

Übungsblatt 10 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. Ein konkretes Modell für endlich-dimensionale Vektorräume

Sei k ein Körper. Sei \mathcal{C} die Kategorie mit

$$\begin{aligned}\mathrm{Ob}\mathcal{C} &:= \mathbb{N}, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(n, m) &:= k^{m \times n},\end{aligned}$$

wobei die Morphismenverkettung durch die Matrixmultiplikation gegeben ist.

- a) Zeige, dass die Kategorie \mathcal{C} (auf unkanonische Art und Weise) zur Kategorie der endlich-dimensionalen k -Vektorräume äquivalent ist.

Tipp: Wähle für jeden endlich-dim. Vektorraum V einen Iso $\eta_V : k^{\dim V} \rightarrow V$.

- b) Zeige, dass $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ auf kanonische Art und Weise äquivalent zu \mathcal{C} ist. (Das ist etwas Besonderes!)
- c) Zeige, dass die Kategorie der endlich-dimensionalen k -Vektorräume *auf kanonische Art und Weise* zu ihrer dualen Kategorie äquivalent ist.

Aufgabe 2. Kategorielle Eigenschaften

Es gibt folgendes Motto: Sei φ eine mathematische Aussage über Kategorien, die sich nur unter Verwendung der Konzepte *Objekt*, *Morphismus*, *Verkettung von Morphismen* und *Gleichheit von Morphismen* formulieren lässt. Sind dann \mathcal{C} und \mathcal{D} zueinander äquivalente Kategorien, so gilt φ genau dann in \mathcal{C} , wenn φ in \mathcal{D} gilt. Beispiele für Aussagen dieser Art sind etwa:

- Die Kategorie besitzt ein initiales Objekt (das ist ein Objekt 0 , sodass es zu jedem Objekt X genau einen Morphismus $0 \rightarrow X$ gibt).
- Je zwei parallele Morphismen sind gleich.
- Je zwei Endomorphismen eines Objekts vertauschen miteinander.
- Jedes initiale Objekt ist auch terminal.

Beispiele für Aussagen, die über die Reichweite des Mottos hinausgehen, sind:

- Die Kategorie besitzt genau ein Objekt.
- Die Kategorie besitzt genau ein initiales Objekt.
- Sind zwei Objekte zueinander isomorph, so sind sie schon gleich.
- Je zwei Morphismen (egal zwischen welchen Objekten) sind gleich.

- a) Mache dir klar, wieso das Motto gilt.
- b) Anna und ihre Freundin Emma haben die Vermutung, dass die folgenden Kategorien paarweise nicht zueinander äquivalent sind. Jemand ruft ihnen zu: *Mit Teilaufgabe a) ist der Nachweis einfach!*, nickt und fliegt davon. Kannst du ihnen helfen?

Set $\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$ $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$ Ring Top Man $\mathrm{Sh}(\mathbb{R}^7)$ BZ Hask

Aufgabe 3. Volltreue Funktoren

- Sei $f : P \rightarrow Q$ eine monotone Abbildung zwischen Quasiordnungen. Wann ist $Bf : BP \rightarrow BQ$ treu? Wann voll? Wann wesentlich surjektiv?
- Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein volltreuer Funktor. Zeige, dass F eine Äquivalenz zwischen \mathcal{C} und einer gewissen vollen Unterkategorie von \mathcal{D} (welcher?) induziert.
- Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein volltreuer und wesentlich surjektiver Funktor. Wenn wir ein genügend starkes Auswahlprinzip zur Verfügung haben, können wir zu jedem Objekt $Y \in \mathcal{D}$ ein Objekt $X_Y \in \mathcal{C}$ und einen Iso $g_Y : F(X_Y) \rightarrow Y$ wählen.

Erkläre, wie die Zuordnung $Y \mapsto X_Y$ einen Funktor definiert. Weise die Funktoraxiome explizit nach. Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus $G \circ F \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$.

Aufgabe 4. Quotientenkategorien

Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Seien für je zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ eine Äquivalenzrelation $\sim_{X,Y}$ auf $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ gegeben.

- Konstruiere eine Kategorie \mathcal{C}/\sim zusammen mit einem Funktor $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\sim$ mit folgender universeller Eigenschaft:
 - Wenn $f \sim_{X,Y} \tilde{f}$ in \mathcal{C} , dann $Q(f) = Q(\tilde{f})$ in \mathcal{C}/\sim .
 - Ist $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor, der wie Q äquivalente Morphismen auf gleiche schickt, so gibt es genau einen Funktor $G : \mathcal{C}/\sim \rightarrow \mathcal{D}$ mit $F = G \circ Q$.

Tipp: Nimm zunächst an, dass für alle passenden Morphismen f, a, b aus $f \sim_{X,Y} \tilde{f}$ schon $afb \sim_{X',Y'} a\tilde{f}b$ folgt.

- Was ist an Teilaufgabe a) inhaltlich schlecht formuliert?

Aufgabe 5. Morita-Äquivalenz von Ringen

Ein Objekt X einer Kategorie \mathcal{C} heißt genau dann *Erzeuger*, wenn der Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, _) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ volltreu ist. Ringe A und B heißen genau dann zueinander *Morita-äquivalent*, wenn ihre Kategorien von (Rechts-)moduln äquivalent sind.

- Welche übersichtliche Menge ist Erzeuger von Set ?
- Welcher Vektorraum ist Erzeuger der Kategorie der k -Vektorräume?
- Zeige, dass Morita-äquivalente Ringe isomorphes Zentrum haben.
- Seien A und B (nicht notwendigerweise kommutative) Ringe mit Eins. Sei P ein Rechts- A -Modul. Sei $\alpha : B \rightarrow \text{End}_A(P)$ ein Ringisomorphismus.

Sei M ein Rechts- A -Modul. Wie wird $\text{Hom}_A(P, M)$ zu einem Rechts- B -Modul?

Sei N ein Rechts- B -Modul. Wie wird $\text{Hom}_B(P^\vee, N)$ zu einem Rechts- A -Modul? Dabei ist $P^\vee := \text{Hom}_A(P, A)$.

- Zeige, dass Ringe A, B genau dann zueinander Morita-äquivalent sind, wenn es einen endlich erzeugten projektiven Erzeuger P von $\text{Mod-}A$ und einen Ringisomorphismus $B \cong \text{End}_A(P)$ gibt.

Tipp: Weise für die schwere Richtung nach, dass die Zuordnung $M \mapsto \text{Hom}_A(P, X)$ eine Äquivalenz $\text{Mod-}A \rightarrow \text{Mod-}B$ definiert. Ein A -Modul P heißt genau dann *projektiv*, wenn für jede surjektive lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ und jede lineare Abbildung $g : P \rightarrow W$ eine lineare Abbildung $\bar{g} : P \rightarrow V$ mit $g = f \circ \bar{g}$ existiert.