

Übungsblatt 13 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m+2) *Ein Erstsemestertraum wird wahr*

Sei ein Ring A mit der adischen Topologie bezüglich einem Ideal \mathfrak{a} versehen. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in A . Sei $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$. Zeige: Genau dann konvergiert $(s_n)_n$, wenn $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 2. (3) *Abgeschlossenheit maximaler Ideale*

Sei \mathfrak{a} ein Ideal in einem Ring A . Zeige, dass ein maximales Ideal \mathfrak{m} von A genau dann abgeschlossen bezüglich der \mathfrak{a} -adischen Topologie auf A ist, wenn $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$.

Aufgabe 3. (m) *Vervollständigung an maximalen Idealen*

Sei \mathfrak{m} ein maximales Ideal in einem Ring A . Zeige, dass die Vervollständigung von A bezüglich der \mathfrak{m} -adischen Topologie ein lokaler Ring ist.

Aufgabe 4. (2+m) *Analytische Umgebungen*

Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$.

- Zeige: $K[[X, Y]]/(y^2 - x^2) \cong K[[X, Y]]/(y^2 - x^2 - x^3)$.
- Zeige: $K[X, Y]/(y^2 - x^2) \not\cong K[X, Y]/(y^2 - x^2 - x^3)$.

Aufgabe 5. (2+2) *Nichtexaktheit der inversen Limesbildung*

Das Diagramm zeigt in seinen drei Spalten drei inverse Systeme A_\bullet , B_\bullet und C_\bullet und horizontal die Komponenten einer kurzen exakten Sequenz $0 \rightarrow A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow 0$.

- Bestimme die inversen Limiten der drei Systeme.
- Ist $\lim^1 A_\bullet = 0$? Beschreibe $\lim^1 A_\bullet$ so gut wie möglich!

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow p & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{p^3} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(p^3) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow p & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{p^2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(p^2) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow p & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(p) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Aufgabe 6. (0) *Die 10-adischen Zahlen*

Finde ein Element $x \in \mathbb{Z}_{10}$, das weder Null noch Eins ist, aber trotzdem die Identität $x^2 = x$ erfüllt. Kann ein Grundschulkind die ersten paar Ziffern von x bestimmen?

