Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 13 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (3) *Ein Erstsemestertraum wird wahr*

Sei $(x_n)_n$ eine Folge in einem Ring A. Sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A. Zeige: Genau dann konvergiert $(s_n)_n$, wenn $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist (bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie).

Aufgabe 2. (3) *Abgeschlossenheit maximaler Ideale*

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem Ring A. Zeige, dass ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A genau dann abgeschlossen bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie auf A ist, wenn $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$.

Aufgabe 3. (m) *Vervollständigung an maximalen Idealen*

Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in einem Ring A. Zeige, dass die Vervollständigung von A bezüglich der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie ein lokaler Ring ist.

Aufgabe 4. (2+?) *Analytische Umgebungen*

Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$.

a) Zeige: $K[\![X,Y]\!]/(y^2 - x^2) \cong K[\![X,Y]\!]/(y^2 - x^2 - x^3)$.

b) Zeige: $K[X,Y]/(y^2 - x^2) \not\cong K[X,Y]/(y^2 - x^2 - x^3)$. (Du darfst dich auf einen Körper deiner Wahl beschränken.)

Aufgabe 5. (0) *Die 10-adischen Zahlen*

Finde ein Element $x \in \mathbb{Z}_{10}$, das weder Null noch Eins ist, aber trotzdem die Identität $x^2 = x$ erfüllt. Kann ein Grundschulkind die ersten paar Ziffern von x bestimmen?