Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

Übungsblatt 6 zur Homologischen Algebra I

– Garben oganisieren lokale Daten. –

Aufgabe 1. *Beispiele für Garben*

Welche der folgenden Prägarben auf einem topologischen Raum X sind Garben?

a) $\mathcal{C} : U \mapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$

b) $\mathcal{C}_{\text{const.}} : U \mapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ konstant}\}$

c) $\mathcal{C}_{\text{l.c.}} : U \mapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ lokal konstant}\}$

d) $\mathcal{C}_{\text{bounded}} : U \mapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$

Aufgabe 2. *Mono- und Epimorphismen zwischen Garben*

Ein Morphismus f einer gewissen Klasse von Morphismen heißt genau dann *Monomorphismus*, wenn er bezüglich der Verkettung von Morphismen linkskürzbar ist, d. h. wenn für beliebige parallele Morphismen p und q aus $f \circ p = f \circ q$ schon $p = q$ folgt. Dual ist ein *Epimorphismus* ein rechtskürzbarer Morphismus. Zeige:

a) Unter allen Abbildungen von Mengen sind die Monomorphismen gerade die injektiven Abbildungen.

b) Unter allen Abbildungen von Mengen sind die Epimorphismen gerade die surjektiven Abbildungen.

c) Unter allen Morphismen von Garben auf einem festen topologischen Raum X sind die Monomorphismen gerade diejenigen Garbenmorphismen $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, deren Komponentenabbildungen α_U für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ injektiv sind. (Das ist genau dann der Fall, wenn die Abbildungen $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ zwischen den Halmen alle injektiv sind.)

d) Unter allen Morphismen von Garben auf einem festen topologischen Raum X sind die Epimorphismen gerade diejenigen Garbenmorphismen $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, deren Halmabbildungen $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ alle surjektiv sind. (Obacht: Das ist echt schwächer als zu sagen, dass alle Komponentenabbildungen α_U surjektiv sind.)