Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 11 zur Algebra I

Abgabe bis 1. Juli 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Wirkung der galoisschen Gruppe*

Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Nullstellen eines normierten separablen Polynoms $f(X)$ mit rationalen Koeffizienten.

a) Seien σ und τ Symmetrien der Nullstellen. Zeige, dass $\sigma \cdot (\tau \cdot x_i) = (\sigma \circ \tau) \cdot x_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

b) Sei σ eine Symmetrie der Nullstellen und seien $z, w \in \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$. Zeige: $\sigma \cdot (z + w) = \sigma \cdot z + \sigma \cdot w$ und $\sigma \cdot (zw) = (\sigma \cdot z) \cdot (\sigma \cdot w)$.

c) Zeige, dass genau dann eine Symmetrie σ der Nullstellen mit $x_2 = \sigma \cdot x_1$ existiert, wenn x_1 und x_2 zueinander galoissch konjugiert sind.

Aufgabe 2. *Abstrakte Beispiele für Galoisgruppen*

a) Sei $f(X)$ ein normiertes *separables* quadratisches Polynom mit rationalen Koeffizienten. Berechne die Galoisgruppe der Nullstellen von $f(X)$ in Abhängigkeit der Diskriminante von $f(X)$.

b) Sei $f(X)$ ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad 3 mit rationalen Koeffizienten und Nullstellen x_1, x_2, x_3. Sei x_1 *kein* primitives Element zu $\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3)$. Zeige, dass die Galoisgruppe der Nullstellen genau sechs Elemente enthält.

Aufgabe 3. *Manchmal sind alle Symmetrien gerade*

a) Zeige, dass die Menge A_n der geraden Permutationen in n Ziffern eine Untergruppe der S_n ist.

b) Zeige, dass die Galoisgruppe der Nullstellen eines normierten separables Polynoms $f(X)$ mit rationalen Koeffizienten genau dann vollständig in der alternierenden Gruppe A_n enthalten ist, wenn die Diskriminante von $f(X)$ eine Quadratwurzel in den rationalen Zahlen besitzt.

Aufgabe 4. *Grad primitiver Elemente*

Sei $f(X)$ ein normiertes separables Polynom vom Grad n und t ein primitives Element seiner Nullstellen.

a) Zeige, dass jedes weitere primitive Element t' denselben Grad wie t hat.

b) Zeige, dass der Grad von t höchstens $n!$ ist.

c) Zeige, dass der Grad von t sogar ein Teiler von $n!$ ist.

Aufgabe 5. *Galoissche Resolventen*

a) Wieso ist das Konzept der galoisschen Resolvente nur für separable Polynome definiert worden?

b) Finde eine galoissche Resolvente für das Polynom $f(X) = X^2 + X + 1$.

c) Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Nullstellen eines normierten separablen Polynoms $f(X)$ mit rationalen Koeffizienten. Sei C eine natürliche Zahl mit

$$n \cdot \left| \frac{x_i - x_j}{x_k - x_\ell} \right| \leq C$$

für alle $i, j, k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$ mit $k \neq \ell$. Zeige, dass

$$V(X_1, \ldots, X_n) := X_1 + C\, X_2 + C^2\, X_3 + \cdots + C^{n-1}\, X_n$$

eine galoissche Resolvente für $f(X)$ ist.