Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2014

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 8 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. *Prismentriangulierung*

In der Vorlesung wurde $\Delta_p \times I$ durch Simplizes $\delta_{p\ell}[\Delta_{p+1}]$ trianguliert (Seite 50f. in Gelfand–Manin). Sei $\delta_p = \sum_{\ell=0}^{p}(-1)^\ell \delta_{p\ell}$, seien ε_0 und $\varepsilon_1 : \Delta_p \to \Delta_p \times I$ die singulären p-Simplizes mit $\varepsilon_i(\lambda) = (\lambda, i)$ und sei für $i = 0, \ldots, p$

$$\delta_{p-1}^{(i)} = \sum_{\ell=0}^{p-1}(-1)^\ell (\Delta_{\partial_p^i} \times \mathrm{id}_I) \circ \delta_{p-1,\ell} : \Delta_p \to \Delta_p \times I$$

eine Darstellung der i-ten Seite von $\Delta_p \times I$ als singuläre Kette. Die Abbildung $\Delta_{\partial_p^i}$ hat dabei den Typ $\Delta_{p-1} \to \Delta_p$ und wird von der Korandabbildung $\partial_p^i : [p-1] \to [p]$ induziert.

a) Interpretiere folgende Identität anschaulich und beweise sie:

$$d\delta_p = -\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \delta_{p-1}^{(i)} + \varepsilon_1 - \varepsilon_0$$

b) Inwieweit spielt sich beim Beweis, dass homotope stetige Abbildungen kettenhomotope Komplexmorphismen induzieren, eigentlich alles auf dem Standardprisma ab? Inwieweit genügt es, die Behauptung für diesen Fall zu beweisen?

Aufgabe 2. *Viele Homotopiebegriffe*

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass zueinander homotope stetige Abbildungen zueinander homotope Morphismen zwischen den zugehörigen singulären Kettenkomplexen induzieren. In dieser Aufgabe möchten wir verstehen, dass dieses Resultat tatsächlich über zwei kleinere und unabhängig voneinander nützliche Beobachtungen faktorisiert.

a) Seien $f, g : X \to Y$ zueinander homotope stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Diese induzieren bekanntlich simpliziale Abbildungen $Sf, Sg : SX \to SY$ zwischen den zugehörigen singulären simplizialen Mengen. Zeige, dass diese im Sinn von Aufgabe 4 von Blatt 4 zueinander homotop (sogar einfach homotop) sind.

   Zur Erinnerung: $(SX)_n = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\Delta_n, X)$. *Tipp:* Dieses Ergebnis ist recht formaler Natur. Du wirst keine Triangulierungen von Prismen benötigen.

b) Seien $\varphi, \psi : X \to Y$ zueinander homotope simpliziale Abbildungen zwischen simplizialen Mengen. Zeige, dass für beliebige Koeffizientengruppen A die induzierten Kettenkomplexmorphismen $C_\bullet(X, A) \to C_\bullet(Y, A)$ zueinander kettenhomotop sind.

   Tipp: Vielleicht ist es einfacher, die Kettenhomotopie der induzierten Morphismen zwischen den normalisierten Moore-Komplexen (siehe Aufgabe 2 von Blatt 7) nachzuweisen. Wieso genügt das?

Aufgabe 3. *Der Hochschild-Komplex*

Sei k ein kommutativer Ring (mit Eins), A eine assoziative (aber nicht unbedingt kommutative) k-Algebra und M ein A-A-Bimodul (was ist das?). Wir statten die k-Moduln $C_n(A, M) := M \otimes A^{\otimes n}$ (alle Tensorprodukte über k) mit den Randabbildungen

$$\begin{aligned} d^0(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= ma_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \\ d^i(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_n \\ d^n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= a_n m \otimes a_1 \cdots \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

und dem Differential $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i d^i : C_n(A, M) \to C_{n-1}(A, M)$ aus. Die Homologie von $C_\bullet(A, M)$ ist die *Hochschild-Homologie* der Algebra A mit Koeffizienten in M.

a) Zeige, dass d wirklich ein Differential ist.

b) Was ist $H_0(C_\bullet(A, A))$?

Aufgabe 4. *Der Koszul-Komplex*

Sei A ein kommutativer Ring und M ein A-Modul. Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_p : M \to M$ paarweise kommutierende Endomorphismen. Auf den A-Moduln $M^n := M \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^n \mathbb{Z}^p$ definieren wir das Differential

$$d(x \otimes (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n})) := \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) \otimes (e_j \wedge e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}).$$

Dabei ist $(e_1, \ldots, e_p)$ die kanonische Basis in $\mathbb{Z}^p$ und $\Lambda^n \mathbb{Z}^p$ die n-te *äußere Potenz* von $\mathbb{Z}^p$.

a) Zeige, dass diese Setzung wirklich zu einem Differential führt.

Bedeutsam ist der Koszul-Komplex unter anderem aus folgendem Grund: Sei speziell $M = A$ und seien die φ_i durch Multiplikation mit gewissen Elementen x_i gegeben. Sei die Folge $(x_1, \ldots, x_n)$ *regulär*, das heißt, dass für $j = 1, \ldots, p$ das Element x_i im Ring $A/(x_1, \ldots, x_{i-1})$ regulär ist. Dann gilt $H^p(M^\bullet) \cong A/(x_1, \ldots, x_n)$ und die sonstige Kohomologie verschwindet. Der Komplex $M^\bullet$ definiert daher eine *Auflösung* von $A/(x_1, \ldots, x_n)$.

b) Gib für $p = 1$ und $p = 2$ den Koszul-Komplex in diesem Spezialfall explizit an.

c) Wenn du möchtest, kannst du versuchen, die Aussage über die Kohomologie zu beweisen. Momentan ist das aber etwas mühevoll, später werden wir vereinfachende Techniken kennenlernen.

Aufgabe 5. *Differentialformen und die Formel von Cartan*

Das *Differential* einer glatten Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, wobei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, ist der formale Ausdruck $df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so definieren wir eine Prägarbe $\widetilde{\mathcal{A}}^1$ auf M durch die Forderung, dass $\widetilde{\mathcal{A}}^1(U)$ für solche offene Teilmengen U, die isomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ sind, die Menge formaler Summen von Produkten glatter Funktionen mit beliebigen Differentialen ist. Die Garbifizierung von $\widetilde{\mathcal{A}}^1$ ist dann die Garbe $\mathcal{A}^1$ der *1-Formen* auf M. Die Garbe der p-Formen definieren wir als Garbifizierung der Prägarbe $U \mapsto \Lambda^p_{\mathcal{C}^\infty} \mathcal{A}^1(U)$.

a) Seien ξ und η Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M, also Derivationen $\mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$. Zeige, dass die *Lie-Klammer* $[\xi, \eta] := \xi \circ \eta - \eta \circ \xi$ wieder eine Derivation ist.

Ist ξ ein Vektorfeld und fdg eine 1-Form, so definieren wir $\iota_\xi(fdg) = f \cdot \xi(g)$. Das definiert einen Garbenmorphismus $\mathcal{A}^1 \to \mathcal{C}^\infty$ (wie genau?). Wenn wir fordern, dass die Leibnizregel gelten soll, gibt es ferner nur eine Fortsetzung zu Garbenmorphismen $\mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^{p-1}$. Damit können wir $\omega(\xi_1, \ldots, \xi_n) := (\iota_{\xi_n} \circ \cdots \iota_{\xi_1})(\omega)$ für n-Formen ω definieren.

b) Bestätige die Formel von Cartan (Seite 49 in Gelfand–Manin).