Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 20 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Beispiele für Ext-Gruppen*

a) Seien A und B abelsche Gruppen. Sei U eine Untergruppe von A. Sei $f : U \to B$ ein Gruppenhomomorphismus. Formuliere und verifiziere ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür, dass sich f zu einem Gruppenhomomorphismus $\overline{f} : A \to B$ fortsetzen lässt, in dem $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A/U, B)$ vorkommt.

b) Sei A eine abelsche Gruppe. Zeige: $\operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A) = 0$ für alle $n > 0$.

c) Sei A eine abelsche Torsionsgruppe. Zeige: $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

d) Zeige: $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)) \cong \mathbb{Z}/(m, n)$.

Aufgabe 2. *Kohomologischer Kleber*

Seien X und Y Objekte einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$.

a) Sei $\eta : Y[0] \to X[2]$ ein Morphismus in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ und $C^\bullet$ ein Kegel von η.
Zeige: $H^{-2}(C^\bullet) \cong X$, $H^{-1}(C^\bullet) \cong Y$ und die restliche Kohomologie verschwindet.

b) Sei $C^\bullet$ ein Komplex mit $H^{-2}(C^\bullet) \cong X$, $H^{-1}(C^\bullet) \cong Y$ und restlicher Kohomologie Null. Zeige, dass $C^\bullet$ ein Kegel eines Morphismus $\eta : Y[0] \to X[2]$ ist.

c) Ziehe das Fazit: Komplexe mit Kohomologie wie in Teilaufgabe b) sind bis auf Isomorphie eindeutig durch H^{-2}, H^{-1} und *kohomologischen Kleber* gegeben.

Aufgabe 3. *Kein kohomologischer Kleber*

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit $\operatorname{Ext}^n(X, Y)$ für alle Objekte X und Y und alle $n \geq 2$. Zeige, dass jeder beschränkte Komplex $K^\bullet$ in $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ isomorph zu seinem Kohomologiekomplex $H^\bullet(K^\bullet)$ (mit Nulldifferentialen) ist.

Hinweis: Verwende ohne Beweis, dass ein ausgezeichnetes Dreieck der Form $A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to$, wobei der Morphismus $C^\bullet \to A^\bullet[1]$ Null ist, *zerfällt* und daher insbesondere $B^\bullet$ isomorph zu $A^\bullet \oplus C^\bullet$ ist. Das werden wir in angemessener Allgemeinheit später beweisen. *Tipp:* Führe einen Induktionsbeweis über die Amplitude von $K^\bullet$ (was kann das wohl sein?) und verwende die kanonische Filtrierung.

Aufgabe 4. *Homotopie und Zylinder*

Zeige: Homotopien $h : f \simeq g$ von Komplexmorphismen $f, g : K \to L$ stehen in kanonischer Eins-zu-Eins-Korrespondenz zu kommutativen Diagrammen der Form

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d] \arrow[dr, "g"] & \\ \mathrm{Cyl}(\mathrm{id}_K) \arrow[r] & L \\ K \arrow[u] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

wobei die beiden senkrechten Morphismen die kanonischen sind. Was bedeutet das anschaulich?