# Übungsblatt 5 zur Homologischen Algebra I

- Hier könnte dein Motto stehen. -

### Aufgabe 1. Homologische Charakterisierung von Zusammenhang

Sei X eine simpliziale Menge. Sei  $\approx$  die feinste Äquivalenzrelation auf  $X_0$  mit  $X(\partial^1)u \approx X(\partial^0)u$  für alle  $u \in X_1$ ; anschaulich gilt genau dann  $x \approx y$ , wenn sich die 0-Simplizes x und y durch einen Kantenzug miteinander verbinden lassen.

a) Seien  $x, y \in X_0$ . Zeige, dass die entsprechenden Punkte in der geometrischen Realisierung |X| genau dann durch einen stetigen Pfad miteinander verbunden werden können, wenn  $x \approx y$ .

Tipp: Eine Richtung ist leichter als die andere. Konstruiere für die andere eine geeignete simpliziale Abbildung  $X \to \underline{\Omega}$  und betrachte deren geometrische Realisierung. Dabei bezeichnet  $\Omega \supseteq \{0,1\}$  die Menge der Wahrheitswerte und  $\underline{\Omega}$  die diskrete simpliziale Menge mit Eckenmenge  $\Omega$ . Verwende, dass das Einheitsintervall zusammenhängend ist.

b) Zeige für beliebige 0-Simplizes  $x, y \in X_0$ :

$$x \approx y \implies x - y \in \operatorname{im}(d^0 : C_1(X, \mathbb{Z}) \to C_0(X, \mathbb{Z})).$$

c) Zeige:  $H_0(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  (Wegzusammenhangskomponenten von |X|) (freier  $\mathbb{Z}$ -Modul).

#### Aufgabe 2. Homologieberechnungen

Berechne die Homologie (mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ ) von folgenden simplizialen Mengen:

- a) dem Standard-n-Simplex  $\Delta[n]$ ,
- b) der (n-1)-dimensionalen Sphäre  $\dot{\Delta}[n]$  (siehe Aufgabe 5 von Blatt 4),
- c) dem zweidimensionalen Torus,
- d) der reellen projektiven Ebene.

Verwende dazu als Kettengruppen die freien Z-Moduln über den nichtdegenerierten Simplizes; später werden wir verstehen, wieso diese die volle Homologie berechnen. Inwieweit bestätigt sich das Motto Homologie misst (mehrdimensionale) Löcher?<sup>1</sup>

- Bitte wenden. -

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Mit Homologie kann man auch Löcher des umgebenden logischen Rahmens messen, etwa inwieweit das Auswahlaxiom fehlschlägt: Andreas Blass. *Cohomology detects failures of the axiom of choice*. Trans. Amer. Math. Soc. **279**, S. 257–269.

## Aufgabe 3. Affine Schemata I

Sei A ein kommutativer Ring (mit Eins). Sei Spec A die Menge der Primideale von A. Eine Teilmenge  $U \subseteq \operatorname{Spec} A$  heißt genau dann offen, wenn sie eine (beliebige) Vereinigung von standardoffenen Mengen ist; solche sind Mengen der Form  $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$  mit  $f \in A$ . Anschaulich stellt man sich ein Ringelement  $f \in A$  als Funktion auf Spec A und die Menge D(f) als Menge der Punkte, wo f nicht verschwindet, vor.

Ist  $\mathfrak{a} \subseteq A$  ein Ideal, so ist  $\sqrt{\mathfrak{a}} := \{ f \in A \mid \exists n \geq 0 \colon f^n \in \mathfrak{a} \}$  das zugehörige Radikalideal. Sind  $f_1, \ldots, f_n$  Ringelemente, so ist  $(f_1, \ldots, f_n) := \{ \sum_i a_i f_i \mid a_1, \ldots, a_n \in A \}$  das von diesen Elementen  $erzeugte\ Ideal$ .

Zeige folgende Behauptungen und interpretiere sie anschaulich, für alle Ringelemente  $f, g, g_1, \ldots, g_n \in A$  und Primideale  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ :

- a)  $D(f) \subseteq D(g) \iff \sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{(g)}$ .
- b)  $D(f) \subseteq D(g_1) \cup \cdots \cup D(g_n) \iff \sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{(g_1, \ldots, g_n)}$ .
- c)  $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ .
- d) Der topologische Abschluss von  $\{\mathfrak{p}\}$  ist durch  $\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$  gegeben. Wann ist also die Menge  $\{\mathfrak{p}\}$  selbst schon abgeschlossen?

Tipp: Zeige, dass der Schnitt über alle Primideale  $\mathfrak{p}$ , welche ein vorgegebenes Ideal  $\mathfrak{a}$  umfassen, gleich  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  ist. Für eine Richtung musst du eine Katze opfern und für geeignete Elemente  $f \in A$  folgendes Mengensystem betrachten:

$$\mathcal{U} := \{ \mathfrak{b} \subseteq A \mid \mathfrak{b} \text{ ist ein Ideal mit } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \text{ und } f^n \notin \mathfrak{b} \text{ für alle } n \geq 0 \}.$$

Diese Aufgabe ist eine Hinführung auf affine Schemata; es fehlt noch die Konstruktion einer geeigneten Ringgarbe  $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$  – erst dann kann man Geometrie betreiben. In intuitionistischer Logik ist die Beschreibung über Primideale offensichtlich nicht angebracht. Da man aber den Rahmen der offenen Teilmengen von Spec A explizit beschreiben kann (nämlich wie?), kann man intuitionistisch Spec A immer noch als Örtlichkeit konstruieren. Das hängt eng mit dynamischen Methoden in der Algebra zusammen.

## Aufgabe 4. Abgeschnittene simpliziale Mengen

Eine N-abgeschnittene simpliziale Menge ist eine Familie von Daten  $(X_n, X(f))$  wie bei simplizialen Mengen, nur dass die Simplexmengen lediglich für  $0 \le n \le N$  und die Abbildungen X(f) für  $f:[k] \to [\ell]$  mit  $0 \le k, \ell \le N$  gegeben sein müssen. In offensichtlicher Weise (wie genau?) legt jede simpliziale Menge X und jede M-abgeschnittene simpliziale Menge X (mit  $M \ge N$ ) eine N-abgeschnittene Menge X fest.

Ist Y eine N-abgeschnittene simpliziale Menge, so möchten wir durch die Setzungen

$$\hat{Y}_m := Y_m,$$
 für  $m \le N$ ,  
 $\hat{Y}_{N+1} := \{ (y_0, \dots, y_{N+1}) \mid y_0, \dots, y_{N+1} \in Y_N, \ Y(\partial^i) y_j = Y(\partial^{j-1}) y_i \text{ für } i < j \},$ 

sowie  $\hat{Y}(\partial_{N+1}^i) = ((y_0, \dots, y_{N+1}) \mapsto y_i)$  und gesunden Menschenverstand eine (N+1)-abgeschnittene simpliziale Menge definieren.

- a) Wie kann man sich die Elemente von  $\widehat{Y}_{n+1}$  als "virtuelle" (N+1)-Simplizes vorstellen? Was sollen die  $y_i$  eines solchen Simplex sein? Wieso soll die Kompatibilitätsbedingung an die  $y_i$  und die Randabbildungen erfüllt sein? Inwieweit füllen diese virtuellen Simplizes vorhandene "simpliziale Löcher" in  $Y_N$ ?
- b) Leite eine sinnvolle Definition für  $\hat{Y}(\sigma_N^i)$  her,  $0 \le i \le N$ .
- c) Zeige, dass  $\widehat{Y}$  die universelle (N+1)-Fortsetzung von Y ist; zeige also: Ist Z eine beliebige (N+1)-abgeschnittene simpliziale Menge und  $F:\operatorname{Tr}^N Z \to Y$  eine N-abgeschnittene simpliziale Abbildung, so gibt es genau eine Fortsetzung von F zu einer (N+1)-abgeschnittenen simplizialen Abbildung  $Z \to \widehat{Y}$ .