Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013

Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 0 zur Algebra I

Präsenzblatt, Besprechung in der ersten Übung, keine Abgabe

Willkommen zur Veranstaltung *Algebra I* im Sommersemester 2013!

Die Übungen beginnen am 18. April, die Anmeldung ist bis zum 17. April um 16:00 Uhr auf `https://digicampus.uni-augsburg.de/` möglich. In der ersten Übung besprechen wir dieses Präsenzblatt, dessen Lösung nicht abgegeben werden muss.

Übungsblatt 1 ist dann schriftlich zu bearbeiten und mit Namen und Übungsgruppennummer versehen bis zum 23. April im Briefkasten im Erdgeschoss des Mathegebäudes abzugeben. Tipps dazu, wie man ein Übungsblatt bearbeitet, gibt es unter `http://xrl.us/uebungsblatt`.

Aufgabe 1. *Irrationale Zahlen*

Zeige, dass folgende Zahlen jeweils nicht rational sind:

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{12}$

c) $\sqrt[3]{25}$

Lösung.

a) Angenommen, $\sqrt{3}$ ist doch rational, also $\sqrt{3} = p/q$ für gewisse ganze Zahlen p, q. Dann folgt
$$3q^2 = p^2.$$
Auf der rechten Seite kommt der Primfaktor 3 eine gerade Anzahl von Malen vor (wieso?), links aber eine ungerade Anzahl von Malen. Das ist ein Widerspruch.

b) Aus $\sqrt{12} = p/q$ folgt $12q^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot q^2 = p^2$, also liefert dasselbe Argument den Widerspruch.

Bemerkung: Alternativ beobachtet man wegen $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, dass aus der Rationalität von $\sqrt{12}$ die Rationalität von $\sqrt{3}$ folgen würde, die wir in Teilaufgabe a) aber widerlegt haben. Hierbei nutzt man aus, dass das Produkt rationaler Zahlen rational ist (wieso?).

c) Aus $\sqrt[3]{25} = p/q$ folgt $25q^3 = p^3$. Die Anzahl der Male, wie oft der Primfaktor 5 vorkommt, ist rechts ein Vielfaches von 3 und links nicht (es bleibt der Rest 2, wieso?).

Bemerkung: Die Entdeckung der Irrationalität ist mathematisches Kulturgut!

Aufgabe 2. *Beispiele für Polynomgleichungen*

Seien ganze Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gegeben. Finde eine Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, die diese Zahlen als Lösungen besitzt.

Lösung. $(X - x_1) \cdots (X - x_n) = 0$ (wieso hat diese Gleichung ganzzahlige Koeffizienten?).

Bemerkung: Natürlich gibt es noch viele weitere passende Gleichungen.

Aufgabe 3. *Rationale Lösungen sind schon ganzzahlige Lösungen*

a) Zeige, dass eine ganze Zahl a genau dann eine n-te Wurzel in den rationalen Zahlen besitzt, wenn sie eine n-te Wurzel in den ganzen Zahlen besitzt.

b) Zeige, dass jede rationale Lösung einer normierten Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten schon eine ganze Zahl ist.

c) Was haben die Teilaufgaben a) und b) miteinander zu tun?

Lösung.

a) Zu zeigen ist also: $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} \in \mathbb{Z}$.

Dabei ist die Richtung „$\Leftarrow$“ klar. Für die Richtung „$\Rightarrow$“ können wir eine vollständig gekürzte Bruchdarstellung von $\sqrt[n]{a}$ ansetzen: $\sqrt[n]{a} = p/q$.

Dann folgt $a = p^n/q^n \in \mathbb{Z}$. Da diese Division aufgeht, kommt jeder Primfaktor von q auch in p^n und damit in p vor. Da p und q keine gemeinsamen Primfaktoren haben, besteht q also aus überhaupt keinem Primfaktor und ist daher (wieso?) gleich ± 1.

b) Sei $x = p/q$ eine vollständig gekürzte Bruchdarstellung einer Lösung der Gleichung

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = 0.$$

Dann folgt

$$p^n = -q \cdot (p^{n-1}a_{n-1} + qp^{n-2}a_{n-2} + \cdots + q^{n-2}pa_1 + q^{n-1}a_0),$$

also ist q ein Teiler von p^n. Daher kommt jeder Primfaktor von q auch in p^n und daher in p vor (wieso?). Da nach Voraussetzung p und q keine gemeinsamen Primfaktoren haben, besteht q aus überhaupt keinem Primfaktor und ist daher (wieso?) gleich ± 1. Also ist $x = \pm p$ eine ganze Zahl.

c) Eine n-te Wurzel von a ist eine Lösung der Polynomgleichung $X^n - a = 0$. Da das eine normierte Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten ist, folgt die Behauptung von Teilaufgabe a) mit Teilaufgabe b).

Aufgabe 4. *Rechnen mit komplexen Zahlen*

Schreibe folgende komplexe Zahlen in der Form $x + y\mathrm{i}$, wobei x und y reelle Zahlen sind:

a) $(1 + 2\mathrm{i}) \cdot (3 - 4\mathrm{i})$

b) $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$

c) alle vier Lösungen der Polynomgleichung $X^4 - 1 = 0$

Lösung.

a) $11 + 2\,\mathrm{i}$.

b) $0 + 1\,\mathrm{i}$.

c) $1 + 0\,\mathrm{i}$, $0 + 1\,\mathrm{i}$, $-1 + 0\,\mathrm{i}$ und $0 + (-1)\,\mathrm{i}$.