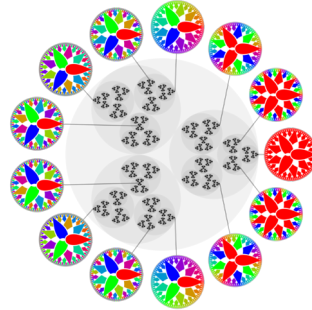


## Übungsblatt 12 zur Kommutativen Algebra



### Aufgabe 1. (m+m+2+1+1) *Spiel und Spaß mit $p$ -adischen Zahlen*

Sei  $\mathbb{Z}_p$  der Ring der  $p$ -adischen Ganzzahlen, konstruierbar als  $\varprojlim_n \mathbb{Z}/(p^n)$  oder Vervollständigung von  $\mathbb{Z}$  bezüglich der  $(p)$ -adischen Topologie.

- Sei  $f \in \mathbb{Z}[X]$  ein Polynom, das modulo  $p$  eine einfache Nullstelle besitzt. Zeige, dass  $f$  in  $\mathbb{Z}_p$  eine Nullstelle besitzt.
- Sei  $n$  eine zu  $p$  teilerfremde ganze Zahl. Zeige, dass  $n$  in  $\mathbb{Z}_p$  invertierbar ist.
- Berechne  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+p^n}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{1+p^n}$  in  $\mathbb{R}$  und in  $\mathbb{Z}_p$ .
- Seien  $x$  und  $y$  ganze Zahlen. Finde eine Folge  $p$ -adischer Zahlen, die in  $\mathbb{R}$  gegen  $x$  und in  $\mathbb{Z}_p$  gegen  $y$  konvergiert.
- Gibt es in  $\mathbb{Z}_{13}$  eine Quadratwurzel aus  $-1$ ?

### Aufgabe 2. (3+m+3+1) *Hensels Lemma*

Sei  $A$  ein Ring. Sei  $f \in A[X]$  ein Polynom, das modulo einem Ideal  $\mathfrak{a}$  eine einfache Nullstelle besitzt: ein Element  $x_1 \in A$  mit  $f(x_1) \equiv 0$  modulo  $\mathfrak{a}$ , sodass es ein Element  $y \in A$  mit  $f'(x_1)y \equiv 1$  modulo  $\mathfrak{a}$  gibt. Wir definieren für  $n \geq 1$ :  $x_{n+1} := x_n - yf(x_n)$ .

- Zeige für alle  $n \geq 1$ , dass  $x_n \equiv x_m \pmod{\mathfrak{a}^m}$  für alle  $m < n$  und dass  $f(x_n) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}^n}$ .
- Zeige, dass  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge bezüglich der  $\mathfrak{a}$ -adischen Topologie ist.
- Sei  $A$  vollständig bezüglich dieser Topologie. Zeige, dass  $f$  eine Nullstelle in  $A$  besitzt.
- Unter welchem Namen ist das Konstruktionsverfahren für die  $x_n$  bekannt? Bewundere die Einheit der Mathematik.

### Aufgabe 3. (2) *Regularität unter Vervollständigung*

Sei  $x$  ein reguläres Element in einem topologischen Ring  $A$ . Zeige, dass das Bild von  $x$  unter dem kanonischen Homomorphismus  $A \rightarrow \hat{A}$  ebenfalls regulär ist.

### Aufgabe 4. (m) *Potenzreihenentwicklung der Quadratwurzel*

Sei  $K$  ein Körper mit  $2 \neq 0$ . Zeige: Es gibt eine Potenzreihe  $p \in K[[X]]$  mit  $p^2 = 1 + X$ .