

## Übungsblatt 4 zur Algebra I

Abgabe bis 13. Mai 2013, 17:00 Uhr

### Aufgabe 1. Lage der Lösungen von Polynomgleichungen

Sei  $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 = 0$  eine normierte Polynomgleichung mit komplexen Koeffizienten. Zeige, dass jede komplexe Lösung  $z$  höchstens die Entfernung  $1 + \max\{|a_0|, \dots, |a_{n-1}|\}$  zum Ursprung hat.

**Lösung.** Sei  $R := \max\{|a_0|, \dots, |a_{n-1}|\}$ . Dann gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \geq R + 1$  folgende Hilfsüberlegung (wieso?):

$$\begin{aligned} \left| a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + a_1 \frac{1}{z^{n-1}} + a_0 \frac{1}{z^n} \right| &\stackrel{\Delta}{\leq} |a_{n-1}| \frac{1}{|z|} + \dots + |a_1| \frac{1}{|z|^{n-1}} + |a_0| \frac{1}{|z|^n} \\ &\leq R \cdot \frac{1}{|z|} \leq \underbrace{\frac{R}{R+1}}_{=: q} < 1 \end{aligned}$$

Dabei haben wir  $\frac{1}{|z|^i} \leq \frac{1}{|z|}$  verwendet (okay, da  $|z| \geq 1$ ). Somit gilt (wieso?) für alle  $|z| \geq R+1$

$$|f(z)| = |z|^n \left| 1 + a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^n} \right| \geq |z|^n (1 - q) > 0,$$

insbesondere also  $f(z) \neq 0$ .

### Aufgabe 2. Stetigkeit von Polynomfunktionen

Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  eine Polynomfunktion mit Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Zeige, dass  $f$  in folgendem starken Sinn stetig ist:

$$\forall C > 0 \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z, z' \in \mathbb{C} \text{ mit } |z|, |z'| \leq C: |z - z'| < \delta \implies |f(z) - f(z')| < \epsilon$$

**Lösung.** Sei  $R > 0$  beliebig. Sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Wir setzen

$$\delta := \epsilon \cdot \left[ nR^{n-1} \cdot \left( \sum_{i=0}^n |a_i| + 1 \right) \right]^{-1},$$

dann gilt für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  mit  $|z|, |w| \leq C$  und  $|z - w| < \delta$  zunächst die Abschätzung

$$\begin{aligned} |z^i - w^i| &= |z - w| \cdot |z^{i-1} + z^{i-2}w + z^{i-3}w^2 + \dots + zw^{i-2} + w^{i-1}| \\ &\leq |z - w| \cdot (R^{i-1} + \dots + R^{i-1}) \\ &\leq nR^{n-1} |z - w| \end{aligned}$$

und daher folgt

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &= \left| \sum_{i=0}^n a_i(z^i - w^i) \right| \leq \sum_{i=0}^n |a_i| |z^i - w^i| \\ &\leq \sum_{i=0}^n |a_i| \cdot nR^{n-1} |z - w| = nR^{n-1} \left( \sum_{i=0}^n |a_i| \right) \cdot |z - w| < \epsilon. \end{aligned}$$

### Aufgabe 3. Rechenregeln

- Seien  $f$  und  $g$  Polynome mit  $\deg f \leq n$  und  $\deg g \leq m$ . Zeige, dass  $\deg(f + g) \leq \max\{n, m\}$  und  $\deg(fg) \leq n + m$ .
- Beweise oder widerlege: Für alle Polynome  $f$  und Zahlen  $x, y$  gilt  $f(xy) = f(x)f(y)$ .
- Sei  $q$  eine komplexe Zahl ungleich Eins. Zeige:  $\sum_{k=0}^n q^k = (q^{n+1} - 1) / (q - 1)$ .

### Lösung.

- Da  $\deg f \leq n$ , gibt es Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  sodass  $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ . Analog gibt es Koeffizienten  $b_0, \dots, b_m \in \mathbb{C}$  mit  $g = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ . Dann sehen wir: In der Summe  $f + g$  sind die Koeffizienten aller Monome vom Grad  $> \max\{n, m\}$  und im Produkt  $fg$  die aller Monome vom Grad  $> nm$  null. Das zeigt die Behauptung.

*Bemerkung:* Wenn man von den Koeffizienten nicht entscheiden kann, ob sie null oder nicht null sind (wie bei allgemeinen reellen oder komplexen Zahlen der Fall), ist der Grad eines Polynoms keine wohldefinierte natürliche Zahl (wieso?). Dem zusammengesetzten Ausdruck „ $\deg f \leq n$ “ kann man aber trotzdem einen Sinn verleihen, nämlich dass alle Koeffizienten von  $f$  zu Monomen mit Grad echt größer als  $n$  null sind. In diesem Sinn ist die Aufgabe zu verstehen.

- Die Behauptung gilt fast nie. Ein einfaches Gegenbeispiel ist

$$f(X) := X + 1, \quad x := 0, \quad y := 1,$$

denn dann ist

$$f(xy) = f(0) = 1 \neq 2 = 1 \cdot 2 = f(0)f(1).$$

- Wir rechnen:

$$\begin{aligned} (q - 1) \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^n) &= q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1} \\ &\quad - 1 - q - q^2 - q^3 - \dots - q^n \\ &= q^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Nach Division durch  $q - 1$  steht die zu zeigende Identität da.

### Aufgabe 4. Teiler von Polynomen

- Ist  $X + \sqrt{2}$  ein Teiler von  $X^3 - 2X$ ?
- Besitzt  $X^7 + 11X^3 - 33X + 22$  einen Teiler der Form  $(X - a)(X - b)$  mit  $a, b \in \mathbb{Q}$ ?

- c) Sei  $f = 3X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$  und  $g = X^3 - 2X + 1$ .  
Finde Polynome  $q$  und  $r$  mit  $f = qg + r$  und  $\deg r < \deg g$ .
- d) Sei  $d$  ein gemeinsamer Teiler zweier Polynome  $f$  und  $g$  und seien  $p$  und  $q$  weitere Polynome. Zeige, dass  $d$  dann auch ein Teiler von  $pf + qg$  ist.
- e) Seien  $f, g$  und  $h$  Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten und  $f = gh$ . Zeige, dass für jede ganze Zahl  $n$  die ganze Zahl  $g(n)$  ein Teiler von  $f(n)$  ist.

### Lösung.

- a) *Variante 1:* Ja, denn  $-\sqrt{2}$  ist eine Nullstelle von  $X^3 - 2X$  (wieso?).  
*Variante 2:* Ja, denn es gilt:  $X^3 - 2X = X(X^2 - 2) = X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ .
- b) Nach Blatt 0, Aufgabe 3b) und Blatt 1, Aufgabe 1 können rationale Nullstellen des gegebenen Polynoms nur Teiler von 22 sein. Einsetzen zeigt aber, dass keine der Zahlen

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 11, \quad \pm 22$$

Nullstellen sind. Also besitzt das Polynom keinerlei rationale Nullstellen und daher auch keine Teiler der Form  $(X - a)(X - b)$  mit  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

- c) Polynomdivision liefert

$$\begin{aligned} q &= 3X - 1, \\ r &= 7X^2 - 6X + 2. \end{aligned}$$

- d) Nach Voraussetzung gibt es Polynome  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  mit  $f = d\tilde{f}$  und  $g = d\tilde{g}$ . Damit folgt

$$pf + qg = pf\tilde{f} + qd\tilde{g} = d \cdot (p\tilde{f} + q\tilde{g}),$$

also ist  $d$  tatsächlich ein Teiler von  $pf + qg$ .

- e) Für jede ganze Zahl  $n$  folgt  $f(n) = g(n) \cdot h(n)$  (wieso?). Da  $h(n)$  eine ganze Zahl ist (wieso?), zeigt das schon die Behauptung.

### Aufgabe 5. Polynomielle Ausdrücke

- a) Schreibe  $\frac{1}{\sqrt{2+5\sqrt{3}}}$  als polynomiellen Ausdruck in  $\sqrt{2}$  und  $\sqrt{3}$  mit rat. Koeffizienten.
- b) Sei  $z$  eine komplexe Zahl mit  $\mathbb{Q}(z) = \mathbb{Q}[z]$ . Zeige, dass  $z$  algebraisch ist.
- c) Inwiefern kann man ein Polynom in zwei Unbestimmten  $X$  und  $Y$  als Polynom in einer einzigen Unbestimmten  $Y$ , dessen Koeffizienten Polynome in  $X$  sind, auffassen?

### Lösung.

- a) Wir bedienen uns desselben Tricks, den man auch beim Dividieren durch komplexe Zahlen verwendet:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + 5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{(\sqrt{2} + 5\sqrt{3})(\sqrt{2} - 5\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{2 - 25 \cdot 3} = \frac{-1}{73}\sqrt{2} + \frac{5}{73}\sqrt{3}.$$

- b) Wir beweisen die Behauptung zunächst für den Fall, dass  $z \neq 0$ . Dann ist nämlich  $1/z$  ein Element von  $\mathbb{Q}(z)$  und daher auch von  $\mathbb{Q}[z]$ ; also gibt es ein Polynom  $f(X)$  mit

rationalen Koeffizienten und  $\frac{1}{z} = f(z)$ . Dieses Polynom kann nicht das Nullpolynom sein (wieso?) und hat daher mindestens Grad 0. Die Zahl  $z$  ist also Lösung der Polynomgleichung

$$f(X) \cdot X - 1 = 0$$

mit rationalen Koeffizienten. Diese ist nichttrivial (wegen der Multiplikation mit  $X$  ist ihr Grad mindestens 1) und enttarnt daher nach Normierung  $z$  als algebraisch.

Nun wollen wir den allgemeinen Fall behandeln. In klassischer Logik ist das einfach, denn da ist  $z$  null oder nicht null; im ersten Fall ist  $z$  sowieso algebraisch, im zweiten Fall haben wir das gerade gesehen. Intuitionistisch ist diese Fallunterscheidung nicht zulässig, trotzdem können wir den Beweis retten: Denn auch konstruktiv gilt

$$|z| > 0 \quad \text{oder} \quad |z| < 1.$$

Im ersten Fall folgt  $z \neq 0$  und daher die Algebraizität nach obigem Argument. Im zweiten Fall ist  $z' := z + 1$  nicht null; wegen  $\mathbb{Q}(z) = \mathbb{Q}(z')$  und  $\mathbb{Q}[z] = \mathbb{Q}[z']$  (wieso?) zeigt obige Argumentation, dass  $z'$  algebraisch ist. Also ist auch  $z = z' - 1$  algebraisch.

### Aufgabe 6. Beweis des Fundamentalsatzes

Im Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra tritt die Zahl 3 immer wieder auf. Kann sie durch eine kleinere Zahl  $3 - \epsilon$  ersetzt werden?

**Lösung.** Wir erinnern an die grobe Struktur des Beweises des Fundamentalsatzes: Ausgehend von der (möglicherweise sehr schlechten) Näherung 0 als Lösung der Polynomgleichung

$$f(X) = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0 = 0$$

konstruieren wir eine erste bessere Näherung  $z$ . Diese ist insofern besser, als dass sie die Abschätzung

$$|z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1z + b_0| \leq q|b_0| \tag{1}$$

erfüllt, wobei  $q := 1 - \frac{1}{2} \cdot 3^{1-n^2}$  ein fester Faktor kleiner als Eins ist. (Zum Vergleich: Für die Näherung 0 ergibt sich als Abstand  $|f(0)| = |b_0|$ .) Aus dieser besseren Näherung konstruieren wir dann eine abermals verbesserte Näherung; sukzessive erhalten wir so eine Folge immer besser werdender Näherungslösungen, deren Grenzwert eine tatsächliche Lösung der Gleichung ist.

Wenn man nun die Zahl 3 in der Definition von  $q$  durch eine kleinere Zahl ersetzen könnte, hätte das folgenden Vorteil: Der Faktor  $q$  wäre dann kleiner (wieso?) und damit die Konvergenz schneller – zumindest, wenn die Abschätzung (1) nicht zu pessimistisch ist, sondern ein realistisches Bild der Konvergenzgeschwindigkeit vermittelt. (Manche numerische Verfahren konvergieren in der Realität viel schneller, als naive Abschätzungen vermuten lassen.)

Um nun die Frage, ob man 3 durch eine kleinere Zahl ersetzen kann, zu klären, müssen wir den gesamten Beweis des Fundamentalsatzes durchgehen und bei jedem Vorkommen von 3 prüfen, ob der jeweilige Schritt auch bei einer kleineren Zahl durchgeht. Bei einer solchen Analyse stellt man fest: Für den Großteil des Beweises spielt der Wert dieser Konstanten keine Rolle (solange er nur positiv ist), erst bei den Abschätzungen (1.47), (1.48), (1.49) und der finalen Abschätzung (auf Seite 41) wird es kritisch.

Wir wollen unseren kleineren Ersatz für die Zahl 3 mit „ $\tilde{3}$ “ bezeichnen. Entsprechend setzen wir  $\tilde{2} := \tilde{3} - 1$ . Die veränderten Abschätzungen lauten dann:

$$m(r) \geq \tilde{3}^{k^2-n^2} |b_0| \quad (1.47)$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} f_i(r) \leq \frac{1 - \tilde{3}^{1-k}}{\tilde{2}} f_k(r) \quad (1.48)$$

$$\sum_{i=k+1}^n f_i(r) \leq \frac{1 - \tilde{3}^{k-n}}{\tilde{2}} f_k(r) \quad (1.49)$$

$$\sum_{i \neq 0, k} f_i(r) \leq \left( \frac{2}{\tilde{2}} - \frac{\tilde{3}^{1-k}}{\tilde{2}} \right) f_k(r)$$

Interessant wird es, wenn wir uns der finalen Abschätzung zuwenden:

$$|f(z)| \leq |b_0| - \left( \frac{\tilde{3}^{1-k}}{\tilde{2}} + 1 - \frac{2}{\tilde{2}} \right) m(r) \quad (2)$$

Auf der rechten Seite wollen wir nun mittels Abschätzung (1.47) weiter nach oben abschätzen. Dazu muss aber der Vorfaktor  $(\dots)$  positiv sein; eine kleine Nebenrechnung zeigt, dass das genau dann der Fall ist, wenn

$$3 - \tilde{3} < \tilde{3}^{1-k} \quad (3)$$

für alle  $k \in J \subseteq \{1, \dots, n\}$ . Da unsere neue Konstante  $\tilde{3}$  schon unabhängig von  $J$  sein soll (denn diese Menge kann in sich jedem Iterationsschritt des Näherungsverfahrens ändern), müssen wir daher fordern, dass die Abschätzung sogar im schlimmstmöglichen Fall gilt  $k = n$  gilt:

$$3 - \tilde{3} < \tilde{3}^{1-n}. \quad (4)$$

Denn für  $k = n$  ist die rechte Seite der Ungleichung (3) am kleinsten. Wenn wir unsere neue Konstante  $\tilde{3}$  also so einschränken, dass sie Abschätzung (4) erfüllt, können wir Ungleichung (2) fortführen:

$$|f(z)| \leq |b_0| \cdot \left( 1 - \frac{\tilde{3}^{1-k+k^2-n^2}}{\tilde{2}} + \frac{\tilde{3}^{k^2-n^2}}{\tilde{2}} \cdot (3 - \tilde{3}) \right).$$

Für jedes  $k$  muss nun der Faktor  $(\dots)$  auf der rechten Seite echt kleiner als 1 sein. Eine Nebenrechnung zeigt, dass das genau dann der Fall ist, wenn  $\tilde{3}$  die Abschätzung (4) erfüllt, was wir ja sowieso voraussetzen mussten.

Als Fazit können wir also festhalten: Für festen Polynomgrad  $n$  kann die Konstante 3 in der Tat durch jede kleinere positive Zahl  $\tilde{3}$  ersetzt werden, die noch Abschätzung (4) erfüllt. Konkret ergeben sich folgende Möglichkeiten (augerundete Werte):

$n$	kleinstmögliche Konstante $\tilde{3}$
2	2,619
3	2,880
4	2,962
5	2,988
6	2,996

Es gibt aber keine bessere Konstante, die für alle Polynomgrade  $n$  gleichmäßig funktionieren würde: Denn im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  lautet Abschätzung (4)

$$3 - \tilde{3} \leq 0.$$