

## Übungsblatt 10 zur Kommutativen Algebra

**Aufgabe 1.** () *Eine elementare Charakterisierung der Dimension*

Für ein Ringelement  $x \in A$  sei  $\mathfrak{b}_x$  das Ideal  $(x) + (\sqrt{(0)} : x)$ .

- a) Sei  $\mathfrak{p}$  ein minimales Primideal. Sei  $x \in A$ . Zeige, dass  $\mathfrak{b}_x \not\subseteq \mathfrak{p}$ .
- b) Sei  $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$  eine echte Inklusion von Primidealen. Sei  $x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}$ . Zeige, dass  $\mathfrak{b}_x \subseteq \mathfrak{q}$ .
- c) Zeige für  $n \geq 0$ : Genau dann gilt  $\dim A \leq n$ , wenn  $\dim A/\mathfrak{b}_x \leq n - 1$  für alle  $x \in A$ .