Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

Übungsblatt 6 zur Homologischen Algebra I

– Garben organisieren lokale Daten. –

Aufgabe 1. *Beispiele für Garben*

Sei X ein topologischer Raum. Das fundamentale Beispiel für eine Garbe auf X ist durch die Zuordnung

a) $\mathcal{E} : U \longmapsto \{s : U \to E \,|\, s \text{ stetig mit } \pi \circ s = \mathrm{id}|_U\}$

und den gewöhnlichen Einschränkungsabbildungen gegeben. Dabei ist $\pi : E \to X$ eine feste stetige Abbildung. Zeige, dass $\mathcal{E}$ tatsächlich eine Garbe ist.

Welche der folgenden Setzungen mit den gewöhnlichen Einschränkungsabbildungen führen zu Prägarben? Welche sogar zu Garben?

b) $\mathcal{C} \quad : U \longmapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$

c) $\mathcal{C}_{\text{const.}} : U \longmapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ konstant}\}$

d) $\mathcal{C}_{\text{l.c.}} : U \longmapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ lokal konstant}\}$

e) $\mathcal{C}_0 : U \longmapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ hat kompakten Träger in } U\}$

f) $\mathcal{C}_{\text{bounded}} : U \longmapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$

Wie steht es um folgende Zuordnung, wobei M feste Menge und $x_0 \in X$ ein fester Punkt ist? Als Einschränkungsabbildungen sollen Identitäten oder geeignete konstante Abbildungen dienen (welche?). (Wie sieht eine intuitionistisch sinnvolle Definition aus?)

g) $\mathcal{F} \quad : U \longmapsto \begin{cases} M, & \text{falls } x_0 \in U, \\ \{\star\}, & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 2. *Der Totalraum einer (Prä-)Garbe*

Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf einem topologischen Raum X. Der zugehörige *Totalraum* F ist als Menge die disjunkt-gemachte Vereinigung aller Halme $\mathcal{F}_x$, $x \in X$, und man topologisiert ihn über die gröbste Topologie, in der für alle lokalen Schnitte $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, $U \subseteq X$ offen, die Teilmengen

$$F(s) := \{(x, s_x) \in F \,|\, x \in U\} \subseteq F$$

offen sind. Sei $\pi : F \to X$ die kanonische Projektionsabbildung mit $(x, u) \mapsto x$.

a) Zeige, dass π stetig ist.

b) Zeige weiter, dass π ein lokaler Homöomorphismus ist: Das heißt, dass für alle Punkte $z \in F$ eine offene Umgebung $V \subseteq F$ existiert, sodass die Bildmenge $\pi[V] \subseteq X$ offen und die eingeschränkte Abbildung $\pi|_V : V \to \pi[V]$ ein Homöomorphismus ist.

c) Zeige, dass die Fasern von π, also die Mengen $\pi^{-1}[\{x\}]$ für $x \in X$, *diskrete Räume* sind: Das heißt, dass *alle* Teilmengen bezüglich der Teilraumtopologie offen sind.

d) Wieso ist im Allgemeinen der Totalraum der Garbe $\mathcal{E}$ aus Aufgabe 1a) nicht homöomorph zum dortigen Raum E?

Aufgabe 3. *Exakte Sequenzen von Garben*

Eine Sequenz $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ von Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X heißt genau dann *exakt* (bei $\mathcal{G}$), wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

- „im $\subseteq$ ker". Für jeden Schnitt $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ gilt $\beta_U(\alpha_U(s)) = 0 \in \Gamma(U, \mathcal{H})$.
- „im $\supseteq$ ker". Für jeden Schnitt $t \in \Gamma(U, \mathcal{G})$ mit $\beta_U(t) = 0 \in \Gamma(U, \mathcal{H})$ existieren eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Schnitte $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$ mit $\alpha_{U_i}(s_i) = t|_{U_i}$ für alle $i \in I$. Man sagt auch: Der Schnitt t soll *lokal* Urbilder besitzen.

Der Begriff der Exaktheit einer Sequenz von *Prä*garben abelscher Gruppen wurde anders definiert. Beide Definitionen fallen nicht vom Himmel, in ihrem jeweiligen Kontext (Garben bzw. Prägarben) sind sie jeweils genau die richtigen. Das werden wir noch verstehen.

a) Zeige, dass eine Sequenz von Garben abelscher Gruppen genau dann exakt ist, wenn sie *halmweise exakt* ist, wenn also die induzierten Sequenzen $\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ von abelschen Gruppen für alle $x \in X$ exakt sind.

b) Sei $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ eine exakte Sequenz von *Prä*garben. Seien $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ aber trotzdem sogar Garben. Zeige, dass die Sequenz dann auch als Sequenz von Garben exakt ist.

c) Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von *Prä*garben auf einem topologischen Raum. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{H}$ sogar Garben. Zeige, dass $\mathcal{G}$ ebenfalls eine Garbe ist.

d) *Schnitte nehmen ist linksexakt.* Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen. Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Zeige, dass die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{H}) \cancel{\longrightarrow 0}$$

noch exakt ist. Wieso geht die Surjektivität hinten verloren? (Wenn dem nicht so wäre, gäbe es übrigens das gesamte Teilgebiet der *Garbenkohomologie* nicht.)

Aufgabe 4. *Inneres Hom*

Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben auf einem topologischen Raum X. Dann definieren wir eine weitere Prägarbe durch die Setzung

$$\Gamma(U, \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) := \{\alpha : \mathcal{F}|_U \to \mathcal{G}|_U \text{ Morphismus von Prägarben auf } U\}$$

und die offensichtlichen Einschränkungsabbildungen (welche?).

Zeige: Ist $\mathcal{G}$ sogar eine Garbe, so ist $\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ebenfalls eine Garbe.

Bemerkung: Im Allgemeinen ist die kanonische Abbildung $\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$ weder injektiv noch surjektiv.

Aufgabe 5. *Welke Garben*

Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt genau dann *welk* (engl. *flabby*, franz. *flasque*), wenn die Einschränkungsabbildungen $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ surjektiv sind.

a) Zeige durch ein explizites Beispiel, dass die Garbe $\mathcal{C}$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ aus Aufgabe 1b) nicht welk ist.

b) Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X. Sei $\mathcal{F}$ welk. Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Zeige, dass dann auch die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

exakt ist. Wegen dieser besonderen Eigenschaft sind welke Garben für die homologische Algebra wichtig.

Tipp: Opfere eine Katze, um geeignete maximale Fortsetzungen zu konstruieren.

c) Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ welk. Zeige, dass dann auch $\mathcal{H}$ welk ist.

d) Sei $\pi : E \to X$ eine stetige Surjektion. Zeige, dass die Garbe $\widetilde{\mathcal{E}}$ *aller* Schnitte von $E \xrightarrow{\pi} X$, also die Garbe mit $\Gamma(U, \widetilde{\mathcal{E}}) = \{s : U \to E \mid \pi \circ s = \mathrm{id}|_U\}$ und den gewöhnlichen Einschränkungsabbildungen, welk ist.

e) Zeige, dass man jede Garbe auf einem topologischen Raum in eine geeignete welke Garbe einbetten kann.

Aufgabe 6. *Weiche Garben*

Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt genau dann *weich* (engl. *soft*, franz. *mou*), wenn die Abbildungen $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(A, \mathcal{F})$ für alle *abgeschlossenen* Teilmengen $A \subseteq X$ surjektiv sind. Zur Erinnerung: $\Gamma(A, \mathcal{F}) := \operatorname{colim}_{U \subseteq X \text{ offen}, A \subseteq U} \Gamma(U, \mathcal{F})$.

Weiche Garben werden vor allem auf parakompakten Hausdorffräumen studiert. Ein topologischer Raum ist genau dann *parakompakt*, wenn jede offene Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$ eine *lokal endliche Verfeinerung* $X = \bigcup_j V_j$ besitzt: Jede der offenen Teilmengen V_j soll in einer der Mengen U_i enthalten sein, und jeder Punkt von X soll in nur endlich vielen Mengen V_j liegen. Parakompakte Hausdorffräume haben ferner folgende besondere Eigenschaft: Zu jeder offenen Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$ existieren offene Mengen V_i mit $\overline{V_i} \subseteq U_i$, welche immer noch X überdecken.

a) Zeige, dass die Garbe $\mathcal{C}$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ aus Aufgabe 1b) weich ist.

b) Zeige, dass welke Garben stets weich sind.

c) Sei X ein parakompakter Hausdorffraum. Zeige die analoge Behauptung wie bei Aufgabe 5b), nur mit „$\mathcal{F}$ weich“ statt „$\mathcal{F}$ welk“ und mit „$A \subseteq X$ abgeschlossen“ statt „$U \subseteq X$ offen“.

d) Sei X ein parakompakter Hausdorffraum. Zeige die analoge Behauptung wie bei Aufgabe 5c), nur mit „weich“ statt „welk“.

Aufgabe 7. *Feine Garben*

Eine Garbe $\mathcal{F}$ abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X heißt genau dann *fein* (engl. *fine*, franz. *fin*), wenn für je zwei disjunkte abgeschlosse Mengen $A_1, A_2 \subseteq X$

ein Morphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ von Garben abelscher Gruppen existiert, sodass α auf einer offenen Umgebung von A_1 Null und auf einer offenen Umgebung von A_2 die Identität ist. (Das bedeutet, dass es offene Mengen $U_1 \supseteq A_1$ und $U_2 \supseteq A_2$ gibt, sodass α_V für alle offenen Teilmengen $V \subseteq U_1$ die Nullabbildung und sodass α_V für alle offenen Teilmengen $V \subseteq U_2$ die Identitätsabbildung ist.)

a) Zeige, dass feine Garben auf parakompakten Hausdorffräumen stets weich sind.

b) Zeige, dass eine Garbe $\mathcal{F}$ abelscher Gruppen auf einem parakompakten Hausdorffraum genau dann fein ist, wenn die Hom-Garbe $\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ welk ist.

   Tipp: Parakompakte Hausdorffräume sind *normal*, das heißt je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen besitzen offene disjunkte Umgebungen.

Aufgabe 8. *Affine Schemata II*

Sei A ein kommutativer Ring (mit Eins). Wir definieren auf den standardoffenen Teilmengen $D(f) \subseteq \operatorname{Spec} A$ die Zuordnung

$$\mathcal{O} : D(f) \longmapsto A[S_f^{-1}],$$

wobei S_f das multiplikative System $S_f = \{g \in A \,|\, f \in \sqrt{(g)}\}$ ist. Die Elemente des lokalisierten Rings $A[S_f^{-1}]$ sind formale Brüche $\frac{g}{s}$ mit $g \in A$ und $s \in S_f$; zwei solche Brüche $\frac{g}{s}$, $\frac{h}{t}$ gelten genau dann als gleich, wenn $ush = utg$ für ein $u \in S_f$.

a) Zeige, dass die Setzung wohldefiniert ist, dass also die Menge S_f nur von $D(f)$, nicht aber von der konkreten Repräsentantenwahl f abhängt.

b) Überlege, wie man sinnvolle Restriktionsabbildungen $\mathcal{O}(D(f)) \to \mathcal{O}(D(g))$ für $D(g) \subseteq D(f)$ definieren kann. Zeige mit deiner Definition, dass $\mathcal{O}$ zu einer Prägarbe wird – welche aber nicht allen offenen Teilmengen, sondern nur den standardoffenen Teilmengen Schnittmengen zuweist.

c) Zeige, dass die so definierte „Prägarbe“ bezüglich offener Überdeckungen der Form $D(f) = \bigcup_i D(g_i)$ die Garbenaxiome erfüllt.

   Tipp: Der Spezialfall $f = 1$ ist in der technischen Ausführung etwas einfacher und immer noch interessant genug. Es gilt $D(f) = \bigcup_i D(g_i)$ genau dann, wenn $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g_i)_i}$. Ist $1 = \sum_i s_i$ eine Zerlegung der Eins in einem kommutativen Ring, so gibt es für jede natürliche Zahl n auch eine Zerlegung der Form $1 = \sum_i a_i s_i^n$ mit gewissen Ringelementen a_i.

d) Wir wollen nun eine Fortsetzung von $\mathcal{O}$ zu einer auf ganz $\operatorname{Spec} A$ definierten Garbe $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ konstruieren. Da sich jede beliebige offene Teilmenge $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ als Vereinigungen $U = \bigcup_i D(f_i)$ von standardoffenen Teilmengen schreiben lässt, können wir

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} : U \longmapsto \{(s_i)_i \mid s_i \in \mathcal{O}(D(f_i)),& \\ s_i|_{D(f_i f_j)} = s_j|_{D(f_i f_j)} \in \mathcal{O}(D(f_i f_j)) &\text{ für alle } i, j\} \end{aligned}$$

   definieren. Überlege, wie diese Setzung zu einer wohldefinierten Prägarbe wird. Weise dann die Garbenaxiome nach.

e) Zeige, dass für die Halme an Punkten $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ gilt:

$$(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}} := A[(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}].$$

Die Garbe $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ ist sogar eine Ringgarbe. Ihre Schnitte stellt man sich als „gute" Funktionen auf $\operatorname{Spec} A$ vor – so, wie man etwa bei glatten Mannigfaltigkeiten von glatten Funktionen spricht. Einem A-Modul M kann man über eine Konstruktion, die der obigen sehr ähnelt, dann eine $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$-Modulgarbe $M^\sim$ zuordnen (im Spezialfall $M = A$ erhält man $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ zurück). Auf diese Weise erhält der Ausspruch „sei M ein A-Modul" geometrische Bedeutung. Diese Begriffe bilden die Grundlage moderner algebraischer Geometrie.