Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 14 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Definition des Kerns*

Sei $\mathcal{C}$ eine Ab-angereicherte Kategorie. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Zeige, dass für ein Objekt K zusammen mit einem Morphismus $k : K \to X$ folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Das Paar stellt den Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$, $T \mapsto \ker(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y))$ dar.
2. Das Paar hat folgende universelle Eigenschaft: Es gilt $\varphi \circ k = 0$, und zu jedem Morphismus $k' : K' \to X$ mit $\varphi \circ k' = 0$ gibt es genau einen Morphismus $h : K' \to K$ mit $k' = k \circ h$.
3. Für alle Objekte T ist folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y)$$

$$\begin{tikzcd}
& K' \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "k'"] \arrow[dr, "0"] & \\
K \arrow[r, "k"'] & X \arrow[r, "\varphi"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Zur Erinnerung: Ein Paar bestehend aus einem Objekt K und einem Element $k \in F(K)$ stellt genau dann einen Funktor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ dar, wenn es folgende universelle Eigenschaft hat: Für jedes Objekt K' und jedes Element $k' \in F(K')$ existiert genau ein Morphismus $h : K' \to K$ mit $k' = F(h)(k)$.

Aufgabe 2. *Kerne und Monomorphismen*

Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus in einer Kategorie $\mathcal{C}$, die die Axiome A1 und A2 erfüllt.

a) Zeige, dass φ genau dann ein Monomorphismus (d. h. linkskürzbar) ist, wenn das Nullobjekt zusammen mit dem eindeutigen Morphismus nach X ein Kern von φ ist.

b) Formuliere und beweise mit wenig Aufwand die duale Aussage.

c) Sei $\mathcal{C}$ sogar abelsch und φ sowohl ein Mono- als auch ein Epimorphismus. Zeige, dass φ dann sogar ein Isomorphismus ist. (Man sagt auch, abelsche Kategorien seien *balanciert.* Welche wichtigen Kategorien sind nicht balanciert?)

Aufgabe 3. *Rückzug von Mono- und Epimorphismen*

Sei in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ ein Faserproduktdiagramm gegeben.

a) Zeige: Ist f ein Monomorphismus, so auch f'.

b) Sei $\mathcal{C}$ sogar abelsch. Zeige: Ist f ein Epimorphismus, so auch f'.
Tipp: Vollziehe die Behauptung erst im Fall $\mathcal{C} = R$-Mod nach. Hole dir dann bessere Tipps ab.

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
X' \arrow[r, "g"'] & X
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 4. *Prägarben abelscher Gruppen*

Zeige, dass die Kategorie der Prägarben abelscher Gruppen auf einem topologischem Raum (oder einer Örtlichkeit) eine abelsche Kategorie ist.

Aufgabe 5. *Homotopietheorie von Nerven*

a) Sei $\eta : F \to G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Zeige, dass die induzierten simplizialen Abbildungen $NF, NG : N\mathcal{C} \to N\mathcal{D}$ zwischen den Nerven zueinander homotop sind.

b) Sei $F \dashv G$ ein adjungiertes Funktorpaar. Zeige, dass NF eine Homotopieäquivalenz ist (mit NG als schwachem Inversen).

c) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, die ein initiales oder terminales Objekt besitzt. Zeige, dass $N\mathcal{C}$ zusammenziehbar ist, d. h. homotopieäquivalent zu einem Punkt.

   Tipp: Elegant kann man das mit Teilaufgabe b) lösen.