Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 26 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Ein universelles Koeffiziententheorem*

Sei M ein R-Modul. Sei $P^\bullet$ ein in nichtpositiven Graden konzentrierter Komplex flacher R-Moduln.

a) Konstruiere eine Spektralsequenz $E_2^{pq} = \operatorname{Tor}_{-p}^R(H^q(P^\bullet), M) \Rightarrow H^{p+q}(P^\bullet \otimes_R M)$.

b) Sei R sogar ein Integritätsbereich. Extrahiere für $n \geq 0$ aus der Spektralsequenz eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow H^{-n}(P^\bullet) \otimes_R M \longrightarrow H^{-n}(P^\bullet \otimes_R M) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(H^{-n+1}(P^\bullet), M) \longrightarrow 0.$$

Tipp: Zeige, dass die Spektralsequenz im Bereich $p \in \{0, -1\}$, $q \leq 0$ konzentriert ist. Für solche Sequenzen hat die kanonische exakte Sequenz $0 \to F^0 E_\infty^{-n} \to F^{-1} E_\infty^{-n} \to F^{-1} E_\infty^{-n} / F^0 E_\infty^{-n} \to 0$ die Form $0 \to E_2^{0,-n} \to E_\infty^{-n} \to E_2^{-1,-n+1} \to 0$.

Aufgabe 2. *Čech-Methoden für Einsteiger*

a) Berechne die Kohomologie von S^1 mit Werten in der konstanten Garbe $\underline{\mathbb{Z}}$.

Hinweis: Verwende eine Überdeckung durch drei offene Mengen.

b) Sei $X = \mathbb{A}_k^2 \setminus \{0\}$ die punktierte Ebene. Berechne die Kohomologie von $\mathcal{O}_X$.

Hinweis: Obwohl X ein Schema ist, muss man kaum etwas von Schematheorie wissen, um die Kohomologie zu berechnen. Verwende die Überdeckung $X = D(x) \cup D(y)$; den Isomorphismus $D(x) \cong \operatorname{Spec} k[x, y, 1/x]$; und das nichttriviale Resultat, dass die höhere Kohomologie von quasikohärenten Modulgarben (wie $\mathcal{O}_X$) auf affinen Schemata verschwindet (die nullte Kohomologie von $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ ist A).

Aufgabe 3. *Die Frölicher-Spektralsequenz*

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Sei Ω_X^p die Garbe der holomorphen p-Formen auf X; also ist Ω_X^0 die Garbe der holomorphen Funktionen auf X. Wegen des *holomorphen Poincaré-Lemmas* ist eine Auflösung der konstanten Garbe $\underline{\mathbb{C}}$ auf X durch

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega_X^0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^2 \longrightarrow \cdots$$

gegeben. Konstruiere eine Spektralsequenz $E_1^{pq} = \mathbb{H}^{p+q}(X, \Omega_X^\bullet) \Rightarrow H^{p+q}(X, \underline{\mathbb{C}})$.

Tipp: Verwende die naive Filtrierung $F^p \Omega_X^\bullet = \Omega_X^{\geq p}$. *Hinweis:* Ist X eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit, so degeneriert die Spektralsequenz auf der ersten Seite (das ist nichttrivial) und weist die *Hodge-Zerlegung* $H^n(X, C) = \oplus_{p+q=n} H^p(X, \Omega_X^q)$ nach.

Aufgabe 4. *Mayer–Vietoris für abgeschlossene Überdeckungen*

Sei $X = A \cup B$ eine abgeschlossene Überdeckung eines topologischen Raums X. Sei $\mathcal{E}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Leite eine Mayer–Vietoris-Sequenz her, die die Kohomologie von $\mathcal{E}$ mit der Kohomologie der zurückgezogenen Garben $\mathcal{E}|_A$, $\mathcal{E}|_B$ und $\mathcal{E}|_{A \cap B}$ in Verbindung setzt.

Tipp: Aus der gegebenen Überdeckung kann man nicht (etwa durch Komplementbildung) eine offene erhalten und dann die gewöhnliche Mayer–Vietoris-Sequenz verwenden. Konstruiere stattdessen eine kurze exakte Sequenz $0 \to \mathcal{E} \to i_* i^{-1} \mathcal{E} \oplus j_* j^{-1} \mathcal{E} \to k_* k^{-1} \mathcal{E} \to 0$, wobei i, j und k die Inklusionen von A, B und $A \cap B$ in X sind. Beachte $\mathcal{E}|_A := i^{-1} \mathcal{E}$ und $H^\bullet(A, \mathcal{F}) \cong H^\bullet(X, i_* \mathcal{F})$.