Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 5 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. () *Beispiele für gerichtete Limiten*

a) Sei M ein A-Modul. Sei $f \in A$. Zeige, dass $M[f^{-1}]$ kanonisch isomorph zum gerichteten Limes des Systems $M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f} \cdots$ ist.

b) Sei A ein Ring. Zeige, dass $A[X]$ als A-Modul kanonisch isomorph zum gerichteten Limes des Systems $A[X]_{\leq 0} \hookrightarrow A[X]_{\leq 1} \hookrightarrow A[X]_{\leq 2} \cdots$ ist. Dabei ist $A[X]_{\leq n}$ der Modul der Polynome vom Grad $\leq n$.

Aufgabe 2. () *Gesättigte abgeschlossene Mengen*

Eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge S eines Rings A heißt genau dann *gesättigt*, wenn aus $xy \in S$ schon $x \in S$ und $y \in S$ folgt.

a) Sei $f \in A$. Sei $\iota : A \to A[f^{-1}]$ der Lokalisierungsmorphismus. Zeige: Für $x \in A$ ist genau dann $\iota(x)$ invertierbar, wenn $f \in \sqrt{(x)}$.

b) Sei $S \subseteq A$ eine gesättigte multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Zeige: Genau dann ist $S^{-1}A$ ein lokaler Ring, wenn aus $x + y \in S$ schon $x \in S$ oder $y \in S$ folgt.

c) Sei $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen. Zeige, dass es eine kleinste gesättigte multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, die S umfasst, gibt (die *Sättigung* von S).

d) Zeige: Eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge ist genau dann gesättigt, wenn ihr Komplement eine Vereinigung von Primidealen ist.

Aufgabe 3. () *Lokale Eigenschaften*

a) Zeige: Sind alle Halme eines Rings reduziert, so ist auch der Ring selbst reduziert.

b) Zeige oder widerlege: Sind alle Halme eines Rings Integritätsbereiche, so auch der Ring selbst.

Aufgabe 4. () *Injektivität von linearen Abbildungen*

a) Sei A ein lokaler Ring. Sei $A^m \to A^n$ eine lineare Injektion. Zeige, dass $m \leq n$.

b) Zeige die Behauptung für beliebige Ringe A mit $1 \neq 0$.

```
* topologische Aussagen
* Charakterisierung von flachen Moduln
* equational criterion für flache Moduln
* M_m = 0 für alle m >= a ==> M = aM
* maximale multiplikativ abgeschlossene Teilmengen
* Vergleich von Lokalisierungen
* S^(-1) M = 0 ==> exists s. sM = 0
* ...
```

Wofür steht das „B.“ in „Benoît B. Mandelbrot“?