Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 22 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Von einem Erzeuger aufgespannte Unterkategorie*

Sei X ein Objekt einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Sei $\langle X \rangle \subseteq \mathcal{A}$ die volle Unterkategorie aller direkten Summen direkter Summanden von X. Diese Unterkategorie wird additiv.

a) Sei $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, X) = 0$ für alle $i > 0$. Zeige, dass der kanonische Funktor $K^b(\langle X \rangle) \to D^b(\mathcal{A})$ volltreu ist.

b) Gelte außerdem, dass jedes Objekt aus $\mathcal{A}$ eine endliche Auflösung durch Objekte aus $\langle X \rangle$ besitzt. Zeige, dass der Funktor aus a) dann sogar eine Äquivalenz ist.

Aufgabe 2. *Auflösungen unbeschränkter Komplexe*

Eine *projektive Linksauflösung* eines Komplexes $K^\bullet$ ist ein Komplex $P^\bullet$ aus Projektiven zusammen mit einem Quasiisomorphismus $P^\bullet \to K^\bullet$. Zeige, dass unbeschränkte Komplexe auch bis auf Homotopieäquivalenz nicht unbedingt eindeutige projektive (ihrerseits unbeschränkte) Linksauflösungen besitzen müssen.

Tipp: Zeige, dass der Komplex $P^\bullet : \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/(4) \xrightarrow{2} \cdots$ von $\mathbb{Z}/(4)$-Moduln eine projektive Linksauflösung des Nullkomplexes ist, aber nicht homotopieäquivalent zum Nullkomplex ist.

Aufgabe 3. *Kategorielle Charakterisierung von Endlichkeitseigenschaften*

a) Zeige, dass ein A-Modul M genau dann endlich erzeugt ist, wenn der Funktor $\operatorname{Hom}(M, \_) : \operatorname{Mod}(A) \to \operatorname{Set}$ mit filtrierten Kolimiten von Monomorphismen vertauscht, wenn also für jedes filtrierte Diagramm $(V_i)_i$, in der die Übergangsabbildungen $V_i \to V_j$ alle injektiv sind, folgende kanonische Abbildung bijektiv ist.
$$\operatorname{colim}_i \operatorname{Hom}(M, V_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, \operatorname{colim}_i V_i)$$

b) Zeige, dass ein A-Modul M genau dann endlich präsentiert ist, wenn der Funktor $\operatorname{Hom}(M, \_)$ mit beliebigen filtrierten Kolimiten vertauscht.

Aufgabe 4. *Interpretation der zweiten Ext-Gruppen*

a) Seien Objekte $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ in einer abelschen Kategorie gegeben. Dann gibt es die kanonische exakte Sequenz
$$\gamma : 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z/X \longrightarrow Z/Y \longrightarrow 0.$$
Zeige, dass $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \in \operatorname{Ext}^2(Z/Y, X)$, wobei $\gamma_1 \in \operatorname{Ext}^1(Y/X, X)$ und $\gamma_2 \in \operatorname{Ext}^1(Z/Y, Y/X)$ zu folgenden kurzen exakten Sequenzen gehören.
$$\gamma_1 : 0 \to X \to Y \to Y/X \to 0 \qquad \gamma_2 : 0 \to Y/X \to Z/X \to Z/Y \to 0$$

b) Zeige weiter, dass $\gamma = 0 \in \operatorname{Ext}^2(Z/Y, X)$.

c) Zeige die Umkehrung: Gilt für Elemente $\gamma_1 \in \operatorname{Ext}^1(B, C)$ und $\gamma_2 \in \operatorname{Ext}^1(A, B)$ dass $\gamma_1 \gamma_2 = 0 \in \operatorname{Ext}^2(A, C)$, so gibt es ein Objekt Z und Unterobjekte $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$, sodass $A \cong Z/Y$, $B \cong Y/X$, $C \cong X$ und sodass unter diesen Isomorphismen γ_1 und γ_2 von der Form wie in a) sind.

Aufgabe 5. *Geometrische Interpretation eines Beweises*

Im Beweis der Vorlesung, dass Quasiisomorphismen, deren Quelle ein nach links beschränkter Komplex aus Injektiven ist, bis auf Homotopie ein Linksinverses besitzen (Gelfand–Manin, Seite 180f.). Gib einen alternativen Beweis dieser Behauptung, in dem du nicht händisch Homotopien konstruierst, sondern die Charakterisierung von Homotopien aus Blatt 20, Aufgabe 4 verwendest.