

Übungsblatt 2 zur Kommutativen Algebra

Abgabe bis zum Montag, den 26. Oktober 2015

Aufgabe 1. (2+2+1) *Invertierbarkeit und Nilpotenz in Ringen formaler Potenzreihen*

Sei A ein Ring. Sei $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots \in A[[X]]$ eine formale Potenzreihe. Zeige:

- Genau dann ist f eine Einheit in $A[[X]]$, wenn a_0 in A invertierbar ist.
- Ist f nilpotent, so sind alle Koeffizienten a_0, a_1, \dots nilpotent.
- Gilt in b) die Umkehrung? (Es genügt ein plausibles Argument.)

Aufgabe 2. (2+2) *Nilradikal und Jacobsonisches Radikal*

Sei A ein Ring.

- Jacobsonisches Radikal und Nilradikal von $A[X]$ stimmen miteinander überein.
- Genau dann liegt eine Potenzreihe f im Jacobsonischen Radikal von $A[[X]]$, wenn $f(0)$ im Jacobsonischen Radikal von A liegt.

Aufgabe 3. (3+1) *Charakterisierung von Wurzelidealen*

Sei \mathfrak{a} ein Ideal eines Rings. Zeige, dass \mathfrak{a} genau dann mit seinem Wurzelideal übereinstimmt, wenn \mathfrak{a} ein Schnitt von Primidealen ist.

Aufgabe 4. (3+1) *Inhalt von Polynomen*

Sei A ein Ring. Der *Wurzelinhalt* eines Polynoms $f = a_0 + \cdots + a_mX^m \in A[X]$ ist das Ideal $J(f) := \sqrt{(a_0, \dots, a_m)}$.

- Zeige für alle Polynome $f, g \in A[X]$: $J(fg) = J(f) \cap J(g)$.
- Ein Polynom heißt genau dann *primitiv*, wenn sein Wurzelinhalt das Einsideal ist. Folgere: Genau dann ist ein Produkt fg primitiv, wenn f und g es sind.

Aufgabe 5. (2+2+1) *Ideale bestehend aus Nullteilern*

- Sei I ein Ideal eines Rings, das nur Nullteiler enthält. Zeige, dass es in der Partialordnung all derjenigen Ideale, die I umfassen und nur Nullteiler enthalten, ein maximales Element gibt.
- Zeige, dass ein maximales Element wie in a) stets ein Primideal ist.
- Folgere: Die Menge der Nullteiler eines Rings ist eine Vereinigung von Primidealen.

Was bildet eine abelsche Gruppe unter Addition, einen Monoid unter Multiplikation, erfüllt ein Distributivgesetz und ist verflucht?