

Übungsblatt 3 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2+2) *Der formale Potenzreihenring über dem Grundring*

Sei A ein Ring.

- a) Ist \mathfrak{m} ein maximales Ideal in $A[[X]]$, so gilt $X \in \mathfrak{m}$, die Kontraktion $\mathfrak{m}_0 := A \cap \mathfrak{m}$ ist ein maximales Ideal in A und \mathfrak{m} ist das von \mathfrak{m}_0 und X in $A[[X]]$ erzeugte Ideal.
- b) Jedes Primideal von A ist Kontraktion eines Primideals von $A[[X]]$.

Aufgabe 2. (2+m+m+2) *Rechnungen mit Idealen*

- a) Sei \mathfrak{a} ein Ideal eines Rings A . Finde einen Isomorphismus $A[X]/\mathfrak{a}[X] \rightarrow (A/\mathfrak{a})[X]$.
- b) Sei \mathfrak{p} ein Primideal eines Rings A . Zeige, dass dann auch $\mathfrak{p}[X]$ in $A[X]$ prim ist.
- c) Gilt die analoge Behauptung von b) auch für maximale Ideale?
- d) Untersuche folgende Ideale auf Primalität und Maximalität: $(2, X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ und $([2], [X])$ in $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 6)$.

Aufgabe 3. (2+1) *Nichtbeispiele für Hauptidealbereiche*

- a) Sei A ein Ring derart, dass jedes endlich erzeugte Ideal von $A[X]$ ein Hauptideal ist. Zeige, dass jedes reguläre Element von A schon invertierbar ist.
- b) Folgere: $\mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X, Y]$ sind keine Hauptidealbereiche.

Aufgabe 4. (m+2) *Ein radikales Distributivgesetz*

- a) Zeige, dass die Rechenregel „ $\mathfrak{a} \cap \sum_i \mathfrak{b}_i = \sum_i (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}_i)$ “ für Ideale im Allgemeinen *nicht* gilt. *Hinweis.* In den Ringen \mathbb{Z} und $\mathbb{Q}[X]$ wirst du kein Gegenbeispiel finden.
- b) Zeige, dass folgende Regel durchaus stets gilt: $\sqrt{\mathfrak{a} \cap \sum_i \mathfrak{b}_i} = \sqrt{\sum_i (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}_i)}$.

Aufgabe 5. (2+1) *Der Darstellungssatz von Stone*

Sei A ein boolscher Ring. Sei $\text{Spec } A$ die Menge der Primideale von A . Die Potenzmenge von $\text{Spec } A$ bildet mit der symmetrischen Differenz als Addition und dem Schnitt als Multiplikation ebenfalls einen boolschen Ring.

- a) Gib explizit einen Ringhomomorphismus $A \rightarrow \mathcal{P}(\text{Spec } A)$ an.
- b) Zeige, dass dieser injektiv ist.

A friend told me that Obama became a communist after he became president, but I told him that couldn't be so. If you're a member of a radical ideal after being raised to a power, then you must have been part of it from the beginning.