MA 0901, Lineare Algebra
Zusammenfassung

Felix Beil
Maximilian Gießelmann
Simon Huber
Sebastian Kneuer
Mit freundlicher Unterstützung durch Simon Plazotta
TUM SS 2015

20. Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Matrizen

1.1 Definitionen / Begriffserklärungen

- Eine **Matrix**:
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- $a_{1,1}$ heißt **Eintrag**

- Eine 1 x n-Matrix $(a_1, \dots, a_n) \in K^{1xn}$ heißt **Zeilenvektor**

- Eine $mx1$-Matrix $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in K^{mx1}$ heißt **Spaltenvektor**

- $K^m := K^{mx1}$ m-**dimensionalen Standardraum**

- Eine Matrix $A \in K^{mxn}$ mit $m = n$ heißt **quadratische Matrix**

- **transponierte Matrix**:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- Eine quadratische Matrix heißt **symmetrische Matrix**, falls $A^T = A$ gilt.

- **Transitions-Matrix** (am Beispiel der Google-Matrix)
  Durch Anzahl Links zu Seite geteilt Durch alle Seiten ergibt den Wert in der W-Matrix. Dadurch kann man dann die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass ein Zufallssurfer auf die Seite trifft.

- **matrix Multiplikation**:
  Nur möglich, wenn $A_{m,\mathbf{n}}$ und $B_{\mathbf{n},o}$! Dimmension der neuen Matrix ergibt sich aus der Zeilen Anzahl der ersten Matrix und der Spalten Anzahl der zweiten Matrix $\Rightarrow C_{m,o}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1.2 Regeln

Satz 1.1

Für Matrizen gelten die folgenden Regeln.

(a) $(K^{m \times n}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(b) Für alle $A, B \in K^{m \times n}$ und $s, s' \in K$ gelten:

   (1) $s \cdot (A + B) = s \cdot A + s \cdot B$,

   (2) $(s + s') \cdot A + s' \cdot A$,

   (3) $s \cdot (s' \cdot A) = (ss') \cdot A$,

   (4) $1 \cdot A = A$.

(c) Seien A, B, C Matrizen, so dass jeweils die unten gebildeten Summen und Produkte definiert sind. Dann gelten:

   (1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,

   (2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,

   (3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

   (4) Für

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

   (die **Einheitsmatrix**) gelten $I_n \cdot A = A$ und $B \cdot I_n = B$.

- $A \cdot B = B \cdot A$ ist FALSCH
- $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

2 Lineare Gleichungssysteme

2.1 Definitionen / Begriffserklärungen

- Kurz: **LGS**
- **Lösungsmenge** ist die Menge aller $x \in K^n$, die die Gleichung erfüllen.
- Gleichung: $A \cdot x = b$ mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$
- Das <u>LGS</u> heißt **homogen**, falls $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, sonst **inhomogen**.

2.2 Koeffizentenmatrix

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 4x_3 - 2x_4 &= 2 \\ x_2 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 &= -5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2.3 Erweiterte Koeffizentenmatrix

$$\Rightarrow A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

2.4 Elementare Zeilenoperationen

- **Typ I:** Vertauschen zweier Zeilen
- **Typ II:** Multiplizeieren einer Zeile mit einem Skalar $s \in K \setminus \{0\}$
- **Typ III:** Addieren des s-fachen einer Zeile zu einer anderen, wobei $s \in K$

2.5 Zeilenstufenform

Defintion 2.1

Es sei $A \in K^{m \times n}$. Wir sagen, dass A in **Zeilenstufenform** ist, falls gelten:

(a) Beginnt eine Zeile mit k Nullen, so stehen unter diesen Nullen lauter weitere Nullen.

(b) Unter dem ersten Eintrag $\neq 0$ eine jeden Zeile (falls diese nicht nur aus Nullen besteht) stehen lauter Nullen.

Wir sagen, dass A in **strenger Zeilenstufenform** ist, falls zusätzlich gilt:

(c) Über dem ersten Eintrag $\neq 0$ einer jeden Zeile (falls diese nicht nur aus Nullen besteht) stehen lauter Nullen.

Beispiel 2.1

Zur Illustration mögen folgende Beispiele dienen:

(1) Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist *nicht* in Zeilenstufenform.

(2) Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist *nicht* in Zeilenstufenform.

(3) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in Zeilenstufenform, aber nicht in Strenger Zeilenstufenform.

(4) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in strenger Zeilenstufenform.

2.6 Gauß-Algorithmus

Eingabe: Eine Matrix $A \in K^{m \times n}$.
Ausgabe: Eine Matrix $B \in K^{m \times n}$ in (strenger) Zeilenstufenform, die aus A durch elementare Zeilenoperationen hervorgeht.

(1) Setze $B := A$.

(2) B sei bis zur r-ten Spalte in Zeilenstufenform, d.h. (a) und (b) aus der Definition seien bis zur r-ten Zeile erfüllt. (Hierbei ist $r = 0$ möglich!)

(3) Falls $r = m$, so ist B in Zeilenstufenform. Falls streneg Zeilenstufenform gewünscht ist, gehe zu (8).

(4) Suche den am weitesten links stehenden Eintrag $\neq 0$ von B unterhalb der r-ten Zeile. (Falls es mehrere solche Einträge gibt, wähle einen aus.)

(5) Bringe diesen Eintrag in die $(r+1)$-te Zeile (Operation Typ I).

(6) Erzeuge unterhalb dieses Eintrags lauter Nullen (Operation Typ III, optional auch II).

(7) Gehe zu (2).

(8) Bringe B auf strenge Zeilenstufenform (Operation Typ III).

2.7 Rang

Defintion 2.2

Der **Rang** von A ist die Anzahl r Zeilen in A', die mindestens einen Eintrag $\neq 0$ haben. A' ist die Zeilenstufenform von A. Es muss keine strenge Zeilenstufenform vorliegen.

$$r := rg(A)$$

Beispiel 2.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 2$

2.8 Lösbarkeit

Lösbarkeits-Fälle:

- $b_{r+1} \neq 0 \rightarrow$ keine Lösung
- $b_{r+1} = 0 \rightarrow$ LSG lösbar. Unterfälle:
  - $n = r \rightarrow$ eindeutige Lösung
  - $n > r \rightarrow$ keine eindeutige Lösung, $n - r = \#$ freier Variablen

Beispiel 2.3

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow r = 2 = n \rightarrow$ LSG lösbar
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  $r = 1 \neq 2 = n$
  $b_{r+1} = b_2 = 0 \rightarrow$ LSG ist lösbar, $n - r = 1$ freie Variablen => Lösung nicht eindeutig.
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$
  $r = 1 \qquad b_{r+1} = b_2 = 2 \neq 0 \Rightarrow$ LSG nicht lösbar.

Rangkriterien für Lösbarkeit von LGS:

- $A \in K^{mxn}$ Koeff. Matrix (m Glg., n Unbekannte)

- $b \in K^{mxn}$ rechte Seite
- $rg(A|B) \in \{rg(A), rg(A)+1\}$ (einzigen Beiden Möglichkeiten) und es gilt:
  - LGS lösbar $\Leftrightarrow rg(A|B) = rg(A)$
  - In diesem Fall: Lösung Eindeutig $\leftrightarrow rg(A) = rg(A|B) = n$
  - Lösung nicht Eindeutig $\leftrightarrow rg(A) < n$ (und $n - rg(A) = \#$ freier Variablen)

3 Vektorräume

3.1 Unterraum

Defintion 3.1

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein **Unterraum** (auch: Untervektorraum, Teilraum), falls gelten:

(1) $U \neq \emptyset$

(2) Für $v, w \in U$ ist auch $v + w \in U$ (also ist $(U, +)$ eine Untergruppe)

(3) Für $a \in K$ und $v \in U$ gilt $a \cdot v \in U$

Aus der Definition folgt sofort:

- Jeder Unterraum enthält den Nullvektor
- Mit den Operationen "+" und "·" von V wird ein Unterraum U selbst ein K-Vektorraum

Notiz 3.1

Der Spann ist der kleinste Untervektorraum, der die Menge A enthält.

3.1.1 Untervektorräume

Defintion 3.2

$V\ K - VR$ (K körper) $(V, +, \cdot)$
$U \subseteq V$ heißt Unter(vektor)raum $\Leftrightarrow$

(1) $U \neq \oslash$

(2) $\forall v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$

(3) $\forall a \in K, v \in U \Rightarrow a \cdot v \in U$

Jeder Untervektorraum enthält die 0 (Prop 3.3a) $0 \cdot v = 0 \in U$) Falls als eine Menge $U \leq V$ die 0 enthält, kann kein UVR sein.
Schnitt von UVR $(U_1, U_2 \subseteq V)$:

1. $U_1 \cap U_2 \subseteq V$ ist ein Unterraum.
2. $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ist ein Unterraum.
3. Ist $M \neq \emptyset$ eine nicht-leere Menge, deren Elemente Unterräume von V sind, so ist auch der Schnitt ein Unterraum.

4 Linearkombinationen

Defintion 4.1

(a) Es seien $v_1, ..., v_n \in V$ Vektoren. Ein Vektor $v \in V$ heißt **Linearkombination** von $v_1, ..., v_n$, falls es Skalare $a_1, ..., a_n \in K$ gibt mit

$$v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

(b) Sei $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Ein Vektor $v \in V$ heißt **Linearkombination** von S, falls es $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, ..., v_n \in S$ gibt, sodass v eine Linearkombination von $v_1, ..., v_n$ ist. Falls $S = \emptyset$, so ist der Nullvektor 0 (die einzige) Linearkombination von S. (0 wird als leere Summe aufgefasst)

Notiz 4.1

Eine Linearkombination ist ein Vektor, der die Koeffizienten für die einzelnen Variablen (Spalten in einer Matrix) von einem Linearem Gleichungssystem angibt.

4.1 Berechnung

Siehe Rezept 16.14.

5 Basen

Defintion 5.1

Eine Basis ist eine Teilmenge eines Vektorraumes, mit deren Hilfe sich jeder Vektor des Raumes eindeutig als endliche Linearkombination darstellen lässt.
Eine Basis ist eine Menge von Vektoren aus den sich alle anderen Vektoren des Körpers ableiten lassen, indem Koeffizenten vor die Vektoren der Basis gesetzt werden.

Beispiel 5.1

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basis $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ von $\mathbb{R}^4$

Beispiel 5.2: Sehr einfaches Beispiel

$B = \{(1)\}$ von $\mathbb{R}$
Man kann nun mit einem Koeffizenten x alle Zahlen $z \in \mathbb{R}$ bilden:
$z = x \cdot (1)$

5.1 Erzeugendensystem

Eine Basis ist also immer auch ein Erzeugendensystem, ein Erzeugendensystem ist genau dann eine Basis, wenn seine Vektoren linear unabhängig sind.

6 Lineare Codes

Code $c \in \mathbb{F}_2^n$ ist ein Code aus dem Raum $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit n Stellen

Defintion 6.1: Codewort

Ein Codewort $c \in C$ besteht aus einem Informationswort und der Redundanz. Es wird durch eine (häufig rauschende) Leitung zum Empfänger gesendet.

Defintion 6.2: Informationswort

Das Informationswort ist der Teil des Codeworts, dass die zu sendenden / empfangenen Informationen enthält.

Defintion 6.3: Redundanz

Die Redundanz ist der Teil des Codeworts, der benutzt wird, um das Informationswort zu verifizieren und ggf. zu verbessern.

6.1 Generatormatrix

Defintion 6.4

Die Generatormatrix G wird benutzt um aus dem Informationswort x das Codewort c zu berechnen.

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

Defintion 6.5: Aufbau der Generatormatrix

Beliebig.

Beispiel 6.1

$$G = \begin{pmatrix} I_K \\ A \end{pmatrix}$$

6.2 Parity-Check-Matrix

Defintion 6.6

Die Parity-Check-Matrix wird benutzt um ein empfangenes Codewort c zu verifizieren. Ist das empfangene Wort $c \in C$ (also gab es keine Fehler), so folgt daraus:

$$P \cdot c = 0$$

Satz 6.1: Aufbau der Parity-Check-Matrix, wenn G wie in Beispiel 6.1 aufgebaut ist

$$P = \begin{pmatrix} -A & I_{n-k} \end{pmatrix} \in K^{(n-k)\times n}$$

6.3 Hamming-Gewicht

Defintion 6.7

Das Hamming-Gewicht ist definiert durch

$$w(c) := \left| \left\{ i \in \{1, ..., n\} \middle| c_i \neq 0 \right\} \right|$$

Das Hamming Gewicht gibt nur die Anzahl der Nichtnull Einträge an.

6.4 Hamming-Abstand

Defintion 6.8

Der Hamming-Abstand von zwei möglichen Codewörten ist definiert durch

$$d(c, c') := w(c - c') = \left| \left\{ i \in \{1, ..., n\} \middle| c_i \neq c'_i \right\} \right|$$

und gibt die Anzahl der unterschidelichen Stellen in den Codewörten an.
Für den Code C ist der Hamming-Abstand definiert durch

$$d(C) := min\left\{ d(c, c') \middle| c, c' \in C, c \neq c' \right\} = minw(c), c \in C \setminus \{0\}$$

Beispiel 6.2

Das bedeutet: Sei ein (5,2)-Code gegeben und es gibt genau die 4 Codewörter $(0, 0, 0, 0, 0)$ $(1, 0, 1, 0, 1)$ $(0, 1, 0, 1, 1)$ $(1, 1, 1, 1, 0)$. Dann ist sein Minimalabstand 3, da mindestens 3 Elemente aus einem Codewort verändert werden müssen, um auf ein beliebiges anderes Codewort zu kommen.

6.5 Variablen

n Dimension des Codewortes $c \in C$
k Dimension des Informationswortes
d Informationsrate $= \frac{k}{n}$

Warnung 6.1

d ist leicht zu verwechseln mit der Funktion $d(c, c')$ des Hamming-Abstands!

7 Lineare Abbildungen

7.1 Kern

Defintion 7.1

Sei $\varphi : V \to W$ linear

$$Kern(\varphi) := \{v \in V | \varphi(v) = 0\} \subseteq V$$

Notiz 7.1

Der Kern ist die Menge an Werten, die in die Abbildung eingesetzt werden muss, damit 0 raus kommt, vgl. **Nullstellen** von Funktionen

Notiz 7.2

$rg(A) = dim(Kern(A))$

7.2 Bild

Defintion 7.2

Sei $\varphi : V \to W$ linear

$$Bild(\varphi) := \varphi(V) = \{\varphi(v) | v \in V\} \subseteq W$$

Notiz 7.3

Das Bild gibt die Menge der Werte an, die durch die Abbildung erreicht werden können, vgl. **Wertebereich** von Funktionen

8 Darstellungsmatrizen

Defintion 8.1

$D_B(\varphi) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ beschreibt φ bezüglich B.

Notiz 8.1

Spalten der Darstellungsmatrix $\Leftrightarrow$ Bilder der Basisvektoren

9 Determinanten

9.1 Signum / Vorzeichen

- $S_n =:= \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} | \sigma \text{ } ist \text{ } bijektiv\}$
- S_n heißen Permutationen.
- $sgn(\sigma) := (-1)^{w(\sigma)}$, das Vorzeichen / Signum von σ

Notiz 9.1

- $K^{n \times n} \to K$
- $det = 0 \Rightarrow$ nicht invertierbar!
- $det \neq 0 \Rightarrow$ invertierbar

9.2 Rechenregeln

Sei $A \in K$

Defintion 9.1

- Vertauschen zweier Zeilen (bzw. Spalten) von $A \Rightarrow$ Vorzeichenwechsel
- Multipliziere Zeile oder Spalte mit $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ det wird mit $\frac{1}{\lambda}$ multipliziert
- Addiere das λ-Fache einer Spalte (oder Zeile) auf eine andere $\Rightarrow$ det ändert sich nicht
- $det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
- $det \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = det(A) \cdot det(B)$

Notiz 9.2

Die Nullmatrix muss nicht quadratisch sein.
A,B müssen quadratisch sein, aber nicht von der selben Größe.

- $det(A) = det(A^T)$
- $det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det(A)$
- A invertierbar $\Rightarrow det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$

Notiz 9.3

Notation $det(A) = |A|$

Warnung 9.1

Gefahr bei $A^{1\times 1}$: $|-3| = \begin{cases} -3 & Determinante \\ 3 & Betrag \end{cases}$

9.2.1 Sarrus-Regel

Notiz 9.4: Für 2x2

$$det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}$$

Defintion 9.2

$$\begin{aligned} det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} \\ - a_{1,2} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} - a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} \\ - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \end{array}$$

9.2.2 Entwicklungssätze

Defintion 9.3

Sei a_{ij} der j-te Eintrag in der i-ten Zeile.

- $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{i,j})$ Entwicklung nach Spalte i
- $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{i,j})$ Entwicklung nach Zeile j

10 Eigenwerte

Defintion 10.1

Ein Eigenvektor einer Abbildung ist in der linearen Algebra ein vom Nullvektor verschiedener Vektor, dessen Richtung durch die Abbildung nicht verändert wird. Ein Eigenvektor wird also nur skaliert und man bezeichnet den Skalierungsfaktor als Eigenwert der Abbildung.

Defintion 10.2: Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, dann heißt $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert, falls ein Vektor $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ existiert, mit $A \cdot v = \lambda \cdot v$. v heißt dann **Eigenvektor** zum Eigenwert λ

$A \cdot v = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (A - \lambda \cdot Id) \cdot v = 0$

Notiz 10.1

Eigenwerte charakterisieren wesentliche Eigenschaften linearer Abbildungen, etwa ob ein entsprechendes lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist oder nicht.

10.1 Charakteristisches Polynom

Defintion 10.3

$X_A(\lambda) := det(A - \lambda \cdot Id)$

Satz 10.1

Nullstellen von X_A sind Eigenwerte von A.

Defintion 10.4: algebraische Vielfacheit

$m_a(\lambda)$ ist die Vielfacheit der Nullstelle λ im charakteristischen Polynom X_A.

Defintion 10.5: geometrische Vielfacheit

$$m_g(\lambda) := dim(E_\lambda)$$

TODO def: Eigenraum

11 Komplexe Zahlen

Defintion 11.1

$$\begin{aligned}\mathbb{C} :&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{a \cdot I_2 + b \cdot i | a, b \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

mit $i := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Defintion 11.2

$$\begin{aligned}&\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\} \\ &i^2 = -1\end{aligned}$$

11.1 Real- und Imaginärteil

Defintion 11.3: Realteil

$$a = Re(z)$$

Defintion 11.4: Imaginärteil

$$b = Im(z)$$

12 Die Google-Matrix und stochastische Matrizen

Defintion 12.1

Die Spaltensummen einer Matrix sind 1.

13 Skalarprodukt

Defintion 13.1

Für $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ ist das Skalarprodukt:

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i (= v^T w) \in K$$

Notiz 13.1

Zeilenweise multiplizieren und die Teil Ergebnisse addieren.
Aus der Schule bekanntes Verfahren: „Kringel Operator”: $\circ$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Warnung 13.1

Die Notation $\langle v, w \rangle$ ist leicht zu verwechseln mit dem Spann!

13.1 Orthogonal

Defintion 13.2

Zwei Vektoren w und v sind orthogonal (senkrecht) zu einander, wenn:

$$\langle v, w \rangle = 0$$

13.2 Orthonormal

Defintion 13.3

Ein orthonormaler Vektor v hat die Länge $|v| = 1$.

14 Symmetrische Matrizen

Defintion 14.1

Eine Matrix ist symetris, falls gilt:

$$A = A^T$$

15 Anwendungen in der Graphentheorie

Defintion 15.1

$$G = (V, E)$$

Wobei V die Menge der Knoten (engl. *vertices*) darstellt, und E die Menge der Kanten (engl. *edges*)

Defintion 15.2: Adjazenzmatrix

Die Adjazenzmatrix gibt die Kanten zwischen den Knoten an.

16 Rezepte

16.1 Lösen eines LGS

1. LGS in eine Matrix schreiben
2. Gauß-Algorithmus anwenden, um strenge Zeilenstufenform zu erhalten
3. a) direkt alle Elemente ablesen, falls möglich
   b) - Gleichung aufstellen ($n - rg(A) > \#$ freier Variablen)
      - Aus Gleichungen Lösungsmenge bilden (als Vektoren)
      - Lösungsmenge als Spann schreiben

16.2 Lösbarkeit von LGS

Bringe die erweiterete Koeffizentenmatrix in Zeilenstufenform.
Es wird keine **strenge** Zeilenstufenform benötigt.
Lösbar, wenn gilt $rg(A|b) = rg(A)$.
Weitere Unterscheidung:

- Lösung eindeutig, wenn $rg(A|b) = rg(A) = n$
- Lösung **nicht** eindeutig, wenn $rg(A) < n$ (und $n - rg(A) =$ Anzahl freier Variablen)

16.3 Untervektorraum

1. Wenn es sich um die Lösungsmenge eines homogenen LGS (also $\{x|Ax = 0\}$ handelt ist es ein Untervektorraum
2. Unter(vektorraum)kriterien prüfen:
   (1) nicht leer, insbesondere muss 0 enthalten sein: $U \neq \emptyset \;\;|\;\; 0 \in V$
   (2) Addition abgeschlossen: $\forall v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$
   (3) Multiplikation abgeschlossen: $\forall a \in K, v \in U \Rightarrow a \cdot v \in U$

Notiz 16.1

$U \subseteq V - UVR \Leftrightarrow U$ mit Verknüpfung $+, \cdot$ selbst VR.

Beispiel 16.1

- $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 \geq 0\}$
  (1) $O_n \in M_2 \Rightarrow M_2 \neq \emptyset \checkmark$
  (2) Sei $x, y \in M_2 \Rightarrow x_1 \geq 0, y_1 \geq 0 \Rightarrow z = x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \Rightarrow z \in M_2 \checkmark$
  (3) $u = (1, 0, ..., 0) \in M_2$, aber $(-1) \cdot u = (-1, 0, ..., 0) \notin M_2$
  M_2 ist kein UVR.
- $M_3 = \{x \in \mathbb{R} | x_1 - 2x_2 = 0\}$
  (1) $O_n \in M_3 \Rightarrow M_3 \neq \emptyset \checkmark$

(2) $x, y \in M_3 \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 0 = y_1 - 2y_y \Rightarrow (x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) = 0 \Rightarrow x + y \in M_2 \Rightarrow z = x + y = (x_1 + y_1, ..., x_1 + y_y) \in M_3 \Leftrightarrow x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 + y_1 - 2y_2 = 0 \Leftrightarrow x, y \in M_3$

(3) $a \in \mathbb{R}, x \in M_3$ (also $x_1 - 2x_2 = 0$) $\Rightarrow ax = (ax_1, ax_2, ..., ax_y) \in M_3 \Leftrightarrow ax_1 - 2ax_2 = 0 \Leftrightarrow a(x_1 - 2x_2) = 0 \Leftrightarrow x \in M_3 \Rightarrow M_3$ ist UVR

16.4 Basis eines Spanns von Vektoren

1. Schreibe alle Vektoren liegend übereinander
2. Gauß anwenden, um Zeilenstufenform zu erhalten
3. Die von 0 verschiedenen Zeilen bilden stehend geschrieben die Basisvektoren

16.5 Basen

- S Basis von $V \Leftrightarrow dim(V) = n$ und S linear unabhängig $dim(V) = n = |S|$
- $n < dim(V) \Rightarrow S$ kein EZS von V
- $dim(V) < n \Rightarrow S$ linear abhängig

Beispiel 16.2

- $V = \mathbb{R}[X] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$
  VL: $dim(V) = 3 \leq 2$ und $S_0 = \{1, x, x^2\}$ ist eine Basis von V
  Ist $S_1 = \{1, x + 1, x^2 + x + 1\}$ linear unabhängig | EZS | Basis?

  (1) zz. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
  S_1 ist linear abhängig: Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (x+1) + \lambda_3 \cdot (x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot 1 + (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot x + \lambda 3x^2 = 0$
  Da $1, x, x^2$ linear unabhängig $\Rightarrow$ LGS $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$
  $\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \checkmark$

  (2) Zeige, dass S_1 EZS von V ist. Es genügt zu zeigen, dass $S_0 = \{1, x, x^2\} \quad \leq < S_1 >$, da dann gilt:

  $$V = \; < S_0 > \; = \; < 1, x, x^2 > \; \leq \; < S_1 > \; \leq V \quad \Rightarrow \quad V =< S_1 >$$

  - $1 \in \; < 1, x + 1, x^2 + x + 1 >$, denn $1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (x + 1) + 0 \cdot (\dots)$
  - $x \in \; < 1, x + 1, x^2 + x + 1 >$, denn $x = -1 \cdot 1 + 1 \cdot (x + 1)$
  - $x^2 \in \; < 1, x + 1, x^2 + x + 1 >$, denn $x^2 = 0 \cdot 1 - 1 \cdot (x + 1) + 1 \cdot (x^2 + x + 1)$

  Also gilt S_1 ist EZS.

  (3) Nach Korollar 5.13:
  $dim(V) = 3 = |S_1|$ und S_1 ist EZS $\Rightarrow S_1$ ist Basis.

16.6 Test auf lineare Unabhängigkeit

1. Schreibe alle Vektoren stehend nebeneinander
2. Gauß anwenden, um Zeilenstufenform zu erhalten
3. a) Falls $rg(A) = \#$ der Spalten (also n) $\Rightarrow$ linear **unabhängig**
   b) Falls $rg(A) \neq n \Rightarrow$ linear **abhängig**

16.7 Lineare Codes

1. $(G \to P)$ $G = \begin{pmatrix} Id_g \\ \dots \\ A \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} -A & \vdots & Id_p \end{pmatrix}$
2. $(P \to G)$ Falls $P = \begin{pmatrix} -A & \vdots & Id_p \end{pmatrix} \Rightarrow G = \begin{pmatrix} Id_g \\ \dots \\ A \end{pmatrix}$
   $\to$ Falls nicht, löse das LGS $P \cdot c = 0$ und bestimme Basisvektoren $c_1, c_2, \dots, c_K$ des Lösungsraums $\Rightarrow G = (c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_K)$

16.7.1 Informationen des Codes bestimmen

1. Falls Generatormatrix gegeben:
   - $G \in \mathbb{K}^{n \times k} \Rightarrow (n, k)$-Code
   - d (Minimalabstand der Paritycheckmatrix)
     a) Alle Wörter bilden und zählen
        oder
     b) Stelle Paritycheckmatrix auf und bestimme d
2. Falls Paritycheckmatrix gegeben:
   - $P \in \mathbb{K}^{n\ x\ k} \Rightarrow k = n - rg(P) \Rightarrow (n, k)$-Code
   - Bestimme d

16.7.2 Bestimmung des Minimalabstandes der Paritycheckmatrix

$d = 1$	P hat eine Nullspalte
$d = 2$	P hat keine Nullspalte, aber es gibt zwei linear abhängige Spalten von P
$d = 3$	P hat keine Nullspalte, P hat keine zwei linear abhängige Spalten von P, aber P hat drei Spalten von P, die linear abhängig sind

16.7.3 Überprüfe ob das Codewort c geschickt wurde

1. Berechne $P \cdot c$
   Falls $P \cdot c = 0 \Rightarrow$ wurde wahrscheinlich gesendet
   Falls $P \cdot c \neq 0 \Rightarrow$ b) + c)

2. Finde $f \in \mathbb{K}^n$ mit $P \cdot f = P \cdot c$, wobei f möglichst wenige Nicht-Nulleinträge haben soll $\Rightarrow$ Wie muss man das Codewort ändern, damit 0 rauskommt. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Starte mit den Standardvektoren = Spalten der Paritycheckmatrix
   $\Rightarrow$ dann vielfache der Standardvektoren
   $\Rightarrow$ dann Linearkombinationen des Spalten von P

3. $\Rightarrow c' = c - f$ wurde wahrscheinlich gesendet

16.7.4 Sonstige

- Anzahl der Codewörter: $|\mathbb{K}|^k$
- Informationsrate: $\frac{k}{n}$
- Redundanz: n-k

16.8 Lineare Abbildungen (1)

= Linearität
$\varphi : V \to W$ mit $V, W\mathbb{K} - VR$ heißt linear, falls

1. $\varphi(0_v) = 0_w$
2. $\forall v, w \in V : f(v + w) = f(v) + f(w)$ (Additivität)
3. $\forall v \in V, \forall a \in \mathbb{K} : \varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v)$ (Homogenität)

Beispiel 16.3: Wichtiges Beispiel

$$V = \mathbb{K}^n, W = \mathbb{K}^m, A \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

$\Rightarrow \varphi_a : V \to W, x \mapsto A$

16.9 Matrix invertieren

Gegeben ist Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\ x\ n}$
Berechne mit Gauß:
$\left(A \ \vdots \ Id\right) \rightsquigarrow \left(\underline{\mathbf{Id}} \ \vdots \ A^{-1}\right)$
Falls dort <u>nicht</u> die Identität steht, war / ist A nicht invertierbar da $rg(A) \neq n$
$\Rightarrow A^{-1}$ ist die **Inverse**

Notiz 16.2

Prüfe (immer), ob $A \cdot A^{-1} = Id$

Notiz 16.3

Eine Matrix ist invertierbar, wenn $det(A) \neq 0$.

Notiz 16.4: Umkehrabbildung

Das Inverse einer Matrix wird für die Umkehrabbildung verwendet:

$$\varphi_A^{-1} = \varphi_A$$

16.10 Lineare Abbildungen (2)

$\varphi : V \to W linear$

Notiz 16.5

$|V| = |\mathbb{K}|^{dimV}$

1. Bild(φ) $:= \varphi(V) \underset{UVR}{\subset} W$
   Falls $\varphi = \varphi_A \Rightarrow$ Bild (φ) $= <$ Spalten von A $>$
2. Kern(φ) $= \varphi^{-1}(0_w) \subset W$
   Falls $\varphi = \varphi_A \Rightarrow$ Kern (φ) $= \{x \in V | A \cdot x = 0\}$
3. Urbild $\varphi^{-1}(w)$
   Falls $\varphi = \varphi_A \Rightarrow \varphi^{-1} = \{x \in V | A \cdot x = w\} = A^{-1} \cdot w$, letzter Schritt, falls A invertierbar.

   Notiz 16.6

   bidirektional = isomorph $\Leftrightarrow$ regulär $\Leftrightarrow$ invertierbar
   VR-Isomorphismus bildet Basen auf Basen ab.

4. Injektivität / Surjektivität / Bijektivität
   $\varphi : V \to W$
   a) injektiv, falls aus $\varphi(v) = \varphi(w)$ folgt $v = w$ $\quad (\varphi(v - w) = 0)$
   b) surjektiv, falls $\varphi(v) = w$
   c) bijektiv, falls injektiv und surjektiv

   Notiz 16.7

   φ ist injektiv $\Leftrightarrow dim(Kern) \ngeq 1$
   φ ist injektiv $\Leftrightarrow Kern(\varphi) = \{0\}$
   φ ist surjektiv $\Leftrightarrow dim(Bild(\varphi)) = dim(W) = rg(A)$, letzter Schritt gilt, falls $\varphi = \varphi_A$

5. Dimensionssatz:
   $\varphi : V \to W$ linear
   $dim(V) = dim(Kern(\varphi)) + dim(Bild(\varphi)) \qquad dim(V) < \infty$

16.11 Wann ist eine Menge eine Basis?

Wenn die Menge linear unabhägig ist und ein Erzeugendensystem ist.
Falls $|S| > dim(V) \Rightarrow$ linear abhängig, insbesondere nicht linear unabhängig.
Falls $|S| < dim(V) \Rightarrow$ kein EZS.
$\Rightarrow$ Basis ist nur möglich, wenn $|S| = dim(V)$.
$\rightarrow$ Prüfe immer, ob S linear unabhängig ist oder ob S ein EZS ist. Falls ja, ist es auch ein EZS bzw. linear unabhängig ist und somit S eine Basis von V ist.

16.12 Darstellungsmatrizen

> **Defintion 16.1**
>
> Sei V ein K-VR und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von V
>
> $\varphi : V \mapsto V$ lineare Darstellungsmatrix
>
> $D_B(\varphi) \in \mathbb{K}^{n\ x\ n}$ beschreibt φ bezüglich B.

Für $j = 1, ..., n$:

1. Wende φ auf die Basisvektoren b_j an.
2. Schreibe $\varphi(b_j) \in V$ als Linearkombination bezüglich B auf.
3. Schreibe die Koeffizenten der Linearkombination in die j-te Spalte von $D_B(\varphi)$

16.13 Bilder von Darstellungsmatrizen

- Sei $\varphi : V \rightarrow W$ linear mit $B := \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ Basis von V. $C := \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ Basis von W. B, W sind VR. $i = 1, \ldots, n$. $D_{B\lambda}(\varphi) = 0_{\mathbb{K}^{n\ x\ n}}$
- Berechne $\varphi(b_i)$
- Stelle $\varphi(b_i)$ als Linearkombination der Basisvektoren $c_1, \ldots, c_m$ dar.
  $\varphi(b_i) = a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + \cdots + a_m c_m$
- Schreibe die Koeffizenten als stehenden Vektor in die i-te Spalte von $D_{B,C}(\varphi)$
  $\Rightarrow D_{B,C}(\varphi)$ ist die Darstellungsmatrix von φ zur Basis B und C.

16.14 Vektor als Linearkombination bezüglich einer Basis

Vektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ soll als Linearkombination bezüglich der Basis B geschrieben werden.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Basis $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ von $\mathbb{R}^4$

1. Erweiterte Matrix aufstellen mit Vektoren der Basis als Spalten der Matrix ($= A$) und dem Vektor v ($= b$)
2. Gauß-Algorithmus ausführen und strenge Zeilenstufenform bilden
3. Linearkombination aus b ablesen

Beispiel 16.4

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

16.15 Basistausch (zu linear unabhängig)

Ist v eine Linearkombination aus dem Basisvektor v_i mit $i \in I \subset \{1, \ldots, n\}$, dann ist $B_i := B \setminus \{v_i\} \cup \{v\}$ mit $i \in I$ eine Basis von V, da für $i \notin I \quad B_i$ linear abhängig ist. Für $i \in I$ ist B_i ein EZS von V_i, da wie in jeder Linearkombination eines Vektors $v \in V$ den Basisvektor v_i durch die anderen Basisvektoren v_j mit $j \in I \setminus \{i\}$ und v ersetzen können.

Notiz 16.8

Wann ist $B_i := B \setminus \{v_i\} \cup \{v\}$ eine Basis?
Genau dann, wenn v_i mit Koeffizenten $\neq 0$ in v auftaucht.

Beispiel 16.5

Gegeben sei die Basis $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ aus $\mathbb{R}^4$ und die Linearkombination $v = 2v_1 + 1v_2 - v_4$ bezüglich der Basis B.
Wir können genau diejenigen v_i's, die in der Linearkombination von v bezüglich der Basis B mit Koeffizient ungleich Null auftauchen durch v ersetzen, so dass B_i weiterhin eine Basis ist. Dies geht also für $i = 1, 2, 4$

1. $v_1 = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_4$
   $i = 1 \quad v_1, v_2, v_3, v_4 \in < \ B_1 \ > = < \ \frac{1}{2}v - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v_4, v_2, v_3, v_4 \ >$
   $\Rightarrow B_1$ ist EZS der Länge $4 = dim(V)$ von V, also ist B_1 eine Basis
2. $v_2 = v - 2v_1 + v_4$
   $i = 2 \quad v_1, v_2, v_3, v_4 \in \langle B_2 \rangle = \langle v_1, v - 2v_1 + v_4, v_3, v_4 \rangle$
   $\Rightarrow B_2$ ist EZS der Länge $4 = dim(V)$ von V, also ist B_2 eine Basis
3. $i = 3 \quad v_3 \notin \langle B_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$
   $\Rightarrow B_3$ ist kein EZS von V, also auch keine Basis

4. $v_4 = -v + 2v_1 + v_2$
   $i = 4 \quad v_1, v_2, v_3, v_4 \in \langle B_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3, -v + 2v_1 + v_2 \rangle$
   $\Rightarrow B_4$ ist EZS der Länge $4 = dim(V)$ von V, also ist B_4 eine Basis

16.16 Bestimmung von Bild, Kern von φ und Urbild von u

Defintion 16.2

Sei $\varphi : V \to W$ eine Abbildung.

- Urbild von $B \subset W$ unter φ:
$$\varphi^{-1}(B) := \{v \in V | \varphi(v) = B\}$$
- Bild von $A \subset W$ unter φ:
$$\varphi(A) := \{\varphi(v) | v \in A\}$$
- Kern von φ:
$$Kern(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0_w\})$$
- Bild von φ:
$$Bild(\varphi) = \varphi(V)$$

Falls φ linear ist:

- Kern φ ist UVR von V
- Bild φ ist UVR von W
- φ ist injektiv $\Leftrightarrow$ Kern $\varphi = \{0_v\}$, oder dim Kern $\varphi \neq 0$
- φ ist surjektiv $\Leftrightarrow$ Bild $\varphi = W$, oder dim Bild $\varphi =$ dim W

Es gilt der Dimensionssatz:
$$dim(V) = dim(Kern \quad \varphi) + dim(Bild \quad \varphi)$$

Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von $V_j \quad C := \{c_1, \dots, c_m\}$ Basis von W.

1. Bestimme die Darstellungsmatrix $D_{B,C}(\varphi)$: siehe oben
2. Bestimme den Kern und das Bild der Matrix $D_{B,C}(\varphi)$
   - Kern $D_{B,C}(\varphi) = \langle v_1, \dots, v_p \rangle$
   - Bild $B_{B,C}(\varphi) = \langle w_1, \dots, w_q \rangle$
   - Urbild: Löse
   $$U := \{x \in \mathbb{K}^n | D_{B,C}(\varphi) \cdot x = (u)c??????\} = U = \{v + a_1 v_1 + \dots + a_o v_o | a_i \in \mathbb{K}\}$$
   - – Kern $\varphi = \langle (v_1)_B, (v_2)_B, \dots, (v_p)_B \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$

Notiz 16.9

= sei definiert als „Übersetze die Basisdarstellung zurück in die natürliche Darstellung von V_i “

(z.B. von Vektor → Matrix, von Vektor → Polynom,von Vektor → Funktion)

- Bild $\varphi = \langle (w_1)_c, (w_2)_c, \ldots, (w_q)_c \rangle \overset{zurueckuebersetzen}{=} \langle w_1, w - 2, \ldots, w_q \rangle$
- Urbild $\varphi^{-1}(v) = \{(v)_B + a_1 \cdot (v_1)_B + \cdots + a_o(v_o)_B\} \overset{zurueckuebersetzen}{=} \{v + a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_o v_o\}$

$\Rightarrow dim(Kern\varphi) = dim(Kern \;\; D_{B,C}(\varphi))$

16.17 Basiswechselmatrix $S_{C,B}$

Defintion 16.3

„Koordinaten in C“ $= S_{C,B}\cdot$ „Koordinaten in B“

$$S_{C,B} = D_{B,C}(id)$$

$$S_{B,C} = S_{C,B}^{-1}$$

Notiz 16.10

Bei der Basiswechselmatrix heißt C, B dass zu C gewechselt wird. Bei der Darstellungsmatrix steht B, C für das man die Aktion einer linearen Abbildung bezüglich der Basisdarstellung B betrachtet und was als Ergebnis in Basisdarstellung von C dabei herauskommt

Defintion 16.4

Sei $\varphi : V \to W$ linear und B, B' sind Basen von V, $\quad C, C'$ sind Basen von W

$$D_{B',C'}(\varphi) = S_{C',C} \cdot D_{B,C}(\varphi) \cdot S_{B,B'}$$

Defintion 16.5

Sei $\varphi : V \to W$ linear und B, B' sind Basen von V

$$D_{B'}(\varphi) = S_{B',B} \cdot D_B(\varphi) \cdot S_{B,B'} = S_{B,B'}^{-1} \cdot D_B(\varphi) \cdot S_{B,B'}$$

Notiz 16.11

$D_{B'}$ steht für $D_{B',B'}$

Defintion 16.6

Falls E die Einheitsbasis ist, dann ist $S_{E,B}$ immer gleich $S_{E,B} = (b_1|b_2|\ldots|b_n)$

Algorithmus für $S_{C,B}$:

$$(c_1|c_2|\ldots|c_n||b_1|b_2|\ldots|b_n) \overset{Gauss}{\rightsquigarrow} (Id|S_{C,B})$$

Alternativ:

1. Schreibe b_j als Linearkombination von C
2. Schreibe die Koeffizenten in die j-te Spalte von $S_{C,B}, \quad j = 1, ..., n$

Algorithmus für $D_{B,C}$:

$$(c_1|c_2|\ldots|c_n||\varphi(b_1)|\varphi(b_2)|\ldots|\varphi(b_n)) \overset{Gauss}{\rightsquigarrow} (Id|D_{B,C}(\varphi))$$

Notiz 16.12: Notiz zu Algorithmus

- geht nur bei Vektoren
- Polynome und Matrizen als Vektor schreiben (bzgl. Einheitsmatrix)

16.18 Determinanten

Notiz 16.13

A ist invertierbar $\Leftrightarrow rg(A) = n \Leftrightarrow det(A) \neq 0$

Die Abbildung $det : \mathbb{K}^{n\ x\ m} \to \mathbb{K}$ ist wie folgt definiert:

1. Falls $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & * \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$
2. Falls die Matrix B sich aus A ergibt, indem man zwei Zeilen oder Spalten vertauscht, dann ist $det(B) = -det(B)$.
3. Falls B sich aus A ergibt, indem man ein Vielfaches einer Zeile oder Spalte zu einer <u>anderen</u> Zeile oder Spalte addiert, dann ist $det(A) = det(B)$.
4. Falls B sich aus A ergibt, indem man ein $\frac{1}{\lambda}$-faches einer Zeile oder Spalte bildet, dann ist $det(B) = \lambda \cdot det(A)$.

16.18.1 Berechne die Determinante von A

Wende Gauß auf A an unter Berücksichtigung von 2. - 4. bis Fall 1 eintritt.

16.18.2 Rechenregeln

Siehe Rechenregeln Determinanten
Und siehe Sarrus-Regel

16.18.3 Entwicklung nach Zeilen der Spalten

Notiz 16.14

Schachbrettmuster: $\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$

- Sei $A_{i,j}$ die Matrix, die sich aus A ergibt, indem man die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht.
- Entwickle nach der i-ten Zeile:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij})$$

- Entwickle nach der j-ten Zeile:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij})$$

16.19 Kern einer Abbildung

Abbildung $\varphi : x \to Ax$

(1) Matrix A mit Gauß auf Zeilenstufenform bringen

(2) $dim(Kern(A)) = rg(A)$

(3) Finde Vektoren die Multipliziert mit A multipliziert 0 ergeben.

Beispiel 16.6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$Kern(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

16.20 Gramm-Schmidsches Orthogonalisierungs-Verfahren

Eingabe: U UVR $U = \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$
Ausgabe: Orthonormalbasis $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ von U

(1) Setze $m := 0$

(2) Für $i = 1, ..., k$ führe (3) und (4) aus

(3) Setze $w_i = v_i - \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, v_j \rangle \cdot u_j$

(4) Falls $w_i \neq 0$, setze $m = m + 1$ und $u_m = \frac{1}{|w_i|} \cdot w_i$
(u_m ist jetzt normiert, da $|u_m| = \frac{|w_i|}{|w_i|} = 1$)

17 Abkürzungen

EZS	Erzeugendensystem
LGS	Lineares Gleichungssystem
Spann	Spann / Lineare Hülle
V K−VR	Sei V ein K-Vektorraum
VR	Vektorraum

18 Source-Code

Github - LinAlgZusammenfassung - https://github.com/ibhh/LinAlgZusammenfassung