Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 24 zur Homologischen Algebra II

– Festblatt zum 68-jährigen Bestehen von Spektralsequenzen –

Aufgabe 1. *Spektralsequenzen als Verallgemeinerungen langer exakter Sequenzen*

Sei eine Spektralsequenz $E_1^{pq} \Rightarrow E_\infty^n$ gegeben (ausführlich: $E_1^{pq} \Rightarrow F^p E_\infty^{p+q}/F^{p+1}E_\infty^{p+q}$), deren erste Seite in den Spalten $p = 0$ und $p = 1$ konzentriert ist. Seien die Filtrierungen $F^\bullet E_\infty^n$ separiert und erschöpfend (exhaustive).

a) Zeige, dass die Spektralsequenz auf Seite 2 degeneriert.

b) Zeige: $F^2 E_\infty^n = F^3 E_\infty^n = \cdots = 0$ und $F^0 E_\infty^n = F^{-1} E_\infty^n = \cdots = E_\infty^n$.

c) Drücke die äußeren Objekte in der folgenden Sequenz über die zweite Seite aus.

$$0 \longrightarrow F^1 E_\infty^n \longrightarrow E_\infty^n \longrightarrow E_\infty^n / F^1 E_\infty^n \longrightarrow 0$$

d) Konstruiere eine lange exakte Sequenz der Form

$$\cdots \longrightarrow E_1^{1,n-1} \longrightarrow E_\infty^n \longrightarrow E_1^{0n} \xrightarrow{\partial} E_1^{1n} \longrightarrow \cdots .$$

Aufgabe 2. *Mayer–Vietoris als Spezialfall einer Spektralsequenz*

Sei X ein topologischer Raum. Die Komposition der Funktoren

$$\mathrm{AbSh}(X) \xrightarrow{\text{vergessen}} \mathrm{AbPSh}(X) \xrightarrow{\check{H}^0} \mathrm{Ab}$$

ist der globale-Schnitte-Funktor $\Gamma : \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Ab}$. Sei $X = A \cup B$ eine Überdeckung durch zwei offene Mengen. Leite aus der Grothendieck-Spektralsequenz zu dieser Funktorkomposition die Mayer–Vietoris-Sequenz für Garbenkohomologie her:

$$\cdots \longrightarrow H^n(X;\mathcal{E}) \longrightarrow H^n(A;\mathcal{E}) \oplus H^n(B;\mathcal{E}) \longrightarrow H^n(A \cap B;\mathcal{E}) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(X;\mathcal{E}) \longrightarrow \cdots$$

Hinweis: Für eine beliebige offene Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$ ist $\check{H}^0(\mathcal{E}) := \{(s_i)_i \mid s_i \in \mathcal{E}(U_i), s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}\}$. Verwende ohne Beweis, dass $R^n \check{H}^0(\mathcal{E})$ die n-te Čech-Kohomologie $\check{H}^n(\mathcal{E})$ von X mit Werten in $\mathcal{E}$ bezüglich der Überdeckung $(U_i)_i$ ist. Vereinfache die Definitionen für den Fall, dass die Überdeckung aus nur zwei offenen Mengen besteht (zur Kontrolle: $\check{H}^0(\mathcal{E})$ und $\check{H}^1(\mathcal{E})$ sind Kern bzw. Kokern von $\mathcal{E}(A) \oplus \mathcal{E}(B) \to \mathcal{E}(A \cap B)$ und die höheren Gruppen verschwinden). Verwende ohne Beweis, dass die n-te Rechtsableitung des Vergissfunktors bei $\mathcal{E}$ die Prägarbe $(U \mapsto H^n(U;\mathcal{E}))$ ist. Verwende Aufgabe 1.

Aufgabe 3. *Euler-Charakteristik des Grenzwerts*

Sei $E_r^{pq} \Rightarrow E_\infty^n$ eine konvergente Spektralsequenz, deren r-te Seite in einem endlichen Bereich konzentriert ist. Seien die Filtrierungen $F^\bullet E_\infty^n$ separiert und erschöpfend. Zeige, dass die Euler-Charakteristik des Bikomplexes $E_r^{\bullet\bullet}$ mit der des Komplexes $E_\infty^\bullet$ übereinstimmt, dass also in der K-Theorie folgende Identität gilt.

$$\sum_{p,q} (-1)^{p+q} [E_r^{pq}] = \sum_n (-1)^n [E_\infty^n]$$

Tipp: Ist $K^\bullet$ ein Komplex, so gilt $\sum_n (-1)^n [K^n] = \sum_n (-1)^n [H^n(K^\bullet)]$ (siehe Aufgabe 3 von Blatt 18). Außerdem gilt $[E_\infty^n] = \sum_p (-1)^p [F^p E_\infty^n / F^{p+1} E_\infty^n]$, wieso?

– Weitere Detektivarbeit auf der nächsten Seite. –

Aufgabe 4. *Die Leray-Spektralsequenz, rückwärts*

Sei $\pi : S^1 \times S^1 \to S^1$ die Projektion auf einen der beiden Faktoren. Bestimme mit der Leray-Spektralsequenz $R^n\pi_*\underline{\mathbb{R}}$ für alle $n \geq 0$.

Hinweis: Sei $f : X \to Y$ eine *beliebige stetige Abbildung.* Dann verbindet die Leray-Spektralsequenz die Kohomologie von X, die von Y und die der Fasern von f miteinander. Genauer gibt es für jede Garbe $\mathcal{E}$ abelscher Gruppen auf X eine Spektralsequenz mit

$$E_2^{pq} = H^p(Y; R^q f_* \mathcal{E}) \Longrightarrow H^{p+q}(X; \mathcal{E}).$$

Auch, wenn $\mathcal{E}$ eine konstante Garbe ist, sind die höheren direkten Bilder $R^q f_* \mathcal{E}$ das im Allgemeinen nicht. Daher benötigt man allein zur Formulierung dieses Zusammenhangs Garbenkohomologie. Die Leray-Spektralsequenz war der Ausgangspunkt für die Entwicklung von Garbenkohomologie und Spektralsequenzen.

Verwende: Garbenkohomologie mit Werten in einer konstante Garbe – also $H^n(X; \underline{A}) := R^n\Gamma_X(\underline{A})$ – stimmt für lokal zusammenziehbare Räume (etwa Mannigfaltigkeiten und CW-Komplexe) mit der üblichen singulären Kohomologie $H^n(X; A)$ überein; für eigentliche Abbildungen (wie π) gilt unter gewissen topologischen Voraussetzungen (die hier erfüllt sind), dass $(R^n f_* \mathcal{E})_y \cong H^n(f^{-1}[y], \mathcal{E}|_{f^{-1}[y]})$; die Kohomologie von $S^1 \times S^1$ mit Werten in $\mathbb{R}$ ist in den Graden 0, 1 und 2: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5. *Balancierung von Tor*

Seien M und N R-Moduln. Dann sind sowohl $M \otimes_R \_$ als auch $\_ \otimes_R N$ rechtsexakt und können daher linksabgeleitet werden. Zeige:

$$L^n(M \otimes_R \_)(N) \cong L^n(\_ \otimes_R N)(M).$$

Tipp: Wähle projektive Auflösungen $P^\bullet \to M$ und $Q^\bullet \to N$ und betrachte zwei verschiedene Spektralsequenzen, die beide zur Kohomologie des Totalkomplexes von $P^\bullet \otimes_R Q^\bullet$ konvergieren. Auf diese Weise erhältst du zwei verschiedene Ausdrücke für dasselbe Objekt.

Aufgabe 6. *Auflösungen durch beliebige Objekte*

Sei $0 \to A \to X^\bullet$ ein Komplex. Sei F ein linksexakter Funktor. Was sagt die Hyperkohomologiespektralsequenz $E_2^{pq} = H^p(R^q F(X^\bullet)) \to R^{p+q}F(X^\bullet)$ über $R^n F(A)$ aus, wenn

a) die Objekte X^i alle F-azyklisch sind oder

b) die Objekte X^i beliebig sind?