

# Hinweise zu den Übungsaufgaben in Algebra II

## Übungsblatt 3

**Aufgabe 1.** Teilaufgabe a) hat etwas mit Standgruppen zu tun. Für Teilaufgabe b) ist interessant, was Fixpunkte mit Bahnen zu tun haben. (Was sind Fixpunkte denn überhaupt, und was sind Bahnen?) Welche Gleichung der Vorlesung ist also vermutlich anwendbar?

**Aufgabe 4.** Ein beliebiges Element der disjunkt-gemachten Vereinigung  $Y_1 \amalg \cdots \amalg Y_n$  ist ein Paar  $(i, y)$ , wobei  $i \in \{1, \dots, n\}$  ein Index und  $y$  ein Element der entsprechenden Menge  $Y_i$  ist. Ein *Isomorphismus von  $G$ -Wirkungen* ist per Definition eine bijektive  $G$ -äquivalente Abbildung. Für Teilaufgabe b) ist es hilfreich,  $X$  in Bahnen zu zerlegen.

**Aufgabe 5.** Diese Aufgabe benötigt aber nur die Definition von Normalteilern und das Verständnis der mengentheoretischen Schreibweise: Die Menge  $N$  besteht aus all den Elementen von  $G$ , welche in allen  $N_i$  liegen. Über die Größe von  $I$  kann nichts vorausgesetzt werden. Wer mag, kann aber zuerst den Fall des Schnitts zweier Normalteiler behandeln; der allgemeine Fall verläuft ähnlich.

## Übungsblatt 4

**Aufgabe 1.** Ein *kleinster Normalteiler, welcher  $H$  umfasst*, ist per Definition ein Normalteiler  $N$  in  $G$ , welcher  $H$  umfasst und welcher folgende Eigenschaft hat: Für jeden beliebigen Normalteiler  $N'$  in  $G$ , welcher  $H$  umfasst, gilt  $N \subseteq N'$ .

**Aufgabe 2.** In beiden Teilaufgaben geht es nicht um Umkehrfunktionen, sondern um Urbildmengen.

**Aufgabe 3.** Die Gruppe  $GL_n(\mathbb{R})$  ist die Menge der invertierbaren  $(n \times n)$ -Matrizen, mit der Matrixmultiplikation als Gruppenverknüpfung. Die Untergruppe  $O_n(\mathbb{R})$  ist die Teilmenge der orthogonalen Matrizen. Eine Matrix  $A$  heißt genau dann *orthogonal*, wenn das Produkt  $A^t A$  die Einheitsmatrix ist. Orthogonale Matrizen haben als Determinante stets  $\pm 1$ . Die Untergruppe  $SO_n(\mathbb{R})$  ist die Teilmenge solcher orthogonalen Matrizen, deren Determinante  $+1$  ist. Für die Determinante gilt die Rechenregel  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ . Bei Teilaufgabe b) muss man sich zunächst überlegen, ob man  $SO_n(\mathbb{R})$  auf  $C_2$  oder umgekehrt wirken lassen möchte (nur eine Variante funktioniert), und wie diese Wirkung explizit aussehen soll. Wie bei Teilaufgabe c) die Gruppe  $SO_3(\mathbb{R})$  auf  $\mathbb{R}^3$  wirkt, ist im Skript angegeben (Beispiel 6.76).

Im Staatsexamen ist das halbdirekte Produkt immer wieder wichtig, um die öfter vorkommenden Aufgaben der Art *Geben Sie eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2012 an.* zu lösen.

*Für Teilnehmer des Pizzaseminars:* Findet ihr eine kategorielle Beschreibung des halbdirekten Produkts? (So, wie man das direkte Produkt auch als terminales Objekt in der Kategorie der Möchtegern-Produkte beschreiben kann.)

Die Diagonalmatrix, die oben links eine  $-1$  stehen und deren restliche Diagonaleinträge mit  $+1$  besetzt sind, spielt bei Teilaufgabe b) eine Rolle. Wer mich anschreibt, bekommt weitere Tipps.

**Aufgabe 4.** Eine endliche Gruppe heißt genau dann  $p$ -Gruppe, wenn die Anzahl ihrer Elemente eine  $p$ -Potenz ist.

**Aufgabe 5.** Ein *größter endlicher auflösbarer Normalteiler* ist per Definition ein Normalteiler  $N$  in  $G$ , welcher selbst endlich und auflösbar ist und folgende Eigenschaft hat: Für jeden beliebigen endlichen auflösbaren Normalteiler  $N'$  in  $G$  gilt  $N' \subseteq N$ .

## Übungsblatt 4

Auf dem gesamten Übungsblatt bezeichnet „ $p$ “ stets eine Primzahl.

**Aufgabe 1.** Konventionsgemäß ist die Zahl 1 eine  $p$ -Potenz. (Wieso ist das sinnvoll und für Teilaufgabe b) wichtig?)

**Aufgabe 2.** Eine  $p$ -Untergruppe von  $G$  ist per Definition eine Untergruppe von  $G$ , deren Ordnung eine  $p$ -Potenz ist. Eine Untergruppe  $H$  heißt per Definition genau dann *maximal unter allen  $p$ -Untergruppen von  $G$* , wenn sie selbst eine  $p$ -Untergruppe von  $G$  ist und außerdem folgende Eigenschaft hat: Ist  $K \subseteq G$  eine beliebige  $p$ -Untergruppe mit  $H \subseteq K$ , so gilt schon  $H = K$ .

Eine *maximale*  $p$ -Untergruppe ist also etwas anderes als eine *größte*  $p$ -Untergruppe!

**Aufgabe 3.** Captain Obvious bittet mich, folgenden Tipp zu verbreiten: Die Sylowschen Sätze könnten helfen.

An dieser Stelle hatte ich ein vollständiges Schema versprochen, jedoch muss das bis nach der Besprechung warten, da ein solches zu viel vorwegnehmen würde. Auf Anfrage gebe ich aber trotzdem gerne weitere Tipps.

Hier ein Beispiel. Sei  $G$  eine Gruppe mit  $|G| = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$  Elementen. Dann muss die Anzahl  $n_7$  der Sylowschen 7-Untergruppen ein Teiler von  $2^2 \cdot 3$  und modulo 7 kongruent zu 1 sein. An positiven Teilern gibt es nur 1, 2, 3, 4, 12. Daher muss  $n_7 = 1$  sein. Es gibt also genau eine Sylowsche 7-Untergruppe, und diese muss daher ein Normalteiler sein. Leider bleiben bei anderen Gruppenanordnungen meistens mehrere Möglichkeiten für die Anzahl der Sylowschen  $p$ -Untergruppen übrig. In diesen Fällen hilft es manchmal, für den hypothetischen Fall, dass alle  $n_p > 1$  sind, eine Übersicht über die Elemente der Gruppe anzulegen: Stets gibt es das neutrale Element. Ferner gibt es für jede Sylow-sche Untergruppe jeweils entsprechend viele weitere Elemente. Das Identitätselement haben aber all diese Untergruppen gemeinsam und darf daher nicht mehrfach gezählt werden. Außerdem können sich Sylowsche Untergruppen zur selben Primzahl nichttrivial überlappen. Sylowsche Untergruppen zu verschiedenen Primzahlen haben aber stets nur das Identitätselement gemeinsam (wieso?). Mit diesen Überlegungen kann man versuchen, einen Widerspruch herzuleiten: Die Elementübersicht muss zeigen, dass es mehr Elemente geben müsste, als faktisch in der Gruppe vorhanden sind.

**Aufgabe 4.** Die zweite Voraussetzung an die beiden Primzahlen ist, dass  $p$  kein Teiler von  $q - 1$  ist.

zu betrachten. Dabei bezeichnet  $M$  die Menge der Sylowschen 3-Untergruppen der gegebenen Gruppe  $G$  und  $\text{Aut}(M)$  die Menge der Bijektionen  $M \rightarrow M$ . Die Bijektion  $\text{conj}_g$  schickt eine Sylowsche 3-Untergruppe  $H$  auf  $gHg^{-1}$ .

$$G \longrightarrow \text{Aut}(M), \quad g \longmapsto \text{conj}_g$$

Für Teilaufgabe a) hilft es vielleicht, die Abbildung

## Übungsblatt 5

**Aufgabe 1.** Ein  $i$ -Minor ist die Determinante einer (nicht notwendigerweise zusammenhängenden)  $(i \times i)$ -Untermatrix. Etwa sind die 2-Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

die Zahlen  $1 \cdot 5 - 4 \cdot 2$ ,  $1 \cdot 6 - 4 \cdot 3$  und  $2 \cdot 6 - 5 \cdot 3$ . Je nach Konvention gehören die Negativen dieser Zahlen auch noch zu den 2-Minoren; für welche Konvention man sich entscheidet, spielt bei dieser Aufgabe aber keine Rolle, da es sowieso nur um den größten gemeinsamen Teiler der  $i$ -Minoren geht.

Unter den Transformationen der Vorlesung, die man benötigt, um eine Matrix in smithsche Normalform zu überführen, ändern sich zwar die  $i$ -Minoren, nicht aber der größte gemeinsame Teiler aller  $i$ -Minoren. Dieses Faktum ist ggf. zu beweisen. Ein eleganter Beweis ist mit Techniken des äußeren Kalküls (siehe etwa die jetzige LA-I-Vorlesung) möglich, andere Beweisansätze gibt es aber sicher auch.

Für Teilaufgabe b) kann man das Verfahren aus der Vorlesung (mit Zeilen- und Spalten-transformationen) oder Teilaufgabe a) verwenden.

**Aufgabe 2.** Bei beiden Teilaufgaben ist also eine Liste von abelschen Gruppen der jeweiligen Ordnung gesucht, sodass jede abelsche Gruppe dieser Ordnung isomorph zu einer der Gruppen auf der Liste ist und sodass keine zwei verschiedenen Gruppen der Liste zueinander isomorph sind. Ohne Unterstützung mit Vorlesungswissen ist die Aufgabe schwer.

**Aufgabe 3.** Die Notation in der Angabe ist etwas seltsam, hat aber einen guten Grund. Wie dem Text zu entnehmen ist, gilt

$$A[p^\infty] := \{x \in A \mid \text{ord}(x) \text{ ist eine } p\text{-Potenz}\} \subseteq A.$$

Bei der Besprechung von Blatt 5 haben wir gesehen, wie man diese Menge auch geringfügig einfacher beschreiben kann. Für Teilaufgabe b) ist ein geeigneter Isomorphismus

$$A[p_1^\infty] \times \cdots \times A[p_r^\infty] \longrightarrow A$$

zu finden (anzugeben). Auch muss nachgerechnet werden, dass die gefundene Abbildung tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus ist und bijektiv ist.

**Aufgabe 4.** Der Ring  $\mathbb{Z}_{(p)}$  ist nicht zu verwechseln mit dem Restklassenring  $\mathbb{Z}/(p)$ . Bitte rechnet nicht alle Ringaxiome nach, sondern nur die Unterringaxiome: Die neutralen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation müssen enthalten sein, die Summe und das Produkt zweier Elemente muss wieder enthalten sein und Negative von Elementen müssen wieder enthalten sein.

**Aufgabe 5.** Es gilt  $\mathbb{Z}[\zeta] = \{a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_{n-1}\zeta^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}\}$ , dieser Umstand muss nicht nachgewiesen werden.

Zu Teilaufgabe b): Die Techniken des üblichen Beweises, dass  $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ , lassen sich auf diesen Fall übertragen. Ein genauerer Hinweis wird noch folgen.

## Übungsblatt 6

**Aufgabe 1.** Teilaufgabe a) lautet ausformuliert wie folgt: Sei  $\varphi : R \rightarrow S$  ein Homomorphismus von Ringen. Sei  $\mathfrak{b} \subseteq S$  ein Ideal in  $S$ . Zeige, dass  $\phi^{-1}(\mathfrak{b}) = \{x \in R \mid \phi(x) \in \mathfrak{b}\} \subseteq R$  ein Ideal in  $R$  ist. Die Behauptung in Teilaufgabe b) (welche falsch ist) wäre, dass für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq R$  die Menge  $\phi(\mathfrak{a}) = \{\phi(x) \mid x \in \mathfrak{a}\} \subseteq S$  ein Ideal von  $S$  ist.

Für Teilaufgabe b) genügt ein Gegenbeispiel.

**Aufgabe 2.** Falls ihr euch wundert, welches Ideal von  $\mathbb{Z}$  nicht endlich erzeugt ist: In klassischer Logik gibt es kein solches. (Bonusaufgabe: Beweise das.)

Bitte überseht bei Teilaufgabe c) kein Ideal. Es sind insgesamt zwei.  
(3).  
Jedes endlich erzeugte Ideal von  $\mathbb{Z}$  ist sogar ein Hauptideal, kann also von einem einzigen Element erzeugt werden. Ein explizites Beispiel: Es gilt  $(12, 15) = \{12a + 15b \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = (3)$ .

**Aufgabe 3.** Die Lösung zu Teilaufgabe c) lässt sich einfacher aufschreiben, wenn man folgende Charakterisierung verwendet (welche nicht bewiesen werden muss): Ein Ring  $R$  ist genau dann der Nullring, wenn  $1 = 0 \in R$ .

Ein Beispiel für Teilaufgabe b): Für  $n = 4$  gilt  $\sqrt{(0)} = (2) \subseteq \mathbb{Z}/(4)$ .