Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 13 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. () *Der Erstsemestertraum wird wahr*

Sei $(x_n)_n$ eine Folge in einem Ring A. Sei $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A. Zeige: Genau dann konvergiert $(s_n)_n$, wenn $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist (bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie).

Aufgabe 2. () *Zu schön um wahr zu sein?*

Sei x ein Element eines topologischen Rings. Gelte $x^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Ist x nilpotent?

Aufgabe 3. () *Abgeschlossenheit maximaler Ideale*

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem Ring A. Zeige, dass ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A genau dann abgeschlossen bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie auf A ist, wenn $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$.

Aufgabe 4. () *Vervollständigung an maximalen Idealen*

Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in einem Ring A. Zeige, dass die Vervollständigung von A bezüglich der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie ein lokaler Ring ist.

Aufgabe 5. () *Die 10-adischen Zahlen*

Finde ein Element $x \in \mathbb{Z}_{10}$, das weder Null noch Eins ist, aber trotzdem die Identität $x^2 = x$ erfüllt. Kannst du die ersten paar Ziffern von x angeben?