

Übungsblatt 19 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. Nullmorphisamen

- Zeige: Ein Morphismus f in $D(\mathcal{A})$ ist genau dann Null, wenn ein Quasiisomorphismus s existiert, sodass sf nullhomotop ist.
- Zeige: Ein Komplex ist genau dann azyklisch, wenn sein Identitätsmorphimus in $D(\mathcal{A})$ Null ist.
- Finde einen Morphismus, der nicht in $\text{Kom}(\mathcal{A})$, aber in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ Null ist; einen, der nicht in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, aber in $D(\mathcal{A})$ Null ist; einen, der nicht in $D(\mathcal{A})$ Null ist, aber in Kohomologie den Nullmorphismus induziert.
- Finde einen nichttrivialen Morphismus zwischen den folgenden Komplexen in $D(\text{Ab})$.

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/(2) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Aufgabe 2. Komplexe mit vorgegebener Kohomologie

Sei \mathcal{B} eine Serresche Unterkategorie einer abelschen Kategorie \mathcal{A} . Sei $\text{Kom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ die volle Unterkategorie derjenigen Objekte K^\bullet von $\text{Kom}(\mathcal{A})$, deren Kohomologien $H^n(K^\bullet)$ alle in \mathcal{B} liegen. Dann definieren wir $D_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) := \text{Kom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})[\text{qis}^{-1}]$.

- Zeige, dass $D_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ auf kanonische Weise eine volle Unterkategorie von $D(\mathcal{A})$ ist.
- Sei jedes Objekt aus \mathcal{B} ein Unterobjekt eines Objekts aus \mathcal{B} , welches als Objekt von \mathcal{A} injektiv ist. Zeige, dass der kanonische Funktor $D^+(\mathcal{B}) \rightarrow D_{\mathcal{B}}^+(\mathcal{A})$ eine Kategorienäquivalenz ist.

Aufgabe 3. Zerfallende kurze exakte Sequenzen

- Zeige, dass folgende Bedingungen an eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \rightarrow 0$ in einer abelschen Kategorie äquivalent sind:
 - Die Sequenz zerfällt.
 - Es gibt einen Morphismus $s : Z \rightarrow Y$ mit $ps = \text{id}$.
 - Es gibt einen Morphismus $t : Y \rightarrow X$ mit $ti = \text{id}$.
- Folgere, dass wenn X injektiv oder Z projektiv ist, die Sequenz zerfällt.
- Folgere, dass additive Funktoren stets zerfallende kurze exakte Sequenzen bewahren.

Aufgabe 4. Klassifikation kurzer exakter Sequenzen

Für Objekte X und Y in einer abelschen Kategorie \mathcal{A} ist $\text{Ext}^1(X, Y)$ die Klasse aller kurzen exakten Sequenzen der Form $0 \rightarrow Y \rightarrow ? \rightarrow X \rightarrow 0$ modulo der Äquivalenzrelation „obere Zeile \sim untere Zeile“ für jedes kommutative Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & ? & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & ?' & \longrightarrow & X \longrightarrow 0. \end{array}$$

- a) Ist $\varphi : Y \rightarrow Y'$ ein Morphismus und $E : 0 \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz, so können wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} E: & 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i} & Z & \longrightarrow X \xrightarrow{p} 0 \\ & & & \downarrow \varphi & & \downarrow & \parallel \\ \varphi E: & 0 & \longrightarrow & Y' & \dashrightarrow & Z \amalg_Y Y' & \dashrightarrow X \longrightarrow 0 \end{array}$$

konstruieren. Zeige, dass die untere Zeile φE wieder exakt ist, und dass die Zuordnung $E \mapsto \varphi E$ eine wohldefinierte Abbildung $\text{Ext}^1(X, Y) \rightarrow \text{Ext}^1(X, Y')$ induziert.

Tipp: Der auftretende Kolimes kann auch als $(Z \oplus Y')/\{(\varphi(y), -i(y)) \mid y : Y\}$ geschrieben werden. Beweise die Behauptung mit Diagrammjagen.

Analog kann man auch für Morphismen $\psi : X' \rightarrow X$ eine wohldefinierte Zuordnung $E \in \text{Ext}^1(X, Y) \mapsto E\psi \in \text{Ext}^1(X', Y)$ konstruieren. Nimm zur Kenntnis: $(\varphi_1 \circ \varphi_2)E = \varphi_1(\varphi_2 E)$, $E(\psi_1 \circ \psi_2) = (E\psi_1)\psi_2$, $(\varphi E)\psi = \varphi(E\psi)$.

Sind $E, E' \in \text{Ext}^1(X, Y)$, so definieren wir ihre *Baersumme* als $\nabla_Y(E \oplus E')\Delta_X \in \text{Ext}^1(X, Y)$. Dabei sind $\Delta_X : X \rightarrow X \oplus X$ und $\nabla_Y : Y \oplus Y \rightarrow Y$ die kanonischen Morphismen und $E \oplus E'$ die sich durch direkte Summenbildung ergebende Sequenz in $\text{Ext}^1(X \oplus X, Y \oplus Y)$.

- b) Zeige, dass $\text{Ext}^1(X, Y)$ mit der Baersumme zu einer abelschen Gruppe mit Nullelement $[0 \rightarrow Y \rightarrow X \oplus Y \rightarrow X \rightarrow 0]$ wird.

Aufgabe 5. Die kanonische Filtrierung eines Komplexes

Die *gute Abschneidung* eines Komplexes K^\bullet über einer abelschen Kategorie \mathcal{A} ist der Komplex

$$(\tau_{\leq n} K^\bullet)^i := \begin{cases} K^i, & \text{für } i < n, \\ \ker(K^n \rightarrow K^{n+1}), & \text{für } i = n, \\ 0, & \text{für } i > n. \end{cases}$$

- a) Es gibt auch die *dumme Abschneidung*. Die gute Abschneidung hat ihr gegenüber den Vorteil, dass $H^i(\tau_{\leq n} K^\bullet)$ noch für $i \leq n$ mit $H^i(K^\bullet)$ übereinstimmt. Beweise diesen Sachverhalt.
- b) Bestimme den Kokern der kanonischen Inklusion $\tau_{\leq n-1} K^\bullet \hookrightarrow \tau_{\leq n} K^\bullet$.
- c) Finde einen Quasiisomorphismus vom Kokern in den im Grad n konzentrierten Komplex $H^n(K^\bullet)[-n]$.
- d) Folgere: In $K(D(\text{Kom}^b(\mathcal{A})))$ gilt die Rechnung $K^\bullet = \sum_n (-1)^n H^n(K^\bullet)$.

Die abgeleitete Kategorie $D(\text{Kom}^b(\mathcal{A}))$ ist im Allgemeinen nicht abelsch. Ihre K-Theorie ist daher anders zu definieren: als die von den Objekten von $D(\text{Kom}^b(\mathcal{A}))$ erzeugte abelsche Gruppe modulo den Relationen $X = X' + X''$ für jedes *ausgezeichnete Dreieck* $X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow$. Das muss dich jetzt aber noch nicht kümmern. Bestätige die Rechnung einfach in $K(\text{Kom}^b(\mathcal{A}))$, verwende aber die zusätzlichen Rechenregeln, dass quasiisomorphe Komplexe dieselbe Klasse in der K-Theorie haben und $L^\bullet[1] = -L^\bullet$ gilt.