

## Übungsblatt 9 zur Algebra II

Abgabe bis 17. Dezember 2013, 17:00 Uhr

### Aufgabe 1. (3) *Ein Gegenbeispiel*

Sei  $R$  ein Integritätsbereich. Zeige, dass das Ideal  $(X, Y) \subseteq R[X, Y]$  kein Hauptideal ist.

### Aufgabe 2. (2+2) *Praxis zu größten gemeinsamen Teilern*

- a) Bestimme eine teilweise Faktorisierung der Zahlen 99, 1200 und 160.
- b) Bestimme einen größten gemeinsamen Teiler der folgenden Polynome in  $\mathbb{Q}[X, Y]$ :

$$X^3Y^2 - X^2Y^3 + XY^3 - Y^4, \quad X^4Y - X^3Y^2 - X^2Y^2 + XY^3.$$

### Aufgabe 3. (1+1+2) *Theorie zu größten gemeinsamen Teilern*

- a) Seien  $a, b, c$  Elemente eines Integritätsbereichs. Sei  $c$  regulär und existiere ein größter gemeinsamer Teiler  $d$  von  $ac$  und  $bc$ . Zeige, dass  $d$  durch  $c$  teilbar ist und dass  $d/c$  ein größter gemeinsamer Teiler für  $a$  und  $b$  ist.
- b) Seien  $a, b, c$  Elemente eines Rings mit größten gemeinsamen Teilern. Sei  $a$  ein Teiler von  $b \cdot c$  und sei die Eins ein größter gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ . Zeige, dass  $a$  auch ein Teiler von  $c$  ist.
- c) Sei  $R$  ein Integritätsbereich, in dem eine teilweise Primfaktorzerlegung immer möglich ist. Zeige, dass  $R$  ein Ring mit größten gemeinsamen Teilern ist.

### Aufgabe 4. (2+2) *Beispiele und Nichtbeispiele für euklidische Ringe*

- a) Sei  $\omega$  eine primitive dritte Einheitswurzel. Zeige, dass der Ring  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\omega)} = \mathbb{Z}[\omega]$  zusammen mit der Norm  $N : a + b\omega \mapsto a^2 - ab + b^2$  ein euklidischer Ring ist.
- b) Zeige, dass der Ring  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  zusammen mit der Norm  $N : a + b\sqrt{-5} \mapsto a^2 + 5b^2$  kein euklidischer Ring ist.

### Aufgabe 5. (1+2+2) *Primideale und maximale Ideale*

- a) Zeige, dass ein nilpotentes Element eines kommutativen Rings  $R$  in allen Primidealen von  $R$  liegt.
- b) Sei  $\mathfrak{m} \subseteq R$  ein Ideal eines kommutativen Rings  $R$ . Zeige, dass  $\mathfrak{m}$  genau dann ein maximales Ideal ist, wenn der Faktorring  $R/\mathfrak{m}$  ein Körper ist.
- c) Ist das Ideal  $(2, X) \subseteq \mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 6)$  maximal? Ist es ein Primideal?