

## Übungsblatt 18 zur Homologischen Algebra II

### Aufgabe 1. Informationsverlust beim Dualisieren

- a) Zeige:  $(\mathbb{Z}/(2))^\vee = 0$ . Folgere:  $(\mathbb{Z}/(2))^{\vee\vee} \not\cong \mathbb{Z}/(2)$ .  
Dabei ist  $M^\vee := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$  für  $\mathbb{Z}$ -Moduln  $M$ .
- b) Finde eine projektive Auflösung von  $\mathbb{Z}/(2)$  der Form  $0 \rightarrow ? \rightarrow ? \rightarrow 0$ .
- c) Dualisiere den Komplex aus b).
- d) Dualisiere den Komplex aus c).
- e) Zeige: Die Komplexe aus b) und d) sind zueinander isomorph.
- f) Was ist die Moral der Geschichte?

### Aufgabe 2. Die Kategorie der vollständigen metrischen Räume

Sei  $\operatorname{Met}$  die Kategorie der metrischen Räume und lipschitzstetigen Abbildungen. Sei  $\operatorname{Met}_{\operatorname{compl}}$  ihre volle Unterkategorie der vollständigen metrischen Räume. Für welche Klasse  $S$  von Morphismen gilt  $\operatorname{Met}_{\operatorname{compl}} \simeq \operatorname{Met}[S^{-1}]$ ?

### Aufgabe 3. Die $K$ -Theorie einer abelschen Kategorie

Die  $K$ -Theorie  $K(\mathcal{A})$  einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  wird als abelsche Gruppe von den Objekten aus  $\mathcal{A}$  und, für jede kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$  in  $\mathcal{A}$ , der Relation  $X = X' + X''$  erzeugt.

- a) Gelte  $X \cong Y$  in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$ . Zeige:  $X = Y \in K(\mathcal{A})$ .
- b) Zeige: Die  $K$ -Theorie der Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume ist isomorph zu  $\mathbb{Z}$ .
- c) Zeige: Die  $K$ -Theorie der Kategorie aller Vektorräume ist Null.
- d) Sei  $\operatorname{Kom}^b(\mathcal{A})$  die Kategorie der beschränkten Kettenkomplexe über einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$ . Zeige: Die auf Erzeugern gegebene Zuordnung

$$K(\operatorname{Kom}^b(\mathcal{A})) \longrightarrow K(\mathcal{A}), \quad K^\bullet \longmapsto \chi(K^\bullet) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n K^n$$

induziert einen wohldefinierten Isomorphismus.

*Tip:* Zeige  $\chi(K^\bullet) = \chi(H^\bullet(K^\bullet))$  und verwende die lange exakte Sequenz.

### Aufgabe 4. Serresche Quotientenkategorien als Lokalisierungen

Sei  $\mathcal{B}$  eine Serresche Unterkategorie einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$ . Sei  $S$  die Klasse aller diejenigen Morphismen in  $\mathcal{A}$ , deren Kerne und Kokerne in  $\mathcal{B}$  liegen. Zeige:  $\mathcal{A}/\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}[S^{-1}]$ .

### Aufgabe 5. Wohldefiniertheit der Arbeit mit Dächern

- a) Zeige, dass die Komposition von Dächern wohldefiniert ist.
- b) Wie addiert man zwei Dächer?