LEXIQUE AS

BC
Département Informatique-IUT de BORDEAUX

1 Ensemble et logique

1. ≪*Il existe* ≫ est le quantificateur existentiel

$$\exists$$

≪*Quelque soit* ≫ est le quantificateur universel

$$\forall$$

≪*Tel que* ≫

$$tq \ ou \ /$$

2. L'ensemble E est défini en extension :

$$E = \{x, y, z, t\}$$

3. x est élément de l'ensemble E

$$x \in E$$

4. a n'est pas élément de l'ensemble E

$$a \notin E$$

5. L'ensemble A est inclus dans l'ensemble B ou l'ensemble A est une partie de l'ensemble B si tous les éléments de A appartiennent à B.

$$A \subset B$$

6. L'ensemble vide admet 0 élément.

$$\emptyset = \{\}$$
$$\emptyset \subset E$$

7. A union B ; A et B parties de E

$$A \cup B = \{x \in E \ tq \ x \in A \ ou \ x \in B\}$$

Le ou logique utilisé ici est défini par p ou q est vrai si p est vrai ou si q est vrai ou si p et q sont vrais en même temps.

8. A inter B ; A et B parties de E

$$A \cap B = \{x \in E \ tq \ x \in A \ et \ x \in B\}$$

Le et logique utilisé ici est défini par p et q est vrai si p et q sont vrais en même temps.

9. A et B sont deux ensembles disjoints si leur intersection est vide

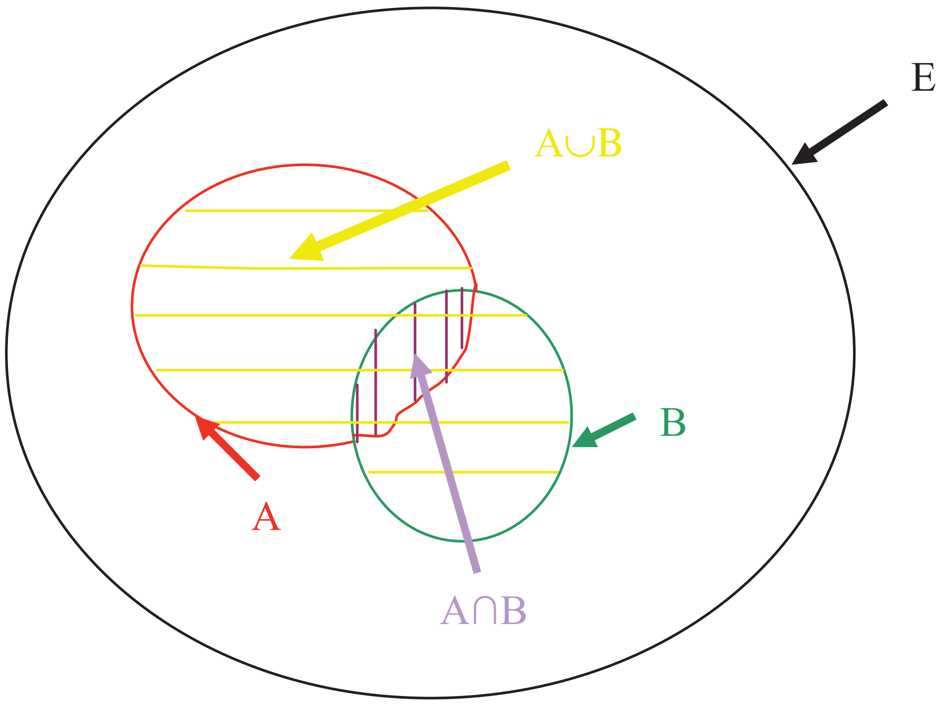

FIGURE 1 – Voici une représentation de la réunion et de l'intersection d'ensemble.

$$A \cap B = \emptyset$$

10. Complémentaire de A dans E ; A partie de E

$$C_EA(\ ou\ \overline{A}) = \{x \in E\ tq\ x \notin A\ (x\ n'appartient\ pas\ à\ A)\}$$

11. Différence ensembliste ; A et B parties de E

$$A \setminus B = A \cap C_EB = A \cap \overline{B} = \{x \in E\ tq\ x \in Aet\ x \notin B\}$$

12. Le produit cartésien $A \times B$

$$A \times B = \{(x, y)\ avec\ x \in A\ et\ y \in B\}$$

13. le cardinal de l'ensemble fini E est le nombre d'éléments de E

$$si\ E = \{x_1, x_2, \cdots x_n\} \Longrightarrow card(E) = n$$

14. La somme de i égal 1 à n des x_i

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

15. Le produit de i égal 1 à n des y_i

$$\prod_{i=1}^{n} y_i = y_1 \times y_2 \times \cdots \times y_n$$

16. L'implication : *Si p alors q*

$$p \Longrightarrow q$$

17. L'implication réciproque : *Si q alors p*

$$q \Longrightarrow p$$

18. L'équivalence : *Si et seulement si*

$$\Longleftrightarrow$$

2 Dénombrement, quelques notions

Soit $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$

(a) Différence entre un p-uplet (élément d'un produit cartésien), sous-ensemble à p éléments (p-combinaisons), un arrangement(p-listes ordonnées d'éléments distincts) et une permutation des n éléments de E. (cf cours proba 2.2)

$$(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_p}) \in E^p\ est\ un\ p\text{-}uplet\ (\ tous\ les\ x_i\ peuvent\ être\ égaux.)$$

$$e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_p}\ où\ tous\ les\ e_i\ sont\ distincts\ est\ un\ arrangement\ de\ p\ éléments\ de\ E$$

$$\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_p}\} \subset E\ est\ un\ sous\text{-}ensemble\ à\ p\ éléments\ de\ E$$

$$e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}\ où\ tous\ les\ e_i\ sont\ distincts\ est\ une\ permutation\ des\ éléments\ de\ E$$

Remarques. *i.* (e_1, e_2) *est un couple de deux éléments,* $(e_1, e_2) \neq (e_2, e_1)$*, élément du produit cartésien de deux ensembles.(Deux personnes peut-être identiques qui prennent l'ascenseur respectivement le jour 1 et le jour 2 (2-uplet), deux personnes qui ont un rôle dans un bus, être conducteur ou voyageur (2-liste ordonnée))*

ii. $\{e_1, e_2\}$ *est un ensemble à deux éléments ou 2-combinaison,* $\{e_1, e_2\} = \{e_2, e_1\}$ *(Deux personnes dans un ascenceur, deux voyageurs dans un bus, etc.)*

(b) Caractéristiques :
- p-uplet : ordre et répétition
- arrangement ou p-liste ordonnée d'éléments distincts : ordre et pas de répétitions.
- sous-ensemble à p éléments ou p-combinaison : pas d'ordre et pas de répétitions.

(c) Dénombrement :
- p-uplet : n^p p-uplet pour n éléments de E.
- arrangement ou p-liste ordonnée d'éléments distincts : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de p éléments de E.
- sous-ensemble à p éléments ou p-combinaison : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ p-combinaisons de E.
- Une permutation des éléments de E est un arrangement de **tous** les éléments de E soit les n éléments : $n!$ permutations des n éléments de E.

(d) Les démonstrations :
- $(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_p}) \in E^p$, il y a n choix pour la première composante et n choix pour la seconde $\cdots$ et n choix pour la p^{ieme}.
- $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_p}$ où tous les e_i sont distincts, il y a n choix pour le premier et n-1 pour le second $\cdots$ et n-(p-1) pour le dernier (le p^{ieme}).
- Une permutation des éléments de E est un arrangement de **tous** les éléments de E soit les n éléments, il y a n choix pour le premier et n-1 pour le second et $\cdots$ n-(n-1)=1 pour le n^{ieme}.
- $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_p}\} \subset E$, on peut construire pour ce sous-ensemble p permutations différentes d'où le résultat.

3 Quelques ensembles

1. Ensembles usuels
   - L'ensemble des entiers naturels, N
   - L'ensemble des entiers naturels différents de 0, N^*
   - L'ensemble des entiers relatifs, Z(privé de 0, Z^*)
   - L'ensemble des décimaux, D(privé de 0, D^*)

$$d \in D \Longleftrightarrow \exists a \in Z \text{ } et \text{ } m \in N / d = \frac{a}{10^m}$$

   - L'ensemble des rationnels, Q(privé de 0, Q^*)

$$r \in \mathtt{Q} \Longleftrightarrow \exists a \in \mathtt{Z} \text{ } et \text{ } b \in N^* / pgcd(ab) = 1 \text{ } et \text{ } r = \frac{a}{b}$$

— L'ensemble des réels, R

Exemples. $5 \in N^*,\ 0 \in N,\ -2 \in Z\ ou\ Z^*,\ \frac{5}{3} \in Q,\ \sqrt{2} \notin Q\ mais\ \sqrt{2} \in R$

4 Quelques intervalles

— Intervalle fermé $[a, b], a \in R, b \in R$

$$x \in [a, b] \Longleftrightarrow a \leq x \leq b$$

— Intervalle fermé à gauche et ouvert à droite $[a, b[, a \in R, b \in R$

$$x \in [a, b[\Longleftrightarrow a \leq x < b$$

— Intervalle fermé à droite et ouvert à gauche $]a, b], a \in R, b \in R$

$$x \in]a, b] \Longleftrightarrow a < x \leq b$$

— Intervalle ouvert $]a, b[, a \in R, b \in R$

$$x \in]a, b[\Longleftrightarrow a < x < b$$

— Intervalle infini semi-ouvert $]-\infty, a], a \in R$

$$x \in]-\infty, a] \Longleftrightarrow x \leq a$$

— Intervalle infini semi-ouvert $[a, \infty[, a \in R$

$$x \in [a, \infty[\Longleftrightarrow a \leq x$$

— Intervalle infini ouvert $]-\infty, a[, a \in R$

$$x \in]-\infty, a[\Longleftrightarrow x < a$$

— Intervalle infini ouvert $]a, \infty[, a \in R$

$$x \in]a, \infty[\Longleftrightarrow a < x$$

— Intervalle d'entiers naturels $|[n, p]|, n \in N, p \in N$

$$m \in |[n, p]| \Longleftrightarrow n \leq m \leq p\ ,\ m \in N$$

$$|[n, p]| = [n, p] \cap N$$

5 Quelques énoncés

1. Pour tout x élément de N, il existe y élément de N tel que $y = x + 2$

$$\forall x \in N, \exists y \in N \ \ tq \ y = x + 2$$

2. Les entiers pairs et les entiers impairs ont une intersection vide et leur réunion est égale à N

$$(2N) \cap (2N + 1) = \emptyset \ \ et \ (2N) \cup (2N + 1) = N$$

$(2N, 2N + 1)$ forme une partition de N

3. La somme des n premiers entiers naturels non nuls est :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

4. Le produit des n premiers entiers naturels non nuls est $n!$*(factoriel n)*

$$\prod_{i=1}^{n} i = n!$$

$$0! = 1$$

6 Application

Soit f une fonction de l'ensemble E dans l'ensemble F, si $x \in E$ alors $f(x) \in F$ et on dit que $f(x)$ est une image de x par f.

1. f est une application si pour tout x élément de E il existe un unique y élément de F tel que $y = f(x)$

$$\forall x \in E, \exists \ un \ unique \ y \in F \ \ tq \ y = f(x)$$

2. f est une application injective si f est une application et pour tout y élément de F il existe au plus x élément de E tel que $y = f(x)$

$$[\forall y \in F, \exists \ \ au \ plus \ x \in E \ \ tq \ y = f(x)]$$
$$\Longleftrightarrow [\forall (x_1, x_2) \in E \times E, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2]$$

3. f est une application surjective si f est une application et tout élément de F est une image

$$\forall y \in F, \exists x \in E \ \ tq \ y = f(x)$$

4. f est bijective si elle est à la fois injective et surjective, on dit qu'il y correspondance biunivoque entre les éléments de E et de F

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \ \ unique \ \ tq \ y = f(x)$$

Dans ce cas là $card(E) = card(F)$ si E et F sont des ensembles finis.

7 Identités remarquables

Pour tous $a \in R$ et $b \in R$

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2)
\end{aligned}$$

Formule du binôme de Newton

Remarques. — *Soit a et b des réels et $n \in N^*$*

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \tbinom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \tbinom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

—

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n} \tbinom{n}{p} &= 2^n \text{ avec } a = b = 1 \\
\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \tbinom{n}{p} &= 0 \text{ avec } a = 1 \text{ et } b = -1
\end{aligned}$$

Triangle de Pascal

1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
...	...	...	...	...	...		
...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...

Compléter les trois lignes suivantes du triangle de Pascal

8 Suites arithmétiques, suites géométriques

1. Suite arithmétique de premier terme $u_0 \in R$ et de raison $r \in R$
   Pour tout $n \in N$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r \\ u_n &= u_0 + nr \end{aligned}$$

   Somme des termes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} u_i &= u_0 + u_0 + r + \cdots + u_0 + nr \\ &= (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r \end{aligned}$$

2. Suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \in R$
   Pour tout $n \in N$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= qu_n \\ u_n &= q^n u_0 \end{aligned}$$

   Somme des termes : Si $q \neq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} u_i &= u_0 + qu_0 + \cdots + q^n u_0 \\ &= u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

9 Deux-trois notions dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$

— Soit $p \in \mathbb{N}$, p est premier si p admet excatement 2 diviseurs distincts.
  En particulier, $p \neq 0$ et $p \neq 1$
— Soient n et m deux entiers naturels, n et m sont premiers entre eux si pgcd(n,m)=1.
  PGCD = plus grand commun diviseur
— Soient x et y deux entiers relatifs, x divise y si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = kx$.
  Notation : $x \mid y$

10 Ecriture d'un entier en base b, $b \in N^*$ et $b \neq 1$

Pour tout entier naturel , il existe un développement unique de la forme :

$$x = x_n b^n + x_{n-1} b^{n-1} + \cdots x_1 b^1 + x_0$$
$$0 \leq x_i < b, x_i \in N, x_n \neq 0$$

— L'entier n est le plus grand entier tel que $b^n \leq x$

— x s'écrit alors $(x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0)_b$

1. Exemple d'écriture d'entier en décimal (base 10) :

$$\begin{aligned} 15 &= 1.10 + 5 \\ 273 &= 2.10^2 + 7.10 + 3 \end{aligned}$$

2. en binaire(base 2) :

$$\begin{aligned} (110)_2 &= 2^2 + 2 \\ (1011001)_2 &= 2^6 + 2^4 + 2^3 + 1 \end{aligned}$$

3. en hexadécimal (base 16 : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$)

$$(AF4E1)_{16} = 10.16^4 + 15.16^3 + 4.16^2 + 14.16 + 1$$