Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 9 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2) *Ganz, endlich und von endlichem Typ*

Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass B genau dann endlich über A ist, wenn B von endlichem Typ und ganz über A ist.

Aufgabe 2. (2+m) *Anwendungen der Noether-Normalisierung*

a) Sei A eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper K und sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in A. Zeige, dass $A/\mathfrak{m}$ eine endliche Erweiterung von K ist.

b) Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus endlich erzeugter Algebren über einem Körper. Zeige, dass das Urbild eines maximalen Ideals unter φ wieder maximal ist.

Aufgabe 3. (2) *Lokalität der Noetherianität, verfeinert*

Sei A ein Ring, dessen Halme alle noethersch sind. Gelte außerdem, dass jedes Element $x \in A \setminus \{0\}$ nur in endlich vielen maximalen Idealen liegt. Zeige, dass A noethersch ist.

Aufgabe 4. (2) *Ein schlimmes Ideal*

Finde ein Beispiel für ein Ideal $\mathfrak{a}$, sodass für kein $n \geq 0$ die Inklusion $(\sqrt{\mathfrak{a}})^n \subseteq \mathfrak{a}$ gilt.

Aufgabe 5. (m+1+m+1+m+1+1+1) *Großer Tag der Gegenbeispiele*

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Kurze Begründung oder Gegenbeispiel!

1. Das Bild eines Ideals unter einem Ringhomomorphismus ist ein Ideal.
2. Untermoduln endlich erzeugter Moduln sind endlich erzeugt.
3. Unterringe noetherscher Ringe sind noethersch.
4. Sind alle Halme eines Moduls endlich erzeugt, so auch der Modul selbst.
5. Wenn ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ surjektiv ist, so folgt für je zwei parallele Ringhomomorphismen $\alpha, \beta : B \to C$ aus $\alpha \circ \varphi = \beta \circ \varphi$ schon $\alpha = \beta$.
6. Es gilt die Umkehrung von 5.
7. Ein normiertes Polynom vom Grad n über einem Ring hat höchstens n Nullstellen.
8. Seien $f, g, h \in K[X, Y]$ Polynome. Dann gilt $(f, g) \cap (h) = (\mathrm{kgV}(f, h), \mathrm{kgV}(g, h))$.

Wenn ein Ring nicht noethersch ist:
`http://tiny.cc/no-no-noether`