Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 6 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2+m+1) *Ein konkretes Beispiel für eine Primärzerlegung*

Sei K ein Körper. Seien die Ideale $\mathfrak{p}_1 = (X, Y)$, $\mathfrak{p}_2 = (X, Z)$ und $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$ von $K[X, Y, Z]$ gegeben. Sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$.

a) Zeige, dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2$ eine minimale Primärzerlegung von $\mathfrak{a}$ ist.

b) Welche Primideale von $K[X, Y, Z]$ sind zu $\mathfrak{a}$ isolierte Primideale, welche eingebettete?

c) Schreibe die assoziierten Primideale in der Form $\sqrt{(\mathfrak{a} : f)}$ für geeignete $f \in K[X, Y, Z]$.

Aufgabe 2. (2+m+2) *Erweiterungen primärer Ideale in Polynomringen*

Sei A ein Ring.

a) Sei $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal in A. Zeige, dass $\mathfrak{q}[X]$ ein $\mathfrak{p}[X]$-primäres Ideal in $A[X]$ ist.

b) Sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ eine minimale Primärzerlegung in A. Zeige, dass $\mathfrak{a}[X] = \mathfrak{q}_1[X] \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n[X]$ eine minimale Primärzerlegung in $A[X]$ ist.

c) Zeige: Ist $\mathfrak{p}$ ein zu einem zerlegbaren Ideal $\mathfrak{a}$ isoliertes Primideal, so ist $\mathfrak{p}[X]$ ein zu $\mathfrak{a}[X]$ isoliertes Primideal.

Aufgabe 3. (2+2) *Ein Kriterium für Assoziiertheit*

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Rings A. Sei $\mathfrak{p}$ ein Ideal, das unter allen Idealen der Form $(\mathfrak{a} : x)$ mit $x \in A$ und $x \notin \mathfrak{a}$ maximal ist.

a) Zeige, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist.

b) Sei $\mathfrak{a}$ zerlegbar. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{a}$ assoziiertes Primideal ist.

Aufgabe 4. (2+2+m) *Erste Schritte mit ganzen Erweiterungen*

a) Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung. Sei x ein Element von A, das in B invertierbar ist. Zeige, dass x schon in A invertierbar ist.

b) Sei $A \subseteq B$ eine Ringerweiterung. Sei C der ganze Abschluss von A in B. Seien $f, g \in B[X]$ normierte Polynome mit $fg \in C[X]$. Zeige, dass $f \in C[X]$ und $g \in C[X]$.

c) Sei G eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Rings A. Zeige, dass A über dem Unterring $A^G := \{x \in A \mid g(x) = x \text{ für alle } g \in G\}$ ganz ist.

http://www.smbc-comics.com/?id=3565