Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 3 zur Algebra I

Abgabe bis 6. Mai 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Beispiele für algebraische Zahlen*

a) Ist die Zahl $\cos 10°$ algebraisch?

b) Zeige, dass die Polynomgleichung $X^3 - 2X + 5 = 0$ genau eine reelle Lösung α besitzt.

c) Zeige, dass diese Lösung α invertierbar ist, und finde eine normierte Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die α^{-1} als Lösung besitzt.

Aufgabe 2. *Produkt algebraischer Zahlen*

a) Seien x und y Zahlen mit $x^5 - x + 1 = 0$ und $y^2 - 2 = 0$. Finde eine normierte Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die die Zahl $x \cdot y$ als Lösung besitzt.

b) Der *Grad* einer algebraischen Zahl z ist der kleinstmögliche Grad einer normierten Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die z als Lösung besitzt. Finde eine Abschätzung für den Grad des Produkts zweier algebraischer Zahlen in Abhängigkeit der Grade der Faktoren.

Aufgabe 3. *Eigenschaften algebraischer Zahlen*

a) Zeige, dass der Betrag einer jeden algebraischen Zahl algebraisch ist.

b) Zeige, dass rationale ganz-algebraische Zahlen schon ganzzahlig sind.

c) Sei f ein normiertes Polynom mit rationalen Koeffizienten und z eine transzendente Zahl. Zeige, dass dann auch $f(z)$ eine transzendente Zahl ist.

Aufgabe 4. *Spielen mit Einheitswurzeln*

a) Finde alle komplexen Lösungen der Gleichung $X^6 + 1 = 0$.

b) Finde eine Polynomgleichung, deren Lösungen genau die Ecken desjenigen regelmäßigen Siebenecks in der komplexen Zahlenebene sind, dessen Zentrum der Ursprung der Ebene ist und das die Zahl $1 + \mathrm{i}$ als eine Ecke besitzt.

c) Zeige, dass die Gleichung $X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1 = 0$ genau $n - 1$ Lösungen besitzt, und zwar alle n-ten Einheitswurzeln bis auf die 1.

d) Sei ζ eine n-te und ϑ eine m-te Einheitswurzel. Zeige, dass $\zeta \cdot \vartheta$ eine k-te Einheitswurzel ist, wobei k das kleinste gemeinsame Vielfache von n und m ist.

Aufgabe 5. *Primitive Einheitswurzeln*

Eine n-te Einheitswurzel ζ heißt genau dann *primitiv*, wenn *jede* n-te Einheitswurzel eine ganzzahlige Potenz von ζ ist. Sei $\Phi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen in $\{1, \ldots, n\}$.

a) Kläre ohne Verwendung von b): Wie viele primitive vierte Einheitswurzeln gibt es?

b) Zeige, dass es genau $\Phi(n)$ primitive n-te Einheitswurzeln gibt.