Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 1 zur Kommutativen Algebra

Abgabe bis zum Montag, den 26. Oktober 2015

Aufgabe 1. () *Invertierbarkeit und Nilpotenz in Ringen formaler Potenzreihen*

Sei A ein Ring. Sei $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots \in A[\![X]\!]$ eine formale Potenzreihe. Zeige:

a) Genau dann ist f eine Einheit in $A[\![X]\!]$, wenn a_0 in A invertierbar ist.

b) Ist f nilpotent, so sind alle Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$ nilpotent. (Gilt die Umkehrung?)

c) Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $A[\![X]\!]$, so gilt $X \in \mathfrak{m}$, die Kontraktion $\mathfrak{m}_0 := A \cap m$ ist ein maximales Ideal in A und $\mathfrak{m}$ ist das von $\mathfrak{m}_0$ und X in $A[\![X]\!]$ erzeugte Ideal.

d) Jedes Primideal von A ist Kontraktion eines Primideals von $A[\![X]\!]$.

Aufgabe 2. () *Charakterisierung von Wurzelidealen*

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Rings. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ genau dann mit seinem Wurzelideal übereinstimmt, wenn $\mathfrak{a}$ ein Schnitt von Primidealen ist.

Aufgabe 3. () *Inhalt von Polynomen*

Sei A ein Ring. Sei für ein Polynom $f = a_0 + \cdots + a_m X^m \in A[X]$ sein *Wurzelinhalt* das Ideal $J(f) := \sqrt{(a_0, \ldots, a_m)}$. Zeige für alle Polynome $f, g \in A[X]$: $J(fg) = J(f) \cap J(g)$.