

Übungsblatt 5 zur Algebra I

Abgabe bis 21. Mai 2013, 12:00 Uhr

Aufgabe 1. Elementarsymmetrische Funktionen

- Gib $e_2(X, Y, Z, U, V)$, also die zweite elementarsymmetrische Funktion in den fünf Unbestimmten X, Y, Z, U und V , explizit an.
- Schreibe $X^2 + Y^2 + Z^2$ als Polynom in den $e_i(X, Y, Z)$.
- Schreibe $X_1^2 + \dots + X_n^2$ als Polynom in den $e_i(X_1, \dots, X_n)$.
- Zeige, dass $e_k(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ Argumente}}) = \binom{n}{k}$.

Aufgabe 2. Der Vietasche Satz

- Sei $X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$ eine normierte Polynomgleichung vierten Grades, deren Lösungen mit Vielfachheiten x_1, x_2, x_3 und x_4 seien. Drücke die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 explizit als Polynome in den x_i aus.
- Verwende den Vietaschen Satz für $n = 2$ um die bekannte Lösungsformel für normierte quadratische Gleichungen herzuleiten.

Aufgabe 3. Diskriminanten kubischer Gleichungen

- Finde eine normierte Polynomgleichung dritten Grades, welche 1 als zweifache Lösung, 2 als einfache Lösung und keine weiteren Lösungen besitzt. Was ist ihre Diskriminante?
- Sei $X^3 + pX + q = 0$ eine allgemeine reduzierte kubische Gleichung. Zeige, dass ihre Diskriminante durch $-4p^3 - 27q^2$ gegeben ist.

Aufgabe 4. Symmetrien eines Polynoms

Sei $f(X, Y, Z, W) := XY + ZW + XYZW$. Wieviele vierstellige Permutationen σ gibt es, so dass $\sigma \cdot f = f$?

Aufgabe 5. Formale Ableitung von Polynomen

- Seien $g(X)$ und $h(Y)$ Polynome. Zeige: $(gh)^{(k)}(X) = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} g^{(i)}(X) h^{(j)}(X)$.
- Sei $f(X)$ ein Polynom und n eine natürliche Zahl. Zeige:

$$f^{(n+1)} = 0 \iff \deg f \leq n.$$

- Sei $f(X)$ ein Polynom und x eine komplexe Zahl. Zeige, dass die Entwicklung von $f(X)$ nach $X - x$ durch die *Taylor'sche Formel* gegeben ist (nach Brooke Taylor, 1685–1731, britischer Mathematiker):

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (X - x)^k$$