Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013
Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 8 zur Algebra I

Abgabe bis 10. Juni 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Numerischer Irreduzibilitätstest*

Bestimme numerisch die Nullstellen von $f(X) = X^4 - 12\,X^2 + 1$ bis auf wenige Stellen nach dem Komma, und nutze diese Information um zu zeigen, dass $f(X)$ über den rationalen Zahlen irreduzibel ist.

Aufgabe 2. *Inhalt von Polynomen*

Sei $f(X)$ ein nicht verschwindendes Polynom mit rationalen Koeffizienten. Zeige, dass der Inhalt von f…

a) …genau dann ganzzahlig ist, wenn alle Koeffizienten von f ganzzahlig sind.

b) …das Inverse des Leitkoeffizienten von $\widetilde{f}$ ist, wenn f normiert ist.

c) …das Inverse einer ganzen Zahl ist, wenn f normiert ist. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 3. *Kongruenzrechnungen*

a) Sei n eine ganze Zahl und seien a, a', b, b' ganze Zahlen mit $a \equiv a'$ und $b \equiv b'$ modulo n. Rechne explizit nach, dass dann auch $a + b \equiv a' + b'$ modulo n.

b) Sei n eine ganze Zahl und sei a eine zu n teilerfremde ganze Zahl. Zeige, dass für ganze Zahlen b, b' mit $ab \equiv ab' \equiv 1$ modulo n folgt, dass $b \equiv b'$ modulo n.

c) Sei a eine ganze Zahl mit $a \equiv 1$ modulo 5. Für welche Exponenten k ist $a^k \equiv 2$ modulo 5?

d) Finde zwei ganze Zahlen, die modulo 35 invers zu 8 sind.

Aufgabe 4. *Reduktion modulo einer Primzahl*

Sei $f(X)$ ein normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Beweise oder widerlege: Ist $f(X)$ modulo einer Primzahl reduzibel, so ist $f(X)$ auch über den rationalen Zahlen reduzibel.

Aufgabe 5. *Irreduzibilitätstest nach Leopold Kronecker*

a) Seien $b_0, \ldots, b_m$ von Null verschiedene ganze Zahlen. Zeige, dass es nur endlich viele Polynome $g(X)$ vom Grad $\leq m$ mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, sodass für alle $i = 0, \ldots, m$ die ganze Zahl $g(i)$ ein Teiler von b_i ist.

b) Sei $f(X)$ ein primitives Polynom vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten und $f(i) \neq 0$ für alle $0 \leq i \leq \frac{n}{2}$. Zeige, dass es nur endlich viele Polynome $g(X), h(X)$ mit ganzzahligen Koeffizienten und $f = g \cdot h$ gibt.

c) Verwende Teilaufgabe b), um ein Verfahren anzugeben, das von einem primitiven Polynom $f(X)$ mit ganzzahligen Koeffizienten feststellt, ob es über den rationalen Zahlen reduzibel oder irreduzibel ist.