Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 4 zur Algebra II

Abgabe bis 12. November 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (2) *Normaler Abschluss*

Sei H eine Untergruppe einer Gruppe G. Sei $(N_i)_{i \in I}$ die Familie all derjenigen Normalteiler in G, welche H umfassen. Zeige, dass $\bigcap_{i \in I} N_i$ der normale Abschluss von H in G ist.

Aufgabe 2. (1+1) *Urbilder unter Gruppenhomomorphismen*

Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

a) Sei $K \subseteq H$ eine Untergruppe. Zeige, dass $f^{-1}(K)$ eine Untergruppe von G ist.

b) Sei $K \subseteq H$ ein Normalteiler. Zeige, dass $f^{-1}(N)$ ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 3. (2+2+2) *Beispiele für halbdirekte Produkte*

a) Zeige, dass jedes direkte Produkt zweier Gruppen auch als halbdirektes Produkt angesehen werden kann.

b) Zeige, dass die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ isomorph zu einem halbdirekten Produkt von $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ mit C_2 ist.

c) Zeige, dass folgende Abbildung ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

$$\mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}), \quad (b, A) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} & A & & b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Aufgabe 4. (4+2) *Ein Kriterium für Auflösbarkeit*

a) Sei G eine endliche Gruppe und N ein endlicher Normalteiler in G. Zeige, dass G genau dann auflösbar ist, wenn G/N und N es sind.

S b) Zeige, dass jede endliche p-Gruppe auflösbar ist.

Aufgabe 5. (2+2) *Auflösbare Normalteiler*

a) Seien N und N' auflösbare Normalteiler in einer Gruppe G. Zeige, dass $N \cdot N' := \{nn' \mid n \in N, n' \in N'\}$ eine Untergruppe und sogar ein auflösbarer Normalteiler in G ist.

b) Sei G eine endliche Gruppe. Zeige, dass ein größter endlicher auflösbarer Normalteiler in G existiert.

c) *Für Teilnehmer des Pizzaseminars:* Gib kategorielle Interpretationen der Konstruktionen aus a) und b) in der durch die Halbordnung der auflösbaren Normalteiler induzierten Kategorie.