Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2014

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 11 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. *Basiswissen zu Gruppoiden*

Ein *Gruppoid* ist eine Kategorie, in der alle Morphismen invertierbar sind. Man stellt sich einen Gruppoid wie eine Gruppe vor, mit der Einschränkung, dass nicht je zwei Elemente miteinander verknüpfbar sind.

a) Erkläre, wie man aus einer Gruppe G einen Gruppoid BG mit genau einem Objekt machen kann.

b) Verstehe, inwieweit Gruppoide mit genau einem Objekt dasselbe wie Gruppen sind.

c) Seien x und y zwei isomorphe Objekte eines Gruppoids X. Welche Beziehung besteht zwischen den Automorphismengruppen $\mathrm{Aut}_X(x)$ und $\mathrm{Aut}_X(y)$?

d) Sei G eine Gruppe. Erläutere, inwieweit eine (Links-)G-Menge dasselbe ist wie ein Funktor $BG \to \mathrm{Set}$.

e) Finde natürliche Beispiele für Gruppoide mit mehr als einem Objekt.

Eine *mengenwertige Darstellung* eines Gruppoids X ist ein Funktor $X \to \mathrm{Set}$. Die *Kardinalität* eines Gruppoids X ist die reelle Zahl $|X| = \sum_{[x]} \frac{1}{|\mathrm{Aut}_X(x)|}$ (im Falle der Konvergenz). Die Summe geht über alle Isomorphieklassen von Objekten von X.

f) Was ist die Kardinalität des Gruppoids der endlichen Mengen und Bijektionen?

g) Inwieweit verallgemeinert die Gruppoidkardinalität die Kardinalität von Mengen?

Aufgabe 2. *Absolute Galoisgruppe ohne Abschlusswahl*

Die *absolute Galoisgruppe* eines Körpers k ist die Galoisgruppe eines separablen Abschlusses k^{sep} über k, also die Gruppe der Isomorphismen $k^{\mathrm{sep}} \to k^{\mathrm{sep}}$ von k-Algebren. Allerdings ist der separable Abschluss nur bis auf *uneindeutige* Isomorphie bestimmt. Das führt dazu, dass die absolute Galoisgruppe nur *bis auf Konjugation* wohldefiniert ist.

a) Definiere auf geeignete Art und Weise den *absoluten Galoisgruppoid* eines Körpers k. Dabei sollen keine Wahlen getroffen werden.

b) Definiere einen Funktor von der dualen Kategorie der k-Algebren in die Kategorie der mengenwertigen Darstellungen des absoluten Galoisgruppoids von k.

Aufgabe 3. *Ideale in Banachalgebren*

Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal in einer Banachalgebra A. Zeige, dass der topologische Abschluss von $\mathfrak{a}$ wieder ein Ideal ist. Folgere, dass maximale Ideale in Banachalgebren stets abgeschlossen sind.

Bemerkung: Die Äquivalenz zwischen C^*-Algebren und kompakten Hausdorffräumen benötigt das Auswahlaxiom. Eine Verfeinerung dieser Äquivalenz gilt aber auch konstruktiv: C^*-Algebren sind äquivalent zu vollständig regulären *Örtlichkeiten*. Dieses Resultat findet Anwendung in der Theorie der *Bohr-Topoi* zu quantenmechanischen Systemen.

Aufgabe 4. *Produkte in Kategorien*

Ein *Möchtegernprodukt* zweier Objekte X und Y einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt P zusammen mit Morphismen $\pi_X : P \to X$, $\pi_Y : P \to Y$. Ein *Produkt* von X und Y ist ein Möchtegernprodukt, sodass für jedes Möchtegernprodukt $X \leftarrow \widetilde{P} \to Y$ genau ein Morphismus $\widetilde{P} \to P$ existiert, der die beiden offensichtlichen Dreiecke kommutieren lässt.

a) Beweise, dass ein Produkt P von X und Y den Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ mit

$$U \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Y)$$

darstellt. (Die Umkehrung stimmt ebenfalls und wurde in der Vorlesung bewiesen.)

b) Überlege, wie man das Konzept eines Produkts von drei Objekten definieren sollte. Zeige, dass wenn ein Produkt $X \times Y$ von Objekten X und Y in einer Kategorie $\mathcal{C}$ existiert, und wenn ferner ein Produkt $(X \times Y) \times Z$ mit einem dritten Objekt Z existiert, dieses in kanonischerweise zu einem Produkt von X, Y, Z wird.

Aufgabe 5. *Überlagerungen und Darstellungen des Fundamentalgruppoids*

Der *Fundamentalgruppoid* $\Pi_1(X)$ eines topologischen Raums X hat als Objekte die Punkte von X und als Morphismen von x zu y die Homotopieklassen von Wegen von x nach y (wobei Homotopien die Endpunkte bewahren müssen). Als 1-Kategorie ist er eine Approximation des Fundamental-2-Gruppoids von X, welcher wiederum eine Approximation des Fundamental-∞-Gruppoids ist.

a) Sei $x_0 \in X$. Mache dir klar, dass $\mathrm{End}_{\Pi_1(X)}(x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$ als Gruppen.

b) Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung. Dann erhält man eine *mengenwertige Darstellung von* $\Pi_1(X)$, das heißt einen Funktor $\Pi_1(X) \to \mathrm{Set}$. Auf Objektniveau ist dieser durch die Setzung $x \mapsto \pi^{-1}[\{x\}]$ gegeben.

   Erkläre, wie dieser auf Morphismenniveau spezifiert werden soll. Weise insbesondere die Wohldefiniertheit deiner Setzung nach.

   Tipp: Es gibt ein Lemma über die eindeutige Liftbarkeit von Wegen.

Wenn X lokal wegweise zusammenhängend und semi-lokal einfach zusammenhängend ist, ist die Kategorie der Überlagerungen von X äquivalent zur Kategorie der mengenwertigen Darstellungen von $\Pi_1(X)$. Diese Kategorienäquivalenz verfeinert die in der Vorlesung angesprochene Äquivalenz zwischen Überlagerungen und $\pi_1(X, x_0)$-Mengen, die eine Basispunktwahl erfordert und nur funktioniert, wenn X wegweise zusammenhängend ist.

c) Verifiziere so viele Details dieser Äquivalenz oder der Äquivalenz der Vorlesung, wie du möchtest. Interessant ist insbesondere folgender Aspekt:

   Sei $\widetilde{X}$ die *universelle Überlagerung* von X bezüglich eines Basispunkts x_0. Die Punkte von $\widetilde{X}$ sind Homotopieklassen von Wegen, deren Anfangspunkt x_0 und deren Endpunkt beliebig ist. (Die Homotopien müssen Anfangs- und Endpunkt bewahren.) Topologisiert wird $\widetilde{X}$ als Quotientenraum eines Unterraums des Raums der Abbildungen $[0, 1] \to X$; dieser trägt die Kompakt-Offen-Topologie. Es gibt eine kanonische stetige Abbildung $\pi : \widetilde{X} \to X$, die der Äquivalenzklasse eines Wegs ihren Endpunkt zuordnet.

   Sei dann ein beliebiger bei x_0 beginnender Weg γ in X und ein Urbild z von x_0 unter π gegeben. Dann gibt es einen *Lift* von γ auf $\widetilde{X}$, das heißt einen Weg $\widetilde{\gamma}$ in $\widetilde{X}$ mit $\widetilde{\gamma}(0) = z$ und $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.

   Hinweis: Mit Notation aus Homotopietyptheorie macht der Beweis mehr Spaß.

d) Sei konkret $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $Y \to X$ der Totalraum der Garbe

$$U \subseteq X \longmapsto \{y \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid y'(z) = \tfrac{1}{2z} y(z) \text{ für alle } z \in U\}.$$

Da diese Garbe lokal konstant ist, ist $Y \to X$ eine Überlagerung und induziert damit eine Darstellung von $\Pi_1(X)$.

Zeige: Die Wirkung dieser Darstellung auf einer Schleife in X, die sich genau einmal um den Ursprung windet, ist die Abbildung $[y] \mapsto [-y]$.

Aufgabe 6. *Pontrjagin-Dualität*

Die *duale Gruppe* $G^\vee$ einer lokal kompakten topologischen abelschen Gruppe G ist die Menge aller *Charaktere* von G, also die Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen $G \to S^1$, versehen mit der punktweisen Gruppenstruktur und der Topologie gleichmäßiger Konvergenz auf Kompakta. Dabei ist S^1 die Menge der komplexen Zahlen mit Betrag 1, versehen mit der Multiplikation als Gruppenstruktur und der Teilraumtopologie von $\mathbb{C}$.

a) Zeige: $\mathbb{Z}^\vee \cong S^1$.

b) Zeige: $\mathbb{R}^\vee \cong \mathbb{R}$.

Zu lokal kompakten abelschen Gruppen existiert eine gute Theorie über Fouriertransformationen. Ist $f : A \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion genügender Regularität auf einer solchen Gruppe A, so ist die Fouriertransformierte $\hat{f} : A^\vee \to \mathbb{C}$ die Funktion mit

$$\hat{f}(\chi) = \int_A f(x)\overline{\chi(x)}\, d\mu(x).$$

Die Integration findet bezüglich eines *Haar-Maßes* auf A statt.

c) Zeige, dass die so definierte Fouriertransformation im Fall $A = \mathbb{R}$ mit der üblichen Fouriertransformation übereinstimmt. Verwende als Haar-Maß das gewöhnliche Lebesgue-Maß.