Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

Übungsblatt 10 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. *Ein konkretes Modell für endlich-dimensionale Vektorräume*

Sei k ein Körper. Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie mit

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob}\mathcal{C} &:= \mathbb{N}, \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(n, m) &:= k^{m \times n}, \end{aligned}$$

wobei die Morphismenverkettung durch die Matrixmultiplikation gegeben ist.

a) Zeige, dass die Kategorie $\mathcal{C}$ (auf unkanonische Art und Weise) zur Kategorie der endlich-dimensionalen k-Vektorräume äquivalent ist.

   Tipp: Wähle für jeden endlich-dim. Vektorraum V einen Iso $\eta_V : k^{\dim V} \to V$.

b) Zeige, dass $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ auf kanonische Art und Weise äquivalent zu $\mathcal{C}$ ist. (Das ist etwas Besonderes!)

c) Zeige, dass die Kategorie der endlich-dimensionalen k-Vektorräume *auf kanonische Art und Weise* zu ihrer dualen Kategorie äquivalent ist.

Aufgabe 2. *Kategorielle Eigenschaften*

Es gibt folgendes Motto: Sei φ eine mathematische Aussage über Kategorien, die sich nur unter Verwendung der Konzepte *Objekt*, *Morphismus*, *Verkettung von Morphismen* und *Gleichheit von Morphismen* formulieren lässt. Sind dann $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zueinander äquivalente Kategorien, so gilt φ genau dann in $\mathcal{C}$, wenn φ in $\mathcal{D}$ gilt. Beispiele für Aussagen dieser Art sind etwa:

- Die Kategorie besitzt ein initiales Objekt (das ist ein Objekt 0, sodass es zu jedem Objekt X genau einen Morphismus $0 \to X$ gibt).
- Je zwei parallele Morphismen sind gleich.
- Je zwei Endomorphismen eines Objekts vertauschen miteinander.
- Jedes initiale Objekt ist auch terminal.

Beispiele für Aussagen, die über die Reichweite des Mottos hinausgehen und also nicht invariant unter Äquivalenz von Kategorien sind, sind:

- Die Kategorie besitzt genau ein Objekt.
- Die Kategorie besitzt genau ein initiales Objekt.
- Sind zwei Objekte zueinander isomorph, so sind sie schon gleich.
- Je zwei Morphismen (egal zwischen welchen Objekten) sind gleich.

a) Mache dir klar, wieso das Motto gilt.

b) Anna und ihre Frau Emma haben die Vermutung, dass die folgenden Kategorien paarweise nicht zueinander äquivalent sind. Jemand ruft ihnen zu: *Mit Teilaufgabe a) ist der Nachweis einfach!*, nickt und fliegt davon. Kannst du ihnen helfen?

$$\mathrm{Set} \quad \mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \quad \mathrm{Vect}(\mathbb{R}) \quad \mathrm{Ring} \quad \mathrm{Top} \quad \mathrm{Man} \quad \mathrm{Sh}(\mathbb{R}^7) \quad B\mathbb{Z} \quad \mathrm{Hask}$$

Aufgabe 3. *Volltreue Funktoren*

a) Sei $f : P \to Q$ eine monotone Abbildung zwischen Quasiordnungen. Wann ist $Bf : BP \to BQ$ treu? Wann voll? Wann wesentlich surjektiv?

b) Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein volltreuer Funktor. Zeige, dass F eine Äquivalenz zwischen $\mathcal{C}$ und einer gewissen vollen Unterkategorie von $\mathcal{D}$ (welcher?) induziert.

c) Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein volltreuer und wesentlich surjektiver Funktor. Wenn wir ein genügend starkes Auswahlprinzip zur Verfügung haben, können wir zu jedem Objekt $Y \in \mathcal{D}$ ein Objekt $X_Y \in \mathcal{C}$ und einen Iso $g_Y : F(X_Y) \to Y$ wählen.

   Erkläre, wie die Zuordnung $Y \mapsto X_Y$ einen Funktor definiert. Weise die Funktoraxiome explizit nach. Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus $G \circ F \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$.

Aufgabe 4. *Quotientenkategorien*

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Seien für je zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ eine Äquivalenzrelation $\sim_{X,Y}$ auf $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ gegeben.

a) Konstruiere eine Kategorie $\mathcal{C}/\sim$ zusammen mit einem Funktor $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\sim$ mit folgender universeller Eigenschaft:
   - Wenn $f \sim_{X,Y} \tilde{f}$ in $\mathcal{C}$, dann $Q(f) = Q(\tilde{f})$ in $\mathcal{C}/\sim$.
   - Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor, der wie Q äquivalente Morphismen auf gleiche schickt, so gibt es genau einen Funktor $G : \mathcal{C}/\sim \to \mathcal{D}$ mit $F = G \circ Q$.

   Tipp: Nimm zunächst an, dass für alle passenden Morphismen f, a, b aus $f \sim_{X,Y} \tilde{f}$ schon $afb \sim_{X',Y'} a\tilde{f}b$ folgt.

b) Was ist an Teilaufgabe a) inhaltlich schlecht formuliert?

Aufgabe 5. *Morita-Äquivalenz von Ringen*

Ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann *Erzeuger*, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \_\_) : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ treu ist. Ringe A und B heißen genau dann zueinander *Morita-äquivalent*, wenn ihre Kategorien von (Rechts-)moduln äquivalent sind.

a) Welche übersichtliche Menge ist ein Erzeuger von Set?

b) Welcher Vektorraum ist Erzeuger der Kategorie der k-Vektorräume?

c) Zeige, dass Morita-äquivalente Ringe isomorphes Zentrum haben.

d) Zeige, dass isomorphe Ringe Morita-äquivalent sind.

e) Seien A und B (nicht notwendigerweise kommutative) Ringe mit Eins. Sei P ein Rechts-A-Modul. Sei $\alpha : B \to \mathrm{End}_A(P)$ ein Ringisomorphismus.

   Sei M ein Rechts-A-Modul. Wie wird $\mathrm{Hom}_A(P, M)$ zu einem Rechts-B-Modul?

   Sei N ein Rechts-B-Modul. Wie wird $\mathrm{Hom}_B(P^\vee, N)$ zu einem Rechts-A-Modul? Dabei ist $P^\vee := \mathrm{Hom}_A(P, A)$.

f) Zeige, dass Ringe A, B genau dann zueinander Morita-äquivalent sind, wenn es einen endlich erzeugten projektiven Erzeuger P von Mod-A und einen Ringisomorphismus $B \cong \mathrm{End}_A(P)$ gibt.

   Tipp: Weise für die schwere Richtung nach, dass die Zuordnung $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(P, X)$ eine Äquivalenz Mod-A $\to$ Mod-B definiert. Ein A-Modul P heißt genau dann *projektiv*, wenn für jede surjektive lineare Abbildung $f : V \to W$ und jede lineare Abbildung $g : P \to W$ eine lineare Abbildung $\bar{g} : P \to V$ mit $g = f \circ \bar{g}$ existiert.