

## Übungsblatt 12 zur Algebra I

Abgabe bis 8. Juli 2013, 17:00 Uhr

### Aufgabe 1. *Allgemeines zu Gruppen*

- a) Gibt es in der Permutationsgruppe  $S_5$  eine Untergruppe mit 70 Elementen?
- b) Sei  $G$  eine Gruppe. Sei  $H$  eine Untergruppe von  $G$  und  $K$  eine Untergruppe von  $H$ . Wieso ist  $K$  dann auch eine Untergruppe von  $G$ ?
- c) Sei  $G$  eine Gruppe und  $\sigma \in G$ . Zeige, dass  $\sigma^i \circ \sigma^j = \sigma^{i+j}$  für beliebige ganze Zahlen  $i, j$ .

### Aufgabe 2. *Elementordnungen*

- a) Sei  $G$  eine Gruppe und  $\sigma \in G$  ein Element der Ordnung  $n$ . Zeige, dass die Ordnung einer beliebigen Potenz  $\sigma^m$  durch  $n / \text{ggT}(n, m)$  gegeben ist.
- b) Bestimme die Ordnungen aller Elemente der zyklischen Gruppe  $C_n$ .
- c) Bestimme alle Erzeuger der zyklischen Gruppe  $C_n$ .

### Aufgabe 3. *Kreisteilungspolynome*

- a) Berechne die Kreisteilungspolynome  $\Phi_3(X)$ ,  $\Phi_6(X)$  und  $\Phi_9(X)$ .
- b) Zerlege das Polynom  $X^3 + X^2 + X + 1$  über den rationalen Zahlen in irreduzible Faktoren.

### Aufgabe 4. *Etwas Zahlentheorie*

Sei  $p$  eine Primzahl.

- a) Gib eine Primfaktorzerlegung von  $X^{p-1} - 1$  modulo  $p$  an.
- b) Zeige, dass der Binomialkoeffizient  $\binom{p^2}{p}$  durch  $p$ , aber nicht durch  $p^2$  teilbar ist.

### Aufgabe 5. *Primitive Wurzeln*

- a) Gib alle primitiven Wurzeln modulo 5 an.
- b) Sei  $X$  die Menge der  $n$ -ten komplexen Einheitswurzeln. Zeige, dass die Abbildung

$$\sigma_d : X \longrightarrow X, \zeta \longmapsto \zeta^d$$

genau dann eine Bijektion ist, wenn die feste natürliche Zahl  $d$  teilerfremd zu  $n$  ist.

Zur Erinnerung: **Algebra-Treffen** am 10. Juli um 18:30 Uhr