

Übungsblatt 4 zur Homologischen Algebra I

– Motto –

Aufgabe 1. Äquivalenzrelationen I

Sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$ eine Relation auf X (also lediglich eine Teilmenge, nicht unbedingt eine Äquivalenzrelation). Sei (\sim_R) der Schnitt über alle Äquivalenzrelationen auf X , welche R umfassen.

- a) Zeige: Der Schnitt (\sim_R) ist wieder eine Äquivalenzrelation auf X – und zwar die feinste, die R umfasst. (Was bedeutet das? Für jede weitere Äquivalenzrelation ...)
- b) Zeige, dass diese auch explizit wie folgt beschrieben werden kann:

$$x \sim_R y \iff \exists n \geq 0: \exists x_0, x_1, \dots, x_n \in X: \\ x_0 = x \wedge x_n = y \wedge \forall i \in \{0, \dots, n-1\}: x_i R x_{i+1} \vee x_{i+1} R x_i.$$

- c) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Gelte $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x R y$. Zeige: Die Setzung $\bar{f} : X/\sim_R \rightarrow Y$, $[x] \mapsto f(x)$ ist wohldefiniert.

Hinweis: Spannender ist es, wenn man diese Teilaufgabe direkt mit a) und ohne Verwendung von b) löst.

- d) Finde Beispiele aus möglichst vielen verschiedenen Teilgebieten der Mathematik, wo man auch geeignete große Schnitte zur Konstruktion von Mengen mit gewissen guten Eigenschaften verwendet.

In *prädikativer Mathematik* gestattet man sich nicht, das *Potenzmengenaxiom* zu verwenden, demnach jede Menge eine Potenzmenge besitzt (statt nur einer Potenzklasse). Als Konsequenz kann man feinste Äquivalenzrelationen nicht mehr als geeigneten Schnitt konstruieren, sondern nur noch über die explizite Variante aus Teilaufgabe b). Man sagt auch, prädikative Mathematik sei konkret – aber nicht notwendigerweise elegant. Prädikative Mathematik kann man sowohl klassisch als auch intuitionistisch betreiben.

Aufgabe 2. Äquivalenzrelationen II

Seien Z eine Menge und R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen auf Z . Sei R die feinste Äquivalenzrelation auf Z , welche $R_1 \cup R_2$ umfasst. Sei ferner \sim folgende Relation auf Z/R_1 :

$$K \sim L \iff \exists x \in K, y \in L: x R_2 y \quad \text{für alle } K, L \in Z/R_1.$$

- a) Wieso ist \sim im Allgemeinen keine Äquivalenzrelation? (Bemühe dich nicht, ein konkretes Gegenbeispiel aufzustellen.)
- b) Sei \approx die feinste Äquivalenzrelation auf Z/R_1 , welche \sim umfasst. Gib eine kanonische Abbildung $Z/R \rightarrow (Z/R_1)/\approx$ an und zeige, dass sie eine wohldefinierte Bijektion ist.
- c) Sei Z sogar ein topologischer Raum. Zeige dann, dass die Bijektion aus Teilaufgabe b) sogar ein Homöomorphismus ist. Die diversen Faktormengen sollen dabei die Quotiententopologie tragen.

Aufgabe 3. Triangulationen von Prismen

Bestimme alle nichtdegenerierten Simplex der simplizialen Mengen $D[1, 2]$, $D[1, n]$ und $D[2, 2]$.

Aufgabe 4. Homotopien simplizialer Abbildungen

Bezeichne allgemein $X \times Y$ das kartesische Produkt simplizialer Mengen X und Y ; es gilt also $(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$ für alle $n \geq 0$.

- a) Zeige, dass simpliziale Abbildungen $I \rightarrow X \times Y$ in kanonischer 1:1-Korrespondenz zu Paaren von simplizialen Abbildungen $I \rightarrow X$, $I \rightarrow Y$ stehen.
- b) Definiere zwei sinnvolle simpliziale Abbildungen $p_0, p_1 : X \rightarrow \Delta[1] \times X$ – in Analogie zu den stetigen Abbildungen $x \mapsto (0, x)$ bzw. $x \mapsto (1, x)$, die zwischen einem topologischen Raum und seinem Produkt mit dem Einheitsintervall verlaufen.

Simpliziale Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ heißen genau dann *einfach homotop*, wenn es eine simpliziale Abbildung $h : \Delta[1] \times X \rightarrow Y$ gibt sodass $f = h \circ p_0$ und $g = h \circ p_1$. Das definiert keine Äquivalenzrelation auf der Menge der simplizialen Abbildungen von X nach Y ; die feinste solche Äquivalenzrelation, die einfach homotope Abbildungen identifiziert, heißt *Homotopie*.

- c) Sei für $0 \leq i \leq n$ die Abbildung $\text{pr}_i : \Delta[n] \rightarrow \Delta[n]$ diejenige, die “alles auf die i -te Ecke projiziert”. Konkret gelte also $(\text{pr}_i)_n(f) = u_k$ für alle $n, k \geq 0$ und $f : [k] \rightarrow [n]$. Dabei bezeichne u_k die konstante Abbildung $[k] \rightarrow [n]$ mit Wert i .

Zeige, dass die Abbildung pr_n zur Identitätsabbildung homotop ist.

- d) Zeige: Sind f und g homotop, so auch $q \circ f \circ p$ und $q \circ g \circ p$.

$$X' \xrightarrow{p} X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y \xrightarrow{q} Y'$$

- e) *Schwierige und schwammige Bonusaufgabe zum Grübeln.* Inwieweit impliziert schwache Homotopie von simplizialen Abbildungen die gewöhnliche topologische Homotopie der zugehörigen geometrischen Realisierungen? Wie sehen gegebenenfalls solche Homotopien aus?

– Es folgt noch eine weitere Aufgabe. –