Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 28 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Verbesserung des Stacks Projects*

Sicherlich kennst du das Stacks Project, `http://stacks.math.columbia.edu/`, das freie Nachschlagewerk zu Themen wie Garben, Homologische Algebra, Schematheorie und Stacks. Es fasst mehr als 4500 Seiten und ist das Werk vieler Mitwirkenden, mit Aise Johan de Jong als Hauptautor. Nutze es zum Lernen und korrigiere Fehler! Korrekturen einzubringen dauert keine fünf Minuten, auf `https://github.com/stacks/stacks-project` ist der Quellcode direkt editierbar.

Aufgabe 2. *Verbesserung des nLab*

Eine Quelle tiefer kategorieller Einsichten und vieler Beispiele ist das nLab, `http://ncatlab.org/nlab/show/HomePage`. Auch zu elementaren Konzepten sind dort die abstrakten Hintergründe verzeichnet. Nutze und verbessere es!

Hinweis: Bei Verbesserungen, die über Tippfehlerkorrekturen hinausgehen, gehört es zum guten Ton, seine Änderungen auf dem *nForum* bekanntzugeben.

Aufgabe 3. *Engagement im Matheschülerzirkel*

Mach beim Augsburger Matheschülerzirkel mit und übernimm die Verantwortung für einen Präsenz- oder Korrespondenzzirkel oder die Meta-Organisation! Außerdem werden noch Betreuer fürs *Mathecamp* gesucht (22. bis 27. August 2015). Die Arbeit mit den Kindern bringt viel Spaß und Freude, es lohnt sich sehr.

Aufgabe 4. *Freie Gruppen*

a) Sei A eine abelsche Gruppe. Zeige: Ist A frei, so zerfällt jede kurze exakte Sequenz der Form $0 \to \mathbb{Z} \to B \to A \to 0$.

b) Gilt die Umkehrung? *Hinweis:* Fiese Frage.

Aufgabe 5. *Kohomologie von $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger*

a) Verwende die Auflösung $0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet$ der konstanten Garbe $\underline{\mathbb{R}}$ durch die Garben der Differentialformen, um $H_c^\bullet(\mathbb{R}^n, \underline{\mathbb{R}})$ zu berechnen.

b) Zeige $\dim_c \mathbb{R}^n = n$. Dazu folgt noch ein ausführlicher Tipp.

Aufgabe 6. *Bewegung längs Immersionen*

a) Sei $i : Z \hookrightarrow X$ die Inklusion eines abgeschlossenen Teilraums. Zeige $i_* \cong i_!$.

b) Sei $j : U \hookrightarrow X$ die Inklusion eines offenen Teilraums. Zeige $j^* \cong j^!$.

Aufgabe 7. *Alexander-Dualität*

Sei $i : Z \hookrightarrow X$ die Inklusion einer abgeschlossenen Teilmenge einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X. Sei $\mathcal{E}$ eine Garbe von k-Vektorräumen auf Z. Zeige:

$$H_c^r(Z, \mathcal{E})^\vee \cong \operatorname{Ext}_k^{n-r}(i_*\mathcal{E}, \omega_X[n-r]).$$

Hinweis: Auf der linken Seite tritt die *lokale Kohomologie* $H_c^r(Z, \mathcal{E})$ auf. Die ist die r-te Rechtsableitung des Funktors $\Gamma_Z : \mathrm{AbSh}(X) \to \mathrm{Ab}$, der eine Garbe $\mathcal{E}$ auf die Menge derjenigen globalen Schnitte, deren Träger in Z liegt, schickt. *Tipp:* Verwende $\Gamma_Z(\mathcal{E}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathrm{AbSh}(Z)}(\mathbb{Z}, i^!\mathcal{E})$ und beginne mit dem Isomorphismus $H_c^r(Z, \mathcal{E})^\vee \cong \operatorname{Hom}_{D^+(\mathrm{Vect}(k))}(\mathbb{R}\Gamma_c(\mathcal{E}), k[-r])$.

Aufgabe 8. *t-Strukturen auf triangulierten Kategorien*

Eine *t-Struktur* auf einer triangulierten Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus zwei vollen Unterkategorien $\mathcal{C}_{\geq 0}, \mathcal{C}_{\leq 0} \hookrightarrow \mathcal{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Für $X \in \mathcal{C}_{\leq 0}$ und $Y \in \mathcal{C}_{\geq 0}$ ist $\operatorname{Hom}_\mathcal{C}(X, Y[-1]) = 0$.
- Die Unterkategorie $\mathcal{C}_{\geq 0}$ ist unter $\_[-1]$ und $\mathcal{C}_{\leq 0}$ ist unter $\_[1]$ abgeschlossen.
- Für jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ existiert ein ausgezeichnetes Dreieck $A \to X \to B \to$ mit $A \in \mathcal{C}_{\leq 0}$ und $B \in \mathcal{C}_{\geq 0}[-1]$.

a) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mathcal{C} := \mathcal{D}(\mathcal{A})$ die zugehörige abgeleitete Kategorie. Sei $\mathcal{C}_{\geq 0}$ die volle Unterkategorie bestehend aus denjenigen Komplexen, deren Kohomologie in Graden ≥ 0 konzentriert ist. Sei analog $\mathcal{C}_{\leq 0}$ definiert. Zeige, dass diese Unterkategorien eine t-Struktur auf $\mathcal{C}$ bilden. *Tipp:* Gute Abschneidung.

b) Zeige weiter, dass die Kategorie $\mathcal{C}_{\geq 0} \cap \mathcal{C}_{\leq 0}$ äquivalent zu $\mathcal{A}$ ist.

c) Sei eine t-Struktur auf einer allgemeinen triangulierten Kategorie $\mathcal{C}$ gegeben. Zeige, dass ihr *Herz* – das ist der der Schnitt $\mathcal{C}_{\geq 0} \cap \mathcal{C}_{\leq 0}$ – eine abelsche Kategorie ist.

Hinweis: Die abgeleitete Kategorie des Herzens einer t-Struktur auf einer triangulierten Kategorie $\mathcal{C}$ stimmt nicht unbedingt mit $\mathcal{C}$ überein. t-Strukturen sind wichtig in der Stringtheorie.