

## Übungsblatt 24 zur Homologischen Algebra II

– Festblatt zum 68-jährigen Bestehen von Spektralsequenzen –

### Aufgabe 1. Spektralsequenzen als Verallgemeinerungen langer exakter Sequenzen

Sei eine Spektralsequenz  $E_1^{pq} \Rightarrow E_\infty^n$  gegeben (ausführlich:  $E_1^{pq} \Rightarrow F^p E_\infty^{p+q} / F^{p+1} E_\infty^{p+q}$ ), deren erste Seite in den Spalten  $p = 0$  und  $p = 1$  konzentriert ist. Seien die Filtrierungen  $F^\bullet E_\infty^n$  separiert und erschöpfend (exhaustive).

- Zeige, dass die Spektralsequenz auf Seite 2 degeneriert.
- Zeige:  $F^2 E_\infty^n = F^3 E_\infty^n = \dots = 0$  und  $F^0 E_\infty^n = F^{-1} E_\infty^n = \dots = E_\infty^n$ .
- Drücke die äußeren Objekte in der folgenden Sequenz über die zweite Seite aus.

$$0 \longrightarrow F^1 E_\infty^n \longrightarrow E_\infty^n \longrightarrow E_\infty^n / F^1 E_\infty^n \longrightarrow 0$$

- Konstruiere eine lange exakte Sequenz der Form

$$\dots \longrightarrow E_1^{1,n-1} \longrightarrow E_\infty^n \longrightarrow E_1^{0n} \xrightarrow{\partial} E_1^{1n} \longrightarrow \dots$$

### Aufgabe 2. Mayer–Vietoris als Spezialfall einer Spektralsequenz

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Komposition der Funktoren

$$\text{AbSh}(X) \xrightarrow{\text{vergessen}} \text{AbPSh}(X) \xrightarrow{\check{H}^0} \text{Ab}$$

ist der globale-Schnitte-Funktor  $\Gamma : \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Ab}$ . Sei  $X = A \cup B$  eine Überdeckung durch zwei offene Mengen. Leite aus der Grothendieck-Spektralsequenz zu dieser Funktorkomposition die Mayer–Vietoris-Sequenz für Garbenkohomologie her:

$$\dots \longrightarrow H^n(X; \mathcal{E}) \longrightarrow H^n(A; \mathcal{E}) \oplus H^n(B; \mathcal{E}) \longrightarrow H^n(A \cap B; \mathcal{E}) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(X; \mathcal{E}) \longrightarrow \dots$$

*Hinweis:* Für eine beliebige offene Überdeckung  $X = \bigcup_i U_i$  ist  $\check{H}^0(\mathcal{E}) := \{(s_i)_i \mid s_i \in \mathcal{E}(U_i), s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}\}$ . Verwende ohne Beweis, dass  $R^n \check{H}^0(\mathcal{E})$  die  $n$ -te Čech-Kohomologie  $\check{H}^n(\mathcal{E})$  von  $X$  mit Werten in  $\mathcal{E}$  bezüglich der Überdeckung  $(U_i)_i$  ist. Vereinfache die Definitionen für den Fall, dass die Überdeckung aus nur zwei offenen Mengen besteht (zur Kontrolle:  $\check{H}^0(\mathcal{E})$  und  $\check{H}^1(\mathcal{E})$  sind Kern bzw. Kokern von  $\mathcal{E}(A) \oplus \mathcal{E}(B) \rightarrow \mathcal{E}(A \cap B)$  und die höheren Gruppen verschwinden). Verwende ohne Beweis, dass die  $n$ -te Rechtsableitung des Vergissfunktors bei  $\mathcal{E}$  die Prägarbe  $(U \mapsto H^n(U; \mathcal{E}))$  ist. Verwende Aufgabe 1.

### Aufgabe 3. Euler-Charakteristik des Grenzwerts

Sei  $E_r^{pq} \Rightarrow E_\infty^n$  eine konvergente Spektralsequenz, deren  $r$ -te Seite in einem endlichen Bereich konzentriert ist. Seien die Filtrierungen  $F^\bullet E_\infty^n$  separiert und erschöpfend. Zeige, dass die Euler-Charakteristik des Bikomplexes  $E_r^{\bullet\bullet}$  mit der des Komplexes  $E_\infty^\bullet$  übereinstimmt, dass also in der K-Theorie folgende Identität gilt.

$$\sum_{p,q} (-1)^{p+q} [E_r^{pq}] = \sum_n (-1)^n [E_\infty^n]$$

*Tipp:* Ist  $K^\bullet$  ein Komplex, so gilt  $\sum_n (-1)^n [K^n] = \sum_n (-1)^n [H^n(K^\bullet)]$  (siehe Aufgabe 3 von Blatt 18). Außerdem gilt  $[E_\infty^n] = \sum_p [F^p E_\infty^n / F^{p+1} E_\infty^n]$ , wieso?

– Weitere Detektivarbeit auf der nächsten Seite. –

#### Aufgabe 4. Die Leray-Spektralsequenz, rückwärts

Sei  $\pi : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$  die Projektion auf einen der beiden Faktoren. Bestimme mit der Leray-Spektralsequenz  $R^n \pi_* \mathbb{R}$  für alle  $n \geq 0$ .

*Hinweis:* Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine beliebige stetige Abbildung. Dann verbindet die Leray-Spektralsequenz die Kohomologie von  $X$ , die von  $Y$  und die der Fasern von  $f$  miteinander. Genauer gibt es für jede Garbe  $\mathcal{E}$  abelscher Gruppen auf  $X$  eine Spektralsequenz mit

$$E_2^{p,q} = H^p(Y; R^q f_* \mathcal{E}) \implies H^{p+q}(X; \mathcal{E}).$$

Auch, wenn  $\mathcal{E}$  eine konstante Garbe ist, sind die höheren direkten Bilder  $R^q f_* \mathcal{E}$  das im Allgemeinen nicht. Daher benötigt man allein zur Formulierung dieses Zusammenhangs Garbenkohomologie. Die Leray-Spektralsequenz war der Ausgangspunkt für die Entwicklung von Garbenkohomologie und Spektralsequenzen.

Verwende: Garbenkohomologie mit Werten in einer konstanten Garbe – also  $H^n(X; \underline{A}) := R^n \Gamma_X(\underline{A})$  – stimmt für lokal zusammenziehbare Räume (etwa Mannigfaltigkeiten und CW-Komplexe) mit der üblichen singulären Kohomologie  $H^n(X; A)$  überein; für eigentliche Abbildungen (wie  $\pi$ ) gilt unter gewissen topologischen Voraussetzungen (die hier erfüllt sind), dass  $(R^n f_* \mathcal{E})_y \cong H^n(f^{-1}[y], \mathcal{E}|_{f^{-1}[y]})$ ; die Kohomologie von  $S^1 \times S^1$  mit Werten in  $\mathbb{R}$  ist in den Graden 0, 1 und 2:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}$ .

#### Aufgabe 5. Balancierung von Tor

Seien  $M$  und  $N$   $R$ -Moduln. Dann sind sowohl  $M \otimes_R \_$  als auch  $\_ \otimes_R N$  rechtsexakt und können daher linksabgeleitet werden. Zeige:

$$L_n(M \otimes_R \_)(N) \cong L_n(\_ \otimes_R N)(M).$$

*Tipp:* Wähle projektive Auflösungen  $P^\bullet \rightarrow M$  und  $Q^\bullet \rightarrow N$  und betrachte zwei verschiedene Spektralsequenzen, die beide zur Kohomologie des Totalkomplexes von  $P^\bullet \otimes_R Q^\bullet$  konvergieren. Auf diese Weise erhältst du zwei verschiedene Ausdrücke für dasselbe Objekt.

#### Aufgabe 6. Auflösungen durch beliebige Objekte

Sei  $0 \rightarrow A \rightarrow X^\bullet$  ein Komplex. Sei  $F$  ein linksexakter Funktor. Was sagt die Hyperkohomologiespektralsequenz  $E_2^{p,q} = H^p((R^q F X^\bullet)_p) \Rightarrow R^{p+q} F(X^\bullet)$  über  $R^n F(A)$  aus, wenn

- die Objekte  $X^i$  alle  $F$ -azyklisch sind oder
- die Objekte  $X^i$  beliebig sind?