

Übungsblatt 16 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Universelle Eigenschaft der Garbifizierung*

Seien \mathcal{F} und \mathcal{G} Prägarben auf einem topologischen Raum X (oder einer Örtlichkeit). Sei $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben. Sei \mathcal{G} sogar eine Garbe. Sei $\mathcal{F} \xrightarrow{\iota} s(\mathcal{F})$ die Garbifizierung von \mathcal{F} . Konstruiere einen Garbenmorphismus $\bar{\alpha} : s(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{G}$ mit $\bar{\alpha} \circ \iota = \alpha$ und weise insbesondere seine Wohldefiniertheit nach.

Aufgabe 2. *Halme des Pushforwards*

- a) Sei X ein topologischer Raum. Sei $f : Y \hookrightarrow X$ die Inklusion eines abgeschlossenen Teilraums. Sei \mathcal{E} eine Garbe auf Y . Zeige:

$$(f_*\mathcal{E})_x \cong \begin{cases} \mathcal{E}_x, & \text{falls } x \in Y, \\ \{0\}, & \text{falls } x \notin Y. \end{cases}$$

- b) Mache dir anhand eines Beispiels klar, dass die analoge Aussage für Inklusionen offener Teilräume im Allgemeinen nicht gilt.
- c) Folgere, dass der Pushforward-Funktor $f_* : \text{AbShv}(Y) \rightarrow \text{AbShv}(X)$ in der Situation von Teilaufgabe a) exakt ist.
- d) Sei $f : Y \rightarrow X$ eine abgeschlossene stetige Abbildung. Sei \mathcal{E} eine Garbe auf Y . Sei $x \in X$. Zeige: $(f_*\mathcal{E})_x \cong \Gamma(f^{-1}[x], \mathcal{E})$.

Hinweis: Beachte, dass die Faser $f^{-1}[x]$ im Allgemeinen nicht offen sein wird. Die rechte Seite ist daher als Kolimes über die $\mathcal{E}(U)$, wobei $U \subseteq Y$ alle offenen Mengen mit $f^{-1}[x] \subseteq U$ durchläuft, definiert.

Tipp: Eine stetige Abbildung $f : Y \rightarrow X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle $x \in X$ und alle offenen Umgebungen U von $f^{-1}[x]$ in Y eine offene Umgebung V von x mit $f^{-1}[V] \subseteq U$ existiert. (Siehe zum Beispiel Torsten Wedhorn, *Manifolds, sheaves, and cohomology*, Seite 86.)

Aufgabe 3. *Beispiele für flache Moduln*

- a) Zeige: Jeder freie Modul ist flach.
- b) Zeige: Direkte Summanden freier Moduln sind flach.
- c) Zeige: Filtrierte Kolimiten flacher Moduln (also Moduln der Form $\text{colim}_{i \in I} M_i$, wobei I eine filtrierte Kategorie ist) sind flach.

Erinnerung: Eine Kategorie heißt genau dann *filtriert*, wenn in ihr jedes endliche Diagramm einen Kokegel besitzt (welcher nicht unbedingt eine universelle Eigenschaft erfüllen muss). Wenn du magst, kannst du der Einfachheit halber gerne annehmen, dass I die von einer gerichteten Menge induzierte Kategorie ist.

Hinweis: In der Übung werden wir diskutieren, wie man sich Flachheit von Moduln geometrisch vorstellen kann.

Aufgabe 4. Serresche Quotientenkategorien

Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Sei \mathcal{B} eine *Serresche Unterkategorie* von \mathcal{A} , das ist eine volle Unterkategorie, welche das Nullobjekt von \mathcal{A} enthält und für die für jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ in \mathcal{A} folgendes gilt: X liegt genau dann in \mathcal{B} , wenn X' und X'' in \mathcal{B} liegen.

- Zeige: Ist X ein Objekt von \mathcal{B} , so liegt auch jedes in \mathcal{A} zu X isomorphe Objekt in \mathcal{B} .
- Mache dir kurz klar: Die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume ist eine Serresche Unterkategorie der Kategorie aller Vektorräume.
- Die *Serresche Quotientenkategorie* \mathcal{A}/\mathcal{B} hat als Objekte dieselben wie \mathcal{A} . Die Morphismen definiert man über den (gerichteten) Kolimes

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}(X, Y) := \mathrm{colim}_{X', Y'} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', Y/Y'),$$

wobei X' über alle Unterobjekte von X mit $X/X' \in \mathcal{B}$ und Y' über alle Unterobjekte von Y mit $Y' \in \mathcal{B}$ läuft. Wie ist die Morphismenverkettung in \mathcal{A}/\mathcal{B} zu definieren? Wieso ist der Kolimes gerichtet? Wie wird \mathcal{A}/\mathcal{B} zu einer abelschen Kategorie? Welchen Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B}$ kann man kanonisch angeben? Wieso ist dieser exakt? Wieso gilt genau dann $F(X) = 0$, wenn $X \in \mathcal{B}$? Wieso ist $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B}$ unter allen exakten Funktoren $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ mit $G(X) = 0$ für $X \in \mathcal{B}$ initial? Kläre so viele dieser Fragen, wie du möchtest.

Bemerkung: Serresche Quotientenkategorien sind zur algorithmischen Implementierung von Kategorien kohärenter Modulgarben auf gewissen Schemata nützlich (siehe Artikel von Mohamed Barakat und anderen).

Aufgabe 5. Der Satz von Jordan–Hölder

Ein Objekt X einer abelschen Kategorie heißt genau dann *einfach*, wenn es *genau zwei* Unterobjekte besitzt. (Ein *Unterobjekt* ist ein Monomorphismus $U \xrightarrow{i} X$. Unterobjekte $U \xrightarrow{i} X$, $U' \xrightarrow{i'} X$ werden genau dann als gleich angesehen, wenn es einen Isomorphismus $q : U \rightarrow U'$ mit $i' \circ q = i$ gibt.) Das Nullobjekt zählt also nicht als einfach.

Eine *Jordan–Hölder-Reihe* für ein Objekt X ist eine Filtrierung $0 = X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X_{n-1} \hookrightarrow X_n = X$, sodass die Quotienten X_i/X_{i-1} jeweils einfache Objekte sind.

- Zeige: Je zwei Jordan–Hölder-Reihen eines Objekts X haben dieselbe Länge und bis auf Isomorphie treten dieselben Quotienten auf.

Tipp: Lasse dich vom klassischen Beweis des Satzes über Schreier–Zassenhaus, zum Beispiel für Gruppen oder Moduln, inspirieren.

- Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K . Der Vektorraum K^n wird durch die Setzung $f(X) \cdot v := f(A)v$ für $f \in K[X]$ und $v \in K^n$ zu einem $K[X]$ -Modul. Hängen die Jordanform von A und Jordan–Hölder-Reihen von K^n als $K[X]$ -Modul miteinander zusammen?