Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 15 zur Homologischen Algebra II

– Entwurf –

Bei Diagrammjagden mit abelschen Gruppen oder Moduln hantiert man mit *Elementen*: „Für jedes Element“, „wegen Exaktheit existiert ein Urbild“, und so weiter. Bei Objekten beliebiger Kategorien kann man nicht mehr von Elementen im wörtlichen Sinn sprechen, ein geeigneter Ersatz sind aber *globale Elemente* – das sind Morphismen $1 \to X$ in der Kategorie, wobei 1 das terminale Objekt bezeichnet. Im Fall der Kategorie der Mengen entsprechen die globalen Elemente gerade den gewöhnlichen (wieso?).

In abelschen Kategorien sind globale Elemente aber stets langweilig: Das terminale Objekt ist in diesem Fall das Nullobjekt, also besitzt jedes Objekt genau ein globales Element (wieso?). Für eine sinnvolle Theorie muss man daher nicht nur die globalen Elemente, sondern *Elemente beliebiger Stufe* betrachten: Morphismen $I \to X$, wobei I ein beliebiges Objekt ist. Solche Morphismen stellen wir uns als I-indizierte Familien von hypothetischen gewöhnlichen Elementen von X vor.

Es gibt aber noch eine weitere Schwierigkeit: Im Allgemeinen lassen sich I-Elemente nicht längs Epimorphismen $\pi : Y \twoheadrightarrow X$ liften – das heißt, dass zu einem I-Element $x : I \to X$ nicht notwendigerweise ein I-Element $y : I \to Y$ mit $x = \pi \circ y$ existiert. (Geht dies ausnahmsweise doch, und zwar für alle Epimorphismen π, so heißt I *projektiv*.)

Da das bei Diagrammjagden aber ein wichtiger Schritt ist, müssen wir erlauben, bei Bedarf den Parameterbereich I zu *verfeinern*, das heißt zu einer Überdeckung $J \twoheadrightarrow I$ überzugehen. Dann sind Lifts immer möglich: Wenn wir x längs π zurückziehen, also das Faserproduktdiagramm

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "y"'] & I \arrow[d, "x"] \\ Y \arrow[r, two heads, "\pi"'] & X \end{tikzcd}$$

betrachten, so ist das resultierende J-Element y ein Lift des I-Elements x.

Der tiefere Hintergrund ist folgender: Um ohne Verfeinerungen Lifts produzieren zu können, müssten wir *auf lineare Art und Weise* Urbilder auswählen können. Das ist im Allgemeinen nicht möglich (auch nicht unter Verwendung des Auswahlaxioms). Wenn wir aber Verfeinerungen erlauben, sammelt der neue Parameterbereich J alle möglichen Werte für die Wahlen auf, sodass keine Wahlen mehr getroffen werden müssen. Die Epimorphie von p drückt aus, dass die Wahlen jeweils einzeln möglich wären (dass wir also nicht aus leeren Mengen auswählen müssten).

Die Buchführung über nötige Verfeinerungen kann man in einer neuen Sprache verbergen und so gewöhnliche elementbasierte Diagrammjagden in beliebigen abelschen Kategorien interpretieren. Das ist das Ziel der ersten beiden Aufgaben. Was Aussagen der neuen Sprache tatsächlich bedeuten, ist auf der nächsten Seite definiert.

Über das gesamte Übungsblatt fixieren wir eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$.

Die folgenden Regeln definieren die Bedeutung von $I \models \varphi$. Dabei muss φ eine *Formel über* I sein, das heißt, dass sich φ aus den Symbolen $=$, $\top$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\forall x : X$ und $\exists x : X$ sowie etwaigen Variablen und I-Elementen zusammensetzt.

Ist $p : J \to I$ ein beliebiger Morphismus, so ist $p^*\varphi$ diejenige Formel über J, die man aus φ erhält, wenn man alle in φ vorkommenden I-Elemente mit p vorkomponiert und so zu J-Elementen macht.

Ist φ eine Formel über I, in der eine Variable x vorkommt, und ist $x : I \to X$ ein I-Element eines Objekts X, so ist $\varphi[x]$ diejenige Formel, die man aus φ erhält, wenn man an Stelle der Variable x das gegebene Element x schreibt.

Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus und $x : I \to X$ ein I-Element von X, so schreiben wir „$f(x)$“ für das I-Element $f \circ x : I \to Y$. Mit „0“ meinen wir den Nullmorphismus des entsprechenden Typs.

$I \models x = x'$	$:\Longleftrightarrow$	Für die gegebenen Elemente $x, x' : I \to X$ gilt $x = y$.
$I \models \top$	$:\Longleftrightarrow$	Stets erfüllt.
$I \models \phi \wedge \psi$	$:\Longleftrightarrow$	$I \models \phi$ und $I \models \psi$.
$I \models \phi \Rightarrow \psi$	$:\Longleftrightarrow$	Für alle $J \xrightarrow{p} I$ gilt: Aus $J \models p^*\phi$ folgt $J \models p^*\psi$.
$I \models \forall x : X.\ \phi$	$:\Longleftrightarrow$	Für alle $J \xrightarrow{p} I$ und alle $x : J \to X$ gilt: $J \models (p^*\phi)[x]$.
$I \models \exists x : X.\ \phi$	$:\Longleftrightarrow$	Es gibt einen Epimorphismus $J \overset{p}{\twoheadrightarrow} I$ und ein Element $x : J \to X$ mit $J \models (p^*\phi)[x]$.

Aufgabe 1. *Beispiele für den Umgang mit verallgemeinerten Elementen*

a) Zeige: Ein Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ ist genau dann ...

1. der Nullmorphismus, wenn $I \models \forall x : X.\ f(x) = 0$,
2. ein Monomorphismus, wenn $I \models \forall x : X.\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$,
3. ein Epimorphismus, wenn $I \models \forall y : Y.\ \exists x : X.\ f(x) = y$.

b) Zeige: Eine Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ist genau dann bei Y exakt, wenn

$$I \models \forall x : X.\ g(f(x)) = 0 \qquad \text{und} \qquad I \models \forall y : Y.\ g(y) = 0 \Rightarrow \exists x : X.\ y = f(x).$$

c) Seien X und Y Objekte in $\mathcal{C}$. Sei $\varphi(x, y)$ eine Formel, in der zwei Variablen der Typen X und Y vorkommen. Gelte $0 \models \forall x : X.\ \exists! y : Y.\ \varphi(x, y)$, ausgeschrieben also

$$0 \models \forall x : X.\ \exists y : Y.\ \varphi(x, y) \qquad \text{und}$$
$$0 \models \forall x : X.\ \forall y : Y.\ \forall y' : Y.\ \varphi(x, y) \wedge \varphi(x, y') \Rightarrow y = y'.$$

Zeige, dass genau ein Morphismus $f : X \to Y$ mit $0 \models \forall x : X.\ \varphi(x, f(x))$ existiert.

Aufgabe 2. *Die beiden Viererlemmas*

Sei ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & D \arrow[d, "s"'] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen gegeben. Sei p epimorph und s monomorph. Zeige:

a) Ist r epimorph, so auch q.

b) Ist q monomorph, so auch r.

Hinweis: Die beiden Teilaussagen sind dual zueinander (inwiefern?), deswegen genügt es, eine der beiden Teilaufgaben zu bearbeiten. Es macht aber trotzdem Spaß, für beide Aussagen Diagrammjagden zu führen, da diese in den beiden Fällen einen verschiedenen Charakter haben.

Aufgabe 3. *Das Fünferlemma*

Sei ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "s"'] & E \arrow[d, "t"'] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D \arrow[r, "i'"'] & E'
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen gegeben. Sei p epimorph und t monomorph. Seien q und s Isomorphismen. Zeige, dass dann auch r ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4. *Das Schlangenlemma*

Sei ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"'] & B' \arrow[r, "p'"'] & C &
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen gegeben.

a) Konstruiere einen kanonischen Morphismus $\partial : \ker h \to \operatorname{coker} f$.

b) Konstruiere weitere kanonische Morphismen der Form

$$\ker f \longrightarrow \ker g \longrightarrow \ker h \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker} f \longrightarrow \operatorname{coker} g \longrightarrow \operatorname{coker} h.$$

c) Zeige, dass die Sequenz aus b) exakt ist.

Aufgabe 5. *Ein Metatheorem über die interne Sprache*

a) Sei φ eine *Formel über I*. Sei $p : J \to I$ ein beliebiger Morphismus. Zeige:

$$I \models \varphi \quad \Longrightarrow \quad J \models p^*\varphi.$$

b) Sei φ eine *Formel über I*. Sei $p : J \twoheadrightarrow I$ ein Epimorphismus. Zeige:

$$I \models \varphi \quad \Longleftarrow \quad J \models p^*\varphi.$$

c) Jeder Beweis über klassische Elemente, der nur die sprachlichen Mittel $=$, $\top$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\forall$ und $\exists$ verwendet, lässt sich in der internen Sprache nachbauen, also für verallgemeinerte Elemente nachvollziehen. Genauer gilt:

> Sei φ eine Formel über I. Gelte, dass man mit den üblichen logischen Schlussregeln aus φ eine weitere Formel ψ über I folgern kann. Dann:
>
> $$I \models \varphi \quad \Longrightarrow \quad I \models \psi.$$

Wenn du das verstehen möchtest, dann beweise für beliebige Formeln über verallgemeinerte Elemente:

1. $I \models (\varphi \Rightarrow \varphi)$.
2. $I \models \varphi \ \wedge \ I \models (\varphi \Rightarrow \psi) \quad \Longrightarrow \quad I \models \psi$.
3. $I \models (\varphi \Rightarrow \top)$.
4. $I \models (\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi)$.
5. $I \models (\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi)$.
6. $I \models (\varphi \wedge \psi \Rightarrow \chi) \quad \Longleftrightarrow \quad I \models (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi))$.
7. $I \models \forall x\!:\!X.\ (\varphi \Rightarrow \psi) \quad \Longleftrightarrow \quad I \models (\exists x\!:\!X.\ \varphi) \Rightarrow \psi$.

   Dabei darf in ψ die Variable x nicht vorkommen.
8. $I \models \forall x\!:\!X.\ (\varphi \Rightarrow \psi) \quad \Longleftrightarrow \quad I \models \varphi \Rightarrow (\forall x\!:\!X.\ \psi)$.

   Dabei darf in φ die Variable x nicht vorkommen.