Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 1111 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m) *Eine explizite Beschreibung der adischen Vervollständigung*

Sei $\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Ideal in einem noetherschen Ring A. Zeige, dass die Vervollständigung $\hat{A}_\mathfrak{a}$ isomorph zu $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]/(X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)$ ist.

Aufgabe 2. (m+m) *Intervalle von Primidealen in noetherschen Ringen*

a) Seien $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ Primideale in einem noetherschen Ring. Sei $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ die Menge all derjenigen Primideale $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{r} \subsetneq \mathfrak{q}$. Zeige, dass $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ entweder leer oder unendlich ist.

b) Sei A ein noetherscher Ring in dem alle Primideale in einer einzigen Kette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ mit $n \geq 2$ auftreten. Zeige: Es gibt ein Element $x \in A$ mit $x + 0 \neq x$.

Aufgabe 3. (m) *Dimension des Polynomrings im noetherschen Fall*

a) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in einem Ring, das minimal mit der Eigenschaft ist, ein gegebenes zerlegbares Ideal $\mathfrak{a}$ zu umfassen. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{a}$ assoziiert ist.

b) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe r in einem noetherschen Ring. Zeige, dass Elemente $x_1, \ldots, x_r$ existieren, sodass $\mathfrak{p}$ unter allen Primidealen, die diese Elemente enthalten, minimal ist.

c) Zeige für alle Primideale $\mathfrak{p}$ eines noetherschen Rings: $\operatorname{ht} \mathfrak{p}[X] = \operatorname{ht} \mathfrak{p}$.

d) Sei A ein Ring in dem die Behauptung von c) gilt. Sei $\mathfrak{q} \subseteq A[X]$ ein Primideal. Sei $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q}$. Zeige: $\operatorname{ht} \mathfrak{q} \leq \operatorname{ht} \mathfrak{p} + 1$.

e) Folgere: Für noethersche Ringe A gilt $\dim A[X] = 1 + \dim A$.

Aufgabe 4. (m) *Gar nicht mehr erste Schritte mit der Dimension von Ringen*

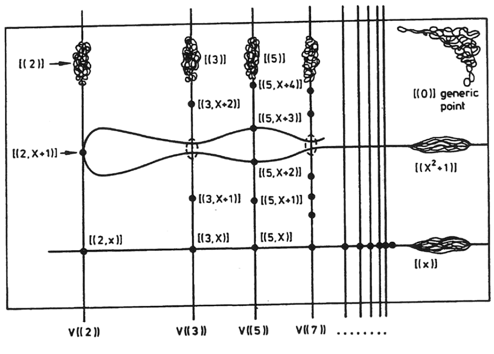
Berechne die Dimension des Rings $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X - Z, X^2 + Y^2 + Z^2)$.

Aufgabe 5. (0) *Der mystische Körper mit einem Element*

Der n-dimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^n_k$ über einem Körper k ist der Raum der Ursprungsgeraden in k^{n+1}.

a) Wie viele Punkte enthält $\mathbb{P}^n_k$, wenn k ein Körper mit q Elementen ist? Gib die Anzahl als Polynom in q an.

b) Im klassischen Zugang zur Algebra gibt es nichts, was die Bezeichnung *Körper mit einem Element* verdient hätte. Was passiert, wenn man trotzdem in der Formel aus a) $q := 1$ setzt? Was sollte also ein n-dimensionaler projektiver Raum über dem Körper mit einem Element sein?



Mumfords Schatzkarte: die Primideale von $\mathbb{Z}[X]$