

Übungsblatt 8 zur Algebra II

Abgabe bis 10. Dezember 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (2+2) Lokale Gleichheit und lokale Invertierbarkeit

Sei s_1, \dots, s_n eine Zerlegung der Eins eines kommutativen Rings R .

- Zeige, dass Elemente $f, g \in R$ genau dann gleich sind, wenn sie *lokal gleich* sind, das heißt, wenn $f = g$ in $R[s_i^{-1}]$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt.
- Zeige, dass ein Element $f \in R$ genau dann invertierbar ist, wenn es *lokal invertierbar* ist, das heißt, wenn für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ das Bild von f in $R[s_i^{-1}]$ invertierbar ist.

Aufgabe 2. (2+2) Spiel und Spaß mit dem gerichteten Limes

- Sei $(R_i)_{i \in I}$ ein gerichtetes System von Ringen mit Limes $R = \varinjlim_{i \in I} R_i$. Zeige, dass ein Element $x \in R_i$ genau dann in R invertierbar ist, wenn ein $j \succeq i$ existiert, sodass x in R_j invertierbar ist.
- Zeige, dass jeder Ring gerichteter Limes endlich erzeugter \mathbb{Z} -Algebren ist.

Aufgabe 3. (1+1+2) Beispiele für Primfaktorzerlegungen

- S a) Zeige, dass $3 + 2i \in \mathbb{Z}[i]$ irreduzibel ist.
S b) Zeige, dass $X^2 + Y \in \mathbb{Z}[X, Y]$ irreduzibel ist.
S c) Bestimme die Primfaktorzerlegung von $X^4 + 4Y^4 \in \mathbb{Z}[X, Y]$.

Aufgabe 4. (2+2) Allgemeine Irreduzibilitätskriterien

- Sei $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ ein Polynom über einem Integritätsbereich R . Sei Eins ein größter gemeinsamer Teiler der Koeffizienten von $f(X)$. Sei $p \in R$ ein Primelement, welches a_0, \dots, a_{n-1} teilt, a_n nicht teilt und a_0 nicht im Quadrat teilt. Zeige, dass $f(X)$ in $R[X]$ irreduzibel ist.
- Sei $I \subsetneq R$ ein echtes Ideal eines kommutativen Rings R . Sei $f(X) \in R[X]$ ein normiertes Polynom, das über R/I irreduzibel ist. Zeige, dass $f(X)$ dann auch als Element von $R[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 5. (2+2) Lokalisierung weg von einem Element

Sei f ein reguläres Element eines Integritätsbereichs R .

- Sei R sogar ein Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung. Zeige, dass $R[f^{-1}]$ dann ebenfalls ein Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung ist.
- Sei R faktoriell. Zeige, dass dann $R[f^{-1}]$ ebenfalls faktoriell ist.

Für eine spannende Bonus-Aufgabe bitte wenden.

Aufgabe 6. (1+2+1+2) *Lokale Gauß–Jordansche Normalform*

Eine $(n \times m)$ -Matrix über einem beliebigen kommutativen Ring R heißt genau dann *vom Rang* r , wenn das von den r -Minoren von A erzeugte Ideal das Einsideal und das von den $(r + 1)$ -Minoren erzeugte Ideal das Nullideal ist.

- a) Finde ein Beispiel für eine Matrix über einem Ring, die in diesem Sinn keinen Rang besitzt.

Ein kommutativer Ring R heißt *lokaler Ring*, falls

$$\forall x, y \in R: \quad x + y \text{ invertierbar} \implies x \text{ invertierbar oder } y \text{ invertierbar}.$$

- b) Sei A eine $(n \times m)$ -Matrix vom Rang r über einem lokalen Ring R . Zeige, dass A eine *Gauß–Jordansche Normalform* besitzt, also ähnlich zu einer rechteckigen Diagonalmatrix mit genau r Einsen und sonst nur Nullen auf der Hauptdiagonale ist.
- c) Sei nun R wieder ein beliebiger kommutativer Ring. Seien $x, y \in R$ derart, dass die Summe $x + y$ in R invertierbar ist. Zeige, dass es eine Zerlegung der Eins von R gibt, sodass in den lokalisierten Ringen jeweils x oder y invertierbar ist. Gewissermaßen ist also jeder Ring *lokal* ein lokaler Ring.
- d) Sei A eine $(n \times m)$ -Matrix vom Rang r über einem beliebigen kommutativen Ring R . Zeige, dass A *lokal* eine Gauß–Jordansche Normalform besitzt, dass es also eine Zerlegung s_1, \dots, s_n der Eins von R gibt, sodass A für jedes i über $R[s_i^{-1}]$ ähnlich zu einer solchen Diagonalmatrix ist.