Hinweise zu den Übungsaufgaben in Algebra I

Übungsblatt 1

Aufgabe 4. Hier gibt es viele verschiedene Lösungswege. Eine Möglichkeit besteht darin, den Winkel α bei den unteren Ecken der Skizze als Innenwinkel von drei verschiedenen Teildreiecken zu erkennen und den Tangens von α dann jeweils über Gegen- und Ankathete auszudrücken. Zusammen mit dem Satz von Pythagoras erhält man dann drei Gleichungen für drei Unbekannte.

Übungsblatt 2

Aufgabe 5. Die Teilaufgaben a), c) und d) können unabhängig von b) bearbeitet werden.

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Für Teilaufgabe a) ist es nützlich zu wissen, dass der Realteil einer algebraischen Zahl wieder algebraisch ist (wieso stimmt das?). Für die Teilaufgaben b) und c) ist es nicht nötig, eine explizite Darstellung der Lösung α zu berechnen.

Aufgabe 2. Für Teilaufgabe a) ist es ebenfalls nicht nötig, explizite Darstellungen der Lösungen x bzw. y zu berechnen. Auch ohne deren Kenntnis kann man nämlich das Verfahren aus Proposition 1.3 bzw. Hilfssatz 1.4 des Skripts einsetzen. Zur Kontrolle hier eine der insgesamt sechs Teilrechnungen, bevor man zur Bestimmung der Determinante schreiten kann:

$$xy \cdot c_{20} = -c_{01} + c_{11}.$$

Aufgabe 5. Je nachdem, wie man Teilaufgabe b) angeht, ist folgende für ganze Zahlen a und n gültige Äquivalenz hilfreich:

$$[\exists m \in \mathbb{Z}\colon a\,m \equiv 1 \mod n] \quad \Longleftrightarrow \quad a \text{ und } n \text{ sind zueinander teilerfremd.}$$

Ausgeschrieben besagt die linke Aussage, dass es eine weitere ganze Zahl m gibt, sodass die Zahl $a\,m$ bei Division durch n den Rest 1 lässt.

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Bezeichne f die zugehörige Polynomfunktion. Zeige, dass für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die weiter als die angegebene Länge vom Ursprung entfernt sind, der Betrag $|f(z)|$ echt größer als Null ist. Unter anderem benötigt man dazu die für alle komplexen Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ gültige Dreiecksungleichung

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$$

und die für alle komplexen Zahlen x, y sog. umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|x + y| \geq \Big||x| - |y|\Big| \geq |x| - |y|.$$

Aufgabe 2. Vorgehen kann man wie immer bei ϵ/δ-Aufgaben: Man gibt sich zunächst $R > 0$ und $\epsilon > 0$ beliebig vor. Dann lässt man schon an dieser Stelle Platz für die Definition von δ, da δ nicht von z und w abhängen darf – banalerweise ist die einfachste Möglichkeit, das sicherzustellen, δ vor z und w einzuführen. Danach gibt man sich beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z|, |w| \leq R$ und $|z - w| < \delta$ vor. In diesem Kontext versucht man schließlich (hierin steckt die Hauptarbeit), den Abstand $|f(z) - f(w)|$ nach oben durch ein Vielfaches von $|z - w|$ abzuschätzen; ist das gelungen, kann man nachträglich die Definition von δ ausfüllen. Für die Hauptarbeit ist neben der Dreiecksungleichung vielleicht die Identität

$$z^m - w^m = (z - w) \cdot (z^{m-1} + z^{m-2}w + z^{m-3}w^2 + \cdots + zw^{m-2} + w^{m-1})$$

hilfreich (wieso gilt sie?).

Aufgabe 5. Die Behauptung von Teilaufgabe b) ist nicht mit ihrer Umkehrung zu verwechseln (diese wird im Skript auf Seite 47 bewiesen).

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Die Zahl $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$ eine k-elementige Teilmenge auszuwählen.

Aufgabe 3. Teilaufgabe b) kann man durch eine längere, aber einfache, Rechnung lösen, wenn man direkt die Definition der Diskriminante benutzt und die durch den Vietaschen Satz gegebenen Relationen beachtet. Man kann aber auch die Rechenarbeit gegen Denkarbeit tauschen, wenn man den Tipp von Seite 61 des Skripts befolgt und ausarbeitet.

Aufgabe 5. In der gesamten Aufgabe bezeichnet „$f^{(k)}$“ die k-te Ableitung eines Polynoms f. Teilaufgabe a) kann man etwa mit einem Induktionsbeweis und der für alle $n, k \geq 0$ gültigen Identität

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

in Angriff nehmen. Die Summenschreibweise in der Angabe bedeutet, dass über alle natürlichen Zahlen i, j, die die Beziehung $i + j = k$ erfüllen, summiert wird. Vor der unendlichen Summe in Teilaufgabe c) muss man keine Angst haben: Denn ab einem gewissen Summationsindex sind die auftretenden Ableitungen sowieso null, sodass die unendliche Summe tatsächlich eine endliche ist. Man hat schon viel gewonnen, wenn man die Behauptung für die Spezialfälle $f := X^n$, $n \geq 0$, bewiesen hat; dafür ist vielleicht der binomische Lehrsatz hilfreich:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \, b^{n-i}.$$