Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2014

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 1 zur Homologischen Algebra I

– Letzte konkrete Vorbereitungen: Rechnungen mit Simplizes –

Aufgabe 1. *Triangulierung des Produkts zweier Simplizes*

Sei X die kanonische Triangulierung des Produkts $\Delta_p \times \Delta_q$. In der Vorlesung wurde ein Verfahren beschrieben, das aus einem Punkt $r = ((\xi_1, \ldots, \xi_p), (\eta_1, \ldots, \eta_q)) \in \Delta_p \times \Delta_q$ ein Element $x \in X_{(\ell)}$ zusammen mit einem Punkt $s \in \Delta_\ell^\circ$ konstruiert.

Zeige: Die kanonische Abbildung $\theta : \coprod_{n \geq 0}(\Delta_n^\circ \times X_{(n)}) \to \Delta_p \times \Delta_q$ schickt (x, s) auf r, und (x, s) ist das einzige Element der Definitionsmenge mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe 2. *Kosimpliziale Identitäten*

Die *Korandabbildung* $\partial_n^i : [n-1] \to [n]$ ist diejenige eindeutig bestimmte monotone Injektion, die nicht den Wert i annimmt. Die *Koentartungsabbildung* $\sigma_n^i : [n+1] \to [n]$ ist diejenige eindeutig bestimmte monotone Surjektion, für die der Wert i zwei verschiedene Urbilder besitzt. Beide Definitionen sind für $n \geq 0$ und $0 \leq i \leq n$ sinnvoll. Der untere Index wird in der Notation oftmals unterdrückt.

a) Zeige:

   Jede monotone Injektion $[n] \to [m]$ ist Verkettung von Korandabbildungen.
   Jede monotone Surjektion $[n] \to [m]$ ist Verkettung von Koentartungsabbildungen.
   Jede monotone Abbildung $[n] \to [m]$ ist Verkettung von Korand- und Koentartungsabbildungen.

b) Verifiziere die folgenden *kosimplizialen Identitäten.*

$$\begin{aligned}
\partial^j \partial^i &= \partial^i \partial^{j-1} && (i < j) \\
\sigma^j \sigma^i &= \sigma^i \sigma^{j+1} && (i \leq j) \\
\sigma^j \partial^i &= \partial^i \sigma^{j-1} && (i < j) \\
\sigma^j \partial^i &= \mathrm{id} && (i = j,\, i = j+1) \\
\sigma^j \partial^i &= \partial^{i-1} \sigma^j && (i > j+1)
\end{aligned}$$

   Welche anschauliche Bedeutung haben die Identitäten? Kann man Indexschlachten vermeiden?

c) Seien zwei formale Verkettungsausdrücke von Korand- und Koentartungsabbildungen gegeben. Gelte, dass beide dieselbe monotone Abbildung $[n] \to [m]$ beschreiben. Zeige: Allein unter Verwendung der kosimplizialen Identitäten kann man die beiden Ausdrücke ineineinander überführen.

   Tipp: Zeige, dass jede monotone Abbildung $f : [n] \to [m]$ auf *eindeutige* Art und Weise als Verkettung $f = \partial^{i_1} \cdots \partial^{i_s} \sigma^{j_t} \cdots \sigma^{j_1}$ geschrieben werden kann, wobei in der Notation von links nach rechts die oberen Indizes der Korandabbildungen streng monoton abnehmen und die der Koentartungsabbildungen streng monoton zunehmen.

Ähnlich wie Moduln können auch Kategorien *endlich präsentiert* sein. Die Aufgabe zeigt, dass die simpliziale Buchhaltungskategorie Δ von den Korand- und Koentartungsabbildungen und nur den kosimplizialen Identitäten als Relationen erzeugt wird.