Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

# Übungsblatt 4 zur Homologischen Algebra I

*– Induktive Konstruktionen –*

**Aufgabe 1.** *Äquivalenzrelationen I*

Sei $X$ eine Menge und $R \subseteq X \times X$ eine Relation auf $X$ (also lediglich eine Teilmenge, nicht unbedingt eine Äquivalenzrelation). Sei $\sim_R$ der Schnitt über alle Äquivalenzrelationen auf $X$, welche $R$ umfassen.

a) Zeige: Der Schnitt $\sim_R$ ist wieder eine Äquivalenzrelation auf $X$ – und zwar die feinste, die $R$ umfasst. (Was bedeutet das? Für jede weitere Äquivalenzrelation ...)

b) Zeige, dass diese auch explizit wie folgt beschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} x \sim_R y \quad \Longleftrightarrow \quad & \exists n \geq 0\colon \exists x_0, x_1, \ldots, x_n \in X\colon \\ & x_0 = x \wedge x_n = y \wedge \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}\colon x_i R x_{i+1} \vee x_{i+1} R x_i. \end{aligned}$$

c) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Gelte $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in X$ mit $xRy$. Zeige: Die Setzung $\bar{f} : X/{\sim_R} \to Y,\ [x] \mapsto f(x)$ ist wohldefiniert.

   *Hinweis:* Spannender ist es, wenn man diese Teilaufgabe direkt mit a) und ohne Verwendung von b) löst.

d) Finde Beispiele aus möglichst vielen verschiedenen Teilgebieten der Mathematik, wo man auch geeignete große Schnitte zur Konstruktion von Mengen mit gewissen guten Eigenschaften verwendet.

In *prädikativer Mathematik* gestattet man sich nicht, das *Potenzmengenaxiom* zu verwenden, demnach jede Menge eine Potenzmenge besitzt (statt nur einer Potenzklasse). Als Konsequenz kann man feinste Äquivalenzrelationen nicht mehr als geeigneten Schnitt konstruieren, sondern nur noch über die explizite Variante aus Teilaufgabe b). Man sagt auch, prädikative Mathematik sei konkret – aber nicht notwendigerweise elegant. Prädikative Mathematik kann man sowohl klassisch als auch intuitionistisch betreiben.

**Aufgabe 2.** *Äquivalenzrelationen II*

Seien $Z$ eine Menge und $R_1$ und $R_2$ Äquivalenzrelationen auf $Z$. Sei $R$ die feinste Äquivalenzrelation auf $Z$, welche $R_1 \cup R_2$ umfasst. Sei ferner $\sim$ folgende Relation auf $Z/R_1$:

$$K \sim L \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists x \in K, y \in L\colon x R_2 y \qquad \text{für alle } K, L \in Z/R_1.$$

a) Wieso ist $\sim$ im Allgemeinen keine Äquivalenzrelation? (Bemühe dich nicht, ein konkretes Gegenbeispiel aufzustellen.)

b) Sei $\approx$ die feinste Äquivalenzrelation auf $Z/R_1$, welche $\sim$ umfasst. Gib eine kanonische Abbildung $Z/R \to (Z/R_1)/{\approx}$ an und zeige, dass sie eine wohldefinierte Bijektion ist.

c) Sei $Z$ sogar ein topologischer Raum. Zeige dann, dass die Bijektion aus Teilaufgabe b) sogar ein Homöomorphismus ist. Die diversen Faktormengen sollen dabei die Quotiententopologie tragen.

**Aufgabe 3.** *Triangulationen von Prismen*

Bestimme alle nichtdegenerierten Simplizes der simplizialen Mengen $D[1,2]$, $D[1,n]$ und $D[2,2]$.

**Aufgabe 4.** *Homotopien simplizialer Abbildungen*

Bezeichne allgemein $X \times Y$ das kartesische Produkt simplizialer Mengen $X$ und $Y$; es gilt also $(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$ für alle $n \geq 0$.

a) Zeige, dass simpliziale Abbildungen $I \to X \times Y$ in kanonischer 1:1–Korrespondenz zu Paaren von simplizialen Abbildungen $I \to X$, $I \to Y$ stehen.

b) Definiere zwei sinnvolle simpliziale Abbildungen $p_0, p_1 : X \to \Delta[1] \times X$ – in Analogie zu den stetigen Abbildungen $x \mapsto (0, x)$ bzw. $x \mapsto (1, x)$, die zwischen einem topologischen Raum und seinem Produkt mit dem Einheitsintervall verlaufen.

Simpliziale Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen genau dann *einfach homotop*, wenn es eine simpliziale Abbildung $h : \Delta[1] \times X \to Y$ gibt sodass $f = h \circ p_0$ und $g = h \circ p_1$. Das definiert keine Äquivalenzrelation auf der Menge der simplizialen Abbildungen von $X$ nach $Y$; die feinste solche Äquivalenzrelation, die einfach homotope Abbildungen identifiziert, heißt *Homotopie*.

c) Sei für $0 \leq i \leq n$ die Abbildung $\mathrm{pr}_i : \Delta[n] \to \Delta[n]$ diejenige, die "alles auf die $i$-te Ecke projiziert". Konkret gelte also $(\mathrm{pr}_i)_n(f) = u_k$ für alle $n, k \geq 0$ und $f : [k] \to [n]$. Dabei bezeichne $u_k$ die konstante Abbildung $[k] \to [n]$ mit Wert $i$.

   Zeige, dass die Abbildung $\mathrm{pr}_n$ zur Identitätsabbildung homotop ist.

d) Zeige: Sind $f$ und $g$ homotop, so auch $q \circ f \circ p$ und $q \circ g \circ p$.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "p"] & X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & Y \arrow[r, "q"] & Y' \end{tikzcd}$$

e) *Schwierige und schwammige Bonusaufgabe zum Grübeln.* Inwieweit impliziert schwache Homotopie von simplizialen Abbildungen die gewöhnliche topologische Homotopie der zugehörigen geometrischen Realisierungen? Wie sehen gegebenenfalls solche Homotopien aus?

**Aufgabe 5.** *Induktive Konstruktion des Skeletts*

Anschaulich ergibt sich das $n$-Skelett einer simplizialen Menge aus ihrem $(n-1)$-Skelett durch Einkleben der nichtdegenerierten $n$-Simplizes. Allgemein ergibt sich eine simpliziale Menge durch geeignete Verklebung ihrer $n$-Simplizes. Das wollen wir in dieser Aufgabe verstehen. Sei $\dot\Delta[n]$ diejenige simpliziale Untermenge von $\Delta[n]$, der das eindeutig bestimmte nichtdegenerierte $n$-Simplex fehlt:

$$\dot\Delta[n]_m := \{f : [m] \to [n] \mid f \text{ ist monoton und nicht surjektiv}\} \subseteq \Delta[n]_m.$$

Das ist eine simpliziale Version der $(n-1)$-Sphäre. Das *Koprodukt* (disjunkt-gemachte Vereinigung) von simplizialen Mengen wird einfach levelweise berechnet. Daher gilt

$$\Big(\coprod_{x \in I} \dot\Delta[n]\Big)_m = \coprod_{x \in I} \dot\Delta[n]_m = \{(x, f) \mid x \in I,\ f \in \dot\Delta[n]_m\}.$$

Bei den folgenden Aufgaben fallen viele Detailnachweise an. Kläre so viele, wie du möchtest. Sei im Folgenden $X$ eine simpliziale Menge und $X_{(n)}$ die Menge ihrer nichtdegenerierten $n$-Simplizes.

a) *Yoneda lässt grüßen.* Sei $x \in X_n$ ein Simplex. Mache dir klar, dass diese Daten eine simpliziale Abbildung $\bar{x} : \Delta[n] \to \mathrm{sk}_n X,\ f \mapsto X(f)x$ definieren. Was macht diese Abbildung anschaulich?

b) Mache dir klar, dass das Bild von $\dot{\Delta}[n]$ unter der Abbildung aus a) schon in $\mathrm{sk}_{n-1} X$ landet.

c) Gib die kanonischen Abbildungen des oberen linken Teilquadrats des folgenden Diagramms an. Zeige, dass dieses Quadrat kommutiert. Wie sehen die simplizialen Mengen anschaulich aus?

d) *Nun kommt das eigentliche Ziel.* Sei $Y$ eine beliebige simpliziale Menge und seien simpliziale Abbildungen $\mathrm{sk}_{n-1} X \to Y$, $\coprod_{x \in X_{(n)}} \Delta[n] \to Y$ gegeben, die das „schräge Quadrat“ zum Kommutieren bringen. Zeige: Es gibt genau eine simpliziale Abbildung $\mathrm{sk}_n X \to Y$, die die beiden Teildreiecke kommutieren lässt.

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_{x \in X_{(n)}} \dot{\Delta}[n] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{sk}_{n-1} X \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
\coprod_{x \in X_{(n)}} \Delta[n] \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & \mathrm{sk}_n X \arrow[dr, dashed] & \\
& & Y
\end{tikzcd}
$$

Später werden wir lernen, dass diese universelle Eigenschaft ausdrückt, dass das obere linke Teilquadrat ein *Pushout-Diagramm* ist. Das macht die eingangs erwähnte Aussage über das $n$-Skelett präzise.

*Tipps:* Ein Simplex $x \in (\mathrm{sk}_n X)_m$ lässt sich auf eindeutige Art und Weise in der Form $x = X(f)u$ schreiben, wobei $f : [m] \to [\ell]$ eine Surjektion, $u \in X_\ell$ nichtdegeneriert und $\ell \leq n$ ist. Es genügt schon, die gesuchte Abbildung auf den nichtdegenerierten Simplizes von $\mathrm{sk}_n X$ zu definieren – die restlichen Werte sind durch das Axiom an simpliziale Abbildungen schon festgelegt (inwiefern?).