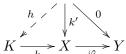
Übungsblatt 14 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. Definition des Kerns

Sei \mathcal{C} eine Ab-angereicherte Kategorie. Sei $\varphi: X \to Y$ ein Morphismus in \mathcal{C} . Zeige, dass für ein Objekt K zusammen mit einem Morphismus $k: K \to X$ folgende Aussagen äquivalent sind:

- 1. Das Paar stellt den Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}, T \mapsto \ker(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y))$ dar.
- 2. Das Paar hat folgende universelle Eigenschaft: Zu jedem Morphismus $k': K' \to X$ mit $\varphi \circ k' = 0$ gibt es genau einen Morphismus $h: K' \to K$ mit $k' = k \circ h$.
- 3. Für alle Objekte T ist folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt.

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, K) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y)$$



Zur Erinnerung: Ein Paar bestehend aus einem Objekt K und einem Element $k \in F(K)$ stellt genau dann einen Funktor $F: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ dar, wenn es folgende universelle Eigenschaft hat: Für jedes Objekt K' und jedes Element $k' \in F(K')$ existiert genau ein Morphismus $h: K' \to K$ mit k' = F(h)(k).

Aufgabe 2. Kerne und Monomorphismen

Sei $\varphi: X \to Y$ ein Morphismus in einer Kategorie \mathcal{C} , die die Axiome A1 und A2 erfüllt.

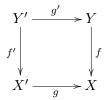
- a) Zeige, dass φ genau dann ein Monomorphismus (d. h. linkskürzbar) ist, wenn das Nullobjekt zusammen mit dem eindeutigen Morphismus nach X ein Kern von φ ist.
- b) Formuliere und beweise mit wenig Aufwand die duale Aussage.
- c) Sei \mathcal{C} sogar abelsch und φ sowohl ein Mono- als auch ein Epimorphismus. Zeige, dass φ dann sogar ein Isomorphismus ist. (Man sagt auch, abelsche Kategorien seien balanciert. Welche wichtigen Kategorien sind nicht balanciert?)

Aufgabe 3. Rückzug von Mono- und Epimorphismen

Sei in einer beliebigen Kategorie \mathcal{C} ein Faserproduktdiagramm gegeben.

- a) Zeige: Ist f ein Monomorphismus, so auch f'.
- b) Sei \mathcal{C} sogar abelsch. Zeige: Ist f ein Epimorphismus, so auch f'.

 Tipp: Vollziehe die Behauptung erst im Fall $\mathcal{C} = R$ -Mod nach. Hole dir dann bessere Tipps ab.



Aufgabe 4. Homotopietheorie von Nerven

- a) Sei $\eta: F \to G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Zeige, dass die induzierten simplizialen Abbildungen $NF, NG: N\mathcal{C} \to N\mathcal{D}$ zwischen den Nerven zueinander homotop sind.
- b) Sei $F \dashv G$ ein adjungiertes Funktorpaar. Zeige, dass NF eine Homotopieäquivalenz ist (mit NG als schwachem Inversen).
- c) Sei \mathcal{C} eine Kategorie, die ein initiales oder terminales Objekt besitzt. Zeige, dass $N\mathcal{C}$ zusammenziehbar ist, d. h. homotopieäquivalent zu einem Punkt.
 - Tipp: Elegant kann man das mit Teilaufgabe b) lösen.