Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2014

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt ω zur Homologischen Algebra I

– Themen, die hier noch fehlen –

Simpliziale Mengen • Kettenkomplexe • Garben • …

Aufgabe 1. *Kategorientheorie: Grundlagen*

1. Was ist eine Kategorie, was ein Funktor, was eine natürliche Transformation?
2. Was sind – aus drei verschiedenen Teilgebieten der Mathematik – Beispiele für Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen?
3. Inwieweit verallgemeinern Funktoren Abbildungen zwischen Mengen?[1]
4. Inwieweit verallgemeinern Funktoren monotone Abbildungen zwischen Quasiordnungen?[2]
5. Inwieweit verallgemeinern Funktoren Gruppen- oder Monoidhomomorphismen? Was sind in diesem Bild natürliche Transformationen?
6. Unter welchem Trivialnamen sind Kategorien mit nur einem Objekt auch bekannt?
7. Inwieweit kodieren natürliche Transformationen gleichmäßig definierte Abbildungsvorschriften?
8. Welche natürlichen Transformationen $\mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \to \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}$ gibt es?
9. Was ist ein Gruppoid?
10. Was sind drei Beispiele für Gruppoide?

Aufgabe 2. *Kategorientheorie: Verbote*

1. Wieso sollte man Objekte nicht auf Gleichheit testen?
2. Wieso sollte man Funktoren nicht auf Gleichheit testen?
3. Wieso kann man natürliche Transformationen auf Gleichheit testen?

Aufgabe 3. *Kategorientheorie: Äquivalenzen*

1. Wie kann man von zwei Kategorien feststellen, dass sie nicht zueinander äquivalent sind?
2. Zu welcher sehr konkreten Kategorie ist die Kategorie der endlich-dimensionalen K-Vektorräume äquivalent? Wie sieht in diesem Bild der Dualisierungsfunktor $\mathrm{Vect}(K) \to \mathrm{Vect}(K)^{\mathrm{op}}$ aus?
3. Welche Kategorien sind zu diskreten Kategorien äquivalent? (Eine diskrete Kategorie ist eine, in der jeder Morphismus ein Identitätsmorphismus ist. Was ist schlecht an dem Konzept einer diskreten Kategorie?)

---

[1] Tipp: Diskrete Kategorien.
[2] Tipp: Quasiordnungen induzieren Kategorien.

4. Wieso sind Set und Vect($\mathbb{R}$) nicht zueinander äquivalent?
5. Wieso sind Set und Set$^{\mathrm{op}}$ nicht zueinander äquivalent?
6. Wozu ist die Kategorie der (kommutativen) C*-Algebren (mit Eins) äquivalent?
7. Wie kann man die Galoistheorie als Kategorienäquivalenz ausdrücken?
8. Über welche Kategorienäquivalenz ist die Darstellungstheorie von Fundamentalgruppen (oder besser Fundamentalgruppoiden) eng mit der Überlagerungstheorie verknüpft?
9. Was ist Pontrjagin-Dualität?

Aufgabe 4. *Kategorientheorie: Limiten*

1. Was sind Limiten und Kolimiten?
2. Inwieweit sind Produkte Spezialfälle von Limiten?
3. Inwieweit ist der Vektorraum $K[X]$ aller Polynome ein Kolimes?
4. Wie kann man einer Kategorie ansehen, ob sie alle Limiten besitzt?
5. Inwieweit sind Limiten stets Unterobjekte von Produkten und Kolimiten stets Quotientenobjekte von Koprodukten?
6. Bei wem muss man sich melden, wenn man nächstes Jahr Zirkelleiter sein möchte?
7. Welche Limiten existieren in der Kategorie der Mengen? … in der Kategorie der Gruppen? Wieso?
8. Was ist ein Beispiel für eine natürlich auftretende Kategorie, in der nicht alle Kolimiten existieren?
9. Was haben Limiten mit Darstellbarkeit von Funktoren zu tun?

Aufgabe 5. *Kategorientheorie: Adjunktionen*

1. Was sind adjungierte Funktorpaare?
2. Was sind Beispiele für Adjunktionen aus drei verschiedenen Teilgebieten der Mathematik?
3. Wieso bewahren Rechtsadjungierte stets Limiten? (Vielen Dank an Timo Schürg: RAPL!)
4. Wieso sind Funktoren, die freie Konstruktionen berechnen, stets Linksadjungierte und nicht Rechtsadjungierte?
5. Wieso gibt es keine freien Körper?

Aufgabe 6. *Kategorientheorie: Yoneda*

1. Was besagt das Yoneda-Lemma in seiner allgemeinen Formulierung?
2. Wie kann man sich einen Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ anschaulich vorstellen? Wie sieht unter diesem Bild die Yoneda-Einbettung aus?
3. Was sind drei Beispiele für Anwendungen des Yoneda-Lemmas?
4. Wieso ist der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \_\_)$ stetig (limesbewahrend)?

Aufgabe 7. *Geometrie*

1. Was ist ein lokal geringter Raum? Worauf bezieht sich das Adjektiv „lokal“?
2. Was sind drei substanziell verschiedene Beispiele für lokal geringte Räume?
3. Welche Aspekte verallgemeinern lokal geringte Räume im Vergleich zu glatten Mannigfaltigkeiten?
4. Was ist der wandelnde Tangentialvektor? Wieso heißt er so?
5. Was ist Supergeometrie?

Aufgabe 8. *Abelsche Kategorien*

1. Welche Möglichkeiten gibt, in Ab-angereicherten Kategorien das Konzept des Kerns eines Morphismus zu definieren?
2. Inwieweit ist die abelsche Gruppenstruktur auf den Hom-Mengen einer abelschen Kategorie kein weiteres Datum? Inwieweit also lässt sie sich eindeutig aus einer gewissen Eigenschaft rekonstruieren?
3. Welche der folgenden Aussagen über Morphismen in abelschen Kategorien ist trivial? Monomorphismen sind unter Rückzug stabil. Epimorphismen sind unter Rückzug stabil.
4. Wie kann man in abelschen Kategorien Diagrammjagden wie in Modulkategorien führen?
5. Wann heißt eine kurze exakte Sequenz zerfallend? Welche speziellen Objekte führen automatisch dazu, dass eine Sequenz zerfällt?
6. Wie kann man Ext^1 über kurze exakte Sequenzen verstehen? Was ist das Nullelement? Wie sieht die Gruppenstruktur aus?
7. Wie kann man in einer bestimmten Ext-Gruppe entscheiden, ob ein gegebener Morphismus fortsetzbar ist auf ein Oberobjekt?
8. Was ist eine Serresche Unterkategorie und wie verwendet man sie, um Serresche Quotientenkategorien zu konstruieren?

Aufgabe 9. *Garbentheorie*

1. Was ist die universelle Eigenschaft der Garbifizierung?
2. Wie konstruiert man sie?
3. Wie definiert man den Rückzug von Garben?
4. Was weiß man über die Halme zurückgezogener Garben? Wie beweist man das?
5. Wie definiert man den Pushforward von Garben?
6. Unter welchen Voraussetzungen kann man etwas über die Halme vorgedrückter Garben sagen?
7. Wann ist eine Sequenz von Garben abelscher Gruppen exakt?
8. Ist Vordrücken von Garben abelscher Gruppen ein exakter Funktor? Wie steht es um den Rückzug?
9. Wie kann die Kategorie der Garben als Lokalisierung der Kategorie der Prägarben verstanden werden?

Aufgabe 10. *K-Theorie*

1. Was ist die K-Theorie einer abelschen Kategorie?
2. Was ist die K-Theorie der Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume über einem Körper?
3. Und was ist die der Kategorie der abelschen Gruppen?

Aufgabe 11. *Abgeleitete Kategorien*

1. Was ist eine Voraussetzung an eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$, die garantiert, dass man $D^+(\mathcal{A})$ im selben mengentheoretischen Universum wie $\mathcal{A}$ konstruieren kann?
2. Wie lautet die universelle Eigenschaft der abgeleiteten Kategorie genau?
3. Und wie lautet die eines abgeleiteten Funktors?
4. Welche wichtige Tatsache über injektive Objekte geht in den Beweis der Äquivalenz $D^+(\mathcal{A}) \simeq K^+(\mathcal{I})$ ein?
5. Inwieweit wird das Motto, Auflösungen eines Objekts seien genauso gut wie das aufgelöste Objekt selbst, in der abgeleiteten Kategorie gelöst?
6. Bis auf was sind injektive Auflösungen eines Objekts gleich?
7. Wann ist die abgeleitete Kategorie wieder abelsch?
8. Unter welchen Voraussetzungen ist jeder Komplex in der abgeleiteten Kategorie isomorph zu seinem Kohomologiekomplex?
9. Wieso invertiert man, angesichts der vorherigen Frage, in der Definition der abgeleiteten Kategorie nicht nur die Homotopieäquivalenzen?
10. Was ist die dumme Abschneidung eines Komplexes? Was die gute?
11. Welche drei Definitionen des Ext-Funktoren gibt es?
12. Welche wichtigen ausgezeichneten Dreiecke erhält man über die beiden Abschneidungen?
13. In welchen Fällen kann man die Kohomologie des Kegels eines Morphismus einfach angeben?
14. Was ist ein Beispiel für eine Kategorie, die nicht genügend viele Projektive besitzt?
15. Wie konstruiert man abgeleitete Funktoren?