Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 18 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Informationsverlust beim Dualisieren*

a) Zeige: $(\mathbb{Z}/(2))^\vee = 0$. Folgere: $(\mathbb{Z}/(2))^{\vee\vee} \ncong \mathbb{Z}/(2)$.
Dabei ist $M^\vee := \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M, \mathbb{Z})$ für $\mathbb{Z}$-Moduln M.

b) Finde eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}/(2)$ der Form $0 \to {?} \to {?} \to 0$.

c) Dualisiere den Komplex aus b).

d) Dualisiere den Komplex aus c).

e) Zeige: Die Komplexe aus b) und d) sind zueinander isomorph.

f) Was ist die Moral der Geschichte?

Aufgabe 2. *Die Kategorie der vollständigen metrischen Räume*

Sei Met die Kategorie der metrischen Räume und lipschitzstetigen Abbildungen. Sei $\mathrm{Met}_{\mathrm{compl}}$ ihre volle Unterkategorie der vollständigen metrischen Räume. Für welche Klasse S von Morphismen gilt $\mathrm{Met}_{\mathrm{compl}} \simeq \mathrm{Met}[S^{-1}]$?

Aufgabe 3. *Die K-Theorie einer abelschen Kategorie*

Die *K-Theorie* $K(\mathcal{A})$ einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ wird als abelsche Gruppe von den Objekten aus $\mathcal{A}$ und, für jede kurze exakte Sequenz $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ in $\mathcal{A}$, der Relation $X = X' + X''$ erzeugt.

a) Gelte $X \cong Y$ in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Zeige: $X = Y \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$.

b) Zeige: Die K-Theorie der Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume ist isomorph zu $\mathbb{Z}$.

c) Zeige: Die K-Theorie der Kategorie aller Vektorräume ist Null.

d) Sei $\mathrm{Kom}^\mathrm{b}(\mathcal{A})$ die Kategorie der beschränkten Kettenkomplexe über einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Zeige: Die auf Erzeugern gegebene Zuordnung
$$K(\mathrm{Kom}^\mathrm{b}(\mathcal{A})) \longrightarrow K(\mathcal{A}),\ K^\bullet \longmapsto \chi(K^\bullet) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n\, K^n$$
induziert eine wohldefinierte Surjektion. (Teilt man in $K(\mathrm{Kom}^\mathrm{b}(A))$ noch die Relationen $K^\bullet[1] = -K^\bullet$ heraus, wird die induzierte Abbildung sogar ein Isomorphismus.)
Tipp: Zeige $\chi(K^\bullet) = \chi(H^\bullet(K^\bullet))$ und verwende die lange exakte Sequenz.

Aufgabe 4. *Serresche Quotientenkategorien als Lokalisierungen*

Sei $\mathcal{B}$ eine Serresche Unterkategorie einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Sei S die Klasse all derjenigen Morphismen in $\mathcal{A}$, deren Kerne und Kokerne in $\mathcal{B}$ liegen. Zeige: $\mathcal{A}/\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}[S^{-1}]$.

Aufgabe 5. *Wohldefiniertheit der Arbeit mit Dächern*

a) Zeige, dass die Komposition von Dächern wohldefiniert ist.

b) Wie addiert man zwei Dächer?