Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

Übungsblatt 0 zur Homologischen Algebra I

– Spiel und Spaß mit topologischen Basteleien –

Aufgabe 1. *Quotientenräume*

Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Eine Teilmenge $U \subseteq X/\sim$ soll genau dann *offen* heißen, wenn ihr Urbild unter der kanonischen Projektionsabbildung $\pi : X \to X/\sim$ in X offen ist.

a) Zeige: Diese Setzung definiert eine Topologie auf $X/\sim$.

b) Weise folgende *universelle Eigenschaft* dieser Konstruktion nach: Sei Y ein beliebiger topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Gelte, dass f die Äquivalenzrelation auf X respektiert, d. h. dass äquivalente Punkte gleiche Bilder haben. Zeige, dass es dann genau eine stetige Abbildung $\bar{f} : X/\sim \to Y$ gibt, welche das folgende Diagramm zum Kommutieren bringt.

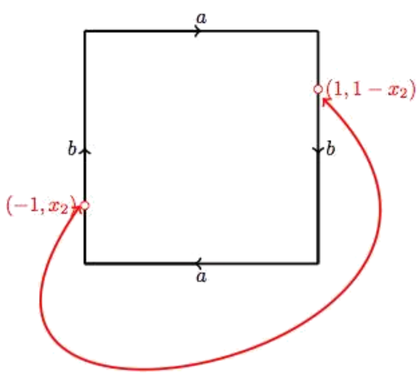
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/\sim \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Aufgabe 2. *Die reelle projektive Ebene*

Die *reelle projektive Ebene* ist der Quotientenraum $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} := S^2/\sim$, wobei $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre ist und die Äquivalenzrelation genau so definiert wird, dass Antipodenpunkte miteinander identifiziert werden.

a) Zeige: Der so definierte Raum ist kompakt und hausdorffsch.

b) Zeige: Die reelle projektive Ebene ist homöomorph zum Ergebnis der folgenden Bastelanleitung. (Wie ist die Frage formal zu verstehen?)



Aufgabe 3. *Triangulierte Räume*

Zeichne Triangulierungen des zweidimensionalen Torus und des Möbiusbands.