Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2014

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 9 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. *Funktoren als verallgemeinerte monotone Abbildungen*

Seien P und Q Quasiordnungen (oder Partialordnungen). Seien BP und BQ die zugehörigen dünnen Kategorien, deren Objekte genau die Elemente von P bzw. Q sind und in denen zwischen zwei Objekten genau dann ein Morphismus verläuft, wenn die Quelle kleinergleich dem Ziel ist.

a) Zeige, dass Funktoren $BP \to BQ$ auf kanonische Art und Weise mit schwach monoton steigenden Abbildungen $P \to Q$ korrespondieren.

b) Zeige, dass zwischen zwei Funktoren $Bf, Bg : BP \to BQ$ höchstens eine natürliche Transformation verlaufen kann; und dass es genau dann eine solche gibt, wenn für die zugehörigen monotonen Abbildungen $f, g : P \to Q$ gilt: $f(x) \preceq g(x)$ für alle $x \in P$.

Aufgabe 2. *Beispiele für natürliche Transformationen*

Sei $\mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ der Identitätsfunktor auf Set, $P : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ der (kovariante) Potenzmengenfunktor und $K : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ der Funktor

$$\begin{array}{rcl} X & \longmapsto & X \times X \\ f & \longmapsto & f \times f := ((a,b) \mapsto (f(a), f(b))). \end{array}$$

a) Zeige: Es gibt nur eine einzige natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \to \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}$, nämlich

$$\eta_X : X \to X,\ x \mapsto x.$$

b) Zeige: Es gibt nur eine einzige natürliche Transformation $\omega : \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \to K$, nämlich

$$\omega_X : X \to X \times X,\ x \mapsto (x, x).$$

Tipp für a) und b): Betrachte geeignete Abbildungen $1 \to X$, $\star \mapsto x$. Dabei ist $1 = \{\heartsuit\}$ eine einelementige Menge.

c) Zeige: Es gibt keine natürliche Transformation $P \to \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}$, wohl aber eine in die andere Richtung.

d) Wir nehmen an, dass wir für jede nichtleere Menge X ein bestimmtes Element $a_X \in X$ gegeben haben. Zeige: Die Setzung $\tau_X : X \to X,\ x \mapsto a_X$ definiert *nicht* eine natürliche Transformation $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, wobei $\mathcal{C}$ die Kategorie der nichtleeren Mengen und beliebigen Abbildungen bezeichnet.

e) Welche natürlichen Transformationen $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ gibt es, wenn $\mathcal{C}$ die Kategorie der reellen Vektorräume bezeichnet?

Aufgabe 3. *Die 2-Kategorie der Kategorien*

a) Seien $\eta : F \to G$ und $\varepsilon : G \to H$ natürliche Transformationen zwischen Funktoren $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Definiere auf geeignete Art und Weise die *vertikale Komposition* $\varepsilon \circ \eta : F \to H$. Weise nach, dass deine Definition wirklich zu einer natürlichen Transformation führt.

b) Sei $\eta : F \to G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\varepsilon : J \to K$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $J, K : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$. Definiere auf geeignete Art und Weise die *horizontale Komposition* $\eta \star \varepsilon : J \circ F \to K \circ G$. Musst du dazu Wahlen treffen?

c) Verifiziere für passende natürliche Transformationen folgendes Vertauschungsgesetz:

$$(\beta' \circ \beta) \star (\alpha' \circ \alpha) = (\beta' \star \alpha') \circ (\beta \star \alpha)$$

Eine gewöhnliche Kategorie heißt auch *1-Kategorie*; eine *strikte 2-Kategorie* ist eine Kategorie, in der die Hom-Mengen $\mathrm{Hom}(X, Y)$ nicht nur Mengen, sondern ihrerseits (gewöhnliche 1-)Kategorien sind, und in der die Verknüpfungsoperationen $\mathrm{Hom}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$ sogar Funktoren sind. Zur besseren Abgrenzung heißen die Objekte $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ dann 1-Morphismen (zwischen X und Y) und die Morphismen $\alpha : f \to g$ in $\mathrm{Hom}(X, Y)$ dann 2-Morphismen (zwischen f und g).

d) Zeige, dass sich 1-Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen zu einer 2-Kategorie organisieren.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, bend left=60, "F"] \arrow[rr, "G" description] \arrow[rr, bend right=60, "H"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\eta"] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\varepsilon"] & & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "J"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 4. *Überraschende Kommutativität*

Die *erste Homotopiegruppe* $\pi_1(X, x_0)$ eines topologischen Raums X mit Basispunkt x_0 ist die Menge aller stetigen Abbildungen $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, wobei zwei solche Abbildungen genau dann miteinander identifiziert werden, wenn sie vermöge einer basispunktfixierenden Abbildung $[0, 1] \times [0, 1] \to X$ homotop sind.

Die *zweite Homotopiegruppe* $\pi_2(X, x_0)$ ist die Menge aller stetigen Abbildungen $H : [0, 1]^2 \to X$, die den Rand des Einheitsquadrats auf den Basispunkt x_0 abbilden, wobei zwei solche Abbildungen $H, \widetilde{H}$ genau dann miteinander identifiziert werden, wenn sie vermöge einer stetigen Abbildung $K : [0, 1] \times [0, 1]^2 \to X$ mit $K(0, \_\_) = H$, $K(1, \_\_) = \widetilde{H}$, $K(\_\_, \partial[0, 1]^2) = \text{konst. } x_0$ homotop sind.

a) Finde *zwei* kanonische Gruppenstrukturen auf $\pi_2(X, x_0)$.

Tipp: Man kann das Quadrat sowohl horizontal als auch vertikal in zwei Rechtecke gleicher Größe aufteilen.

b) Beweise, dass die beiden Gruppenstrukturen dasselbe Vertauschungsgesetz erfüllen wie in Aufgabe 3c).

c) Zeige, dass die beiden Gruppenstrukturen übereinstimmen und kommutativ sind.

Tipp: Das gilt allgemein – zwei binäre Operationen mit neutralem Element, die wie in Aufgabe 3c) miteinander verträglich sind, sind tatsächlich gleich und kommutativ.

d) Sei A ein Objekt einer 2-Kategorie $\mathcal{C}$. Sei $\mathrm{id}_A : A \to A$ der (1-)Identitätsmorphismus. Sei $Z_{\mathcal{C}}(A) := \mathrm{End}(\mathrm{id}_A)$ die Menge aller 2-Morphismen von id_A nach id_A.

Finde zwei Monoidstrukturen auf $Z(A)$, zeige, dass sie miteinander verträglich sind, und folgere daher, dass sie gleich und kommutativ sind.

e) Der *Fundamental-2-Gruppoid* $\Pi_1(X)$ ist folgende 2-Kategorie: Die Objekte sind die Punkte von X, die Morphismen sind Wege zwischen den Punkten und die 2-Morphismen zwischen Wegen $\gamma, \widetilde{\gamma}$ sind Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ mit $H(0, \_\_) = \gamma$, $H(1, \_\_) = \widetilde{\gamma}$.

   Zeige, dass $Z_{\Pi_1(X)}(x_0) = \pi_2(X, x_0)$. Folgere mit dieser Erkenntnis Teilaufgabe c) aus d).

Aufgabe 5. *Eine Kategorie mit endlichen Mengen als Objekten*

Zeige, dass folgende Setzungen eine Kategorie Σ definieren. Bestätige also das Assoziativgesetz und finde die Identitätsmorpismen.

$$\begin{aligned} \text{Objekte: } & \text{alle endlichen Mengen} \\ \text{Morphismen: } & \mathrm{Hom}(X,Y) := \{\text{Abbildungen } f : X \to Y \text{ zusammen mit} \\ & \qquad \text{Totalordnungen auf den Fasern } f^{-1}[\{y\}],\ y \in Y\} \end{aligned}$$

Die Komposition soll dabei wie folgt definiert sein: Die Abbildungsteile verkettet man wie gewöhnlich, und auf den Fasern $(g \circ f)^{-1}[\{z\}]$ definiert man folgende Totalordnung: $i \preceq j$ genau dann, wenn entweder $f(i) \neq f(j)$ und $f(i) \preceq f(j)$ in $g^{-1}[\{z\}]$, oder $f(i) = f(j)$ und $i \preceq j$ in $f^{-1}[\{f(i)\}]$.