Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

Übungsblatt 7 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. *Funktorialität der langen exakten Sequenz*

Sei ein kommutatives Diagramm von Komplexen und Komplexmorphismen gegeben, dessen Zeilen exakte Sequenzen sind:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f^\bullet"'] & B^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "g^\bullet"'] & C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h^\bullet"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \widetilde{A}^\bullet \arrow[r] & \widetilde{B}^\bullet \arrow[r] & \widetilde{C}^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Bekanntlich induzieren die beiden kurzen exakten Sequenzen dann lange exakte Sequenzen in Kohomologie. Zeige, dass diese folgendes Diagramm kommutieren lassen:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^n(A^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(f^\bullet)"'] & H^n(B^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(g^\bullet)"'] & H^n(C^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(h^\bullet)"'] & H^{n+1}(A^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H^{n+1}(h^\bullet)"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H^n(\widetilde{A}^\bullet) \arrow[r] & H^n(\widetilde{B}^\bullet) \arrow[r] & H^n(\widetilde{C}^\bullet) \arrow[r] & H^{n+1}(\widetilde{A}^\bullet) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Wenn du schon weißt, was ein Funktor ist, dann erkläre den Titel der Aufgabe!

Aufgabe 2. *Degenerierte Ketten*

Sei A eine simpliziale abelsche Gruppe und $CA_\bullet$ der zugehörige Komplex abelscher Gruppen mit $CA_n = A_n$ und Differential $d = \sum_i (-1)^n A(\partial^i)$. Sei $DA_\bullet \hookrightarrow CA_\bullet$ der Unterkomplex der *degenerierten Ketten.*

a) Zeige: Das Differential $d : CA_n \to CA_{n-1}$ bildet die Elemente aus DA_n auf Elemente aus DA_{n-1} ab.

Mit den Einschränkungen von d wird damit $DA_\bullet$ zu einem Komplex und die kanonischen Injektionen $DA_\bullet \to NA_\bullet$ werden zu einem Komplexmorphismus.

b) Zeige: $H_n(CA_\bullet) \cong H_n(CA_\bullet/NA_\bullet)$, auf kanonische Art und Weise.

c) Sei nun X eine simpliziale Menge, sodass Ränder nichtdegenerierter Simplizes wieder nichtdegeneriert sind (vgl. Blatt 2, Aufgabe 2). Erinnere dich, dass $A_n := \mathbb{Z}\langle X_n \rangle$ (freie abelsche Gruppe auf den Elementen von X_n) zu einer simplizialen abelschen Gruppe wird. Sei $\widetilde{A}_n := \mathbb{Z}\langle X_{(n)} \rangle$ die freie abelsche Gruppe auf den nichtdegenerierten n-Simplizes.

   Überlege zunächst, wie $\widetilde{A}$ zu einer simplizialen abelschen Gruppe wird. Zeige dann: $H_n(C\widetilde{A}) \cong H_n(CA)$. Damit ist also gerechtfertigt, dass man sich bei Berechnung von Homologie auf die nichtdegenerierten Simplizes einschränken darf.

Auf der Rückseite wird ein ausführlicher Tipp folgen.

$$DA_n := \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{im}(A(\sigma^i) : A_{n-1} \to A_n) \subseteq CA_n.$$

Mit dem Summensymbol ist die Summe von Untergruppen gemeint.