

Übungsblatt 17 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Halmweise Exaktheit*

Sei X ein topologischer Raum (keine Örtlichkeit!). Sei $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ eine Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf X . Zeige, dass sie genau dann exakt ist (im allgemeinen Sinn der Exaktheit in abelschen Kategorien), wenn für jeden Punkt $x \in X$ die induzierte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow 0$ von Halmen exakt ist.

Aufgabe 2. *Kategorielle Charakterisierung von partieller Exaktheit*

Zeige, dass ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien genau dann linksexakt ist, wenn er endliche Limiten bewahrt.

Aufgabe 3. *Beispiele für projektive Moduln*

- Zeige, dass $\mathbb{Z}/(2)$ als $\mathbb{Z}/(6)$ -Modul projektiv, aber nicht frei ist.
- Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ und $\mathfrak{m} = (3, 1 + \sqrt{-5})$ das bekannte Beispiel für ein maximales Ideal, das lokal ein Hauptideal, aber nicht selbst ein Hauptideal ist. Zeige, dass \mathfrak{m} als R -Modul projektiv, aber nicht frei ist.

Tipp: Projektivität von endlich präsentierten Moduln kann man lokal testen. Wäre \mathfrak{m} frei, so wäre \mathfrak{m} frei vom Rang 1 (wieso?). Damit wäre \mathfrak{m} ein Hauptideal (wieso?).

Die wichtigste Bezugsquelle für nicht-freie projektive Moduln sind nichttriviale Vektorbündel, das besagt der Satz von Serre-Swan. Eine gut lesbare Darstellung gibt es in Abschnitt 6 von Pete Clarks Notizen zu kommutativer Algebra, <http://www.math.uga.edu/~pete/integral.pdf#page=112>. In der algebraischen Geometrie lernt man, dass auch die Beispiele dieser Aufgabe von dieser Form sind.

Aufgabe 4. *Die Kategorie der Garben als Lokalisierung*

Sei X ein topologischer Raum. Sei S die Klasse all derjenigen Morphismen von Prägarben auf X , die halmweise Bijektionen sind. Zeige, dass die Kategorie der Garben auf X die Lokalisierung der Kategorie der Prägarben nach S ist: $\text{Sh}(X) \simeq \text{PSh}(X)[S^{-1}]$. Wie sehen unter dieser Äquivalenz der Vergissfunktoren und der Garbifizierungsfunktoren aus?

Ist S eine Klasse von Morphismen in einer Kategorie \mathcal{C} , so sind die Objekte von $\mathcal{C}[S^{-1}]$ per Definition dieselben wie die von \mathcal{C} . Morphismen $X \rightarrow Y$ in $\mathcal{C}[S^{-1}]$ sind aber formale Verknüpfungen von Morphismen in \mathcal{C} und formalen Inversen von Morphismen aus S . Zum Beispiel kann ein Morphismus $X \rightarrow Y$ in $\mathcal{C}[S^{-1}]$ von der Form $X \rightarrow Z \leftarrow Z' \rightarrow Z'' \leftarrow Z''' \rightarrow Y$ sein – dabei sind die nach rechts laufenden Pfeile Morphismen aus \mathcal{C} und die nach links laufenden Pfeile formale Inverse von Morphismen aus S . Auf diese Art und Weise erreicht man, dass der kanonische Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ die Morphismen aus S auf Isomorphismen schickt und sogar unter all solchen Funktoren in einem 2-kategoriellen Sinn initial ist.

Aufgabe 5. *Ein Beispiel für den Pushforward von Garben*

Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ die Abbildung $z \mapsto z^2$ des Einheitskreises in sich. Sei $\underline{\mathbb{Z}}$ die konstante Garbe mit Halmen \mathbb{Z} auf S^1 . Was sind die Halme von $f_*\underline{\mathbb{Z}}$? Ist $f_*\underline{\mathbb{Z}}$ isomorph zu $\underline{\mathbb{Z}^2}$?