

Übungsblatt 9 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. Funktoren als verallgemeinerte monotone Abbildungen

Seien P und Q Quasiordnungen (oder Partialordnungen). Seien BP und BQ die zugehörigen dünnen Kategorien, deren Objekte genau die Elemente von P bzw. Q sind und in denen zwischen zwei Objekten genau dann ein Morphismus verläuft, wenn die Quelle kleinergleich dem Ziel ist.

- a) Zeige, dass Funktoren $BP \rightarrow BQ$ auf kanonische Art und Weise mit schwach monoton steigenden Abbildungen $P \rightarrow Q$ korrespondieren.
- b) Zeige, dass zwischen zwei Funktoren $Bf, Bg : BP \rightarrow BQ$ höchstens eine natürliche Transformation verlaufen kann; und dass es genau dann eine solche gibt, wenn für die zugehörigen monotonen Abbildungen $f, g : P \rightarrow Q$ gilt: $f(x) \preceq g(x)$ für alle $x \in P$.

Aufgabe 2. Beispiele für natürliche Transformationen

Sei $\text{Id}_{\text{Set}} : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ der Identitätsfunktork auf Set , $P : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ der (kovariante) Potenzmengenfunktork und $K : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ der Funktork

$$\begin{aligned} X &\longmapsto X \times X \\ f &\longmapsto f \times f := ((a, b) \mapsto (f(a), f(b))). \end{aligned}$$

- a) Zeige: Es gibt nur eine einzige natürliche Transformation $\eta : \text{Id}_{\text{Set}} \rightarrow \text{Id}_{\text{Set}}$, nämlich

$$\eta_X : X \rightarrow X, \quad x \mapsto x.$$

- b) Zeige: Es gibt nur eine einzige natürliche Transformation $\omega : \text{Id}_{\text{Set}} \rightarrow K$, nämlich

$$\omega_X : X \rightarrow X \times X, \quad x \mapsto (x, x).$$

Tipp für a) und b): Betrachte geeignete Abbildungen $1 \rightarrow X$, $\star \mapsto x$. Dabei ist $1 = \{\star\}$ eine einelementige Menge.

- c) Zeige: Es gibt keine natürliche Transformation $P \rightarrow \text{Id}_{\text{Set}}$, wohl aber eine in die andere Richtung.
- d) Wir nehmen an, dass wir für jede nichtleere Menge X ein bestimmtes Element $a_X \in X$ gegeben haben. Zeige: Die Setzung $\tau_X : X \rightarrow X$, $x \mapsto a_X$ definiert *nicht* eine natürliche Transformation $\text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$, wobei \mathcal{C} die Kategorie der nichtleeren Mengen und beliebigen Abbildungen bezeichnet.
- e) Welche natürlichen Transformationen $\text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ gibt es, wenn \mathcal{C} die Kategorie der reellen Vektorräume bezeichnet?

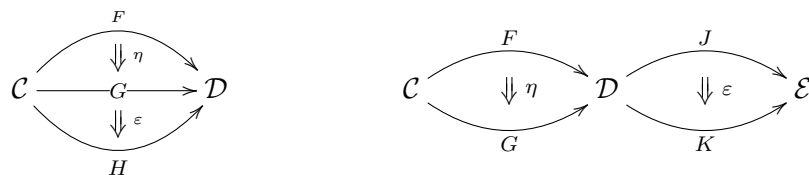
Aufgabe 3. Die 2-Kategorie der Kategorien

- Seien $\eta : F \rightarrow G$ und $\varepsilon : G \rightarrow H$ natürliche Transformationen zwischen Funktoren $F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Definiere auf geeignete Art und Weise die *vertikale Komposition* $\varepsilon \circ \eta : F \rightarrow H$. Weise nach, dass deine Definition wirklich zu einer natürlichen Transformation führt.
- Sei $\eta : F \rightarrow G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $\varepsilon : J \rightarrow K$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $J, K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$. Definiere auf geeignete Art und Weise die *horizontale Komposition* $\eta \star \varepsilon : J \circ F \rightarrow K \circ G$. Musst du dazu Wahlen treffen?
- Verifiziere für passende natürliche Transformationen folgendes Vertauschungsgesetz:

$$(\beta' \circ \beta) \star (\alpha' \circ \alpha) = (\beta' \star \alpha') \circ (\beta \star \alpha)$$

Eine gewöhnliche Kategorie heißt auch *1-Kategorie*; eine *strikte 2-Kategorie* ist eine Kategorie, in der die Hom-Mengen $\text{Hom}(X, Y)$ nicht nur Mengen, sondern ihrerseits (gewöhnliche 1-)Kategorien sind, und in der die Verknüpfungsoperationen $\text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$ sogar Funktoren sind. Zur besseren Abgrenzung heißen die Objekte $f \in \text{Hom}(X, Y)$ dann 1-Morphismen (zwischen X und Y) und die Morphismen $\alpha : f \rightarrow g$ in $\text{Hom}(X, Y)$ dann 2-Morphismen (zwischen f und g).

- Zeige, dass sich 1-Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen zu einer 2-Kategorie organisieren.



Aufgabe 4. Überraschende Kommutativität

Die *erste Homotopiegruppe* $\pi_1(X, x_0)$ eines topologischen Raums X mit Basispunkt x_0 ist die Menge aller stetigen Abbildungen $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, wobei zwei solche Abbildungen genau dann miteinander identifiziert werden, wenn sie vermöge einer basispunktfixierenden Abbildung $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ homotop sind.

Die *zweite Homotopiegruppe* $\pi_2(X, x_0)$ ist die Menge aller stetigen Abbildungen $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$, die den Rand des Einheitsquadrats auf den Basispunkt x_0 abbilden, wobei zwei solche Abbildungen genau dann miteinander identifiziert werden, wenn sie vermöge einer basispunktfixierenden Abbildung $[0, 1] \times [0, 1]^2 \rightarrow X$ homotop sind.

- Finde *zwei* kanonische Gruppenstrukturen auf $\pi_2(X, x_0)$.
- Beweise, dass die beiden Gruppenstrukturen dasselbe Vertauschungsgesetz erfüllen wie in Aufgabe 3c).
- Zeige, dass die beiden Gruppenstrukturen übereinstimmen und kommutativ sind.

Tipp: Das gilt allgemein – zwei binäre Operationen mit neutralem Element, die wie in Aufgabe 3c) miteinander verträglich sind, sind tatsächlich gleich und kommutativ.

- Sei A ein Objekt einer 2-Kategorie \mathcal{C} . Sei $\text{id}_A : A \rightarrow A$ der (1-)Identitätsmorphismus. Sei $Z(A) := \text{End}(\text{id}_A)$ die Menge aller 2-Morphismen von id_A nach id_A .

Finde zwei Gruppenstrukturen auf $Z(A)$, zeige, dass sie miteinander verträglich sind, und folgere daher, dass sie gleich und kommutativ sind.

- e) Der *Fundamental-2-Gruppoid* $\Pi_2(X)$ ist folgende 2-Kategorie: Die Objekte sind die Punkte von X , die Morphismen sind Wege zwischen den Punkten und die 2-Morphismen zwischen Wegen γ, γ' sind Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $H(0, \cdot) = \gamma$, $H(1, \cdot) = \gamma'$.

Zeige, dass $Z(x_0) = \pi_2(X, x_0)$. Folgere mit dieser Erkenntnis Teilaufgabe c) aus d).

Aufgabe 5. *Eine Kategorie mit endlichen Mengen als Objekten*

Zeige, dass folgende Setzungen eine Kategorie Σ definieren. Bestätige also das Assoziativgesetz und finde die Identitätsmorphismen.

Objekte: alle endlichen Mengen

Morphismen: $\text{Hom}(X, Y) := \{\text{Abbildungen } f : X \rightarrow Y \text{ zusammen mit}$

Totalordnungen auf den Fasern $f^{-1}[\{y\}], y \in Y\}$

Die Komposition soll dabei wie folgt definiert sein: Die Abbildungsteile verkettet man wie gewöhnlich, und auf den Fasern $(g \circ f)^{-1}[\{z\}]$ definiert man folgende Totalordnung: $i \preceq j$ genau dann, wenn entweder $f(i) \neq f(j)$ und $f(i) \preceq f(j)$ in $g^{-1}[\{f(i)\}]$, oder $f(i) = f(j)$ und $i \preceq j$ in $f^{-1}[\{f(i)\}]$.