Ubungsblatt 14 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. Definition des Kerns

Sei \mathcal{C} eine Ab-angereicherte Kategorie. Sei $\varphi: X \to Y$ ein Morphismus in \mathcal{C} . Zeige, dass für ein Objekt K zusammen mit einem Morphismus $k:K\to X$ folgende Aussagen äquivalent sind:

- 1. Das Paar stellt den Funktor $\mathcal{C}^{op} \to Ab$, $T \mapsto \ker(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y))$ dar.
- 2. Das Paar hat folgende universelle Eigenschaft: Es gilt $\varphi \circ k = 0$, und zu jedem Morphismus $k': K' \to X$ mit $\varphi \circ k' = 0$ gibt es genau einen Morphismus $h: K' \to K$ $mit k' = k \circ h.$ $K \xrightarrow{h} X \xrightarrow{\varphi} Y$
- 3. Für alle Objekte T ist folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt.

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T,K) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T,Y)$$

Zur Erinnerung: Ein Paar bestehend aus einem Objekt K und einem Element $k \in$ F(K) stellt genau dann einen Funktor $F: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ dar, wenn es folgende universelle Eigenschaft hat: Für jedes Objekt K' und jedes Element $k' \in F(K')$ existiert genau ein Morphismus $h: K' \to K$ mit k' = F(h)(k).

Aufgabe 2. Kerne und Monomorphismen

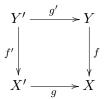
Sei $\varphi: X \to Y$ ein Morphismus in einer Kategorie \mathcal{C} , die die Axiome A1 und A2 erfüllt.

- a) Zeige, dass φ genau dann ein Monomorphismus (d. h. linkskürzbar) ist, wenn das Nullobjekt zusammen mit dem eindeutigen Morphismus nach X ein Kern von φ ist.
- b) Formuliere und beweise mit wenig Aufwand die duale Aussage.
- c) Sei \mathcal{C} sogar abelsch und φ sowohl ein Mono- als auch ein Epimorphismus. Zeige, dass φ dann sogar ein Isomorphismus ist. (Man sagt auch, abelsche Kategorien seien balanciert. Welche wichtigen Kategorien sind nicht balanciert?)

Aufgabe 3. Rückzug von Mono- und Epimorphismen

Sei in einer beliebigen Kategorie \mathcal{C} ein Faserproduktdiagramm gegeben.

- a) Zeige: Ist f ein Monomorphismus, so auch f'.
- b) Sei \mathcal{C} sogar abelsch. Zeige: Ist f ein Epimorphismus, so auch f'. Tipp: Vollziehe die Behauptung erst im Fall $\mathcal{C} = R$ -Mod nach. Hole dir dann bessere Tipps ab.



Aufgabe 4. Prägarben abelscher Gruppen

Zeige, dass die Kategorie der Prägarben abelscher Gruppen auf einem topologischem Raum (oder einer Örtlichkeit) eine abelsche Kategorie ist.

Aufgabe 5. Homotopietheorie von Nerven

- a) Sei $\eta: F \to G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Zeige, dass die induzierten simplizialen Abbildungen $NF, NG: N\mathcal{C} \to N\mathcal{D}$ zwischen den Nerven zueinander homotop sind.
- b) Sei $F \dashv G$ ein adjungiertes Funktorpaar. Zeige, dass NF eine Homotopieäquivalenz ist (mit NG als schwachem Inversen).
- c) Sei \mathcal{C} eine Kategorie, die ein initiales oder terminales Objekt besitzt. Zeige, dass $N\mathcal{C}$ zusammenziehbar ist, d. h. homotopieäquivalent zu einem Punkt.
 - Tipp: Elegant kann man das mit Teilaufgabe b) lösen.