Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 2 zur Algebra I

Abgabe bis 29. April 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Lösungen polynomieller Gleichungen sind algebraisch*

Sei z eine Lösung der Polynomgleichung

$$X^3 - \sqrt{2 - \sqrt[3]{4}}\, X^2 + 3 = 0.$$

Finde eine normierte Polynomgleichung mit *rationalen* Koeffizienten, die z als Lösung hat.

Aufgabe 2. *Auf den Spuren Bombellis*

Zeige formal die zuerst von Rafael Bombelli (1526–1572, italienischer Mathematiker) gefundene Gleichheit

$$(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$$

und diskutiere, welche Vorzeichen der Quadratwurzeln jeweils zu wählen sind.

Aufgabe 3. *Rechnen mit komplexen Zahlen*

a) Sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl, deren Real- und Imaginärteil rationale Zahlen sind. Zeige, dass z^{-1} ebenfalls rationalen Real- und Imaginärteil hat.

b) Zeige, dass der Realteil einer komplexen Zahl z durch $\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ und dass der Imaginärteil durch $\frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$ gegeben ist.

c) Sei z eine invertierbare komplexe Zahl. Folgere die Gleichheit $\overline{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$ aus der Multiplikativität der komplexen Konjugation.

d) Interpretiere die Multiplikation mit der imaginären Einheit i als geometrische Operation in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 4. *Zahlen nahe bei Null*

Zeige, dass für zwei reelle Zahlen a und b genau dann die Wurzel $\sqrt{a^2 + b^2}$ nahe bei Null ist, wenn sowohl $|a|$ und $|b|$ nahe bei Null sind. Zeige also:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \sqrt{a^2 + b^2} < \delta \implies |a|, |b| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon |a|, |b| < \delta \implies \sqrt{a^2 + b^2} < \epsilon$$

Aufgabe 5. *Ein neuer Zahlbereich*

a) Zeige, dass die Gleichung $X^2 + X + 1 = 0$ in den reellen Zahlen keine Lösung besitzt.

b) Konstruiere einen minimalen Zahlbereich $\mathbb{R}(\omega)$, welcher die reellen Zahlen und eine Lösung ω der Gleichung $X^2 + X + 1 = 0$ enthält und in welchem Addition und Multiplikation so definiert sind, dass sie die Addition und Multiplikation reeller Zahlen fortsetzen und die einschlägigen Gesetze der Arithmetik erfüllen.

c) Zeige, dass $\omega^3 = 1$ in $\mathbb{R}(\omega)$ gilt.

d) Finde eine Lösung der Gleichung $X^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{R}(\omega)$.

Aufgabe 6. *Drehmatrizen*

Erkläre, warum $\left(\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right)$ eine Drehung um den Winkel α um den Ursprung der Gaußschen Zahlenebene beschreibt. Folgere sodann die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) &= \cos\alpha_1 \, \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \, \sin\alpha_2 \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) &= \cos\alpha_1 \, \sin\alpha_2 + \sin\alpha_1 \, \cos\alpha_2 \end{aligned}$$

aus der bekannten Formel für das Produkt von Matrizen.