Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Wunschzettel 25 zur Homologischen Algebra II

Wunsch 1. *Čech-Methoden zur Berechnung von Garbenkohomologie*

Für eine Prägarbe $\mathcal{F}$ abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum ist die Gruppe der n-Čech-Koketten bezüglich einer Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_i$ von X definiert als $\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0,\ldots,i_n \in I} \mathcal{F}(U_{i_0 \cdots i_n})$, wobei $U_{i_0 \cdots i_n} := U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}$. Die Kohomologie des entstehenden Komplexes wird mit $\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ bezeichnet. Sei $\mathcal{F}$ im Folgenden sogar eine Garbe abelscher Gruppen.

a) Sei $\iota : \mathrm{AbSh}(X) \to \mathrm{AbPSh}(X)$ der Vergissfunktor. Sei $U \subseteq X$ eine offene Menge. Zeige: $(R^n \iota \mathcal{F})(U) \cong H^n(U, \mathcal{F})$.

   Tipp: Verwende die Komposition $\Gamma_U \circ \iota : \mathrm{AbSh}(X) \to \mathrm{Ab}$, wobei $\Gamma_U : \mathrm{AbPSh}(X) \to \mathrm{Ab}$ die Gruppe der U-Schnitte bestimmt. Benutze Aufgabe 3 von Blatt 21, um eine technische Voraussetzung nachzuweisen.

b) Zeige: Die Garbifizierung der Prägarben $R^n \iota \mathcal{F}$ ist für $n \geq 1$ Null.

   Tipp: Verwende $\mathrm{Id}_{\mathrm{AbSh}(X)} \cong s \circ \iota$, wobei s der Garbifizierungsfunktor ist.

c) Konstruiere zwei Spektralsequenzen mit

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, R^q \iota \mathcal{F}) \Longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}) \quad \text{und} \quad \check{H}^p(U, R^q \iota \mathcal{F}) \Longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}).$$

   Hinweis: Es ist $\check{H}^p(U, \mathcal{E}) := \operatorname{colim}_{\mathcal{U}} \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{E})$, wobei $\mathcal{U}$ über alle offenen Überdeckungen von U läuft. Man kann zeigen, dass für verschiedene Verfeinerungen $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ die induzierten Morphismen $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \to \check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ übereinstimmen.

d) Gelte $H^q(U_{i_0 \cdots i_p}, \mathcal{F}) = 0$ für alle $q > 0$ und $p \geq 0$. Zeige: $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^p(X, \mathcal{F})$.

e) Zeige: Die Abbildung $\check{H}^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F})$ ist für $n = 0$ und $n = 1$ ein Isomorphismus und für $n = 2$ ein Monomorphismus. *Tipp:* Verwende Aufgabe 2.

f) Zeige: Ist X parakompakt, ist die Abbildung sogar für alle $n \geq 0$ ein Isomorphismus.

   Tipp: Verwende folgendes Lemma: Ist $\check{H}^n(X, \mathcal{E}) = 0$ für alle $n \geq 0$ und alle Prägarben $\mathcal{E}$ mit $s\mathcal{E} = 0$, so ist für alle Prägarben $\mathcal{E}$ die kanonische Abbildung $\check{H}^n(X, \mathcal{E}) \to H^n(X, s\mathcal{E})$ in allen Graden $n \geq 0$ ein Isomorphismus.

Wunsch 2. *Die exakte Sequenz in niedrigen Graden zu einer Spektralsequenz*

Sei $E_2^{pq} \Rightarrow E_\infty^n$ eine im ersten Quadranten konzentrierte Spektralsequenz. Konstruiere daraus eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow E_\infty^1 \longrightarrow E_2^{0,1} \longrightarrow E_2^{2,0} \longrightarrow E_\infty^2.$$

Wunsch 3. *Die Serre–Hochschild-Spektralsequenz*

Sei G eine Gruppe. Ein *G-Modul* A ist eine abelsche Gruppe A zusammen mit einer linearen Operation von G.

a) Zeige: Der Funktor $(\_)^G : \mathrm{Mod}(G) \to \mathrm{Ab}$, $A \mapsto A^G = \{x \in A \mid gx = x \text{ für alle } g \in G\}$ ist linksexakt.

b) Zeige: Die Kategorie der G-Moduln ist äquivalent zur Kategorie der Moduln über dem Ring $\mathbb{Z}[G]$, und unter dieser Korrespondenz entspricht der Invariantenfunktor aus a) dem Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \_)$.

c) Sei $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Überlege, wie G und G/H auf $H^n(H, A) := R^n(\_)^H(A)$ wirken und schreibe die Wirkungen im Kontext der Definitionen aus der Homologischen Algebra I explizit hin.

d) Konstruiere eine Spektralsequenz $H^p(G/H, H^q(H, A)) \Rightarrow H^n(G, A)$. *Tipp:* $A^G = (A^H)^{G/H}$.