Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

# Übungsblatt 9 zur Homologischen Algebra I

**Aufgabe 1.** *Funktoren als verallgemeinerte monotone Abbildungen*

Seien $P$ und $Q$ Quasiordnungen (oder Partialordnungen). Seien $BP$ und $BQ$ die zugehörigen dünnen Kategorien, deren Objekte genau die Elemente von $P$ bzw. $Q$ sind und in denen zwischen zwei Objekten genau dann ein Morphismus verläuft, wenn die Quelle kleinergleich dem Ziel ist.

a) Zeige, dass Funktoren $BP \to BQ$ auf kanonische Art und Weise mit schwach monoton steigenden Abbildungen $P \to Q$ korrespondieren.

b) Zeige, dass zwischen zwei Funktoren $Bf, Bg : BP \to BQ$ höchstens eine natürliche Transformation verlaufen kann; und dass es genau dann eine solche gibt, wenn für die zugehörigen monotonen Abbildungen $f, g : P \to Q$ gilt: $f(x) \preceq g(x)$ für alle $x \in P$.

**Aufgabe 2.** *Beispiele für natürliche Transformationen*

Sei $\mathrm{Id}_{\mathsf{Set}} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ der Identitätsfunktor auf $\mathsf{Set}$, $P : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ der (kovariante) Potenzmengenfunktor und $K : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ der Funktor

$$\begin{array}{rcl} X & \longmapsto & X \times X \\ f & \longmapsto & f \times f := ((a,b) \mapsto (f(a), f(b))). \end{array}$$

a) Zeige: Es gibt nur eine einzige natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Id}_{\mathsf{Set}} \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Set}}$, nämlich

$$\eta_X : X \to X,\ x \mapsto x.$$

b) Zeige: Es gibt nur eine einzige natürliche Transformation $\omega : \mathrm{Id}_{\mathsf{Set}} \to K$, nämlich

$$\omega_X : X \to X \times X,\ x \mapsto (x, x).$$

*Tipp für a) und b):* Betrachte geeignete Abbildungen $1 \to X$, $\star \mapsto x$. Dabei ist $1 = \{\star\}$ eine einelementige Menge.

c) Zeige: Es gibt keine natürliche Transformation $P \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Set}}$, wohl aber eine in die andere Richtung.

d) Wir nehmen an, dass wir für jede nichtleere Menge $X$ ein bestimmtes Element $a_X \in X$ gegeben haben. Zeige: Die Setzung $\tau_X : X \to X,\ x \mapsto a_X$ definiert *nicht* eine natürliche Transformation $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, wobei $\mathcal{C}$ die Kategorie der nichtleeren Mengen und beliebigen Abbildungen bezeichnet.

e) Welche natürlichen Transformationen $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ gibt es, wenn $\mathcal{C}$ die Kategorie der reellen Vektorräume bezeichnet?

**Aufgabe 3.** *Die 2-Kategorie der Kategorien*

a) Seien $\eta : F \to G$ und $\varepsilon : G \to H$ natürliche Transformationen zwischen Funktoren $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Definiere auf geeignete Art und Weise die *vertikale Komposition* $\varepsilon \circ \eta : F \to H$. Weise nach, dass deine Definition wirklich zu einer natürlichen Transformation führt.

b) Sei $\eta : F \to G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\varepsilon : J \to K$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $J, K : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$. Definiere auf geeignete Art und Weise die *horizontale Komposition* $\eta \star \varepsilon : J \circ F \to K \circ G$. Musst du dazu Wahlen treffen?

c) Verifiziere für passende natürliche Transformationen folgendes Vertauschungsgesetz:

$$(\beta' \circ \beta) \star (\alpha' \circ \alpha) = (\beta' \star \alpha') \circ (\beta \star \alpha)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"{name=F}] \arrow[r, "G"{description, name=G}] \arrow[r, bend right=60, "H"'{name=H}] & \mathcal{D}
\arrow[Rightarrow, from=F, to=G, shorten=2pt, "\eta"]
\arrow[Rightarrow, from=G, to=H, shorten=2pt, "\varepsilon"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"{name=F}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=G}] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "J"{name=J}] \arrow[r, bend right, "K"'{name=K}] & \mathcal{E}
\arrow[Rightarrow, from=F, to=G, shorten=2pt, "\eta"]
\arrow[Rightarrow, from=J, to=K, shorten=2pt, "\varepsilon"]
\end{tikzcd}$$

**Aufgabe 4.** *Überraschende Kommutativität*

Zeige, dass die zweite Homotopiegruppe stets kommutativ ist.

*Diese Aufgabe wird noch ausgebaut, sodass sie etwas mit 2-Kategorien zu tun hat.*