Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 1 zur Kommutativen Algebra

Abgabe bis zum Montag, den 19. Oktober 2015

Aufgabe 1. (2+2+2+2) *Invertierbarkeit und Nilpotenz in Polynomringen*

Sei A ein Ring. Sei $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m \in A[X]$ ein Polynom über A. Zeige:

a) Genau dann ist f eine Einheit in $A[X]$, wenn a_0 in A invertierbar und die $a_1, \ldots, a_m$ nilpotent sind.

b) Genau dann ist f nilpotent, wenn $a_0, \ldots, a_m$ nilpotent sind.

c) Jacobsches Radikal und Nilradikal von $A[X]$ stimmen miteinander überein.

d) Ist A *reduziert*, d. h. ist nur die Null in A nilpotent, und ist $g = b_0 + \cdots + b_n X^n \in A[X]$ mit $fg = 0$, so gilt für alle passenden Indizes i und j: $a_i b_j = 0$.

Aufgabe 2. (2+1) *Lokale Ringe*

a) Zeige, dass ein Ring A genau dann ein lokaler Ring ist, wenn $1 \neq 0$ in A und, wann immer eine Summe aus zwei Elementen invertierbar ist, schon mindestens ein Summand invertierbar ist.

b) Was sind die einzigen idempotenten Elemente in einem lokalen Ring?

Aufgabe 3. (4) *Ringe mit nur einem Primideal*

Sei A ein Ring mit Nilradikal $\mathfrak{n}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. In A gibt es genau ein Primideal.
2. Jedes Element von A ist *entweder* invertierbar *oder* nilpotent.
3. Der Faktorring $A/\mathfrak{n}$ ist ein Körper.

Aufgabe 4. (1+2+2+2) *Boolsche Ringe*

Sei A ein *Boolscher Ring*, d. h. ein kommutativer Ring mit $x^2 = x$ für alle $x \in A$. Zeige:

a) Für alle $x \in A$ gilt $2x = 0$.

b) Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A ist maximal.

c) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A ist $A/\mathfrak{p}$ ein Körper mit zwei Elementen.

d) Jedes endlich erzeugte Ideal von A ist ein Hauptideal.