Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 8 zur Algebra II

Abgabe bis 10. Dezember 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (2+2) *Lokale Gleichheit und lokale Invertierbarkeit*

Sei $s_1, \ldots, s_n$ eine Zerlegung der Eins eines kommutativen Rings R.

a) Zeige, dass Elemente $f, g \in R$ genau dann gleich sind, wenn sie *lokal gleich* sind, das heißt, wenn $f = g$ in $R[s_i^{-1}]$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

b) Zeige, dass ein Element $f \in R$ genau dann invertierbar ist, wenn es *lokal invertierbar* ist, das heißt, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ das Bild von f in $R[s_i^{-1}]$ invertierbar ist.

Aufgabe 2. (2+2) *Spiel und Spaß mit dem gerichteten Limes*

a) Sei $(R_i)_{i \in I}$ ein gerichtetes System von Ringen mit Limes $R = \varinjlim_{i \in I} R_i$. Zeige, dass ein Element $x \in R_i$ genau dann in R invertierbar ist, wenn ein $j \succeq i$ existiert, sodass x in R_j invertierbar ist.

b) Zeige, dass jeder Ring gerichteter Limes endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Algebren ist.

Aufgabe 3. (1+1+2) *Beispiele für Primfaktorzerlegungen*

S a) Zeige, dass $3 + 2\mathrm{i} \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ irreduzibel ist.

S b) Zeige, dass $X^2 + Y \in \mathbb{Z}[X, Y]$ irreduzibel ist.

S c) Bestimme die Primfaktorzerlegung von $X^4 + 4\,Y^4 \in \mathbb{Z}[X, Y]$.

Aufgabe 4. (2+2) *Allgemeine Irreduzibilitätskriterien*

a) Sei $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ ein Polynom über einem Integritätsbereich R. Sei Eins ein größter gemeinsamer Teiler der Koeffizienten von $f(X)$. Sei $p \in R$ ein Primelement, welches $a_0, \ldots, a_{n-1}$ teilt, a_n nicht teilt und a_0 nicht im Quadrat teilt. Zeige, dass $f(X)$ in $R[X]$ irreduzibel ist.

b) Sei I ein Ideal eines Integritätsbereichs R, sodass R/I ein Integritätsbereich ist. Sei $f(X) \in R[X]$ ein normiertes Polynom, das über R/I irreduzibel ist. Zeige, dass $f(X)$ dann auch als Element von $R[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 5. (2+2) *Lokalisierung weg von einem Element*

Sei f ein reguläres Element eines Integritätsbereichs R.

a) Sei R sogar ein Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung. Zeige, dass $R[f^{-1}]$ dann ebenfalls ein Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung ist.

b) Sei R faktoriell. Zeige, dass dann $R[f^{-1}]$ ebenfalls faktoriell ist.

Für eine spannende Bonus-Aufgabe bitte wenden.

Aufgabe 6. (1+2+1+2) *Lokale Gauß–Jordansche Normalform*

Eine $(n \times m)$-Matrix über einem beliebigen kommutativen Ring R heißt genau dann *vom Rang* r, wenn das von den r-Minoren von A erzeugte Ideal das Einsideal und das von den $(r+1)$-Minoren erzeugte Ideal das Nullideal ist.

a) Finde ein Beispiel für eine Matrix über einem Ring, die in diesem Sinn keinen Rang besitzt.

Ein kommutativer Ring R heißt *lokaler Ring*, falls

$$\forall x, y \in R\colon \quad x + y \text{ invertierbar} \quad \Longrightarrow \quad x \text{ invertierbar oder } y \text{ invertierbar.}$$

b) Sei A eine $(n \times m)$-Matrix vom Rang r über einem lokalen Ring R. Zeige, dass A eine *Gauß–Jordansche Normalform* besitzt, also ähnlich zu einer rechteckigen Diagonalmatrix mit genau r Einsern und sonst nur Nullern auf der Hauptdiagonale ist.

c) Sei nun R wieder ein beliebiger kommutativer Ring. Seien $x, y \in R$ derart, dass die Summe $x + y$ in R invertierbar ist. Zeige, dass es eine Zerlegung der Eins von R gibt, sodass in den lokalisierten Ringen jeweils x oder y invertierbar ist. Die Lokalitätsbedingung kann also stets *lokal* erfüllt werden.

d) Sei A eine $(n \times m)$-Matrix vom Rang r über einem beliebigen kommutativen Ring R. Zeige, dass A *lokal* eine Gauß–Jordansche Normalform besitzt, dass es also eine Zerlegung $s_1, \ldots, s_n$ der Eins von R gibt, sodass A für jedes i über $R[s_i^{-1}]$ ähnlich zu einer solchen Diagonalmatrix ist.