Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 2 zur Algebra I

Abgabe bis 29. April 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Lösungen polynomieller Gleichungen sind algebraisch*
Sei z eine Lösung der Polynomgleichung

$$X^3 - \sqrt{2 - \sqrt[3]{4}}\,X^2 + 3 = 0.$$

Finde eine normierte Polynomgleichung mit *rationalen* Koeffizienten, die z als Lösung hat.

Lösung. Wir formen um:

$$\begin{aligned}
& z^3 - \sqrt{2 - \sqrt[3]{4}}\,z^2 + 3 = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & z^3 + 3 = \sqrt{2 - \sqrt[3]{4}}\,z^2 \\
\Longrightarrow\quad & (z^3 + 3)^2 = 2\,z^4 - \sqrt[3]{4}\,z^4 \\
\Longleftrightarrow\quad & (z^3 + 3)^2 - 2\,z^4 = \sqrt[3]{4}\,z^4 \\
\Longrightarrow\quad & ((z^3 + 3)^2 - 2\,z^4)^3 = 4\,z^{12} \\
\Longleftrightarrow\quad & ((z^3 + 3)^2 - 2\,z^4)^3 - 4\,z^{12} = 0
\end{aligned}$$

Die gesuchte Gleichung lautet also

$$((X^3 + 3)^2 - 2\,X^4)^3 - 4\,X^{12} = 0,$$

denn diese hat z als Lösung (Probe unnötig, wieso?), ihre Koeffizienten sind alle rational und sie ist normiert (das ist nicht ganz offensichtlich, wieso stimmt das?).

Bemerkung: Ausmultipliziert wird die Gleichung nicht schöner:

$$\begin{aligned}
X^{18} - 6\,X^{16} + 18\,X^{15} + 12\,X^{14} - 72\,X^{13} + 123\,X^{12} + 72\,X^{11} - 324\,X^{10} + \\
540\,X^9 + 108\,X^8 - 648\,X^7 + 1215\,X^6 - 486\,X^4 + 1458\,X^3 + 729 = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. *Auf den Spuren Bombellis*
Zeige formal die zuerst von Rafael Bombelli (1526–1572, italienischer Mathematiker) gefundene Gleichheit

$$(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$$

und diskutiere, welche Vorzeichen der Quadratwurzeln jeweils zu wählen sind.

Lösung. Mit der binomischen Formel multiplizieren wir die linke Seite aus:

$$(2 \pm \mathrm{i})^3 = 8 \pm 3 \cdot 4\,\mathrm{i} - 3 \cdot 2 \pm \mathrm{i}^3 = 2 \pm 11\,\mathrm{i}.$$

Bombellis Formel stimmt also, wenn man $\sqrt{-1}$ konsistent als i (statt als $-\mathrm{i}$) und $\sqrt{-121}$ konsistent als $11\,\mathrm{i}$ (statt als $-11\,\mathrm{i}$) liest und dann entweder auf beiden Seiten „+“ oder auf beiden Seiten „−“ für das „±“-Zeichen nimmt.

Aufgabe 3. *Rechnen mit komplexen Zahlen*

a) Sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl, deren Real- und Imaginärteil rationale Zahlen sind. Zeige, dass z^{-1} ebenfalls rationalen Real- und Imaginärteil hat.

b) Zeige, dass der Realteil einer komplexen Zahl z durch $\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ und dass der Imaginärteil durch $\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$ gegeben ist.

c) Sei z eine invertierbare komplexe Zahl. Folgere die Gleichheit $\overline{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$ aus der Multiplikativität der komplexen Konjugation.

d) Interpretiere die Multiplikation mit der imaginären Einheit i geometrisch.

Lösung.

a) Wir schreiben $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$z^{-1} = \frac{1}{a+b\mathrm{i}} = \frac{a-b\mathrm{i}}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$$

und wir sehen, dass in der Tat Real- und Imaginärteil wieder in $\mathbb{Q}$ liegen.

b) Wir schreiben $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und rechnen:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(z+\overline{z}) &= \tfrac{1}{2}(a+b\mathrm{i}+a-b\mathrm{i}) = a \\ \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z}) &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(a+b\mathrm{i}-a+b\mathrm{i}) = b \end{aligned}$$

c) Aus $z \cdot z^{-1} = 1$ folgt wegen der Multiplikativität der komplexen Konjugation $\overline{z} \cdot \overline{z^{-1}} = 1$. Also ist $\overline{z^{-1}}$ das Inverse von $\overline{z}$, das war zu zeigen.

d) Drehung um 90° um den Ursprung im Gegenuhrzeigersinn (wieso?). Skizze!

Aufgabe 4. *Zahlen nahe bei Null*

Zeige, dass für zwei reelle Zahlen a und b genau dann die Wurzel $\sqrt{a^2+b^2}$ nahe bei Null ist, wenn sowohl $|a|$ als auch $|b|$ nahe bei Null sind. Zeige also:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \quad \sqrt{a^2+b^2} < \delta &\implies |a|, |b| < \epsilon \\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \quad |a|, |b| < \delta &\implies \sqrt{a^2+b^2} < \epsilon \end{aligned}$$

Lösung.

a) Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Setze $\delta := \epsilon$. Gelte $\sqrt{a^2+b^2} < \delta$. Dann folgt

$$|a| = \sqrt{|a|^2} \leq \sqrt{|a|^2+|b|^2} < \delta = \epsilon$$

und analog mit $|b|$.

b) Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Setze $\delta := \epsilon/\sqrt{2}$. Gelte $|a|, |b| < \delta$. Dann folgt

$$\sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{\delta^2+\delta^2} = \sqrt{2}\delta = \epsilon.$$

Bemerkung: Auf die passenden Wahlen von δ kommt man natürlich nicht im Vorhinein, sondern erst nach erfolgter Abschätzung.

Aufgabe 5. *Ein neuer Zahlbereich*

a) Zeige, dass die Gleichung $X^2 + X + 1 = 0$ in den reellen Zahlen keine Lösung besitzt.

b) Konstruiere einen minimalen Zahlbereich $\mathbb{R}(\omega)$, welcher die reellen Zahlen und eine Lösung ω der Gleichung $X^2 + X + 1 = 0$ enthält und in welchem Addition und Multiplikation so definiert sind, dass sie die Addition und Multiplikation reeller Zahlen fortsetzen und die einschlägigen Gesetze der Arithmetik erfüllen.

c) Zeige, dass $\omega^3 = 1$ in $\mathbb{R}(\omega)$ gilt.

d) Finde eine Lösung der Gleichung $X^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{R}(\omega)$.

Lösung.

a) *Variante 1:* Man verwendet die Mitternachtsformel und sieht, dass die beiden Lösungen der Gleichung jeweils echt komplex sind:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

Variante 2: Man zeigt durch quadratische Ergänzung, dass für jedes reelle x die linke Seite der Gleichung positiv (und daher nicht null) ist:

$$x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 - 1/4 + 1 \geq 3/4 > 0.$$

b) Wir versuchen, die Konstruktion der komplexen Zahlen auf die Situation hier zu übertragen. Dazu überlegen wir zunächst, wie der Rechenbereich $\mathbb{R}(\omega)$ aussähe, wenn er existierte. Da $\mathbb{R}(\omega)$ die reellen Zahlen umfassen soll, muss $\mathbb{R}(\omega)$ neben ω selbst auch alle Zahlen der Form $a + b\omega$ enthalten. Weitere Zahlen sind aber nicht nötig, da Summe und Produkt solcher Zahlen wieder von dieser Form sind:

$$(a + b\omega) + (c + d\omega) = (a + c) + (b + d)\omega \tag{1}$$

$$(a + b\omega) \cdot (c + d\omega) = ac + ad\omega + bc\omega + bd\omega^2 = (ac - bd) + (ad + bc - bd)\omega \tag{2}$$

Dabei haben wir die Identität $\omega^2 = -\omega - 1$ verwendet. Wir haben also keinen Anlass, noch weitere Zahlen aufzunehmen.

Es liegt somit nahe, den Zahlbereich $\mathbb{R}(\omega)$ formal als Menge von Paaren zu definieren,

$$\mathbb{R}(\omega) := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

und die Rechnungen (1), (2) als Definition der Rechenarten zu verwenden.

Bemerkung: Wer den Faktorringbegriff kennt, kann kürzer auch definieren:

$$\mathbb{R}(\omega) := \mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1).$$

c) Per Definition gilt $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, also $\omega^2 = -\omega - 1$. Damit kann man ω^3 explizit ausrechnen:

$$\omega^3 = \omega \cdot \omega^2 = -\omega^2 - \omega = -(-\omega - 1) - \omega = 1.$$

Bemerkung: Alternativ kann man auch den Faktor $(\omega - 1)$ vom Himmel fallen lassen:

$$0 = (\omega^2 + \omega + 1)(\omega - 1) = \omega^3 - 1.$$

d) *Variante 1:* Wir untersuchen für alle $a, b \in \mathbb{R}$, ob $x := a + b\omega$ eine Lösung der Gleichung ist:

$$\begin{aligned}
& (a+b\omega)^2 + 1 = 0 \\
\iff & (a^2 - b^2 + 1) + (-b^2 + 2ab)\omega = 0 \\
\iff & a^2 - b^2 + 1 = 0 \text{ und } b\,(2a - b) = 0 \\
\overset{?}{\iff} & a^2 - b^2 + 1 = 0 \text{ und } 2a = b \\
\iff & 1 = 3a^2 \text{ und } 2a = b \\
\iff & a = \pm 1/\sqrt{3} \text{ und } b = \pm 2/\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Da wir insbesondere die Richtung „$\Leftarrow$" haben, folgt also: Die Gleichung $X^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{R}(\omega)$ zwei Lösungen, nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\omega \quad \text{und} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\omega.$$

Variante 2: Wir verwenden die quadratische Ergänzung von oben:

$$0 = \omega^2 + \omega + 1 = (\omega + 1/2)^2 + 3/4,$$

also folgt

$$\frac{4}{3}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\omega + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = -1$$

und man kann ebenfalls die beiden Lösungen ablesen.

Bemerkung: Da es umgekehrt in $\mathbb{C}$ eine Lösung ξ der Gleichung $X^2 + X + 1 = 0$ gibt, sieht man, dass der in dieser Aufgabe neu konstruierte Rechenbereich $\mathbb{R}(\omega)$ tatsächlich isomorph zu $\mathbb{C}$ ist. Man kann einen Isomorphismus sogar explizit hinschreiben:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}(\omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
a + b\omega & \longmapsto & a + b\xi
\end{array}$$