

Übungsblatt 5 zur Algebra II

Abgabe bis 26. November 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (2+2) *Elementarteiler von Matrizen*

- a) Sei M eine ganzzahlige $(n \times m)$ -Matrix. Seien d_1, \dots, d_r die Elementarteiler von M . Sei λ_i der größte gemeinsame Teiler aller i -Minoren. Zeige: $\lambda_i = d_1 \cdots d_i$.
- b) Bestimme die Elementarteiler folgender Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. (2+2) *Klassifikation endlicher abelscher Gruppen*

- S a) Bestimme bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 24.
- S b) Bestimme bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 180.

Aufgabe 3. (1+3) *Zerlegung in p -primäre Komponenten*

Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Eine Primzahl p heißt genau dann *assoziierte Primzahl* zu A , wenn die Untergruppe $A[p^\infty]$ derjenigen Elemente von A , deren Ordnung eine p -Potenz ist, nichttrivial ist. In diesem Fall heißt $A[p^\infty]$ *p -primäre Komponente* von A .

- a) Zeige, dass A nur endlich viele assoziierte Primzahlen besitzt.
- b) Zeige, dass A isomorph zum direkten Produkt der p -primären Komponenten von A ist.

Aufgabe 4. (2+2) *Lokalisierung nach einer Primzahl*

Sei p eine Primzahl und \mathbb{Z}_p die Menge all derjenigen rationalen Zahlen, in deren vollständig gekürzter Bruchdarstellung der Nenner nicht durch p teilbar ist.

- a) Zeige, dass \mathbb{Z}_p ein Unterring von \mathbb{Q} ist.
- b) Welche Elemente von \mathbb{Z}_p sind invertierbar?

Aufgabe 5. (2+2) *Beispiele für Ganzheitsringe*

- S a) Zeige: $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)} = \mathbb{Z}[i]$.
- S b) Sei ζ eine primitive n -te Einheitswurzel. Zeige: $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta)} = \mathbb{Z}[\zeta]$.