Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

Übungsblatt 2 zur Homologischen Algebra I

– Spiel und Spaß mit Verklebedaten –

Aufgabe 1. *Geometrische Realiserung des simplizialen Standard-p-Simplexes*

Wir wollen an einem Beispiel nachvollziehen, dass die Grundlagen der Theorie der simplizialen Mengen sinnvoll aufeinander abgestimmt sind: Zeige, dass die geometrische Realisierung $|\Delta[p]|$ des simplizialen Standard-p-Simplex kanonisch homöomorph zum topologischen Standard-p-Simplex Δ_p ist.

Gib dazu explizit die kanonische Abbildung $|\Delta[p]| \to \Delta_p$ an und weise nach, dass sie ein Homöomorphismus ist. Später werden wir lernen, wie man diese Aufgabe auch unmittelbar vermöge abstrakten Nonsens lösen kann.

Aufgabe 2. *Simpliziale Mengen aus Verklebedaten*

In der Vorlesung wurde eine Konstruktion beschrieben, um aus einem Verklebedatum $(X_{(n)})$ eine simpliziale Menge $\widetilde{X}$ zu bauen: Als Menge der m-Simplizes nimmt man dabei

$$\widetilde{X}_m := \coprod_{\substack{k \geq 0 \\ g : [m] \twoheadrightarrow [k]}} X_{(k)},$$

Ein m-Simplex von $\widetilde{X}$ ist also ein Tupel (g, x), wobei $g : [m] \to [k]$ eine monotone Surjektion (mit $k \geq 0$ beliebig) und $x \in X_{(k)}$ ein k-Simplex von X ist; wir stellen es uns als „Degeneration von x längs g" vor. (Wenn g die Identität ist, ist das keine gute Vorstellung – sonst aber schon.)

Ist $f : [n] \to [m]$ eine monotone Abbildung, so definiert man $\widetilde{X}(f)(g, x) := (\pi, X(\iota)x)$, wobei $[n] \xrightarrow{\pi} [\ell] \xrightarrow{\iota} [k]$ die eindeutige Epi/Mono-Zerlegung von $g \circ f$ ist.

a) Zeige, dass diese Setzung wirklich zu einer simplizialen Menge führt, weise also die beiden Axiome über $\widetilde{X}$ nach.

b) Zeige, dass $\widetilde{X}$ folgende besondere Eigenschaft hat: Für jedes nichtdegenerierte Simplex $x \in \widetilde{X}_m$ und jede monotone Injektion $f : [n] \to [m]$ ist das Simplex $\widetilde{X}(f)x \in \widetilde{X}_n$ ebenfalls nichtdegeneriert.

   Tipp: Vielleicht hilft es dir, nachzuweisen, dass ein Simplex $(g, x) \in \widetilde{X}_m$ genau dann nichtdegeneriert ist, wenn g eine Identitätsabbildung ist.

c) Zeige, dass eine beliebige simpliziale Menge genau dann durch die beschriebene Konstruktion von einem Verklebedatum stammt, wenn es die Eigenschaft aus Teilaufgabe b) hat.

Die Konstruktion $X \mapsto \widetilde{X}$ stellt einen Linksadjungierten zum Vergissfunktor von der Kategorie der simplizialen Mengen in die Kategorie der Verklebedaten dar. In einem gewissen Sinn kann man sie als Kategorifizierung des Fundamentalsatzes von Newtons Finite-Differenzen-Kalkül ansehen. Siehst du eine Verbindung?

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\partial^k a)_0.$$

Aufgabe 3. *Basiswissen zu Homotopie*

Ein topologischer Raum X heißt genau dann *zusammenziehbar*, wenn es einen Basispunkt $x_0 \in X$ derart gibt, dass eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to X$ mit $H(x,0) = x$ und $H(x,1) = x_0$ für alle $x \in X$ existiert.

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt genau dann *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ derart gibt, dass $g \circ f$ und $f \circ g$ (zwar nicht unbedingt gleich, aber) homotop zur jeweiligen Identitätsabbildung sind. Zwei Räume heißen genau dann zueinander *homotopieäquivalent*, wenn eine Homotopieäquivalenz zwischen ihnen verläuft.

Beweise so viele der folgenden Behauptungen, wie du möchtest.

a) Ein Raum ist genau dann zusammenziehbar, wenn er homotopieäquivalent zu einem einpunktigen Raum ist.

b) Ist X zusammenziehbar, so sind je zwei stetige Abbildungen $Y \rightrightarrows X$ zueinander homotop. Die Umkehrung gilt ebenfalls. (Das Konzept von Homotopie von Abbildungen kann man sich also nicht gut anhand von Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ veranschaulichen.)

c) Zusammenziehbare Räume sind stets wegzusammenhängend.

d) ~~Der leere Raum ist zusammenziehbar.~~