# Übungsblatt 2 zur Algebra I

Abgabe bis 29. April 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. Lösungen polynomieller Gleichungen sind algebraisch

Sei z eine Lösung der Polynomgleichung

$$X^3 - \sqrt{2 - \sqrt[3]{4}} X^2 + 3 = 0.$$

Finde eine normierte Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die z als Lösung hat.

#### Aufgabe 2. Auf den Spuren Bombellis

Zeige formal die zuerst von Rafael Bombelli (1526–1572, italienischer Mathematiker) gefundene Gleichheit

$$(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$$

und diskutiere, welche Vorzeichen der Quadratwurzeln jeweils zu wählen sind.

### Aufgabe 3. Rechnen mit komplexen Zahlen

- a) Sei  $z \neq 0$  eine komplexe Zahl, deren Real- und Imaginärteil rationale Zahlen sind. Zeige, dass  $z^{-1}$  ebenfalls rationalen Real- und Imaginärteil hat.
- b) Zeige, dass der Realteil einer komplexen Zahl z durch  $\frac{1}{2}(z+\overline{z})$  und dass der Imaginärteil durch  $\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$  gegeben ist.
- c) Sei z eine invertierbare komplexe Zahl. Folgere die Gleichheit  $\overline{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$  aus der Multiplikativität der komplexen Konjugation.
- d) Interpretiere die Multiplikation mit der imaginären Einheit i geometrisch.

## Aufgabe 4. Zahlen nahe bei Null

Zeige, dass für zwei reelle Zahlen a und b genau dann die Wurzel  $\sqrt{a^2 + b^2}$  nahe bei Null ist, wenn sowohl |a| als auch |b| nahe bei Null sind. Zeige also:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \colon \quad \sqrt{a^2 + b^2} < \delta \implies |a|, |b| < \epsilon$$
 
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \colon \qquad |a|, |b| < \delta \implies \sqrt{a^2 + b^2} < \epsilon$$

### Aufgabe 5. Ein neuer Zahlbereich

- a) Zeige, dass die Gleichung  $X^2 + X + 1 = 0$  in den reellen Zahlen keine Lösung besitzt.
- b) Konstruiere einen minimalen Zahlbereich  $\mathbb{R}(\omega)$ , welcher die reellen Zahlen und eine Lösung  $\omega$  der Gleichung  $X^2+X+1=0$  enthält und in welchem Addition und Multiplikation so definiert sind, dass sie die Addition und Multiplikation reeller Zahlen fortsetzen und die einschlägigen Gesetze der Arithmetik erfüllen.
- c) Zeige, dass  $\omega^3 = 1$  in  $\mathbb{R}(\omega)$  gilt.
- d) Finde eine Lösung der Gleichung  $X^2 + 1 = 0$  in  $\mathbb{R}(\omega)$ .