

## Übungsblatt 4 zur Algebra II

Abgabe bis 12. November 2013, 17:00 Uhr

### Aufgabe 1. (2) *Normaler Abschluss*

Sei  $H$  eine Untergruppe einer Gruppe  $G$ . Sei  $(N_i)_{i \in I}$  die Familie all derjenigen Normalteiler in  $G$ , welche  $H$  umfassen. Zeige, dass  $\bigcap_{i \in I} N_i$  der normale Abschluss von  $H$  in  $G$  ist.

### Aufgabe 2. (2+2+2) *Beispiele für halbdirekte Produkte*

- a) Zeige, dass jedes direkte Produkt zweier Gruppen auch als halbdirektes Produkt angesehen werden kann.
- b) Zeige, dass die orthogonale Gruppe  $O_n(\mathbb{R})$  isomorph zu einem halbdirekten Produkt von  $SO_n(\mathbb{R})$  mit  $C_2$  ist.
- c) Zeige, dass folgende Abbildung ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

$$\mathbb{R}^3 \rtimes SO_3(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_4(\mathbb{R}), \quad (b, A) \longmapsto \left( \begin{array}{ccc|c} A & & & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

### Aufgabe 3. (1+1) *Urbilder unter Gruppenhomomorphismen*

Sei  $f : G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus.

- a) Sei  $K \subseteq H$  eine Untergruppe. Zeige, dass  $f^{-1}(K)$  eine Untergruppe von  $G$  ist.
- b) Sei  $K \subseteq H$  ein Normalteiler. Zeige, dass  $f^{-1}(K)$  ein Normalteiler in  $G$  ist.

### Aufgabe 4. (4+2) *Ein Kriterium für Auflösbarkeit*

- a) Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $N$  ein endlicher Normalteiler in  $G$ . Zeige, dass  $G$  genau dann auflösbar ist, wenn  $G/N$  und  $N$  es sind.
- S b) Zeige, dass jede endliche  $p$ -Gruppe auflösbar ist.

### Aufgabe 5. (2+2) *Auflösbare Normalteiler*

- a) Seien  $N$  und  $N'$  auflösbare Normalteiler in einer Gruppe  $G$ . Zeige, dass  $N \cdot N' := \{nn' \mid n \in N, n' \in N'\}$  eine Untergruppe und sogar ein auflösbarer Normalteiler in  $G$  ist.
- b) Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Zeige, dass ein größter endlicher auflösbarer Normalteiler in  $G$  existiert.
- c) *Für Teilnehmer des Pizzaseminars:* Gib kategorielle Interpretationen der Konstruktionen aus a) und b) in der durch die Halbordnung der auflösbaren Normalteiler induzierten Kategorie.