

Übungsblatt 5 zur Algebra II

Abgabe bis 19. November 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (2+2) *Beispiele von Sylowschen Untergruppen*

- a) Bestimme alle Sylowschen Untergruppen der alternierenden Gruppe A_4 .
- b) Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Sei $H \subseteq G$ die endliche Teilmenge all derjenigen Elemente von G , deren Ordnung eine p -Potenz ist. Zeige, dass H eine Untergruppe von G und sogar die einzige Sylowsche p -Untergruppe ist.

Aufgabe 2. (1+3) *Grundlagen zu Sylowschen Untergruppen*

- a) Seien G eine endliche Gruppe und $H \subseteq K \subseteq G$ endliche Untergruppen. Sei ferner H eine Sylowsche p -Untergruppe zu G . Zeige, dass H dann auch eine Sylowsche p -Untergruppe zu K ist.
- b) Sei G eine endliche Untergruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, deren Ordnung eine p -Potenz ist. Zeige: Die Untergruppe H ist genau dann eine Sylowsche p -Untergruppe zu G , wenn H maximal unter allen p -Untergruppen von G ist.

Aufgabe 3. (3+3) *Existenz nichttrivialer Normalteiler*

- S a) Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 30 einen Sylowschen Normalteiler besitzt.
- S b) Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 56 einen Sylowschen Normalteiler besitzt.

Aufgabe 4. (3+3) *Weitere Anwendungen der Sylowschen Sätze*

- S a) Zeige, dass jede endliche Gruppe der Ordnung 36 nicht einfach ist.
- S b) Seien p und q Primzahlen mit $p < q$ und $p \nmid q - 1$. Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung pq zyklisch ist.