Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen

Sommersemester 2013

Ingo Blechschmidt
Robert Gelb

Übungsblatt 7 zur Algebra I

Abgabe bis 3. Juni 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. *Größte gemeinsame Teiler und kleinste gemeinsame Vielfache*

a) Seien die Polynome $f = X^3 - 2\,X^2 + 2\,X - 4$ und $g = X^2 - 3\,X + 2$ gegeben. Finde Polynome p und q mit $X - 2 = pf + qg$.

b) Seien $f(X)$ und $g(X)$ zwei normierte Polynome mit rationalen Koeffizienten. Gib ein Verfahren zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von $f(X)$ und $g(X)$ über die Zerlegung von $f(X)$ und $g(X)$ in ihre irreduziblen Faktoren an.

c) Seien $f(X)$ und $g(X)$ wie in b). Definiere, was man unter dem *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* von $f(X)$ und $g(X)$ verstehen sollte, und gib eine Konstruktionsvorschrift für es an.

Aufgabe 2. *Separabilität*

a) Zeige, dass ein normiertes Polynom f mit rationalen Koeffizienten genau dann separabel ist, wenn der größte gemeinsame Teiler von f und f' das konstante Polynom 1 ist.

b) Finde eine normierte Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die dieselben Lösungen wie die Gleichung $X^7 + X^6 - 4\,X^4 - 4\,X^3 + 4\,X + 4 = 0$ besitzt, jedoch alle mit Vielfachheit 1.

c) Konstruiere eine Polynomgleichung mit rationalen Koeffizienten, die genau dann von einer algebraischen Zahl a erfüllt wird, wenn das Polynom $f_a(X) := X^3 + 2a^2X - a + 5$ nicht separabel ist.

Aufgabe 3. *Irreduzible Polynome*

a) Zeige, dass normierte Polynome vom Grad 2 oder 3 über den rationalen Zahlen genau dann irreduzibel sind, wenn sie keine rationale Nullstelle besitzen.

b) Finde ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, das keine rationale Nullstelle besitzt und trotzdem über den rationalen Zahlen reduzibel ist.

Aufgabe 4. *Prime Polynome*

Ein normiertes Polynom $f(X)$ mit rationalen Koeffizienten heißt genau dann *prim*, wenn es nicht das Einspolynom ist und folgende Eigenschaft hat: Immer, wenn $f(X)$ ein Produkt $g(X) \cdot h(X)$ zweier Polynome mit rationalen Koeffizienten teilt, so teilt $f(X)$ schon mindestens einen der beiden Faktoren.

a) Zeige, dass jedes prime Polynom irreduzibel ist.

b) Zeige umgekehrt, dass irreduzible Polynome prim sind.

Aufgabe 5. *Euklidischer Algorithmus für ganze Zahlen*

Beweise folgenden Satz, etwa durch Imitation des Vorlesungsbeweises für Polynome: Seien a und b ganze Zahlen. Dann existiert eine ganze Zahl $d \geq 0$, welche ein gemeinsamer Teiler von a und b ist, und für die es weitere ganze Zahlen r und s mit $d = r \cdot a + s \cdot b$ gibt.