

## Übungsblatt 3 zur Algebra I

Abgabe bis 6. Mai 2013, 17:00 Uhr

### Aufgabe 1. Beispiele für algebraische Zahlen

- a) Ist die Zahl  $\cos 10^\circ$  algebraisch?
- b) Zeige, dass die Polynomgleichung  $X^3 - 2X + 5 = 0$  genau eine reelle Lösung  $\alpha$  besitzt.
- c) Zeige, dass diese Lösung  $\alpha$  invertierbar ist, und finde eine normierte Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die  $\alpha^{-1}$  als Lösung besitzt.

### Aufgabe 2. Produkt algebraischer Zahlen

- a) Seien  $x$  und  $y$  Zahlen mit  $x^5 - x + 1 = 0$  und  $y^2 - 2 = 0$ . Finde eine normierte Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die die Zahl  $x \cdot y$  als Lösung besitzt.
- b) Der *Grad* einer algebraischen Zahl  $z$  ist der kleinstmögliche Grad einer normierten Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die  $z$  als Lösung besitzt. Finde eine Abschätzung für den Grad des Produkts zweier algebraischer Zahlen in Abhängigkeit der Grade der Faktoren.

### Aufgabe 3. Eigenschaften algebraischer Zahlen

- a) Zeige, dass der Betrag einer jeden algebraischen Zahl algebraisch ist.
- b) Zeige, dass rationale ganz-algebraische Zahlen schon ganzzahlig sind.
- c) Sei  $f$  ein normiertes Polynom mit rationalen Koeffizienten und  $z$  eine transzendente Zahl. Zeige, dass dann auch  $f(z)$  eine transzendente Zahl ist.

### Aufgabe 4. Spielen mit Einheitswurzeln

- a) Finde alle komplexen Lösungen der Gleichung  $X^6 + 1 = 0$ .
- b) Finde eine Polynomgleichung, deren Lösungen genau die Ecken desjenigen regelmäßigen Siebenecks in der komplexen Zahlenebene sind, dessen Zentrum der Ursprung der Ebene ist und das deine Lieblingszahl als eine Ecke besitzt.
- c) Zeige, dass die Gleichung  $X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1 = 0$  genau  $n - 1$  Lösungen besitzt, und zwar alle  $n$ -ten Einheitswurzeln bis auf die 1.
- d) Sei  $\zeta$  eine  $n$ -te und  $\vartheta$  eine  $m$ -te Einheitswurzel. Zeige, dass  $\zeta \cdot \vartheta$  eine  $k$ -te Einheitswurzel ist, wobei  $k$  das kleinste gemeinsame Vielfache von  $n$  und  $m$  ist.

### Aufgabe 5. Primitive Einheitswurzeln

Eine  $n$ -te Einheitswurzel  $\zeta$  heißt genau dann *primitiv*, wenn jede  $n$ -te Einheitswurzel eine ganzzahlige Potenz von  $\zeta$  ist. Sei  $\Phi(n)$  die Anzahl der zu  $n$  teilerfremden Zahlen in  $\{1, \dots, n\}$ .

- a) Kläre ohne Verwendung von b): Wie viele primitive vierte Einheitswurzeln gibt es?
- b) Zeige, dass es genau  $\Phi(n)$  primitive  $n$ -te Einheitswurzeln gibt.