Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 12 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m+m+1+1+1) *Spiel und Spaß mit p-adischen Zahlen*

Sei $\mathbb{Z}_p$ der Ring der p-adischen Ganzzahlen, konstruierbar als $\varprojlim_n \mathbb{Z}/(p^n)$ oder Vervollständigung von $\mathbb{Z}$ bezüglich der (p)-adischen Topologie.

a) Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom, das modulo p eine einfache Nullstelle besitzt. Zeige, dass f in $\mathbb{Z}_p$ eine Nullstelle besitzt.

b) Sei n eine zu p teilerfremde ganze Zahl. Zeige, dass n in $\mathbb{Z}_p$ invertierbar ist.

c) Berechne $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+p^n}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{1+p^n}$ in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{Z}_p$.

d) Seien x und y ganze Zahlen. Finde eine Folge p-adischer Zahlen, die in $\mathbb{R}$ gegen x und in $\mathbb{Z}_p$ gegen y konvergiert.

e) Gibt es in $\mathbb{Z}_{13}$ eine Quadratwurzel aus -1?

Aufgabe 2. (2+m+2+1) *Hensels Lemma*

Sei A ein Ring. Sei $f \in A[X]$ ein Polynom, das modulo einem Ideal $\mathfrak{a}$ eine einfache Nullstelle besitzt: ein Element $x_1 \in A$ mit $f(x_1) \equiv 0$ modulo $\mathfrak{a}$, sodass es ein Element $y \in A$ mit $f'(x_1)y \equiv 1$ modulo $\mathfrak{a}$ gibt. Wir definieren für $n \geq 1$:

$$x_{n+1} := x_n - yf(x_n).$$

a) Zeige für alle $n \geq 1$, dass $x_n \equiv x_m \pmod{\mathfrak{a}^m}$ für alle $m < n$ und dass $f(x_n) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}^n}$.

b) Zeige, dass $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie ist.

c) Sei A vollständig bezüglich dieser Topologie. Zeige, dass f eine Nullstelle in A besitzt.

d) Unter welchem Namen ist das Konstruktionsverfahren für die x_n bekannt? Bewundere die Einheit der Mathematik.

Aufgabe 3. (2) *Regularität unter Vervollständigung*

Sei x ein reguläres Element in einem topologischen Ring A. Zeige, dass das Bild von x unter dem kanonischen Homomorphismus $A \to \hat{A}$ ebenfalls regulär ist.

Aufgabe 4. (m) *Potenzreihenentwicklung der Quadratwurzel*

Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$. Zeige: Es gibt eine Potenzreihe $p \in K[\![X]\!]$ mit $p^2 = 1 + X$.

Am Freitag folgt möglicherweise noch eine weitere Aufgabe (oder eine Hochskalierung der Punkte).