

Übungsblatt 18 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. Informationsverlust beim Dualisieren

- a) Zeige: $(\mathbb{Z}/(2))^\vee = 0$. Folgere: $(\mathbb{Z}/(2))^{\vee\vee} \not\cong \mathbb{Z}/(2)$.
Dabei ist $M^\vee := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ für \mathbb{Z} -Moduln M .
- b) Finde eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}/(2)$ der Form $0 \rightarrow ? \rightarrow ? \rightarrow 0$.
- c) Dualisiere den Komplex aus b).
- d) Dualisiere den Komplex aus c).
- e) Zeige: Die Komplexe aus b) und d) sind zueinander isomorph.
- f) Was ist die Moral der Geschichte?

Aufgabe 2. Die Kategorie der vollständigen metrischen Räume

Sei Met die Kategorie der metrischen Räume und lipschitzstetigen Abbildungen. Sei $\operatorname{Met}_{\operatorname{compl}}$ ihre volle Unterkategorie der vollständigen metrischen Räume. Für welche Klasse S von Morphismen gilt $\operatorname{Met}_{\operatorname{compl}} \simeq \operatorname{Met}[S^{-1}]$?

Aufgabe 3. Die K -Theorie einer abelschen Kategorie

Die K -Theorie $K(\mathcal{A})$ einer abelschen Kategorie \mathcal{A} wird als abelsche Gruppe von den Objekten aus \mathcal{A} und, für jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ in \mathcal{A} , der Relation $X = X' + X''$ erzeugt.

- a) Gelte $X \cong Y$ in einer abelschen Kategorie \mathcal{A} . Zeige: $X = Y \in K(\mathcal{A})$.
- b) Zeige: Die K -Theorie der Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume ist isomorph zu \mathbb{Z} .
- c) Zeige: Die K -Theorie der Kategorie aller Vektorräume ist Null.
- d) Sei $\operatorname{Kom}^b(\mathcal{A})$ die Kategorie der beschränkten Kettenkomplexe über einer abelschen Kategorie \mathcal{A} . Zeige: Die auf Erzeugern gegebene Zuordnung

$$K(\operatorname{Kom}^b(\mathcal{A})) \longrightarrow K(\mathcal{A}), \quad K^\bullet \longmapsto \chi(K^\bullet) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n K^n$$

induziert eine wohldefinierte Surjektion. (Teilt man in $K(\operatorname{Kom}^b(\mathcal{A}))$ noch die Relationen $K^\bullet[1] = -K^\bullet$ heraus, wird die induzierte Abbildung sogar ein Isomorphismus.)

Tipp: Zeige $\chi(K^\bullet) = \chi(H^\bullet(K^\bullet))$ und verwende die lange exakte Sequenz.

Aufgabe 4. Serresche Quotientenkategorien als Lokalisierungen

Sei \mathcal{B} eine Serresche Unterkategorie einer abelschen Kategorie \mathcal{A} . Sei S die Klasse aller diejenigen Morphismen in \mathcal{A} , deren Kerne und Kokerne in \mathcal{B} liegen. Zeige: $\mathcal{A}/\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}[S^{-1}]$.

Aufgabe 5. Wohldefiniertheit der Arbeit mit Dächern

- a) Zeige, dass die Komposition von Dächern wohldefiniert ist.
- b) Wie addiert man zwei Dächer?