

Übungsblatt 26 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. Ein universelles Koeffiziententheorem

Sei M ein R -Modul. Sei P^\bullet ein in nichtpositiven Graden konzentrierter Komplex flacher R -Moduln.

- Konstruiere eine Spektralsequenz $E_2^{pq} = \operatorname{Tor}_{-p}^R(H^q(P^\bullet), M) \Rightarrow H^{p+q}(P^\bullet \otimes_R M)$.
- Sei R sogar ein Integritätsbereich. Extrahiere für $n \geq 0$ aus der Spektralsequenz eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow H^{-n}(P^\bullet) \otimes_R M \longrightarrow H^{-n}(P^\bullet \otimes_R M) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(H^{-n+1}(P^\bullet), M) \longrightarrow 0.$$

Tipp: Zeige, dass die Spektralsequenz im Bereich $p \in \{0, -1\}$, $q \leq 0$ konzentriert ist. Für solche Sequenzen hat die kanonische exakte Sequenz $0 \rightarrow F^0 E_\infty^{-n} \rightarrow F^{-1} E_\infty^{-n} \rightarrow F^{-1} E_\infty^{-n} / F^0 E_\infty^{-n} \rightarrow 0$ die Form $0 \rightarrow E_2^{0, -n} \rightarrow E_\infty^{-n} \rightarrow E_2^{-1, -n+1} \rightarrow 0$.

Aufgabe 2. Čech-Methoden für Einsteiger

- Berechne die Kohomologie von S^1 mit Werten in der konstanten Garbe $\underline{\mathbb{Z}}$.

Hinweis: Verwende eine Überdeckung durch drei offene Mengen.

- Sei $X = \mathbb{A}_k^2 \setminus \{0\}$ die punktierte Ebene. Berechne die Kohomologie von \mathcal{O}_X .

Hinweis: Obwohl X ein Schema ist, muss man kaum etwas von Schematheorie wissen, um die Kohomologie zu berechnen. Verwende die Überdeckung $X = D(x) \cup D(y)$; den Isomorphismus $D(x) \cong \operatorname{Spec} k[x, y, 1/x]$; und das nichttriviale Resultat, dass die höhere Kohomologie von quasikohärenten Modulgarben (wie \mathcal{O}_X) auf affinen Schemata verschwindet (die nullte Kohomologie von $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ ist A).

Aufgabe 3. Die Frölicher-Spektralsequenz

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Sei Ω_X^p die Garbe der holomorphen p -Formen auf X ; also ist Ω_X^0 die Garbe der holomorphen Funktionen auf X . Wegen des *holomorphen Poincaré-Lemmas* ist eine Auflösung der konstanten Garbe $\underline{\mathbb{C}}$ auf X durch

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega_X^0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^2 \longrightarrow \dots$$

gegeben. Konstruiere eine Spektralsequenz $E_1^{pq} = \mathbb{H}^{p+q}(X, \Omega_X^\bullet) \Rightarrow H^{p+q}(X, \underline{\mathbb{C}})$.

Tipp: Verwende die naive Filtrierung $F^p \Omega_X^\bullet = \Omega_X^{\geq p}$. *Hinweis:* Ist X eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit, so degeneriert die Spektralsequenz auf der ersten Seite (das ist nichttrivial) und weist die *Hodge-Zerlegung* $H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, \Omega_X^q)$ nach.

Aufgabe 4. Mayer-Vietoris für abgeschlossene Überdeckungen

Sei $X = A \cup B$ eine abgeschlossene Überdeckung eines topologischen Raums X . Sei \mathcal{E} eine Garbe abelscher Gruppen auf X . Leite eine Mayer-Vietoris-Sequenz her, die die Kohomologie von \mathcal{E} mit der Kohomologie der zurückgezogenen Garben $\mathcal{E}|_A$, $\mathcal{E}|_B$ und $\mathcal{E}|_{A \cap B}$ in Verbindung setzt.

Tipp: Aus der gegebenen Überdeckung kann man nicht (etwa durch Komplementbildung) eine offene erhalten und dann die gewöhnliche Mayer-Vietoris-Sequenz verwenden. Konstruiere stattdessen eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow i_* i^{-1} \mathcal{E} \oplus j_* j^{-1} \mathcal{E} \rightarrow k_* k^{-1} \mathcal{E} \rightarrow 0$, wobei i , j und k die Inklusionen von A , B und $A \cap B$ in X sind. Beachte $\mathcal{E}|_A := i^{-1} \mathcal{E}$.