Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 18 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Informationsverlust beim Dualisieren*

a) Zeige: $(\mathbb{Z}/(2))^\vee = 0$. Folgere: $(\mathbb{Z}/(2))^{\vee\vee} \ncong \mathbb{Z}/(2)$.
   Dabei ist $M^\vee := \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M, \mathbb{Z})$ für $\mathbb{Z}$-Moduln M.
b) Finde eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}/(2)$ der Form $0 \to ? \to ? \to 0$.
c) Dualisiere diese Auflösung.
d) Dualisiere den Komplex aus c).
e) Zeige: Die Komplexe aus b) und d) sind zueinander isomorph.
f) Was ist die Moral der Geschichte?

Aufgabe 2. *Die Kategorie der vollständigen metrischen Räume*

Sei Met die Kategorie der metrischen Räume und lipschitzstetigen Abbildungen. Sei $\mathrm{Met}_\mathrm{compl}$ ihre volle Unterkategorie der vollständigen metrischen Räume. Für welche Klasse S von Morphismen gilt $\mathrm{Met}_\mathrm{compl} \simeq \mathrm{Met}[S^{-1}]$?

Aufgabe 3. *Die K-Theorie einer abelschen Kategorie*

Die *K-Theorie* $K(\mathcal{A})$ einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ wird als abelsche Gruppe von den Objekten aus $\mathcal{A}$ und, für jede kurze exakte Sequenz $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ in $\mathcal{A}$, der Relation $X = X' + X''$ erzeugt.

a) Gelte $X \cong Y$ in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Zeige: $X = Y \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$.
b) Zeige: Die K-Theorie der Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume ist isomorph zu $\mathbb{Z}$.
c) Zeige: Die K-Theorie der Kategorie aller Vektorräume ist Null.
d) Sei $\mathrm{Kom}^\mathrm{b}(\mathcal{A})$ die Kategorie der beschränkten Kettenkomplexe über einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Zeige: Die auf Erzeugern gegebene Zuordnung

$$K(\mathrm{Kom}^\mathrm{b}(\mathcal{A})) \longrightarrow K(\mathcal{A}),\ K^\bullet \longmapsto \chi(K^\bullet) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n\, K^n$$

   induziert einen wohldefinierten Isomorphismus.

   Tipp: Zeige $\chi(K^\bullet) = \chi(H^\bullet(K^\bullet))$ und verwende die lange exakte Sequenz.

Aufgabe 4. *Serresche Quotientenkategorien als Lokalisierungen*

Sei $\mathcal{B}$ eine Serresche Unterkategorie einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Sei S die Klasse all derjenigen Morphismen in $\mathcal{A}$, deren Kerne und Kokerne in $\mathcal{B}$ liegen. Zeige: $\mathcal{A}/\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}[S^{-1}]$. Du musst nicht alle Details nachrechnen.