

Übungsblatt 1 zur Kommutativen Algebra

Abgabe bis zum Montag, den 19. Oktober 2015
Kummerkasten auf algebra.speicherleck.de

Aufgabe 1. (m+2+2) *Invertierbarkeit und Nilpotenz in Polynomringen*

Sei A ein Ring. Sei $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m \in A[X]$ ein Polynom über A . Zeige:

- Genau dann ist f eine Einheit in $A[X]$, wenn a_0 in A invertierbar und die a_1, \dots, a_m nilpotent sind.
- Genau dann ist f nilpotent, wenn a_0, \dots, a_m nilpotent sind.
- Ist A *reduziert*, d. h. ist nur die Null in A nilpotent, und ist $g = b_0 + \cdots + b_nX^n \in A[X]$ mit $fg = 0$, so gilt für alle passenden Indizes i und j : $a_i b_j = 0$.

Aufgabe 2. (2+m) *Lokale Ringe*

- Zeige, dass ein Ring A genau dann lokal ist, wenn $1 \neq 0$ in A und, wann immer eine Summe aus zwei Elementen invertierbar ist, schon ein Summand invertierbar ist.
- Was sind die einzigen idempotenten Elemente in einem lokalen Ring?

Aufgabe 3. (4) *Ringe mit nur einem Primideal*

Sei A ein Ring. Sei \mathfrak{n} das Ideal der nilpotenten Elemente in A . Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- In A gibt es genau ein Primideal.
- Jedes Element von A ist *entweder* invertierbar *oder* nilpotent.
- Der Faktorring A/\mathfrak{n} ist ein Körper.

Hinweis. Verwende für den Teil „1. \Rightarrow 2.“ ohne Beweis folgendes Lemma, das nächste Woche in der Vorlesung bewiesen wird: Der Schnitt über alle Primideale eines Rings besteht nur aus seinen nilpotenten Elementen.

Aufgabe 4. (m+2+2+2) *Boolsche Ringe*

Sei A ein *boolscher Ring*, d. h. ein kommutativer Ring mit $x^2 = x$ für alle $x \in A$. Zeige:

- Für alle $x \in A$ gilt $2x = 0$.
- Jedes Primideal \mathfrak{p} von A ist maximal.
- Für jedes Primideal \mathfrak{p} von A ist A/\mathfrak{p} ein Körper mit zwei Elementen.
- Jedes endlich erzeugte Ideal von A ist ein Hauptideal.

