Отчёт по лабораторной работе №6

Задача об эпидемии

Голощапова Ирина Борисовна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цели и задачи лабораторной работы

1.1 Цель работы

Рассмотреть простейшую модель эпидемии.

1.2 Задачи работы

- Согласно своему варианту задать начальные условия и коэффициенты пропорциональности.
- Построить графики изменения числа особей трех групп:
    1. восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи: $S(t)$
    2. инфицированные особи, которые также являются распространителями инфекции: $I(t)$
    3. здоровые особи с иммунитетом к болезни: $R(t)$
- Рассмотреть, как будет протекать эпидемия в случае:
    1. если $I(0) \leq I*$
    2. если $I(0) > I*$

2 Теоретическая справка

2.1 Задача об эпидемии

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения $I*$, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha * S, I(t) > I* \\ \\ 0, I(t) \leq I* \end{cases} \tag{2.1}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} -\alpha S - \beta I, I(t) > I* \\ \\ -\beta I, I(t) \leq I* \end{cases} \tag{2.2}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I \tag{2.3}$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия .Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I*$ и $I(0) > I*$.

3 Условие задачи (вариант №7)

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 13000$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 113$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 13$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. если $I(0) \leq I*$
2. если $I(0) > I*$

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Реализация в OpenModelica. Случай 1

Для начала реализуем решение данной задачи в OpenModelica:

Листинг программы для первого случая, когда $I(0) \leq I*$

```
//case 1: I<=I*
model lab6

parameter Real a = 0.01;
parameter Real b = 0.02;
parameter Real N = 13000;
parameter Real I0 = 113;
parameter Real R0 = 13;
parameter Real S0 = N - I0 - R0;

Real S(start=S0);
Real I(start=I0);
Real R(start=R0);

equation
der(S) = 0;
der(I) = -b*I;
der(R) = b*I;
```

```
annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 200, Interval = 20));

end lab6;
```

В результате получим следующие графики (рис. 4.1):

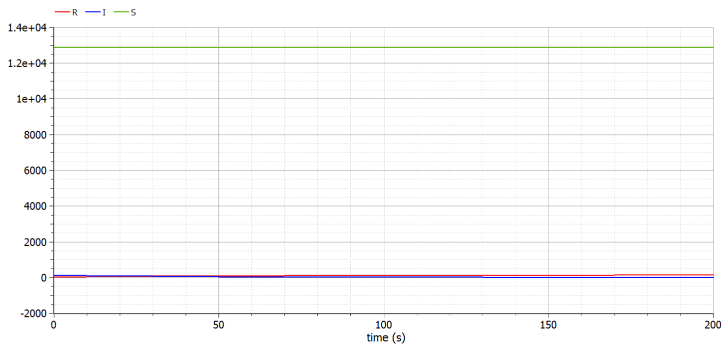

Рис. 4.1: Графики на OpenModelica. Случай 1

Так как значение $S(t)$ сильно отличается от $I(t)$ и $R(t)$, плохо виден характер изменения значений, поэтому попробуем вывести только функции $I(t)$ и $R(t)$ (рис. 4.2):

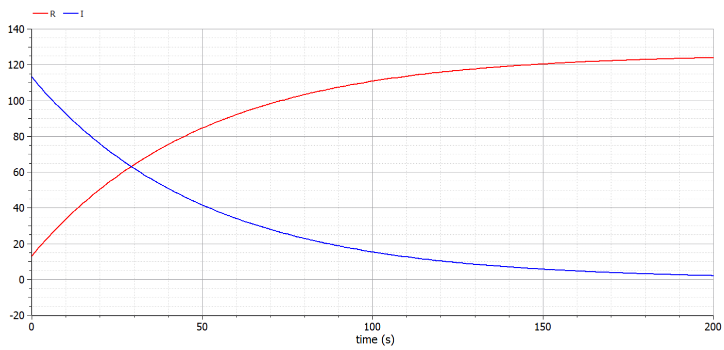

Рис. 4.2: Графики на OpenModelica. Случай 1_2

4.2 Реализация на Julia. Случай 1

Листинг программы:

```
using DifferentialEquations

function lorenz!(du, u, p, t)
    a, b = p
    du[1] = 0
    du[2] = -b*u[1]
    du[3] = b*u[1]

end

const N = 13000
const I0 = 113
const R0 = 13
const S0 = N - I0 - R0

u0 = [I0, R0, S0]

p = (0.01, 0.02)
tspan = (0.0, 200.0)

prob = ODEProblem(lorenz!, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, dtmax=20)

using Plots; gr()
plot(sol)
savefig("julia_1.png")
```

В результате получим следующие графики, на которых виден характер поведения функций (рис. 4.3):

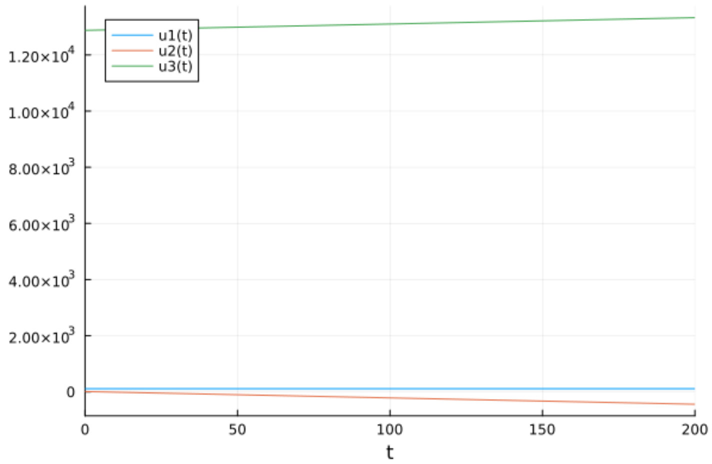

Рис. 4.3: Графики на Julia. Случай 1

4.3 Реализация в OpenModelica. Случай 2

Рассмотрим случай №2, когда $I(0) > I*$

Листинг программы для второго случая:

```
//case 2: I>I*
model lab6_2

parameter Real a = 0.01;
parameter Real b = 0.02;
parameter Real N = 13000;
parameter Real I0 = 113;
parameter Real R0 = 13;

parameter Real S0 = N - I0 - R0;

Real S(start=S0);
Real I(start=I0);
```

```
Real R(start=R0);

equation
der(S) = -a*S;
der(I) = a*S - b*I;
der(R) = b*I;

annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 200, Interval = 1));

end lab6_2;
```

Получим следующее решение (рис. 4.4)

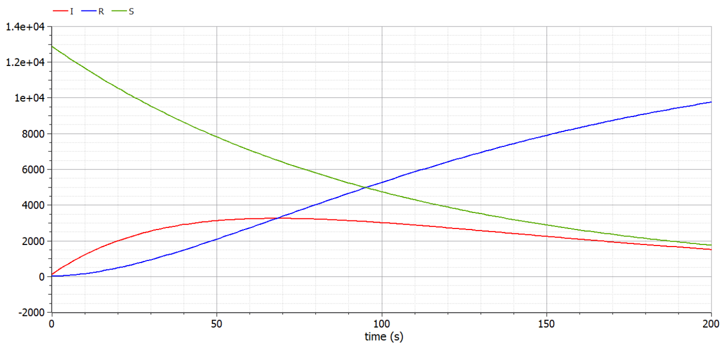

Рис. 4.4: Графики на OpenModelica. Случай 2

4.4 Реализация на Julia. Случай 2

Листинг программы:

```
using DifferentialEquations

function lorenz!(du, u, p, t)
    a, b = p
    du[1] = -a*u[3]
```

```
    du[2] = a*u[3] - b*u[1]
    du[3] = b*u[1]

end

const N = 13000
const I0 = 113
const R0 = 13
const S0 = N - I0 - R0

u0 = [I0, R0, S0]

p = (0.01, 0.02)
tspan = (0.0, 200.0)

prob = ODEProblem(lorenz!, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, dtmax=1)

using Plots; gr()
plot(sol)
savefig("julia_2.png")
```

В результате получим следующие графики, на которых виден характер поведения функций (рис. 4.5):

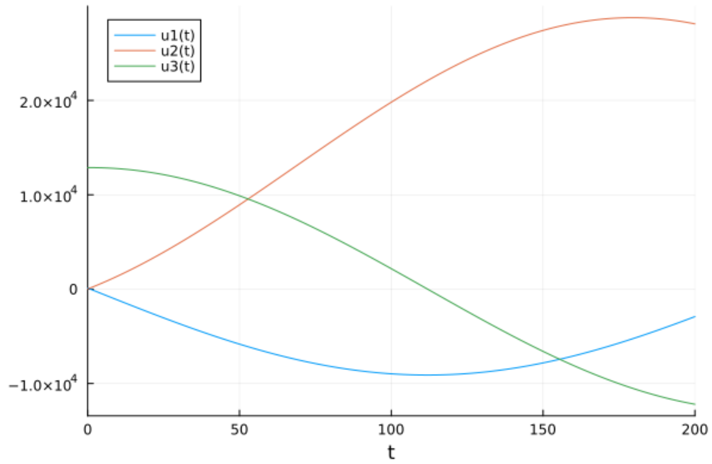

Рис. 4.5: Графики на Julia. Случай 2

5 Выводы

В ходе лабораторной работы нам удалось

- Построить графики изменения числа особей трех групп:
  1. восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи: $S(t)$
  2. инфицированные особи, которые также являются распространителями инфекции: $I(t)$
  3. здоровые особи с иммунитетом к болезни: $R(t)$
- Рассмотреть, как будет протекать эпидемия в случае:
  1. если $I(0) \leq I*$
  2. если $I(0) > I*$

6 Библиография

1. Git - система контроля версий
2. Дифференциальные уравнения
3. Язык программирования - Julia
4. Решение ДУ на языке программирование Julia
5. Работа с OpenModelica