

Übungsblatt 15 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (3+m) *Intervalle von Primidealen in noetherschen Ringen*

- a) Seien $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ Primideale in einem noetherschen Ring. Sei $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ die Menge all derjenigen Primideale \mathfrak{r} mit $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{r} \subsetneq \mathfrak{q}$. Zeige, dass $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ entweder leer oder unendlich ist.
- b) Sei A ein noetherscher Ring in dem alle Primideale in einer einzigen Kette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ mit $n \geq 2$ auftreten. Zeige, dass es in A ein Element x mit $x + 0 \neq x$ gibt.

Aufgabe 2. () *Dimension des Polynomrings im noetherschen Fall*

Sei A ein noetherscher Ring. Zeige: $\dim A[X] = 1 + \dim A$.