CHAPITRE I

NOTION DE LOGIQUE

I PROPOSITION et PREDICAT

La logique permet de modéliser et d'étudier le raisonnement mathématique.

La logique fournit des outils très importants

Nous allons établir des techniques, des règles et utiliser un vocabulaire spécifique afin de :

1. *Construire des phrases mathématiques correctes*
2. *Etablir la vérité de ces phrases*

I.1 Enoncé :

Les phrases du langage courant sont de plusieurs types:
Déclaratif, exclamatif, impératif, interrogatif….
Nous nous intéressons aux phrases de type déclaratif appelés ***énoncés***

I.2 Proposition:

Une proposition est un ***énoncé*** *auquel on peut attribuer sans ambiguïté une valeur de vérité*
soit ***vraie*** *(* ***V*** ou ***1*** *) soit* ***fausse*** *(* ***F*** ou ***0*** *)*

(principe du tiers exclu)

Tous les énoncés ne sont pas des propositions

Exemples de non proposition:

1. *Ce gâteau est plein de sucre* *subjectif..*
2. *J'affirme que je mens…* *ni vrai, ni faux..*
3. *x est positif ou nul* *nature de x ou ensemble?*
4. *La plupart des élèves sont assis.* *non quantifiable*

Valeurs de vérité des propositions suivantes:

4\. *Vous écrivez.*
5\. *Un carré de réel est toujours positif ou nul.*
6\. *Paris est la capitale de l'Italie.*

I.3 Prédicat:

En Mathématiques on travaille souvent avec des variables. Définir ***une variable x*** *signifie que l'on définit* ***aussi*** *l'ensemble dans lequel elle varie, soit* ***E****.*

x peut valoir n'importe quel élément de E et on note

$$\boldsymbol{x \in E}$$

*Un **prédicat** est un **énoncé** qui peut contenir plusieurs variables et qui devient une **proposition** chaque fois que les variables sont **fixées** dans leurs ensembles respectifs. (deviennent des constantes).*

prédicats?

1. *« Le nombre réel x est strictement supérieur à 10 »*
2. *« x est impair » (x?...)*
3. *« x $\in$**N** **,** x est impair »*
4. *« la somme des carrés des nombres réels x et y est égale à z, z étant un nombre réel »*

II OPERATION SUR LES PROPOSITIONS ET SUR LES PREDICATS

Soient des propositions anonymes p, q, r….

appelées variables propositionnelles.

Construisons à partir de celles-ci des propositions plus complexes.

II.1 La conjonction $\wedge$:

*La **conjonction** s'écrit à l'aide du connecteur logique $\wedge$. Elle permet de former la proposition $p \wedge q$.*

La valeur de vérité de la proposition $p \wedge q$ dépend de la valeur de vérité de p et de celle de q.

*On résume ceci dans la **table** (ou tableau) **de vérité.***

p	q	$\boldsymbol{p \wedge q}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Remarque:

1.On fera toutes les tables dans le même ordre.
2. $p \wedge q$ est vraie si et seulement si les 2 propositions sont vraies en même temps.
3.le connecteur $\wedge$ est binaire

II.2 La disjonction $\vee$:

*La **disjonction** s'écrit à l'aide du connecteur logique $\vee$.*
Elle permet de former la proposition $p \vee q$.
*On résume ceci dans la **table de vérité.***

p	q	$\boldsymbol{p \vee q}$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Remarque:

1. $p \vee q$ est vraie si et seulement si une au moins des 2 propositions est vraie .

2.Le connecteur $\vee$ se différencie de celui du langage courant (ou exclusif) car lui-même est non exclusif.

3. Le connecteur $\vee$ est binaire.

II.3 La négation:

*La **négation** est une opération unitaire (ou unaire) et s'écrit à l'aide du connecteur logique « ¯ »*

A partir de p, on forme $\overline{p}$ (non p).

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

II.4 La disjonction exclusive $\oplus$

*La **disjonction exclusive, $\oplus$,** correspond à la proposition composée,* $\left(p \wedge \overline{q}\right) \vee \left(\overline{p} \wedge q\right)$

$p \oplus q$ est vraie si et seulement si une et une seule des propositions p et q est vraie.

On retrouve ainsi le sens du langage courant.

Table de vérité de p $\oplus$ q

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

II.5 L'implication logique:

*L'**implication** s'écrit à l'aide du connecteur logique $\Rightarrow$ et permet de former $p \Rightarrow q$.*

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Remarque 1:

- $p \Rightarrow q$ *est faux quand* p *est vrai,* q *faux.*
- $p \Rightarrow q$ *est vrai dans les autres cas.*

Définition:

Lorsque $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ ***est vraie*** *:*
p *est une* ***condition suffisante*** *de* q
q *est une* ***condition nécessaire*** *de* p

Remarque 2:

Dans le langage courant, lorsque p est faux, l'implication est dépourvue de sens.
Ici, $p \Rightarrow q$ a une valeur de vérité vraie lorsque p est faux.
Le sens habituel ne se retrouve que lorsque p est vrai.

Exemple:

« Un carré de réel est strictement négatif $\Rightarrow 2+2 = 5$ »
Proposition vraie!!

II.6 L'équivalence:

L'équivalence permet de former $p \Leftrightarrow q$.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Remarque:

$p \Leftrightarrow q$ *est vraie lorsque* p *et* q *sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses.*

Remarque:

Toutes les opérations définies sur les propositions s'appliquent aux prédicats; sachant qu'un prédicat devient une proposition lorsque les variables sont fixées.

EXERCICES

(travail personnel à rendre suivant les indications données en cours)

Soient p, q, r trois propositions élémentaires .

Discuter suivant les valeurs de p, q, r, la valeur de vérité de chaque proposition.

1. $(p \wedge q) \vee r$

2. $(p \wedge q) \Rightarrow r$

3. $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$

4. $[(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$

5. *Quel énoncé afficheriez-vous dans un lieu public?*

"Défense de : fumer et manger"

"Défense de fumer et défense de manger"

Justifiez votre réponse.

6. ***Enigme du rallye mathématique***

Pour s'entraîner en vue de l'épreuve du Rallye Mathématique, trois élèves se sont mis au travail depuis exactement sept jours et sept nuits. S'il faisait nuit, Lamiae résolvait une énigme.

Vincent résolvait une énigme seulement s'il faisait nuit.

S'il faisait nuit, Jennifer résolvait une énigme, et seulement s'il faisait nuit.

À ce jour, ils ont déjà résolu à eux trois 25 énigmes, dont 9 pendant la journée.

Aucun d'eux n'a résolu plus d'une énigme par nuit, mais une énigme commencée dans la nuit a été résolue la nuit même.

Combien chacun d'eux en a-t-il résolu ?

III TAUTOLOGIE, ANTILOGIE

Définition 1:

Une ***tautologie*** *est une proposition composée dont la valeur de vérité est toujours* ***vraie*** *quelques soient les valeurs de vérité des variables propositionnelles qui la composent.*

*(**proposition valide**)*

Exemple:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$$

<u>Définition 2:</u>

*Une **antilogie** est une proposition composée dont la valeur de vérité est toujours fausse quelques soient les valeurs de vérité des variables propositionnelles qui la composent.*

Exemple:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$$

est une antilogie

Remarque:

p étant une proposition $p \vee \overline{p}$ *est une tautologie*

$p \wedge \overline{p}$ *est une antilogie*

EXERCICES

(travail personnel à rendre suivant les indications données en cours)

Prouver que les propositions suivantes sont des tautologies:

1. $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ (involution)
2. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$
3. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ (contraposition)
4. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$

5. $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ *lois de Morgan*

$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$

6. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ *distributivité du* $\wedge$ *sur le* $\vee$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ *distributivité du* $\vee$ *sur le* $\wedge$

7. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

transitivité de l'implication logique.

8. $[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$; $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

9. $[p \Leftrightarrow q] \wedge [q \Leftrightarrow r] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

IV THEOREME

La notion de théorème s'applique aux prédicats.

Définition:

Soit P un prédicat; P est un théorème si P prend la valeur de vérité vraie pour toutes les valeurs que la (ou les) variable(s) peut prendre.

Remarque:

Lorsque P est un théorème, on dira que P est vrai.

Lorsqu'il existe une valeur (au moins) de la (ou les) variable(s) pour laquelle P est faux, on dira que P est faux ou n'est pas un théorème.

EXEMPLES: Théorème?

$$1.\ x \in R,\ "\ 0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < 1\ "$$

$$2.\ x \in R,\ "\ x^2 < 1 \Rightarrow 0 < x < 1\ "$$

$$3.\ x \in R, "x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0"$$

$$4.\ a \in R, b \in R$$

$$a \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[\text{ et } b \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[\Rightarrow a + b - 3 > 0$$

$$5.\ a \in R, b \in R$$

$$a \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[\text{ et } b \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[\Rightarrow a - b - 3 > 0$$

$$6.E = [0,7] \cap N \ ; \ F = [4,+\infty[$$

$$x \in E, \ "x > 3 \Rightarrow x \in F"$$

$$7.\ G = [0,7] \quad ; \quad F = [4,+\infty[$$

$$x \in G, \ "x > 3 \Rightarrow x \in F"$$

D'où l'importance de l'ensemble de variation

V IMPLICATION LOGIQUE ET METHODES DE DEMONSTRATION

Introduction:

Dans ce paragraphe, la question est de savoir si un prédicat donné est un théorème.

ce prédicat peut se présenter sous la forme $P \Rightarrow Q$ *ou* ***A.***

Remarque:

P, Q , R *sont des* ***prédicats.***

p, q, r *sont des* ***propositions.***

Concernant l'implication logique…

Définition 1:

La ***réciproque*** *de* $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ *est l'implication logique :*

$$\boldsymbol{q \Rightarrow p}$$

Définition 2:

La ***négation*** *de* $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ *est* $\overline{\boldsymbol{p \Rightarrow q}}$ *et nous avons la tautologie suivante:*

$$\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$$

Définition 3:

La ***contraposée*** *de* $p \Rightarrow q$ *est l'implication logique suivante:*

$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ *et nous avons la tautologie:*

$$[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [\overline{q} \Rightarrow \overline{p}]$$

3 notions très importantes pour les raisonnements suivants

V1 Le prédicat $P \Rightarrow Q$ est-il un théorème?

Trois cas se présentent:

*1. $\overline{P}$ est un **théorème** (P prédicat toujours faux) donc $P \Rightarrow Q$ est un théorème.*

*2. Q est un **théorème** donc $P \Rightarrow Q$ est un théorème.*

3. $\begin{cases} \overline{P} \text{ n'est pas un théorème} \\ Q \text{ n'est pas un théorème} \end{cases}$

Cas général . Plusieurs méthodes de démonstration…

V1.1 La Contraposition:

Pour démontrer $P \Rightarrow Q$ *, nous utilisons sa contraposée*

$$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$$

Exemples:

1. $"P(a,b): a \neq -1 \wedge b \neq -1"$

   $Q(a,b): a + ab + b \neq -1"$ *avec* $(a, b) \in R^2$

2. $"P(n):$ n^2 *est un en tier pair*

   $Q(n):$ *n es t un enti er pair,* $n \in N"$

3. $"P(x,x'): x \neq x'$

   $Q(x,y,x'): xy \neq x'y$, *avec* $x \in R, x' \in R, y \in R^*"$

Dans l'exemple 1
il y a équivalence

Dans l'exemple 2?
Que se passet-il si n ∈ R ?

V1.2 La méthode du syllogisme:

*Cette méthode repose sur la **transitivité** de l'implication logique, soit, la tautologie:*

$$\{\,[p_1 \Rightarrow p_2] \wedge [p_2 \Rightarrow p_3]\,\} \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_3)$$

p_1, p_2, p_3 *propositions élémentaires.*

Soit $P \Rightarrow Q$ *, il s'agit d'introduire le prédicat R tel que* $P \Rightarrow R$ *et* $R \Rightarrow Q$ *est vrai.*

Exemple: inégalité triangulaire

Soient $P(a,b)$: "$a \in R, b \in R$"

$Q(a,b)$: "$|a+b| \leq |a| + |b|$"

Deux prédicats définis sur R^2.

On introduit alors R : "$(|a+b|)^2 \leq (|a|+|b|)^2$"

défini sur R^2.

Remarque:

On peut aussi utiliser un nombre fini de prédicats intermédiaires

R_1, R_2, ….R_n.

V1.3 Disjonction des cas ou dilemme:

Il s'agit de démontrer $P \Rightarrow Q$ *en distinguant 2 cas.*

On utilise la tautologie suivante:

$$\{[(p \wedge r) \Rightarrow q] \wedge [(p \wedge \bar{r}) \Rightarrow q] \wedge [r \vee \bar{r}]\} \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

Il faut donc introduire 2 prédicats R et $\overline{R}$ *et démontrer que:*

$(P \wedge R) \Rightarrow Q$ *est un théorème.*

$(P \wedge \overline{R}) \Rightarrow Q$ *est un théorème.*

Ainsi on a prouvé $P \Rightarrow Q.$

Exemple:

Montrer:

$$Max(a,b) = \frac{1}{2}\left(a + b + |a - b|\right)$$

$$Min(a,b) = \frac{1}{2}\left(a + b - |a - b|\right)$$

Pour $(a,b) \in R^2$

On choisira:

$$R(a,b) : "\, a \geq b \,"$$

$$\overline{R}(a,b) : "\, a < b \,"$$

EXERCICE

(travail personnel à rendre suivant les indications données en cours)

Montrer en utilisant l'inégalité triangulaire et la disjonction des cas que :

$$\forall (a,b) \in R^2, \left| |a| - |b| \right| \leq |a+b|$$

V2 Le Contre-exemple

V2.1

Soit A un prédicat dépendant de la variable x, $x \in E$.

A n'est pas un théorème si A prend la valeur faux pour au moins un élément x de E.

appelons cet x, x_0, alors

x_0 est un contre-exemple.

V2.2

Dans le cas du prédicat $P \Rightarrow Q$ *, Nous voulons démontrer que* $P \Rightarrow Q$ *n'est pas un théorème.*

On cherche donc $x_0 \in E$ *tel que* $\overline{P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)}$ *est vrai.*

Or $\overline{P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)} \Leftrightarrow P(x_0) \wedge \overline{Q(x_0)}$

Trouver un contre-exemple c'est donc dire:

Il existe $x_0 \in E$ *tel que* $P(x_0) \wedge \overline{Q(x_0)}$

Exemples:

- *Soit le prédicat :*

$n \in N$, *n est divisible par 4 et n est divisible par 6*

$\Rightarrow$ *n est divisible par 24*

Ce n'est pas un théorème, en effet:

$$\text{Il existe } 12 \in N \text{ tq } 4 \mid 12 \ \wedge\ 6 \mid 12 \ \wedge\ \overline{24 \mid 12}$$

•*Soit le prédicat :*

$$x \in R, x^2 + x - 2 \geq 0$$

Ce prédicat n'est pas un théorème:

Il existe $x_0 = -\frac{1}{2}$ *tel que* $x_0{}^2 + x_0 - 2 < 0$

x_0 ?

V3 Le Raisonnement par l'absurde:

Le but est de démontrer que le prédicat A est un théorème.

Définition:

Le raisonnement par l'absurde consiste à introduire le prédicat $\overline{A}$ *tel que* $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ *où B est un théorème connu.*

En effet, par contraposition:

$$\overline{A} \Rightarrow \overline{B} \quad \Leftrightarrow \quad B \Rightarrow A$$

Remarque:

Le théorème B est à découvrir de manière intuitive.

Exemples:

- *Soit pour x ∈ R, A(x) :* $x^2 + 1 \neq 0$

Démontrons par l'absurde que A(x) est un théorème.

$$\exists x \in R \ tq \ \overline{A(x)}$$

$$\Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \overline{B}$$

où B: "-1 n'a pas de racine réelle"

•*Montrer que*

$$\forall x \in R \setminus \{-2\}, \quad \frac{x+1}{x+2} \neq 1$$

•***Exercice des tiroirs***

Démontrer par l'absurde que si vous rangez (n + 1) paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant 2 paires de chaussettes.