

Übungsblatt 24 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Spektralsequenzen als Verallgemeinerungen langer exakter Sequenzen*

Sei eine Spektralsequenz $E_1^{pq} \Rightarrow E_\infty^n$ gegeben, deren erste Seite in den Spalten $p = 0$ und $p = 1$ konzentriert ist. Seien die Filtrierungen $F^\bullet E_\infty^n$ separiert und erschöpfend (exhaustive).

- a) Zeige, dass die Spektralsequenz auf Seite 2 degeneriert.
- b) Zeige: $F^2 E_\infty^n = F^3 E_\infty^n = \dots = 0$ und $F^0 E_\infty^n = F^{-1} E_\infty^n = \dots = E_\infty^n$.
- c) Drücke die folgende kurze Sequenz über Objekte aus der zweiten Seite aus.

$$0 \longrightarrow F^1 E_\infty^n \longrightarrow E_\infty^n \longrightarrow E_\infty^n / F^1 E_\infty^n \longrightarrow 0$$

- d) Konstruiere eine lange exakte Sequenz der Form

$$\dots \longrightarrow E_1^{1,n-1} \longrightarrow E_\infty^n \longrightarrow E_1^{0n} \xrightarrow{\partial} E_1^{1n} \longrightarrow \dots$$