

## Übungsblatt 12 zur Homologischen Algebra I

### Aufgabe 1. *Limiten zyklischer Gruppen*

Sei  $\mathbb{N}$  mit der Teilbarkeitsordnung versehen. Zeige, dass der Kolimes  $\operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/(n)$  die Faktorgruppe  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  ist. Die Diagrammabbildungen  $\mathbb{Z}/(n) \rightarrow \mathbb{Z}/(m)$  sind dabei durch (in  $\mathbb{Z}$  zu berechnende) Multiplikation mit  $m/n$  gegeben.

### Aufgabe 2. *Existenzkriterium für endliche Limiten*

Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, in der es folgende spezielle endliche Limiten gibt: ein terminales Objekt, Produkte von je zwei Objekten und Differenzkerne (Equalizer) von je zwei parallelen Morphismen. Zeige, dass es in  $\mathcal{C}$  dann schon alle endlichen Limiten gibt.

*Hinweis:* Es ist nur noch die universelle Eigenschaft des im Beweis der Vorlesung konstruierten Objekts  $X$  nachzuweisen.

### Aufgabe 3. *Freie Konstruktionen*

Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie algebraischer Strukturen (etwa  $\mathcal{C} = \text{Ring}$  oder  $\mathcal{C} = \text{Mod}(R)$ ). Anschaulich stellt man sich das von den Elementen einer gewissen Menge  $M$  *frei erzeugte Objekt*  $L(M)$  in  $\mathcal{C}$  wie folgt vor: Man beginnt mit den Elementen aus  $M$  und fügt all solche Ausdrücke hinzu, damit  $L(M)$  zu einem Objekt von  $\mathcal{C}$  wird (etwa Summen und Produkte im Fall  $\mathcal{C} = \text{Ring}$ ). Dabei nimmt man nur solche Identifikationen vor, die von den Axiomen gefordert werden (etwa dem Assoziativgesetz). Die Zuordnung  $M \mapsto L(M)$  definiert dann einen Funktor  $\text{Set} \rightarrow \mathcal{C}$ , welcher *linksadjungiert zum Vergissfunktor*  $V : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  ist.

- a) Erkläre, inwieweit die Adjunktionsbeziehung  $L \dashv V$  obige anschauliche Vorstellung kodiert. (Diese Frage hat eine präzise Antwort.)
- b) Bestimme für die folgenden Vergissfunktoren Linksadjungierte.

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\text{Mod}(R) \rightarrow \text{Set}$ | 7) $\text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$                     |
| 2) $\text{Mon} \rightarrow \text{Set}$    | 8) $\text{Mod}(R) \rightarrow \text{Ab}$                  |
| 3) $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$    | 9) $\text{Alg}(R) \rightarrow \text{Mod}(R)$              |
| 4) $\text{Ring} \rightarrow \text{Set}$   | 10) $\text{Met}_{\text{complete}} \rightarrow \text{Met}$ |
| 5) $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$    | 11) $\text{Alg}(k) \rightarrow \text{LieAlg}(k)$          |
| 6) $\text{sSet} \rightarrow \text{Set}$   | 12) $\text{sSet} \rightarrow \text{semi-sSet}$            |

Dabei ist  $\text{Mon}$  die Kategorie der Monoide,  $\text{Alg}(R)$  die Kategorie der  $R$ -Algebren,  $\text{Met}_{\text{complete}}$  die Kategorie der vollständigen metrischen Räume und gleichmäßig stetigen Abbildungen und  $\text{semi-sSet}$  die Kategorie der Verklebedaten. Findest du zum Vergissfunktor  $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$  auch einen *Rechtsadjungierten*?

**Aufgabe 4. Globale Charakterisierung von Limes und Kolimes**

Sei  $I$  eine Indexkategorie. Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, in der alle  $I$ -förmigen Limiten existieren. Der *Diagonalfunktor*  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow [I, \mathcal{C}]$  schickt ein Objekt  $X$  auf den konstanten Funktor bei  $X$  (dieser schickt jedes Objekt auf  $X$  und jeden Morphismus auf  $\text{id}_X$ ). Dabei ist  $[I, \mathcal{C}]$  die Kategorie der Funktoren  $I \rightarrow \mathcal{C}$ .

- Sei für jedes Diagramm  $F \in [I, \mathcal{C}]$  ein Limes  $\lim F \in \mathcal{C}$  gewählt. Definiere damit einen Funktor  $\lim : [I, \mathcal{C}] \rightarrow \mathcal{C}$ , der jedem Diagramm seinen Limes zuordnet. Wie wirkt er auf Morphismen? Wieso sind die Funktoraxiome erfüllt?
- Zeige:  $\Delta \dashv \lim$ .
- Formuliere und beweise mit wenig Aufwand die duale Behauptung über Kolimiten.

**Aufgabe 5. Aufrundung und Abrundung**

Wir betrachten die drei monotonen Abbildungen

$$\begin{aligned} \lceil \_ \rceil : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Z}, & x &\longmapsto \text{Aufrundung von } x := (\text{kleinste ganze Zahl } \geq x) \\ i : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Q}, & z &\longmapsto z \\ \lfloor \_ \rfloor : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Z}, & x &\longmapsto \text{Abrundung von } x := (\text{größte ganze Zahl } \leq x) \end{aligned}$$

und die induzierten Funktoren zwischen  $B\mathbb{Q}$  und  $B\mathbb{Z}$ . Zeige:  $B\lceil \_ \rceil \dashv Bi \dashv B\lfloor \_ \rfloor$ .

**Aufgabe 6. Allquantifikation, Rückzug und Existenzquantifikation**

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen Mengen induziert in kanonischer Art und Weise drei monotone Abbildungen zwischen den Potenzmengen. Zeige:  $B\exists_f \dashv Bf^{-1} \dashv B\forall_f$ .

$$\begin{aligned} \exists_f : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(Y), & U &\longmapsto \exists_f(U) := f[U] = \{y \in Y \mid \exists x \in X: y = f(x) \wedge x \in U\} \\ f^{-1} : \mathcal{P}(Y) &\longrightarrow \mathcal{P}(X), & V &\longmapsto f^{-1}[V] \\ \forall_f : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(Y), & W &\longmapsto \forall_f(W) := \{y \in Y \mid \forall x \in X: y = f(x) \Rightarrow x \in W\} \end{aligned}$$

**Aufgabe 7. Lineares Currying**

Seien  $R$  und  $S$  Ringe (mit Eins). Sei  $M$  ein  $R$ - $S$ -Bimodul. Zeige:

$$\left( \begin{array}{ccc} S\text{-Mod} & \longrightarrow & R\text{-Mod} \\ & V \longmapsto & M \otimes_S V \end{array} \right) \dashv \left( \begin{array}{ccc} R\text{-Mod} & \longrightarrow & S\text{-Mod} \\ & W \longmapsto & \text{Hom}_R(M, W) \end{array} \right)$$

**Aufgabe 8. Die Dreiecksidentitäten von Adjunktionen**

Sei  $F \dashv G$  ein Paar adjungierter Funktoren. Zeige, dass zwischen der *Eins*  $\eta : \text{Id} \rightarrow G \circ F$  und der *Koeins*  $\varepsilon : F \circ G \rightarrow \text{Id}$  folgende Beziehungen bestehen:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{id}} & G \\ \eta_{G(\_)} \searrow & & \nearrow G\eta \\ & GFG & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\text{id}} & F \\ F\eta \searrow & & \nearrow \eta_{F(\_)} \\ & FGF & \end{array}$$

**Aufgabe 9. Ein Beispiel für Cartier-Dualität**

Sei  $k$  ein kommutativer Grundring und  $A = k[X]/(X^n - 1)$ . Anschaulich ist  $A$  die Algebra der Funktionen auf dem Unterschema der  $n$ -ten Einheitswurzeln in  $\mathbb{A}_k^1$  (unabhängig davon, ob diese in  $k$  tatsächlich existieren oder nicht).

- Zeige, dass  $A$  mit der Komultiplikation  $[X] \mapsto [X] \otimes [X]$  zu einer Bialgebra wird.
- Welche Bialgebra ist das Cartier-Duale  $A^\vee = \text{Hom}_k(A, k)$ ?