

## Übungsblatt 10 zur Algebra I

Abgabe bis 24. Juni 2013, 17:00 Uhr

### Aufgabe 1. Weitere Anwendungen der Gradformel

- a) Sei  $z$  eine algebraische Zahl und seien  $x, y \in \mathbb{Q}(z)$ . Zeige, dass

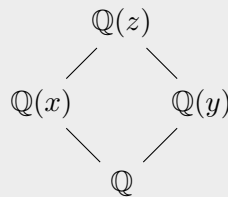
$$[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}(x)] \cdot [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}(y)] \cdot [\mathbb{Q}(y) : \mathbb{Q}],$$

und gib ein Diagramm zur Veranschaulichung an.

- b) Sei  $a$  eine algebraische Zahl und  $y \in \mathbb{Q}(a)$ . Sei  $f$  ein normiertes Polynom mit Koeffizienten aus  $\mathbb{Q}(y)$ , das über  $\mathbb{Q}(y)$  auch irreduzibel ist. Sei der Grad von  $f$  mindestens 2 und teilerfremd zu  $\deg_{\mathbb{Q}(y)} a$ . Zeige, dass keine Zahl aus  $\mathbb{Q}(a)$  Nullstelle von  $f$  sein kann.
- c) Beweise oder widerlege: Sei  $z$  ein primitives Element zu algebraischen Zahlen  $x, y$ . Dann ist  $\deg_{\mathbb{Q}} z$  ein Teiler von  $\deg_{\mathbb{Q}} x \cdot \deg_{\mathbb{Q}} y$ .

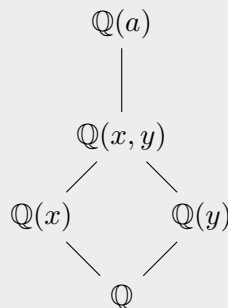
### Lösung.

- a) Aus der Voraussetzung folgt  $\mathbb{Q}(x) \subseteq \mathbb{Q}(z)$  und  $\mathbb{Q}(y) \subseteq \mathbb{Q}(z)$ . Daher kann man das Diagramm



zeichnen. Die Behauptung liefert nun einfach die Gradformel, angewendet auf den linken bzw. rechten Zweig.

- b) Sei  $x \in \mathbb{Q}(a)$  mit  $f(x) = 0$ . Dann ist  $f$  das Minimalpolynom von  $x$  über  $\mathbb{Q}(y)$ , also gilt  $\deg_{\mathbb{Q}(y)} x = [\mathbb{Q}(y, x) : \mathbb{Q}(y)] = \deg f$ ; die Situation können wir in dem Diagramm



veranschaulichen. Mit der Gradformel folgt die Beziehung

$$\deg_{\mathbb{Q}(y)} a = [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(y)] = [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(x, y)] \cdot [\mathbb{Q}(x, y) : \mathbb{Q}(y)] = [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(x, y)] \cdot \deg f,$$

die wegen  $\deg f \geq 2$  ein Widerspruch zur Teilerfremdheitsvoraussetzung ist (sonst wäre  $\deg f$  ein echter Teiler von  $\deg_{\mathbb{Q}(y)} a$ ).

*Bemerkung:* Allgemein gilt für den Grad einer algebraischen Zahl  $w$  über einer weiteren algebraischen Zahl  $u$  die Formel

$$\deg_{\mathbb{Q}(u)} w = [\mathbb{Q}(u, w) : \mathbb{Q}(u)] = \text{Grad des Minimalpolynoms von } w \text{ über } \mathbb{Q}(u).$$

Nur falls  $u \in \mathbb{Q}(w)$ , gilt  $\mathbb{Q}(u, w) = \mathbb{Q}(w)$ , sodass sich dann die Formel noch ein wenig vereinfacht.

- c) Das stimmt im Allgemeinen nicht: Setze  $x = \sqrt[3]{2}$  und  $y = \omega \cdot \sqrt[3]{2}$ , wobei  $\omega = \exp(2\pi i/3)$  ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \deg_{\mathbb{Q}} z &= [\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(x, y) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(x, \omega) : \mathbb{Q}] \\ &= [\mathbb{Q}(x, \omega) : \mathbb{Q}(x)] \cdot [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 3 = 6, \\ \deg_{\mathbb{Q}} x \cdot \deg_{\mathbb{Q}} y &= 3 \cdot 3 = 9, \end{aligned}$$

aber 6 ist kein Teiler von 9. Dabei war der Wert des hinteren Faktors in der zweiten Zeile der Rechnung klar (Minimalpolynom ist  $X^3 - 2$  nach Eisenstein), und dass der vordere Faktor gleich 2 ist, kann man wie folgt begründen: Das Polynom  $X^2 + X + 1$  besitzt bekanntermaßen  $\omega$  als Nullstelle und ist über  $\mathbb{Q}(x) \subset \mathbb{R}$  irreduzibel, da es vom Grad 2 ist und seine Nullstellen  $\omega$  und  $\omega^2$  echt komplex sind.

*Bemerkung:* Obige Lösung benötigt gar keine explizite Darstellung des primitiven Elements  $z$ .

*Bemerkung:* Eine ähnliche und richtige Behauptung ist  $\deg_{\mathbb{Q}} z \leq \deg_{\mathbb{Q}} x \cdot \deg_{\mathbb{Q}} y$ , denn

$$\begin{aligned} \deg_{\mathbb{Q}} z &= [\mathbb{Q}(x, y) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(x, y) : \mathbb{Q}(x)] \cdot [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] \\ &\leq [\mathbb{Q}(y) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = \deg_{\mathbb{Q}} y \cdot \deg_{\mathbb{Q}} x. \end{aligned}$$

(Wieso gilt die Abschätzung?)

## Aufgabe 2. Galoissche Konjugierte

- Finde zwei algebraische Zahlen, die nicht zueinander galoissch konjugiert sind.
- Wie viele galoissch Konjugierte hat die Zahl  $\sqrt[4]{3}$ ?
- Seien  $p$  und  $q$  zwei verschiedene Primzahlen. Finde alle galoissch Konjugierten von  $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ .
- Seien  $x, y, z$  algebraische Zahlen, sodass  $x$  zu  $y$  und  $y$  zu  $z$  galoissch konjugiert ist. Zeige, dass dann auch  $x$  galoissch konjugiert zu  $z$  ist.
- Sei  $t$  eine algebraische Zahl. Zeige, dass die Summe von  $t$  mit all seinen galoisschen Konjugierten eine rationale Zahl ist. Wie steht es mit dem Produkt?

## Lösung.

- Es gibt [abzählbar] unendlich viele Beispiele. Eines ist  $(x, y) = (0, 1)$  mit den Minimalpolynomen  $X$  bzw.  $X - 1$ .
- Die Zahl  $\sqrt[4]{3}$  hat insgesamt genau so viele galoissch Konjugierte, wie ihr Grad angibt. Dieser ist 4, denn das Minimalpolynom ist  $X^4 - 3$  – die Irreduzibilität ist wegen des Eisenstein-Kriteriums sofort klar. Explizit sind die vier galoissch Konjugierten

$$\sqrt[4]{3}, \quad i\sqrt[4]{3}, \quad -\sqrt[4]{3}, \quad -i\sqrt[4]{3}.$$

- c) Wir suchen zunächst ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, dass  $z := \sqrt{p} + \sqrt{q}$  als Nullstelle besitzt:

$$\begin{aligned}
 & z = \sqrt{p} + \sqrt{q} \\
 \implies & z^2 = p + 2\sqrt{p}\sqrt{q} + q^2 \\
 \iff & z^2 - (p + q) = 2\sqrt{p}\sqrt{q} \\
 \implies & (z^2 - (p + q))^2 = 4pq \\
 \iff & 0 = z^4 - 2(p + q)z^2 + (p - q)^2
 \end{aligned}$$

Kandidat für's Minimalpolynom von  $z$  ist also  $X^4 - 2(p + q)X^2 + (p - q)^2$ . Die vier Nullstellen dieses Polynoms sind

$$x_1 = \sqrt{p} + \sqrt{q}, \quad x_2 = \sqrt{p} - \sqrt{q}, \quad x_3 = -\sqrt{p} + \sqrt{q}, \quad x_4 = -\sqrt{p} - \sqrt{q};$$

wenn wir seine Irreduzibilität nachgewiesen haben, erkennen wir genau diese Zahlen als die galoissch Konjugierten von  $z$ .

*Irreduzibilitätsnachweis mit dem Verfahren der Vorlesung:*

- Keine der Nullstellen ist ganzzahlig (wieso?), also kann kein Linearfaktor abspalten.
- Für jede zweielementige Auswahl der Nullstellen sind stets nicht beide elementarsymmetrischen Funktionen in den Nullstellen ganzzahlig:

$$\begin{aligned}
 e_1(x_1, x_2) &= 2\sqrt{p} \notin \mathbb{Z} \\
 e_1(x_1, x_3) &= 2\sqrt{q} \notin \mathbb{Z} \\
 e_1(x_1, x_4) &= 0 \in \mathbb{Z}, \quad \text{aber } e_2(x_1, x_4) = -(p + q + 2\sqrt{p}\sqrt{q}) \notin \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

- Kubische Faktoren können nicht abspalten, da die komplementären Faktoren Linearfaktoren wären.

*Irreduzibilitätsnachweis mit einem Gradformelargument:* Wir haben die Inklusionen  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{p}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ . Dabei gilt  $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}) : \mathbb{Q}] = 2$  (klar) und  $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}(\sqrt{p})] = \deg_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})} \sqrt{q} = 2$  (zeigt man wie bei Aufgabe 5 von Blatt 9). Also folgt mit der Gradformel  $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4$ . Da  $z$  ein primitives Element für diese Erweiterung ist (wieso?), ist also der Grad von  $z$  über  $\mathbb{Q}$  gleich 4. Somit muss obiges Polynom irreduzibel sein – es kann kein Polynom niedrigeren Grads geben, das ebenfalls normiert ist, rationale Koeffizienten hat und  $z$  als Nullstelle besitzt.

*Bemerkung:* Reduktion modulo  $p$  (oder  $q$ ) funktioniert nicht: Modulo  $p$  erhält man das reduzible Polynom  $(X^2 - q)^2$ . Auch kann nicht aus der Irreduzibilität von  $g(X) = X^2 - 2(p + q)X + (p - q)^2$  die des eigentlich zu untersuchenden Polynoms  $g(X^2)$  gefolgert werden. Ein einfaches Gegenbeispiel, das die Unmöglichkeit eines solchen Schlusses zeigt, ist das Polynom  $h(X) = X - 1$ : Dieses ist irreduzibel, aber  $h(X^2) = X^2 - 1 = (X + 1) \cdot (X - 1)$  ist reduzibel.

- d) *Variante 1 (mit Vieta):* Sei  $m(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  das Minimalpolynom von  $t$  und  $t_1, \dots, t_n$  seine Nullstellen (also alle galoissch Konjugierten von  $t$ ). Nach dem Vietaschen Satz gilt dann

$$\begin{aligned}
 (-1)^n a_0 &= e_n(t_1, \dots, t_n) = t_1 \cdots t_n, \\
 a_{n-1} &= e_1(t_1, \dots, t_n) = t_1 + \dots + t_n,
 \end{aligned}$$

also sind Summe und Produkt der galoissch Konjugierten bis auf Vorzeichen durch die Koeffizienten  $a_0$  bzw.  $a_{n-1}$  des Minimalpolynoms gegeben und daher rational.

*Variante 2 (mit Wirkung der galoisschen Gruppe):* Seien  $t_1, \dots, t_n$  alle galoissch Konjugierten von  $t$ , also die Nullstellen des Minimalpolynoms von  $t$ . Dann wollen wir zeigen, dass die Summe der  $t_i$  invariant unter der Wirkung der galoisschen Gruppe ist und daher rational sein muss: Sei also  $\sigma \in \text{Gal}(t_1, \dots, t_n)$  beliebig. Dann gilt in der Tat

$$\sigma \cdot (t_1 + \dots + t_n) = t_{\sigma(1)} + \dots + t_{\sigma(n)} = t_1 + \dots + t_n.$$

Analog kann man mit dem Produkt verfahren.

- e) Seien  $m_x$ ,  $m_y$  und  $m_z$  die Minimalpolynome von  $x$ ,  $y$  bzw.  $z$ . Dann gilt nach Voraussetzung  $m_x = m_y$  und  $m_y = m_z$ , also auch  $m_x = m_z$ . Damit sind  $x$  und  $z$  zueinander galoissch konjugiert.

### Aufgabe 3. Eine konkrete Galoisgruppe

Bestimme die Galoisgruppe der vier Nullstellen des Polynoms  $X^4 + 1$ .

#### Lösung.

1. Die vier Nullstellen sind

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \xi^3, \quad x_3 = \xi^5, \quad x_4 = \xi^7,$$

wobei  $\xi = \exp(2\pi i/8)$  eine primitive achte Nullstelle ist.

2. Es gilt

$$\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathbb{Q}(\xi, \xi^3, \xi^5, \xi^7) = \mathbb{Q}(\xi),$$

also ist  $t := \xi$  ein primitives Element.

3. Für die vier Nullstellen gilt jeweils  $x_i = h_i(t)$ , wobei

$$\begin{aligned} h_1(X) &= X, \\ h_2(X) &= X^3, \\ h_3(X) &= X^5, \\ h_4(X) &= X^7. \end{aligned}$$

4. Das Minimalpolynom von  $t$  ist  $f(X) = X^4 + 1$ : Die Irreduzibilität bestätigt das Eisenstein-Kriterium angewendet auf

$$f(X+1) = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 2$$

mit  $p = 2$ . (Alternative Irreduzibilitätsbegründung: Das Polynom  $f(X)$  ist gerade das achte Kreisteilungspolynom.)

5. Die vier galoissch Konjugierten von  $t$  sind daher gerade die obigen vier Nullstellen:

$$t_1 = \xi, \quad t_2 = \xi^3, \quad t_3 = \xi^5, \quad t_4 = \xi^7.$$

6. Damit können wir die Elemente der Galoisgruppe auflisten:

$t_i$	$h_1(t_i)$	$h_2(t_i)$	$h_3(t_i)$	$h_4(t_i)$	$\sigma_i$
$t_1$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	id
$t_2$	$x_2$	$x_1$	$x_4$	$x_3$	$(1, 2) \circ (3, 4)$
$t_3$	$x_3$	$x_4$	$x_1$	$x_2$	$(1, 3) \circ (2, 4)$
$t_4$	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$(1, 4) \circ (2, 3)$

**Aufgabe 4.** *Polynome sind blind für galoissch Konjugierte*

- Zeige, dass zwei algebraische Zahlen  $t$  und  $t'$  genau dann zueinander konjugiert sind, wenn jedes Polynom mit rationalen Koeffizienten, welches  $t$  als Nullstelle hat, auch  $t'$  als Nullstelle hat.
- Seien  $t$  und  $t'$  zueinander konjugierte algebraische Zahlen und  $f$  ein Polynom mit rationalen Koeffizienten. Zeige, dass dann auch  $x := f(t)$  und  $x' := f(t')$  zueinander konjugiert sind.

**Lösung.**

- a) „ $\Leftarrow$ “: Sei  $m_t$  das Minimalpolynom von  $t$ . Dieses hat sicherlich  $t$  als Nullstelle. Nach Voraussetzung ist daher auch  $t'$  eine Nullstelle. Also haben  $t$  und  $t'$  beide  $m_t$  als Minimalpolynom und sind daher galoissch Konjugierte.

„ $\Rightarrow$ “ (schon im Skript als Proposition 4.2): Sei  $m_t$  das gemeinsame Minimalpolynom von  $t$  und  $t'$  und sei  $f \in \mathbb{Q}[X]$  ein Polynom, das  $t$  als Nullstelle hat. Dann haben  $f$  und  $m_t$  also die gemeinsame Nullstelle  $t$ . Da  $m_t$  irreduzibel ist, folgt mit dem abelschen Irreduzibilitätssatz (Satz 3.10), dass  $f$  ein Vielfaches von  $m_t$  ist. Somit ist jede Nullstelle von  $m_t$ , insbesondere  $t'$ , auch Nullstelle von  $f$ .

- b) Es ist klar, dass  $x$  und  $x'$  wieder algebraische Zahlen sind. Sei  $m_x$  das Minimalpolynom von  $x = f(t)$ . Dann gilt

$$m_x(x) = m_x(f(t)) = (m_x \circ f)(t) = 0,$$

das Polynom  $m_{f(t)} \circ f$  besitzt also  $t$  als Nullstelle. Nach Teilaufgabe a) besitzt dieses Polynom dann auch  $t'$  als Nullstelle, also gilt

$$m_x(x') = m_x(f(t')) = (m_x \circ f)(t') = 0.$$

Somit ist  $x'$  ebenfalls Nullstelle des Minimalpolynoms von  $x$  und somit zu  $x$  galoissch konjugiert.

### Aufgabe 5. Gegenbeispiele

Zeige an jeweils einem Beispiel, dass

- a) Hilfssatz 4.3 auf Seite 118                      b) Proposition 4.4 auf Seite 119

falsch werden, wenn man von den dort vorkommenden Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  nicht voraussetzt, dass sie die gesamten Lösungen (mit Vielfachheiten) einer Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten sind, sondern stattdessen beliebige algebraische Zahlen erlaubt.

**Lösung.**

- a) Hilfssatz 4.3 lautet:

Seien  $x_1, \dots, x_n$  die Lösungen (mit Vielfachheiten) einer Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten. Ist dann  $V(X_1, \dots, X_n)$  ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, so sind die galoissch Konjugierten von  $t = V(x_1, \dots, x_n)$  alle von der Form  $t' = V(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ , wobei  $\sigma$  eine  $n$ -stellige Permutation ist.

Es gibt zahlreiche Gegenbeispiele, wenn man die Voraussetzung, dass die  $x_i$  *alle* Lösungen einer Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten sind, fallen lässt. Sei etwa  $n = 1$ ,  $x_1 = i$  und  $V(X_1) = X_1$ . Dann stimmt es nicht, dass alle galoissch Konjugierten von  $t = V(x_1) = i$

von der (wegen  $n = 1$  einzig möglichen) Form  $t' = V(x_1)$  sind. Denn  $-i$  ist ja auch noch ein galoissch Konjugiertes von  $t$ .

Ein komplizierteres Gegenbeispiel ist  $n = 2$ ,  $x_1 = 17$ ,  $x_2 = i$ ,  $V(X_1, X_2) = X_2$ .

b) Proposition 4.4 lautet:

Seien  $x_1, \dots, x_n$  die Lösungen (mit Vielfachheiten) einer Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten. Ist dann  $t$  ein primitives Element zu  $x_1, \dots, x_n$ , so ist auch jedes galoissch Konjugierte  $t'$  von  $t$  ein primitives Element von  $x_1, \dots, x_n$ .

Auch hier gibt es zahlreiche Gegenbeispiele, wenn man die Voraussetzung fallen lässt. Sei etwa  $n = 1$ ,  $x_1 = \omega \sqrt[3]{2}$  und  $t = x_1$ , wobei  $\omega = \exp(2\pi i/3)$  eine primitive dritte Einheitswurzel ist. Dann stimmt es nicht, dass das galoissch Konjugierte  $t' = \sqrt[3]{2}$  ebenfalls ein primitives Element von  $\mathbb{Q}(x_1)$  ist: Denn  $\mathbb{Q}(t') \subseteq \mathbb{R}$ , aber  $\mathbb{Q}(x_1) \not\subseteq \mathbb{R}$ .