Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 4 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m+2+m) *Endliche Erzeugung bei Moduln*

a) Finde ein Erzeugendensystem eines Moduls, sodass keine Teilfamilie eine Basis ist. Finde eine linear unabhängige Familie in einem Modul, sodass keine Erweiterung eine Basis ist.

b) Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Moduln. Zeige: Sind die beiden äußeren Moduln M' und M'' endlich erzeugt, so auch der mittlere.

c) Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Sei $\varphi : M \to A^n$ eine surjektive lineare Abbildung. Zeige, dass der Kern von φ endlich erzeugt ist.

Aufgabe 2. (2+m) *Erste Schritte mit exakten Sequenzen*

a) Sei M ein A-Modul und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A. Zeige: $M \otimes_A A/\mathfrak{a} \cong M/\mathfrak{a}M$.

b) Seien M und N flache A-Moduln. Zeige, dass auch $M \otimes_A N$ flach über A ist.

Aufgabe 3. (2+m+2) *Nullteiler beim Tensorprodukt*

Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler Ring.

a) Zeige, dass $\mathbb{Z}/(2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(3) = 0$.

b) Sei P ein endlich erzeugter Modul über A. Zeige: Ist $P \otimes_A k = 0$, so auch $P = 0$.

c) Zeige: Für endlich erzeugte A-Moduln M und N folgt aus $M \otimes_A N = 0$ schon $M = 0$ oder $N = 0$.

Aufgabe 4. (2+2+2) *Surjektivität von linearen Abbildungen*

a) Seien M und N Moduln über einem Ring A. Sei N endlich erzeugt. Sei $\mathfrak{a}$ ein im Jacobsonschen Radikal enthaltenes Ideal von A. Sei $\varphi : M \to N$ eine A-lineare Abbildung. Zeige: Ist die induzierte Abbildung $M/\mathfrak{a}M \to N/\mathfrak{a}N$ surjektiv, so auch φ.

b) Sei A ein Ring mit $1 \neq 0$. Sei $A^m \to A^n$ eine lineare Surjektion. Zeige, dass $m \geq n$.

c) Sei M eine $(n \times m)$-Matrix über einem lokalen Ring, welche aufgefasst als lineare Abbildung surjektiv ist. Zeige, dass M ähnlich zu einer (rechteckigen) Diagonalmatrix mit genau n Einsern auf der Hauptdiagonale ist.