Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 2 zur Algebra I

Abgabe bis 29. April 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Lösungen polynomieller Gleichungen sind algebraisch*

Sei z eine Lösung der Polynomgleichung

$$X^3 - \sqrt{2 - \sqrt[3]{4}}\, X^2 + 3 = 0.$$

Finde eine normierte Polynomgleichung mit *rationalen* Koeffizienten, die z als Lösung hat.

Lösung. Wir formen um:

$$\begin{aligned}
& & z^3 - \sqrt{2 - \sqrt[3]{4}}\, z^2 + 3 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & z^3 + 3 &= \sqrt{2 - \sqrt[3]{4}}\, z^2 \\
&\Longrightarrow & (z^3 + 3)^2 &= 2\, z^4 - \sqrt[3]{4}\, z^4 \\
&\Longleftrightarrow & (z^3 + 3)^2 - 2\, z^4 &= \sqrt[3]{4}\, z^4 \\
&\Longrightarrow & ((z^3 + 3)^2 - 2\, z^4)^3 &= 4\, z^{12} \\
&\Longleftrightarrow & ((z^3 + 3)^2 - 2\, z^4)^3 - 4\, z^{12} &= 0
\end{aligned}$$

Die gesuchte Gleichung lautet also

$$((X^3 + 3)^2 - 2\, X^4)^3 - 4\, X^{12} = 0,$$

denn diese hat z als Lösung (Probe unnötig, wieso?), ihre Koeffizienten sind alle rational und sie ist normiert (das ist nicht ganz offensichtlich, wieso stimmt das?).

Bemerkung: Ausmultipliziert wird die Gleichung nicht schöner:

$$\begin{aligned}
X^{18} - 6\, X^{16} + 18\, X^{15} + 12\, X^{14} - 72\, X^{13} + 123\, X^{12} + 72\, X^{11} - 324\, X^{10} + {} \\
540\, X^9 + 108\, X^8 - 648\, X^7 + 1215\, X^6 - 486\, X^4 + 1458\, X^3 + 729 = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. *Auf den Spuren Bombellis*

Zeige formal die zuerst von Rafael Bombelli (1526–1572, italienischer Mathematiker) gefundene Gleichheit

$$(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$$

und diskutiere, welche Vorzeichen der Quadratwurzeln jeweils zu wählen sind.

Lösung. Mit der binomischen Formel multiplizieren wir die linke Seite aus:

$$(2 \pm \mathrm{i})^3 = 8 \pm 3 \cdot 4\, \mathrm{i} - 3 \cdot 2 \pm \mathrm{i}^3 = 2 \pm 11\, \mathrm{i}.$$

Bombellis Formel stimmt also, wenn man $\sqrt{-1}$ konsistent als i (statt als $-\mathrm{i}$) und $\sqrt{-121}$ konsistent als $11\,\mathrm{i}$ (statt als $-11\,\mathrm{i}$) liest und dann entweder auf beiden Seiten „+“ oder auf beiden Seiten „−“ für das „±“-Zeichen nimmt.

Aufgabe 3. *Rechnen mit komplexen Zahlen*

a) Sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl, deren Real- und Imaginärteil rationale Zahlen sind. Zeige, dass z^{-1} ebenfalls rationalen Real- und Imaginärteil hat.

b) Zeige, dass der Realteil einer komplexen Zahl z durch $\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ und dass der Imaginärteil durch $\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$ gegeben ist.

c) Sei z eine invertierbare komplexe Zahl. Folgere die Gleichheit $\overline{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$ aus der Multiplikativität der komplexen Konjugation.

d) Interpretiere die Multiplikation mit der imaginären Einheit i geometrisch.

Lösung.

a) Wir schreiben $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$z^{-1} = \frac{1}{a+b\mathrm{i}} = \frac{a-b\mathrm{i}}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$$

und wir sehen, dass in der Tat Real- und Imaginärteil wieder in $\mathbb{Q}$ liegen.

b) Wir schreiben $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und rechnen:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(z+\overline{z}) &= \tfrac{1}{2}(a+b\mathrm{i}+a-b\mathrm{i}) = a \\ \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z}) &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(a+b\mathrm{i}-a+b\mathrm{i}) = b \end{aligned}$$

c) Aus $z \cdot z^{-1} = 1$ folgt wegen der Multiplikativität der komplexen Konjugation $\overline{z} \cdot \overline{z^{-1}} = 1$. Also ist $\overline{z^{-1}}$ das Inverse von $\overline{z}$, das war zu zeigen.

d) Drehung um 90° um den Ursprung im Gegenuhrzeigersinn (wieso?). Skizze!

Aufgabe 4. *Zahlen nahe bei Null*

Zeige, dass für zwei reelle Zahlen a und b genau dann die Wurzel $\sqrt{a^2+b^2}$ nahe bei Null ist, wenn sowohl $|a|$ als auch $|b|$ nahe bei Null sind. Zeige also:

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \quad \sqrt{a^2+b^2} < \delta \implies |a|, |b| < \epsilon \\ &\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \quad |a|, |b| < \delta \implies \sqrt{a^2+b^2} < \epsilon \end{aligned}$$

Lösung.

a) Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Setze $\delta := \epsilon$. Gelte $\sqrt{a^2+b^2} < \delta$. Dann folgt

$$|a| = \sqrt{|a|^2} \leq \sqrt{|a|^2+|b|^2} < \delta = \epsilon$$

und analog mit $|b|$.

b) Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Setze $\delta := \epsilon/\sqrt{2}$. Gelte $|a|, |b| < \delta$. Dann folgt

$$\sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{\delta^2+\delta^2} = \sqrt{2}\delta = \epsilon.$$

Bemerkung: Auf die passenden Wahlen von δ kommt man natürlich nicht im Vorhinein, sondern erst nach erfolgter Abschätzung. Zweck der Aufgabe ist, einzusehen, dass die bijektive Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ a + b\mathrm{i} \longmapsto \binom{a}{b}$$

stetig (Teil 1) und umkehrbar stetig (Teil 2) ist, wenn man den $\mathbb{R}^2$ mit der Maximumsnorm ausstattet; die Räume $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ sind also homöomorph.

Aufgabe 5. *Ein neuer Zahlbereich*

a) Zeige, dass die Gleichung $X^2 + X + 1 = 0$ in den reellen Zahlen keine Lösung besitzt.

b) Konstruiere einen minimalen Zahlbereich $\mathbb{R}(\omega)$, welcher die reellen Zahlen und eine Lösung ω der Gleichung $X^2 + X + 1 = 0$ enthält und in welchem Addition und Multiplikation so definiert sind, dass sie die Addition und Multiplikation reeller Zahlen fortsetzen und die einschlägigen Gesetze der Arithmetik erfüllen.

c) Zeige, dass $\omega^3 = 1$ in $\mathbb{R}(\omega)$ gilt.

d) Finde eine Lösung der Gleichung $X^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{R}(\omega)$.

Lösung.

a) *Variante 1:* Man verwendet die Mitternachtsformel und sieht, dass die beiden Lösungen der Gleichung jeweils echt komplex sind:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

Variante 2: Man zeigt durch quadratische Ergänzung, dass für jedes reelle x die linke Seite der Gleichung positiv (und daher nicht null) ist:

$$x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 - 1/4 + 1 \geq 3/4 > 0.$$

Variante 3: Man multipliziert die Gleichung mit $X - 1$ und verwendet dann die Technik von Blatt 3, Aufgabe 4c).

b) Wir versuchen, die Konstruktion der komplexen Zahlen auf die Situation hier zu übertragen. Dazu überlegen wir zunächst, wie der Rechenbereich $\mathbb{R}(\omega)$ aussähe, wenn er existierte. Da $\mathbb{R}(\omega)$ die reellen Zahlen umfassen soll, muss $\mathbb{R}(\omega)$ neben ω selbst auch alle Zahlen der Form $a + b\omega$ enthalten. Weitere Zahlen sind aber nicht nötig, da Summe und Produkt solcher Zahlen wieder von dieser Form sind:

$$(a + b\omega) + (c + d\omega) = (a + c) + (b + d)\omega \tag{1}$$

$$(a + b\omega) \cdot (c + d\omega) = ac + ad\omega + bc\omega + bd\omega^2 = (ac - bd) + (ad + bc - bd)\omega \tag{2}$$

Dabei haben wir die Identität $\omega^2 = -\omega - 1$ verwendet. Wir haben also keinen Anlass, noch weitere Zahlen aufzunehmen.

Es liegt somit nahe, den Zahlbereich $\mathbb{R}(\omega)$ formal als Menge von Paaren zu definieren,

$$\mathbb{R}(\omega) := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

und die Rechnungen (1), (2) als Definition der Rechenarten zu verwenden.

Bemerkung: Wer den Faktorringbegriff kennt, kann kürzer auch definieren:

$$\mathbb{R}(\omega) := \mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1).$$

c) Per Definition gilt $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, also $\omega^2 = -\omega - 1$. Damit kann man ω^3 explizit ausrechnen:

$$\omega^3 = \omega \cdot \omega^2 = -\omega^2 - \omega = -(-\omega - 1) - \omega = 1.$$

Bemerkung: Alternativ kann man auch den Faktor $(\omega - 1)$ vom Himmel fallen lassen:

$$0 = (\omega^2 + \omega + 1)(\omega - 1) = \omega^3 - 1.$$

d) *Variante 1:* Wir untersuchen für alle $a, b \in \mathbb{R}$, ob $x := a + b\omega$ eine Lösung der Gleichung ist:

$$\begin{aligned}
& (a+b\omega)^2+1=0 \\
\Longleftrightarrow\ & (a^2-b^2+1)+(-b^2+2ab)\omega=0 \\
\Longleftrightarrow\ & a^2-b^2+1=0 \text{ und } b\,(2a-b)=0 \\
\overset{?}{\Longleftrightarrow}\ & a^2-b^2+1=0 \text{ und } 2a=b \\
\Longleftrightarrow\ & 1=3a^2 \text{ und } 2a=b \\
\Longleftrightarrow\ & a=\pm 1/\sqrt{3} \text{ und } b=\pm 2/\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Da wir insbesondere die Richtung „$\Leftarrow$“ haben, folgt also: Die Gleichung $X^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{R}(\omega)$ zwei Lösungen, nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\omega \quad \text{und} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\omega.$$

Variante 2: Wir verwenden die quadratische Ergänzung von oben:

$$0 = \omega^2 + \omega + 1 = (\omega + 1/2)^2 + 3/4,$$

also folgt

$$\frac{4}{3}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\omega + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = -1$$

und man kann ebenfalls die beiden Lösungen ablesen.

Bemerkung: Da es umgekehrt in $\mathbb{C}$ eine Lösung ξ der Gleichung $X^2 + X + 1 = 0$ gibt, sieht man, dass der in dieser Aufgabe neu konstruierte Rechenbereich $\mathbb{R}(\omega)$ tatsächlich isomorph zu $\mathbb{C}$ ist. Man kann einen Isomorphismus sogar explizit hinschreiben:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}(\omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
a + b\omega & \longmapsto & a + b\xi
\end{array}$$