Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 11 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2+m) *Rechenregeln für Ideale in dedekindschen Bereichen*

Bestätige folgende Rechenregeln für Ideale in einem dedekindschen Bereich.

a) $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})$.

b) $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$.

Aufgabe 2. (3) *Inhalt von Polynomen über dedekindschen Bereichen*

Sei A ein Ring. Der *Inhalt* eines Polynoms $f = a_0 + \cdots + a_m X^m \in A[X]$ ist das Ideal $\operatorname{cont}(f) := (a_0, \ldots, a_m)$. Zeige, dass im Fall dass A ein dedekindscher Bereich ist, die Rechenregel $\operatorname{cont}(fg) = \operatorname{cont}(f) \cdot \operatorname{cont}(g)$ für Polynome f und g über A gilt.

Aufgabe 3. (m+2) *Chinesischer Restsatz in dedekindschen Bereichen*

Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ Ideale in einem Ring A.

a) Zeige. dass die untenstehende Sequenz von A-Moduln genau dann exakt ist (wie sehen die Abbildungen aus?), wenn für alle $x_1, \ldots, x_n \in A$ folgendes gilt: Das System $x \equiv x_i \pmod{\mathfrak{a}_i}, i = 1, \ldots, n$ besitzt eine Lösung $x \in A$, falls $x_i \equiv x_j \pmod{\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j}$ für alle i, j.

$$A \longrightarrow \bigoplus_i A/\mathfrak{a}_i \longrightarrow \bigoplus_{i<j} A/(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j).$$

b) Zeige, dass diese Sequenz exakt ist, falls A ein dedekindscher Bereich ist.

Aufgabe 4. (m) *Fit mit topologischen Räumen? Hausdorff macht Spaß*

Sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass X genau dann hausdorffsch ist, wenn die Diagonale $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ von $X \times X$ abeschlossen ist.

http://www.smbc-comics.com/?id=3131

August Möbius found a lot of applications for his discoveries.