Übungsblatt 13 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m+2) Ein Erstsemestertraum wird wahr

Sei ein Ring A mit der adischen Topologie bezüglich einem Ideal \mathfrak{a} versehen. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in A. Sei $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$. Zeige: Genau dann ist $(s_n)_n$ eine Cauchy-Folge, wenn $(x_n)_n$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 2. (3) Abgeschlossenheit maximaler Ideale

Sei \mathfrak{a} ein Ideal in einem Ring A. Zeige, dass ein maximales Ideal \mathfrak{m} von A genau dann abgeschlossen bezüglich der \mathfrak{a} -adischen Topologie auf A ist, wenn $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$.

Aufgabe 3. (m) Vervollständigung an maximalen Idealen

Sei \mathfrak{m} ein maximales Ideal in einem Ring A. Zeige, dass die Vervollständigung von A bezüglich der \mathfrak{m} -adischen Topologie ein lokaler Ring ist.

Aufgabe 4. (2+m) Analytische Umgebungen

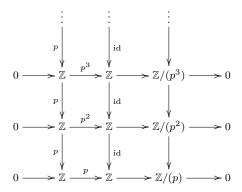
Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$.

- a) Zeige: $K[X,Y]/(Y^2-X^2) \cong K[X,Y]/(Y^2-X^2-X^3)$.
- b) Zeige: $K[X,Y]/(Y^2-X^2) \ncong K[X,Y]/(Y^2-X^2-X^3)$.

Aufgabe 5. (2+2) Nichtexaktheit der inversen Limesbildung

Das Diagramm zeigt in seinen drei Spalten drei inverse Systeme A_{\bullet} , B_{\bullet} und C_{\bullet} und horizontal die Komponenten einer kurzen exakten Sequenz $0 \to A_{\bullet} \to B_{\bullet} \to C_{\bullet} \to 0$.

- a) Bestimme die inversen Limiten der drei Systeme.
- b) Ist $\lim^1 A_{\bullet} = 0$? Beschreibe $\lim^1 A_{\bullet}$ so gut wie möglich!



Aufgabe 6. (0) Die 10-adischen Zahlen

Finde ein Element $x \in \mathbb{Z}_{10}$, das weder Null noch Eins ist, aber trotzdem die Identität $x^2 = x$ erfüllt. Kann ein Grundschulkind die ersten paar Ziffern von x bestimmen?

