Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 7 zur Algebra II

Abgabe bis 3. Dezember 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (1+1) *Urbilder und Bilder von Idealen*

a) Zeige, dass Urbilder von Idealen unter Ringhomomorphismen wieder Ideale sind.

b) Zeige, dass Bilder von Idealen unter Ringhomomorphismen im Allgemeinen aber keine Ideale sind.

Aufgabe 2. (1+2+1) *Beispiele für Ideale*

Skizziere alle endlich erzeugten Ideale von folgenden Ringen zusammen mit ihren Inklusionsbeziehungen:

a) $\mathbb{Z}$.

S b) $\mathbb{Z}_{(p)}$ (aus Blatt 6, Aufgabe 4), wobei p eine Primzahl ist.

b) K, wobei K ein beliebiger Körper ist.

Aufgabe 3. (2+2+2) *Nilpotente und reguläre Elemente*

a) Zeige, dass der Restklassenring $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]/(2)$ genau vier Elemente hat. Welche Elemente sind regulär?

b) Sei $n \geq 0$. Bestimme das Nilradikal von $\mathbb{Z}/(n)$.

c) Sei R ein kommutativer Ring. Sei $f \in R$. Zeige: Der Ring $R[f^{-1}]$ ist genau dann der Nullring, wenn f in R nilpotent ist.

Aufgabe 4. (1+3) *Charakteristik von Ringen*

Sei R ein kommutativer Ring.

a) Gib den eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\epsilon : \mathbb{Z} \to R$ explizit an.

b) Zeige, dass R genau dann von Charakteristik n ist, wenn $\ker \epsilon = (n)$.

Aufgabe 5. (4) *Geometrische Komponenten*

Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) Es gibt $e, f \in R$ mit $e \neq 0, f \neq 0, ef = 0, e^2 = e, f^2 = f$ und $e + f = 1$.

b) Es gibt kommutative Ringe S und T, die jeweils nicht der Nullring sind, mit $R \cong S \times T$.