Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 19 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Nullmorphismen*

a) Zeige: Ein Morphismus f in $D(\mathcal{A})$ ist genau dann Null, wenn ein Quasiisomorphismus s existiert, sodass sf nullhomotop ist.

b) Zeige: Ein Komplex ist genau dann azyklisch, wenn sein Identitätsmorphismus in $D(\mathcal{A})$ Null ist.

c) Finde einen Morphismus, der nicht in $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, aber in $\mathcal{K}(A)$ Null ist; einen, der nicht in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, aber in $D(\mathcal{A})$ Null ist; einen, der nicht in $D(\mathcal{A})$ Null ist, aber in Kohomologie den Nullmorphismus induziert.

d) Konstruiere einen nichttrivialen Morphismus zwischen folgenden Komplexen in $D(\mathrm{Ab})$.

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/(2) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Aufgabe 2. *Komplexe mit vorgegebener Kohomologie*

Sei $\mathcal{B}$ eine Serresche Unterkategorie einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Sei $\mathrm{Kom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ die volle Unterkategorie derjenigen Objekte $K^\bullet$ von $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, deren Kohomologien $H^n(K^\bullet)$ alle in $\mathcal{B}$ liegen. Dann definieren wir $D_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) := \mathrm{Kom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})[\mathrm{qis}^{-1}]$.

a) Zeige, dass $D_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ auf kanonische Art und Weise eine volle Unterkategorie von $D(\mathcal{A})$ ist.

b) Sei jedes Objekt aus $\mathcal{B}$ ein Unterobjekt eines Objekts aus $\mathcal{B}$, welches als Objekt von $\mathcal{A}$ injektiv ist. Zeige, dass der kanonische Funktor $D^+(\mathcal{B}) \to D^+_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ eine Kategorienäquivalenz ist.

Aufgabe 3. *Zerfallende kurze exakte Sequenzen*

a) Zeige, dass folgende Bedingungen an eine kurze exakte Sequenz $0 \to X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \to 0$ in einer abelschen Kategorie äquivalent sind:

   1. Die Sequenz zerfällt.
   2. Es gibt einen Morphismus $s : Z \to Y$ mit $ps = \mathrm{id}$.
   3. Es gibt einen Morphismus $t : Y \to X$ mit $ti = \mathrm{id}$.

b) Folgere, dass wenn X injektiv oder Z projektiv ist, die Sequenz zerfällt.

c) Folgere, dass additive Funktoren stets zerfallende kurze exakte Sequenzen bewahren.

Aufgabe 4. *Klassifikation kurzer exakter Sequenzen*

Für Objekte X und Y in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist $\operatorname{Ext}^1(X,Y)$ die Klasse aller kurzen exakten Sequenzen der Form $0 \to Y \to ? \to X \to 0$ modulo der Äquivalenzrelation „obere Zeile $\sim$ untere Zeile" für jedes kommutative Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & ? \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & ?' \arrow[r] & X \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

a) Ist $\varphi : Y \to Y'$ ein Morphismus und $E : 0 \to Y \to Z \to X \to 0$ eine kurze exakte Sequenz, so können wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E: & 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal] & 0 \\ \varphi E: & 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, dashed] & Z \amalg_Y Y' \arrow[r, dashed] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

konstruieren. Zeige, dass die untere Zeile φE wieder exakt ist, und dass die Zuordnung $E \mapsto \varphi E$ eine wohldefinierte Abbildung $\operatorname{Ext}^1(X,Y) \to \operatorname{Ext}^1(X,Y')$ induziert.

Tipp: Der auftretende Kolimes kann auch als $(Z \oplus Y')/\{(\varphi(y), -i(y)) \mid y : Y\}$ geschrieben werden. Beweise die Behauptung mit Diagrammjagden.

Analog kann man auch für Morphismen $\psi : X' \to X$ eine wohldefinierte Zuordnung $E \in \operatorname{Ext}^1(X,Y) \mapsto E\psi \in \operatorname{Ext}^1(X',Y)$ konstruieren. Nimm zur Kenntnis: $(\varphi_1 \circ \varphi_2)E = \varphi_1(\varphi_2 E)$, $E(\psi_1 \circ \psi_2) = (E\psi_1)\psi_2$, $(\varphi E)\psi = \varphi(E\psi)$.

Sind $E, E' \in \operatorname{Ext}^1(X,Y)$, so definieren wir ihre *Baersumme* als $\nabla_Y(E \oplus E')\Delta_X \in \operatorname{Ext}^1(X,Y)$. Dabei sind $\Delta_X : X \to X \oplus X$ und $\nabla_Y : Y \oplus Y \to Y$ die kanonischen Morphismen und $E \oplus E'$ die sich durch direkte Summenbildung ergebende Sequenz in $\operatorname{Ext}^1(X \oplus X, Y \oplus Y)$.

b) Zeige, dass $\operatorname{Ext}^1(X,Y)$ mit der Baersumme zu einer abelschen Gruppe mit Nullelement $[0 \to Y \to X \oplus Y \to X \to 0]$ wird.

Aufgabe 5. *Die kanonische Filtrierung eines Komplexes*

Die *gute Abschneidung* eines Komplexes $K^\bullet$ über einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist der Komplex

$$(\tau_{\leq n} K^\bullet)^i := \begin{cases} K^\bullet, & \text{für } i < n, \\ \ker(K^n \to K^{n+1}), & \text{für } i = n, \\ 0, & \text{für } i > n. \end{cases}$$

a) Es gibt auch die *dumme Abschneidung*. Die gute Abschneidung hat ihr gegenüber den Vorteil, dass $H^i(\tau_{\leq n} K^\bullet)$ noch für $i \leq n$ mit $H^i(K^\bullet)$ übereinstimmt. Beweise diesen Sachverhalt.

b) Bestimme den Kokern der kanonischen Inklusion $\tau_{\leq n-1} K^\bullet \hookrightarrow \tau_{\leq n} K^\bullet$.

c) Finde einen Quasiisomorphismus vom Kokern in den im Grad n konzentrierten Komplex $H^n(K^\bullet)[-n]$.

d) Folgere: In $K(D(\operatorname{Kom}^b(\mathcal{A})))$ gilt die Rechnung $K^\bullet = \sum_n (-1)^n H^n(K^\bullet)$.

Die abgeleitete Kategorie $D(\operatorname{Kom}^b(\mathcal{A}))$ ist im Allgemeinen nicht abelsch. Ihre K-Theorie ist daher anders zu definieren: als die von den Objekten von $D(\operatorname{Kom}^b(\mathcal{A}))$ erzeugte abelsche Gruppe modulo den Relationen $X = X' + X''$ für jedes *ausgezeichnete Dreieck* $X' \to X \to X'' \to$. Das muss dich jetzt aber noch nicht kümmern. Bestätige die Rechnung einfach in $K(\operatorname{Kom}^b(\mathcal{A}))$, verwende aber die zusätzlichen Rechenregeln, dass quasiisomorphe Komplexe dieselbe Klasse in der K-Theorie haben und $L^\bullet[1] = -L^\bullet$ gilt.