

## Übungsblatt 3 zur Algebra II

Abgabe bis 5. November 2013, 17:00 Uhr

### Aufgabe 1. (2+2) *Länge von Bahnen*

Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Wirke  $G$  auf einer endlichen Menge  $X$ .

- a) Zeige oder widerlege: Die Länge einer beliebigen Bahn der Operation ist ein Teiler der Gruppenordnung.
- S b) Sei speziell  $|G| = 91$  und  $|X| = 71$ . Zeige, dass die Operation mindestens einen Fixpunkt besitzt.

### Aufgabe 2. (3+1) *Freie Wirkungen*

- a) Zeige, dass eine Wirkung einer Gruppe  $G$  auf einer Menge  $X$  genau dann *frei* ist (das bedeutet, dass alle Standgruppen  $G_x$  triviale Gruppen sind), wenn folgende Abbildung injektiv ist:

$$G \times X \longrightarrow X \times X, \quad (g, x) \mapsto (gx, x)$$

- b) Welche Länge haben Bahnen freier Wirkungen stets?

### Aufgabe 3. (2+2) *Wirkung vermöge Konjugation*

- a) Bestimme den Zentralisator von  $(1, 2) \in S_4$ .
- b) Seien  $H$  und  $H'$  zueinander konjugierte Untergruppen einer Gruppe  $G$ . Finde einen Gruppenisomorphismus  $H \rightarrow H'$ .

### Aufgabe 4. (1+3) *Klassifikation von Wirkungen*

- a) Wirke  $G$  auf Mengen  $Y_1, \dots, Y_n$ . Wie kann man unter Einbeziehung der gegebenen Operationen die disjunkt-gemachte Vereinigung  $Y_1 \amalg \dots \amalg Y_n$  mit der Struktur einer  $G$ -Wirkung versehen?
- b) Wirke eine endliche Gruppe  $G$  auf einer endlichen Menge  $X$ . Zeige, dass endliche Untergruppen  $H_1, \dots, H_n \subseteq G$  zusammen mit einem Isomorphismus von  $G$ -Wirkungen

$$G/H_1 \amalg \dots \amalg G/H_n \longrightarrow X$$

existieren. Dabei wirkt  $G$  auf den Summanden  $G/H_i$  jeweils durch Linkstranslation.

### Aufgabe 5. (4) *Schnitt von Normalteilern*

Sei  $(N_i)_{i \in I}$  eine Familie normaler Untergruppen einer Gruppe  $G$ . Zeige, dass  $N := \bigcap_{i \in I} N_i$  wieder ein Normalteiler von  $G$  ist.