

## Übungsblatt 7 zur Kommutativen Algebra

### Aufgabe 1. (4) *Ein konkretes Beispiel zur Noether-Normalisierung*

Sei  $K$  ein Körper. Gib eine Zahl  $r \geq 0$  und einen endlichen, injektiven  $K$ -Algebren-Homomorphismus  $K[Y_1, \dots, Y_r] \rightarrow K[A, B]/(AB - 1)$  an.

### Aufgabe 2. (3) *Oberringe von Bewertungsringen*

Sei  $A$  ein Bewertungsring mit Quotientenkörper  $K$ . Sei  $A \subseteq B \subseteq K$  eine Zwischenerweiterung. Finde ein Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $A$  mit  $B \cong A_{\mathfrak{p}}$ .

### Aufgabe 3. (m) *Noether-Normalisierung für Integritätsbereiche*

Sei  $A \subseteq B$  eine Erweiterung von Integritätsbereichen. Sei  $B$  als  $A$ -Algebra endlich erzeugt. Zeige, dass ein Element  $s \in A \setminus \{0\}$  und eine  $A$ -Algebra  $B' \subseteq B$  mit  $B' \cong A[Y_1, \dots, Y_n]$  existieren, sodass  $B[s^{-1}]$  ganz über  $B'[s^{-1}]$  ist.

### Aufgabe 4. (3+m) *Geschenkte Bijektivität*

Sei  $\varphi : M \rightarrow M$  ein Endomorphismus eines Moduls  $M$ . Zeige:

- a) Ist  $\varphi$  surjektiv und  $M$  noethersch, so ist  $\varphi$  bijektiv.
- b) Ist  $\varphi$  injektiv und  $M$  artinsch, so ist  $\varphi$  bijektiv.

### Aufgabe 5. (m+3+2) *Endlichkeit minimaler Primideale*

- a) Sei  $A$  ein Ring, in dem das Nilradikal Schnitt endlich vieler Primideale ist. Zeige, dass  $A$  nur endlich viele minimale Primideale besitzt.
- b) Zeige, dass das Nilradikal eines artischen Rings Schnitt endlich vieler Primideale ist.
- c) Zeige die Behauptung aus b) auch für noethersche Ringe.

*Tipp.* Führe die Betrachtung eines Wurzelideals, das maximal mit der Eigenschaft ist, nicht endlicher Schnitt von Primidealen zu sein, (wieso existiert ein solches?) zu einem Widerspruch.