Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 14 zur Algebra I

Abgabetermin entscheidet ihr!

Aufgabe 1. *Illustrationen des Hauptsatzes*

a) Zeige, dass die einzigen Zwischenerweiterungen von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ über $\mathbb{Q}$ die beiden trivialen (ganz $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und nur $\mathbb{Q}$) sind.

b) Finde ein normiertes separables Polynom $f(X)$ mit rationalen Koeffizienten, sodass der Index der Untergruppe $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})}(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(x_1, \ldots, x_n)$ gleich 3 ist. Dabei seien $x_1, \ldots, x_n$ die Nullstellen von $f(X)$. Ist diese Untergruppe ein Normalteiler?

c) Sei $f(X)$ ein normiertes separables Polynom mit rationalen Koeffizienten, welches mindestens eine echt komplexe Nullstelle besitzt. Zeige, dass die Galoisgruppe der Nullstellen von $f(X)$ mindestens ein Element der Ordnung 2 besitzt.

Aufgabe 2. *Wurzelausdrücke*

a) Sei x eine durch Wurzeln ausdrückbare Zahl und x' ein galoissch Konjugiertes von x. Zeige, dass x' ebenfalls durch Wurzeln ausdrückbar ist, und zwar durch denselben Wurzelausdruck wie x.

b) Zeige, dass jede primitive n-te Einheitswurzel durch Wurzeln, deren Exponenten höchstens $\max\{2, \frac{n-1}{2}\}$ sind, ausgedrückt werden kann.

Aufgabe 3. *Normalteiler*

a) Sei G eine Gruppe mit $G \neq \{\mathrm{id}\}$. Finde zwei verschiedene Normalteiler in G.

b) Sei G eine beliebige Gruppe. Zeige, dass das Zentrum von G ein Normalteiler in G ist.

c) Ist die symmetrische Gruppe S_5 einfach?

Lösung.

a) Stets sind die Untergruppen $\{\mathrm{id}\}$ und G Normalteiler (wieso?). Nach Voraussetzung sind das zwei verschiedene.

b) ...

c) Nein, denn die Untergruppe $\mathrm{A}_5 \subseteq \mathrm{S}_5$ ist ein Normalteiler: Sei $\tau \in \mathrm{A}_5$ und $\sigma \in \mathrm{S}_5$. Dann gilt

$$\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}\,\sigma \cdot \mathrm{sgn}\,\tau \cdot (\mathrm{sgn}\,\sigma)^{-1} = \mathrm{sgn}\,\tau = 1,$$

also liegt das konjugierte Element $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ wieder in A_5.

Bemerkung: Völlig analog zeigt man, dass auch die Gruppen S_n, $n \geq 3$ jeweils nicht einfach sind.

Aufgabe 4. *Diedergruppen*

a) Bestimme explizit die Symmetriegruppe eines ebenen regelmäßigen n-Ecks in der Ebene, die sog. *Diedergruppe* $\mathrm{D}_n \subseteq \mathrm{S}_n$. Zeige, dass diese von zwei Elementen erzeugt werden kann und insgesamt $2n$ Elemente enthält.

b) Zeige, dass der Index von D_4 in S_4 gleich 3 ist.

c) Zeige, dass D_4 kein Normalteiler in S_4 ist.

Aufgabe 5. *Auflösbarkeit von Gleichungen*

a) Finde ein normiertes irreduzibles Polynom $f(X)$ fünften Grads mit rationalen Koeffizienten, sodass die Gleichung $f(X) = 0$ auflösbar ist.

b) Zeige, dass die Gleichung $X^5 - 23\,X + 1 = 0$ nicht auflösbar ist.

Aufgabe 6. *Kriterium für Konstruierbarkeit*

Sei x eine algebraische Zahl und t ein primitives Element zu allen galoissch Konjugierten von x. Zeige, dass x genau dann konstruierbar ist, wenn der Grad von t eine Zweierpotenz ist.