Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 10 zur Algebra II

Abgabe bis 7. Januar 2014, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (2+3) *Praktische Arbeit mit Idealen*

a) Finde eine Zerlegung $1 = s_1 + \cdots + s_n$ von $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$, sodass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ das Ideal $(7, 1 + \sqrt{-13}) \subseteq R[s_i^{-1}]$ ein Hauptideal ist.

b) Sei x eine Nullstelle des Polynoms $X^4 - X^2 - 3\,X + 7$ in den algebraischen Zahlen. Sei $K = \mathbb{Q}(x)$. Bestimme eine teilweise Faktorisierung der Ideale $(14, x + 7)$ und $(35, x - 14)$ in $\mathcal{O}_K$.

Aufgabe 2. (2+2) *Irreduzible Ideale*

Ein nicht verschwindendes Ideal $\mathfrak{a}$ eines Rings R heißt genau dann *irreduzibel*, wenn für jede Zerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n$ in Ideale schon ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_i$ existiert.

a) Zeige, dass in beliebigen kommutativen Ringen irreduzible Ideale prim sind.

b) Zeige, dass in prüferschen Bereichen Zerlegungen von Idealen in Primideale bis auf Reihenfolge eindeutig sind (sofern sie existieren).

Aufgabe 3. (2+2) *Algorithmen zur Idealfaktorisierung*

Sei R ein dedekindscher Bereich. Beschreibe unter den folgenden Voraussetzungen jeweils ein Verfahren, das ein gegebenes nicht verschwindendes endlich erzeugte Ideal von R in Primideale faktorisiert, also als Produkt von Primidealen schreibt.

a) Wir haben einen Test, der von einem gegebenen endlich erzeugten Ideal feststellt, ob es irreduzibel ist, und es gegebenenfalls in zwei echte Faktoren zerlegt.

b) Wir haben einen Test, der von einem gegebenen endlich erzeugten Ideal feststellt, ob es maximal ist, und gegebenenfalls ein Element liefert, um das es zu einem echten Ideal echt erweitert werden kann.

Aufgabe 4. (3) *Gemeinsame Stoppstellen mehrerer Ketten*

Sei R ein noetherscher kommutativer Ring. Ein Algorithmus produziere m Ketten von endlich erzeugten Idealen in R:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{a}_{10} & \subseteq & \mathfrak{a}_{11} & \subseteq & \mathfrak{a}_{12} & \subseteq & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \mathfrak{a}_{m0} & \subseteq & \mathfrak{a}_{m1} & \subseteq & \mathfrak{a}_{m2} & \subseteq & \cdots \end{array}$$

Zeige, dass es eine Stelle n gibt, sodass $\mathfrak{a}_{jn} = \mathfrak{a}_{j(n+1)}$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt.

Aufgabe 5. (4) *Beispiel für eine Ganzheitsbasis*

Bestimme eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{4})}$.