

## Übungsblatt 0 zur Homologischen Algebra I

– Spiel und Spaß mit topologischen Basteleien –

### Aufgabe 1. Quotientenräume

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Eine Teilmenge  $U \subseteq X/\sim$  soll genau dann *offen* heißen, wenn ihr Urbild unter der kanonischen Projektionsabbildung  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  in  $X$  offen ist.

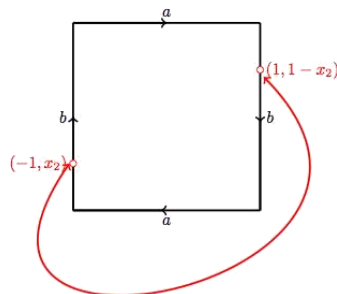
- Zeige: Diese Setzung definiert eine Topologie auf  $X/\sim$ .
- Weise folgende *universelle Eigenschaft* dieser Konstruktion nach: Sei  $Y$  ein beliebiger topologischer Raum und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Gelte, dass  $f$  die Äquivalenzrelation auf  $X$  respektiert, d. h. dass äquivalente Punkte gleiche Bilder haben. Zeige, dass es dann genau eine stetige Abbildung  $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$  gibt, welche das folgende Diagramm zum Kommutieren bringt.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{f} \\ & X/\sim & \end{array}$$

### Aufgabe 2. Die reelle projektive Ebene

Die *reelle projektive Ebene* ist der Quotientenraum  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 := S^2/\sim$ , wobei  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  die Einheitssphäre ist und die Äquivalenzrelation genau so definiert wird, dass Antipodenpunkte miteinander identifiziert werden.

- Zeige: Der so definierte Raum ist kompakt und hausdorffsch.
- Zeige: Die reelle projektive Ebene ist homöomorph zum Ergebnis der folgenden Bastelanleitung. (Wie ist die Frage formal zu verstehen?)



### Aufgabe 3. Triangulierte Räume

- Zeichne Triangulierungen des zweidimensionalen Torus und des Möbiusbands.
- Wenn du das nicht schon in deiner Kindheit gemacht hast, bastele anschließend mit echtem Papier ein Möbiusband.