

## Übungsblatt 13 zur Algebra I

Abgabe bis 15. Juli 2013, 17:00 Uhr

### Aufgabe 1. Konstruierbare $n$ -Ecke

- a) Für welche  $n \in \{1, \dots, 100\}$  ist ein regelmäßiges  $n$ -Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar?
- b) Gib eine Konstruktionsvorschrift für das regelmäßige 15-Eck an.

### Aufgabe 2. Fermatsche und Mersennesche Primzahlen

- a) Zeige für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 0$ :  $F_{n+1} = 2 + F_n F_{n-1} \cdots F_0$ .
- b) Zeige, dass  $F_m$  und  $F_n$  für  $m \neq n$  teilerfremd sind. Folgere daraus, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
- c) Eine *Mersennesche Zahl* ist eine Zahl der Form  $M_n = 2^n - 1$ . Zeige, dass  $M_n$  höchstens dann eine Primzahl ist, wenn  $n$  eine Primzahl ist.
- d) Zeige allgemeiner, dass  $M_n$  von  $M_d$  geteilt wird, wenn  $d$  ein positiver Teiler von  $n$  ist.

### Aufgabe 3. Hauptsatz der Galoistheorie

Bestimme alle Untergruppen der galoisschen Gruppe der Nullstellen des Polynoms  $X^4 + 1$  und die zugehörigen Zwischenerweiterungen.

### Aufgabe 4. Relative galoissch Konjugierte

- a) Finde zwei algebraische Zahlen, die über  $\mathbb{Q}$  galoissch konjugiert sind, über  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  aber nicht.
- b) Seien  $K$  und  $L$  Koeffizientenbereiche mit  $L \supseteq K \supseteq \mathbb{Q}$  und  $x$  eine algebraische Zahl. Zeige, dass ein galoissch Konjugiertes von  $x$  über  $L$  auch ein galoissch Konjugiertes von  $x$  über  $K$  ist.

### Aufgabe 5. Relative Galoisgruppen

- a) Finde ein normiertes separables Polynom mit rationalen Koeffizienten, sodass die galoissche Gruppe seiner Nullstellen über  $\mathbb{Q}$  gleich der über  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$  ist.
- b) Sei  $f \in K[X]$  ein normiertes separables Polynom und  $x_1, \dots, x_n$  seine Nullstellen. Sei  $y \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ . Zeige:

$$\text{Gal}_{K(y)}(x_1, \dots, x_n) = \{\sigma \in \text{Gal}_K(x_1, \dots, x_n) \mid \sigma \cdot y = y\}.$$

### Aufgabe 6. ???

Sei  $p$  eine Primzahl und  $x$  eine algebraische Zahl vom Grad  $p^n$ . Seien alle galoissch Konjugierten  $x_1 = x, x_2, \dots, x_{p^n}$  von  $x$  in  $x$  rational.

- a) Zeige, dass das Zentrum der galoisschen Gruppe der  $x_1, \dots, x_{p^n}$  ein Element  $\sigma$  der Ordnung  $p$  enthält.
- b) Sei  $y$  ein primitives Element zu  $e_i(x_i, \sigma x_i, \dots, \sigma^{p-1} x_i), i = 1, \dots, p$ . Zeige, dass  $y$  vom Grad  $p^{n-1}$  ist.