Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 14 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2) *Ein Gegenbeispiel zu einer Verstärkung des Krullschen Satzes*

Finde einen noetherschen Ring zusammen mit einem Ideal $\mathfrak{a} \neq (1)$ mit $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n \neq (0)$.

Aufgabe 2. (m+2+2) *Fasern von Ringhomomorphismen*

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines Rings A. Sei $k(\mathfrak{p}) := A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ der Restklassenkörper bei $\mathfrak{p}$. Sei B eine endliche A-Algebra.

a) Zeige, dass die Primideale $\mathfrak{q}$ von B mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ in kanonischer Eins-zu-Eins-Korrespondenz zu den Primidealen von $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} \cong B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ stehen.

b) Sei A ein Körper. Zeige, dass B nur endlich viele Primideale besitzt.

c) Sei B endlich über A. Zeige, dass es nur endlich viele Primideale $\mathfrak{q}$ wie in b) gibt.

Aufgabe 3. (2+2+m) *Dimension des Polynomrings im nicht-noetherschen Fall*

Sei A ein Ring.

a) Zeige: $\dim A[X] \geq 1 + \dim A$.

b) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Die Primideale $\mathfrak{q}$ von $A[X]$ mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ stehen in Eins-zu-Eins-Korrespondenz zu den Primidealen eines gewissens Rings. Welchem? Welche Dimension hat dieser?

c) Zeige: $\dim A[X] \leq 1 + 2\dim A$.

Aufgabe 4. (3) *Beispiele für Poincarésche Reihe und Hilbertsches Polynom*

Berechne die Poincarésche Reihe und das Hilbertsche Polynom des gewichteten $K[X,Y]$-Moduls $K[X,Y]/(X^2, XY)$ bezüglich $\lambda = \dim_K$.

Aufgabe 5. (1) *Dualität zwischen symmetrischer und äußerer Algebra*

Sei K ein Körper. Sei $S = K[X_1, \ldots, X_n]$ und sei E die zugehörige *äußere Algebra* der *antikommutativen Polynome*, wo $X_i X_i = 0$ und $X_i X_j = -X_j X_i$ gilt. Sei $\lambda = \dim_K$. Zeige: $\lambda(S,t) \cdot \lambda(E,-t) = 1$.

Aufgabe 6. (0) *Rationale Binomialkoeffizienten*

Wir setzen $\binom{x}{k} := x(x-1)\cdots(x-k+1)/k! \in \mathbb{Q}$ für rationale Zahlen x und natürliche Zahlen k. Solche Binomialkoeffizienten kommen in Taylor-Entwicklungen vieler wichtiger Funktionen vor.

a) Zeige: Genau dann kommt im gekürzten Nenner einer rationalen Zahl a/b nicht der Primfaktor p vor, wenn es eine p-adische Ganzzahl u mit $bu = a$ gibt.

b) Verwende die Dichtheit von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}_p$ und die Stetigkeit von Polynomen über $\mathbb{Z}_p$, um zu folgern: Im gekürzten Nenner eines rationalen Binomialkoeffizienten $\binom{x}{k}$ können nur solche Primfaktoren vorkommen, die auch im gekürzten Nenner von x vorkommen.