dire qui n'est contenu dans aucun autre sous-graphe connexe.).

1.2.4 Chaines Eulériennes

Exercice 5. Peut-on dessiner sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête les graphes de la figure 2 ?

Définition 10. Une chaîne est **eulérienne** si elle contient une fois et une seule chaque arête du graphe ; si la chaîne est un cycle, on l'appelle **cycle eulérien.**

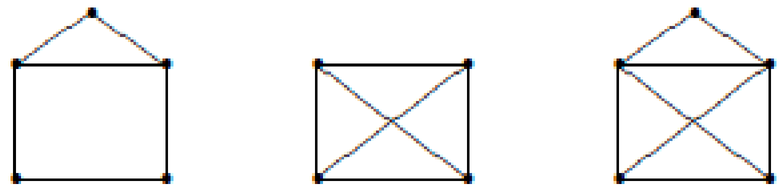


FIGURE 2 – graphe eulériens

Le théorème suivant, dit théorème d' Euler, est à l'origine de la théorie des graphes :

Théorème 1. *Un graphe connexe a une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont pairs sauf au plus deux.*
De façon plus précise :

— *si le graphe n'a pas de sommet impair, alors il a un cycle eulérien.*
— *le graphe ne peut avoir un seul sommet impair (pourquoi ?)*
— *si le graphe a deux sommets impairs, ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne.*

Corollaire 1. *un graphe ayant plus de deux sommets impairs ne possède pas de chaîne eulérienne.*

Exercice 6. Résolvez maintenant le problème des ponts de Königsberg.

1.2.5 Graphes orientés

Il existe de nombreux domaines où les graphes sont orientés. Par exemple : plan de ville, avec les sens interdits ; parcours en montagne, où il est utile d'indiquer le sens de montée ! ...

Définition 11. On appelle **graphe orienté** un graphe où chaque arête est orientée, c'est-à-dire qu'elle va de l'une des ses extrémités, appelée origine ou extrémité initiale à l'autre, appelée extrémité terminale .
Une arête orientée s'appelle un **arc**. Une chaîne orientée s'appelle un **chemin**. Une chaîne orientée fermée s'appelle un **circuit**.

Toutes les notions que nous avons définies pour un graphe ont un équivalent pour un graphe orienté. Nous nous contenterons de rajouter le mot "orienté" pour préciser ; le contexte rendra « évidente » l'interprétation à donner.

Théorème 2. *Un graphe orienté connexe possède un cycle orienté eulérien si et seulement si de chaque sommet il part autant d'arêtes qu'il en arrive.*

1.2.6 Quelques exercices

Exercice 7. Dessiner les graphes suivants :

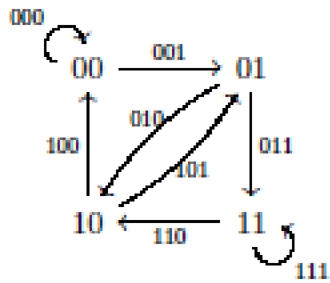
— Les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête du cube en commun.
— Les sommets du graphe sont tous les sous ensembles à deux éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$ deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide.
— Graphe associé à la situation : Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions qui ne se connaissent pas, chaque espion doit entrer en contact avec tous les espions des autres pays.

Exercice 8. Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :
Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement.
Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun ;
Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?

L'exercice suivant est une application simple du théorème sur les degrés.

Exercice 9. Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

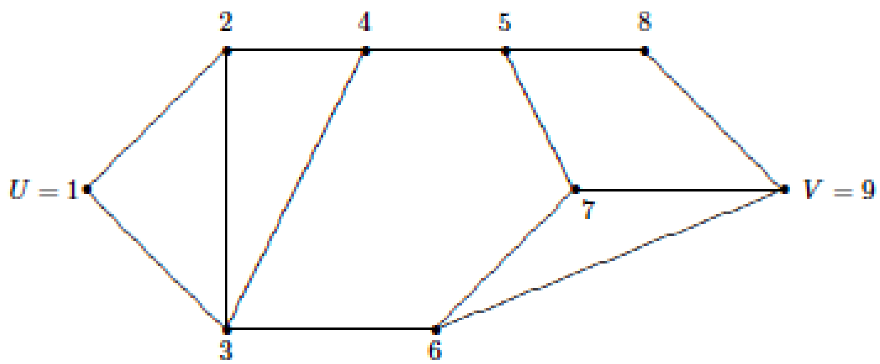
Exercice 10. Un code d'entrée d'un immeuble est composé de trois chiffres valant 0 ou 1 ; (nous dirons dans un chapitre ultérieur un mot de longueur trois écrit avec l'alphabet $\{0,\ 1\}$). Trouver un mot, de longueur aussi petite que possible, qui contienne toutes les suites de trois chiffres 0 ou 1 ; un tel mot contiendra alors toujours le code d'entrée. Vous pouvez examiner le graphe ci-dessous.



2 Graphe et matrice : problème de comptage de chaines

2.1 Un petit problème

Problème 3. Sébastien se rend régulièrement en train de la ville U à la ville V , dans un réseau donné par le graphe ci-dessous. Il fait toujours le trajet en 5 étapes, et veut faire à chaque fois un chemin différent. Combien de trajets pourra-t-il faire ?



La matrice d'adjacence de ce graphe est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le nombre de chemins de longueur n qui joignent U à V est le terme d'indice (u, v) de la matrice A^n, où $u$et $v$désignent les numéros des sommets U et V . Dans le cas qui nous intéresse, on a :

$$A^5 = \begin{pmatrix} 20 & 34 & 42 & 23 & 20 & 16 & 13 & 5 & 15 \\ 34 & 38 & 47 & 43 & 17 & 26 & 23 & 14 & 15 \\ 42 & 47 & 46 & 53 & 24 & 44 & 28 & 21 & 19 \\ 23 & 43 & 53 & 26 & 36 & 25 & 17 & 6 & 29 \\ 20 & 17 & 24 & 36 & 8 & 29 & 39 & 30 & 14 \\ 16 & 26 & 44 & 25 & 29 & 26 & 34 & 18 & 34 \\ 13 & 23 & 28 & 17 & 39 & 34 & 22 & 12 & 39 \\ 5 & 14 & 21 & 6 & 30 & 18 & 12 & 4 & 30 \\ 15 & 15 & 19 & 29 & 14 & 34 & 39 & 30 & 20 \end{pmatrix}$$

Le nombre de chemins cherché est donc 15.

2.2 Définitions et résultats

Définition 12. Soit G un graphe qui possède n sommets numérotés de 1 à n. On appelle **matrice d'adjacence** du graphe la matrice $A = (a_{i,j})$, où $a_{i,j}$ est le nombre d'arêtes joignant le sommet de numéro i au sommet de numéro j.

Remarque 3. la matrice d'adjacence décrit complètement le graphe : si l'on se donne uniquement la matrice, on peut reconstituer complètement le graphe. En fait, la matrice d'adjacence est le moyen le plus simple de coder un graphe d'une façon utilisable pour un ordinateur.

Le théorème principal du chapitre est le suivant :

Théorème 3. *Soit G un graphe de matrice d'adjacence A. Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i, j de la matrice* A^n.

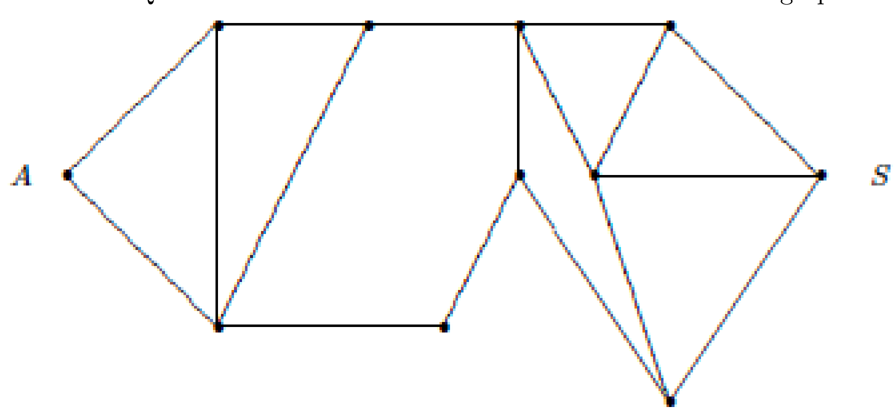
Définition 13. On appelle distance de deux sommets la longueur d'une plus courte chaîne joignant ces sommets (la distance est infinie s'il n'existe pas de chaîne joignant ces sommets ; par convention, la distance d'un sommet à lui-même est nulle).

On appelle diamètre d'un graphe la plus grande des distances entre deux sommets du graphe.

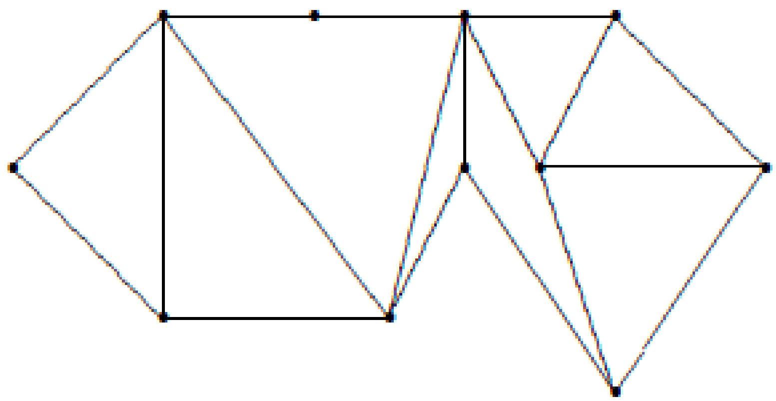
Proposition 1. *Soit G un graphe (non orienté) de matrice d'adjacence A. La distance entre deux sommets distincts i et j est le plus petit n tel que le terme d'indice i, j de* A^n *soit non nul.*

2.3 Quelques exercices

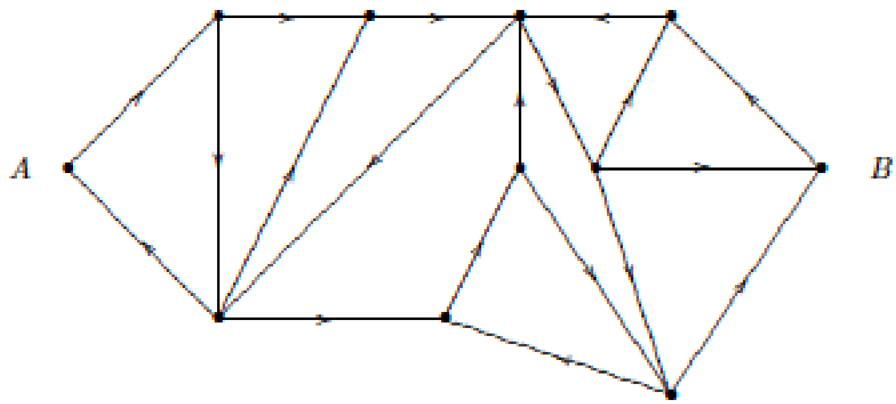
Exercice 11. Quelle est la distance entre les sommets A et S dans le graphe suivant :



Exercice 12. Quel est le diamètre du graphe suivant :



Exercice 13. Le graphe suivant représente une partie d'une ville où toutes les rues sont à sens unique .



24

Quel est le nombre de manières d'aller en voiture, en 5 étapes, de A à B ? quel est le nombre de manières de faire le même itinéraire à pied (on n'est donc plus obligé de respecter les sens interdits) ?

3 Problèmes de coloriage

3.1 Quelques problèmes

Regardons quelques situations plus ou moins courantes :

Exercice 14. Un groupe de 8 personnes doit participer à deux réunions. A la première réunion, ils sont tous assis autour d'une table ronde. Comme l'entente est totale, pour la seconde réunion, chacun des participants, non seulement ne veut pas se retrouver à côté de l'un ou l'autre de ses voisins, mais ne veut pas non plus qu'ils soient assis à la même table.

Combien de tables au minimum seront alors nécessaires ?

Combien de personnes au maximum pourront s'asseoir à une même table ?

On suppose maintenant qu'il y a 9 participants et que l'entente est tout aussi cordiale.

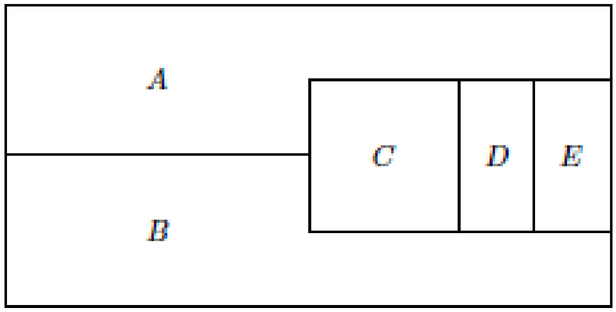
Que se passera-t-il alors ?

Exercice 15. Pendant un festival, on veut organiser des tournois de Scrabble (S), échecs (E), go (G), dames (D), tarot (T) et master-mind (M). Plusieurs personnes se sont inscrites à la fois pour les tournois E, S, G, d'autres personnes pour les tournois G, D, M, et enfin d'autres personnes pour les tournois M, T, S. Il est entendu qu'une participation simultanée à plusieurs tournois est impossible et que les organisateurs veulent satisfaire tout le monde.

a) Quel est le nombre maximum de tournois qui pourraient se dérouler en même temps ?

b) En sachant que chaque tournoi doit durer au maximum 3 heures, proposer un horaire des tournois nécessitant une durée minimale et respectant bien sûr les choix des participants.

Exercice 16. Voici la carte du pays d'Ovalie avec ses 5 régions A, B, C, D et E.



On veut colorier cette carte de telle manière que deux régions frontalières aient des couleurs différentes. Combien de couleurs au minimum faudra-t-il prévoir ?

3.2 Définitions et résultats

A partir des exemples précédents, on peut donner quelques définitions :

Définition 14. Un **coloriage** d'un graphe consiste en l'attribution de couleurs aux sommets, de telle manière que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur.
Un coloriage du graphe avec k couleurs sera appelé un k-coloriage.

Définition 15. Le **nombre chromatique** d'un graphe est le nombre minimum de couleurs nécessaires à son coloriage. On note d'habitude $\gamma(G)$ le nombre chromatique d'un graphe G.

Rappel : On dit qu'un sous-ensemble de l'ensemble des sommets est stable s'il ne contient pas de paires de sommets adjacents.

Définition 16. Si l'on se donne un coloriage d'un graphe, l'ensemble des sommets d'une couleur donnée est, par définition, un ensemble stable

On ne connaît pas de formule miracle permettant de déterminer le nombre chromatique d'un graphe quelconque. La plupart du temps il faut se contenter d'un encadrement du nombre chromatique. On a intérêt bien sûr à ce que le minorant soit le plus grand possible et que le majorant soit le plus petit possible. Si par hasard le minorant et le majorant sont les mêmes, on a gagné puisqu'on a alors le nombre chromatique du graphe.

Proposition 2. *Si G est un graphe, alors pour tout sous-graphe H de G on a :*

$$\gamma(H) \leq \gamma(G)$$

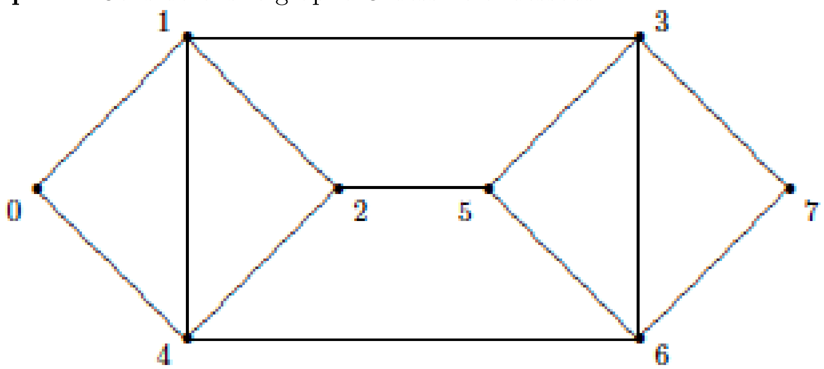
Proposition 3. *Le nombre chromatique du graphe complet K_n est n.*

Algorithme de Welch et Powell

- On classe d'abord les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré. On obtient ainsi une liste $x_1, ..., x_n$ de sommets telle que $deg(x_1) \geq \cdots \geq deg(x_n)$.
- A la première étape on choisit une couleur c_1 pour le sommet x_1, et en parcourant la liste, le premier sommet non colorié et non adjacent à un sommet déjà colorié avec c_1 (couleur d'usage) se verra attribuer la couleur c_1.
- On reprend la démarche en attribuant à chaque fois une nouvelle couleur d'usage au premier sommet de la liste non encore colorié. On s'arrête dès que tous les sommets ont été coloriés.

Remarque 4. Précisons que le nombre de couleurs utilisé par cet algorithme **n'est pas forcément le nombre chromatique du graphe**. L'exemple qui suit illustre cela. De plus, on remarquera qu'une partie de l'algorithme n'est pas entièrement déterminée : en effet, s'il y a plusieurs sommets de même degré, l'ordre dans lequel on les range est arbitraire, donc deux personnes appliquant cet algorithme au même graphe n'obtiendront pas forcément le même coloriage.

Exemple 2. Considérons le graphe G dessiné ci-dessous.



Appliquons l'algorithme décrit ci-dessus :

1, 3, 6, 4, 2, 5, 0, 7 est une liste des sommets classés dans l'ordre décroissant de leurs degrés.

D'après l'algorithme, à la première étape on attribue une couleur c_1 aux sommets 1 et 6.

A la deuxième étape, on attribue une couleur c_2 aux sommets 3 et 4.

A la troisième étape, on attribue une couleur c_3 aux sommets 2, 0 et 7.

Enfin à la dernière étape on attribue une couleur c_4 au sommet 5.

On obtient un coloriage de G avec 4 couleurs, mais en fait le nombre chromatique de G est 3. En effet deux couleurs ne suffisent pas car G admet des triangles comme sous-graphes, par contre, en prenant du bleu pour les sommets 0, 2 et 3, du rouge pour les sommets 4, 5 et 7 et du jaune pour les sommets 1 et 6, on obtient un 3-coloriage.

La morale de tout cela est que pour un petit nombre de sommets, on peut chercher directement le nombre chromatique plutôt que d'utiliser tel ou tel algorithme.

4 Problèmes de plus court chemin

4.1 Le problème

Exercice 17. Le graphe 3 représente un réseau routier (avec des sens interdits) ; quel est l'itinéraire le plus court qui relie E à S ?

Ce problème est très naturel, et se présente dans bien des domaines différents. Même pour un graphe aussi simple que celui-là, il n'est pas évident d'être sûr que l'on a trouvé le plus court chemin. L'algorithme le plus immédiat est de considérer tous les chemins de A à S, et de chercher le plus court. Cet algorithme est très inefficace : on peut bien sûr se limiter aux chemins sans cycles, donc de longueur bornée par le nombre de sommets, mais même comme cela, le nombre de chemins possibles reste très grand

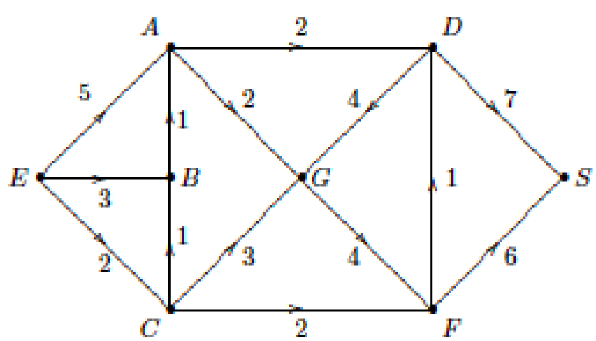


FIGURE 3 – Le plus court chemin

4.2 L'algorithme de Dijkstra

Définition 17. On appelle graphe pondéré un graphe tel que, à chaque arête a est associé un poids la.

Au départ, les données sont : un graphe pondéré, avec un poids strictement positif sur chaque arête, un sommet initial A et un sommet final S.

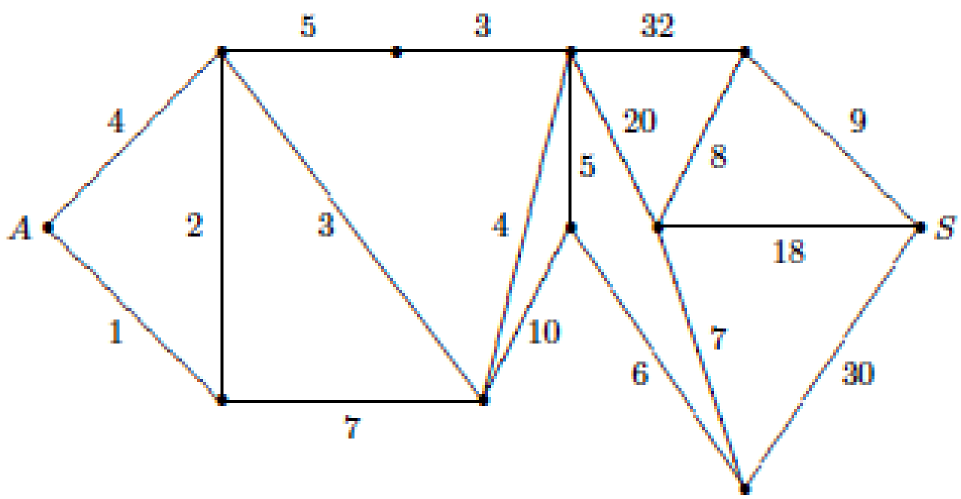
On initialise l'algorithme en écrivant 0 au sommet A, qui peut évidemment être relié à lui même par un chemin de longueur 0.
On répète la suite d'opérations suivante, jusqu'à ce qu'on ait marqué définitivement le sommet S :

— On note B le dernier sommet marqué à l'encre.
— Pour tout sommet C non encore marqué à l'encre, et relié à B par une arête, on calcule la somme du poids de B et du poids de l'arête qui relie B à C.
  — Si C n'est pas encore marqué au crayon, on marque au crayon le poids obtenu ;
  — si C est déjà marqué, on remplace l'ancien poids par le nouveau poids si celui-ci est plus petit, sinon on laisse l'ancien poids.
— Parmi tous les sommets marqués au crayon, on en choisit un de poids minimal, et on le marque à l'encre avec ce poids minimal.

On continue ainsi jusqu'à avoir marqué S à l'encre.

4.3 Quelques exercices

Exercice 18. Chercher le plus court chemin de A à S dans le graphe suivant :



Exercice 19. Le prince est parti à la recherche du trésor ; il peut accomplir les actions suivantes :

— Aller à la ville du marché, en contournant la rivière par un gué : 4 jours.
— Traverser la forêt : 1 jour.
— Depuis la forêt, abattre des arbres pour traverser la rivière, et se rendre à la ville du marché : 2 jours.
— Depuis la forêt, se rendre à la capitale provinciale en traversant les marais : 7 jours.
— S'équiper chaudement au marché, et partir pour le col du nord : 5 jours.
— Trouver un bon cheval au marché, et se rendre à la capitale provinciale par la grand-route : 3 jours.
— Depuis le col du nord, se rendre au refuge du devin : 3 jours.
— Depuis la capitale provinciale, se rendre au refuge du devin : 4 jours.
— Se rendre de la capitale provinciale au palais du roi, en étant retardé par des contrôles : 10 jours.
— Au sortir du devin, partir directement chercher l'épée, et la trouver après s'être perdu par manque de carte : 20 jours.
— Au sortir de chez le devin, au mépris de ses avis, se rendre directement à la grotte et tuer le dragon avec un canif : 32 jours
— Bien conseillé par le devin, prendre un raccourci pour le palais du roi : 5 jours.
— Un fois arrivé au palais du roi, séduire la bibliothécaire, puis trouver les cartes qui expliquent l'emplacement de l'épée et du trésor : 6 jours.
— En utilisant les cartes trouvées dans la bibliothèque, faire tout le tour de la montagne, et traverser un labyrinthe qui mène directement au trésor : 30 jours.
— En utilisant les cartes, aller chercher l'épée pour combattre le dragon : 7 jours.
— S'entraîner à l'épée, puis tuer le dragon : 8 jours.

— Une fois l'épée trouvée, au lieu d'affronter le dragon, utiliser l'épée pour creuser un tunnel par dessous, et déboucher directement dans la cachette du trésor : 18 jours.
— Une fois le dragon tué, résoudre l'énigme qui ouvre la cachette du trésor : 9 jours.

Comment doit-il faire pour récupérer le trésor le plus vite possible ? Quel temps lui faudra-t-il ?

Correction de l'exercice 18

Démonstration. Il faut commencer par donner des noms au sommets, comme ci-dessous :

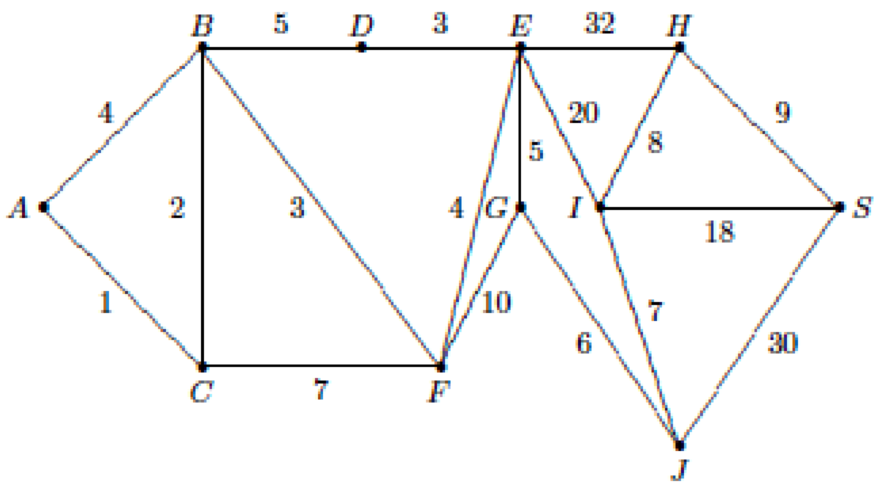


Figure 4 – nommage des sommets

□

5 Graphes étiquetés ou automates finis déterminés

5.1 Le jeu du labyrinthe

Nous allons commencer par un jeu : on a représenté ci-dessous le plan d'un petit labyrinthe. Ce labyrinthe possède 5 salles, numérotées de 1 à 5 ; au départ, on est dans la salle 1, indiquée par une flèche. Les salles qui ouvrent sur l'extérieur sont entourées par un double rond ; ici il n'y en a qu'une, c'est la salle 4. De chaque salle partent des couloirs à sens unique, portant une lettre (a ou b), et allant à une autre salle (ou parfois revenant à la même salle, comme dans le cas de la salle 5).

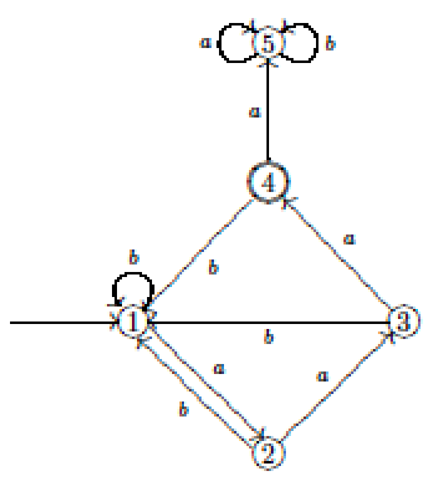


Figure 5 – Jeu du labyrinthe

Au début du jeu, on vous remet une suite de lettre, par exemple *abaab*. En lisant ces lettres l'une après l'autre, on suit un chemin partant de la salle 1 dans le labyrinthe. Si, après avoir lu toute la suite, on est dans une salle qui ouvre sur l'extérieur, on a gagné, sinon, on a perdu.

Par exemple, à la suite *abaab* correspond le chemin qui part de la salle 1 et parcourt les salles 2, 1, 2, 3, 1. Comme la salle 1 n'ouvre pas sur l'extérieur, on a perdu. Par contre, au mot *abaaa* correspond le chemin 1, 2, 1, 2, 3, 4 : ce mot est gagnant.

On peut se poser deux types de questions au sujet de ce labyrinthe :

— tout d'abord, un mot étant donné, est-il gagnant ou perdant ?

— Ensuite, plus généralement, peut-on caractériser simplement les mots gagnants ?

On vient de voir comment vérifier si un mot est gagnant. Il n'est en fait pas très difficile de les caractériser tous. On voit d'abord que, si on est dans la salle 5, on ne peut plus en sortir, et donc on a perdu. Quand on est dans les autres salles, dès qu'on lit un b, on revient en salle 1 ; ensuite, si on lit un a, on arrive en salle 2, si on lit aa, on arrive en salle 3, si on lit aaa, on arrive en salle 4, et si on lit aaaa, on arrive en salle 5.

Un peu de réflexion montre que les mots gagnants sont exactement les mots qui ne contiennent pas *aaaa* et qui finissent par *aaa*.

5.2 Définitions et résultats

Pour parler de graphe étiqueté, il faut d'abord choisir un *alphabet*, dans lequel seront choisies les étiquettes du graphe. On notera A cet alphabet.

Définition 18. On appelle **graphe étiqueté** un graphe orienté où toutes les arêtes portent une étiquette choisie dans l'alphabet A, et qui possède un sommet initial (indiqué par une flèche pointant vers ce sommet) et un ou plusieurs sommets finaux (indiqués par un double rond entourant le sommet).

On ne considèrera que des graphes étiquetés déterministes, c'est-à-dire tels que de chaque sommet parte une seule arête portant une étiquette donnée.

Définition 19. On appelle **mot** sur l'alphabet A une suite finie de lettres de A.

Définition 20. Soit G un graphe étiqueté par l'alphabet A. On dit qu'un mot sur l'alphabet A est **reconnu par le graphe G** s'il existe un chemin orienté sur le graphe G, partant du sommet initial, arrivant à un sommet final, et étiqueté par ce mot.

Définition 21. On appelle **langage** associé à un graphe étiqueté l'ensemble des mots reconnus par ce graphe étiqueté.

Remarque 5. Aucun théorème n'est donné ! les graphes étiquetés, ou automates, ont donné lieu depuis une cinquantaine d'années à une théorie mathématique abstraite. Ils sont en particulier fondamentaux en informatique.

5.3 Quelques exercices

Exercice 20. On donne l'automate de la figure 6 :

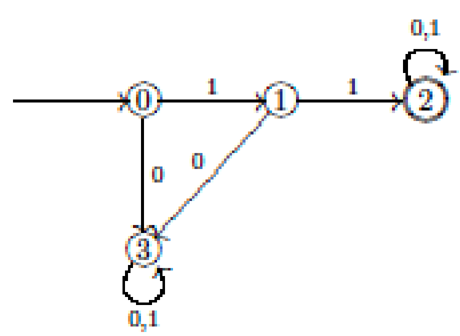


FIGURE 6 – automate 1

— Les mots "11", "101", "110", "1011" sont-ils reconnus par cet automate ?

— Donner la liste des mots de quatre lettres reconnus par celui-ci.
— Caractériser les mots reconnus.

Exercice 21. On donne l'automate de la figure 7 :

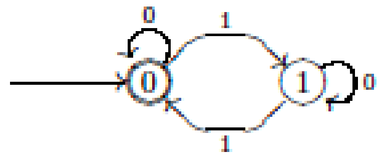


Figure 7 – Automate 2

— Les mots "11", "101", "110", "1011" sont-ils reconnus par cet automate ?
— Donner la liste des mots de trois lettres reconnus par celui-ci.
— Caractériser les mots reconnus.

Exercice 22. On donne l'automate de la figure 8 :

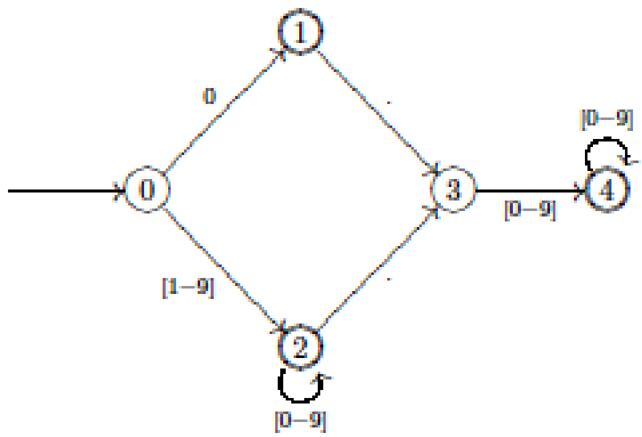


Figure 8 – Automate 3

— Les mots "0", "012", "105", "10.", "0.147", "12.050" sont-ils reconnus par cet automate ?
— Caractériser les mots reconnus.

Exercice 23. Représenter l'automate qui reconnaît les mots ne comportant que des 0 et des 1, et dont le nombre de 1 est impair.

6 Graphes probabilistes

6.1 Quelques exercices

Problème 4. Une évolution de population.

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires. 20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie. Sachant qu'en l'année 0 , un quart des habitants sont en X, calculer la population de X et de Y au bout de 1,2,5,10 ans ?

Que se passe-t-il si l'on suppose que 99% des habitants sont initialement en X ou en Y ? Ou que la population est également répartie entre les deux villes en l'année zéro ? Que constate-ton ?

Solution intuitive :

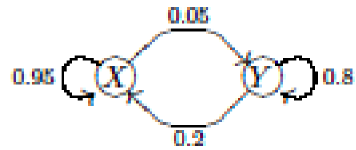


Figure 9 – évolution de population

Démonstration. Appelons X_n (resp. Y_n) la population de la ville X (resp. Y) en l'année n. Quelles sont les populations l'année suivante ? L'énoncé nous dit que 95% des gens qui sont en X y restent, 5% partent en Y, et que 80% des gens qui sont en Y y restent, 20% partant en X. On peut donc représenter l'évolution par les équations :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 0,95X_n + 0,2Y_n \\ Y_{n+1} &= 0,05X_n + 0,8Y_n \end{aligned}$$

On peut schématiser l'évolution par le graphe très simple 9 :

Notons $P_n = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne qui décrit les populations des villes X et Y à l'instant n et M la matrice de transition entrer l'instant n et l'instant $n+1$, on a $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}$ et $P_{n+1} = M.P_n$

On peut donc « imaginer » que la formule générale est $P_n = M^n P_0$, ce qui se montre facilement par récurrence.

Par exemple pour $n = 10$, on obtient grâce à un logiciel de calcul :

$$M^{10} = \begin{pmatrix} 0,81 & 0,75 \\ 0{,}19 & 0,25 \end{pmatrix}$$

donc

$$P_{10} = M^{10}.P_0 = \begin{pmatrix} 770000 \\ 230000 \end{pmatrix}$$

pour n=40, on obtient :

$$P_{40} = M^{40}.P_0 = \begin{pmatrix} 800000 \\ 200000 \end{pmatrix}$$

Exercice 24. L'allumeur de réverbère

Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état du réverbère de sa planète avec une probabilité de 0, 75.

1. Au jour 0, le réverbère est éteint. Faire un arbre permettant de trouver l'état probabiliste du réverbère au deuxième jour.
2. Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste et donner M la matrice de transition associée à ce graphe.

□

Exercice 25. Un individu vit dans un lieu où il est susceptible de contracter une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois cas suivants : immunisé (I), malade (M), sain (c'est-à-dire ni malade ni immunisé) (S).

D'un mois à l'autre, son état peut évoluer selon les règles suivantes :

Etant immunisé, il peut le rester avec une probabilité de 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité de 0,1.

Etant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité de 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité de 0,5.

Etant malade, il peut le rester avec une probabilité de 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité de 0,8.

1. Tracer le graphe probabiliste qui décrit cette situation.
2. Calculer, à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, la probabilité que l'individu soit malade ou immunisé au bout de trois mois, six mois, un an, deux ans, dans chacune des situations suivantes :

   (a) au départ, il est immunisé.
   (b) au départ, il est non malade et non immunisé.
   (c) au départ, il est malade.
3. Que peut on dire sur la proportion d'individus malades dans la population étudiée au bout d'au moins une année ?

6.2 Quelques définitions

Définition 22. On appelle **graphe probabiliste** un graphe orienté, tel que pour chaque couple de sommets (i, j) il existe au plus une arête de i vers j, et où chaque arête est étiquetée par un réel compris entre 0 et 1, la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet étant égale à 1.

Définition 23. Etant donné un graphe probabiliste à p sommets, on appelle **matrice de transition** associée la matrice carrée M = (mi,j) à p lignes et p colonnes, dont le coefficient mi,j est l'étiquette de l'arête orientée de i vers j si elle existe (c'est-à-dire la probabilité de transition de i à j), et 0 sinon.