

Übungsblatt 27 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. Kohomologie von \mathbb{R}^1 mit kompaktem Träger

- Zeige, dass $0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Garben auf \mathbb{R}^1 ist. Dabei schickt der Morphismus $\mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf ihre Ableitung.
- Wieso sind \mathcal{C} und \mathcal{C}^1 weiche Garben?
- Berechne $H_c^\bullet(\mathbb{R}^1, \mathbb{R})$.

Aufgabe 2. Dimensionstheorie über Kohomologie mit kompaktem Träger

Die *Dimension* eines topologischen Raums X ist die kleinste Zahl $n \geq 0$, sodass $H_c^{>n}(X, \mathcal{E})$ für alle Garben \mathcal{E} abelscher Gruppen auf X verschwindet. Sei im Folgenden X ein lokal kompakter Hausdorffraum, der abzählbar im Unendlichen ist.

- Sei $Y \subseteq X$ eine offene oder abgeschlossene Teilmenge. Zeige $\dim_c Y \leq \dim_c X$.
 Tipp: Ist $i : Y \hookrightarrow X$ die Inklusion, so gilt $H_c^\bullet(Y, \mathcal{E}) \cong H_c^\bullet(X, i_! \mathcal{E})$.
- Sei $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}^0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}^{n-1} \rightarrow \mathcal{L}^n \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf X . Seien $\mathcal{L}^0, \dots, \mathcal{L}^{n-1}$ weich. Sei $\dim_c X \leq n$. Zeige, dass dann auch \mathcal{L}^n weich ist.
 Tipp: Eine Garbe \mathcal{F} ist genau dann weich, wenn $H_c^1(U, \mathcal{F}) = 0$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$. Zerlege die Sequenz in viele kurze, um $H_c^1(U, \mathcal{L}^n) \cong H_c^{n+1}(U, \mathcal{E})$ nachzuweisen.
- Sei X durch offene Mengen U mit $\dim_c U \leq n$ überdeckt. Zeige $\dim_c X \leq n$.
 Tipp: Eine Garbe ist genau dann weich, wenn sie lokal weich ist.
- Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Sei $\dim_c X \leq n$. Zeige $R^{>n} f_!(\mathcal{E}) = 0$ für alle Garben \mathcal{E} abelscher Gruppen auf X .
- Zeige, dass in der Situation aus d) $\mathbb{R}f_!$ als Funktor $D^b \rightarrow D^b$ und auch als Funktor $D^- \rightarrow D^-$ wohldefiniert ist.

Tipp: Für den ersten Teil nutze die Spektralsequenz $E_2^{pq} = R^p f_!(H^q(\mathcal{E}^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{R}^n f_!(\mathcal{E}^\bullet)$.

Aufgabe 3. Halme des direkten Bilds mit kompaktem Träger

Vollziehe den Beweis von Proposition III.8.10 über die Halme des direkten Bilds mit kompaktem Träger genau nach. Verwende das Buch *Cohomology of Sheaves* von Birger Iversen, wenn du nicht weiterkommst.

Aufgabe 4. Abgeleitetes Zurückziehen und Vordrücken

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus lokal geringter Räume. Zeige, dass $\mathbb{L}f^*$ linksadjungiert zu $\mathbb{R}f_*$ ist. Wie ist das präzise zu formulieren?

Aufgabe 5. Rechnen modulo Torsion

Sei Ab_{fp} die abelsche Kategorie der endlich präsentierten abelschen Gruppen und \mathcal{T} ihre volle Unterkategorie der Torsionsgruppen.

- a) Mache dir klar, dass \mathcal{T} eine Serresche Unterkategorie von Ab_{fp} ist.
- b) Konstruiere einen Funktor $\overline{F} : \text{Ab}_{\text{fp}}/\mathcal{T} \rightarrow \text{Vect}(\mathbb{Q})_{\text{findim}}$ mit $A \mapsto A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Tipp: Verwende die universelle Eigenschaft von $\text{Ab}_{\text{fp}}/\mathcal{T}$ (siehe Blatt 16, Aufgabe 4) und die Flachheit von \mathbb{Q} über \mathbb{Z} .

- c) Zeige, dass \overline{F} treu ist.

Tipp: Zeige, dass aus $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ folgt, dass A eine Torsionsgruppe ist. Verwende dann Tag 06XK aus dem Stacks Project.

- d) Zeige, dass in $\text{Ab}_{\text{fp}}/\mathcal{T}$ der Morphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}$ für $n \geq 1$ invertierbar ist. Folgere, dass \overline{F} voll und daher eine Kategorienäquivalenz ist.

- e) Sei eine konvergente Spektralsequenz in Ab_{fp} gegeben. Was ist zu tun, wenn man vorgeben möchte, dass alle kurzen exakten Sequenzen in Ab_{fp} zerfallen? Wie schwächt man seine Resultate dadurch ab?

Hinweis: Allgemeiner ist für jeden Integritätsbereich R der Quotient der Kategorie der R -Moduln modulo der Unterkategorie der Torsionsmoduln äquivalent zur Kategorie der Vektorräume über dem Quotientenkörper von R , siehe das Stacks Project, Tag 0B0J.