Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 9 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. () *Ganz, endlich und von endlichem Typ*

Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass B genau dann endlich über A ist, wenn B von endlichem Typ und ganz über A ist.

Aufgabe 2. () *Anwendungen der Noether-Normalisierung*

a) Sei A eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper K und sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in A. Zeige, dass $A/\mathfrak{m}$ eine endliche Erweiterung von K ist.

b) Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus endlich erzeugter Algebren über einem Körper. Zeige, dass das Urbild eines maximalen Ideals unter φ wieder maximal ist.

Aufgabe 3. () *Lokalität der Noetherianität, verfeinert*

Sei A ein Ring, dessen Halme alle noethersch sind. Gelte außerdem, dass jedes Element $x \in A \setminus \{0\}$ nur in endlich vielen maximalen Idealen liegt. Zeige, dass A noethersch ist.

Aufgabe 4. () *XXX*

Finde ein Beispiel für ein Ideal $\mathfrak{a}$, sodass für kein $n \geq 0$ die Inklusion $(\sqrt{\mathfrak{a}})^n \subseteq \mathfrak{a}$ gilt.