

## Übungsblatt 17 zur Homologischen Algebra II

### Aufgabe 1. *Halmweise Exaktheit*

Sei  $X$  ein topologischer Raum (keine Örtlichkeit!). Sei  $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$  eine Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf  $X$ . Zeige, dass sie genau dann exakt ist (im allgemeinen Sinn der Exaktheit in abelschen Kategorien), wenn für jeden Punkt  $x \in X$  die induzierte Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow 0$  von Halmen exakt ist.

### Aufgabe 2. *Kategorielle Charakterisierung von partieller Exaktheit*

Zeige, dass ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien genau dann linksexakt ist, wenn er endliche Limiten bewahrt.

### Aufgabe 3. *Beispiele für projektive Moduln*

- Zeige, dass  $\mathbb{Z}/(2)$  als  $\mathbb{Z}/(6)$ -Modul projektiv, aber nicht frei ist.
- Sei  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  und  $\mathfrak{m} = (3, 1 + \sqrt{-5})$  das bekannte Beispiel für ein maximales Ideal, das lokal ein Hauptideal, aber nicht selbst ein Hauptideal ist. Zeige, dass  $\mathfrak{m}$  als  $R$ -Modul projektiv, aber nicht frei ist.

*Tipp:* Projektivität von endlich präsentierten Moduln kann man lokal testen. Wäre  $\mathfrak{m}$  frei, so wäre  $\mathfrak{m}$  frei vom Rang 1 (wieso?). Damit wäre  $\mathfrak{m}$  ein Hauptideal (wieso?).

Die wichtigste Bezugsquelle für nicht-freie projektive Moduln sind nichttriviale Vektorbündel, das besagt der Satz von Serre-Swan. Eine gut lesbare Darstellung gibt es in Abschnitt 6 von Pete Clarks Notizen zu kommutativer Algebra, <http://www.math.uga.edu/~pete/integral.pdf#page=112>. In der algebraischen Geometrie lernt man, dass auch die Beispiele dieser Aufgabe von dieser Form sind.

### Aufgabe 4. *Die Kategorie der Garben als Lokalisierung*

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Sei  $S$  die Klasse all derjenigen Morphismen von Prägarben auf  $X$ , die halmweise Bijektionen sind. Zeige, dass die Kategorie der Garben auf  $X$  die Lokalisierung der Kategorie der Prägarben nach  $S$  ist:  $\text{Sh}(X) \simeq \text{PSh}(X)[S^{-1}]$ . Wie sehen unter dieser Äquivalenz der Vergissfunktoren und der Garbifizierungsfunktoren aus?

Ist  $S$  eine Klasse von Morphismen in einer Kategorie  $\mathcal{C}$ , so sind die Objekte von  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  per Definition dieselben wie die von  $\mathcal{C}$ . Morphismen  $X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  sind aber formale Verknüpfungen von Morphismen in  $\mathcal{C}$  und formalen Inversen von Morphismen aus  $S$ . Zum Beispiel kann ein Morphismus  $X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  von der Form  $X \rightarrow Z \dashrightarrow Z' \rightarrow Z'' \dashrightarrow Z''' \rightarrow Y$  sein – dabei sind die durchgezogenen Pfeile Morphismen aus  $\mathcal{C}$  und die gestrichelten Pfeile formale Inverse von Morphismen  $Z' \rightarrow Z$ ,  $Z''' \rightarrow Z''$  aus  $S$ . Auf diese Art und Weise erreicht man, dass der kanonische Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$  die Morphismen aus  $S$  auf Isomorphismen schickt und sogar unter all solchen Funktoren in einem 2-kategoriellen Sinn initial ist. Formale Inverse sind keine Erfindung der Kategorientheorie. In der Form des Übergangs von  $\mathbb{Z}$  zu  $\mathbb{Q}$  sind sie allgemein bekannt.

### Aufgabe 5. *Ein Beispiel für den Pushforward von Garben*

Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  die Abbildung  $z \mapsto z^2$  des Einheitskreises in sich. Sei  $\underline{\mathbb{Z}}$  die konstante Garbe mit Halmen  $\mathbb{Z}$  auf  $S^1$ . Was sind die Halme von  $f_*\underline{\mathbb{Z}}$ ? Ist  $f_*\underline{\mathbb{Z}}$  isomorph zu  $\underline{\mathbb{Z}^2}$ ?