

## Übungsblatt 2 zur Algebra I

Abgabe bis 29. April 2013, 17:00 Uhr

**Aufgabe 1.** *Lösungen polynomieller Gleichungen sind algebraisch*

Sei  $z$  eine Lösung der Polynomgleichung

$$X^3 - \sqrt{2 - \sqrt[3]{4}} X^2 + 3 = 0.$$

Finde eine normierte Polynomgleichung mit *rationalen* Koeffizienten, die  $z$  als Lösung hat.

**Lösung.** Wir formen um:

$$\begin{aligned} z^3 - \sqrt{2 - \sqrt[3]{4}} z^2 + 3 &= 0 \\ \iff z^3 + 3 &= \sqrt{2 - \sqrt[3]{4}} z^2 \\ \implies (z^3 + 3)^2 &= 2 z^4 - \sqrt[3]{4} z^4 \\ \iff (z^3 + 3)^2 - 2 z^4 &= -\sqrt[3]{4} z^4 \\ \implies ((z^3 + 3)^2 - 2 z^4)^3 &= -4 z^{12} \\ \iff ((z^3 + 3)^2 - 2 z^4)^3 + 4 z^{12} &= 0 \end{aligned}$$

Die gesuchte Gleichung lautet also

$$((X^3 + 3)^2 - 2 X^4)^3 + 4 X^{12} = 0,$$

denn diese hat  $z$  als Lösung (Probe unnötig, wieso?), ihre Koeffizienten sind alle rational und sie ist normiert (das ist nicht ganz offensichtlich, wieso stimmt das?).

*Bemerkung:* Ausmultipliziert wird die Gleichung nicht schöner:

$$\begin{aligned} X^{18} - 6 X^{16} + 18 X^{15} + 12 X^{14} - 72 X^{13} + 131 X^{12} + 72 X^{11} - 324 X^{10} + \\ 540 X^9 + 108 X^8 - 648 X^7 + 1215 X^6 - 486 X^4 + 1458 X^3 + 729 = 0. \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.** *Auf den Spuren Bombellis*

Zeige formal die zuerst von Rafael Bombelli (1526–1572, italienischer Mathematiker) gefundene Gleichheit

$$(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$$

und diskutiere, welche Vorzeichen der Quadratwurzeln jeweils zu wählen sind.

**Lösung.** Mit der binomischen Formel multiplizieren wir die linke Seite aus:

$$(2 \pm i)^3 = 8 \pm 3 \cdot 4 i - 3 \cdot 2 \pm i^3 = 2 \pm 11 i.$$

Bombellis Formel stimmt also, wenn man  $\sqrt{-1}$  konsistent als  $i$  (statt als  $-i$ ) und  $\sqrt{-121}$  konsistent als  $11 i$  (statt als  $-11 i$ ) liest und dann entweder auf beiden Seiten „+“ oder auf beiden Seiten „−“ für das „±“-Zeichen nimmt.

**Aufgabe 3. Rechenregeln für komplexe Zahlen**

- a) Sei  $z \neq 0$  eine komplexe Zahl, deren Real- und Imaginärteil rationale Zahlen sind. Zeige, dass  $z^{-1}$  ebenfalls rationalen Real- und Imaginärteil hat.
- b) Zeige, dass der Realteil einer komplexen Zahl  $z$  durch  $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$  und dass der Imaginärteil durch  $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$  gegeben ist.
- c) Sei  $z$  eine invertierbare komplexe Zahl. Folgere die Gleichheit  $\bar{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$  aus der Multiplikativität der komplexen Konjugation.
- d) Interpretiere die Multiplikation mit der imaginären Einheit  $i$  geometrisch.

**Lösung.**

- a) Wir schreiben  $z = a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Dann gilt

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i$$

und wir sehen, dass in der Tat Real- und Imaginärteil wieder in  $\mathbb{Q}$  liegen.

- b) Wir schreiben  $z = a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und rechnen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(z + \bar{z}) &= \frac{1}{2}(a + bi + a - bi) = a \\ \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) &= \frac{1}{2i}(a + bi - a + bi) = b\end{aligned}$$

- c) Aus  $z \cdot z^{-1} = 1$  folgt wegen der Multiplikativität der komplexen Konjugation  $\bar{z} \cdot \overline{z^{-1}} = 1$ . Also ist  $\overline{z^{-1}}$  das Inverse von  $\bar{z}$ , das war zu zeigen.
- d) Drehung um  $90^\circ$  um den Ursprung im Gegenuhrzeigersinn (wieso?). Skizze!

**Aufgabe 4. Zahlen nahe bei Null**

Zeige, dass für zwei reelle Zahlen  $a$  und  $b$  genau dann die Wurzel  $\sqrt{a^2 + b^2}$  nahe bei Null ist, wenn sowohl  $|a|$  als auch  $|b|$  nahe bei Null sind. Zeige also:

$$\begin{aligned}\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a, b \in \mathbb{R}: \quad \sqrt{a^2 + b^2} < \delta &\implies |a|, |b| < \epsilon \\ \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a, b \in \mathbb{R}: \quad |a|, |b| < \delta &\implies \sqrt{a^2 + b^2} < \epsilon\end{aligned}$$

**Lösung.**

- a) Sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Setze  $\delta := \epsilon$ . Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  beliebig und gelte  $\sqrt{a^2 + b^2} < \delta$ . Dann folgt

$$|a| = \sqrt{|a|^2} \leq \sqrt{|a|^2 + |b|^2} < \delta = \epsilon$$

und analog mit  $|b|$ .

- b) Sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Setze  $\delta := \epsilon/\sqrt{2}$ . Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  beliebig und gelte  $|a|, |b| < \delta$ . Dann folgt

$$\sqrt{a^2 + b^2} < \sqrt{\delta^2 + \delta^2} = \sqrt{2} \delta = \epsilon.$$

*Bemerkung:* Auf die passenden Wahlen von  $\delta$  kommt man natürlich nicht im Vorhinein, sondern erst nach erfolgter Abschätzung. Zweck der Aufgabe ist, einzusehen, dass die bijektive lineare Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad a + bi \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

stetig (Teil 1) und umkehrbar stetig (Teil 2) ist, wenn man den  $\mathbb{R}^2$  mit der Maximumsnorm ausstattet; die Räume  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{R}^2$  sind also homöomorph.

**Aufgabe 5.** *Ein neuer Zahlbereich*

- a) Zeige, dass die Gleichung  $X^2 + X + 1 = 0$  in den reellen Zahlen keine Lösung besitzt.
- b) Konstruiere einen minimalen Zahlbereich  $\mathbb{R}(\omega)$ , welcher die reellen Zahlen und eine Lösung  $\omega$  der Gleichung  $X^2 + X + 1 = 0$  enthält und in welchem Addition und Multiplikation so definiert sind, dass sie die Addition und Multiplikation reeller Zahlen fortsetzen und die einschlägigen Gesetze der Arithmetik erfüllen.
- c) Zeige, dass  $\omega^3 = 1$  in  $\mathbb{R}(\omega)$  gilt.
- d) Finde eine Lösung der Gleichung  $X^2 + 1 = 0$  in  $\mathbb{R}(\omega)$ .

**Lösung.**

- a) *Variante 1:* Man verwendet die Mitternachtsformel und sieht, dass die beiden Lösungen der Gleichung jeweils echt komplex sind:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

*Variante 2:* Man zeigt durch quadratische Ergänzung, dass für jedes reelle  $x$  die linke Seite der Gleichung positiv (und daher nicht null) ist:

$$x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 - 1/4 + 1 \geq 3/4 > 0.$$

*Variante 3:* Man multipliziert die Gleichung mit  $X - 1$  und verwendet dann die Technik von Blatt 3, Aufgabe 4c).

- b) Wir versuchen, die Konstruktion der komplexen Zahlen auf die Situation hier zu übertragen. Dazu überlegen wir zunächst, wie der Rechenbereich  $\mathbb{R}(\omega)$  aussähe, wenn er existierte. Da  $\mathbb{R}(\omega)$  die reellen Zahlen umfassen soll, muss  $\mathbb{R}(\omega)$  neben  $\omega$  selbst auch alle Zahlen der Form  $a + b\omega$  enthalten. Weitere Zahlen sind aber nicht nötig, da Summe und Produkt solcher Zahlen wieder von dieser Form sind:

$$(a + b\omega) + (c + d\omega) = (a + c) + (b + d)\omega \quad (1)$$

$$(a + b\omega) \cdot (c + d\omega) = ac + ad\omega + bc\omega + bd\omega^2 = (ac - bd) + (ad + bc - bd)\omega \quad (2)$$

Dabei haben wir die Identität  $\omega^2 = -\omega - 1$  verwendet. Wir haben also keinen Anlass, noch weitere Zahlen aufzunehmen.

Es liegt somit nahe, den Zahlbereich  $\mathbb{R}(\omega)$  formal als Menge von Paaren zu definieren,

$$\mathbb{R}(\omega) := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

und die Rechnungen (1), (2) als Definition der Rechenarten zu verwenden.

*Bemerkung:* Wer den Faktoringriff kennt, kann kürzer auch definieren:

$$\mathbb{R}(\omega) := \mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1).$$

- c) Per Definition gilt  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ , also  $\omega^2 = -\omega - 1$ . Damit kann man  $\omega^3$  explizit ausrechnen:

$$\omega^3 = \omega \cdot \omega^2 = -\omega^2 - \omega = -(-\omega - 1) - \omega = 1.$$

*Bemerkung:* Alternativ kann man auch den Faktor  $(\omega - 1)$  vom Himmel fallen lassen:

$$0 = (\omega^2 + \omega + 1)(\omega - 1) = \omega^3 - 1.$$

d) *Variante 1:* Wir untersuchen für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ , ob  $x := a + b\omega$  eine Lösung der Gleichung ist:

$$\begin{aligned}
 & (a + b\omega)^2 + 1 = 0 \\
 \iff & (a^2 - b^2 + 1) + (-b^2 + 2ab)\omega = 0 \\
 \iff & a^2 - b^2 + 1 = 0 \text{ und } b(2a - b) = 0 \\
 \stackrel{?}{\iff} & a^2 - b^2 + 1 = 0 \text{ und } 2a = b \\
 \iff & 1 = 3a^2 \text{ und } 2a = b \\
 \iff & a = \pm 1/\sqrt{3} \text{ und } b = \pm 2/\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Da wir insbesondere die Richtung „ $\Leftarrow$ “ haben, folgt also: Die Gleichung  $X^2 + 1 = 0$  hat in  $\mathbb{R}(\omega)$  zwei Lösungen, nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\omega \quad \text{und} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\omega.$$

*Variante 2:* Wir verwenden die quadratische Ergänzung von oben:

$$0 = \omega^2 + \omega + 1 = (\omega + 1/2)^2 + 3/4,$$

also folgt

$$\frac{4}{3} \left( \omega + \frac{1}{2} \right)^2 = \left( \frac{2}{\sqrt{3}}\omega + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 = -1$$

und man kann ebenfalls die beiden Lösungen ablesen.

*Bemerkung:* Da es umgekehrt in  $\mathbb{C}$  eine Lösung  $\xi$  der Gleichung  $X^2 + X + 1 = 0$  gibt, sieht man, dass der in dieser Aufgabe neu konstruierte Rechenbereich  $\mathbb{R}(\omega)$  tatsächlich isomorph zu  $\mathbb{C}$  ist. Man kann einen Isomorphismus sogar explizit hinschreiben:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}(\omega) & \longrightarrow \mathbb{C} \\
 a + b\omega & \longmapsto a + b\xi
 \end{aligned}$$