

## Übungsblatt 14 zur Kommutativen Algebra

### Aufgabe 1. (3) *Beispiele für Poincarésche Reihe und Hilbertsches Polynom*

Berechne die Poincarésche Reihe und das Hilbertsche Polynom des gewichteten  $K[X, Y]$ -Moduls  $K[X, Y]/(X^2, XY)$  bezüglich  $\dim_K$ .

### Aufgabe 2. (0) *Rationale Binomialkoeffizienten*

Für rationale Zahlen  $x$  und natürliche Zahlen  $k$  setzen wir  $\binom{x}{k} := x(x-1)\cdots(x-k+1)/k! \in \mathbb{Q}$ . Solche Binomialkoeffizienten kommen in Taylor-Entwicklungen vieler wichtiger Funktionen vor.

- Zeige: Genau dann kommt im gekürzten Nenner einer rationalen Zahl  $a/b$  nicht der Primfaktor  $p$  vor, wenn es eine  $p$ -adische Ganzzahl  $u$  mit  $bu = a$  gibt.
- Verwende die Dichtheit von  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{Z}_p$  und die Stetigkeit von Polynomen über  $\mathbb{Z}_p$ , um zu folgern: Im gekürzten Nenner eines rationalen Binomialkoeffizienten  $\binom{x}{k}$  können nur solche Primfaktoren vorkommen, die auch im gekürzten Nenner von  $x$  vorkommen.

