

## Übungsblatt 15 zur Kommutativen Algebra

### Aufgabe 1. (m) *Eine explizite Beschreibung der adischen Vervollständigung*

Sei  $\mathfrak{a} = (x_1, \dots, x_n)$  ein Ideal in einem noetherschen Ring  $A$ . Zeige, dass die Vervollständigung  $\hat{A}_{\mathfrak{a}}$  isomorph zu  $A[[X_1, \dots, X_n]]/(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$  ist.

### Aufgabe 2. (m+m) *Intervalle von Primidealen in noetherschen Ringen*

- Seien  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$  Primideale in einem noetherschen Ring. Sei  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$  die Menge all derjenigen Primideale  $\mathfrak{r}$  mit  $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{r} \subsetneq \mathfrak{q}$ . Zeige, dass  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$  entweder leer oder unendlich ist.
- Sei  $A$  ein noetherscher Ring in dem alle Primideale in einer einzigen Kette  $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n$  mit  $n \geq 2$  auftreten. Zeige: Es gibt ein Element  $x \in A$  mit  $x + 0 \neq x$ .

### Aufgabe 3. (m) *Dimension des Polynomrings im noetherschen Fall*

- Sei  $\mathfrak{p}$  ein Primideal in einem Ring, das minimal mit der Eigenschaft ist, ein gegebenes zerlegbares Ideal  $\mathfrak{a}$  zu umfassen. Zeige, dass  $\mathfrak{p}$  zu  $\mathfrak{a}$  assoziiert ist.
- Sei  $\mathfrak{p}$  ein Primideal der Höhe  $r$  in einem noetherschen Ring. Zeige, dass Elemente  $x_1, \dots, x_r$  existieren, sodass  $\mathfrak{p}$  unter allen Primidealen, die diese Elemente enthalten, minimal ist.
- Zeige für alle Primideale  $\mathfrak{p}$  eines noetherschen Rings:  $\text{ht } \mathfrak{p}[X] = \text{ht } \mathfrak{p}$ .
- Sei  $A$  ein Ring in dem die Behauptung von c) gilt. Sei  $\mathfrak{q} \subseteq A[X]$  ein Primideal. Sei  $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q}$ . Zeige:  $\text{ht } \mathfrak{q} \leq \text{ht } \mathfrak{p} + 1$ .
- Folgere: Für noethersche Ringe  $A$  gilt  $\dim A[X] = 1 + \dim A$ .

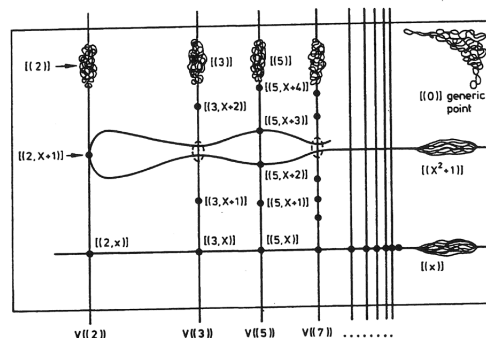
### Aufgabe 4. (m) *Gar nicht mehr erste Schritte mit der Dimension von Ringen*

Berechne die Dimension des Rings  $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X - Z, X^2 + Y^2 + Z^2)$ .

### Aufgabe 5. (0) *Der mystische Körper mit einem Element*

Der  $n$ -dimensionale projektive Raum  $\mathbb{P}_k^n$  über einem Körper  $k$  ist der Raum der Ursprungsgeraden in  $k^{n+1}$ .

- Wie viele Punkte enthält  $\mathbb{P}_k^n$ , wenn  $k$  ein Körper mit  $q$  Elementen ist? Gib die Anzahl als Polynom in  $q$  an.
- Im klassischen Zugang zur Algebra gibt es nichts, was die Bezeichnung *Körper mit einem Element* verdient hätte. Was passiert, wenn man trotzdem in der Formel aus a)  $q := 1$  setzt? Was sollte also ein  $n$ -dimensionaler projektiver Raum über dem Körper mit einem Element sein?



Mumfords Schatzkarte: die Primideale von  $\mathbb{Z}[X]$