Hinweise zu den Übungsaufgaben in Algebra II

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Teilaufgabe a) hat etwas mit Standgruppen zu tun. Für Teilaufgabe b) ist interessant, was Fixpunkte mit Bahnen zu tun haben. (Was sind Fixpunkte denn überhaupt, und was sind Bahnen?) Welche Gleichung der Vorlesung ist also vermutlich anwendbar?

Aufgabe 4. Ein beliebiges Element der disjunkt-gemachten Vereinigung $Y_1 \amalg \cdots \amalg Y_n$ ist ein Paar (i, y), wobei $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein Index und y ein Element der entsprechenden Menge Y_i ist. Ein *Isomorphismus von G-Wirkungen* ist per Definition eine bijektive G-äquivariante Abbildung. Für Teilaufgabe b) ist es hilfreich, X in Bahnen zu zerlegen.

Aufgabe 5. Diese Aufgabe benötigt aber nur die Definition von Normalteilern und das Verständnis der mengentheoretischen Schreibweise: Die Menge N besteht aus all den Elementen von G, welche in allen N_i liegen. Über die Größe von I kann nichts vorausgesetzt werden. Wer mag, kann aber zuerst den Fall des Schnitts zweier Normalteiler behandeln; der allgemeine Fall verläuft ähnlich.

Übungsblatt 4

Aufgabe 2. Die Gruppe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ist die Menge der orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen. Eine Matrix A heißt genau dann *orthogonal*, wenn das Produkt $A^t A$ die Einheitsmatrix ist. Orthogonale Matrizen haben als Determinante stets ± 1. Die Gruppe $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ist die Untergruppe solcher orthogonalen Matrizen, deren Determinante $+1$ ist. Für die Determinante gilt die Rechenregel $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Bei Teilaufgabe b) muss man sich zunächst überlegen, ob man $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ auf C_2 oder umgekehrt wirken lassen möchte (nur eine Variante funktioniert), und wie diese Wirkung explizit aussehen soll. Wie bei Teilaufgabe c) die Gruppe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^3$ wirkt, ist im Skript angegeben (Beispiel 6.76).

Im Staatsexamen ist das halbdirekte Produkt immer wieder wichtig, um die öfter vorkommenden Aufgaben der Art *Geben Sie eine nicht-kommutative Gruppe der Ordnung* 2012 *an.* zu lösen.

Die Diagonalmatrix, die oben links eine -1 stehen und deren restliche Diagonaleinträge mit $+1$ besetzt sind, spielt bei Teilaufgabe b) eine Rolle. Wer mich anschreibt, bekommt weitere Tipps.

Aufgabe 3. In beiden Teilaufgaben geht es nicht um Umkehrfunktionen, sondern um Urbildmengen.

Aufgabe 4. Eine endliche Gruppe heißt genau dann *p-Gruppe*, wenn die Anzahl ihrer Elemente eine p-Potenz ist.

Eine nichttriviale p-Gruppe besitzt stets ein Element der Ordnung p in ihrem Zentrum. Das Kriterium aus a) ist für b) nützlich.

Aufgabe 5. Ein *größter endlicher auflösbarer Normalteiler* ist per Definition ein Normalteiler N in G, welcher selbst endlich und auflösbar ist und folgende Eigenschaft hat: Für jeden beliebigen endlichen auflösbaren Normalteiler N' in G gilt $N' \subseteq N$.

Für b) ist a) nützlich.