

Übungsblatt 14 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2) *Ein Gegenbeispiel zu einer Verstärkung des Krullschen Satzes*

Finde einen noetherschen Ring zusammen mit einem Ideal $\mathfrak{a} \neq (1)$ mit $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n \neq (0)$.

Aufgabe 2. (m+2+2) *Fasern von Ringhomomorphismen*

Sei \mathfrak{p} ein Primideal eines Rings A . Sei $k(\mathfrak{p}) := A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ der Restklassenkörper bei \mathfrak{p} . Sei B eine endliche A -Algebra.

- Zeige, dass die Primideale \mathfrak{q} von B mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ in kanonischer Eins-zu-Eins-Korrespondenz zu den Primidealen von $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \cong B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ stehen.
- Zeige, dass B nur endlich viele Primideale besitzt, falls A ein Körper ist.
- Zeige, dass es nur endlich viele Primideale \mathfrak{q} wie in a) gibt.

Aufgabe 3. (2+2+m) *Dimension des Polynomrings im nicht-noetherschen Fall*

Sei A ein Ring.

- Zeige: $\dim A[X] \geq 1 + \dim A$.
- Sei \mathfrak{p} ein Primideal von A . Die Primideale \mathfrak{q} von $A[X]$ mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ stehen in Eins-zu-Eins-Korrespondenz zu den Primidealen eines gewissen Rings. Welchem? Welche Dimension hat dieser?
- Zeige: $\dim A[X] \leq 1 + 2 \dim A$.

Aufgabe 4. (3) *Beispiele für Poincarésche Reihe und Hilbertsches Polynom*

Berechne die Poincarésche Reihe und das Hilbertsche Polynom des gewichteten $K[X, Y]$ -Moduls $K[X, Y]/(X^2, XY)$ bezüglich $\lambda = \dim_K$.

Aufgabe 5. (1) *Dualität zwischen symmetrischer und äußerer Algebra*

Sei K ein Körper. Sei $S = K[X_1, \dots, X_n]$ und sei E die zugehörige *äußere Algebra* der *antikommutativen Polynome*, wo $X_i X_i = 0$ und $X_i X_j = -X_j X_i$ gilt. Sei $\lambda = \dim_K$. Zeige: $\lambda(S, t) \cdot \lambda(E, -t) = 1$.

Aufgabe 6. (0) *Rationale Binomialkoeffizienten*

Wir setzen $\binom{x}{k} := x(x-1)\cdots(x-k+1)/k! \in \mathbb{Q}$ für rationale Zahlen x und natürliche Zahlen k . Solche Binomialkoeffizienten kommen in Taylor-Entwicklungen vieler wichtiger Funktionen vor.

- Zeige: Genau dann kommt im gekürzten Nenner einer rationalen Zahl a/b nicht der Primfaktor p vor, wenn es eine p -adische Ganzzahl u mit $bu = a$ gibt.
- Verwende die Dichtigkeit von \mathbb{Z} in \mathbb{Z}_p und die Stetigkeit von Polynomen über \mathbb{Z}_p , um zu folgern: Im gekürzten Nenner eines rationalen Binomialkoeffizienten $\binom{x}{k}$ können nur solche Primfaktoren vorkommen, die auch im gekürzten Nenner von x vorkommen.

