Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 17 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Halmweise Exaktheit*

Sei X ein topologischer Raum (keine Örtlichkeit!). Sei $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ eine Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf X. Zeige, dass sie genau dann exakt ist (im allgemeinen Sinn der Exaktheit in abelschen Kategorien), wenn für jeden Punkt $x \in X$ die induzierte Sequenz $0 \to \mathcal{E}_x \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to 0$ von Halmen exakt ist.

Aufgabe 2. *Kategorielle Charakterisierung von partieller Exaktheit*

Zeige, dass ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien genau dann linksexakt ist, wenn er endliche Limiten bewahrt.

Aufgabe 3. *Beispiele für projektive Moduln*

a) Zeige, dass $\mathbb{Z}/(2)$ als $\mathbb{Z}/(6)$-Modul projektiv, aber nicht frei ist.

b) Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ und $\mathfrak{m} = (3, 1 + \sqrt{-5})$ das bekannte Beispiel für ein maximales Ideal, das lokal ein Hauptideal, aber nicht selbst ein Hauptideal ist. Zeige, dass $\mathfrak{m}$ als R-Modul projektiv, aber nicht frei ist.

   Tipp: Projektivität von endlich präsentierten Moduln kann man lokal testen. Wäre $\mathfrak{m}$ frei, so wäre $\mathfrak{m}$ frei vom Rang 1 (wieso?). Damit wäre $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal (wieso?).

Die wichtigste Bezugsquelle für nicht-freie projektive Moduln sind nichttriviale Vektorbündel, das besagt der Satz von Serre–Swan. Eine gut lesbare Darstellung gibt es in Abschnitt 6 von Pete Clarks Notizen zu kommutativer Algebra, `http://www.math.uga.edu/~pete/integral.pdf#page=112`. In der algebraischen Geometrie lernt man, dass auch die Beispiele dieser Aufgabe von dieser Form sind.

Aufgabe 4. *Die Kategorie der Garben als Lokalisierung*

Sei X ein topologischer Raum. Sei S die Klasse all derjenigen Morphismen von Prägarben auf X, die halmweise Bijektionen sind. Zeige, dass die Kategorie der Garben auf X die Lokalisierung der Kategorie der Prägarben nach S ist: $\mathrm{Sh}(X) \simeq \mathrm{PSh}(X)[S^{-1}]$. Wie sehen unter dieser Äquivalenz der Vergissfunktor und der Garbifizierungsfunktor aus?

Ist S eine Klasse von Morphismen in einer Kategorie $\mathcal{C}$, so sind die Objekte von $\mathcal{C}[S^{-1}]$ per Definition dieselben wie die von $\mathcal{C}$. Morphismen $X \to Y$ in $\mathcal{C}[S^{-1}]$ sind aber formale Verknüpfungen von Morphismen in $\mathcal{C}$ und formalen Inversen von Morphismen aus S. Zum Beispiel kann ein Morphismus $X \to Y$ in $\mathcal{C}[S^{-1}]$ von der Form $X \to Z \dashrightarrow Z' \to Z'' \dashrightarrow Z''' \to Y$ sein – dabei sind die durchgezogenen Pfeile Morphismen aus $\mathcal{C}$ und die gestrichelten Pfeile formale Inverse von Morphismen $Z' \to Z$, $Z''' \to Z''$ aus S. Auf diese Art und Weise erreicht man, dass der kanonische Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ die Morphismen aus S auf Isomorphismen schickt und sogar unter all solchen Funktoren in einem 2-kategoriellen Sinn initial ist. Formale Inverse sind keine Erfindung der Kategorientheorie. In der Form des Übergangs von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ sind sie allgemein bekannt.

Aufgabe 5. *Ein Beispiel für den Pushforward von Garben*

Sei $f : S^1 \to S^1$ die Abbildung $z \mapsto z^2$ des Einheitskreises in sich. Sei $\underline{\mathbb{Z}}$ die konstante Garbe mit Halmen $\mathbb{Z}$ auf S^1. Was sind die Halme von $f_*\underline{\mathbb{Z}}$? Ist $f_*\underline{\mathbb{Z}}$ isomorph zu $\underline{\mathbb{Z}^2}$? Die Garbe $f_*\underline{\mathbb{Z}}$ ist lokal konstant. Was ist ihre Monodromie (Blatt 11, Aufgabe 5)?