

## Übungsblatt 9 zur Homologischen Algebra I

### Aufgabe 1. Funktoren als verallgemeinerte monotone Abbildungen

Seien  $P$  und  $Q$  Quasiordnungen (oder Partialordnungen). Seien  $BP$  und  $BQ$  die zugehörigen dünnen Kategorien, deren Objekte genau die Elemente von  $P$  bzw.  $Q$  sind und in denen zwischen zwei Objekten genau dann ein Morphismus verläuft, wenn die Quelle kleinergleich dem Ziel ist.

- a) Zeige, dass Funktoren  $BP \rightarrow BQ$  auf kanonische Art und Weise mit schwach monoton steigenden Abbildungen  $P \rightarrow Q$  korrespondieren.
- b) Zeige, dass zwischen zwei Funktoren  $Bf, Bg : BP \rightarrow BQ$  höchstens eine natürliche Transformation verlaufen kann; und dass es genau dann eine solche gibt, wenn für die zugehörigen monotonen Abbildungen  $f, g : P \rightarrow Q$  gilt:  $f(x) \preceq g(x)$  für alle  $x \in P$ .

### Aufgabe 2. Beispiele für natürliche Transformationen

Sei  $\text{Id}_{\text{Set}} : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$  der Identitätsfunktork auf  $\text{Set}$ ,  $P : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$  der (kovariante) Potenzmengenfunktork und  $K : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$  der Funktork

$$\begin{aligned} X &\longmapsto X \times X \\ f &\longmapsto f \times f := ((a, b) \mapsto (f(a), f(b))). \end{aligned}$$

- a) Zeige: Es gibt nur eine einzige natürliche Transformation  $\eta : \text{Id}_{\text{Set}} \rightarrow \text{Id}_{\text{Set}}$ , nämlich

$$\eta_X : X \rightarrow X, \quad x \mapsto x.$$

- b) Zeige: Es gibt nur eine einzige natürliche Transformation  $\omega : \text{Id}_{\text{Set}} \rightarrow K$ , nämlich

$$\omega_X : X \rightarrow X \times X, \quad x \mapsto (x, x).$$

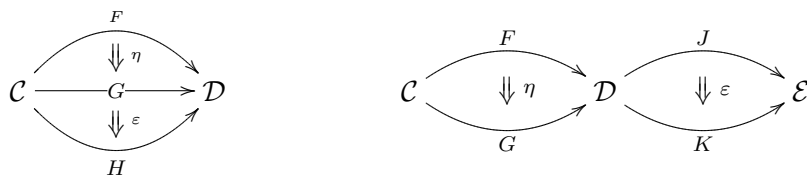
*Tipp für a) und b):* Betrachte geeignete Abbildungen  $1 \rightarrow X$ ,  $\star \mapsto x$ . Dabei ist  $1 = \{\star\}$  eine einelementige Menge.

- c) Zeige: Es gibt keine natürliche Transformation  $P \rightarrow \text{Id}_{\text{Set}}$ , wohl aber eine in die andere Richtung.
- d) Wir nehmen an, dass wir für jede nichtleere Menge  $X$  ein bestimmtes Element  $a_X \in X$  gegeben haben. Zeige: Die Setzung  $\tau_X : X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto a_X$  definiert *nicht* eine natürliche Transformation  $\text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ , wobei  $\mathcal{C}$  die Kategorie der nichtleeren Mengen und beliebigen Abbildungen bezeichnet.
- e) Welche natürlichen Transformationen  $\text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$  gibt es, wenn  $\mathcal{C}$  die Kategorie der reellen Vektorräume bezeichnet?

**Aufgabe 3.** *Die 2-Kategorie der Kategorien*

- a) Seien  $\eta : F \rightarrow G$  und  $\varepsilon : G \rightarrow H$  natürliche Transformationen zwischen Funktoren  $F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . Definiere auf geeignete Art und Weise die *vertikale Komposition*  $\varepsilon \circ \eta : F \rightarrow H$ . Weise nach, dass deine Definition wirklich zu einer natürlichen Transformation führt.
- b) Sei  $\eta : F \rightarrow G$  eine natürliche Transformation zwischen Funktoren  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $\varepsilon : J \rightarrow K$  eine natürliche Transformation zwischen Funktoren  $J, K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ . Definiere auf geeignete Art und Weise die *horizontale Komposition*  $\eta \star \varepsilon : J \circ F \rightarrow K \circ G$ . Musst du dazu Wahlen treffen?
- c) Verifiziere für passende natürliche Transformationen folgendes Vertauschungsgesetz:

$$(\beta' \circ \beta) \star (\alpha' \circ \alpha) = (\beta' \star \alpha') \circ (\beta \star \alpha)$$



**Aufgabe 4.** *Überraschende Kommutativität*

Zeige, dass die zweite Homotopiegruppe stets kommutativ ist.

*Diese Aufgabe wird noch ausgebaut, sodass sie etwas mit 2-Kategorien zu tun hat.*