Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

Übungsblatt 12 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. *Freie Konstruktionen*

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie algebraischer Strukturen (etwa $\mathcal{C} = \mathrm{Ring}$ oder $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(R)$). Anschaulich stellt man sich das von den Elementen einer gewissen Menge M *frei erzeugte Objekt* $L(M)$ in $\mathcal{C}$ wie folgt vor: Man beginnt mit den Elementen aus M und fügt all solche Ausdrücke hinzu, dass $L(M)$ zu einem Objekt von $\mathcal{C}$ wird (etwa Summen und Produkte im Fall $\mathcal{C} = \mathrm{Ring}$). Dabei nimmt man nur solche Identifikationen vor, die von den Axiomen gefordert werden (etwa das Assoziativgesetz). Die Zuordnung $M \mapsto L(M)$ definiert dann einen Funktor $\mathrm{Set} \to \mathcal{C}$, welcher *linksadjungiert zum Vergissfunktor* $V : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ ist.

a) Erkläre, inwieweit die Adjunktionsbeziehung $L \dashv V$ die anschauliche Vorstellung kodiert. (Diese Frage hat eine präzise Antwort.)

b) Bestimme für die folgenden Vergissfunktoren Linksadjungierte.

1) $\mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Set}$
2) $\mathrm{Mon} \to \mathrm{Set}$
3) $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$
4) $\mathrm{Ring} \to \mathrm{Set}$
5) $\mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$
6) $\mathrm{sSet} \to \mathrm{Set}$
7) $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp}$
8) $\mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Ab}$
9) $\mathrm{Alg}(R) \to \mathrm{Mod}(R)$
10) $\mathrm{Met}_{\mathrm{complete}} \to \mathrm{Met}$
11) $\mathrm{Alg}(k) \to \mathrm{LieAlg}(k)$
12) $\mathrm{sSet} \to \text{semi-sSet}$

Dabei ist Mon die Kategorie der Monoide, $\mathrm{Alg}(R)$ die Kategorie der R-Algebren, $\mathrm{Met}_{\mathrm{complete}}$ die Kategorie der vollständigen metrischen Räume und gleichmäßig stetigen Abbildungen und semi-sSet die Kategorie der Verklebedaten. Findest du zum Vergissfunktor $\mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ auch einen *Rechts*adjungierten?

Noch zu TeXen:

```
Berechnung vom Cartier-Dual der affinen Gruppe über k der n-ten
Einheitswurzeln: \Spec k[x]/(x^n - 1), wobei k ein beliebiger (kommutativer)
Grundring ist.

II.3.20: Beweise die universelle Eigenschaft des im Beweis konstruierten
Objektes X.

II.3.24: Zeige (II.16), nämlich, daß F -> FGF -> F und G -> GFG -> G
Identitäten sind.

Adjunktionsverhältnisse zwischen Aufrundung und Abrundung

Ansonsten noch Aufgabe 2., 3. und 8.
Aufgabe 10. ist außerdem ein nettes konkretes Beispiel.
```