

Übungsblatt 12 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. *Limiten zyklischer Gruppen*

Sei \mathbb{N} mit der Teilbarkeitsordnung versehen. Zeige, dass der Kolimes $\operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/(n)$ die Faktorgruppe \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ist. Die Diagrammabbildungen $\mathbb{Z}/(n) \rightarrow \mathbb{Z}/(m)$ sind dabei durch (in \mathbb{Z} zu berechnende) Multiplikation mit m/n gegeben.

Aufgabe 2. *Existenzkriterium für endliche Limiten*

Sei \mathcal{C} eine Kategorie, in der es folgende spezielle endliche Limiten gibt: ein terminales Objekt, Produkte von je zwei Objekten und Differenzkerne (Equalizer) von je zwei parallelen Morphismen. Zeige, dass es in \mathcal{C} dann schon alle endlichen Limiten gibt.

Hinweis: Es ist nur noch die universelle Eigenschaft des im Beweis der Vorlesung konstruierten Objekts X nachzuweisen.

Aufgabe 3. *Freie Konstruktionen*

Sei \mathcal{C} eine Kategorie algebraischer Strukturen (etwa $\mathcal{C} = \text{Ring}$ oder $\mathcal{C} = \text{Mod}(R)$). Anschaulich stellt man sich das von den Elementen einer gewissen Menge M *frei erzeugte Objekt* $L(M)$ in \mathcal{C} wie folgt vor: Man beginnt mit den Elementen aus M und fügt all solche Ausdrücke hinzu, damit $L(M)$ zu einem Objekt von \mathcal{C} wird (etwa Summen und Produkte im Fall $\mathcal{C} = \text{Ring}$). Dabei nimmt man nur solche Identifikationen vor, die von den Axiomen gefordert werden (etwa dem Assoziativgesetz). Die Zuordnung $M \mapsto L(M)$ definiert dann einen Funktor $\text{Set} \rightarrow \mathcal{C}$, welcher *linksadjungiert zum Vergissfunktor* $V : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ ist.

- Erkläre, inwieweit die Adjunktionsbeziehung $L \dashv V$ obige anschauliche Vorstellung kodiert. (Diese Frage hat eine präzise Antwort.)
- Bestimme für die folgenden Vergissfunktoren Linksadjungierte.

- | | |
|---|---|
| 1. $\text{Mod}(R) \rightarrow \text{Set}$ | 7. $\text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$ |
| 2. $\text{Mon} \rightarrow \text{Set}$ | 8. $\text{Mod}(R) \rightarrow \text{Ab}$ |
| 3. $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ | 9. $\text{Alg}(R) \rightarrow \text{Mod}(R)$ |
| 4. $\text{Ring} \rightarrow \text{Set}$ | 10. $\text{Met}_{\text{complete}} \rightarrow \text{Met}$ |
| 5. $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$ | 11. $\text{Alg}(k) \rightarrow \text{LieAlg}(k)$ |
| 6. $\text{sSet} \rightarrow \text{Set}$ | 12. $\text{sSet} \rightarrow \text{semi-sSet}$ |

Dabei ist Mon die Kategorie der Monoide, $\text{Alg}(R)$ die Kategorie der R -Algebren, $\text{Met}_{\text{complete}}$ die Kategorie der vollständigen metrischen Räume und gleichmäßig stetigen Abbildungen und semi-sSet die Kategorie der Verklebedaten. Findest du zum Vergissfunktor $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$ auch einen *Rechtsadjungierten*?

Aufgabe 4. Globale Charakterisierung von Limes und Kolimes

Sei I eine Indexkategorie. Sei \mathcal{C} eine Kategorie, in der alle I -förmigen Limiten existieren. Der *Diagonalfunktor* $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow [I, \mathcal{C}]$ schickt ein Objekt X auf den konstanten Funktor bei X (dieser schickt jedes Objekt auf X und jeden Morphismus auf id_X). Dabei ist $[I, \mathcal{C}]$ die Kategorie der Funktoren $I \rightarrow \mathcal{C}$.

- Sei für jedes Diagramm $F \in [I, \mathcal{C}]$ ein Limes $\lim F \in \mathcal{C}$ gewählt. Definiere damit einen Funktor $\lim : [I, \mathcal{C}] \rightarrow \mathcal{C}$, der jedem Diagramm seinen Limes zuordnet. Wie wirkt er auf Morphismen? Wieso sind die Funktoraxiome erfüllt?
- Zeige: $\Delta \dashv \lim$.
- Formuliere und beweise mit wenig Aufwand die duale Behauptung über Kolimiten.

Aufgabe 5. Aufrundung und Abrundung

Wir betrachten die drei monotonen Abbildungen

$$\begin{aligned} \lceil _ \rceil : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Z}, & x &\longmapsto \text{Aufrundung von } x := (\text{kleinste ganze Zahl } \geq x) \\ i : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Q}, & z &\longmapsto z \\ \lfloor _ \rfloor : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Z}, & x &\longmapsto \text{Abrundung von } x := (\text{größte ganze Zahl } \leq x) \end{aligned}$$

und die induzierten Funktoren zwischen $B\mathbb{Q}$ und $B\mathbb{Z}$. Zeige: $B\lceil _ \rceil \dashv Bi \dashv B\lfloor _ \rfloor$.

Aufgabe 6. Allquantifikation, Rückzug und Existenzquantifikation

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Mengen induziert in kanonischer Art und Weise drei monotone Abbildungen zwischen den Potenzmengen. Zeige: $B\exists_f \dashv Bf^{-1} \dashv B\forall_f$.

$$\begin{aligned} \exists_f : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(Y), & U &\longmapsto \exists_f(U) := f[U] = \{y \in Y \mid \exists x \in X: y = f(x) \wedge x \in U\} \\ f^{-1} : \mathcal{P}(Y) &\longrightarrow \mathcal{P}(X), & V &\longmapsto f^{-1}[V] \\ \forall_f : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(Y), & W &\longmapsto \forall_f(W) := \{y \in Y \mid \forall x \in X: y = f(x) \Rightarrow x \in W\} \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Lineares Currying

Seien R und S Ringe (mit Eins). Sei M ein R - S -Bimodul. Zeige:

$$\left(\begin{array}{ccc} S\text{-Mod} & \longrightarrow & R\text{-Mod} \\ & V \longmapsto & M \otimes_S V \end{array} \right) \dashv \left(\begin{array}{ccc} R\text{-Mod} & \longrightarrow & S\text{-Mod} \\ & W \longmapsto & \text{Hom}_R(M, W) \end{array} \right)$$

Aufgabe 8. Die Dreiecksidentitäten von Adjunktionen

Sei $F \dashv G$ ein Paar adjungierter Funktoren. Zeige, dass zwischen der *Eins* $\eta : \text{Id} \rightarrow G \circ F$ und der *Koeins* $\varepsilon : F \circ G \rightarrow \text{Id}$ folgende Beziehungen bestehen:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{id}} & G \\ \eta_G(_) \searrow & & \nearrow G\varepsilon \\ & GFG & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\text{id}} & F \\ F\eta \searrow & & \nearrow \varepsilon_F(_) \\ & FGF & \end{array}$$

Aufgabe 9. Ein Beispiel für Cartier-Dualität

Sei k ein kommutativer Grundring und $A = k[X]/(X^n - 1)$. Anschaulich ist A die Algebra der Funktionen auf dem Unterschema der n -ten Einheitswurzeln in \mathbb{A}_k^1 (unabhängig davon, ob diese in k tatsächlich existieren oder nicht).

- Zeige, dass A mit der Komultiplikation $[X] \mapsto [X] \otimes [X]$ zu einer Bialgebra wird.
- Welche Bialgebra ist das Cartier-Duale $A^\vee = \text{Hom}_k(A, k)$?