Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 12 zur Algebra I

Abgabe bis 8. Juli 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Allgemeines zu Gruppen*

a) Gibt es in der Permutationsgruppe S_5 eine Untergruppe mit 70 Elementen?

b) Sei G eine Gruppe. Sei H eine Untergruppe von G und K eine Untergruppe von H. Wieso ist K dann auch eine Untergruppe von G?

c) Sei G eine Gruppe und $\sigma \in G$. Zeige, dass $\sigma^i \circ \sigma^j = \sigma^{i+j}$ für beliebige *ganze* Zahlen i, j.

Aufgabe 2. *Elementordnungen*

a) Sei G eine Gruppe und $\sigma \in G$ ein Element der Ordnung n. Zeige, dass die Ordnung einer beliebigen Potenz σ^m durch $n \,/\, \mathrm{ggT}(n, m)$ gegeben ist.

b) Bestimme die Ordnungen aller Elemente der zyklischen Gruppe C_n.

c) Bestimme alle Erzeuger der zyklischen Gruppe C_n.

Aufgabe 3. *Kreisteilungspolynome*

a) Berechne die Kreisteilungspolynome $\Phi_3(X)$, $\Phi_6(X)$ und $\Phi_9(X)$.

b) Zerlege das Polynom $X^3 + X^2 + X + 1$ über den rationalen Zahlen in irreduzible Faktoren.

Aufgabe 4. *Etwas Zahlentheorie*

Sei p eine Primzahl.

a) Gib eine Primfaktorzerlegung von $X^{p-1} - 1$ modulo p an.

b) Zeige, dass der Binomialkoeffizient $\binom{p^2}{p}$ durch p, aber nicht durch p^2 teilbar ist.

Aufgabe 5. *Primitive Wurzeln*

a) Gib alle primitiven Wurzeln modulo 5 an.

b) Sei X die Menge der n-ten komplexen Einheitswurzeln. Zeige, dass die Abbildung

$$\sigma_d : X \longrightarrow X,\ \zeta \longmapsto \zeta^d$$

genau dann eine Bijektion ist, wenn die feste natürliche Zahl d teilerfremd zu n ist.