Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 27 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Kohomologie von $\mathbb{R}^1$ mit kompaktem Träger*

a) Zeige, dass $0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \mathcal{C}^1 \to \mathcal{C} \to 0$ eine exakte Sequenz von Garben auf $\mathbb{R}^1$ ist. Dabei schickt der Morphismus $\mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf ihre Ableitung.

b) Wieso sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^1$ weiche Garben?

c) Berechne $H_c^\bullet(\mathbb{R}^1, \mathbb{R})$.

Aufgabe 2. *Dimensionstheorie über Kohomologie mit kompaktem Träger*

Die *Dimension* eines topologischen Raums X ist die kleinste Zahl $n \geq 0$, sodass $H_c^{>n}(X, \mathcal{E})$ für alle Garben $\mathcal{E}$ abelscher Gruppen auf X verschwindet. Sei im Folgenden X ein lokal kompakter Hausdorffraum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

a) Sei $Y \subseteq X$ eine offene oder abgeschlossene Teilmenge. Zeige $\dim_c Y \leq \dim_c X$.

   Tipp: Ist $i : Y \hookrightarrow X$ die Inklusion, so gilt $H_c^\bullet(Y, \mathcal{E}) \cong H_c^\bullet(X, i_! \mathcal{E})$.

b) Sei $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{L}^0 \to \cdots \to \mathcal{L}^{n-1} \to \mathcal{L}^n \to 0$ eine exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf X. Seien $\mathcal{L}^0, \ldots, \mathcal{L}^{n-1}$ weich. Sei $\dim_c X \leq n$. Zeige, dass dann auch $\mathcal{L}^n$ weich ist.

   Tipp: Eine Garbe $\mathcal{F}$ ist genau dann weich, wenn $H_c^1(U, \mathcal{F}) = 0$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$. Zerlege die Sequenz in viele kurze, um $H_c^1(U, \mathcal{L}^n) \cong H_c^{n+1}(U, \mathcal{E})$ nachzuweisen.

c) Sei X durch offene Mengen U mit $\dim_c U \leq n$ überdeckt. Zeige $\dim_c X \leq n$.

   Tipp: Eine Garbe ist genau dann weich, wenn sie lokal weich ist.

d) Sei $f : X \to Y$ eine eigentliche stetige Abbildung. Sei $\dim_c X \leq n$. Zeige $R^{>n} f_!(\mathcal{E}) = 0$ für alle Garben $\mathcal{E}$ abelscher Gruppen auf X.

e) Zeige, dass in der Situation aus d) $Rf_!$ als Funktor $D^b \to D^b$ und auch als Funktor $D^- \to D^-$ wohldefiniert ist.

Aufgabe 3. *Halme des direkten Bilds mit kompaktem Träger*

Vollziehe den Beweis von Proposition III.8.10 über die Halme des direkten Bilds mit kompaktem Träger genau nach. Verwende das Buch *Cohomology of Sheaves* von Birger Iversen, wenn du nicht weiterkommst.

Aufgabe 4. *Abgeleitetes Zurückziehen und Vordrücken*

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus lokal geringter Räume. Zeige, dass Lf^* linksadjungiert zu Rf_* ist.

– *Für eine ungarbige Aufgabe bitte wenden.* –

Aufgabe 5. *Rechnen modulo Torsion*

Sei $\mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}$ die abelsche Kategorie der endlich präsentierten abelschen Gruppen und $\mathcal{T}$ ihre volle Unterkategorie der Torsionsgruppen.

a) Mache dir klar, dass $\mathcal{T}$ eine Serresche Unterkategorie von $\mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}$ ist.

b) Konstruiere einen Funktor $\overline{F} : \mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}/\mathcal{T} \to \mathrm{Vect}(\mathbb{Q})_{\mathsf{findim}}$ mit $A \mapsto A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

   Tipp: Verwende die universelle Eigenschaft von $\mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}/\mathcal{T}$ (siehe Blatt 16, Aufgabe 4) und die Flachheit von $\mathbb{Q}$ über $\mathbb{Z}$.

c) Zeige, dass $\overline{F}$ treu ist.

   Tipp: Zeige, dass aus $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ folgt, dass A eine Torsionsgruppe ist. Verwende dann Tag 06XK aus dem Stacks Project.

d) Zeige, dass in $\mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}/\mathcal{T}$ der Morphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$ für $n \geq 1$ invertierbar ist. Folgere, dass $\overline{F}$ voll und daher eine Kategorienäquivalenz ist.

e) Sei eine konvergente Spektralsequenz in $\mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}$ gegeben. Was ist zu tun, wenn man vorgeben möchte, dass alle kurzen exakten Sequenzen in $\mathrm{Ab}_{\mathrm{fp}}$ zerfallen? Wie schwächt man seine Resultate dadurch ab?