Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

Übungsblatt 13 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. *Der wandelnde Tangentialvektor*

Sei Δ der folgende lokal geringte Raum: Der zugrundeliegende topologische Raum ist der einpunktige Raum, und der eindeutige Halm der Strukturgarbe $\mathcal{O}_\Delta$ ist der Ring $\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Ferner wird $\mathbb{R}^0$ mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^0}$, deren eindeutiger Halm $\mathbb{R}$ ist, zu einem lokal geringten Raum. Es gibt einen kanonischen Morphismus $\Delta \to \mathbb{R}^0$ lokal geringter Räume (welcher?).

a) Welche Elemente in $\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ sind invertierbar?

b) Sei X eine reelle glatte Mannigfaltigkeit. Sei $x_0 \in X$. Zeige: Lokale $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismen $\mathcal{O}_{X,x_0} \to \mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ stehen in kanonischer Eins-zu-Eins-Korrespondenz mit $\mathbb{R}$-linearen Derivationen $\mathcal{O}_{X,x_0} \to \mathbb{R}$.

   Hinweis: Die Ringgarbe $\mathcal{O}_X$ ist die Garbe der glatten reellwertigen Funktionen auf X. Ein Ringhomomorphismus ist genau dann lokal, wenn er Invertierbarkeit reflektiert. Ist $\varphi : \mathcal{O}_{X,x_0} \to \mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ ein lokaler Ringhomomorphismus, so gilt $\varphi(f) = f(x_0) + \varepsilon \cdot D(f)$ für eine von $f \in \mathcal{O}_{X,x_0}$ abhängige Zahl $D(f)$ – wieso?

c) Sei X eine reelle glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es einen kanonischen Morphismus lokal geringer Räume $X \to \mathbb{R}^0$. Zeige: Morphismus lokal geringter Räume $\Delta \to X$, welche mit den Strukturmorphismen nach $\mathbb{R}^0$ verträglich sind, stehen in kanonischer Eins-zu-Eins-Korrespondenz zu Tangentialvektoren von X.

Teilaufgabe c) erklärt, wieso Δ (oder besser $\mathrm{id} : \Delta \to \Delta$) auch *der wandelnde Tangentialvektor* genannt wird. Der Ring $\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ heißt auch *Ring der dualen Zahlen* und ist in der Numerik bei der Technik der automatischen Differentiation wichtig. Um davon einen ersten Eindruck zu erhalten, musst du nur für ein Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ den Term $p(x_0 + \varepsilon \cdot v) \in \mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ auswerten.

Aufgabe 2. *Funktionsinterpretation*

Ist $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ ein Keim der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ eines lokal geringten Raums X, so sieht man $[f] \in \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ als „Funktionswert von f an der Stelle x“ an. Der Körper, in dem f Funktionswerte in diesem Sinn annimmt, kann also anders als bei gewöhnlichen reellwertigen Funktionen von Punkt zu Punkt variieren.

a) Sei X eine glatte reelle Mannigfaltigkeit. Beweise, dass die Faktorringe $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ kanonisch isomorph zu $\mathbb{R}$ sind und dass die angegebene Vorstellung von Funktionswerten mit der bekannten und hier anwendbaren Definition übereinstimmt.

b) Sei $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Wo hat die „Funktion“ $45 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ Nullstellen? Was sind vermutlich doppelte Nullstellen?

   Tipp: Zur Definition von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ siehe Übungsblatt 5. In Übungsblatt 6 wurden die Halme von $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}$ berechnet.

c) Finde einen lokal geringten Raum X und einen globalen Schnitt $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, der nicht Null ist, aber dessen Funktionswerte an jedem Punkt verschwinden.