Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 13 zur Algebra I

Abgabe bis 15. Juli 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Konstruierbare n-Ecke*

a) Für welche $n \in \{1, \ldots, 100\}$ ist ein regelmäßiges n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar?

b) Gib eine Konstruktionsvorschrift für das regelmäßige 15-Eck an.

Aufgabe 2. *Fermatsche und Mersennesche Primzahlen*

a) Zeige für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$: $F_{n+1} = 2 + F_n F_{n-1} \cdots F_0$.

b) Zeige, dass F_m und F_n für $m \neq n$ teilerfremd sind. Folgere daraus, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

c) Eine *Mersennesche Zahl* ist eine Zahl der Form $M_n = 2^n - 1$. Zeige, dass M_n höchstens dann eine Primzahl ist, wenn n eine Primzahl ist.

d) Zeige allgemeiner, dass M_n von M_d geteilt wird, wenn d ein positiver Teiler von n ist.

Aufgabe 3. *Hauptsatz der Galoistheorie*

Bestimme alle Untergruppen der galoisschen Gruppe der Nullstellen des Polynoms $X^4 + 1$ und die zugehörigen Zwischenerweiterungen.

Aufgabe 4. *Relative galoissch Konjugierte*

a) Finde zwei algebraische Zahlen, die über $\mathbb{Q}$ galoissch konjugiert sind, über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ aber nicht.

b) Seien K und L Koeffizientenbereiche mit $L \supseteq K \supseteq \mathbb{Q}$ und x eine algebraische Zahl. Zeige, dass ein galoissch Konjugiertes von x über L auch ein galoissch Konjugiertes von x über K ist.

Aufgabe 5. *Relative Galoisgruppen*

a) Finde ein normiertes separables Polynom mit rationalen Koeffizienten, sodass die galoissche Gruppe seiner Nullstellen über $\mathbb{Q}$ gleich der über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ ist.

b) Sei $f \in K[X]$ ein normiertes separables Polynom und $x_1, \ldots, x_n$ seine Nullstellen. Sei $y \in K(x_1, \ldots, x_n)$. Zeige:

$$\mathrm{Gal}_{K(y)}(x_1, \ldots, x_n) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}_K(x_1, \ldots, x_n) \mid \sigma \cdot y = y\}.$$

Aufgabe 6. *Zentrum einer Galoisgruppe*

Sei p eine Primzahl und x eine algebraische Zahl vom Grad p^n. Seien alle galoissch Konjugierten $x_1 = x, x_2, \ldots, x_{p^n}$ von x in x rational.

a) Zeige, dass das Zentrum der galoisschen Gruppe der $x_1, \ldots, x_{p^n}$ ein Element σ der Ordnung p enthält.

b) Sei σ eine Permutation wie in a) und y ein primitives Element zu den Zahlen $e_i(x_i, \sigma \cdot x_i, \ldots, \sigma^{p-1} \cdot x_i)$, $i = 1, \ldots, p$. Zeige, dass y vom Grad p^{n-1} ist.