Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

Übungsblatt 1 zur Homologischen Algebra I

– Motto –

Aufgabe 1. *Kosimpliziale Identitäten*

Die *Korandabbildung* $\partial^i_n : [n-1] \to [n]$ ist diejenige eindeutig bestimmte monotone Injektion, die nicht den Wert i annimmt. Die *Koentartungsabbildung* $\sigma^i_n : [n+1] \to [n]$ ist diejenige eindeutig bestimmte monotone Surjektion, für die der Wert i zwei verschiedene Urbilder besitzt. Beide Definitionen sind für $n \geq 0$ und $0 \leq i \leq n$ sinnvoll. Der untere Index wird in der Notation oftmals unterdrückt.

a) Zeige:

   Jede monotone Injektion $[n] \to [m]$ ist Verkettung von Korandabbildungen.
   Jede monotone Surjektion $[n] \to [m]$ ist Verkettung von Koentartungsabbildungen.
   Jede monotone Abbildung $[n] \to [m]$ ist Verkettung von Korand- und Koentartungsabbildungen.

b) Verifiziere die folgenden *kosimplizialen Identitäten*.

$$\begin{aligned}
\partial^j \partial^i &= \partial^i \partial^{j-1} && (i < j) \\
\sigma^j \sigma^i &= \sigma^i \sigma^{j+1} && (i \leq j) \\
\sigma^j \partial^i &= \partial^i \sigma^{j-1} && (i < j) \\
\sigma^j \partial^i &= \mathrm{id} && (i = j,\ i = j+1) \\
\sigma^j \partial^i &= \partial^{i-1} \sigma^j && (i > j+1)
\end{aligned}$$

   Welche anschauliche Bedeutung haben die Identitäten? Kann man sich Indexschlachten sparen?

c) Seien zwei formale Verkettungsausdrücke von Korand- und Koentartungsabbildungen gegeben. Gelte, dass beide dieselbe monotone Abbildung $[n] \to [m]$ beschreiben. Zeige: Allein unter Verwendung der kosimplizialen Identitäten kann man die beiden Ausdrücke ineineinander überführen.

   Tipp: Zeige, dass jede monotone Abbildung $f : [n] \to [m]$ auf *eindeutige* Art und Weise als Verkettung

$$f = \partial^{i_1} \cdots \partial^{i_s} \sigma^{j_t} \cdots \sigma^{j_1}$$

   geschrieben werden kann, wobei in der Notation von links nach rechts die oberen Indizes der Korandabbildungen streng monoton abnehmen und die der Koentartungsabbildungen streng monoton zunehmen.

Ähnlich wie Moduln können auch Kategorien *endlich präsentiert* sein. Diese Aufgabe zeigt, dass die simpliziale Buchhaltungskategorie Δ von den Korand- und Koentartungsabbildungen und nur den kosimplizialen Identitäten als Relationen erzeugt wird.

– Aufgabenvorschläge zusätzlich/statt den Skelettaufgaben –

- Kann man diejenige Abbildung, die ein Dreieck auf eine seiner Kanten projiziert, durch eine Abbildung semisimplizialer Mengen realisieren?
- Welche semisimpliziale Menge S hat die Eigenschaft, dass $X \times S \cong X$ für alle X?
- Fixiere deinen Lieblingsraum (zum Beispiel die S^1) und eine lokal endliche Überdeckung, sodass deren nichtleere endliche Durchschnitte zusammenziehbar sind. Zeichne die semisimpliziale Menge zu dem Nerv dieser Überdeckung. Was passiert, wenn die Überdeckung nicht diese gute Eigenschaft hat?