

Übungsblatt 7 zur Algebra I

Abgabe bis 3. Juni 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. Größte gemeinsame Teiler und kleinste gemeinsame Vielfache

- Seien die Polynome $f = X^3 + 2X^2 + 2X + 4$ und $g = X^2 + 3X + 2$ gegeben. Finde Polynome p und q mit $X + 2 = pf + qg$.
- Seien f und g zwei normierte Polynome mit rationalen Koeffizienten. Zeige, dass *genau ein normiertes* Polynom d (der Fall $d = 0$ ist hier ausnahmsweise zugelassen) existiert, welches ein größter gemeinsamer Teiler von f und g ist.
- Seien f und g wie in b). Gib ein Verfahren zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von f und g über die Zerlegung von f und g in ihre irreduziblen Faktoren an.
- Seien f und g wie in b) und c). Definiere, was man unter dem *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* von f und g verstehen sollte, und gib eine Konstruktionsvorschrift für es an.

Aufgabe 2. Separable Polynome

- Finde eine Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die dieselben Lösungen wie die Gleichung $X^7 - X^6 + 4X^4 - 4X^3 + 4X - 4 = 0$ besitzt, jedoch alle mit Vielfachheit 1.
- Konstruiere eine Polynomgleichung, die genau dann von einer algebraischen Zahl a erfüllt wird, wenn das Polynom $f_a(X) := X^3 + 2a^2X - a + 6$ nicht separabel ist.
- Zeige, dass ein normiertes Polynom f mit rationalen Koeffizienten genau dann separabel ist, wenn der größte gemeinsame Teiler von f und f' das konstante Polynom 1 ist.

Aufgabe 3. Irreduzible Polynome

- Sind normierte Polynome vom Grad 1 stets irreduzibel über den rationalen Zahlen?
- Zeige, dass normierte Polynome vom Grad 2 oder 3 über den rationalen Zahlen genau dann irreduzibel sind, wenn sie keine rationale Nullstelle besitzen.
- Finde ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, das keine rationale Nullstelle besitzt und trotzdem über den rationalen Zahlen reduzibel ist.
- Zeige, dass das Polynom $X^3 - \frac{3}{2}X^2 + X - \frac{6}{5}$ über den rationalen Zahlen irreduzibel ist.

Aufgabe 4. Prime Polynome

- Ein normiertes Polynom f mit rationalen Koeffizienten heißt genau dann *prim*, wenn es nicht das Einspolynom ist und folgende Eigenschaft hat: Immer, wenn f ein Produkt $g \cdot h$ zweier Polynome mit rationalen Koeffizienten teilt, so teilt f schon mindestens einen der beiden Faktoren. Zeige, dass jedes prime Polynom irreduzibel ist.
- Teile ein über den rationalen Zahlen irreduzibles Polynom f ein Produkt $g_1 \cdots g_n$ von Polynomen mit rationalen Koeffizienten. Zeige, dass f dann schon eines der g_i teilt.

Aufgabe 5. Euklidischer Algorithmus für ganze Zahlen

Seien a und b ganze Zahlen. Zeige, dass es eine ganze Zahl $d \geq 0$ gibt, welche ein gemeinsamer Teiler von a und b ist, und für die es weitere ganze Zahlen r und s mit $d = r \cdot a + s \cdot b$ gibt.