

## Übungsblatt 5 zur Algebra I

Abgabe bis 20. Mai 2013, 17:00 Uhr

### Rohentwurf!

#### Aufgabe 1. Elementarsymmetrische Funktionen

- Gib  $e_2(X, Y, Z, U, V)$ , also die zweite elementarsymmetrische Funktion in den fünf Unbestimmten  $X, Y, Z, U$  und  $V$ , explizit an.
- Schreibe  $X^2 + Y^2 + Z^2$  als Polynom in den  $e_i(X, Y, Z)$ .
- Schreibe  $X_1^2 + \dots + X_n^2$  als Polynom in den  $e_i(X_1, \dots, X_n)$ .
- Zeige, dass  $e_k(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ Argumente}}) = \binom{n}{k}$ .

#### Aufgabe 2. Der Vietasche Satz

- Sei  $X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$  eine normierte Polynomgleichung vierten Grades, deren Lösungen mit Vielfachheiten  $x_1, x_2, x_3$  und  $x_4$  seien. Drücke die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2$  und  $a_3$  explizit als Polynome in den  $x_i$  aus.
- Verwende den Vietaschen Satz für  $n = 2$  um die bekannte Lösungsformel für normierte quadratische Gleichungen herzuleiten.

#### Aufgabe 3. Diskriminante der reduzierten kubischen Gleichung

Sei  $X^3 + pX + q = 0$  eine reduzierte kubische Gleichung. Zeige, dass ihre Diskriminante durch  $-4p^3 - 27q^2$  gegeben ist.

#### Aufgabe 4. Symmetrien eines Polynoms

Sei  $f(X, Y, Z, W) := XY + ZW + XYZW$ . Wieviele vierstellige Permutationen  $\sigma$  gibt es, so dass  $\sigma \cdot f = f$ ?

#### Aufgabe 5. Formale Ableitung von Polynomen

- Seien  $g(X)$  und  $h(Y)$  Polynome. Zeige:  $(gh)^{(k)}(X) = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} g^{(i)}(X) h^{(j)}(X)$ .
- Sei  $f(X)$  ein Polynom und  $n$  eine natürliche Zahl. Zeige:

$$f^{(n+1)} = 0 \iff \deg f \leq n.$$

- Sei  $f(X)$  ein Polynom und  $x$  eine komplexe Zahl. Zeige, daß die Entwicklung von  $f(X)$  nach  $X - x$  durch die *Taylorsche Formel* gegeben ist (nach Brooke Taylor, 1685–1731, britischer Mathematiker):

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (X - x)^k$$