1 Wissenswertes über S_n

- S_n ist eine Gruppe mittels der Verknüpfung von Abbildungen $\circ$ (Komposition) und dem neutralen Element id.
- S_n hat $n!$ viele Elemente.
- A_n ist eine Untergruppe der S_n und enthält alle geraden Permutationen (solche mit $\operatorname{sgn}\sigma = 1$).
- A_n hat genau $\frac{n!}{2}$ Elemente.

2 Rechnen mit S_n

- Ein Element in S_n ist eine Bijektion (Umordnung) der n-elementigen Menge $\{1, \ldots, n\}$ in sich selbst. Diese schreibt man am einfachsten so:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- Diese Schreibweise eignet sich hervorragend zum Rechnen:

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Auch zur Inversenbestimmung muss man hierfür nicht viel denken. Einfach umdrehen und sortieren.

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Umdrehen:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Sortieren und fertig:

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Zykelschreibweise eignet sich nicht zum Rechnen, da es dazu ein wenig Erfahrung benötigt. Also zuerst umrechnen, rechnen und wieder umrechnen.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Die beiden Zykel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sind nicht disjunkt. Die beiden Zykel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$$

sind disjunkt.

3 Was nützt uns dann die Zykelschreibweise?

Bestimmung des Signums einer Permutation

Es gilt:

$\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^{k+1}$, wenn τ ein einzelner k-Zykel ist,

$\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$, falls τ und σ *disjunkte* k-Zykel sind.

Beispiel: Gesucht sei $\operatorname{sgn}(\tau)$ mit

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 5 & 9 & 8 & 4 & 10 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\implies \operatorname{sgn}(\tau) = (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1$$

Bestimmung der Ordnung einer Permutation

Die (Element-)Ordnung einer Permutation $\sigma \in S_n$ ist definiert als die *kleinste* natürliche Zahl ≥ 1 mit der Eigenschaft

$$\sigma^k = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{k \text{ Faktoren}} = \mathrm{id}.$$

Es gilt:

$\operatorname{ord}(\tau) = k$, falls τ ein einzelner k-Zykel ist.

$\operatorname{ord}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{kgV}(\operatorname{ord}(\tau), \operatorname{ord}(\sigma))$, wenn σ und τ zwei *disjunkte* Zykel sind.

Beispiel: Gesucht ist die Ordnung von σ mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\implies \operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{kgV}(2, 3) = 6.$$