Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 16 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Universelle Eigenschaft der Garbifizierung*

Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben auf einem topologischen Raum X (oder einer Örtlichkeit). Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben. Sei $\mathcal{G}$ sogar eine Garbe. Sei $\mathcal{F} \xrightarrow{\iota} s(\mathcal{F})$ die Garbifizierung von $\mathcal{F}$. Konstruiere einen Garbenmorphismus $\overline{\alpha} : s(\mathcal{F}) \to \mathcal{G}$ mit $\overline{\alpha} \circ \iota = \alpha$ und weise insbesondere seine Wohldefiniertheit nach.

Aufgabe 2. *Halme des Pushforwards*

a) Sei X ein topologischer Raum. Sei $f : Y \hookrightarrow X$ die Inklusion eines abgeschlossenen Teilraums. Sei $\mathcal{E}$ eine Garbe auf Y. Zeige:

$$(f_*\mathcal{E})_x \cong \begin{cases} \mathcal{E}_x, & \text{falls } x \in Y, \\ \{0\}, & \text{falls } x \notin Y. \end{cases}$$

b) Mache dir anhand eines Beispiels klar, dass die analoge Aussage für Inklusionen offener Teilräume im Allgemeinen nicht gilt.

c) Folgere, dass der Pushforward-Funktor $f_* : \mathrm{AbShv}(Y) \to \mathrm{AbShv}(X)$ in der Situation von Teilaufgabe a) exakt ist.

d) Sei $f : Y \to X$ eine abgeschlossene stetige Abbildung. Sei $\mathcal{E}$ eine Garbe auf Y. Sei $x \in X$. Zeige: $(f_*\mathcal{E})_x \cong \Gamma(f^{-1}[x], \mathcal{E})$.

   Hinweis: Beachte, dass die Faser $f^{-1}[x]$ im Allgemeinen nicht offen sein wird. Die rechte Seite ist daher als Kolimes über die $\mathcal{E}(U)$, wobei $U \subseteq Y$ alle offenen Mengen mit $f^{-1}[x] \subseteq U$ durchläuft, definiert.

   Tipp: Eine stetige Abbildung $f : Y \to X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle $x \in X$ und alle offenen Umgebungen U von $f^{-1}[x]$ in Y eine offene Umgebung V von x mit $f^{-1}[V] \subseteq U$ existiert. (Siehe zum Beispiel Torsten Wedhorn, *Manifolds, sheaves, and cohomology*, Seite 86.)

Aufgabe 3. *Beispiele für flache Moduln*

a) Zeige: Jeder freie Modul ist flach.

b) Zeige: Direkte Summanden freier Moduln sind flach.

c) Zeige: Filtrierte Kolimiten freier Moduln (also Moduln der Form $\operatorname{colim}_{i \in I} M_i$, wobei I eine filtrierte Kategorie ist) sind flach.

   Erinnerung: Eine Kategorie heißt genau dann *filtriert*, wenn in ihr jedes endliche Diagram einen Kokegel besitzt (welcher nicht unbedingt eine universelle Eigenschaft erfüllen muss). Wenn du magst, kannst du der Einfachheit halber gerne annehmen, dass I die von einer gerichteten Menge induzierte Kategorie ist.

Hinweis: In der Übung werden wir diskutieren, wie man sich Flachheit von Moduln geometrisch vorstellen kann.

Aufgabe 4. *Serresche Quotientenkategorien*

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $\mathcal{B}$ eine *Serresche Unterkategorie* von $\mathcal{A}$, das ist eine volle Unterkategorie, welche das Nullobjekt von $\mathcal{A}$ enthält und für die für jede kurze exakte Sequenz $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ in $\mathcal{A}$ folgendes gilt: X liegt genau dann in $\mathcal{B}$, wenn X' und X'' in $\mathcal{B}$ liegen.

a) Zeige: Ist X ein Objekt von $\mathcal{B}$, so liegt auch jedes in $\mathcal{A}$ zu X isomorphe Objekt in $\mathcal{B}$.

b) Mache dir kurz klar: Die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume ist eine Serresche Unterkategorie der Kategorie aller Vektorräume.

c) Die *Serresche Quotientenkategorie* $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ hat als Objekte dieselben wie $\mathcal{A}$. Die Morphismen definiert man über den (gerichteten) Kolimes

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}(X, Y) := \mathrm{colim}_{X', Y'} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', Y/Y'),$$

wobei X' über alle Unterobjekte von X mit $X/X' \in \mathcal{B}$ und Y' über alle Unterobjekte von Y mit $Y' \in \mathcal{B}$ läuft. Wie ist die Morphismenverkettung in $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ zu definieren? Wieso ist der Kolimes gerichtet? Wie wird $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ zu einer abelschen Kategorie? Welchen Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$ kann man kanonisch angeben? Wieso ist dieser exakt? Wieso gilt genau dann $F(X) = 0$, wenn $X \in \mathcal{B}$? Wieso ist $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$ unter allen exakten Funktoren $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ mit dieser Eigenschaft initial? Kläre so viele dieser Fragen, wie du möchtest.

Bemerkung: Serresche Quotientenkategorien sind zur algorithmischen Implementierung von Kategorien kohärenter Modulgarben auf gewissen Schemata nützlich (siehe Artikel von Mohamed Barakat und anderen).

Aufgabe 5. *Der Satz von Jordan–Hölder*

Ein Objekt X einer abelschen Kategorie heißt genau dann *einfach*, wenn es *genau zwei* Unterobjekte besitzt. (Ein *Unterobjekt* ist ein Monomorphismus $U \xrightarrow{i} X$. Unterobjekte $U \xrightarrow{i} X$, $U' \xrightarrow{i'} X$ werden genau dann als gleich angesehen, wenn es einen Isomorphismus $q : U \to U'$ mit $i' \circ q = i$ gibt.) Das Nullobjekt zählt also nicht als einfach.

Eine *Jordan–Hölder-Reihe* für ein Objekt X ist eine Filtrierung $0 = X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow X_{n-1} \hookrightarrow X_n = X$, sodass die Quotienten X_i/X_{i-1} jeweils einfache Objekte sind.

a) Zeige: Je zwei Jordan–Hölder-Reihen eines Objekts X haben dieselbe Länge und bis auf Isomorphie treten dieselben Quotienten auf.

   Tipp: Lasse dich vom klassischen Beweis des Satzes über Schreier–Zassenhaus, zum Beispiel für Gruppen oder Moduln, inspirieren.

b) Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Der Vektorraum K^n wird durch die Setzung $f(X) \cdot v := f(A)v$ für $f \in K[X]$ und $v \in K^n$ zu einem $K[X]$-Modul. Hängen die Jordanform von A und Jordan–Hölder-Reihen von K^n als $K[X]$-Modul miteinander zusammen?