Übungsblatt 3 zur Algebra I

Abgabe bis 6. Mai 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Beispiele für algebraische Zahlen*

a) Ist die Zahl $\cos 10°$ algebraisch?

b) Zeige, dass die Polynomgleichung $X^3 - 2X + 5 = 0$ genau eine reelle Lösung α besitzt.

c) Zeige, dass diese Lösung α invertierbar ist, und finde eine normierte Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die α^{-1} als Lösung besitzt.

Lösung.

a) Ja, denn die Zahl $\cos 10°$ ist der Realteil der komplexen Zahl $e^{\pi \mathrm{i}/18}$, und diese ist algebraisch, da sie die Gleichung

$$X^{18} + 1 = 0$$

erfüllt (wieso?). Da Realteile algebraischer Zahlen selbst ebenfalls algebraisch sind, begründet das die Algebraizität von $\cos 10°$.

b) Wir setzen $f := X^3 - 2X + 5$. Da $f(-3) = -16 < 0 < 1 = f(-2)$, besitzt die Gleichung $f(X) = 0$ nach Blatt 1, Aufgabe 2 mindestens eine reelle Lösung α im Intervall $(-3, -2)$. Mit einer Polynomdivision durch $(X - \alpha)$ kann man f faktorisieren:

$$f = (X - \alpha)(X^2 + \alpha X + \alpha^2 - 2).$$

Das verbleibende Polynom hat nun keine weiteren reellen Nullstellen, denn seine Diskriminante ist negativ:

$$D = \alpha^2 - 4(\alpha^2 - 2) = 8 - 3\alpha^2 \leq 8 - 3 \cdot 2^2 = -4 < 0.$$

c) Die Zahl α kann nicht Null sein, da Null keine Lösung der Gleichung $f(X) = 0$ ist:

$$f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0 + 5 = 5 \neq 0.$$

Also ist α invertierbar. Für die Zahl α^{-1} gilt

$$(\alpha^{-1})^{-3} - 2(\alpha^{-1})^{-1} + 5 = 0;$$

das ist zwar eine Gleichung, aber keine Polynomgleichung für α^{-1}. Wenn wir mit $(\alpha^{-1})^3$ durchmultiplizieren, erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$1 - 2(\alpha^{-1})^2 + 5(\alpha^{-1})^3 = 0.$$

Also ist α^{-1} Lösung der normierten Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten

$$X^3 - \frac{2}{5}X^2 + \frac{1}{5} = 0.$$

Aufgabe 2. *Produkt algebraischer Zahlen*

a) Seien x und y Zahlen mit $x^5 - x + 1 = 0$ und $y^2 - 2 = 0$. Finde eine normierte Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die die Zahl $x \cdot y$ als Lösung besitzt.

b) Der *Grad* einer algebraischen Zahl z ist der kleinstmögliche Grad einer normierten Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die z als Lösung besitzt. Finde eine Abschätzung für den Grad des Produkts zweier algebraischer Zahlen in Abhängigkeit der Grade der Faktoren.

Aufgabe 3. *Eigenschaften algebraischer Zahlen*

a) Zeige, dass der Betrag einer jeden algebraischen Zahl algebraisch ist.

b) Zeige, dass rationale ganz-algebraische Zahlen schon ganzzahlig sind.

c) Sei f ein normiertes Polynom mit rationalen Koeffizienten und z eine transzendente Zahl. Zeige, dass dann auch $f(z)$ eine transzendente Zahl ist.

Lösung.

a) Sei z eine algebraische Zahl. Dann gilt

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

Da mit z auch $\overline{z}$ algebraisch ist und das Produkt algebraischer Zahlen algebraisch ist, ist die rechte Seite dieser Identität algebraisch. Der Betrag von z ist also als eine der Lösungen der Gleichung mit algebraischen Koeffizienten

$$X^2 - z\overline{z} = 0$$

ebenfalls algebraisch.

b) Sei z eine rationale ganz-algebraische Zahl. Dann erfüllt z also eine normierte Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten. Nach Blatt 0, Aufgabe 3b) ist z daher schon ganzzahlig.

c) Angenommen, $y := f(z)$ wäre algebraisch. Dann gibt es ein normiertes Polynom g mit rationalen Koeffizienten, sodass y die Gleichung

$$g(Y) = 0$$

erfüllt, sodass also $g(f(z)) = 0$ ist. Setzt man $h := g \circ f$ – das ist wieder ein normiertes Polynom mit rationalen Koeffizienten (wieso?) – sieht man, dass z Lösung der Gleichung $h(X) = 0$ ist. Das ist ein Widerspruch zur Transzendenz von z.

Aufgabe 4. *Spielen mit Einheitswurzeln*

a) Finde alle komplexen Lösungen der Gleichung $X^6 + 1 = 0$.

b) Finde eine Polynomgleichung, deren Lösungen genau die Ecken desjenigen regelmäßigen Siebenecks in der komplexen Zahlenebene sind, dessen Zentrum der Ursprung der Ebene ist und das die Zahl $1 + \mathrm{i}$ als eine Ecke besitzt.

c) Zeige, dass die Gleichung $X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1 = 0$ genau $n - 1$ Lösungen besitzt, und zwar alle n-ten Einheitswurzeln bis auf die 1.

d) Sei ζ eine n-te und ϑ eine m-te Einheitswurzel. Zeige, dass $\zeta \cdot \vartheta$ eine k-te Einheitswurzel ist, wobei k das kleinste gemeinsame Vielfache von n und m ist.

Lösung.

a) Bezeichne ξ eine primitive sechste Einheitswurzel, etwa $\xi = e^{2\pi \mathrm{i}/6}$. Eine Lösung der Gleichung ist i. Daher sind die insgesamt sechs Lösungen der Gleichung durch

$$\mathrm{i}, \quad \xi\mathrm{i}, \quad \xi^2\mathrm{i}, \quad \xi^3\mathrm{i}, \quad \xi^4\mathrm{i}, \quad \xi^5\mathrm{i}$$

gegeben (wieso?).

b) Die Gleichung $X^7 - (1+\mathrm{i})^7 = 0$ tut's (wieso?).

Bemerkung: Wenn man möchte, kann man die Gleichung auch ausfaktorisiert hinschreiben. Sei dazu ξ eine primitive siebte Einheitswurzel, etwa $\xi = e^{2\pi \mathrm{i}/7}$. Dann ist obige Gleichung äquivalent zu

$$\prod_{k=0}^{6} (X - \xi^k(1+\mathrm{i})) = 0.$$

Bemerkung: Es kann keine Polynomgleichung mit *rationalen* Koeffizienten geben, die genau die sieben Ecken als Lösungen besitzt. Denn jede solche Gleichung würde mit $1+\mathrm{i}$ auch das komplex Konjugierte $1-\mathrm{i}$ als Lösung besitzen, das ist aber keine der Ecken.

c) Sei x eine beliebige komplexe Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0 \\
\overset{?}{\Longleftrightarrow} \quad & x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0 \ \wedge \ x \neq 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & (x-1) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = 0 \ \wedge \ x \neq 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & x^n - 1 = 0 \ \wedge \ x \neq 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & x \text{ ist eine der } n\text{-ten Einheitswurzeln, aber nicht die 1.}
\end{aligned}$$

Da wir durchgängig Äquivalenzumformungen verwendet haben, zeigt diese Überlegung tatsächlich die Behauptung.

Bemerkung: Bei einem „$\Rightarrow$“-Schritt können Phantomlösungen entstehen, bei einem „$\Leftarrow$“-Schritt können Lösungen verloren gehen.

d) Da k ein Vielfaches von n ist, gilt $\zeta^k = 1$. Analog gilt $\vartheta^k = 1$. Daher folgt:

$$(\zeta \cdot \vartheta)^k = \zeta^k \cdot \vartheta^k = 1 \cdot 1 = 1.$$

Aufgabe 5. *Primitive Einheitswurzeln*

Eine n-te Einheitswurzel ζ heißt genau dann *primitiv*, wenn *jede* n-te Einheitswurzel eine ganzzahlige Potenz von ζ ist. Sei $\Phi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen in $\{1, \ldots, n\}$.

a) Kläre ohne Verwendung von b): Wie viele primitive vierte Einheitswurzeln gibt es?

b) Zeige, dass es genau $\Phi(n)$ primitive n-te Einheitswurzeln gibt.

Lösung.

a) Insgesamt gibt es vier vierte Einheitswurzeln:

$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i.$$

Von diesen sind i und $-i$ primitiv: Denn die Potenzen von i geben gerade diese vier Zahlen, und für $-i$ stimmt es auch. Die anderen beiden Wurzeln sind aber nicht primitiv: Denn die Potenzen von 1 sind nur 1 selbst, und die von -1 sind nur ± 1.