

Übungsblatt 1 zur Algebra I

Abgabe bis 22. April 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Lösungskriterium*

Sei eine normierte Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten der Form

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = 0$$

gegeben. Zeige, dass jede ganzzahlige Lösung ein Teiler von a_0 sein muss.

Aufgabe 2. *Polynomgleichungen ungeraden Grads*

Zeige, dass jede normierte Polynomgleichung ungeraden Grads mit rationalen Koeffizienten eine Lösung in den reellen Zahlen besitzt.

Aufgabe 3. *Beispiele für Polynomgleichungen*

Finde eine normierte Polynomgleichung...

- a) vierten Grads mit rationalen Koeffizienten, welche in den reellen Zahlen keine Lösung besitzt.
- b) fünften Grads mit rationalen Koeffizienten, welche als einzige Lösung die Zahl 1 besitzt.
- c) mit ganzzahligen Koeffizienten, die $\sqrt[7]{3 + \sqrt[3]{4}}$ als eine Lösung besitzt.
- d) mit ganzzahligen Koeffizienten, die $\cos 15^\circ$ als eine Lösung besitzt.

Aufgabe 4. *Calabis Dreieck*

Neben dem gleichseitigen Dreieck gibt es nur ein Dreieck, das folgende erstaunliche Eigenschaft hat: Das größte einbeschreibbare Quadrat lässt sich auf drei verschiedene Arten einbeschreiben. Dieses zweite Dreieck hat Eugenio Calabi (1923–, italienisch-amerikanischer Mathematiker) gefunden und ist gleichschenkelig.

Zeige, dass das Längenverhältnis der längsten zu einer der kürzeren Seiten die Gleichung

$$2X^3 - 2X^2 - 3X + 2 = 0$$

erfüllt.

