Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 8 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2) *Nilpotenz von Potenzreihen über noetherschen Ringen*

Seien $a_0, a_1, \ldots$ nilpotente Elemente in einem noetherschen Ring. Zeige, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ nilpotent ist.

Aufgabe 2. (m) *Die teilweise Obsoletierung eines Teilgebiets der Mathematik*

Sei R ein noetherscher Ring. Seien A eine endlich erzeugte R-Algebra und G eine endliche Gruppe von R-Algebrenautomorphismen von A. Zeige, dass die A-Algebra A^G der G-Invarianten (siehe Blatt 6, Aufgabe 4) endlich erzeugt ist.

Aufgabe 3. (m) *Noethersche Induktion für noethersche Moduln*

Sei M ein noetherscher Modul. Sei für jeden Untermodul U eine Behauptung $\varphi(U)$ gegeben. Gelte für alle Untermoduln U:

Wenn $\varphi(U')$ für alle Untermoduln $U' \supsetneq U$ stimmt, dann stimmt auch $\varphi(U)$.

Zeige, dass $\varphi(U)$ für alle Untermoduln U stimmt.

Aufgabe 4. (2) *Lokalität der Noetherianität*

Zeige oder widerlege: Sind alle Halme eines Rings noethersch, so auch der Ring selbst.

Aufgabe 5. (m+2+2) *Ein Kriterium für Noetherianität*

a) Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Rings A und sei $x \in A$. Sei $\mathfrak{a} + (x)$ endlich erzeugt. Zeige, dass es ein endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a}_0$ mit $\mathfrak{a} + (x) = \mathfrak{a}_0 + (x)$ gibt.

b) Sei $\mathfrak{p}$ ein Ideal, das maximal mit der Eigenschaft ist, nicht endlich erzeugt zu sein. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist.

c) Zeige, dass ein Ring, in dem alle Primideale endlich erzeugt sind, noethersch ist.

Es folgt noch eine Aufgabe (und ein Comic). Ansonsten ist das Blatt vollständig.