Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013

Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 5 zur Algebra I

Abgabe bis 21. Mai 2013, 12:00 Uhr

Aufgabe 1. *Elementarsymmetrische Funktionen*

a) Gib $e_2(X, Y, Z, U, V)$, also die zweite elementarsymmetrische Funktion in den fünf Unbestimmten X, Y, Z, U und V, explizit an.

b) Schreibe $X^2 + Y^2 + Z^2$ als Polynom in den $e_i(X, Y, Z)$.

c) Schreibe $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ als Polynom in den $e_i(X_1, \ldots, X_n)$.

d) Zeige, dass $e_k(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n \text{ Argumente}}) = \binom{n}{k}$.

Aufgabe 2. *Der Vietasche Satz*

a) Sei $X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$ eine normierte Polynomgleichung vierten Grades, deren Lösungen mit Vielfachheiten x_1, x_2, x_3 und x_4 seien. Drücke die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 explizit als Polynome in den x_i aus.

b) Verwende den Vietaschen Satz für $n = 2$ um die bekannte Lösungsformel für normierte quadratische Gleichungen herzuleiten.

Aufgabe 3. *Diskriminanten kubischer Gleichungen*

a) Finde eine normierte Polynomgleichung dritten Grades, welche 1 als zweifache Lösung, 2 als einfache Lösung und keine weiteren Lösungen besitzt. Was ist ihre Diskriminante?

b) Sei $X^3 + pX + q = 0$ eine allgemeine reduzierte kubische Gleichung. Zeige, dass ihre Diskrimante durch $-4p^3 - 27q^2$ gegeben ist.

Aufgabe 4. *Symmetrien eines Polynoms*

Sei $f(X, Y, Z, W) := XY + ZW + XYZW$. Wie viele vierstellige Permutationen σ gibt es, so dass $\sigma \cdot f = f$?

Aufgabe 5. *Formale Ableitung von Polynomen*

a) Seien $g(X)$ und $h(Y)$ Polynome. Zeige: $(gh)^{(k)}(X) = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} g^{(i)}(X)\, h^{(j)}(X)$.

b) Sei $f(X)$ ein Polynom und n eine natürliche Zahl. Zeige:

$$f^{(n+1)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \deg f \leq n.$$

c) Sei $f(X)$ ein Polynom und x eine komplexe Zahl. Zeige, dass die Entwicklung von $f(X)$ nach $X - x$ durch die *Taylorsche Formel* gegeben ist (nach Brooke Taylor, 1685–1731, britischer Mathematiker):

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (X - x)^k$$