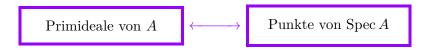
Geometrische Vorstellung von Ringen

Sei A ein Ring (wie immer: kommutativ und mit Eins). Dann gibt es einen topologischen Raum, Spec A, mittels dem man sich den Ring anschaulich vorstellen kann. Auf diese Weise haben viele Konzepte und Resultate aus der Algebra eine geometrische Entsprechung; und umgekehrt.

Die folgende Definition stellt das zentrale Bindeglied dar.



Die Topologie auf Spec A definiert man wie folgt: Eine Teilmenge von Spec A heißt genau dann abgeschlossen, wenn sie von der Form $V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$ ist, wobei \mathfrak{a} ein beliebiges Ideal in A ist. Eine Teilmenge heißt genau dann offen, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist.

Spiel & Spaß 1. Weise nach, dass diese Festlegungen wirklich eine Topologie auf SpecA definieren.

Ein weiterer wichtiger Aspekt der Korrespondenz ist folgender.

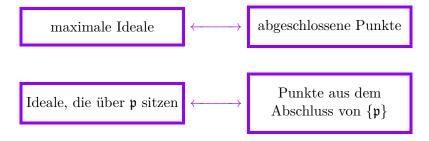


Ist f nämlich ein Element von A und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ein Punkt, so können wir definieren: Der Funktionswert von f an der Stelle \mathfrak{p} ist das Bild von f in $k(\mathfrak{p})$. Dabei ist $k(\mathfrak{p})$ der $Restklassenk\"{o}rper$ an der Stelle \mathfrak{p} , das ist der Körper $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

Sei zum Beispiel $A = \mathbb{R}[X]$ und $f = X^2 - 2X + 3$. Sei $\mathfrak{p} = (X - 4)$. Dann ist $k(\mathfrak{p})$ kanonisch zu \mathbb{R} isomorph, vermöge $[f/g] \mapsto f(4)/g(4)$. Unter diesem Isomorphismus ist dann der Funktionswert von f bei \mathfrak{p} gleich dem traditionell definierten Funktionswert f(4).

Spiel & Spaß 2. Was sind die Funktionswerte von $90 \in \mathbb{Z}$ an allen Punkten aus Spec \mathbb{Z} ? Wo hat die Funktion Nullstellen? Hat die Funktion auch doppelte Nullstellen?

Im Vergleich zu den in der Differentialgeometrie, komplexen Geometrie oder riemannschen Geometrie untersuchten Räumen hat Spec A noch eine Besonderheit: Nur in den seltensten Fällen ist Spec A ein Hausdorffraum. Insbesondere sind einpunktige Mengen $\{\mathfrak{p}\}$ nicht immer abgeschlossen. Punkte \mathfrak{p} , für die $\{\mathfrak{p}\}$ doch abgeschlossen ist, heißen abgeschlossene Punkte.



Die abgeschlossenen Punkte von Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ sind alle von der Form (X-z,Y-w) mit $z,w\in\mathbb{C}$; die abgeschlossenen Punkte von Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ stehen also in kanonischer Eins-zu-Eins-Beziehung zu den Punkten des Vektorraums \mathbb{C}^2 .

In Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ gibt es aber auch noch nicht-abgeschlossene Punkte. Zum Beispiel ist der Punkt $(Y-X^2)$ nicht abgeschlossen. In seinem Abschluss liegen (er selbst und) alle Punkte der Form (X-z,Y-w) mit $w=z^2$, also alle Punkte der Normalparabel. Wenn man ein Bild von Spec $\mathbb{C}[X,Y]$ zeichnet, malt man $(Y-X^2)$ als eine Art delokalisierte Punktwolke, als Geisterpunkt, der überall und nirgendwo auf $V((Y-X^2))$ sitzt.

Spiel & Spaß 3. Beweise die letzten beiden Korrespondenzen. Sei also $\mathfrak p$ ein Primideal. Zeige: Der topologische Abschluss von $\{\mathfrak p\}$ in Spec A ist gerade die Menge derjenigen Primideale $\mathfrak q$, die über $\mathfrak p$ sitzen, also $\{\mathfrak q\in\operatorname{Spec} A\,|\,\mathfrak p\subseteq\mathfrak q\}$.

Mehrere Aussagen der Algebra haben schon mit diesem kleinen Wörterbuch eine geometrische Bedeutung:

- Über jedem Primideal p gibt es ein maximales Ideal m.
 Jeder Punkt enthält einen abgeschlossenen Punkt in seinem Abschluss. Jeder generische Punkt spezialisiert sich zu mindestens einem abgeschlossenen Punkt.
- Das Primideal p ist ein minimales Primideal.
 Der Abschluss von p ist eine irreduzible Komponente von Spec A.
- Der Ring enthält genau ein minimales Primideal.
 - Der Raum $\operatorname{Spec} A$ ist irreduzibel.
- Unter jedem Primideal gibt es ein minimales Primideal.

 Jeder Punkt liegt in irgendeiner irreduziblen Komponente.
- Der Ring ist lokal.

Der Raum Spec A enthält nur einen einzigen abgeschlossenen Punkt.

Spiel & Spaß 4. Sei $A = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X,Y]/(XY)$. Überzeuge dich davon, dass $\operatorname{Spec} A$ wie ein Achsenkreuz aussieht. Es besteht aus zwei irreduziblen Komponenten, den beiden Achsen. Zeige, dass A genau zwei minimale Primideale enthält (nämlich ([X]) und ([Y])) und erkläre, wie diese mit den Komponenten zusammenhängen.

Spiel & Spaß 5. Seien $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{q}$ Primideale. Sei \mathfrak{q} Element einer offenen Teilmenge U. Zeige, dass dann auch \mathfrak{p} Element von U ist. (Offene Mengen enthalten also stets die angesprochenen Geisterpunkte.)

Mit dem geometrischen Raum Spec A kann man sich auch (beliebige, nicht unbedingt prime) Ideale von A veranschaulichen. Und zwar kann man ein Ideal $\mathfrak a$ dadurch visualisieren, indem man die abgeschlossene Menge $V(\mathfrak a)$ betrachtet. Anschaulich ist das die Menge derjenigen Punkte, bei denen alle Funktionen aus $\mathfrak a$ verschwinden.

Dabei gelten folgende Rechenregeln:

- $V(0) = \operatorname{Spec} A$. Die Nullfunktion verschwindet an jedem Punkt.
- $V((1)) = \emptyset$. Die Einsfunktion verschwindet nirgendwo.

- $V(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b})$. Punkte, bei denen alle Funktionen aus $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ verschwinden, sind genau die, bei denen alle Funktionen aus \mathfrak{a} und alle Funktionen aus \mathfrak{b} verschwinden.
- $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}).$

Die Geometrie ist aber blind bezüglich Nilpotenz: Für jedes Ideal \mathfrak{a} gilt $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$. Der Unterschied zwischen $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ ist geometrisch also nicht sichtbar. Und wenn eine Funktion $f \in A$ an allen Punkten verschwindet, heißt das nicht, dass f = 0; es heißt nur, dass f nilpotent ist.

Spiel & Spaß 6. Was ist $V(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$ geometrisch?

Spiel & Spaß 7. Mengen der Form $D(f) := \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p} \}$ mit $f \in A$ heißen auch standardoffen.

- a) Zeige: Jede offene Menge von Spec A ist Vereinigung standardoffener Teilmengen.
- b) Zeige, dass genau dann $D(f) \subseteq D(g)$, wenn $f \in \sqrt{(g)}$. Zeige allgemeiner, dass genau dann $D(f) \subseteq \bigcup_i D(g_i)$, wenn $f \in \sqrt{(g_i)_i}$.
- c) Folgere: Der Raum Spec A ist stets kompakt.
- d) Zeige: Der Rahmen der offenen Mengen in SpecA ist isomorph zum Rahmen der Wurzelideale in A.

Spiel & Spaß 8.

- a) Zeige: Eine offene Teilmenge U von Spec A ist genau dann dicht, wenn $\bigcap_{\mathfrak{p}\in U}\mathfrak{p}=\sqrt{(0)}$.
- b) Besitze A nur endlich viele minimale Primideale. Zeige, dass eine offene Teilmenge von Spec A genau dann dicht ist, wenn sie all diese enthält.

Spiel & Spaß 9. Zeige: Eine offene Teilmenge ist genau dann (nicht nur offen, sondern auch) abgeschlossen, wenn sie von der Form D(e) mit $e^2 = e$ ist.

Schließlich sei noch bemerkt, dass man auch Moduln veranschaulichen kann. Und zwar stellt man sich einen A-Modul M als eine Art verallgemeinertes Vektorbündel über Spec A vor. Man visualisiert M als Ansammlung seiner Halme $M_{\mathfrak{p}}$: "Über $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ sitzt $M_{\mathfrak{p}}$." Eine Skizze würde hier viel helfen.

Dazu passt, dass man den Träger von M als Menge derjenigen Primideale $\mathfrak p$ definiert, sodass der Halm $M_{\mathfrak p}$ nicht Null ist.

Spiel & Spaß 10.

- a) Rechne nach, dass der Träger des A-Moduls A/\mathfrak{a} genau $V(\mathfrak{a})$ ist.
- b) Zeige allgemeiner: Der Träger eines endlich erzeugten Moduls M ist $V(\operatorname{ann} M)$.

Spiel & Spaß 11. Sei $\phi: V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen k-Vektorraums. Dann wird V mittels der Skalarmultiplikation $f \bullet x := f(\phi)x$ zu einem k[X]-Modul, den man zur besseren Unterscheidung dann auch mit " V_{ϕ} " bezeichnet.

In der linearen Algebra zeigt man: Genau dann ist V_{ϕ} zu einem weiteren k[X]-Modul der Form $V_{\phi'}$ isomorph, wenn die Endomorphismen ϕ und ϕ' zueinander ähnlich sind. Der Modul V_{ϕ} kodiert also den Ähnlichkeitstyp von ϕ .

Außerdem lernt man: Als k[X]-Modul ist V_{ϕ} isomorph zu $k[X]/(d_1) \oplus \cdots \oplus k[X]/(d_r)$, wobei die Polynome d_i gewisse Polynome sind, deren Produkt das charakteristische Polynom von ϕ ergibt. (Das Polynom d_r ist das Minimalpolynom von ϕ .)

Erkläre, inwieweit V_{ϕ} eine Verallgemeinerung des klassischen Spektrums von ϕ – der Menge der Eigenwerte – darstellt. Denke dazu an den Träger von V_{ϕ} !