Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2014

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 5 zur Homologischen Algebra I

– Hier könnte dein Motto stehen. –

Aufgabe 1. *Homologische Charakterisierung von Zusammenhang*

Sei X eine simpliziale Menge. Sei $\approx$ die feinste Äquivalenzrelation auf X_0 mit $X(\partial^1)u \approx X(\partial^0)u$ für alle $u \in X_1$; anschaulich gilt genau dann $x \approx y$, wenn sich die 0-Simplizes x und y durch einen Kantenzug miteinander verbinden lassen.

a) Seien $x, y \in X_0$. Zeige, dass die entsprechenden Punkte in der geometrischen Realisierung $|X|$ genau dann durch einen stetigen Pfad miteinander verbunden werden können, wenn $x \approx y$.

   Tipp: Eine Richtung ist leichter als die andere. Konstruiere für die andere eine geeignete simpliziale Abbildung $X \to \underline{\Omega}$ und betrachte deren geometrische Realisierung. Dabei bezeichnet $\Omega \supseteq \{0, 1\}$ die Menge der Wahrheitswerte und $\underline{\Omega}$ die diskrete simpliziale Menge mit Eckenmenge Ω. Verwende, dass das Einheitsintervall zusammenhängend ist.

b) Zeige für beliebige 0-Simplizes $x, y \in X_0$:

$$x \approx y \quad \Longrightarrow \quad x - y \in \operatorname{im}(d^0 : C_1(X, \mathbb{Z}) \to C_0(X, \mathbb{Z})).$$

c) Zeige: $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\langle\text{Wegzusammenhangskomponenten von } |X|\rangle$ (freier $\mathbb{Z}$-Modul).

Aufgabe 2. *Homologieberechnungen*

Berechne die Homologie (mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$) von folgenden simplizialen Mengen:

a) dem Standard-n-Simplex $\Delta[n]$,

b) der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre $\dot{\Delta}[n]$ (siehe Aufgabe 5 von Blatt 4),

c) dem zweidimensionalen Torus,

d) der reellen projektiven Ebene.

Verwende dazu als Kettengruppen die freien $\mathbb{Z}$-Moduln über den *nichtdegenerierten* Simplizes; später werden wir verstehen, wieso diese die volle Homologie berechnen. Inwieweit bestätigt sich das Motto *Homologie misst (mehrdimensionale) Löcher*?[1]

– Bitte wenden. –

[1] Mit Homologie kann man auch Löcher des umgebenden logischen Rahmens messen, etwa inwieweit das Auswahlaxiom fehlschlägt: Andreas Blass. *Cohomology detects failures of the axiom of choice.* Trans. Amer. Math. Soc. **279**, S. 257–269.

Aufgabe 3. *Affine Schemata I*

Sei A ein kommutativer Ring (mit Eins). Sei $\operatorname{Spec} A$ die Menge der Primideale von A. Eine Teilmenge $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ heißt genau dann *offen*, wenn sie eine (beliebige) Vereinigung von *standardoffenen Mengen* ist; solche sind Mengen der Form $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \,|\, f \not\in \mathfrak{p}\}$ mit $f \in A$. Anschaulich stellt man sich ein Ringelement $f \in A$ als *Funktion* auf $\operatorname{Spec} A$ und die Menge $D(f)$ als Menge der Punkte, wo f nicht verschwindet, vor.

Ist $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, so ist $\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in A \,|\, \exists n \geq 0\colon\ f^n \in \mathfrak{a}\}$ das zugehörige *Radikalideal*. Sind $f_1, \ldots, f_n$ Ringelemente, so ist $(f_1, \ldots, f_n) := \{\sum_i a_i f_i \,|\, a_1, \ldots, a_n \in A\}$ das von diesen Elementen *erzeugte Ideal*.

Zeige folgende Behauptungen und interpretiere sie anschaulich, für alle Ringelemente $f, g, g_1, \ldots, g_n \in A$ und Primideale $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$:

a) $D(f) \subseteq D(g) \Longleftrightarrow \sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{(g)}$.

b) $D(f) \subseteq D(g_1) \cup \cdots \cup D(g_n) \Longleftrightarrow \sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{(g_1, \ldots, g_n)}$.

c) $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.

d) Der topologische Abschluss von $\{\mathfrak{p}\}$ ist durch $\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \,|\, \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$ gegeben. Wann ist also die Menge $\{\mathfrak{p}\}$ selbst schon abgeschlossen?

Tipp: Zeige, dass der Schnitt über alle Primideale $\mathfrak{p}$, welche ein vorgegebenes Ideal $\mathfrak{a}$ umfassen, gleich $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ist. Für eine Richtung musst du eine Katze opfern und für geeignete Elemente $f \in A$ folgendes Mengensystem betrachten:

$$\mathcal{U} := \{\mathfrak{b} \subseteq A \,|\, \mathfrak{b} \text{ ist ein Ideal mit } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \text{ und } f^n \not\in \mathfrak{b} \text{ für alle } n \geq 0\}.$$

Diese Aufgabe ist eine Hinführung auf *affine Schemata*; es fehlt noch die Konstruktion einer geeigneten Ringgarbe $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ – erst dann kann man Geometrie betreiben. In intuitionistischer Logik ist die Beschreibung über Primideale offensichtlich nicht angebracht. Da man aber den *Rahmen der offenen Teilmengen* von $\operatorname{Spec} A$ explizit beschreiben kann (nämlich wie?), kann man intuitionistisch $\operatorname{Spec} A$ immer noch als *Örtlichkeit* konstruieren. Das hängt eng mit *dynamischen Methoden in der Algebra* zusammen.

Aufgabe 4. *Abgeschnittene simpliziale Mengen*

Eine *N-abgeschnittene simpliziale Menge* ist eine Familie von Daten $(X_n, X(f))$ wie bei simplizialen Mengen, nur dass die Simplexmengen lediglich für $0 \leq n \leq N$ und die Abbildungen $X(f)$ für $f : [k] \to [\ell]$ mit $0 \leq k, \ell \leq N$ gegeben sein müssen. In offensichtlicher Weise (wie genau?) legt jede simpliziale Menge X und jede M-abgeschnittene simpliziale Menge X (mit $M \geq N$) eine N-abgeschnittene Menge $\operatorname{Tr}^N X$ fest.

Ist Y eine N-abgeschnittene simpliziale Menge, so möchten wir durch die Setzungen

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_m &:= Y_m, \qquad \text{für } m \leq N, \\ \widehat{Y}_{N+1} &:= \{(y_0, \ldots, y_{N+1}) \mid y_0, \ldots, y_{N+1} \in Y_N,\ Y(\partial^i) y_j = Y(\partial^{j-1}) y_i \text{ für } i < j\}, \end{aligned}$$

sowie $\widehat{Y}(\partial^i_{N+1}) = ((y_0, \ldots, y_{N+1}) \mapsto y_i)$ und gesunden Menschenverstand eine $(N+1)$-abgeschnittene simpliziale Menge definieren.

a) Wie kann man sich die Elemente von $\widehat{Y}_{n+1}$ als „virtuelle“ $(N+1)$-Simplizes vorstellen? Was sollen die y_i eines solchen Simplex sein? Wieso soll die Kompatibilitätsbedingung an die y_i und die Randabbildungen erfüllt sein? Inwieweit füllen diese virtuellen Simplizes vorhandene „simpliziale Löcher“ in Y_N?

b) Leite eine sinnvolle Definition für $\widehat{Y}(\sigma^i_N)$ her, $0 \leq i \leq N$.

c) Zeige, dass $\widehat{Y}$ die *universelle* $(N+1)$-Fortsetzung von Y ist; zeige also: Ist Z eine beliebige $(N+1)$-abgeschnittene simpliziale Menge und $F : \operatorname{Tr}^N Z \to Y$ eine N-abgeschnittene simpliziale Abbildung, so gibt es genau eine Fortsetzung von F zu einer $(N+1)$-abgeschnittenen simplizialen Abbildung $Z \to \widehat{Y}$.