Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 14 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2) *Ein Gegenbeispiel zu einer Verstärkung des Krullschen Satzes*

Finde einen noetherschen Ring zusammen mit einem Ideal $\mathfrak{a} \neq (1)$ mit $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n \neq (0)$.

Aufgabe 2. (2+m+2) *Dimension des Polynomrings im nicht-noetherschen Fall*

Sei A ein Ring.

a) Zeige: $\dim A[X] \geq 1 + \dim A$.

b) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Zeige, dass die Primideale $\mathfrak{q}$ von $A[X]$ mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ in Eins-zu-Eins-Korrespondenz zu den Primidealen von $k(\mathfrak{p})[X]$ stehen. Dabei ist $k(\mathfrak{p})$ der Körper $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$.

c) Zeige: $\dim A[X] \leq 1 + 2 \dim A$.

Aufgabe 3. (3) *Beispiele für Poincarésche Reihe und Hilbertsches Polynom*

Berechne die Poincarésche Reihe und das Hilbertsche Polynom des gewichteten $K[X,Y]$-Moduls $K[X,Y]/(X^2, XY)$ bezüglich $\dim_K$.

Aufgabe 4. (1) *Dualität zwischen symmetrischer und äußerer Algebra*

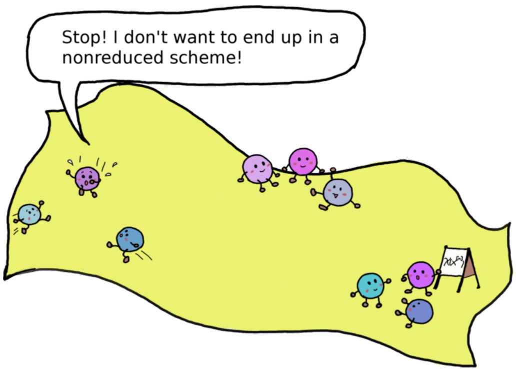
Sei K ein Körper. Sei $S = K[X_1, \ldots, X_n]$ und sei E die zugehörige *äußere Algebra* der *antikommutativen Polynome*, wo $X_i X_i = 0$ und $X_i X_j = -X_j X_i$ gilt. Sei $\lambda = \dim_K$. Zeige: $\lambda(S,t) \cdot \lambda(E,-t) = 1$.

Aufgabe 5. (0) *Rationale Binomialkoeffizienten*

Für rationale Zahlen x und natürliche Zahlen k setzen wir $\binom{x}{k} := x(x-1)\cdots(x-k+1)/k! \in \mathbb{Q}$. Solche Binomialkoeffizienten kommen in Taylor-Entwicklungen vieler wichtiger Funktionen vor.

a) Zeige: Genau dann kommt im gekürzten Nenner einer rationalen Zahl a/b nicht der Primfaktor p vor, wenn es eine p-adische Ganzzahl u mit $bu = a$ gibt.

b) Verwende die Dichtheit von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}_p$ und die Stetigkeit von Polynomen über $\mathbb{Z}_p$, um zu folgern: Im gekürzten Nenner eines rationalen Binomialkoeffizienten $\binom{x}{k}$ können nur solche Primfaktoren vorkommen, die auch im gekürzten Nenner von x vorkommen.



ENTWURF