

Übungsblatt 14 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. Definition des Kerns

Sei \mathcal{C} eine Ab-angereicherte Kategorie. Sei $\varphi : X \rightarrow Y$ ein Morphismus in \mathcal{C} . Zeige, dass für ein Objekt K zusammen mit einem Morphismus $k : K \rightarrow X$ folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Das Paar stellt den Funktor $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$, $T \mapsto \ker(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y))$ dar.
2. Das Paar hat folgende universelle Eigenschaft: Es gilt $\varphi \circ k = 0$, und zu jedem Morphismus $k' : K' \rightarrow X$ mit $\varphi \circ k' = 0$ gibt es genau einen Morphismus $h : K' \rightarrow K$ mit $k' = k \circ h$.
3. Für alle Objekte T ist folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt.

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, K) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y)$$

$$\begin{array}{ccccc} & & K' & & \\ & \swarrow h & \downarrow k' & \searrow 0 & \\ K & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Zur Erinnerung: Ein Paar bestehend aus einem Objekt K und einem Element $k \in F(K)$ stellt genau dann einen Funktor $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ dar, wenn es folgende universelle Eigenschaft hat: Für jedes Objekt K' und jedes Element $k' \in F(K')$ existiert genau ein Morphismus $h : K' \rightarrow K$ mit $k' = F(h)(k)$.

Aufgabe 2. Kerne und Monomorphismen

Sei $\varphi : X \rightarrow Y$ ein Morphismus in einer Kategorie \mathcal{C} , die die Axiome A1 und A2 erfüllt.

- a) Zeige, dass φ genau dann ein Monomorphismus (d. h. linkskürzbar) ist, wenn das Nullobjekt zusammen mit dem eindeutigen Morphismus nach X ein Kern von φ ist.
- b) Formuliere und beweise mit wenig Aufwand die duale Aussage.
- c) Sei \mathcal{C} sogar abelsch und φ sowohl ein Mono- als auch ein Epimorphismus. Zeige, dass φ dann sogar ein Isomorphismus ist. (Man sagt auch, abelsche Kategorien seien *balanciert*. Welche wichtigen Kategorien sind nicht balanciert?)

Aufgabe 3. Rückzug von Mono- und Epimorphismen

Sei in einer beliebigen Kategorie \mathcal{C} ein Faserprodukt diagramm gegeben.

- a) Zeige: Ist f ein Monomorphismus, so auch f' .
- b) Sei \mathcal{C} sogar abelsch. Zeige: Ist f ein Epimorphismus, so auch f' .

Tip: Vollziehe die Behauptung erst im Fall $\mathcal{C} = R\text{-Mod}$ nach. Hole dir dann bessere Tipps ab.

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Aufgabe 4. Prägarben abelscher Gruppen

Zeige, dass die Kategorie der Prägarben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum (oder einer Örtlichkeit) eine abelsche Kategorie ist.

Aufgabe 5. Homotopietheorie von Nerven

- a) Sei $\eta : F \rightarrow G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Zeige, dass die induzierten simplizialen Abbildungen $NF, NG : N\mathcal{C} \rightarrow N\mathcal{D}$ zwischen den Nerven zueinander homotop sind.
- b) Sei $F \dashv G$ ein adjungiertes Funktorpaar. Zeige, dass NF eine Homotopieäquivalenz ist (mit NG als schwachem Inversen).
- c) Sei \mathcal{C} eine Kategorie, die ein initiales oder terminales Objekt besitzt. Zeige, dass $N\mathcal{C}$ zusammenziehbar ist, d. h. homotopieäquivalent zu einem Punkt.

Tipp: Elegant kann man das mit Teilaufgabe b) lösen.