Garben über Erzeuger und Relationen

Erzeuger und Relationen in der Algebra

Gruppen oder Moduln spezifiert man gelegentlich durch Angabe von *Erzeugern* und *Relationen* zwischen diesen Erzeugern.

- Die additive Gruppe der ganzen Zahlen ist die von einem Erzeuger frei erzeugte Gruppe: $\mathbb{Z} = \langle x \rangle$.
- Der additive Monoid der natürlichen Zahlen ist der von einem Erzeuger frei erzeugte Monoid: $\mathbb{N} = \langle x \rangle$.
- Die Gruppe $\mathbb{Z}/(2)$ ist die von einem Erzeuger x, modulo der Relation $x \circ x = e$ (neutrales Element), erzeugte Gruppe: $\mathbb{Z}/(2) = \langle x \,|\, x \circ x = e \rangle$.
- Die Dieder-Gruppe D_n ist durch zwei Erzeuger und eine Relation erzeugt: $D_n = \langle r, s \,|\, r^n = e, srs = r^{-1} \rangle$.
- Das Tensorprodukt $M \otimes_A N$ kann wie folgt präsentiert werden: $M \otimes_A N = \langle (x, y) \,|\, x \in M, y \in N, (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2), \ldots \rangle$.

Ist ein algebraisches Objekt X durch Erzeuger und Relationen gegeben, so kann man Morphismen in ein weiteres Objekt Y einfach dadurch spezifizieren, indem man für jeden Erzeuger von X jeweils ein gewisses Element von Y als Bild vorgibt und darauf achtet, dass diese Bilder die gegebenen Relationen erfüllen.

Außerdem kann man ein und dieselbe Präsentation durch Erzeuger und Relationen in verschiedenen Kontexten interpretieren. Etwa ist $\langle x, y \rangle$ in der Kategorie der Gruppen die von zwei Elementen frei erzeugte Gruppe $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$. Dieselbe Präsentation führt in der Kategorie der abelschen Gruppen zur abelschen Gruppe $\mathbb{Z}^2$.

Erzeugnisse als Kolimiten

In jeder Kategorie algebraischer Objekte kann man die Erzeugnisse von Präsentationen als gewisse Kolimiten charakterisieren. Sei $\underline{n}$ das von n Erzeugern $e_1, \ldots, e_n$ ohne Relationen erzeugte Objekt: in Grp also $\mathbb{Z} \star \cdots \star \mathbb{Z}$, in Ab ist es $\mathbb{Z}^n$, in $\mathrm{Mod}(R)$ ist es R^n.

- $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ ist in der Kategorie der Gruppen der Kolimes des folgenden Diagramms:

$$\underline{1} \qquad \underline{1}$$

- $\langle x, y, z \,|\, 2x = 3y \rangle$ ist in der Kategorie der abelschen Gruppen der Kolimes des folgenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
\underline{1} \arrow[dr, "e_1\mapsto e_1"'] & & \underline{1} \arrow[dl, "e_1\mapsto e_2"] & \underline{1} \\
& \underline{2} & & \\
& \underline{1} \arrow[u, bend left, "e_1\mapsto 2e_1"] \arrow[u, bend right, "e_1\mapsto 3e_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

  Kleinere Diagramme sind ebenfalls möglich (etwa $\underline{1} \to \underline{2} \quad \underline{1}$), aber weniger systematisch.

Die allgemeine Regel lautet also wie folgt:

- Für jeden Erzeuger x platziert man eine Kopie von $\underline{1}$ im Diagramm: $\underline{1}_x$.
- Für jede Relation r der Form $t_1(a_1, \ldots, a_n) = t_2(a_1, \ldots, a_n)$ platziert man eine Kopie von $\underline{n}$, notiert $\underline{n}_r$; eine Kopie von $\underline{1}$, notiert $\underline{1}^r$; und folgende Morphismen:

  Für $i = 1, \ldots, n$ einen Morphismus $\underline{1}_{a_i} \to \underline{n}_r$, der den Erzeuger von $\underline{1}_{a_i}$ auf e_i schickt; einen Morphismus $\underline{1}^r \to \underline{n}_r$, der den Erzeuger von $\underline{1}^r$ auf $t_1(e_1, \ldots, e_n)$ schickt; einen Morphismus $\underline{1}^r \to \underline{n}_r$, der den Erzeuger von $\underline{1}^r$ auf $t_2(e_1, \ldots, e_n)$.

Präsentationen von Prägarben und Garben

Prägarben und Garben auf einem Raum X kann man ebenfalls durch Erzeuger und Relationen spezifizieren. Erzeuger sind dabei Schnitte auf bestimmten offenen Mengen, Relationen sind Vorgaben, welche Restriktionen von Erzeugern auf kleinere offene Mengen gleich sein sollen.

Etwa ist die terminale Garbe gegeben durch einen Erzeuger $\star$ auf ganz X und keine Relationen. Die initiale Garbe ist gegeben durch keinerlei Erzeuger und keine Relationen. Die konstante Prägarbe $\mathbb{N}$ ist gegeben durch abzählbar viele Erzeuger $x_0, x_1, \ldots$ und keine Relationen.

Das Erzeugnis einer Präsentation enthält im Fall einer Kategorie algebraischer Objekte mehr Elemente, als nur die Erzeuger selbst. Etwa enthalten Erzeugnisse in der Kategorie der R-Moduln auch formale R-Linearkombinationen zwischen den Erzeugern. Erzeugnisse in der Kategorie der Gruppen enthalten formale Verknüpfungen und formale Inverse der Erzeuger.

Im Fall von Prägarben kommen ebenfalls zu den Erzeugern weitere Schnitte hinzu. Ist etwa s ein Erzeuger auf U, so kommen alle Restriktionen $s|_V$ für $V \subsetneq U$ hinzu.

Im Fall von Garben kommen außerdem Verklebungen hinzu: Ist s ein Erzeuger auf U, t ein Erzeuger auf V und gilt $U \cap V = \emptyset$, so gibt es in der erzeugten Garbe auch einen Schnitt für die Verklebung von s und t. (Dass $U \cap V = \emptyset$, ist eine unnötig starke Forderung. Es kommen auch Verklebungen von solchen Schnitten hinzu, die auf Überlappungen übereinstimmen.)

Außerdem können sich im Fall von Garben weitere Relationen ergeben. Gilt etwa $X = U \cup V$, und sind zwei Erzeuger s und t auf X mit den Relationen $s|_U = t|_U$ und $s|_V = t|_V$ gegeben, so gilt im Erzeugnis automatisch auch $s = t$ auf ganz X.

Garbifizierung über Präsentationen

Die Garbifizierung einer Prägarbe kann man im Präsentationsbild sehr einfach verstehen. Ist eine Prägarbe über irgendwelche Erzeuger und Relationen gegeben, so ist ihre Garbifizierung durch dieselben Erzeuger und Relationen gegeben – nur jetzt in der Kategorie der Garben interpretiert.

Diese Beobachtung war eine der Motivationen für diese Notizen.

Rückzug über Präsentationen

Ist $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{E}$ eine Garbe auf X, welche durch Erzeuger und Relationen gegeben ist, so ist die Garbe $f^{-1}\mathcal{E}$ durch dieselben Erzeuger und Relationen gegeben, nur, dass diese statt auf offenen Mengen $U \subseteq X$ jetzt auf den zugehörigen offenen Mengen $f^{-1}[U] \subseteq Y$ interpretiert werden.

Kategorielle Umsetzung

Seien Erzeuger s_i auf U_i sowie Relationen $s_{a_k}|_{W_k} = s_{b_k}|_{W_k}$ auf $W_k \subseteq U_{a_k} \cap U_{b_k}$ gegeben. Die zugehörige Prägarbe oder Garbe ist in der entsprechenden Kategorie der Kolimes des wie folgt aufgebauten Diagramms:

- Für den Erzeuger s_i auf U_i eine Kopie $\mathcal{A}^i$ der Garbe $\mathrm{Hom}(\_\_, U_i)$. Die Menge der Schnitte dieser Garbe auf einer offenen Menge $V \subseteq X$ enthält genau ein Element, falls $V \subseteq U_i$, und ist leer sonst.
- Für jede Relation $s_{a_k}|_{W_k} = s_{b_k}|_{W_k}$ eine Kopie $\mathcal{B}^k$ der Garbe $\mathrm{Hom}(\_\_, W_k)$ zusammen mit zwei Morphismen: einem Morphismus $\mathcal{B}^k \to \mathcal{A}^{a_k}$ und einem Morphismus $\mathcal{B}^k \to \mathcal{A}^{b_k}$ (diese sind eindeutig bestimmt).

Übungsaufgabe

Wie kann man Prägarben und Garben abelscher Gruppen präsentieren? Zusätzlich zur Vorgabe von Restriktionen können dabei Summen von Schnitten vorgegeben werden. Durch welche Erzeuger und Relationen ist $f^{-1}\mathcal{E}$ gegeben, wenn Erzeuger und Relationen für $\mathcal{E}$ bekannt sind? Wie sieht es mit $f^*\mathcal{E}$ aus?