Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 22 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Von einem Erzeuger aufgespannte Unterkategorie*

Sei X ein Objekt einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Sei $\langle X\rangle \subseteq \mathcal{A}$ die volle Unterkategorie aller direkten Summen direkter Summanden von X. Diese Unterkategorie wird additiv.

a) Sei $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X,X) = 0$ für alle $i > 0$. Zeige, dass der kanonische Funktor $K^b(\langle X\rangle) \to D^b(\mathcal{A})$ volltreu ist.

b) Gelte außerdem, dass jedes Objekt aus $\mathcal{A}$ eine endliche Auflösung durch Objekte aus $\langle X\rangle$ besitzt. Zeige, dass der Funktor aus a) dann sogar eine Äquivalenz ist.

Aufgabe 2. *Auflösungen unbeschränkter Komplexe*

Eine *projektive Linksauflösung* eines Komplexes $K^\bullet$ ist ein Komplex $P^\bullet$ aus Projektiven zusammen mit einem Quasiisomorphismus $P^\bullet \to K^\bullet$. Zeige, dass unbeschränkte Komplexe auch bis auf Homotopieäquivalenz nicht unbedingt eindeutige projektive (ihrerseits unbeschränkte) Linksauflösungen besitzen müssen.

Tipp: Zeige, dass der Komplex $P^\bullet : \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/(4) \xrightarrow{2} \cdots$ abelscher Gruppen eine projektive Linksauflösung des Nullkomplexes ist, aber nicht homotopieäquivalent zum Nullkomplex ist.

Aufgabe 3. *Kategorielle Charakterisierung von Endlichkeitseigenschaften*

a) Zeige, dass ein A-Modul M genau dann endlich erzeugt ist, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}(M, \_) : \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Set}$ mit filtrierten Kolimiten von Monomorphismen vertauscht, wenn also für jedes filtrierte Diagramm $(V_i)_i$, in der die Übergangsabbildungen $V_i \to V_j$ alle injektiv sind, folgende kanonische Abbildung bijektiv ist.
$$\mathrm{colim}_i \mathrm{Hom}(M, V_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathrm{colim}_i V_i)$$

b) Zeige, dass ein A-Modul M genau dann endlich präsentiert ist, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}(M, \_)$ mit beliebigen filtrierten Kolimiten vertauscht.

Aufgabe 4. *Interpretation der zweiten Ext-Gruppen*

a) Seien Objekte $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ in einer abelschen Kategorie gegeben. Dann gibt es die kanonische exakte Sequenz
$$\gamma : 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z/X \longrightarrow Z/Y \longrightarrow 0.$$
Zeige, dass $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \in \mathrm{Ext}^2(Z/Y, X)$, wobei $\gamma_1 \in \mathrm{Ext}^1(Y/X, X)$ und $\gamma_2 \in \mathrm{Ext}^1(Z/Y, Y/X)$ zu folgenden kurzen exakten Sequenzen gehören.
$$\gamma_1 : 0 \to X \to Y \to Y/X \to 0 \qquad \gamma_2 : 0 \to Y/X \to Z/X \to Z/Y \to 0$$

b) Zeige weiter, dass $\gamma = 0 \in \mathrm{Ext}^2(Z/Y, X)$.

c) Zeige die Umkehrung: Gilt für Elemente $\gamma_1 \in \mathrm{Ext}^1(B, C)$ und $\gamma_2 \in \mathrm{Ext}^1(A, B)$ dass $\gamma_1\gamma_2 = 0 \in \mathrm{Ext}^1(A, C)$, so gibt es ein Objekt Z und Unterobjekte $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$, sodass $A \cong Z/Y$, $B \cong Y/X$, $C \cong X$ und sodass unter diesen Isomorphismen γ_1 und γ_2 von der Form wie in a) sind.

Aufgabe 5. *Noch eine weitere Aufgabe*

XXX