Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

Übungsblatt 2 zur Homologischen Algebra I

– Motto –

Aufgabe 1. *Geometrische Realiserung des simplizialen Standard-p-Simplexes*

Wir wollen an einem Beispiel nachvollziehen, dass die Grundlagen der Theorie der simplizialen Mengen sinnvoll aufeinander abgestimmt sind: Zeige, dass die geometrische Realisierung $|\Delta[p]|$ des simplizialen Standard-p-Simplex kanonisch homöomorph zum topologischen Standard-p-Simplex Δ_p ist.

Gib dazu explizit die kanonische Abbildung $|\Delta[p]| \to \Delta_p$ an und weise nach, dass sie ein Homöomorphismus ist. Später werden wir lernen, wie man diese Aufgabe auch unmittelbar vermöge abstrakten Nonsens lösen kann.

Aufgabe 2. *Simpliziale Mengen aus Verklebedaten*

In der Vorlesung wurde eine Konstruktion beschrieben, um aus einem Verklebedatum $(X_{(n)})$ eine simpliziale Menge $\widetilde{X}$ zu bauen: Als Menge der m-Simplizes nimmt man dabei

$$X_m := \coprod_{k \geq 0} \coprod_{g : [m] \twoheadrightarrow [k]} X_{(k)},$$

Ein m-Simplex von $\widetilde{X}$ ist also ein Tupel (k, g, x), wobei k eine natürliche Zahl, $g : [m] \to [k]$ eine monotone Surjektion und $x \in X_{(k)}$ ein k-Simplex von X ist; wir stellen es uns als „Degeneration von x längs g“ vor. Ist $f : [n] \to [m]$ eine monotone Abbildung, so definiert man $\widetilde{X}(f)(k, g, x) := (\ell, X(\iota)x, \pi)$, wobei $[n] \xrightarrow{\pi} [\ell] \xrightarrow{\iota} [k]$ die eindeutige Epi/Mono-Zerlegung von $g \circ f$ ist.

a) Zeige, dass diese Setzung wirklich zu einer simplizialen Menge führt, weise also die beiden Axiome über $\widetilde{X}(\_\_)$ nach.

b) Zeige, dass $\widetilde{X}$ folgende besondere Eigenschaft hat: Für jedes nichtdegenerierte Simplex $x \in \widetilde{X}_m$ und jede monotone Injektion $f : [n] \to [m]$ ist das Simplex $\widetilde{X}(f)(x) \in \widetilde{X}_n$ ebenfalls nichtdegeneriert.

c) Zeige, dass eine beliebige simpliziale Menge genau dann durch die beschriebene Konstruktion von einem Verklebedatum stammt, wenn es die Eigenschaft aus Teilaufgabe b) hat.

Die Konstruktion $X \mapsto \widetilde{X}$ stellt einen Linksadjungierten zum Vergissfunktor von der Kategorie der simplizialen Mengen in die Kategorie der Verklebedaten dar. In einem gewissen Sinn kann man sie als Kategorifizierung des Fundamentalsatzes von Newtons Finite-Differenzen-Kalkül ansehen.

Aufgabe 3. *Fasernde simpliziale Mengen*

Eine simpliziale Menge X heißt genau dann *fasernd*, wenn für jedes $n \geq 0$ und k mit $0 \leq k \leq n + 1$ folgende Bedingung erfüllt ist:

> Sind Simplizes $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1} \in X_n$ mit $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ für alle $i < j$ (wobei i und j ungleich k) vorgegeben, so existiert ein Simplex $y \in X_{n+1}$ mit $d_i(y) = x_i$ für alle $i \neq k$.

a) Was bedeutet diese Bedingung anschaulich? Denke dazu an *Hörner*.

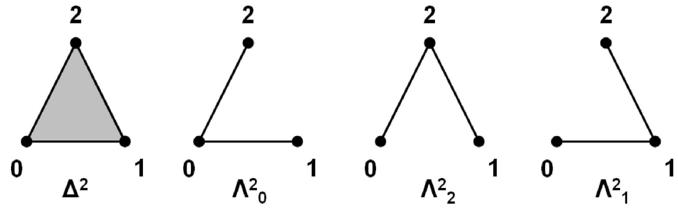

Abbildung: Die drei Hörner von Δ^2.