Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 5 zur Algebra I

Abgabe bis 22. Mai 2013, 12:00 Uhr

Aufgabe 1. *Elementarsymmetrische Funktionen*

a) Gib $e_2(X, Y, Z, U, V)$, also die zweite elementarsymmetrische Funktion in den fünf Unbestimmten X, Y, Z, U und V, explizit an.

b) Schreibe $X^2 + Y^2 + Z^2$ als polynomiellen Ausdruck in den $e_i(X, Y, Z)$.

c) Schreibe $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ als polynomiellen Ausdruck in den $e_i(X_1, \ldots, X_n)$.

d) Zeige, dass $e_k(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n \text{ Argumente}}) = \binom{n}{k}$.

Lösung.

a) $e_2(X, Y, Z, U, V) = XY + XZ + XU + XV + YZ + YU + YV + ZU + ZV + UV$.

b) $X^2 + Y^2 + Z^2 = (X + Y + Z)^2 - 2\,XY - 2\,XZ - 2\,YZ = e_1(X, Y, Z)^2 - 2\,e_2(X, Y, Z)$.

c) $X_1^2 + \cdots + X_n^2 = (X_1 + \cdots + X_n)^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le n} X_i X_j = e_1(X_1, \ldots, X_n)^2 - 2\,e_2(X_1, \ldots, X_n)$.

d) *Variante 1:* $e_k(1, \ldots, 1) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} 1 = \binom{n}{k}$, denn der Summand 1 wird genau so oft summiert, wie es Möglichkeiten gibt, aus den Zahlen $\{1, \ldots, n\}$ genau k Stück als Indizes auszuwählen.

Variante 2: Vielleicht kennt man die Formel

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + X_i\,T) = \sum_{k=0}^{n} e_k(X_1, \ldots, X_n)\,T^k.$$

Setzt man in dieser Identität alle X_i auf 1, folgt die Behauptung sofort mit dem binomischen Lehrsatz

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + T) = (1 + T)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k$$

und Koeffizientenvergleich.

Variante 2': Auf ähnliche Art und Weise kann man auch die Formel

$$\prod_{i=1}^{n} (T + X_i) = \sum_{k=0}^{n} e_{n-k}(X_1, \ldots, X_n)\,T^k$$

als Ausgangspunkt verwenden. Deren Vorteil ist, dass man ihre Korrektheit ganz mühelos beweisen kann: Denn die linke Seite der Gleichung hat – als Polynom in der einzigen Variablen T mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ gedacht – die Nullstellen $-X_1, \ldots, -X_n$. Daher liefert der Vietasche Satz sofort die Behauptung.

Variante 3': Variante 2' kann man etwas expliziter auch wie folgt formulieren. Das Polynom $(1 + T)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^{n-k}$ hat die Zahl -1 als n-fache Nullstelle. Mit dem Vietaschen Satz folgt daher

$$k\text{-ter Koeffizient} = \binom{n}{n-k} = (-1)^{n-k} e_{n-k}(-1, \ldots, -1) = e_{n-k}(1, \ldots, 1).$$

Variante 3: Analog kann man Variante 2 explizit ausführen: Das Polynom $(T-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k T^{n-k}$ hat die Zahl $+1$ als n-fache Nullstelle. Mit dem Vietaschen Satz folgt daher

$$k\text{-ter Koeff.} = (-1)^{n-k}\binom{n}{n-k} = (-1)^{n-k}(-1)^{n-k}e_{n-k}(1,\ldots,1) = e_{n-k}(1,\ldots,1).$$

Aufgabe 2. *Der Vietasche Satz*

a) Sei $X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$ eine normierte Polynomgleichung vierten Grades, deren Lösungen mit Vielfachheiten x_1, x_2, x_3 und x_4 seien. Drücke die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 explizit als Polynome in den x_i aus.

b) Verwende den Vietaschen Satz für $n = 2$ um die bekannte Lösungsformel für normierte quadratische Gleichungen herzuleiten.

Lösung.

a) Wir multiplizieren $(X - x_1)\cdots(X - x_4)$ aus und führen einen Koeffizientenvergleich durch. Damit folgen die gesuchten Beziehungen:

$$\begin{aligned}
a_0 &= e_4(x_1,\ldots,x_4) = x_1x_2x_3x_4 \\
a_1 &= -e_3(x_1,\ldots,x_4) = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \\
a_2 &= e_2(x_1,\ldots,x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\
a_3 &= -e_1(x_1,\ldots,x_4) = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\
1 &= e_0(x_1,\ldots,x_4)
\end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn man den Vietaschen Satz zitiert, kann man sich das Ausmultiplizieren sparen.

b) Sei $X^2 + bX + c = 0$ eine allgemeine normierte quadratische Gleichung und seien x_1, x_2 ihre (nach dem Fundamentalsatz der Algebra existierenden) komplexen Lösungen (mit Vielfachheiten). Ausmultiplizieren von $(X - x_1)(X - x_2)$ und Koeffizientenvergleich führt zu den Beziehungen

$$\begin{aligned}
c &= x_1x_2, \\
b &= -(x_1 + x_2),
\end{aligned}$$

wie vom Vietaschen Satz vorausgesagt. Dann gibt es zwei Möglichkeiten fortzufahren:

Variante 1 (tatsächliche Herleitung): Mit den Beziehungen können wir den (aus der Schule bekannten) Ausdruck für die Determinante herleiten, denn

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = b^2 - 4c.$$

Somit gilt

$$x_1 - x_2 = \pm\sqrt{\Delta},$$

wobei das „±“-Zeichen hier bedeuten soll, dass für *eine* der beiden komplexen Wurzeln von Δ die Gleichung stimmt. Über einen üblichen Trick, den wir etwa schon bei den Formeln für Real- und Imaginärteil komplexer Zahlen gesehen haben, folgt:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} \\
x_2 &= \frac{(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2)}{2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2}
\end{aligned}$$

Variante 2 (lediglich Verifikaiton): Alternativ können wir uns damit begnügen, die bekannte Formel zu verfizieren:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{x_1 + x_2 \pm \sqrt{(x_1 - x_2)^2}}{2} = \frac{x_1 + x_2 \pm (x_1 - x_2)}{2} = x_1 \text{ bzw. } x_2.$$

Bemerkung: Dem ersten Anschein nach haben wir hier die Rechenregel „$\sqrt{a^2} = a$" verwendet, die ja völlig falsch ist – für reelle a gilt stattdessen $\sqrt{a^2} = |a|$, und für komplexe a sollte man lieber nicht von der Wurzel reden. In der Rechnung wird der Wurzelausdruck allerdings von einem „$\pm$"-Zeichen geschützt; dann ist das okay (wieso?).

Aufgabe 3. *Diskriminanten kubischer Gleichungen*

a) Finde eine normierte Polynomgleichung dritten Grades, welche 1 als zweifache Lösung, 2 als einfache Lösung und keine weiteren Lösungen besitzt. Was ist ihre Diskriminante?

b) Sei $X^3 + pX + q = 0$ eine allgemeine reduzierte kubische Gleichung. Zeige, dass ihre Diskriminante durch $-4p^3 - 27q^2$ gegeben ist.

Lösung.

a) $(X - 1)^2(X - 2) = 0$ tut's. Ihre Diskriminante ist 0, da sie ja doppelte Lösungen besitzt.

b) *Variante 1 (lange Rechnung):* Seien x, y, z die drei Lösungen der Gleichung. Der Vietasche Satz liefert die Beziehungen

$$\begin{aligned} 0 &= x + y + z, \\ p &= xy + xz + yz, \\ q &= -xyz. \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} \Delta &= (x - y)^2 \cdot (x - z)^2 \cdot (y - z)^2 \\ &= (x^2 + 2xy + y^2 - 4xy) \cdot (x^2 + 2xz + z^2 - 4xz) \cdot (y^2 + 2yz + z^2 - 4yz) \\ &= ((x + y)^2 - 4xy) \cdot ((x + z)^2 - 4xz) \cdot ((y + z)^2 - 4yz) \\ &= (z^2 - 4xy) \cdot (y^2 - 4xz) \cdot (x^2 - 4yz) \\ &= -63x^2y^2z^2 - 4x^3y^3 - 4x^3z^3 - 4y^3z^3 + 16x^4yz + 16xy^4z + 16xyz^4 \\ &= -63x^2y^2z^2 - 4(x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3) + 16xyz(x^3 + y^3 + z^3) \\ &= \cdots = -4p^3 - 27q^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. *Symmetrien eines Polynoms*

Sei $f(X, Y, Z, W) := XY + ZW + XYZW$. Wie viele vierstellige Permutationen σ mit $\sigma \cdot f = f$ gibt es?

Aufgabe 5. *Formale Ableitung von Polynomen*

a) Seien $g(X)$ und $h(X)$ Polynome. Zeige: $(gh)^{(k)}(X) = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} g^{(i)}(X)\, h^{(j)}(X)$.

b) Sei $f(X)$ ein Polynom und n eine natürliche Zahl. Zeige: $f^{(n+1)} = 0 \iff \deg f \leq n$.

c) Sei $f(X)$ ein Polynom und x eine komplexe Zahl. Zeige, dass die Entwicklung von $f(X)$ nach $X - x$ durch die *Taylorsche Formel* gegeben ist (nach Brooke Taylor, 1685–1731, britischer Mathematiker):

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\,(X - x)^k$$