

Übungsblatt ω zur Homologischen Algebra I

– Themen, die hier noch fehlen –

Simpliziale Mengen • Kettenkomplexe • Garben • ...

Aufgabe 1. Kategorientheorie: Grundlagen

1. Was ist eine Kategorie, was ein Funktor, was eine natürliche Transformation?
2. Was sind – aus drei verschiedenen Teilgebieten der Mathematik – Beispiele für Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen?
3. Inwieweit verallgemeinern Funktoren Abbildungen zwischen Mengen?¹
4. Inwieweit verallgemeinern Funktoren monotone Abbildungen zwischen Quasiordnungen?²
5. Inwieweit verallgemeinern Funktoren Gruppen- oder Monoidhomomorphismen? Was sind in diesem Bild natürliche Transformationen?
6. Unter welchem Trivialnamen sind Kategorien mit nur einem Objekt auch bekannt?
7. Inwieweit kodieren natürliche Transformationen gleichmäßig definierte Abbildungsvorschriften?
8. Welche natürlichen Transformationen $\text{Id}_{\text{Set}} \rightarrow \text{Id}_{\text{Set}}$ gibt es?
9. Was ist ein Gruppoid?
10. Was sind drei Beispiele für Gruppoide?

Aufgabe 2. Kategorientheorie: Verbote

1. Wieso sollte man Objekte nicht auf Gleichheit testen?
2. Wieso sollte man Funktoren nicht auf Gleichheit testen?
3. Wieso kann man natürliche Transformationen auf Gleichheit testen?

Aufgabe 3. Kategorientheorie: Äquivalenzen

1. Wie kann man von zwei Kategorien feststellen, dass sie nicht zueinander äquivalent sind?
2. Zu welcher sehr konkreten Kategorie ist die Kategorie der endlich-dimensionalen K -Vektorräume äquivalent? Wie sieht in diesem Bild der Dualisierungsfunktor $\text{Vect}(K) \rightarrow \text{Vect}(K)^{\text{op}}$ aus?
3. Welche Kategorien sind zu diskreten Kategorien äquivalent? (Eine diskrete Kategorie ist eine, in der jeder Morphismus ein Identitätsmorphimus ist. Was ist schlecht an dem Konzept einer diskreten Kategorie?)

¹ Tipp: Diskrete Kategorien.

² Tipp: Quasiordnungen induzieren Kategorien.

4. Wieso sind Set und $\text{Vect}(\mathbb{R})$ nicht zueinander äquivalent?
5. Wieso sind Set und Set^{op} nicht zueinander äquivalent?
6. Wozu ist die Kategorie der (kommutativen) C^* -Algebren (mit Eins) äquivalent?
7. Wie kann man die Galoistheorie als Kategorienäquivalenz ausdrücken?
8. Über welche Kategorienäquivalenz ist die Darstellungstheorie von Fundamentalgruppen (oder besser Fundamentalgruppoiden) eng mit der Überlagerungstheorie verknüpft?
9. Was ist Pontrjagin-Dualität?

Aufgabe 4. *Kategorientheorie: Limiten*

1. Was sind Limiten und Kolimiten?
2. Inwieweit sind Produkte Spezialfälle von Limiten?
3. Inwieweit ist der Vektorraum $K[X]$ aller Polynome ein Kolimes?
4. Wie kann man einer Kategorie ansehen, ob sie alle Limiten besitzt?
5. Inwieweit sind Limiten stets Unterobjekte von Produkten und Kolimiten stets Quotientenobjekte von Koproducten?
6. Bei wem muss man sich melden, wenn man nächstes Jahr Zirkelleiter sein möchte?
7. Welche Limiten existieren in der Kategorie der Mengen? ... in der Kategorie der Gruppen? Wieso?
8. Was ist ein Beispiel für eine natürlich auftretende Kategorie, in der nicht alle Kolimiten existieren?
9. Was haben Limiten mit Darstellbarkeit von Funktoren zu tun?

Aufgabe 5. *Kategorientheorie: Adjunktionen*

1. Was sind adjungierte Funktorpaare?
2. Was sind Beispiele für Adjunktionen aus drei verschiedenen Teilgebieten der Mathematik?
3. Wieso bewahren Rechtsadjungierte stets Limiten? (Vielen Dank an Timo Schürg: RAPL!)
4. Wieso sind Funktoren, die freie Konstruktionen berechnen, stets Linksadjungierte und nicht Rechtsadjungierte?
5. Wieso gibt es keine freien Körper?

Aufgabe 6. *Kategorientheorie: Yoneda*

1. Was besagt das Yoneda-Lemma in seiner allgemeinen Formulierung?
2. Wie kann man sich einen Funktor $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ anschaulich vorstellen? Wie sieht unter diesem Bild die Yoneda-Einbettung aus?
3. Was sind drei Beispiele für Anwendungen des Yoneda-Lemmas?
4. Wieso ist der Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, _)$ stetig (limesbewahrend)?

Aufgabe 7. *Geometrie*

1. Was ist ein lokal geringter Raum? Worauf bezieht sich das Adjektiv „lokal“?
2. Was sind drei substanziell verschiedene Beispiele für lokal geringte Räume?
3. Welche Aspekte verallgemeinern lokal geringte Räume im Vergleich zu glatten Mannigfaltigkeiten?
4. Was ist der wandelnde Tangentialvektor? Wieso heißt er so?
5. Was ist Supergeometrie?

Aufgabe 8. *Abgeleitete Kategorien*

1. Was ist eine Voraussetzung an eine abelsche Kategorie \mathcal{A} , die garantiert, dass man $D^+(\mathcal{A})$ im selben mengentheoretischen Universum wie \mathcal{A} konstruieren kann?
2. Wie lautet die universelle Eigenschaft der abgeleiteten Kategorie genau?
3. Und wie lautet die eines abgeleiteten Funktors?
4. Welche wichtige Tatsache über injektive Objekte geht in den Beweis der Äquivalenz $D^+(\mathcal{A}) \simeq K^+(\mathcal{I})$ ein?
5. Inwieweit wird das Motto, Auflösungen eines Objekts seien genauso gut wie das aufgelöste Objekt selbst, in der abgeleiteten Kategorie gelöst?
6. Bis auf was sind injektive Auflösungen eines Objekts gleich?
7. Wieso invertiert man in der Definition der abgeleiteten Kategorie nicht nur die Homotopieäquivalenzen?