

## Übungsblatt 8 zur Algebra I

Abgabe bis 10. Juni 2013, 17:00 Uhr

### Aufgabe 1. Numerischer Irreduzibilitätstest

Bestimme numerisch die Nullstellen von  $f(X) = X^4 - 12X^2 + 1$  bis auf wenige Stellen nach dem Komma, und nutze diese Information um zu zeigen, dass  $f(X)$  über den rationalen Zahlen irreduzibel ist.

### Aufgabe 2. Inhalt von Polynomen

Sei  $f(X)$  ein Polynom mit rationalen Koeffizienten. Zeige, dass der Inhalt von  $f \dots$

- a)  $\dots$  genau dann ganzzahlig ist, wenn alle Koeffizienten von  $f$  ganzzahlig sind.
- b)  $\dots$  das Inverse des Leitkoeffizienten von  $\tilde{f}$  ist, wenn  $f$  normiert ist.
- c)  $\dots$  das Inverse einer ganzen Zahl ist, wenn  $f$  normiert ist. Gilt auch die Umkehrung?

### Aufgabe 3. Kongruenzrechnungen

- a) Sei  $n$  eine ganze Zahl und seien  $a, a', b, b'$  ganze Zahlen mit  $a \equiv a'$  und  $b \equiv b'$  modulo  $n$ . Rechne explizit nach, dass dann auch  $a + b \equiv a' + b'$  modulo  $n$ .
- b) Sei  $n$  eine ganze Zahl und sei  $a$  eine zu  $n$  teilerfremde ganze Zahl. Zeige, dass für ganze Zahlen  $b, b'$  mit  $ab \equiv ab' \equiv 1$  modulo  $n$  folgt, dass  $b \equiv b'$  modulo  $n$ .
- c) Sei  $a$  eine ganze Zahl mit  $a \equiv 1$  modulo 5. Für welche Exponenten  $k$  ist  $a^k \equiv 2$  modulo 5?
- d) Finde zwei Inverse von 8 modulo 35.

### Aufgabe 4. Reduktion modulo einer Primzahl

Sei  $f(X)$  ein normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Beweise oder widerlege: Ist  $f(X)$  modulo einer Primzahl reduzibel, so ist  $f(X)$  auch über den rationalen Zahlen reduzibel.

### Aufgabe 5. Irreduzibilitätstest nach Leopold Kronecker

- a) Seien  $b_0, \dots, b_m$  von Null verschiedene ganze Zahlen. Zeige, dass es nur endlich viele Polynome  $g(X)$  vom Grad  $\leq m$  mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, sodass für alle  $i = 0, \dots, m$  die ganze Zahl  $g(i)$  ein Teiler von  $b_i$  ist.
- b) Sei  $f(X)$  ein primitives Polynom vom Grad  $n$  mit ganzzahligen Koeffizienten und  $f(i) \neq 0$  für alle  $0 \leq i \leq \frac{n}{2}$ . Zeige, dass es nur endlich viele Polynome  $g(X), h(X)$  mit ganzzahligen Koeffizienten und  $f = g \cdot h$  gibt.
- c) Verwende Teilaufgabe b), um ein Verfahren anzugeben, das von einem primitiven Polynom  $f(X)$  mit ganzzahligen Koeffizienten feststellt, ob es über den rationalen Zahlen reduzibel oder irreduzibel ist.