Wissenswertes zur Kronecker-Konstruktion

Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad mindestens 1. Aus diesen Daten können wir einen neuen Ring basteln, den Faktorring

$$K' := K[X]/(f).$$

Elemente von K'

Die Elemente von K' sind Äquivalenzklassen von Polynomen, wobei zwei Klassen genau dann als gleich angesehen werden, wenn die Differenz ihrer Repräsentanten ein Vielfaches von f ist. In K' rechnet man also *modulo* f. Ist g ein Polynom, das bei Division durch f den Rest r lässt, so gilt $[g] = [r]$ in K'. Wir können daher festhalten:

$$K' = \{[r] \mid r \in K[X],\ \deg r < \deg f\}.$$

Das Nullelement von K' ist $[0]$, die Äquivalenzklasse des Nullpolynoms. Es gilt $[0] = [f]$.

Einbettung von K in K'

Der Ring K' ist nicht im wörtlichen Sinn eine Obermenge von K, da K' ja neu konstruierte Äquivalenzklassen enthält. Vermöge des kanonischen injektiven Ringhomomorphismus

$$K \longrightarrow K',\ z \longmapsto [z]$$

können wir jedoch K als Unterring von K' *ansehen*: Immer, wenn wir in die Verlegenheit kommen, ein Element z von K als Element von K' interpretieren zu müssen (etwa wenn eine Formel nur dann Sinn ergibt, wenn an einer bestimmten Stelle ein Element von K' steht), so lesen wir einfach „$[z]$“ statt dem wörtlichen „z“.

Nutzen von K'

Im Vergleich zum Ausgangskörper K enthält der Ring K' ein besonderes neues Element, nämlich $\alpha := [X]$. Dieses erfüllt die Rechenregel

$$f(\alpha) = 0 \in K',$$

denn wenn $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, so gilt

$$f(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i [X]^i = \sum_{i=0}^{n} [a_i][X]^i = \Big[\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\Big] = [f] = 0.$$

Beim zweiten Gleichheitszeichen haben wir im Sinne des vorherigen Absatzes das Element a_i von K als Element $[a_i]$ von K' aufgefasst.

In K' gibt es also ein Element α, dass die Rechenregel $f(\alpha) = 0$ erfüllt. Das ist der Grund, wieso die Kronecker-Konstruktion wichtig ist: Mit ihrer Hilfe können wir nach Belieben neue Ringe bauen, in denen dann ein vorgegebenes Polynom f eine künstliche Nullstelle α besitzt. Die Kenntnis dieser künstlichen Nullstelle gibt aber keinerlei Information über den Zahlenwert richtiger Nullstellen von f (diese Frage könnte man sich etwa dann stellen, wenn $K = \mathbb{Q}$).

Invertierbarkeit in K'

Sei $[g] \in K'$ ein beliebiges Element. Um zu entscheiden, ob $[g]$ in K' Null, invertierbar oder ein Nullteiler ist, ist es hilfreich, den normierten größten gemeinsamen Teiler d von g und f zu betrachten. Es gibt dann nämlich drei Fälle:

- Fall $d = 1$:

  Dann ist $[g] \in K'$ invertierbar. Aus einer Bézoutdarstellung der Form $d = pg + qf$ können wir das Inverse sofort ablesen: Es ist $[p] \in K'$, denn

  $$1 = [d] = [p]\,[g] + [q]\,[f] = [p]\,[g].$$

- Fall $d = f$:

  Dann ist $[g] \in K'$ Null, da g ein Vielfaches von f ist.

- Fall $0 < \deg d < \deg f$:

  Dann ist $[g] \in K'$ ein Nullteiler, der selbst nicht Null ist. Denn da d gemeinsamer Teiler von f und g ist, gibt es Polynome u und v mit $f = ud$ und $g = vd$; daher gilt in K' die Rechnung

  $$[u]\,[g] = [uvd] = [v]\,[f] = [v] \cdot 0 = 0.$$

  Weder $[u]$ noch $[g]$ sind in K' Null, da u und g keine Vielfachen von f sind.

Der Ring K' als Oberkörper

Falls f irreduzibel ist, kann der dritte Fall des vorherigen Abschnitts nicht auftreten. Dann ist also jedes Element von K' entweder Null oder invertierbar, also ist K' in diesem Fall ein Körper.

Falls f reduzibel ist, etwa $f = gh$ mit $\deg g, \deg h \geq 1$, so ist K' kein Körper, da es Nullteiler gibt: Es gilt $[g]\,[h] = [f] = 0$, obwohl $[g] \neq 0$ und $[h] \neq 0$.

Wenn wir also das Problem

> *Konstruiere einen Oberkörper von K, in dem das Polynom f eine Nullstelle hat!*

lösen wollen, können wir *nicht* einfach $K' = K[X]/(f)$ betrachten, da dieser Ring vielleicht kein Körper ist. Falls wir aber f in irreduzible Faktoren zerlegen können, etwa $f = g_1 \cdots g_m$, so ist $K[X]/(g_1)$ ein Oberkörper von K mit der gewünschten Eigenschaft: In $K[X]/(g_1)$ ist das Element $[X]$ eine künstliche Nullstelle von g_1 und damit auch von f.