

## Übungsblatt 9 zur Homologischen Algebra I

### Aufgabe 1. Funktoren als verallgemeinerte monotone Abbildungen

Seien  $P$  und  $Q$  Quasiordnungen (oder Partialordnungen). Seien  $BP$  und  $BQ$  die zugehörigen dünnen Kategorien, deren Objekte genau die Elemente von  $P$  bzw.  $Q$  sind und in denen zwischen zwei Objekten genau dann ein Morphismus verläuft, wenn die Quelle kleinergleich dem Ziel ist.

- a) Zeige, dass Funktoren  $BP \rightarrow BQ$  auf kanonische Art und Weise mit schwach monoton steigenden Abbildungen  $P \rightarrow Q$  korrespondieren.
- b) Zeige, dass zwischen zwei Funktoren  $Bf, Bg : BP \rightarrow BQ$  höchstens eine natürliche Transformation verlaufen kann; und dass es genau dann eine solche gibt, wenn für die zugehörigen monotonen Abbildungen  $f, g : P \rightarrow Q$  gilt:  $f(x) \preceq g(x)$  für alle  $x \in P$ .

### Aufgabe 2. Beispiele für natürliche Transformationen

Sei  $\text{Id}_{\text{Set}} : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$  der Identitätsfunktork auf  $\text{Set}$ ,  $P : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$  der (kovariante) Potenzmengenfunktork und  $K : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$  der Funktork

$$\begin{aligned} X &\longmapsto X \times X \\ f &\longmapsto f \times f := ((a, b) \mapsto (f(a), f(b))). \end{aligned}$$

- a) Zeige: Es gibt nur eine einzige natürliche Transformation  $\eta : \text{Id}_{\text{Set}} \rightarrow \text{Id}_{\text{Set}}$ , nämlich

$$\eta_X : X \rightarrow X, \quad x \mapsto x.$$

- b) Zeige: Es gibt nur eine einzige natürliche Transformation  $\omega : \text{Id}_{\text{Set}} \rightarrow K$ , nämlich

$$\omega_X : X \rightarrow X \times X, \quad x \mapsto (x, x).$$

*Tipp für a) und b):* Betrachte geeignete Abbildungen  $1 \rightarrow X$ ,  $\star \mapsto x$ . Dabei ist  $1 = \{\star\}$  eine einelementige Menge.

- c) Zeige: Es gibt keine natürliche Transformation  $P \rightarrow \text{Id}_{\text{Set}}$ , wohl aber eine in die andere Richtung.
- d) Wir nehmen an, dass wir für jede nichtleere Menge  $X$  ein bestimmtes Element  $a_X \in X$  gegeben haben. Zeige: Die Setzung  $\tau_X : X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto a_X$  definiert *nicht* eine natürliche Transformation  $\text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ , wobei  $\mathcal{C}$  die Kategorie der nichtleeren Mengen und beliebigen Abbildungen bezeichnet.
- e) Welche natürlichen Transformationen  $\text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$  gibt es, wenn  $\mathcal{C}$  die Kategorie der reellen Vektorräume bezeichnet?

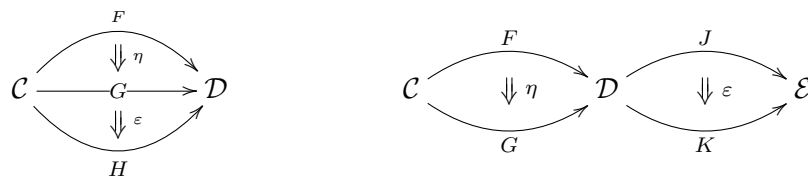
### Aufgabe 3. Die 2-Kategorie der Kategorien

- Seien  $\eta : F \rightarrow G$  und  $\varepsilon : G \rightarrow H$  natürliche Transformationen zwischen Funktoren  $F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . Definiere auf geeignete Art und Weise die *vertikale Komposition*  $\varepsilon \circ \eta : F \rightarrow H$ . Weise nach, dass deine Definition wirklich zu einer natürlichen Transformation führt.
- Sei  $\eta : F \rightarrow G$  eine natürliche Transformation zwischen Funktoren  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $\varepsilon : J \rightarrow K$  eine natürliche Transformation zwischen Funktoren  $J, K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ . Definiere auf geeignete Art und Weise die *horizontale Komposition*  $\eta \star \varepsilon : J \circ F \rightarrow K \circ G$ . Musst du dazu Wahlen treffen?
- Verifiziere für passende natürliche Transformationen folgendes Vertauschungsgesetz:

$$(\beta' \circ \beta) \star (\alpha' \circ \alpha) = (\beta' \star \alpha') \circ (\beta \star \alpha)$$

Eine gewöhnliche Kategorie heißt auch *1-Kategorie*; eine *strikte 2-Kategorie* ist eine Kategorie, in der die Hom-Mengen  $\text{Hom}(X, Y)$  nicht nur Mengen, sondern ihrerseits (gewöhnliche 1-)Kategorien sind, und in der die Verknüpfungsoperationen  $\text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$  sogar Funktoren sind. Zur besseren Abgrenzung heißen die Objekte  $f \in \text{Hom}(X, Y)$  dann 1-Morphismen (zwischen  $X$  und  $Y$ ) und die Morphismen  $\alpha : f \rightarrow g$  in  $\text{Hom}(X, Y)$  dann 2-Morphismen (zwischen  $f$  und  $g$ ).

- Zeige, dass sich 1-Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen zu einer 2-Kategorie organisieren.



### Aufgabe 4. Überraschende Kommutativität

Die *erste Homotopiegruppe*  $\pi_1(X, x_0)$  eines topologischen Raums  $X$  mit Basispunkt  $x_0$  ist die Menge aller stetigen Abbildungen  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ , wobei zwei solche Abbildungen genau dann miteinander identifiziert werden, wenn sie vermöge einer basispunktfixierenden Abbildung  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  homotop sind.

Die *zweite Homotopiegruppe*  $\pi_2(X, x_0)$  ist die Menge aller stetigen Abbildungen  $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ , die den Rand des Einheitsquadrats auf den Basispunkt  $x_0$  abbilden, wobei zwei solche Abbildungen  $H, \tilde{H}$  genau dann miteinander identifiziert werden, wenn sie vermöge einer stetigen Abbildung  $K : [0, 1] \times [0, 1]^2 \rightarrow X$  mit  $K(0, \_) = H$ ,  $K(1, \_) = \tilde{H}$ ,  $K(\_, \partial[0, 1]^2) = \text{konst. } x_0$  homotop sind.

- Finde *zwei* kanonische Gruppenstrukturen auf  $\pi_2(X, x_0)$ .

*Tipp:* Das hat etwas damit zu tun, wie man das Quadrat horizontal und vertikal in zwei Rechtecke gleicher Größe aufteilen kann.

- Beweise, dass die beiden Gruppenstrukturen dasselbe Vertauschungsgesetz erfüllen wie in Aufgabe 3c).
- Zeige, dass die beiden Gruppenstrukturen übereinstimmen und kommutativ sind.

*Tipp:* Das gilt allgemein – zwei binäre Operationen mit neutralem Element, die wie in Aufgabe 3c) miteinander verträglich sind, sind tatsächlich gleich und kommutativ.

- d) Sei  $A$  ein Objekt einer 2-Kategorie  $\mathcal{C}$ . Sei  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  der (1-)Identitätsmorphismus. Sei  $Z_{\mathcal{C}}(A) := \text{End}(\text{id}_A)$  die Menge aller 2-Morphismen von  $\text{id}_A$  nach  $\text{id}_A$ .

Finde zwei Monoidstrukturen auf  $Z(A)$ , zeige, dass sie miteinander verträglich sind, und folgere daher, dass sie gleich und kommutativ sind.

- e) Der *Fundamental-2-Gruppoid*  $\Pi_1(X)$  ist folgende 2-Kategorie: Die Objekte sind die Punkte von  $X$ , die Morphismen sind Wege zwischen den Punkten und die 2-Morphismen zwischen Wegen  $\gamma, \tilde{\gamma}$  sind Homotopieklassen von stetigen Abbildungen  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  mit  $H(0, \_) = \gamma$ ,  $H(1, \_) = \tilde{\gamma}$ .

Zeige, dass  $Z_{\Pi_1(X)}(x_0) = \pi_2(X, x_0)$ . Folgere mit dieser Erkenntnis Teilaufgabe c) aus d).

**Aufgabe 5.** *Eine Kategorie mit endlichen Mengen als Objekten*

Zeige, dass folgende Setzungen eine Kategorie  $\Sigma$  definieren. Bestätige also das Assoziativgesetz und finde die Identitätsmorphismen.

Objekte: alle endlichen Mengen

Morphismen:  $\text{Hom}(X, Y) := \{\text{Abbildungen } f : X \rightarrow Y \text{ zusammen mit}$

Totalordnungen auf den Fasern  $f^{-1}[\{y\}], y \in Y\}$

Die Komposition soll dabei wie folgt definiert sein: Die Abbildungsteile verkettet man wie gewöhnlich, und auf den Fasern  $(g \circ f)^{-1}[\{z\}]$  definiert man folgende Totalordnung:  $i \preceq j$  genau dann, wenn entweder  $f(i) \neq f(j)$  und  $f(i) \preceq f(j)$  in  $g^{-1}[\{z\}]$ , oder  $f(i) = f(j)$  und  $i \preceq j$  in  $f^{-1}[\{f(i)\}]$ .