

## Übungsblatt 16 zur Homologischen Algebra II

### Aufgabe 1. *Universelle Eigenschaft der Garbifizierung*

Seien  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  Prägarben auf einem topologischen Raum  $X$  (oder einer Örtlichkeit). Sei  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ein Morphismus von Prägarben. Sei  $\mathcal{G}$  sogar eine Garbe. Sei  $\mathcal{F} \xrightarrow{\iota} s(\mathcal{F})$  die Garbifizierung von  $\mathcal{F}$ . Konstruiere einen Garbenmorphismus  $\bar{\alpha} : s(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{G}$  mit  $\bar{\alpha} \circ \iota = \alpha$  und weise insbesondere seine Wohldefiniertheit nach.

### Aufgabe 2. *Halme des Pushforwards*

- a) Sei  $X$  ein topologischer Raum. Sei  $f : Y \hookrightarrow X$  die Inklusion eines abgeschlossenen Teilraums. Sei  $\mathcal{E}$  eine Garbe auf  $Y$ . Zeige:

$$(f_*\mathcal{E})_x \cong \begin{cases} \mathcal{E}_x, & \text{falls } x \in Y, \\ \{0\}, & \text{falls } x \notin Y. \end{cases}$$

- b) Mache dir anhand eines Beispiels klar, dass die analoge Aussage für Inklusionen offener Teilräume im Allgemeinen nicht gilt.
- c) Folgere, dass der Pushforward-Funktor  $f_* : \text{AbShv}(Y) \rightarrow \text{AbShv}(X)$  in der Situation von Teilaufgabe a) exakt ist.
- d) Sei  $f : Y \rightarrow X$  eine abgeschlossene stetige Abbildung. Sei  $\mathcal{E}$  eine Garbe auf  $Y$ . Sei  $x \in X$ . Zeige:  $(f_*\mathcal{E})_x \cong \Gamma(f^{-1}[x], \mathcal{E})$ .

*Hinweis:* Beachte, dass die Faser  $f^{-1}[x]$  im Allgemeinen nicht offen sein wird. Die rechte Seite ist daher als Kolimes über die  $\mathcal{E}(U)$ , wobei  $U \subseteq Y$  alle offenen Mengen mit  $f^{-1}[x] \subseteq U$  durchläuft, definiert.

*Tipp:* Eine stetige Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle  $x \in X$  und alle offenen Umgebungen  $U$  von  $f^{-1}[x]$  in  $Y$  eine offene Umgebung  $V$  von  $x$  mit  $f^{-1}[V] \subseteq U$  existiert. (Siehe zum Beispiel Torsten Wedhorn, *Manifolds, sheaves, and cohomology*, Seite 86.)

### Aufgabe 3. *Beispiele für flache Moduln*

- a) Zeige: Jeder freie Modul ist flach.
- b) Zeige: Direkte Summanden freier Moduln sind flach.
- c) Zeige: Filtrierte Kolimiten flacher Moduln (also Moduln der Form  $\text{colim}_{i \in I} M_i$ , wobei  $I$  eine filtrierte Kategorie ist) sind flach.

*Erinnerung:* Eine Kategorie heißt genau dann *filtriert*, wenn in ihr jedes endliche Diagramm einen Kokegel besitzt (welcher nicht unbedingt eine universelle Eigenschaft erfüllen muss). Wenn du magst, kannst du der Einfachheit halber gerne annehmen, dass  $I$  die von einer gerichteten Menge induzierte Kategorie ist.

*Hinweis:* In der Übung werden wir diskutieren, wie man sich Flachheit von Moduln geometrisch vorstellen kann.

#### Aufgabe 4. Serresche Quotientenkategorien

Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Sei  $\mathcal{B}$  eine *Serresche Unterkategorie* von  $\mathcal{A}$ , das ist eine volle Unterkategorie, welche das Nullobjekt von  $\mathcal{A}$  enthält und für die für jede kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$  in  $\mathcal{A}$  folgendes gilt:  $X$  liegt genau dann in  $\mathcal{B}$ , wenn  $X'$  und  $X''$  in  $\mathcal{B}$  liegen.

- Zeige: Ist  $X$  ein Objekt von  $\mathcal{B}$ , so liegt auch jedes in  $\mathcal{A}$  zu  $X$  isomorphe Objekt in  $\mathcal{B}$ .
- Mache dir kurz klar: Die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume ist eine Serresche Unterkategorie der Kategorie aller Vektorräume.
- Die *Serresche Quotientenkategorie*  $\mathcal{A}/\mathcal{B}$  hat als Objekte dieselben wie  $\mathcal{A}$ . Die Morphismen definiert man über den (gerichteten) Kolimes

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}(X, Y) := \mathrm{colim}_{X', Y'} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', Y/Y'),$$

wobei  $X'$  über alle Unterobjekte von  $X$  mit  $X/X' \in \mathcal{B}$  und  $Y'$  über alle Unterobjekte von  $Y$  mit  $Y' \in \mathcal{B}$  läuft. Wie ist die Morphismenverkettung in  $\mathcal{A}/\mathcal{B}$  zu definieren? Wieso ist der Kolimes gerichtet? Wie wird  $\mathcal{A}/\mathcal{B}$  zu einer abelschen Kategorie? Welchen Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B}$  kann man kanonisch angeben? Wieso ist dieser exakt? Wieso gilt genau dann  $F(X) = 0$ , wenn  $X \in \mathcal{B}$ ? Wieso ist  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B}$  unter allen exakten Funktoren  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  mit dieser Eigenschaft initial? Kläre so viele dieser Fragen, wie du möchtest.

*Bemerkung:* Serresche Quotientenkategorien sind zur algorithmischen Implementierung von Kategorien kohärenter Modulgarben auf gewissen Schemata nützlich (siehe Artikel von Mohamed Barakat und anderen).

#### Aufgabe 5. Der Satz von Jordan–Hölder

Ein Objekt  $X$  einer abelschen Kategorie heißt genau dann *einfach*, wenn es *genau zwei* Unterobjekte besitzt. (Ein *Unterobjekt* ist ein Monomorphismus  $U \xrightarrow{i} X$ . Unterobjekte  $U \xrightarrow{i} X$ ,  $U' \xrightarrow{i'} X$  werden genau dann als gleich angesehen, wenn es einen Isomorphismus  $q : U \rightarrow U'$  mit  $i' \circ q = i$  gibt.) Das Nullobjekt zählt also nicht als einfach.

Eine *Jordan–Hölder-Reihe* für ein Objekt  $X$  ist eine Filtrierung  $0 = X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X_{n-1} \hookrightarrow X_n = X$ , sodass die Quotienten  $X_i/X_{i-1}$  jeweils einfache Objekte sind.

- Zeige: Je zwei Jordan–Hölder-Reihen eines Objekts  $X$  haben dieselbe Länge und bis auf Isomorphie treten dieselben Quotienten auf.

*Tipp:* Lasse dich vom klassischen Beweis des Satzes über Schreier–Zassenhaus, zum Beispiel für Gruppen oder Moduln, inspirieren.

- Sei  $A$  eine  $(n \times n)$ -Matrix über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$ . Der Vektorraum  $K^n$  wird durch die Setzung  $f(X) \cdot v := f(A)v$  für  $f \in K[X]$  und  $v \in K^n$  zu einem  $K[X]$ -Modul. Hängen die Jordanform von  $A$  und Jordan–Hölder-Reihen von  $K^n$  als  $K[X]$ -Modul miteinander zusammen?