Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 1 zur Algebra II

Abgabe bis 22. Oktober 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Abstrakte Beispiele für Gruppenhomomorphismen*

a) Sei n eine ganze Zahl und G eine Gruppe. Ist dann die Potenzabbildung $G \to G,\ g \mapsto g^n$ stets ein Gruppenhomomorphismus?

b) Seien G und H Gruppen. Finde einen Gruppenisomorphismus $G \times H \to H \times G$.

c) Seien x und y Elemente einer Gruppe G. Finde einen Gruppenisomorphismus $\phi : G \to G$ mit $\phi(xy) = yx$.

Aufgabe 2. *Gruppen mit zwei Elementen*

a) Seien G und H zweielementige Gruppen. Zeige, dass G und H auf genau eine Art und Weise isomorph sind.

b) Zeige: $\mathrm{Aut}(\mathrm{C}_4) \cong \mathrm{C}_2$.

Aufgabe 3. *Nicht-isomorphe Gruppen gleicher Ordnung*

Zeige, dass es zwar eine Bijektion, nicht aber einen Gruppenisomorphismus zwischen C_4 und $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$ gibt.

Bemerkung. Mit dem Hauptsatz über endlich präsentierte abelsche Gruppen werden wir dieses Beispiel später konzeptioneller verstehen.

Aufgabe 4. *Freies Produkt von Gruppen*

a) Das Element $1\,1'\,(-1)\,(-1)' \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ist nicht offensichtlich gleich dem Einselement. Zeige, dass dieser erste Eindruck korrekt ist.

b) Seien G und H Gruppen. Seien $g \in G$, $h \in H$ jeweils nicht das jeweilige Einselement. Zeige, dass die Elemente $1, gh, ghgh, ghghgh, \ldots$ paarweise verschiedene Elemente von $G * H$ sind.

c) Seien G und H Gruppen, die beide ein vom Einselement verschiedenes Element besitzen. Zeige, dass $G * H$ nicht abelsch ist.

d) Sei G eine Gruppe. Gib einen kanonischen Gruppenisomorphismus $G * 1 \to G$ an, wobei 1 die triviale Gruppe bezeichnet.

e) *Für Teilnehmer des Pizzaseminars:* Zeige, dass das freie Produkt das Koprodukt in der Kategorie der Gruppen ist.