Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 5 zur Algebra I

Abgabe bis 21. Mai 2013, 12:00 Uhr

Aufgabe 1. *Elementarsymmetrische Funktionen*

a) Gib $e_2(X, Y, Z, U, V)$, also die zweite elementarsymmetrische Funktion in den fünf Unbestimmten X, Y, Z, U und V, explizit an.

b) Schreibe $X^2 + Y^2 + Z^2$ als Polynom in den $e_i(X, Y, Z)$.

c) Schreibe $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ als Polynom in den $e_i(X_1, \ldots, X_n)$.

d) Zeige, dass $e_k(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n \text{ Argumente}}) = \binom{n}{k}$.

Lösung.

a) $e_2(X, Y, Z, U, V) = XY + XZ + XU + XV + YZ + YU + YV + ZU + ZV + UV.$

b) $X^2 + Y^2 + Z^2 = (X + Y + Z)^2 - 2\,XY - 2\,XZ - 2\,YZ = e_1(X, Y, Z)^2 - 2\,e_2(X, Y, Z).$

c) $X_1^2 + \cdots + X_n^2 = (X_1 + \cdots + X_n)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j = e_1(X_1, \ldots, X_n)^2 - 2\,e_2(X_1, \ldots, X_n).$

d) *Variante 1:* $e_k(1, \ldots, 1) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} 1 = \binom{n}{k}$, denn der Summand 1 wird genau so oft summiert, wie es Möglichkeiten gibt, aus den Zahlen $\{1, \ldots, n\}$ genau k Stück als Indizes auszuwählen.

Variante 2: Vielleicht kennt man die Formel

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + X_i\,T) = \sum_{k=0}^{n} e_k(X_1, \ldots, X_n)\,T^k.$$

Setzt man in dieser Identität alle X_i auf 1, folgt die Behauptung sofort mit dem binomischen Lehrsatz

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + T) = (1 + T)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k$$

und Koeffizientenvergleich.

Aufgabe 2. *Der Vietasche Satz*

a) Sei $X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = 0$ eine normierte Polynomgleichung vierten Grades, deren Lösungen mit Vielfachheiten x_1, x_2, x_3 und x_4 seien. Drücke die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 explizit als Polynome in den x_i aus.

b) Verwende den Vietaschen Satz für $n = 2$ um die bekannte Lösungsformel für normierte quadratische Gleichungen herzuleiten.

Lösung.

a) Wir multiplizieren $(X - x_1) \cdots (X - x_4)$ aus und führen einen Koeffizientenvergleich durch. Damit folgen die gesuchten Beziehungen:

$$\begin{aligned}
a_0 &= e_4(x_1, \ldots, x_4) = x_1x_2x_3x_4 \\
a_1 &= -e_3(x_1, \ldots, x_4) = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \\
a_2 &= e_2(x_1, \ldots, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\
a_3 &= -e_1(x_1, \ldots, x_4) = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\
1 &= e_0(x_1, \ldots, x_4)
\end{aligned}$$

b) Sei $X^2+bX+c = 0$ eine allgemeine normierte quadratische Gleichung. Ausmultiplizieren von $(X - x_1)(X - x_2)$ und Koeffizientenvergleich führt zu den Beziehungen

$$\begin{aligned}
c &= x_1x_2, \\
b &= -(x_1 + x_2).
\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{x_1 + x_2 \pm \sqrt{(x_1 - x_2)^2}}{2} = \frac{x_1 + x_2 \pm (x_1 - x_2)}{2} = x_1 \text{ bzw. } x_2.$$

Bemerkung: Dem ersten Anschein nach haben wir hier die Rechenregel „$\sqrt{a^2} = a$“ verwendet, die ja völlig falsch ist – für reelle a gilt stattdessen $\sqrt{a^2} = |a|$, und für komplexe a sollte man lieber nicht von der Wurzel reden. In der Rechnung wird der Wurzelausdruck allerdings von einem „$\pm$“-Zeichen geschützt; dann ist das okay (wieso?).

Aufgabe 3. *Diskriminanten kubischer Gleichungen*

a) Finde eine normierte Polynomgleichung dritten Grades, welche 1 als zweifache Lösung, 2 als einfache Lösung und keine weiteren Lösungen besitzt. Was ist ihre Diskriminante?

b) Sei $X^3 + pX + q = 0$ eine allgemeine reduzierte kubische Gleichung. Zeige, dass ihre Diskrimante durch $-4p^3 - 27q^2$ gegeben ist.

Lösung.

a) $(X - 1)^2(X - 2) = 0$ tut's. Ihre Diskriminante ist 0, da sie ja doppelte Lösungen besitzt.

Aufgabe 4. *Symmetrien eines Polynoms*

Sei $f(X, Y, Z, W) := XY + ZW + XYZW$. Wieviele vierstellige Permutationen σ gibt es, so dass $\sigma \cdot f = f$?

Aufgabe 5. *Formale Ableitung von Polynomen*

a) Seien $g(X)$ und $h(Y)$ Polynome. Zeige: $(gh)^{(k)}(X) = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} g^{(i)}(X)\, h^{(j)}(X)$.

b) Sei $f(X)$ ein Polynom und n eine natürliche Zahl. Zeige:

$$f^{(n+1)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \deg f \leq n.$$

c) Sei $f(X)$ ein Polynom und x eine komplexe Zahl. Zeige, dass die Entwicklung von $f(X)$ nach $X - x$ durch die *Taylorsche Formel* gegeben ist (nach Brooke Taylor, 1685–1731, britischer Mathematiker):

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (X - x)^k$$