Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 27 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Rechnen modulo Torsion*

Sei $\mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}$ die abelsche Kategorie der endlich präsentierten abelschen Gruppen und $\mathcal{T}$ ihre volle Unterkategorie der Torsionsgruppen.

a) Mache dir klar, dass $\mathcal{T}$ eine Serresche Unterkategorie von $\mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}$ ist.

b) Konstruiere einen Funktor $\overline{F} : \mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}/\mathcal{T} \to \mathrm{Vect}(\mathbb{Q})_{\mathrm{findim}}$ mit $A \mapsto A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

   Tipp: Verwende die universelle Eigenschaft von $\mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}/\mathcal{T}$ (siehe Blatt 16, Aufgabe 4) und die Flachheit von $\mathbb{Q}$ über $\mathbb{Z}$.

c) Zeige, dass $\overline{F}$ treu ist.

   Tipp: Zeige, dass aus $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ folgt, dass A eine Torsionsgruppe ist. Verwende dann Tag 06XK aus dem Stacks Project.

d) Zeige, dass in $\mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}/\mathcal{T}$ der Morphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$ für $n \geq 1$ invertierbar ist. Folgere, dass $\overline{F}$ voll und daher eine Kategorienäquivalenz ist.

e) Sei eine konvergente Spektralsequenz in $\mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}$ gegeben. Was ist zu tun, wenn man vorgeben möchte, dass alle kurzen exakten Sequenzen in $\mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}$ zerfallen? Wie schwächt man seine Resultate dadurch ab?