Rechenregeln für Erweiterungen der rationalen Zahlen

Folgende Regeln kann man verwenden, um Darstellungen von Erweiterungen der Form

$$\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$$

zu vereinfachen:

a) Die Reihenfolge der Erzeuger (damit sind die x_i gemeint) spielt keine Rolle.

b) Erzeuger, die in $\mathbb{Q}$ liegen, kann man weglassen.

c) Man kann beliebige Elemente aus $\mathbb{Q}$ zu Erzeugern addieren und subtrahieren, sowie (falls nicht null) multiplizieren und dividieren.

d) Man kann beliebige $\mathbb{Q}$-Vielfache eines Erzeugers auf einen anderen addieren und subtrahieren, sowieso (falls nicht null) multiplizieren und dividieren.

Außerdem helfen oft folgende Tatsachen (seien F und $\widetilde{F}$ beliebige weitere Erweiterungen von $\mathbb{Q}$):

e) $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_m) = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$

f) $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n) \subseteq F$ genau dann, wenn $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$.

g) $\mathbb{Q}(x_1, x_2) = \mathbb{Q}(x_1)$ genau dann, wenn $x_2 \in \mathbb{Q}(x_1)$.

h) Gelte $F \subseteq \widetilde{F}$. Dann gilt genau dann $F = \widetilde{F}$, wenn $[F : \mathbb{Q}] = [\widetilde{F} : \mathbb{Q}]$.

   Ohne die Zusatzvoraussetzung $F \subseteq \widetilde{F}$ ist das Quatsch!

i) Verbindung zur Galoistheorie: Sind $x_1, \ldots, x_n$ die Nullstellen eines normierten separablen Polynoms mit rationalen Koeffizienten und ist t ein primitives Element für diese Nullstellen, so gilt $[\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(t) : \mathbb{Q}] = |\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(x_1, \ldots, x_n)|$.

Im Allgemeinen gilt nicht, dass $\mathbb{Q}(x, y) = \mathbb{Q}(x + y)$.

Beispiele

1. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
2. $\mathbb{Q}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = \mathbb{Q}(1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, -\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$
3. $\mathbb{Q}(\zeta^0, \zeta^1, \ldots, \zeta^5) = \mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}\,\mathrm{i})$,
   für $\zeta := e^{2\pi\mathrm{i}/6} = \cos 60° + \mathrm{i} \sin 60° = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})$.
4. $\mathbb{Q}(\sqrt{3})(\zeta^0, \ldots, \zeta^5) = \mathbb{Q}(\sqrt{3})(\sqrt{3}\,\mathrm{i}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{3}\,\mathrm{i}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \mathrm{i})$,
   für ζ wie in Beispiel 3.
5. $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}\,\zeta^0, \ldots, \sqrt[8]{2}\,\zeta^7) = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^7) = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, \zeta) = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, 1{+}\mathrm{i}) = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, \mathrm{i})$,
   für $\zeta := e^{2\pi\mathrm{i}/8} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i})$.
6. $\mathbb{Q}(\text{alle sechs Nullstellen von } (X^4 - 2)(X^2 + 1)) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \mathrm{i})$

Anwendungen

Die Darstellung zu vereinfachen ist hilfreich, wenn man...

- ... den Grad einer Körpererweiterung bestimmen möchte.

  Beispiel: Die Erweiterung von Beispiel 3 hat über $\mathbb{Q}$ den Grad 2, denn das Minimalpolynom von $\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ über $\mathbb{Q}$ ist $X^2 + 3$ (wieso?). In der Ausgangsformulierung $\mathbb{Q}(\zeta^0, \zeta^1, \ldots, \zeta^5)$ erkennt man den Grad dagegen nicht so schnell.

- ... Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ in knapper Form angeben möchte.
- ... primitive Elemente bestimmen möchte.

  Beispiel: Ein primitives Element für die Zahlen $\zeta^0, \ldots, \zeta^5$ aus Beispiel 3 ist $\sqrt{3}\,\mathrm{i}$. Dank der Vereinfachungsregeln sieht man das ganz mühelos, ohne langwierige wiederholte Anwendung des Verfahrens aus der Vorlesung.

- ... Galoisgruppen bestimmen möchte (denn dazu benötigt man ja diese Dinge).