Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2014

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 13 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. *Der wandelnde Tangentialvektor*

Sei Δ der folgende lokal geringte Raum: Der zugrundeliegende topologische Raum ist der einpunktige Raum, und der eindeutige Halm der Strukturgarbe $\mathcal{O}_\Delta$ ist der Ring $\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Ferner wird $\mathbb{R}^0$ mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^0}$, deren eindeutiger Halm $\mathbb{R}$ ist, zu einem lokal geringten Raum. Es gibt einen kanonischen Morphismus $\Delta \to \mathbb{R}^0$ lokal geringter Räume (welchen?).

a) Welche Elemente in $\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ sind invertierbar?

b) Sei X eine reelle glatte Mannigfaltigkeit. Sei $x_0 \in X$. Zeige: Lokale $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismen $\mathcal{O}_{X,x_0} \to \mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ stehen in kanonischer Eins-zu-Eins-Korrespondenz mit $\mathbb{R}$-linearen Derivationen $\mathcal{O}_{X,x_0} \to \mathbb{R}$. (Solche müssen folgende Leibnizregel erfüllen: $D(fg) = f(x_0)D(g) + g(x_0)D(f)$.)

   Hinweis: Die Ringgarbe $\mathcal{O}_X$ ist die Garbe der glatten reellwertigen Funktionen auf X. Ein Ringhomomorphismus ist genau dann lokal, wenn er Invertierbarkeit reflektiert. Ist $\varphi : \mathcal{O}_{X,x_0} \to \mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ ein lokaler Ringhomomorphismus, so gilt $\varphi(f) = f(x_0) + \varepsilon \cdot D(f)$ für eine von $f \in \mathcal{O}_{X,x_0}$ abhängige Zahl $D(f)$ – wieso?

c) Sei X eine reelle glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es einen kanonischen Morphismus lokal geringter Räume $X \to \mathbb{R}^0$. Zeige: Morphismen lokal geringter Räume $\Delta \to X$, welche mit den Strukturmorphismen nach $\mathbb{R}^0$ verträglich sind, stehen in kanonischer Eins-zu-Eins-Korrespondenz zu Tangentialvektoren von X.

Teilaufgabe c) erklärt, wieso Δ (oder besser $\mathrm{id} : \Delta \to \Delta$) auch *der wandelnde Tangentialvektor* genannt wird. Der Ring $\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ heißt auch *Ring der dualen Zahlen* und ist in der Numerik bei der Technik der automatischen Differentiation wichtig. Um davon einen ersten Eindruck zu erhalten, musst du nur für ein Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ den Term $p(x_0 + \varepsilon \cdot v) \in \mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ auswerten.

Aufgabe 2. *Funktionsinterpretation*

Ist $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ ein Keim der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ eines lokal geringten Raums X, so sieht man $[f] \in \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ als „Funktionswert von f an der Stelle x“ an. Der Körper, in dem f Funktionswerte in diesem Sinn annimmt, kann also anders als bei gewöhnlichen reellwertigen Funktionen von Punkt zu Punkt variieren.

a) Sei X eine glatte reelle Mannigfaltigkeit. Beweise, dass die Faktorringe $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ kanonisch isomorph zu $\mathbb{R}$ sind und dass die angegebene Vorstellung von Funktionswerten mit der bekannten und hier anwendbaren Definition übereinstimmt.

b) Sei $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Wo hat die „Funktion“ $45 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ Nullstellen? Wo liegen vermutlich doppelte Nullstellen?

   Tipp: Zur Definition von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ siehe Übungsblatt 5. In Übungsblatt 6 wurden die Halme von $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}$ berechnet.

c) Finde einen lokal geringten Raum X und einen globalen Schnitt $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, der nicht Null ist, aber dessen Funktionswerte an jedem Punkt verschwinden.

Aufgabe 3. *Der terminale lokal geringte Raum*

Zeige, dass der (überhaupt nicht einpunktige!) Raum $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ der terminale lokal geringte Raum ist.

Hinweis: Bekanntlich ist der Ring $\mathbb{Z}$ initial in der Kategorie der Ringe. Damit folgt sofort, dass $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ terminal in der Kategorie der affinen Schemata ist – denn diese ist äquivalent zur dualen Kategorie von der der Ringe. Hier geht es aber darum, Terminalität in der größeren Kategorie aller lokal geringten Räume nachzuweisen. Wissen über Schemata ist hierfür nicht nötig.

Bemerkung: Die étale Kohomologie von $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ stellt eine Verbindung zwischen Primzahlen und der Verschlingungszahl von Knoten her. `http://math.ucr.edu/home/baez/week257.html`

Aufgabe 4. *Schnitte als Faserprodukte*

a) Seien U und V Teilmengen einer Menge X. Was ist das Faserprodukt $U \times_X V$ in der Kategorie der Mengen?

b) Seien U und V offene Teilmengen eines topologischen Raums X. Was ist das Faserprodukt $U \times_X V$ in der Kategorie der offenen Mengen von X?

Aufgabe 5. *Kategorielle Vollständigkeit*

a) Zeige, dass die Kategorie der Mengen *vollständig* ist: Jedes Diagramm mit kleiner Indexkategorie besitzt einen Limes.

b) Errate die duale Aufgabe und löse sie.

Aufgabe 6. *Freie Körper?*

a) Zeige: Die Kategorie der Körper besitzt kein initiales Objekt.

b) Folgere: Der Vergissfunktor von der Kategorie der Körper in die Kategorie der Mengen besitzt keinen Linksadjungierten. Freie Körper gibt es also nicht.