Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 8 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. () *Nilpotenz von Potenzreihen über noetherschen Ringen*

Seien $a_0, a_1, \ldots$ nilpotente Elemente in einem noetherschen Ring. Zeige, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ nilpotent ist.

Aufgabe 2. () *Die teilweise Obsoletierung eines Teilgebiets der Mathematik*

Sei A ein noetherscher Ring. Seien B eine endlich erzeugte A-Algebra und G eine endliche Gruppe von A-Algebrenautomorphismen von B. Zeige, dass $B^G := \{x \in B \,|\, g(x) = x \text{ für alle } g \in G\}$ eine endlich erzeugte A-Algebra ist.

Aufgabe 3. () *Lokalität der Noetherianität*

Zeige oder widerlege: Sind alle Halme eines Rings noethersch, so auch der Ring selbst.

Aufgabe 4. () *Ein Kriterium für Noetherianität*

a) Sei $\mathfrak{p}$ ein Ideal, das maximal mit der Eigenschaft ist, nicht endlich erzeugt zu sein. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. (Tipp folgt.)

b) Zeige, dass ein Ring, in dem alle Primideale endlich erzeugt sind, noethersch ist.