Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 15 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m) *Eine explizite Beschreibung der adischen Vervollständigung*

Sei $\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Ideal in einem noetherschen Ring A. Zeige, dass die Vervollständigung $\hat{A}_{\mathfrak{a}}$ isomorph zu $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]/(X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)$ ist.

Aufgabe 2. (m+m) *Intervalle von Primidealen in noetherschen Ringen*

a) Seien $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ Primideale in einem noetherschen Ring. Sei $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ die Menge all derjenigen Primideale $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{r} \subsetneq \mathfrak{q}$. Zeige, dass $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ entweder leer oder unendlich ist.

b) Sei A ein noetherscher Ring in dem alle Primideale in einer einzigen Kette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ mit $n \geq 2$ auftreten. Zeige: Es gibt ein Element $x \in A$ mit $x + 0 \neq x$.

Aufgabe 3. (m) *Dimension des Polynomrings im noetherschen Fall*

Sei A ein noetherscher Ring. Zeige: $\dim A[X] = 1 + \dim A$.

Aufgabe 4. (m) *Nulldimensionale reguläre lokale Ringe*

Zeige, dass ein Ring genau dann ein nulldimensionaler regulärer lokaler Ring ist, wenn er ein Körper ist.

Aufgabe 5. (m) *Gar nicht mehr erste Schritte mit der Dimension von Ringen*

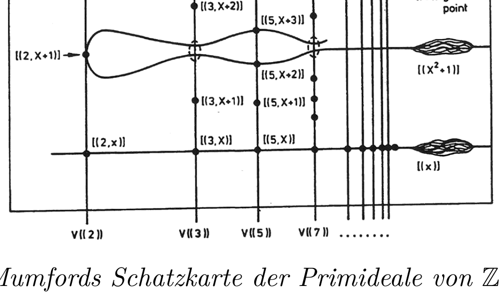
Berechne die Dimension des Rings $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X - Z, X^2 + Y^2 + Z^2)$.

Aufgabe 6. (0) *Der mystische Körper mit einem Element*

Der n-dimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^n_k$ über einem Körper k ist der Raum der Ursprungsgeraden in k^{n+1}.

a) Wie viele Punkte enthält $\mathbb{P}^n_k$, wenn k ein Körper mit q Elementen ist? Gib die Anzahl als Polynom in q an.

b) Im klassischen Zugang zur Algebra gibt es nichts, was die Bezeichnung *Körper mit einem Element* verdient hätte. Was passiert, wenn man trotzdem in der Formel aus a) $q := 1$ setzt? Was sollte also ein n-dimensionaler projektiver Raum über dem Körper mit einem Element sein?



Mumfords Schatzkarte der Primideale von $\mathbb{Z}[X]$