Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 5 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2+m) *Beispiele für gerichtete Limiten*

a) Sei A ein Ring. Zeige, dass $A[X]$ als A-Modul kanonisch isomorph zum gerichteten Limes des Systems $A[X]_{\leq 0} \hookrightarrow A[X]_{\leq 1} \hookrightarrow A[X]_{\leq 2} \cdots$ ist. Dabei ist $A[X]_{\leq n}$ der Modul der Polynome vom Grad $\leq n$.

b) Sei M ein A-Modul. Sei $f \in A$. Zeige, dass $M[f^{-1}]$ kanonisch isomorph zum gerichteten Limes des Systems $M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f} \cdots$ ist.

Aufgabe 2. (2+m+2+2) *Gesättigte multiplikativ abgeschlossene Mengen*

Eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge S eines Rings A heißt genau dann *gesättigt*, wenn aus $xy \in S$ schon $x \in S$ und $y \in S$ folgt.

a) Sei $f \in A$. Sei $\iota : A \to A[f^{-1}]$ der Lokalisierungsmorphismus. Zeige: Für $x \in A$ ist genau dann $\iota(x)$ invertierbar, wenn $f \in \sqrt{(x)}$.

b) Sei $S \subseteq A$ eine gesättigte multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und $\iota : A \to S^{-1}A$ die zugehörige Lokalisierung. Zeige: Für $x \in A$ ist genau dann $\iota(x)$ invertierbar, wenn x in S liegt. Folgere, dass $S^{-1}A$ genau dann ein lokaler Ring ist, wenn aus $x + y \in S$ schon $x \in S$ oder $y \in S$ folgt.

c) Sei $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen. Zeige, dass es eine kleinste gesättigte, multiplikativ abgeschlossene und S umfassende Teilmenge gibt (die *Sättigung* von S).

d) Seien S und T multiplikativ abgeschlossene Mengen mit $S \subseteq T$. Zeige, dass $S^{-1}A \to T^{-1}A, a/s \mapsto a/s$ genau dann bijektiv ist, wenn T in der Sättigung von S liegt.

Aufgabe 3. (2+m+2) *Lokale Eigenschaften*

a) Zeige: Sind alle Halme eines Rings reduziert, so ist auch der Ring selbst reduziert.

b) Zeige oder widerlege: Sind alle Halme Integritätsbereiche, so auch der Ring selbst.

c) Sei M ein A-Modul. Gelte $M_{\mathfrak{m}} = 0$ für all diejenigen maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von A, die über einem bestimmten Ideal $\mathfrak{a}$ liegen. Zeige: $M = \mathfrak{a}M$.

Aufgabe 4. (2+m) *Injektivität von linearen Abbildungen*

a) Sei A ein lokaler Ring. Sei $A^m \to A^n$ eine lineare Injektion. Zeige, dass $m \leq n$.

b) Folgere die Behauptung für beliebige Ringe A mit $1 \neq 0$.

Aufgabe 5. (m) *Topologischer Abschluss von Punkten*

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines Rings A. Zeige, dass in $\operatorname{Spec} A$ gilt: $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$.

Wofür steht das „B.“ in „Benoît B. Mandelbrot“?