Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 20 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Beispiele für Ext-Gruppen*

a) Seien A und B abelsche Gruppen. Sei U eine Untergruppe von A. Sei $f : U \to B$ ein Gruppenhomomorphismus. Formuliere und verifiziere ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür, dass sich f zu einem Gruppenhomomorphismus $\overline{f} : A \to B$ fortsetzen lässt, in dem $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A/U, B)$ vorkommt.

b) Sei $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ eine kurze exakte Sequenz. Formuliere und verfiziere ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür, dass diese Sequenz zerfällt, in dem $\mathrm{Ext}^1(Z, X)$ vorkommt.

c) Sei A eine abelsche Gruppe. Zeige: $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A) = 0$ für alle $n > 0$.

d) Sei A eine abelsche Torsionsgruppe. Zeige: $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

e) Zeige: $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)) \cong \mathbb{Z}/(m, n)$.

Aufgabe 2. *Kohomologischer Kleber*

Seien X und Y Objekte einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$.

a) Sei $\eta : Y[0] \to X[2]$ ein Morphismus in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ und $C^\bullet$ ein Kegel von η.
Zeige: $H^{-2}(C^\bullet) \cong X$, $H^{-1}(C^\bullet) \cong Y$ und die restliche Kohomologie verschwindet.

b) Sei $C^\bullet$ ein Komplex mit $H^{-2}(C^\bullet) \cong X$, $H^{-1}(C^\bullet) \cong Y$ und restlicher Kohomologie Null. Zeige, dass $C^\bullet$ ein Kegel eines Morphismus $\eta : Y[0] \to X[2]$ ist.

c) Ziehe das Fazit: Komplexe mit Kohomologie wie in Teilaufgabe b) sind bis auf Isomorphie eindeutig durch H^{-2}, H^{-1} und *kohomologischen Kleber* gegeben.

Aufgabe 3. *Kein kohomologischer Kleber*

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit $\mathrm{Ext}^n(X, Y) = 0$ für alle Objekte X und Y und alle $n \geq 2$. Zeige, dass jeder beschränkte Komplex $K^\bullet$ in $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ isomorph zu seinem Kohomologiekomplex $H^\bullet(K^\bullet)$ (mit Nulldifferentialen) ist.

Hinweis: Verwende ohne Beweis, dass ein ausgezeichnetes Dreieck der Form $A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to$, wobei der Morphismus $C^\bullet \to A^\bullet[1]$ Null ist, *zerfällt* und daher insbesondere $B^\bullet$ isomorph zu $A^\bullet \oplus C^\bullet$ ist. Das werden wir in angemessener Allgemeinheit später beweisen. *Tipp:* Führe einen Induktionsbeweis über die Amplitude von $K^\bullet$ (was kann das wohl sein?) und verwende die kanonische Filtrierung (Blatt 19, Aufgabe 5).

Aufgabe 4. *Homotopie und Pfadobjekt*

Sei L ein Komplex. Das *Pfadobjekt* L^I ist durch $(L^I)^n = L^n \oplus L^{n-1} \oplus L^n$ und $d(u, p, v) = (du, -dp - u - v, dv)$ definiert.

$$\begin{tikzcd}
& L \\
K \arrow[ur, "f"] \arrow[r] \arrow[dr, "g"'] & L^I \arrow[u, "\mathrm{ev}_0"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"] \\
& L
\end{tikzcd}$$

a) Definiere zwei kanonische Morphismen $\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1 : L^I \to L$.

b) Zeige, dass Homotopien $h : f \simeq g$ von Komplexmorphismen $f, g : K \to L$ in kanonischer Eins-zu-Eins-Korrespondenz zu kommutativen Diagrammen wie abgebildet stehen. Was bedeutet das anschaulich?