

## Übungsblatt 1 zur Kommutativen Algebra

Abgabe bis zum Montag, den 19. Oktober 2015  
Kummerkasten auf [algebra.speicherleck.de](http://algebra.speicherleck.de)

### Aufgabe 1. (m+2+2) *Invertierbarkeit und Nilpotenz in Polynomringen*

Sei  $A$  ein Ring. Sei  $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m \in A[X]$  ein Polynom über  $A$ . Zeige:

- Genau dann ist  $f$  eine Einheit in  $A[X]$ , wenn  $a_0$  in  $A$  invertierbar und die  $a_1, \dots, a_m$  nilpotent sind.
- Genau dann ist  $f$  nilpotent, wenn  $a_0, \dots, a_m$  nilpotent sind.
- Ist  $A$  *reduziert*, d. h. ist nur die Null in  $A$  nilpotent, und ist  $g = b_0 + \cdots + b_nX^n \in A[X]$  mit  $fg = 0$ , so gilt für alle passenden Indizes  $i$  und  $j$ :  $a_i b_j = 0$ .

### Aufgabe 2. (2+m) *Lokale Ringe*

- Zeige, dass ein Ring  $A$  genau dann lokal ist, wenn  $1 \neq 0$  in  $A$  und, wann immer eine Summe aus zwei Elementen invertierbar ist, schon ein Summand invertierbar ist.
- Was sind die einzigen idempotenten Elemente in einem lokalen Ring?

### Aufgabe 3. (4) *Ringe mit nur einem Primideal*

Sei  $A$  ein Ring. Sei  $\mathfrak{n}$  das Ideal der nilpotenten Elemente in  $A$ . Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- In  $A$  gibt es genau ein Primideal.
- Jedes Element von  $A$  ist *entweder* invertierbar *oder* nilpotent.
- Der Faktoring  $A/\mathfrak{n}$  ist ein Körper.

*Hinweis.* Verwende für den Teil „1.  $\Rightarrow$  2.“ ohne Beweis folgendes Lemma, das nächste Woche in der Vorlesung bewiesen wird: Der Schnitt über alle Primideale eines Rings besteht nur aus seinen nilpotenten Elementen.

### Aufgabe 4. (m+2+2+2) *Boolsche Ringe*

Sei  $A$  ein *Boolscher Ring*, d. h. ein kommutativer Ring mit  $x^2 = x$  für alle  $x \in A$ . Zeige:

- Für alle  $x \in A$  gilt  $2x = 0$ .
- Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $A$  ist maximal.
- Für jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $A$  ist  $A/\mathfrak{p}$  ein Körper mit zwei Elementen.
- Jedes endlich erzeugte Ideal von  $A$  ist ein Hauptideal.

