Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

# Übungsblatt $\omega$ zur Homologischen Algebra I und II

*Es fehlen noch Fragen zu simplizialen Mengen und weitere Fragen zu den restlichen Themen.*

**Aufgabe 1.** *Kategorientheorie: Grundlagen*

1. Was ist eine Kategorie, was ein Funktor, was eine natürliche Transformation?
2. Was sind – aus drei verschiedenen Teilgebieten der Mathematik – Beispiele für Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen?
3. Inwieweit verallgemeinern Funktoren Abbildungen zwischen Mengen?[1]
4. Inwieweit verallgemeinern Funktoren monotone Abbildungen zwischen Quasiordnungen?[2]
5. Inwieweit verallgemeinern Funktoren Gruppen- oder Monoidhomomorphismen? Was sind in diesem Bild natürliche Transformationen?
6. Unter welchem Trivialnamen sind Kategorien mit nur einem Objekt auch bekannt?
7. Inwieweit kodieren natürliche Transformationen gleichmäßig definierte Abbildungsvorschriften?
8. Welche natürlichen Transformationen $\mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \to \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}$ gibt es?
9. Was ist ein Gruppoid?
10. Was sind drei Beispiele für Gruppoide?

**Aufgabe 2.** *Kategorientheorie: Verbote*

1. Wieso sollte man Objekte nicht auf Gleichheit testen?
2. Wieso sollte man Funktoren nicht auf Gleichheit testen?
3. Wieso kann man natürliche Transformationen auf Gleichheit testen?

**Aufgabe 3.** *Kategorientheorie: Äquivalenzen*

1. Wie kann man von zwei Kategorien feststellen, dass sie nicht zueinander äquivalent sind?
2. Zu welcher sehr konkreten Kategorie ist die Kategorie der endlich-dimensionalen $K$-Vektorräume äquivalent? Wie sieht in diesem Bild der Dualisierungsfunktor $\mathrm{Vect}(K) \to \mathrm{Vect}(K)^{\mathrm{op}}$ aus?
3. Welche Kategorien sind zu diskreten Kategorien äquivalent? (Eine diskrete Kategorie ist eine, in der jeder Morphismus ein Identitätsmorphismus ist. Was ist schlecht an dem Konzept einer diskreten Kategorie?)

[1] Tipp: Diskrete Kategorien.
[2] Tipp: Quasiordnungen induzieren Kategorien.

4. Wieso sind Set und Vect($\mathbb{R}$) nicht zueinander äquivalent?
5. Wieso sind Set und Set$^{\mathrm{op}}$ nicht zueinander äquivalent?
6. Wozu ist die Kategorie der (kommutativen) C$^*$-Algebren (mit Eins) äquivalent?
7. Wie kann man die Galoistheorie als Kategorienäquivalenz ausdrücken?
8. Über welche Kategorienäquivalenz ist die Darstellungstheorie von Fundamentalgruppen (oder besser Fundamentalgruppoiden) eng mit der Überlagerungstheorie verknüpft?
9. Wann heißen Ringe zueinander Morita-äquivalent?
10. Der Matrixring $k^{n \times n}$ wurde als „nicht ernsthaft nichtkommutativ" bezeichnet, da er Morita-äquivalent zu $k$ ist. Wie sieht die Äquivalenz $\mathrm{Mod}(k) \to \mathrm{Mod}(k^{n \times n})$ aus?
11. Was ist Pontrjagin-Dualität?

**Aufgabe 4.** *Kategorientheorie: Limiten*

1. Was sind Limiten und Kolimiten?
2. Inwieweit sind Produkte Spezialfälle von Limiten?
3. Inwieweit ist der Vektorraum $K[X]$ aller Polynome ein Kolimes?
4. Wie kann man einer Kategorie ansehen, ob sie alle Limiten besitzt?
5. Inwieweit sind Limiten stets Unterobjekte von Produkten und Kolimiten stets Quotientenobjekte von Koprodukten?
6. Bei wem muss man sich melden, wenn man nächstes Jahr Zirkelleiter sein möchte?
7. Welche Limiten existieren in der Kategorie der Mengen? … in der Kategorie der Gruppen? Wieso?
8. Was ist ein Beispiel für eine natürlich auftretende Kategorie, in der nicht alle Kolimiten existieren?
9. Was haben Limiten mit Darstellbarkeit von Funktoren zu tun?

**Aufgabe 5.** *Kategorientheorie: Adjunktionen*

1. Was sind adjungierte Funktorpaare?
2. Was sind Beispiele für Adjunktionen aus drei verschiedenen Teilgebieten der Mathematik?
3. Wieso bewahren Rechtsadjungierte stets Limiten? (Vielen Dank an Timo Schürg: RAPL!)
4. Wieso sind Funktoren, die freie Konstruktionen berechnen, stets Linksadjungierte und nicht Rechtsadjungierte?
5. Wieso gibt es keine freien Körper?

**Aufgabe 6.** *Kategorientheorie: Yoneda*

1. Was besagt das Yoneda-Lemma in seiner allgemeinen Formulierung?
2. Wie kann man sich einen Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ anschaulich vorstellen? Wie sieht in diesem Bild die Yoneda-Einbettung aus?

3. Was sind drei Beispiele für Anwendungen des Yoneda-Lemmas?
4. Wieso ist der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \_\_)$ stetig (limesbewahrend)?

**Aufgabe 7.** *Kettenkomplexe*

1. Hängt die (Ko-)Homologie eines (Ko-)Kettenkomplexes ko- oder kontravariant vom Komplex ab?
2. Wieso induzieren nullhomotope Morphismen dieselben Morphismen in Kohomologie?
3. Wie konstruiert man aus einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen die zugehörige lange exakte Sequenz?
4. Welche Funktorialitätseigenschaften hat diese?
5. Wieso sind simpliziale Mengen eine wichtige Bezugsquelle für Kettenkomplexe?

**Aufgabe 8.** *Garben*

1. Was ist eine Prägarbe? Was ist eine Garbe?
2. Wie ist der Pushforward einer Garbe definiert?
3. Wie der Pullback (Rückzug)?
4. Wie sieht der Rückzug von Garben im étalen Bild aus?
5. Was weiß man über die Halme einer zurückgezogenen Garbe? Wie beweist man das?
6. Zu welcher einfachen Kategorie ist die Kategorie der Garben auf dem einpunktigen Raum äquivalent?
7. Unter welchem Trivialnamen ist Vordrücken auf den Punkt auch bekannt?
8. Was ist der Rückzug einer Menge $E$ unter der eindeutigen Abbildung $X \to 1$? Wie ist die Frage zu verstehen?
9. Was ist eine lokal konstante Garbe?
10. Was sind Beispiele für lokal konstante Garben?
11. Was ist Monodromie einer lokal konstanten Garbe?
12. Was ist der Zusammenhang zwischen lokal konstanten Garben und Überlagerungen?

**Aufgabe 9.** *Geometrie*

1. Was ist ein lokal geringter Raum? Worauf bezieht sich das Adjektiv „lokal"?
2. Was sind drei substanziell verschiedene Beispiele für lokal geringte Räume?
3. Welche Aspekte verallgemeinern lokal geringte Räume im Vergleich zu glatten Mannigfaltigkeiten?
4. Was ist der wandelnde Tangentialvektor? Wieso heißt er so?
5. Was ist Supergeometrie?

**Aufgabe 10.** *Abelsche Kategorien*

1. Welche Möglichkeiten gibt es, in Ab-angereicherten Kategorien das Konzept des Kerns eines Morphismus zu definieren?

2. Inwieweit ist die abelsche Gruppenstruktur auf den Hom-Mengen einer abelschen Kategorie kein weiteres Datum? Inwieweit also lässt sie sich eindeutig aus einer gewissen Eigenschaft rekonstruieren?
3. Welche der folgenden Aussagen über Morphismen in abelschen Kategorien ist trivial? Monomorphismen sind unter Rückzug stabil. Epimorphismen sind unter Rückzug stabil.
4. Ist die Kategorie der freien abelschen Gruppen eine abelsche Kategorie? Wie steht's um die Kategorie der endlich erzeugten $R$-Moduln, wobei $R$ irgendein Ring ist?
5. Ist die Kategorie der Banachräume eine abelsche Kategorie?
6. Wie kann man in abelschen Kategorien Diagrammjagden wie in Modulkategorien führen?
7. Was ist ein Beispiel für eine (notwendigermaßen „infinitäre") Aussage, die zwar in der Kategorie der abelschen Gruppen stimmt, nicht aber in einer beliebigen abelschen Kategorie?
8. Wann heißt eine kurze exakte Sequenz zerfallend? Welche speziellen Objekte führen automatisch dazu, dass eine Sequenz zerfällt?
9. Was ist ein Beispiel für eine abelsche Kategorie, in denen alle kurze exakten Sequenzen zerfallen?
10. Was ist ein Beispiel für eine abelsche Kategorie zusammen mit einer kurzen exakten Sequenz, welche nicht zerfällt?
11. Wie kann man $\mathrm{Ext}^1$ über kurze exakte Sequenzen verstehen? Was ist das Nullelement? Wie sieht die Gruppenstruktur aus?
12. Wie kann man in einer bestimmten Ext-Gruppe entscheiden, ob ein gegebener Morphismus fortsetzbar ist auf ein Oberobjekt?
13. Was ist eine Serresche Unterkategorie und wie verwendet man sie, um Serresche Quotientenkategorien zu konstruieren?
14. Zu welcher bekannten Kategorie ist $\mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}/\mathcal{T}$ äquivalent?

**Aufgabe 11.** *Garbentheorie*

1. Was ist die universelle Eigenschaft der Garbifizierung?
2. Wie konstruiert man sie?
3. Wie definiert man den Rückzug von Garben?
4. Was weiß man über die Halme zurückgezogener Garben? Wie beweist man das?
5. Wie definiert man den Pushforward von Garben?
6. Unter welchen Voraussetzungen kann man etwas über die Halme vorgedrückter Garben sagen?
7. Wann ist eine Sequenz von Garben abelscher Gruppen exakt?
8. Ist Vordrücken von Garben abelscher Gruppen ein exakter Funktor? Wie steht es um den Rückzug?
9. Wie kann die Kategorie der Garben als Lokalisierung der Kategorie der Prägarben verstanden werden?

**Aufgabe 12.** *$K$-Theorie*

1. Was ist die $K$-Theorie einer abelschen Kategorie?
2. Was ist die $K$-Theorie der Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume über einem Körper?
3. Und was ist die $K$-Theorie der Kategorie der abelschen Gruppen?
4. Kann die $K$-Theorie einer abelschen Kategorie Null sein, ohne dass die abelsche Kategorie selbst Null ist? (Das würde bedeuten, dass jedes Objekt ein Nullobjekt ist, bzw. dass jeder Morphismus ein Nullmorphismus ist.)

**Aufgabe 13.** *Abgeleitete Kategorien*

1. Was ist eine Voraussetzung an eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$, die garantiert, dass man $D^+(\mathcal{A})$ im gleichen mengentheoretischen Universum wie $\mathcal{A}$ konstruieren kann?
2. Wie lautet die universelle Eigenschaft der abgeleiteten Kategorie genau?
3. Welche wichtige Tatsache über injektive Objekte geht in den Beweis der Äquivalenz $D^+(\mathcal{A}) \simeq K^+(\mathcal{I})$ ein?
4. Inwieweit wird das Motto, Auflösungen eines Objekts seien genauso gut wie das aufgelöste Objekt selbst, in der abgeleiteten Kategorie Wirklichkeit?
5. Bis auf was sind zwei injektive Auflösungen eines Objekts gleich?
6. Wieso invertiert man, angesichts der vorherigen Frage, in der Definition der abgeleiteten Kategorie nicht nur die Homotopieäquivalenzen?
7. Bis auf was sind zwei beliebige, nicht unbedingt injektive, Auflösungen eines Objekts gleich?
8. Wann ist die abgeleitete Kategorie wieder abelsch?
9. Unter welchen Voraussetzungen ist jeder Komplex in der abgeleiteten Kategorie isomorph zu seinem Kohomologiekomplex?
10. Was ist die dumme Abschneidung eines Komplexes? Was die gute?
11. Welche wichtigen ausgezeichneten Dreiecke erhält man über die beiden Abschneidungen?
12. Welche drei Definitionen des Ext-Funktoren gibt es?
13. Was ist das Yoneda-Produkt?
14. Welche Interpretation haben die Elemente von $\mathrm{Ext}^2$? Welche Elemente gelten als Null?
15. In welchen Fällen kann man die Kohomologie des Kegels eines Morphismus einfach angeben?
16. Was ist ein Beispiel für eine Kategorie, die nicht genügend viele Projektive besitzt?

**Aufgabe 14.** *Homologische Dimension*

1. Was ist die homologische Dimension einer abelschen Kategorie?
2. Mit welchem anderen Dimensionsbegriff hängt die homologische Dimension der Kategorie von Moduln über einem Ring $R$ zusammen?
3. Was ist die homologische Dimension der Kategorie der Moduln über einem Hauptidealbereich?

4. Was hat die Feinstrukturtheorie aus der Linearen Algebra mit homologischer Dimension zu tun?

**Aufgabe 15.** *Abgeleitete Funktoren*

1. Wie lautet die universelle Eigenschaft eines abgeleiteten Funktors?
2. Wie konstruiert man abgeleitete Funktoren?
3. Durch welche Art Auflösungen kann man abgeleitete Funktoren berechnen?
4. Was weiß man über $R^n F(X)$, wenn nur eine Auflösung von $X$ durch völlig unspezifische Objekte zur Verfügung hat?
5. Es gibt mindestens zwei sinnvolle Definitionen der Tor-Funktoren. Wie zeigt man ihre Äquivalenz?
6. Gibt es im Allgemeinen mehr Injektive oder mehr $F$-azyklische Objekte?
7. Erhält ein linksexakter Funktor Quasiisomorphismen zwischen beliebigen nach unten beschränkten Komplexen?

**Aufgabe 16.** *Spektralsequenzen*

1. Wann heißt eine Spektralsequenz konvergent? Was bedeutet Degeneration auf einer bestimmten Seite?
2. Inwieweit verallgemeinern Spektralsequenzen lange exakte Sequenzen?
3. Sei $0 \to X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Daraus erhält man die zwei-schrittige Filtrierung $0 \hookrightarrow X^\bullet \hookrightarrow Y^\bullet$. Wie sieht die zugehörige Spektralsequenz aus, und was hat das mit der induzierten langen exakten Sequenz in Kohomologie zu tun?
4. Welche Informationen kann man aus den niedrigen Seiten einer Spektralsequenz über die $E_\infty$-Seite selbst dann noch ziehen, wenn keine Degeneration vorliegt und man nicht viel Mühe investieren möchte?
5. Was ist die Grothendieck-Spektralsequenz?
6. Was ist die Leray-Spektralsequenz?
7. Was ist die Spektralsequenz zu einem Doppelkomplex?

**Aufgabe 17.** *Garbenkohomologie*

1. Sei $X$ eine offene Teilmenge der komplexen Ebene. Sei eine holomorphe Funktion $f$ auf $X$ gegeben. Wie kann man mit kohomologischen Techniken entscheiden, ob $f$ eine Stammfunktion besitzt?