Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 3 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2+2) *Der formale Potenzreihenring über dem Grundring*

Sei A ein Ring.

a) Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $A[\![X]\!]$, so gilt $X \in \mathfrak{m}$, die Kontraktion $\mathfrak{m}_0 := A \cap m$ ist ein maximales Ideal in A und $\mathfrak{m}$ ist das von $\mathfrak{m}_0$ und X in $A[\![X]\!]$ erzeugte Ideal.

b) Jedes Primideal von A ist Kontraktion eines Primideals von $A[\![X]\!]$.

Aufgabe 2. (2+m+m+2) *Rechnungen mit Idealen*

a) Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Rings A. Finde einen Isomorphismus $A[X]/\mathfrak{a}[X] \to (A/\mathfrak{a})[X]$.

b) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines Rings A. Zeige, dass dann auch $\mathfrak{p}[X]$ in $A[X]$ prim ist.

c) Gilt die analoge Behauptung von b) auch für maximale Ideale?

d) Untersuche folgende Ideale auf Primalität und Maximalität: $(2, X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ und $([2], [X])$ in $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 6)$.

Aufgabe 3. (2+1) *Nichtbeispiele für Hauptidealbereiche*

a) Sei A ein Ring derart, dass jedes endlich erzeugte Ideal von $A[X]$ ein Hauptideal ist. Zeige, dass jedes reguläre Element von A schon invertierbar ist.

b) Folgere: $\mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X, Y]$ sind keine Hauptidealbereiche.

Aufgabe 4. (m+2) *Ein radikales Distributivgesetz*

a) Zeige, dass die Rechenregel „$\mathfrak{a} \cap \sum_i \mathfrak{b}_i = \sum_i (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}_i)$“ für Ideale im Allgemeinen *nicht* gilt. *Hinweis.* In den Ringen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}[X]$ wirst du kein Gegenbeispiel finden.

b) Zeige, dass folgende Regel durchaus stets gilt: $\sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\sum_i \mathfrak{b}_i} = \sqrt{\sum_i (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}_i)}$.

Aufgabe 5. (2+1+0) *Der Darstellungssatz von Stone*

Sei A ein boolscher Ring. Sei $\operatorname{Spec} A$ die Menge der Primideale von A. Die Potenzmenge von $\operatorname{Spec} A$ bildet mit der symmetrischen Differenz als Addition und dem Schnitt als Multiplikation ebenfalls einen boolschen Ring.

a) Gib explizit einen Ringhomomorphismus $A \to \mathcal{P}(\operatorname{Spec} A)$ an.

b) Zeige, dass dieser injektiv ist.

c) Zeige, dass der Morphismus Teil einer natürlichen Transformation $\mathrm{Id} \Rightarrow \mathcal{P} \circ \operatorname{Spec}$ ist und dass es nur eine solche Transformation gibt.

A friend told me that Obama became a communist after he became president, but I told him that couldn't be so. If you're a member of a radical ideal after being raised to a power, then you must have been part of it from the beginning.