Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 9 zur Algebra II

Abgabe bis 17. Dezember 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (4) *Ein Gegenbeispiel*

Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass das Ideal $(X, Y) \subseteq R[X, Y]$ kein Hauptideal ist.

Aufgabe 2. (2+2) *Praxis zu größten gemeinsamen Teilern*

a) Bestimme eine teilweise Faktorisierung der Zahlen 99, 1200 und 160.

b) Bestimme einen größten gemeinsamen Teiler der folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X, Y]$:

$$X^3Y^2 - X^2Y^3 + XY^3 - Y^4, \quad X^4Y - X^3Y^2 - X^2Y^2 + XY^3.$$

Aufgabe 3. (1+1+2) *Theorie zu größten gemeinsamen Teilern*

a) Seien a, b, c Elemente eines Integritätsbereichs. Sei c regulär und existiere ein größter gemeinsamer Teiler d von ac und bc. Zeige, dass d durch c teilbar ist und dass d/c ein größter gemeinsamer Teiler für a und b ist.

b) Seien a, b, c Elemente eines Rings mit größten gemeinsamen Teilern. Sei a ein Teiler von $b \cdot c$ und sei die Eins ein größter gemeinsamer Teiler von a und b. Zeige, dass a auch ein Teiler von c ist.

c) Sei R ein Integritätsbereich, in dem eine teilweise Primfaktorzerlegung immer möglich ist. Zeige, dass R ein Ring mit größten gemeinsamen Teilern ist.

Aufgabe 4. (2+2) *Beispiele und Nichtbeispiele für euklidische Ringe*

a) Sei ω eine primitive dritte Einheitswurzel. Zeige, dass der Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\omega)} = \mathbb{Z}[\omega]$ zusammen mit der Norm $N : a + b\omega \mapsto a^2 - ab + b^2$ ein euklidischer Ring ist.

b) Zeige, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ zusammen mit der Norm $N : a + b\sqrt{-5} \mapsto a^2 + 5b^2$ *kein* euklidischer Ring ist.

Aufgabe 5. (2+2) *Primideale und maximale Ideale*

a) Zeige, dass ein nilpotentes Element eines kommutativen Rings R in allen Primidealen von R liegt.

b) Sei $\mathfrak{m} \subseteq R$ ein Ideal eines kommutativen Rings R. Zeige, dass $\mathfrak{m}$ genau dann ein maximales Ideal ist, wenn der Faktorring $R/\mathfrak{m}$ ein Körper ist.