

## Übungsblatt 8 zur Kommutativen Algebra

### Aufgabe 1. (2) Nilpotenz von Potenzreihen über noetherschen Ringen

Seien  $a_0, a_1, \dots$  nilpotente Elemente in einem noetherschen Ring. Zeige, dass die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$  nilpotent ist.

### Aufgabe 2. (m) Die teilweise Obsoleteierung eines Teilgebiets der Mathematik

Sei  $R$  ein noetherscher Ring. Seien  $A$  eine endlich erzeugte  $R$ -Algebra und  $G$  eine endliche Gruppe von  $R$ -Algebrenautomorphismen von  $A$ . Zeige, dass die  $A$ -Algebra  $A^G$  der  $G$ -Invarianten (siehe Blatt 6, Aufgabe 4) endlich erzeugt ist.

### Aufgabe 3. (m) Noethersche Induktion für noethersche Moduln

Sei  $M$  ein noetherscher Modul. Sei für jeden Untermodul  $U$  eine Behauptung  $\varphi(U)$  gegeben. Gelte für alle Untermoduln  $U$ :

Wenn  $\varphi(U')$  für alle Untermoduln  $U' \supsetneq U$  stimmt, dann stimmt auch  $\varphi(U)$ .

Zeige, dass  $\varphi(U)$  für alle Untermoduln  $U$  stimmt.

### Aufgabe 4. (2) Lokalität der Noetherianität

Zeige oder widerlege: Sind alle Halme eines Rings noethersch, so auch der Ring selbst.

### Aufgabe 5. (m+2+2) Ein Kriterium für Noetherianität

- Sei  $\mathfrak{a}$  ein Ideal eines Rings  $A$  und sei  $x \in A$ . Sei  $\mathfrak{a} + (x)$  endlich erzeugt. Zeige, dass es ein endlich erzeugtes Ideal  $\mathfrak{a}_0$  mit  $\mathfrak{a} + (x) = \mathfrak{a}_0 + (x)$  gibt.
- Sei  $\mathfrak{p}$  ein Ideal, das maximal mit der Eigenschaft ist, nicht endlich erzeugt zu sein. Zeige, dass  $\mathfrak{p}$  ein Primideal ist.
- Zeige, dass ein Ring, in dem alle Primideale endlich erzeugt sind, noethersch ist.

### Aufgabe 6. (2) Ein konkretes Beispiel für die Länge

Was ist die Länge des  $\mathbb{Z}$ -Moduls  $\mathbb{Z}/(90)$ ?

*Es folgt noch eine Aufgabe (und ein Comic). Ansonsten ist das Blatt vollständig.*