Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 19 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Die kanonische Filtrierung eines Komplexes*

Die *gute Abschneidung* eines Komplexes $K^\bullet$ über einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist der Komplex

$$(\tau_{\leq n} K^\bullet)^i := \begin{cases} K^\bullet, & \text{für } i < n, \\ \ker(K^n \to K^{n+1}), & \text{für } i = n, \\ 0, & \text{für } i > n. \end{cases}$$

a) Es gibt auch die *dumme Abschneidung*. Die gute Abschneidung hat ihr gegenüber den Vorteil, dass $H^i(\tau_{\leq n} K^\bullet)$ noch für $i \leq n$ mit $H^i(K^\bullet)$ übereinstimmt. Beweise diesen Sachverhalt.

b) Bestimme den Kokern der kanonischen Inklusion $\tau_{\leq n-1} K^\bullet \hookrightarrow \tau_{\leq n} K^\bullet$.

c) Finde einen Quasiisomorphismus vom Kokern in den im Grad n konzentrierten Komplex $H^n(K^\bullet)[-n]$.

d) Folgere: In $K(D(\mathrm{Kom}^b(\mathcal{A})))$ gilt die Rechnung $K^\bullet = \sum_n (-1)^n\, H^n(K^\bullet)$.

Die abgeleitete Kategorie $D(\mathrm{Kom}^b(\mathcal{A}))$ ist im Allgemeinen nicht abelsch. Ihre K-Theorie ist daher anders zu definieren: als die von den Objekten von $D(\mathrm{Kom}^b(\mathcal{A}))$ erzeugte abelsche Gruppe modulo den Relationen $X = X' + X''$ für jedes *ausgezeichnete Dreieck* $X' \to X \to X'' \to$. Das muss dich jetzt aber noch nicht kümmern. Bestätige die Rechnung einfach in $K(\mathrm{Kom}^b(\mathcal{A}))$, verwende aber die zusätzlichen Rechenregeln, dass quasiisomorphe Komplexe dieselbe Klasse in der K-Theorie haben und $L^\bullet[1] = -L^\bullet$ gilt.

Aufgabe 2. *Komplexe mit vorgegebener Kohomologie*

Sei $\mathcal{B}$ eine Serresche Unterkategorie einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Sei $\mathrm{Kom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ die volle Unterkategorie derjenigen Objekte $K^\bullet$ von $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, deren Kohomologien $H^n(K^\bullet)$ alle in $\mathcal{B}$ liegen. Dann definieren wir $D_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) := \mathrm{Kom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})[\mathrm{qis}^{-1}]$.

a) Zeige, dass $D_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ auf kanonische Art und Weise eine volle Unterkategorie von $D(\mathcal{A})$ ist.

b) Sei jedes Objekt aus $\mathcal{B}$ ein Unterobjekt eines Objekts aus $\mathcal{B}$, welches als Objekt von $\mathcal{A}$ injektiv ist. Zeige, dass der kanonische Funktor $D^+(\mathcal{B}) \to D^+_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ eine Kategorienäquivalenz ist.

Aufgabe 3. *Nullheit von Morphismen*

a) Zeige: Ein Morphismus f in $D(\mathcal{A})$ ist genau dann Null, wenn ein Quasiisomorphismus s existiert, sodass sf nullhomotop ist.

b) Zeige, dass die Implikationen

$$f = 0 \text{ in } \mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \Longrightarrow f = 0 \text{ in } \mathcal{K}(\mathcal{A}) \Longrightarrow f = 0 \text{ in } \mathcal{D}(\mathcal{A}) \Longrightarrow H^n(f) = 0 \text{ in } \mathcal{A} \text{ für alle } n$$

im Allgemeinen nicht umkehrbar sind.

Tipp: Folgt noch.

Aufgabe zu Ext-Gruppen auf Seite 184.