

Hinweise zu den Übungsaufgaben in Algebra II

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Teilaufgabe a) hat etwas mit Standgruppen zu tun. Für Teilaufgabe b) ist interessant, was Fixpunkte mit Bahnen zu tun haben. (Was sind Fixpunkte denn überhaupt, und was sind Bahnen?) Welche Gleichung der Vorlesung ist also vermutlich anwendbar?

Aufgabe 4. Ein beliebiges Element der disjunkt-gemachten Vereinigung $Y_1 \amalg \cdots \amalg Y_n$ ist ein Paar (i, y) , wobei $i \in \{1, \dots, n\}$ ein Index und y ein Element der entsprechenden Menge Y_i ist. Ein *Isomorphismus von G -Wirkungen* ist per Definition eine bijektive G -äquivalente Abbildung. Für Teilaufgabe b) ist es hilfreich, X in Bahnen zu zerlegen.

Aufgabe 5. Diese Aufgabe benötigt aber nur die Definition von Normalteilern und das Verständnis der mengentheoretischen Schreibweise: Die Menge N besteht aus all den Elementen von G , welche in allen N_i liegen. Über die Größe von I kann nichts vorausgesetzt werden. Wer mag, kann aber zuerst den Fall des Schnitts zweier Normalteiler behandeln; der allgemeine Fall verläuft ähnlich.

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Ein *kleinster Normalteiler, welcher H umfasst*, ist per Definition ein Normalteiler N in G , welcher H umfasst und welcher folgende Eigenschaft hat: Für jeden beliebigen Normalteiler N' in G , welcher H umfasst, gilt $N \subseteq N'$.

Aufgabe 2. In beiden Teilaufgaben geht es nicht um Umkehrfunktionen, sondern um Urbildmengen.

Aufgabe 3. Die Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ ist die Menge der invertierbaren $(n \times n)$ -Matrizen, mit der Matrixmultiplikation als Gruppenverknüpfung. Die Untergruppe $O_n(\mathbb{R})$ ist die Teilmenge der orthogonalen Matrizen. Eine Matrix A heißt genau dann *orthogonal*, wenn das Produkt $A^t A$ die Einheitsmatrix ist. Orthogonale Matrizen haben als Determinante stets ± 1 . Die Untergruppe $SO_n(\mathbb{R})$ ist die Teilmenge solcher orthogonalen Matrizen, deren Determinante $+1$ ist. Für die Determinante gilt die Rechenregel $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$. Bei Teilaufgabe b) muss man sich zunächst überlegen, ob man $SO_n(\mathbb{R})$ auf C_2 oder umgekehrt wirken lassen möchte (nur eine Variante funktioniert), und wie diese Wirkung explizit aussehen soll. Wie bei Teilaufgabe c) die Gruppe $SO_3(\mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^3 wirkt, ist im Skript angegeben (Beispiel 6.76).

Im Staatsexamen ist das halbdirekte Produkt immer wieder wichtig, um die öfter vorkommenden Aufgaben der Art *Geben Sie eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2012 an.* zu lösen.

Für Teilnehmer des Pizzaseminars: Findet ihr eine kategorielle Beschreibung des halbdirekten Produkts? (So, wie man das direkte Produkt auch als terminales Objekt in der Kategorie der Möchtegern-Produkte beschreiben kann.)

Die Diagonalmatrix, die oben links eine -1 stehen und deren restliche Diagonaleinträge mit $+1$ besetzt sind, spielt bei Teilaufgabe b) eine Rolle. Wer mich anschreibt, bekommt weitere Tipps.

Aufgabe 4. Eine endliche Gruppe heißt genau dann p -Gruppe, wenn die Anzahl ihrer Elemente eine p -Potenz ist.

Eine nichttriviale p -Gruppe besitzt stets ein Element der Ordnung p in ihrem Zentrum. Das Kriterium aus a) ist für b) nützlich.

Aufgabe 5. Ein *größter endlicher auflösbarer Normalteiler* ist per Definition ein Normalteiler N in G , welcher selbst endlich und auflösbar ist und folgende Eigenschaft hat: Für jeden beliebigen endlichen auflösbaren Normalteiler N' in G gilt $N' \subseteq N$.

Für a) ist b) nützlich.

Übungsblatt 4

Auf dem gesamten Übungsblatt bezeichnet „ p “ stets eine Primzahl.

Aufgabe 1. Konventionsgemäß ist die Zahl 1 eine p -Potenz. (Wieso ist das sinnvoll und für Teilaufgabe b) wichtig?)

Aufgabe 2. Eine p -Untergruppe von G ist per Definition eine Untergruppe von G , deren Ordnung eine p -Potenz ist. Eine Untergruppe H heißt per Definition genau dann *maximal unter allen p -Untergruppen von G* , wenn sie selbst eine p -Untergruppe von G ist und außerdem folgende Eigenschaft hat: Ist $K \subseteq G$ eine beliebige p -Untergruppe mit $H \subseteq K$, so gilt schon $H = K$.

Eine *maximale* p -Untergruppe ist also etwas anderes als eine *größte* p -Untergruppe!

Ein Beispiel zu einem ganz anderem Thema soll den Unterschied verdeutlichen: Unter den Mengen $\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{d\}, \{d, e\}, \{d, f\}$ gibt es keine größte, aber drei maximale: Nämlich $\{a, b, c\}$, $\{d, e\}$ und $\{d, f\}$. Ferner gibt es eine kleinste (nämlich \emptyset). Diese ist auch minimal. Ergänzt man noch die Menge $\{a, b, c, d, e, f\}$, so ändert sich die Situation: Diese neue Menge ist jetzt die einzige Menge, die maximal ist. Außerdem ist sie die größte. Für eine der Richtungen der Behauptung der Aufgabe hilft der erste Sylowsche Satz.

Aufgabe 3. Captain Obvious bittet mich, folgenden Tipp zu verbreiten: Die Sylowschen Sätze könnten helfen.

In Kürze werde ich hier ein vollständiges Beispiel für eine andere Gruppenordnung online stellen. Die Aufgaben 3 und 4 sind typische Staatsexamensaufgaben und nicht ganz leicht, wenn man das Standardvorgehen nicht kennt. Auf Anfrage gebe ich gerne weitere Tipps.

Fallunterscheidung nach der Anzahl gewisser Sylowscher Untergruppen treffen. Übersicht über mögliche Elementordnungen anlegen.

Aufgabe 4. Die zweite Voraussetzung an die beiden Primzahlen ist, dass p kein Teiler von $q - 1$ ist.

