Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2014

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 12 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. *Limiten zyklischer Gruppen*

Sei $\mathbb{N}$ mit der Teilbarkeitsordnung versehen. Zeige, dass der Kolimes $\operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/(n)$ die Faktorgruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist. Die Diagrammabbildungen $\mathbb{Z}/(n) \to \mathbb{Z}/(m)$ sind dabei durch (in $\mathbb{Z}$ zu berechnende) Multiplikation mit m/n gegeben.

Aufgabe 2. *Existenzkriterium für endliche Limiten*

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, in der es folgende spezielle endliche Limiten gibt: ein terminales Objekt, Produkte von je zwei Objekten und Differenzkerne (Equalizer) von je zwei parallelen Morphismen. Zeige, dass es in $\mathcal{C}$ dann schon alle endlichen Limiten gibt.

Hinweis: Es ist nur noch die universelle Eigenschaft des im Beweis der Vorlesung konstruierten Objekts X nachzuweisen.

Aufgabe 3. *Freie Konstruktionen*

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie algebraischer Strukturen (etwa $\mathcal{C}$ = Ring oder $\mathcal{C}$ = Mod(R)). Anschaulich stellt man sich das von den Elementen einer gewissen Menge M *frei erzeugte Objekt* $L(M)$ in $\mathcal{C}$ wie folgt vor: Man beginnt mit den Elementen aus M und fügt all solche Ausdrücke hinzu, damit $L(M)$ zu einem Objekt von $\mathcal{C}$ wird (etwa Summen und Produkte im Fall $\mathcal{C}$ = Ring). Dabei nimmt man nur solche Identifikationen vor, die von den Axiomen gefordert werden (etwa dem Assoziativgesetz). Die Zuordnung $M \mapsto L(M)$ definiert dann einen Funktor Set $\to \mathcal{C}$, welcher *linksadjungiert zum Vergissfunktor* $V : \mathcal{C} \to$ Set ist.

a) Erkläre, inwieweit die Adjunktionsbeziehung $L \dashv V$ obige anschauliche Vorstellung kodiert. (Diese Frage hat eine präzise Antwort.)

b) Bestimme für die folgenden Vergissfunktoren Linksadjungierte.

1. Mod(R) $\to$ Set
2. Mon $\to$ Set
3. Grp $\to$ Set
4. Ring $\to$ Set
5. Top $\to$ Set
6. sSet $\to$ Set
7. Ab $\to$ Grp
8. Mod(R) $\to$ Ab
9. Alg(R) $\to$ Mod(R)
10. $\mathrm{Met}_{\mathrm{complete}} \to$ Met
11. Alg(k) $\to$ LieAlg(k)
12. sSet $\to$ semi-sSet

Dabei ist Mon die Kategorie der Monoide, Alg(R) die Kategorie der R-Algebren, $\mathrm{Met}_{\mathrm{complete}}$ die Kategorie der vollständigen metrischen Räume und gleichmäßig stetigen Abbildungen und semi-sSet die Kategorie der Verklebedaten. Findest du zum Vergissfunktor Top $\to$ Set auch einen *Rechts*adjungierten?

Aufgabe 4. *Globale Charakterisierung von Limes und Kolimes*

Sei I eine Indexkategorie. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, in der alle $\mathcal{I}$-förmigen Limiten existieren. Der *Diagonalfunktor* $\Delta : \mathcal{C} \to [\mathcal{I}, \mathcal{C}]$ schickt ein Objekt X auf den konstanten Funktor bei X (dieser schickt jedes Objekt auf X und jeden Morphismus auf id_X). Dabei ist $[\mathcal{I}, \mathcal{C}]$ die Kategorie der Funktoren $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$.

a) Sei für jedes Diagramm $F \in [\mathcal{I}, \mathcal{C}]$ ein Limes $\lim F \in \mathcal{C}$ gewählt. Definiere damit einen Funktor $\lim : [\mathcal{I}, \mathcal{C}] \to \mathcal{C}$, der jedem Diagramm seinen Limes zuordnet. Wie wirkt er auf Morphismen? Wieso sind die Funktoraxiome erfüllt?

b) Zeige: $\Delta \dashv \lim$.

c) Formuliere und beweise mit wenig Aufwand die duale Behauptung über Kolimiten.

Aufgabe 5. *Aufrundung und Abrundung*

Wir betrachten die drei monotonen Abbildungen

$$\begin{array}{rcccccl} \lceil \_ \rceil : & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z}, & x & \longmapsto & \text{Aufrundung von } x := (\text{kleinste ganze Zahl} \geq x) \\ i : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q}, & z & \longmapsto & z \\ \lfloor \_ \rfloor : & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z}, & x & \longmapsto & \text{Abrundung von } x := (\text{größte ganze Zahl} \leq x) \end{array}$$

und die induzierten Funktoren zwischen $B\mathbb{Q}$ und $B\mathbb{Z}$. Zeige: $B\lceil \_ \rceil \dashv Bi \dashv B\lfloor \_ \rfloor$.

Aufgabe 6. *Allquantifikation, Rückzug und Existenzquantifikation*

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Mengen induziert in kanonischer Art und Weise drei monotone Abbildungen zwischen den Potenzmengen. Zeige: $B\exists_f \dashv Bf^{-1} \dashv B\forall_f$.

$$\begin{array}{rll} \exists_f : & \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y), & U \longmapsto \exists_f(U) := f[U] = \{y \in Y \mid \exists x \in X \colon y = f(x) \wedge x \in U\} \\ f^{-1} : & \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X), & V \longmapsto f^{-1}[V] \\ \forall_f : & \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y), & W \longmapsto \forall_f(W) := \{y \in Y \mid \forall x \in X \colon y = f(x) \Rightarrow x \in W\} \end{array}$$

Aufgabe 7. *Lineares Currying*

Seien R und S Ringe (mit Eins). Sei M ein R-S-Bimodul. Zeige:

$$\begin{pmatrix} S\text{-Mod} & \longrightarrow & R\text{-Mod} \\ V & \longmapsto & M \otimes_S V \end{pmatrix} \dashv \begin{pmatrix} R\text{-Mod} & \longrightarrow & S\text{-Mod} \\ W & \longmapsto & \mathrm{Hom}_R(M, W) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8. *Die Dreiecksidentitäten von Adjunktionen*

Sei $F \dashv G$ ein Paar adjungierter Funktoren. Zeige, dass zwischen der *Eins* $\eta : \mathrm{Id} \to G \circ F$ und der *Koeins* $\varepsilon : F \circ G \to \mathrm{Id}$ folgende Beziehungen bestehen:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\eta_{G(\_)}"'] & & G \\ & GFG \arrow[ur, "G\varepsilon"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "F\eta"'] & & F \\ & FGF \arrow[ur, "\varepsilon_{F(\_)}"'] & \end{tikzcd}$$

Aufgabe 9. *Ein Beispiel für Cartier-Dualität*

Sei k ein kommutativer Grundring und $A = k[X]/(X^n - 1)$. Anschaulich ist A die Algebra der Funktionen auf dem Unterschema der n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{A}^1_k$ (unabhängig davon, ob diese in k tatsächlich existieren oder nicht).

a) Zeige, dass A mit der Komultiplikation $[X] \mapsto [X] \otimes [X]$ zu einer Bialgebra wird.

b) Welche Bialgebra ist das Cartier-Duale $A^\vee = \mathrm{Hom}_k(A, k)$?