

## Übungsblatt 7 zur Algebra I

Abgabe bis 3. Juni 2013, 17:00 Uhr

### Aufgabe 1. Größte gemeinsame Teiler und kleinste gemeinsame Vielfache

- Seien die Polynome  $f = X^3 - 2X^2 + 2X - 4$  und  $g = X^2 - 3X + 2$  gegeben. Finde Polynome  $p$  und  $q$  mit  $X - 2 = pf + qg$ .
- Seien  $f(X)$  und  $g(X)$  zwei normierte Polynome mit rationalen Koeffizienten. Gib ein Verfahren zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von  $f(X)$  und  $g(X)$  über die Zerlegung von  $f(X)$  und  $g(X)$  in ihre irreduziblen Faktoren an.
- Seien  $f(X)$  und  $g(X)$  wie in b). Definiere, was man unter dem *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* von  $f(X)$  und  $g(X)$  verstehen sollte, und gib eine Konstruktionsvorschrift für es an.

### Aufgabe 2. Separabilität

- Zeige, dass ein normiertes Polynom  $f$  mit rationalen Koeffizienten genau dann separabel ist, wenn der größte gemeinsame Teiler von  $f$  und  $f'$  das konstante Polynom 1 ist.
- Finde eine normierte Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die dieselben Lösungen wie die Gleichung  $X^7 + X^6 - 4X^4 - 4X^3 + 4X + 4 = 0$  besitzt, jedoch alle mit Vielfachheit 1.
- Konstruiere eine Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die genau dann von einer algebraischen Zahl  $a$  erfüllt wird, wenn das Polynom  $f_a(X) := X^3 + 2a^2X - a + 5$  nicht separabel ist.

### Aufgabe 3. Irreduzible Polynome

- Zeige, dass normierte Polynome vom Grad 2 oder 3 über den rationalen Zahlen genau dann irreduzibel sind, wenn sie keine rationale Nullstelle besitzen.
- Finde ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, das keine rationale Nullstelle besitzt und trotzdem über den rationalen Zahlen reduzibel ist.

### Aufgabe 4. Prime Polynome

Ein normiertes Polynom  $f(X)$  mit rationalen Koeffizienten heißt genau dann *prim*, wenn es nicht das Einspolynom ist und folgende Eigenschaft hat: Immer, wenn  $f(X)$  ein Produkt  $g(X) \cdot h(X)$  zweier Polynome mit rationalen Koeffizienten teilt, so teilt  $f(X)$  schon mindestens einen der beiden Faktoren.

- Zeige, dass jedes prime Polynom irreduzibel ist.
- Zeige umgekehrt, dass irreduzible Polynome prim sind. ...nicht getreu...

### Aufgabe 5. Euklidischer Algorithmus für ganze Zahlen

Beweise folgenden Satz, etwa durch Imitation des Vorlesungsbeweises für Polynome: Seien  $a$  und  $b$  ganze Zahlen. Dann existiert eine ganze Zahl  $d \geq 0$ , welche ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  ist, und für die es weitere ganze Zahlen  $r$  und  $s$  mit  $d = r \cdot a + s \cdot b$  gibt.