

Übungsblatt 9 zur Algebra I

Abgabe bis 17. Juni 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. Linearkombinationen

- a) Sei x eine Lösung der Gleichung $X^4 - 3X^3 + 10X - 10 = 0$. Drücke x^6 als Linearkombination der Zahlen $1, x, x^2, x^3$ mit rationalen Koeffizienten aus.
- b) Sei $z := \sqrt{5} + \sqrt[3]{5}$ gegeben. Gib eine natürliche Zahl n und eine verschwindende nichttriviale Linearkombination von $1, z, z^2, \dots, z^n$ mit rationalen Koeffizienten an.
- c) Finde zwei komplexe Zahlen, die über \mathbb{R} linear unabhängig und über \mathbb{C} linear abhängig sind.

Lösung.

- a) *Variante 1:* Wir rechnen unter Verwendung der Beziehung $x^4 = 3x^3 - 10x + 10$:

$$\begin{aligned} x^6 &= x^4 x^2 = (3x^3 - 10x + 10)x^2 \\ &= 3x^4 x - 10x^3 + 10x^2 \\ &= 3 \cdot (3x^3 - 10x + 10)x - 10x^3 + 10x^2 \\ &= 9x^4 - 30x^2 + 30x - 10x^3 + 10x^2 \\ &= 9 \cdot (3x^3 - 10x + 10) - 30x^2 + 30x - 10x^3 + 10x^2 \\ &= 27x^3 - 90x + 90 - 30x^2 + 30x - 10x^3 + 10x^2 \\ &= 17x^3 - 20x^2 - 60x + 90 \end{aligned}$$

Variante 2: Wir führen in einem Schritt eine Polynomdivision durch:

$$X^6 = (X^4 - 3X^3 + 10X - 10) \cdot (X^2 + 3X + 9) + (17X^3 - 20X^2 - 60X + 90).$$

Setzt man nun x für X ein, erhält man dasselbe Ergebnis, da die erste Klammer verschwindet.

- b) ...
- c) Zum Beispiel 1 und i : Diese sind über \mathbb{R} sicherlich linear unabhängig, denn für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ folgt aus

$$a \cdot 1 + b \cdot i = 0$$

sofort $a = b = 0$, da eine komplexe Zahl genau dann null ist, wenn ihr Real- und Imaginärteil null sind. Dagegen bezeugt die verschwindende und trotzdem nichttriviale Linearkombination

$$i \cdot 1 + (-1) \cdot i = 0,$$

dass die beiden Zahlen über \mathbb{C} linear abhängig sind.

Bemerkung: Letzteres muss auch so sein, denn \mathbb{C} ist als \mathbb{C} -Vektorraum nur eindimensional.

Aufgabe 2. Grade algebraischer Zahlen

- a) Berechne den Grad von $\sqrt{3} + i$ über \mathbb{Q} , über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und über $\mathbb{Q}(i)$.

- b) Finde ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, das über \mathbb{Q} irreduzibel ist, über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ in genau zwei und über $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + i)$ in genau vier irreduzible Polynome zerfällt.
- c) Seien a und d ganze Zahlen. Zeige, dass $a + \sqrt{d}$ eine ganz algebraische Zahl ist und berechne ihren Grad in Abhängigkeit von a und d .
- d) Sei ζ eine Lösung der Polynomgleichung $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = 0$. Zeige, dass ζ eine in $\alpha := \exp(\pi i/5)$ rationale Zahl ist, und gib eine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$ über $\mathbb{Q}(\zeta)$ an.

Lösung.

- a) *Variante 1 (direkt, etwas länglich):* Sei $z := \sqrt{3} + i$. Wir wollen zunächst den Grad von z über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ bestimmen. Dazu suchen wir das Minimalpolynom:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{3} + i \\ \iff z - \sqrt{3} &= i \\ \implies (z - \sqrt{3})^2 &= -1 \\ \iff z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Das Polynom $X^2 - 2\sqrt{3}X + 4$ ist tatsächlich über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ irreduzibel: Es hat Grad 2 und seine Nullstellen $\sqrt{3} \pm i$ sind echt komplex und liegen daher nicht in $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{R}$. Also ist es das Minimalpolynom von z über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$; der Grad von z über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ist also 2.

Nun wollen wir das Minimalpolynom über $\mathbb{Q}(i)$ bestimmen. Dazu rechnen wir:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{3} + i \\ \iff z - i &= \sqrt{3} \\ \implies (z - i)^2 &= 3 \\ \iff z^2 - 2iz - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Das Polynom $X^2 - 2iX - 4$ ist tatsächlich über $\mathbb{Q}(i)$ irreduzibel: Es hat Grad 2 und seine Nullstellen $\pm\sqrt{3} + i$ liegen nicht in $\mathbb{Q}(i)$: Wenn doch, läge auch $\sqrt{3}$ in $\mathbb{Q}(i)$ (wieso?), also gäbe es rationale Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $\sqrt{3} = a + bi$. Realteilvergleich würde dann $\sqrt{3} = a \in \mathbb{Q}$ liefern, ein Widerspruch. Also ist das Polynom tatsächlich das Minimalpolynom von z über $\mathbb{Q}(i)$; der Grad von z über $\mathbb{Q}(i)$ ist also 2.

Nun bleibt es, den Grad von z über \mathbb{Q} zu bestimmen. Dazu müssen wir unsere Rechnungen fortsetzen:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{3} + i \\ \implies z^2 - 2iz - 4 &= 0 \\ \iff z^2 - 4 &= 2iz \\ \implies (z^2 - 4)^2 &= -4z^2 \\ \iff z^4 - 4z^2 + 16 &= 0 \end{aligned}$$

Nun kann man nachrechnen, dass das Polynom $X^4 - 4X^2 + 16$ tatsächlich über den rationalen Zahlen irreduzibel ist. Das gelingt etwa über unseren numerischen Irreduzibilitätstest. Ist das getan, folgt, dass der Grad von z über \mathbb{Q} genau 4 ist.

Variante 2 (schneller mit der Gradformel): Sei $z := \sqrt{3} + i$. Die Zahl $\sqrt{3}$ liegt in $\mathbb{Q}(z)$. Das kann man durch kurzes Knobeln erkennen (es gilt $\sqrt{3} = z - z^3/8$) oder auch daran, dass nach dem Verfahren der Vorlesung z ein primitives Element von $\sqrt{3}$ und i ist (die Ausnahmemenge S enthält nur 0 und $\sqrt{3} \cdot i$) und daher sogar $\mathbb{Q}(z) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ gilt.

Auf jeden Fall liegt daher der Rechenbereich $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ in $\mathbb{Q}(z)$ und wir können das Diagramm

$$\begin{array}{c}
\mathbb{Q}(\sqrt{3} + i) \\
| \\
\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \\
| \\
\mathbb{Q}
\end{array}$$

zeichnen. Nach der Gradformel gilt also

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{3} + i) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{3} + i) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}].$$

Wie die erste Rechnung in Variante 1 gezeigt hat, ist der erste Faktor auf der rechten Seite gleich 2, und vom zweiten Faktor weiß man sowieso, dass er gleich 2 ist (Minimalpolynom ist $X^2 - 3$). Folglich ist der Grad von z über \mathbb{Q} gleich 4.

Bleibt, den Grad von z über $\mathbb{Q}(i)$ zu bestimmen. Da $\mathbb{Q}(i) \subseteq \mathbb{Q}(z)$ (da $i = z^3/8$), können wir dafür das Diagramm

$$\begin{array}{c}
\mathbb{Q}(\sqrt{3} + i) \\
| \\
\mathbb{Q}(\sqrt{i}) \\
| \\
\mathbb{Q}
\end{array}$$

zeichnen und daher die Gradformel verwenden:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{3} + i) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{3} + i) : \mathbb{Q}(\sqrt{i})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{i}) : \mathbb{Q}].$$

Gesucht ist der erste Faktor auf der rechten Seite, die anderen Terme kennen wir. Aufgelöst ergibt sich $[\mathbb{Q}(\sqrt{3} + i) : \mathbb{Q}(\sqrt{i})] = \deg_{\mathbb{Q}(i)} z = 2$.

Bemerkung: Die beiden Varianten kann man auf mehrere Arten und Weisen miteinander kombinieren.

- b) Von dem Polynom $f(X) = X^4 - 4X^2 + 16 \in \mathbb{Q}[X]$ haben wir schon gesehen, dass es über \mathbb{Q} irreduzibel ist. Seine vier Nullstellen sind die Zahlen

$$x_1 = \sqrt{3} + i, \quad x_2 = \sqrt{3} - i, \quad x_3 = -\sqrt{3} + i, \quad x_4 = -\sqrt{3} - i,$$

welche alle in $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + i)$ liegen, da $\sqrt{3} + i$ ein primitives Element für $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ ist. Also zerfällt $f(X)$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + i)$ in die vier Linearfaktoren

$$f(X) = (X - x_1) \cdot (X - x_2) \cdot (X - x_3) \cdot (X - x_4).$$

Über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ erhalten wir die Zerlegung

$$f(X) = (X - x_1)(X - x_2) \cdot (X - x_3)(X - x_4) = (X^2 - 2\sqrt{3}X + 4) \cdot (X^2 + 2\sqrt{3}X + 4).$$

Dabei sind die beiden auftretenden Faktoren sicherlich über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ irreduzibel, da sie vom Grad 2 sind und ihre Nullstellen nicht in $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ liegen, da sie echt komplex sind, aber $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ nur reelle Zahlen enthält.

c) Wir setzen $z := a + \sqrt{d}$ und rechnen:

$$\begin{aligned} z &= a + \sqrt{d} \\ \iff z - a &= \sqrt{d} \\ \implies (z - a)^2 &= d \\ \iff z^2 - 2az + a^2 - d &= 0 \end{aligned}$$

Die Zahl z ist also als Lösung der Polynomgleichung $X^2 - 2aX + a^2 - d = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten ganz algebraisch. Außerdem ist damit klar, dass der Grad von z höchstens 2 ist. Er ist genau dann 1, wenn dieses Polynom reduzibel ist. Das ist genau dann der Fall, wenn eine seiner beiden Nullstellen, etwa z , schon ganzzahlig ist. Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn \sqrt{d} in \mathbb{Z} liegt; das ist äquivalent dazu, dass d eine Quadratzahl ist.

d) Suche noch nach einer schönen Lösung!

Aufgabe 3. Spiel und Spaß mit der Gradformel

- Seien $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, $y \in \mathbb{Q}(x)$ und $z \in \mathbb{Q}(y)$. Wie lässt sich $\deg_{\mathbb{Q}(z)} x$ aus $\deg_{\mathbb{Q}(y)} x$ und $\deg_{\mathbb{Q}(z)} y$ berechnen?
- Seien x, y, z wie in a). Zeige, dass $\deg_{\mathbb{Q}(z)} y$ ein Teiler von $\deg_{\mathbb{Q}(z)} x$ ist.
- Sei f ein normiertes und irreduzibles Polynom vom Grad ≥ 2 mit rationalen Koeffizienten. Sei a eine algebraische Zahl, deren Grad teilerfremd zum Grad von f ist. Zeige, dass keine Zahl aus $\mathbb{Q}(a)$ Nullstelle von f sein kann.

Lösung.

- Da $\mathbb{Q}(z) \subseteq \mathbb{Q}(y) \subseteq \mathbb{Q}(x)$, ist die Gradformel anwendbar:

$$\deg_{\mathbb{Q}(z)} x = [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(z)] = [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(y)] \cdot [\mathbb{Q}(y) : \mathbb{Q}(z)] = \deg_{\mathbb{Q}(y)} x \cdot \deg_{\mathbb{Q}(z)} y.$$

Auf diese Weise lässt sich also der gesuchte Grad berechnen.

- Folgt sofort aus der in a) hergeleiteten Beziehung.
- Sei $w \in \mathbb{Q}(a)$ eine hypothetische Zahl mit $f(w) = 0$. Da f normiert ist, rationale Koeffizienten hat und über den rationalen Zahlen irreduzibel ist, ist f daher Minimalpolynom von z , es gilt also $\deg_{\mathbb{Q}} w = \deg f$. Somit folgt

$$\deg_{\mathbb{Q}} a = [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(w)] \cdot [\mathbb{Q}(w) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(w)] \cdot \deg f,$$

also ist der Grad von f ein Teiler vom Grad von a . Wegen $\deg f \geq 2$ ist das ein Widerspruch zur Teilerfremdheitsvoraussetzung.

Aufgabe 4. Primitive Elemente

- Finde ein primitives Element zu i und $\sqrt[3]{2}$.
- Drücke $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ als Polynome in $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ mit rationalen Koeffizienten aus.
- Seien z_1, \dots, z_n algebraische Zahlen. Zeige, dass es eine algebraische Zahl z mit $\mathbb{Q}(z) = \mathbb{Q}(z_1, \dots, z_n)$ gibt.

- d) Sei $f(X)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten. Zeige, dass eine algebraische Zahl a existiert, sodass $f(X)$ über $\mathbb{Q}(a)$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Lösung.

- a) *Variante 1 (Verfahren aus der Vorlesung):* Die Minimalpolynome von $x := i$ und $y := \sqrt[3]{2}$ sind $f(X) = X^2 + 1$ bzw. $g(X) = X^3 - 2$ mit den Nullstellen $\pm i$ bzw. $\omega^k \cdot \sqrt[3]{2}$, $k = 0, 1, 2$. Die Ausnahmemenge S ist daher gleich

$$S = \left\{ \frac{x' - x}{y - y'} \mid f(x') = 0, g(y') = 0, y \neq y' \right\} \\ = \left\{ 0, \frac{-2i}{\sqrt[3]{2} - \omega \sqrt[3]{2}}, \frac{-2i}{\sqrt[3]{2} - \omega^2 \sqrt[3]{2}} \right\}.$$

Näherungsweise ergibt sich

$$\frac{-2i}{\sqrt[3]{2} - \omega \sqrt[3]{2}} \approx 0,46 - 0,79i, \\ \frac{-2i}{\sqrt[3]{2} - \omega^2 \sqrt[3]{2}} \approx -0,46 - 0,79i.$$

Also ist zum Beispiel die Wahl $\lambda := 1 \notin S$ erlaubt und $i + \sqrt[3]{2}$ daher ein primitives Element.

Variante 2 (durch stundenlanges Knobeln): Wir vermuten, dass $z := i + \sqrt[3]{2}$ ein primitives Element ist und wollen diese Vermutung nur noch bestätigen. Klar ist zumindest, dass z in i und $\sqrt[3]{2}$ rational ist, dass also $\mathbb{Q}(z) \subseteq \mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{2})$ gilt. Umgekehrt kann man durch Vergleich verschiedener z -Potenzen auf die Beziehungen

$$i = -\frac{91}{22} - \frac{39}{11}z + \frac{39}{11}z^2 - \frac{20}{11}z^3 + \frac{9}{22}z^4 - \frac{6}{11}z^5, \\ \sqrt[3]{2} = \frac{91}{22} + \frac{50}{11}z - \frac{39}{11}z^2 + \frac{20}{11}z^3 - \frac{9}{22}z^4 + \frac{6}{11}z^5$$

kommen; diese bezeugen, dass $\mathbb{Q}(i)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ jeweils Teilmengen von $\mathbb{Q}(z)$ sind.

Variante 3 (ein anderes primitives Element): Wir vermuten, dass $z := i \cdot \sqrt[3]{2}$ ein primitives Element ist. Klar ist zumindest, dass z in i und $\sqrt[3]{2}$ rational ist, dass also $\mathbb{Q}(z) \subseteq \mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{2})$ gilt. Die umgekehrte Inklusion zeigen die Beziehungen

$$i = -z^3/2, \\ \sqrt[3]{2} = z^4/2.$$

- b) Sei $z := \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Dann rechnen wir ein paar z -Potenzen aus:

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ z^2 = 5 + 2\sqrt{6} \\ z^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$$

Die Darstellung der Potenz z^2 hilft uns nicht weiter, da in ihr nicht nur die Zahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ vorkommen, sondern auch die für uns nicht weiter relevante Zahl $\sqrt{6}$. Aber mit z^1 und z^3 können wir geeignet gegeneinander ausspielen:

$$\sqrt{2} = (z^3 - 9z)/2 \\ \sqrt{3} = (z^3 - 11z)/(-2)$$

- c) Wir führen einen Induktionsbeweis. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar. Für den Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$ seien algebraische Zahlen z_1, \dots, z_{n+1} gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann ein primitives Element der Zahlen z_1, \dots, z_n , d. h. eine algebraische Zahl t mit $\mathbb{Q}(t) = \mathbb{Q}(z_1, \dots, z_n)$. Ferner können wir ein primitives Element t' zu t und z_{n+1} finden, also eine Zahl mit

$$\mathbb{Q}(t') = \mathbb{Q}(t, z_{n+1}) = \mathbb{Q}(t)(z_{n+1}) = \mathbb{Q}(z_1, \dots, z_n)(z_{n+1}) = \mathbb{Q}(z_1, \dots, z_{n+1}).$$

Das beschließt den Beweis des Induktionsschritts.

- d) Über den algebraischen Zahlen zerfällt f vollständig in Linearfaktoren: $f = (X - x_1) \cdots (X - x_n)$. Etwas genauer zerfällt f aber auch schon in dem kleineren Rechenbereich $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ vollständig in Linearfaktoren. Nach Teilaufgabe c) ist dieser von der geforderten Form $\mathbb{Q}(a)$ für eine geeignete algebraische Zahl a .

Aufgabe 5. Irrationale Zahlen für Fortgeschrittene

Zeige mit elementaren Methoden direkt über den Ansatz $\sqrt{2} = a + b\sqrt{3}$ mit rationalen Zahlen a und b , dass $\sqrt{2}$ kein Element von $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ist, also keine in $\sqrt{3}$ rationale Zahl ist. Welchen Grad hat $\sqrt{2}$ daher über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$?

Lösung. *Variante 1 (über Primfaktoren):* Angenommen, $\sqrt{2} = a + b\sqrt{3}$ für gewisse rationale Zahlen $a = x/y$, $b = u/v \in \mathbb{Q}$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{Z}$. Dann rechnen wir:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= a + b\sqrt{3} \\ \iff \sqrt{2}yv &= xv + uy\sqrt{3} \\ \implies 2y^2v^2 &= x^2v^2 + 2xyuv\sqrt{3} + 3u^2y^2 \\ \iff 2y^2v^2 - x^2v^2 - 3u^2y^2 &= 2xyuv\sqrt{3} \\ \implies (2y^2v^2 - x^2v^2 - 3u^2y^2)^2 &= 12 \cdot (xyuv)^2 \end{aligned}$$

Auf der linken Seite kommt der Primfaktor 3 eine gerade Anzahl von Malen vor, auf der rechten Seite dagegen eine ungerade Anzahl von Malen (da er in $(xyuv)^2$ gerade oft und dann noch einmal im Vorfaktor 12 vorkommt), das ist ein Widerspruch.

Variante 2 (mit Fallunterscheidungen): Angenommen, $\sqrt{2} = a + b\sqrt{3}$ für gewisse rationale Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$. Dann folgt

$$2 = a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3}.$$

Falls $ab \neq 0$, ist das ein Widerspruch, denn dann können wir nach $\sqrt{3}$ auflösen und so als rationale Zahl ausdrücken. Nach Aufgabe 1a) von Blatt 0 ist $\sqrt{3}$ aber irrational.

Falls $ab = 0$, gibt es zwei Unterfälle: Falls $b = 0$, gilt $\sqrt{2} = a \in \mathbb{Q}$ im Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{2}$. Falls $b \neq 0$, folgt $a = 0$ und daher $\sqrt{2/3} = b \in \mathbb{Q}$. Das kann aber nicht sein: Ist $b = x/y$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$, folgt $2/3 = x^2/y^2$, also $2y^2 = 3x^2$. In der linken Seite tritt der Primfaktor 2 ungerade oft auf (wieso?), rechts aber gerade oft.