

Übungsblatt 14 zur Algebra I

Abgabetermin entscheidet ihr!

Aufgabe 1. *Illustrationen des Hauptsatzes*

- Zeige, dass die einzigen Zwischenerweiterungen von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ über \mathbb{Q} die beiden trivialen (ganz $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und nur \mathbb{Q}) sind.
- Finde ein normiertes separables Polynom $f(X)$ mit rationalen Koeffizienten, sodass der Index der Untergruppe $\text{Gal}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})}(x_1, \dots, x_n)$ in $\text{Gal}_{\mathbb{Q}}(x_1, \dots, x_n)$ gleich 3 ist. Dabei seien x_1, \dots, x_n die Nullstellen von $f(X)$. Ist diese Untergruppe ein Normalteiler?
- Sei $f(X)$ ein normiertes separables Polynom mit rationalen Koeffizienten, welches mindestens eine echt komplexe Nullstelle besitzt. Zeige, dass die Galoisgruppe der Nullstellen von $f(X)$ mindestens ein Element der Ordnung 2 besitzt.

Aufgabe 2. *Wurzelausdrücke*

- Sei x eine durch Wurzeln ausdrückbare Zahl und x' ein galoissch Konjugiertes von x . Zeige, dass x' ebenfalls durch Wurzeln ausdrückbar ist, und zwar durch denselben Wurzelausdruck wie x .
- Zeige, dass jede primitive n -te Einheitswurzel durch Wurzeln, deren Exponenten höchstens $\max\{2, \frac{n-1}{2}\}$ sind, ausgedrückt werden kann.

Aufgabe 3. *Normalteiler*

- Sei G eine Gruppe mit $G \neq \{\text{id}\}$. Finde zwei verschiedene Normalteiler in G .
- Sei G eine beliebige Gruppe. Zeige, dass das Zentrum von G ein Normalteiler in G ist.
- Ist die symmetrische Gruppe S_5 einfach?

Aufgabe 4. *Diedergruppen*

- Bestimme explizit die Symmetriegruppe eines ebenen regelmäßigen n -Ecks in der Ebene, die sog. *Diedergruppe* $D_n \subseteq S_n$. Zeige, dass diese von zwei Elementen erzeugt werden kann und insgesamt $2n$ Elemente enthält.
- Zeige, dass der Index von D_4 in S_4 gleich 3 ist.
- Zeige, dass D_4 kein Normalteiler in S_4 ist.

Aufgabe 5. *Auflösbarkeit von Gleichungen*

- Finde ein normiertes irreduzibles Polynom $f(X)$ fünften Grads mit rationalen Koeffizienten, sodass die Gleichung $f(X) = 0$ lösbar ist.
- Zeige, dass die Gleichung $X^5 - 23X + 1 = 0$ nicht lösbar ist.

Aufgabe 6. *Kriterium für Konstruierbarkeit*

Sei x eine algebraische Zahl und t ein primitives Element zu allen galoissch Konjugierten von x . Zeige, dass x genau dann konstruierbar ist, wenn der Grad von t eine Zweierpotenz ist.