

Übungsblatt 6 zur Homologischen Algebra I

– Garben organisieren lokale Daten. –

Aufgabe 1. Beispiele für Garben

Welche der folgenden Prägarben auf einem topologischen Raum X sind Garben?

- a) $\mathcal{C} : U \mapsto \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$
- b) $\mathcal{C}_{\text{const.}} : U \mapsto \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ konstant}\}$
- c) $\mathcal{C}_{\text{l.c.}} : U \mapsto \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lokal konstant}\}$
- d) $\mathcal{C}_{\text{bounded}} : U \mapsto \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$

Aufgabe 2. Mono- und Epimorphismen zwischen Garben

Ein Morphismus f einer gewissen Klasse von Morphismen heißt genau dann *Monomorphismus*, wenn er bezüglich der Verkettung von Morphismen linkskürzbar ist, d. h. wenn für beliebige parallele Morphismen p und q aus $f \circ p = f \circ q$ schon $p = q$ folgt. Dual definiert man den Begriff eines *Epimorphismus*. Zeige:

- a) Unter allen Abbildungen von Mengen sind die Monomorphismen gerade die injektiven Abbildungen.
- b) Unter allen Abbildungen von Mengen sind die Epimorphismen gerade die surjektiven Abbildungen.
- c) Unter allen Morphismen von Garben sind die Monomorphismen gerade diejenigen Garbenmorphismen $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, deren Komponentenabbildungen α_U für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ injektiv sind. (Das ist genau dann der Fall, wenn die Abbildungen $\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ zwischen den Halmen alle injektiv sind.)
- d) Unter allen Morphismen von Garben sind die Epimorphismen gerade diejenigen Garbenmorphismen $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, deren Halmabbildungen $\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ alle surjektiv sind. (Obacht: Das ist echt schwächer als zu sagen, dass alle Komponentenabbildungen α_U surjektiv sind.)