

Übungsblatt 5 zur Homologischen Algebra I

– Hier könnte dein Motto stehen. –

Aufgabe 1. Homologische Charakterisierung von Zusammenhang

Sei X eine simpliziale Menge. Sei \approx die feinste Äquivalenzrelation auf X_0 mit $X(\partial^1)u \approx X(\partial^0)u$ für alle $u \in X_1$; anschaulich gilt genau dann $x \approx y$, wenn sich die 0-Simplizes x und y durch einen Kantenzug miteinander verbinden lassen.

- a) Seien $x, y \in X_0$. Zeige, dass die entsprechenden Punkte in der geometrischen Realisierung $|X|$ genau dann durch einen stetigen Pfad miteinander verbunden werden können, wenn $x \approx y$.

Tipp: Eine Richtung ist leichter als die andere. Konstruiere für die andere eine geeignete simpliziale Abbildung $X \rightarrow \underline{\Omega}$ und betrachte deren geometrische Realisierung. Dabei bezeichnet $\Omega \supseteq \{0, 1\}$ die Menge der Wahrheitswerte und $\underline{\Omega}$ die diskrete simpliziale Menge mit Eckenmenge Ω . Verwende, dass das Einheitsintervall zusammenhängend ist.

- b) Zeige für beliebige 0-Simplizes $x, y \in X_0$:

$$x \approx y \implies x - y \in \text{im}(d^0 : C_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C_0(X, \mathbb{Z})).$$

- c) Zeige: $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\langle \text{Wegzusammenhangskomponenten von } |X| \rangle$ (freier \mathbb{Z} -Modul).

Aufgabe 2. Homologieberechnungen

Berechne die Homologie (mit Koeffizienten in \mathbb{Z}) von folgenden simplizialen Mengen:

- a) dem Standard- n -Simplex $\Delta[n]$,
- b) der $(n - 1)$ -dimensionalen Sphäre $\dot{\Delta}[n]$ (siehe Aufgabe 5 von Blatt 4),
- c) dem zweidimensionalen Torus,
- d) der reellen projektiven Ebene.

Verwende dazu als Kettengruppen die freien \mathbb{Z} -Moduln über den *nichtdegenerierten* Simplizes; später werden wir verstehen, wieso diese die volle Homologie berechnen. Inwieweit bestätigt sich das Motto *Homologie misst (mehrdimensionale) Löcher?*¹

– Bitte wenden. –

¹Mit Homologie kann man auch Löcher des umgebenden logischen Rahmens messen, etwa inwieweit das Auswahlaxiom fehlschlägt: Andreas Blass. *Cohomology detects failures of the axiom of choice*. Trans. Amer. Math. Soc. **279**, S. 257–269.

Aufgabe 3. Affine Schemata I

Sei A ein kommutativer Ring (mit Eins). Sei $\text{Spec } A$ die Menge der Primideale von A . Eine Teilmenge $U \subseteq \text{Spec } A$ heißt genau dann *offen*, wenn sie eine (beliebige) Vereinigung von *standardoffenen Mengen* ist; solche sind Mengen der Form $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ mit $f \in A$. Anschaulich stellt man sich ein Ringelement $f \in A$ als *Funktion* auf $\text{Spec } A$ und die Menge $D(f)$ als Menge der Punkte, wo f nicht verschwindet, vor.

Ist $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, so ist $\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in A \mid \exists n \geq 0: f^n \in \mathfrak{a}\}$ das zugehörige *Radikalideal*. Sind f_1, \dots, f_n Ringelemente, so ist $(f_1, \dots, f_n) := \{\sum_i a_i f_i \mid a_1, \dots, a_n \in A\}$ das von diesen Elementen *erzeugte Ideal*.

Zeige folgende Behauptungen und interpretiere sie anschaulich, für alle Ringelemente $f, g, g_1, \dots, g_n \in A$ und Primideale $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$:

- $D(f) \subseteq D(g) \iff \sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{(g)}$.
- $D(f) \subseteq D(g_1) \cup \dots \cup D(g_n) \iff \sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{(g_1, \dots, g_n)}$.
- $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.
- Der topologische Abschluss von $\{\mathfrak{p}\}$ ist durch $\{\mathfrak{q} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$ gegeben. Wann ist also die Menge $\{\mathfrak{p}\}$ selbst schon abgeschlossen?

Tipp: Zeige, dass der Schnitt über alle Primideale \mathfrak{p} , welche ein vorgegebenes Ideal \mathfrak{a} umfassen, gleich $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ist. Für eine Richtung musst du eine Katze opfern und für geeignete Elemente $f \in A$ folgendes Mengensystem betrachten:

$$\mathcal{U} := \{\mathfrak{b} \subseteq A \mid \mathfrak{b} \text{ ist ein Ideal mit } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \text{ und } f^n \notin \mathfrak{b} \text{ für alle } n \geq 0\}.$$

Diese Aufgabe ist eine Hinführung auf *affine Schemata*; es fehlt noch die Konstruktion einer geeigneten Ringgarbe $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ – erst dann kann man Geometrie betreiben. In intuitionistischer Logik ist die Beschreibung über Primideale offensichtlich nicht angebracht. Da man aber den *Rahmen der offenen Teilmengen* von $\text{Spec } A$ explizit beschreiben kann (nämlich wie?), kann man intuitionistisch $\text{Spec } A$ immer noch als *Örtlichkeit* konstruieren. Das hängt eng mit *dynamischen Methoden in der Algebra* zusammen.

Aufgabe 4. Abgeschnittene simpliziale Mengen

Eine N -*abgeschnittene simpliziale Menge* ist eine Familie von Daten $(X_n, X(f))$ wie bei simplizialen Mengen, nur dass die Simplexmengen lediglich für $0 \leq n \leq N$ und die Abbildungen $X(f)$ für $f : [k] \rightarrow [\ell]$ mit $0 \leq k, \ell \leq N$ gegeben sein müssen. In offensichtlicher Weise (wie genau?) legt jede simpliziale Menge X und jede M -abgeschnittene simpliziale Menge X (mit $M \geq N$) eine N -abgeschnittene Menge $\text{Tr}^N X$ fest.

Ist Y eine N -abgeschnittene simpliziale Menge, so möchten wir durch die Setzungen

$$\begin{aligned} \hat{Y}_m &:= Y_m, & \text{für } m \leq N, \\ \hat{Y}_{N+1} &:= \{(y_0, \dots, y_{N+1}) \mid y_0, \dots, y_{N+1} \in Y_N, Y(\partial^i)y_j = Y(\partial^{j-1})y_i \text{ für } i < j\}, \end{aligned}$$

sowie $\hat{Y}(\partial_{N+1}^i) = ((y_0, \dots, y_{N+1}) \mapsto y_i)$ und gesunden Menschenverstand eine $(N+1)$ -abgeschnittene simpliziale Menge definieren.

- Wie kann man sich die Elemente von \hat{Y}_{N+1} als „virtuelle“ $(N+1)$ -Simplizes vorstellen? Was sollen die y_i eines solchen Simplex sein? Wieso soll die Kompatibilitätsbedingung an die y_i und die Randabbildungen erfüllt sein? Inwieweit füllen diese virtuellen Simplizes vorhandene „simpliziale Löcher“ in Y_N ?
- Leite eine sinnvolle Definition für $\hat{Y}(\sigma_N^i)$ her, $0 \leq i \leq N$.
- Zeige, dass \hat{Y} die *universelle* $(N+1)$ -Fortsetzung von Y ist; zeige also: Ist Z eine beliebige $(N+1)$ -abgeschnittene simpliziale Menge und $F : \text{Tr}^N Z \rightarrow Y$ eine N -abgeschnittene simpliziale Abbildung, so gibt es genau eine Fortsetzung von F zu einer $(N+1)$ -abgeschnittenen simplizialen Abbildung $Z \rightarrow \hat{Y}$.