Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 3 zur Algebra I

Abgabe bis 6. Mai 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Beispiele für algebraische Zahlen*

a) Ist die Zahl $\cos 10°$ algebraisch?

b) Zeige, dass die Polynomgleichung $X^3 - 2X + 5 = 0$ genau eine reelle Lösung α besitzt.

c) Zeige, dass diese Lösung α invertierbar ist, und finde eine normierte Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die α^{-1} als Lösung besitzt.

Lösung.

a) Ja, denn die Zahl $\cos 10°$ ist der Realteil der komplexen Zahl $e^{\pi \mathrm{i}/18}$, und diese ist algebraisch, da sie die Gleichung

$$X^{18} + 1 = 0$$

erfüllt (wieso?). Da Realteile algebraischer Zahlen selbst ebenfalls algebraisch sind, begründet das die Algebraizität von $\cos 10°$.

b) Wir setzen $f := X^3 - 2X + 5$. Da $f(-3) = -16 < 0 < 1 = f(-2)$, besitzt die Gleichung $f(X) = 0$ nach Blatt 1, Aufgabe 2 mindestens eine reelle Lösung α im Intervall $(-3, -2)$. Mit einer Polynomdivision durch $(X - \alpha)$ kann man f faktorisieren:

$$f = (X - \alpha)(X^2 + \alpha X + \alpha^2 - 2).$$

Das verbleibende Polynom hat nun keine weiteren reellen Nullstellen, denn seine Diskriminante

$$D = \alpha^2 - 4(\alpha^2 - 2) = 8 - 3\alpha^2 \leq 8 - 3 \cdot 2^2 = -4 < 0$$

ist negativ.

c) Die Zahl α kann nicht Null sein, da Null keine Lösung der Gleichung $f(X) = 0$ ist:

$$f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0 + 5 = 5 \neq 0.$$

Also ist α invertierbar. Für die Zahl α^{-1} gilt

$$(\alpha^{-1})^{-3} - 2(\alpha^{-1})^{-1} + 5 = 0;$$

das ist zwar eine Gleichung, aber keine Polynomgleichung für α^{-1}. Wenn mir mit $(\alpha^{-1})^3$ durchmultiplizieren, erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$1 - 2(\alpha^{-1})^2 + 5(\alpha^{-1})^3 = 0.$$

Also ist α^{-1} Lösung der normierten Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten

$$X^3 - \frac{2}{5}X^2 + \frac{1}{5} = 0.$$

Aufgabe 2. *Produkt algebraischer Zahlen*

a) Seien x und y Zahlen mit $x^5 - x + 1 = 0$ und $y^2 - 2 = 0$. Finde eine normierte Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die die Zahl $x \cdot y$ als Lösung besitzt.

b) Der *Grad* einer algebraischen Zahl z ist der kleinstmögliche Grad einer normierten Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die z als Lösung besitzt. Finde eine Abschätzung für den Grad des Produkts zweier algebraischer Zahlen in Abhängigkeit der Grade der Faktoren.

Aufgabe 3. *Eigenschaften algebraischer Zahlen*

a) Zeige, dass der Betrag einer jeden algebraischen Zahl algebraisch ist.

b) Zeige, dass rationale ganz-algebraische Zahlen schon ganzzahlig sind.

c) Sei f ein normiertes Polynom mit rationalen Koeffizienten und z eine transzendente Zahl. Zeige, dass dann auch $f(z)$ eine transzendente Zahl ist.

Lösung.

a) Sei z eine algebraische Zahl. Dann gilt

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

Da mit z auch $\overline{z}$ algebraisch ist und das Produkt algebraischer Zahlen algebraisch ist, ist die rechte Seite dieser Identität algebraisch. Der Betrag von z ist also als eine der Lösungen der Gleichung mit algebraischen Koeffizienten

$$X^2 - z\overline{z} = 0$$

ebenfalls algebraisch.

b) Sei z eine rationale ganz-algebraische Zahl. Dann erfüllt z also eine normierte Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten. Nach Blatt 0, Aufgabe 3b) ist z daher schon ganzzahlig.

c) Angenommen, $y := f(z)$ wäre algebraisch. Dann gibt es ein normiertes Polynom g mit rationalen Koeffizienten, sodass y die Gleichung

$$g(Y) = 0$$

erfüllt, sodass also $g(f(z)) = 0$ ist. Setzt man $h := g \circ f$ – das ist wieder ein normiertes Polynom mit rationalen Koeffizienten (wieso?) – sieht man, dass z Lösung der Gleichung $h(X) = 0$ ist. Das ist ein Widerspruch zur Transzendenz von z.

Aufgabe 4. *Spielen mit Einheitswurzeln*

a) Finde alle komplexen Lösungen der Gleichung $X^6 + 1 = 0$.

b) Finde eine Polynomgleichung, deren Lösungen genau die Ecken desjenigen regelmäßigen Siebenecks in der komplexen Zahlenebene sind, dessen Zentrum der Ursprung der Ebene ist und das die Zahl $1 + \mathrm{i}$ als eine Ecke besitzt.

c) Zeige, dass die Gleichung $X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1 = 0$ genau $n - 1$ Lösungen besitzt, und zwar alle n-ten Einheitswurzeln bis auf die 1.

d) Sei ζ eine n-te und ϑ eine m-te Einheitswurzel. Zeige, dass $\zeta \cdot \vartheta$ eine k-te Einheitswurzel ist, wobei k das kleinste gemeinsame Vielfache von n und m ist.

Aufgabe 5. *Primitive Einheitswurzeln*

Eine n-te Einheitswurzel ζ heißt genau dann *primitiv*, wenn *jede* n-te Einheitswurzel eine ganzzahlige Potenz von ζ ist. Sei $\Phi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen in $\{1, \ldots, n\}$.

a) Kläre ohne Verwendung von b): Wie viele primitive vierte Einheitswurzeln gibt es?

b) Zeige, dass es genau $\Phi(n)$ primitive n-te Einheitswurzeln gibt.