Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

Übungsblatt 6 zur Homologischen Algebra I

– Garben organisieren lokale Daten. –

Aufgabe 1. *Beispiele für Garben*

Sei X ein topologischer Raum. Das fundamentale Beispiel für eine Garbe auf X ist durch die Zuordnung

a) $\mathcal{E} : U \longmapsto \{s : U \to E \mid s \text{ stetig mit } \pi \circ f = \mathrm{id}|_U\}$

und den gewöhnlichen Einschränkungsabbildungen gegeben. Dabei ist $\pi : E \to X$ eine feste stetige Abbildung. Zeige, dass $\mathcal{E}$ tatsächlich eine Garbe ist.

Welche der folgenden Setzungen mit den gewöhnlichen Einschränkungsabbildungen führen zu Prägarben? Welche sogar zu Garben?

b) $\mathcal{C} : U \longmapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$

c) $\mathcal{C}_{\text{const.}} : U \longmapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ konstant}\}$

d) $\mathcal{C}_{\text{l.c.}} : U \longmapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ lokal konstant}\}$

e) $\mathcal{C}_0 : U \longmapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ hat kompakten Träger in } U\}$

f) $\mathcal{C}_{\text{bounded}} : U \longmapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$

Aufgabe 2. *Exakte Sequenzen von Garben*

Eine Sequenz $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ von Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X heißt genau dann *exakt* (bei $\mathcal{G}$), wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

- „im $\subseteq$ ker“. Für jeden Schnitt $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ gilt $\beta_U(\alpha_U(s)) = 0 \in \Gamma(U, \mathcal{H})$.
- „im $\supseteq$ ker“. Für jeden Schnitt $t \in \Gamma(U, \mathcal{G})$ mit $\beta_U(t) = 0 \in \Gamma(U, \mathcal{H})$ existieren eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Schnitte $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$ mit $\alpha_{U_i}(s_i) = t|_{U_i}$ für alle $i \in I$.

Der Begriff der Exaktheit einer Sequenz von *Prä*garben abelscher Gruppen wurde anders definiert. Beide Definitionen fallen nicht vom Himmel, in ihrem jeweiligen Kontext (Garben bzw. Prägarben) sind sie jeweils genau die richtigen. Das werden wir noch verstehen.

a) Zeige, dass eine Sequenz von Garben abelscher Gruppen genau dann exakt ist, wenn sie *halmweise exakt* ist, wenn also die induzierten Sequenzen $\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ von abelschen Gruppen für alle $x \in X$ exakt sind.

b) Sei $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ eine exakte Sequenz von *Prä*garben. Seien $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ aber trotzdem sogar Garben. Zeige, dass die Sequenz dann auch als Sequenz von Garben exakt ist.

c) Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von *Prä*garben auf einem topologischen Raum. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{H}$ sogar Garben. Zeige, dass $\mathcal{G}$ ebenfalls eine Garbe ist.

d) *Schnitte nehmen ist linksexakt.* Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen. Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Zeige, dass die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{H}) \cancel{\longrightarrow 0}$$

noch exakt ist. Wieso geht die Surjektivität hinten verloren? (Wenn dem nicht so wäre, gäbe es übrigens das gesamte Teilgebiet der *Garbenkohomologie* nicht.)

Aufgabe 3. *Inneres Hom*

Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben auf einem topologischen Raum X. Dann definieren wir eine weitere Prägarbe durch die Setzung

$$\Gamma(U, \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) := \{\alpha : \mathcal{F}|_U \to \mathcal{G}|_U \text{ Morphismus von Prägarben auf } U\}$$

und die offensichtlichen Einschränkungsabbildungen (welche?).

Zeige: Ist $\mathcal{G}$ sogar eine Garbe, so ist $\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ebenfalls eine Garbe.

Aufgabe 4. *Welke Garben*

Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt genau dann *welk* (engl. *flabby*, franz. *flasque*), wenn die Einschränkungsabbildungen $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq \mathcal{F}$ surjektiv sind.

a) Zeige durch ein explizites Beispiel, dass die Garbe $\mathcal{C}$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ aus Aufgabe 1b) nicht welk ist.

b) Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X. Sei $\mathcal{F}$ welk. Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Zeige, dass dann auch die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

exakt ist. Wegen dieser besonderen Eigenschaft sind welke Garben für die homologische Algebra wichtig.

Tipp: Opfere eine Katze, um geeignete maximale Fortsetzungen zu konstruieren.

c) Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ welk. Zeige, dass dann auch $\mathcal{H}$ welk ist.

d) Sei $\pi : E \to X$ eine stetige Surjektion. Zeige, dass die Garbe $\widetilde{\mathcal{E}}$ *aller* Schnitte von $E \xrightarrow{\pi} X$, also die Garbe mit $\Gamma(U, \widetilde{\mathcal{E}}) = \{s : U \to E \,|\, \pi \circ s = \mathrm{id}|_U\}$ und den gewöhnlichen Einschränkungsabbildungen, welk ist.

e) Zeige, dass man jede Garbe auf einem topologischen Raum in eine geeignete welke Garbe einbetten kann.

Aufgabe 5. *Weiche Garben*

Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt genau dann *weich* (engl. *soft*, franz. *mou*), wenn die Abbildungen $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(A, \mathcal{F})$ für alle *abgeschlossenen* Teilmengen $A \subseteq X$ surjektiv sind. (Zur Erinnerung: $\Gamma(A, \mathcal{F}) = \mathrm{colim}_{U \subseteq X \text{ offen}, A \subseteq U} \Gamma(U, \mathcal{F})$.)

Weiche Garben werden vor allem auf parakompakten Hausdorffräumen studiert. Ein topologischer Raum ist genau dann *parakompakt*, wenn jede offene Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$

eine *lokal endliche Verfeinerung* $X = \bigcup_j V_j$ besitzt: Jede der offenen Teilmengen V_j soll in einer der Mengen U_i enthalten sein, und jeder Punkt von X soll in nur endlich vielen Mengen V_j liegen. Parakompakte Hausdorffräume haben ferner folgende besondere Eigenschaft: Zu jeder offenen Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$ existieren offene Mengen V_i mit $\overline{V_i} \subseteq U_i$, welche immer noch X überdecken.

a) Zeige, dass die Garbe $\mathcal{C}$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ aus Aufgabe 1b) weich ist.

b) Zeige, dass welke Garben stets weich sind.

c) Sei X ein parakompakter Hausdorffraum. Zeige die analoge Behauptung wie bei Aufgabe 4b), nur mit „$\mathcal{F}$ weich“ statt „$\mathcal{F}$ welk“ und mit „$A \subseteq X$ abgeschlossen“ statt „$U \subseteq X$ offen“.

d) Sei X ein parakompakter Hausdorffraum. Zeige die analoge Behauptung wie bei Aufgabe 4c), nur mit „weich“ statt „welk“.

Aufgabe 6. *Feine Garben*

Eine Garbe $\mathcal{F}$ abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X heißt genau dann *fein* (engl. *fine*, franz. *fin*), wenn für je zwei disjunkte abgeschlosse Mengen $A_1, A_2 \subseteq X$ ein Morphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ von Garben abelscher Gruppen existiert, sodass α auf einer offenen Umgebung von A_1 Null und auf einer offenen Umgebung von A_2 die Identität ist. (Das bedeutet, dass es offene Mengen $U_1 \supseteq A_1$ und $U_2 \supseteq A_2$ gibt, sodass α_V für alle offenen Teilmengen $V \subseteq U_1$ die Nullabbildung und sodass α_V für alle offenen Teilmengen $V \subseteq U_2$ die Identitätsabbildung ist.)

a) Zeige, dass feine Garben auf parakompakten Hausdorffräumen stets weich sind.

b) Zeige, dass eine Garbe $\mathcal{F}$ abelscher Gruppen auf einem parakompakten Hausdorffraum genau dann fein ist, wenn die Hom-Garbe $\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ welk ist.

   Tipp: Parakompakte Hausdorffräume sind *normal*, das heißt je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen besitzen offene disjunkte Umgebungen.

– Noch zu TEXen –

- Ausgelagerter Beweis: lokaler Homöomorphismus ...
- Affine Schemata

– Weitere mögliche Aufgaben –

- Halme von $\mathcal{O}_X$ für $X = \mathbb{C}$ berechnen.
- Exaktheit der Sequenz $0 \to \underline{\mathbb{Z}} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^\times \to 0$ nachrechnen.
- Verträglichkeit der beiden Definition für $\Gamma(A, \mathcal{F})$ nachrechnen.