

## Übungsblatt 26 zur Homologischen Algebra II

### Aufgabe 1. Ein universelles Koeffiziententheorem

Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Sei  $P^\bullet$  ein in nichtpositiven Graden konzentrierter Komplex flacher  $R$ -Moduln.

- Konstruiere eine Spektralsequenz  $E_2^{pq} = \operatorname{Tor}_{-p}^R(H^q(P^\bullet), M) \Rightarrow H^n(P^\bullet \otimes_R M)$ .
- Sei  $R$  sogar ein Hauptidealbereich. Extrahiere für  $n \geq 0$  aus der Spektralsequenz eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow H^{-n}(P^\bullet) \otimes_R M \longrightarrow H^{-n}(P^\bullet \otimes_R M) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(H^{-n+1}(P^\bullet), M) \longrightarrow 0.$$

*Tipp:* Zeige, dass die Spektralsequenz im Bereich  $p \in \{0, -1\}$ ,  $q \leq 0$  konzentriert ist. Für solche Sequenzen hat die kanonische exakte Sequenz  $0 \rightarrow F^0 E_\infty^{-n} \rightarrow F^{-1} E_\infty^{-n} \rightarrow F^{-1} E_\infty^{-n} / F^0 E_\infty^{-n} \rightarrow 0$  die Form  $0 \rightarrow E_2^{0, -n} \rightarrow E_\infty^{-n} \rightarrow E_2^{-1, -n+1} \rightarrow 0$ .

### Aufgabe 2. Čech-Methoden für Einsteiger

- Berechne die Kohomologie von  $S^1$  mit Werten in der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}$ .

*Hinweis:* Verwende eine Überdeckung durch drei offene Mengen.

- Sei  $X = \mathbb{A}_k^2 \setminus \{0\}$  die punktierte Ebene. Berechne die Kohomologie von  $\mathcal{O}_X$ .

*Hinweis:* Obwohl  $X$  ein Schema ist, muss man kaum etwas von Schematheorie wissen, um die Kohomologie zu berechnen. Verwende die Überdeckung  $X = D(x) \cup D(y)$ ; den Isomorphismus  $D(x) \cong \operatorname{Spec} k[x, y, 1/x]$ ; und das nichttriviale Resultat, dass die höhere Kohomologie von quasikohärenten Modulgarben (wie  $\mathcal{O}_X$ ) auf affinen Schemata verschwindet (die nullte Kohomologie von  $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$  ist  $A$ ).

### Aufgabe 3. Die Frölicher-Spektralsequenz

Sei  $X$  eine komplexe Mannigfaltigkeit. Sei  $\Omega_X^p$  die Garbe der holomorphen  $p$ -Formen auf  $X$ ; also ist  $\Omega_X^0$  die Garbe der holomorphen Funktionen auf  $X$ . Wegen des *holomorphen Poincaré-Lemmas* ist eine Auflösung der konstanten Garbe  $\mathbb{C}$  auf  $X$  durch

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Omega_X^0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^2 \longrightarrow \dots$$

gegeben. Konstruiere eine Spektralsequenz  $E_1^{pq} = H^q(X, \Omega_X^p) \Rightarrow H^n(X, \mathbb{C})$ .

*Tipp:* Verwende die Spektralsequenz zu einer Cartan-Eilenberg-Auflösung  $\mathcal{I}^{\bullet\bullet}$  von  $\Omega_X^\bullet$ . Beachte  $H^n(X, \mathbb{C}) \cong H^n(X, \Omega_X^\bullet) \cong H^n(\operatorname{Tot} \Gamma(X, \mathcal{I}^{\bullet\bullet}))$ .

*Hinweis:* Ist  $X$  eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit, so degeneriert die Spektralsequenz auf der ersten Seite (das ist nichttrivial) und weist die *Hodge-Zerlegung*  $H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, \Omega_X^q)$  nach.

*Bonusfrage:* Was passiert, wenn  $X$  eine reelle Mannigfaltigkeit ist und man die Garben der glatten Differentialformen verwendet?

### Aufgabe 4. Mayer-Vietoris für abgeschlossene Überdeckungen

Sei  $X = A \cup B$  eine abgeschlossene Überdeckung eines topologischen Raums  $X$ . Sei  $\mathcal{E}$  eine Garbe abelscher Gruppen auf  $X$ . Leite eine Mayer-Vietoris-Sequenz her, die die Kohomologie von  $\mathcal{E}$  mit der Kohomologie der zurückgezogenen Garben  $\mathcal{E}|_A$ ,  $\mathcal{E}|_B$  und  $\mathcal{E}|_{A \cap B}$  in Verbindung setzt.

*Tipp:* Aus der gegebenen Überdeckung kann man nicht (etwa durch Komplementbildung) eine offene erhalten und dann die gewöhnliche Mayer-Vietoris-Sequenz verwenden. Konstruiere stattdessen eine kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow i_* i^{-1} \mathcal{E} \oplus j_* j^{-1} \mathcal{E} \rightarrow k_* k^{-1} \mathcal{E} \rightarrow 0$ , wobei  $i$ ,  $j$  und  $k$  die Inklusionen von  $A$ ,  $B$  und  $A \cap B$  in  $X$  sind. Beachte  $\mathcal{E}|_A := i^{-1} \mathcal{E}$  und  $H^\bullet(A, \mathcal{F}) \cong H^\bullet(X, i_* \mathcal{F})$ .