

Übungsblatt 23 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. Abgeleitetes Dualisieren

Sei A ein kommutativer Ring.

- a) Zeige: $D^b(\text{Mod}(A)_{\text{coh}}) \simeq D^b(\text{Mod}(A))_{\text{coh}}$.
- b) Sei $(_)^\vee : D^-(\text{Mod}(A))^{\text{op}} \rightarrow D^+(\text{Mod}(A))$ die Rechtsableitung des Dualisierungsfunktors. Sei M ein kohärenter A -Modul. Zeige: $(M^\vee)^\vee \cong M$.

Hinweis: Die Kategorie $\text{Mod}(A)_{\text{coh}}$ ist die volle Unterkategorie aller kohärenten Moduln. Ist A noethersch (was du gerne voraussetzen darfst), sind die kohärenten Moduln gerade die endlich erzeugten. Die Kategorie $D^b(\text{Mod}(A))_{\text{coh}}$ ist die volle Unterkategorie derjenigen Komplexe, deren Kohomologiemoduln alle kohärent sind.

- Nachrechnen: TR1, TR2, TR3 für K^\star und D^\star
- Auflösungen durch F -azyklische Objekte
- Kleine Lemmas, die fürs Nachrechnen der Aussagen im Kapitel über abgeleitete Funktoren wichtig sind