

## Übungsblatt 6 zur Kommutativen Algebra

### Aufgabe 1. (2+m+2) Ein konkretes Beispiel für eine Primärzerlegung

Sei  $K$  ein Körper. Seien die Ideale  $\mathfrak{p}_1 = (X, Y)$ ,  $\mathfrak{p}_2 = (X, Z)$  und  $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$  von  $K[X, Y, Z]$  gegeben. Sei  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$ .

- Zeige, dass  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2$  eine minimale Primärzerlegung von  $\mathfrak{a}$  ist.
- Welche Primideale von  $K[X, Y, Z]$  sind zu  $\mathfrak{a}$  isolierte Primideale, welche eingebettete?
- Schreibe die assoziierten Primideale in der Form  $\sqrt{(\mathfrak{a} : f)}$  für geeignete  $f \in K[X, Y, Z]$ .

### Aufgabe 2. (2+m+2) Erweiterungen primärer Ideale in Polynomringen

Sei  $A$  ein Ring.

- Sei  $\mathfrak{q}$  ein  $\mathfrak{p}$ -primäres Ideal in  $A$ . Zeige, dass  $\mathfrak{q}[X]$  ein  $\mathfrak{p}[X]$ -primäres Ideal in  $A[X]$  ist.
- Sei  $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$  eine minimale Primärzerlegung in  $A$ . Zeige, dass  $\mathfrak{a}[X] = \mathfrak{q}_1[X] \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n[X]$  eine minimale Primärzerlegung in  $A[X]$  ist.
- Zeige: Ist  $\mathfrak{p}$  ein zu einem zerlegbaren Ideal  $\mathfrak{a}$  isoliertes Primideal, so ist  $\mathfrak{p}[X]$  ein zu  $\mathfrak{a}[X]$  isoliertes Primideal.

### Aufgabe 3. (2+m) Ein Kriterium für Assoziiertheit

Sei  $\mathfrak{a}$  ein Ideal eines Rings  $A$ . Sei  $\mathfrak{p}$  ein Ideal, das unter allen Idealen der Form  $(\mathfrak{a} : x)$  mit  $x \in A$  und  $x \notin \mathfrak{a}$  maximal ist. Zeige, dass  $\mathfrak{p}$  ein Primideal ist, und dass dieses außerdem zu  $\mathfrak{a}$  assoziiert ist, wenn  $\mathfrak{a}$  zerlegbar sein sollte.

### Aufgabe 4. (0+2+2+m) Erste Schritte mit ganzen Erweiterungen

- Seien  $x$  und  $y$  Elemente eines Rings, die vermöge der Gleichungen  $x^2 - 3x + 1 = 0$  und  $y^2 + 5y - 2 = 0$  über  $\mathbb{Z}$  ganz sind. Finde eine Ganzheitsgleichung für  $x + y$ .
- Sei  $A \subseteq B$  eine ganze Ringerweiterung. Sei  $x$  ein Element von  $A$ , das in  $B$  invertierbar ist. Zeige, dass  $x$  schon in  $A$  invertierbar ist.
- Sei  $A \subseteq B$  eine Ringerweiterung. Sei  $C$  der ganze Abschluss von  $A$  in  $B$ . Seien  $f, g \in B[X]$  normierte Polynome mit  $fg \in C[X]$ . Zeige, dass  $f \in C[X]$  und  $g \in C[X]$ .
- Sei  $G$  eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Rings  $A$ . Zeige, dass  $A$  über dem Unterring  $A^G$  der  $G$ -Invarianten, also  $\{x \in A \mid g(x) = x \text{ für alle } g \in G\}$ , ganz ist.

