Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 6 zur Algebra II

Abgabe bis 26. November 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (2+2) *Elementarteiler von Matrizen*

a) Sei M eine ganzzahlige $(n \times m)$-Matrix. Seien $d_1, \dots, d_r$ die Elementarteiler von M. Sei λ_i der größte gemeinsamer Teiler aller i-Minoren. Zeige: $\lambda_i = d_1 \cdots d_i$.

b) Bestimme die Elementarteiler folgender Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. (2+2) *Klassifikation endlicher abelscher Gruppen*

S a) Bestimme bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 24.

S b) Bestimme bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 180.

Aufgabe 3. (1+3) *Zerlegung in p-primäre Komponenten*

Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Eine Primzahl p heißt genau dann *assoziierte Primzahl zu A*, wenn die Untergruppe $A[p^\infty]$ derjenigen Elemente von A, deren Ordnung eine p-Potenz ist, nichttrivial ist. In diesem Fall heißt $A[p^\infty]$ *p-primäre Komponente von A*.

a) Zeige, dass A nur endlich viele assoziierte Primzahlen besitzt.

b) Zeige, dass A isomorph zum direkten Produkt der p-primären Komponenten von A ist.

Aufgabe 4. (2+2) *Lokalisierung nach einer Primzahl*

Sei p eine Primzahl und $\mathbb{Z}_p$ die Menge all derjenigen rationalen Zahlen, in deren vollständig gekürzter Bruchdarstellung der Nenner nicht durch p teilbar ist.

a) Zeige, dass $\mathbb{Z}_p$ ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist.

b) Welche Elemente von $\mathbb{Z}_p$ sind invertierbar?

Aufgabe 5. (2+2) *Beispiele für Ganzheitsringe*

S a) Zeige: $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\mathrm{i})} = \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

S b) Sei ζ eine primitive n-te Einheitswurzel. Zeige: $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta)} = \mathbb{Z}[\zeta]$.