Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

# Übungsblatt 8 zur Algebra I

Abgabe bis 10. Juni 2013, 17:00 Uhr

**Aufgabe 1.** *Numerischer Irreduzibilitätstest*

Bestimme numerisch die Nullstellen von $f(X) = X^4 - 12\,X^2 + 1$ bis auf wenige Stellen nach dem Komma, und nutze diese Information um zu zeigen, dass $f(X)$ über den rationalen Zahlen irreduzibel ist.

**Aufgabe 2.** *Inhalt von Polynomen*

Sei $f(X)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten. Zeige, dass der Inhalt von $f$...

a) ...genau dann ganzzahlig ist, wenn alle Koeffizienten von $f$ ganzzahlig sind.

b) ...das Inverse des Leitkoeffizienten von $\widetilde{f}$ ist, wenn $f$ normiert ist.

c) ...das Inverse einer ganzen Zahl ist, wenn $f$ normiert ist. Gilt auch die Umkehrung?

**Aufgabe 3.** *Kongruenzrechnungen*

a) Sei $n$ eine ganze Zahl und seien $a, a', b, b'$ ganze Zahlen mit $a \equiv a'$ und $b \equiv b'$ modulo $n$. Rechne explizit nach, dass dann auch $a + b \equiv a' + b'$ modulo $n$.

b) Sei $n$ eine ganze Zahl und sei $a$ eine zu $n$ teilerfremde ganze Zahl. Zeige, dass für ganze Zahlen $b, b'$ mit $ab \equiv ab' \equiv 1$ modulo $n$ folgt, dass $b \equiv b'$ modulo $n$.

c) Sei $a$ eine ganze Zahl mit $a \equiv 1$ modulo 5. Für welche Exponenten $k$ ist $a^k \equiv 2$ modulo 5?

d) Finde zwei Inverse von 8 modulo 35.

**Aufgabe 4.** *Reduktion modulo einer Primzahl*

Sei $f(X)$ ein normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Beweise oder widerlege: Ist $f(X)$ modulo einer Primzahl reduzibel, so ist $f(X)$ auch über den rationalen Zahlen reduzibel.

**Aufgabe 5.** *Irreduzibilitätstest nach Leopold Kronecker*

a) Seien $b_0, \ldots, b_m$ von Null verschiedene ganze Zahlen. Zeige, dass es nur endlich viele Polynome $g(X)$ vom Grad $\leq m$ mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, sodass für alle $i = 0, \ldots, m$ die ganze Zahl $g(i)$ ein Teiler von $b_i$ ist.

b) Sei $f(X)$ ein primitives Polynom vom Grad $n$ mit ganzzahligen Koeffizienten und $f(i) \neq 0$ für alle $0 \leq i \leq \frac{n}{2}$. Zeige, dass es nur endlich viele Polynome $g(X), h(X)$ mit ganzzahligen Koeffizienten und $f = g \cdot h$ gibt.

c) Verwende Teilaufgabe b), um ein Verfahren anzugeben, das von einem primitiven Polynom $f(X)$ mit ganzzahligen Koeffizienten feststellt, ob es über den rationalen Zahlen reduzibel oder irreduzibel ist.