Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

Übungsblatt 11 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. *Basiswissen zu Gruppoiden*

Ein *Gruppoid* ist eine Kategorie, in der alle Morphismen invertierbar sind.

a) Erkläre, wie man aus einer Gruppe G einen Gruppoid BG mit genau einem Objekt machen kann.

b) Verstehe, inwieweit Gruppoide mit genau einem Objekt dasselbe wie Gruppen sind.

c) Erläutere, inwieweit eine G-Menge dasselbe ist wie ein Funktor $BG \to \mathrm{Set}$.

d) Finde (neben dem Fundamentalgruppoid aus der nächsten Aufgabe) natürliche Beispiele für Gruppoide mit mehr als einem Objekt.

Aufgabe 2. *Überlagerungen und Darstellungen des Fundamentalgruppoids*

Der *Fundamentalgruppoid* $\Pi_1(X)$ eines topologischen Raums X hat als Objekte die Punkte von X und als Morphismen von x zu y Homotopieklassen von Wegen von x nach y (wobei Homotopien die Endpunkte bewahren müssen). Als 1-Kategorie ist er eine Approximation des Fundamental-2-Gruppoids von X (welcher wiederum eine Approximation des Fundamental-∞-Gruppoids ist).

a) Sei $x_0 \in X$. Mache dir klar, dass $\mathrm{End}_{\Pi_1(X)}(x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$ als Gruppen.

b) Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung. Dann erhält man eine *mengenwertigen Darstellung von* $\Pi_1(X)$, das heißt einen Funktor $\Pi_1(X) \to \mathrm{Set}$. Auf Objektniveau ist dieser durch die Setzung $x \mapsto \pi^{-1}[\{x\}]$ gegeben.

   Erkläre, wie dieser auf Morphismenniveau spezifiert werden soll. Weise insbesondere die Wohldefiniertheit deiner Setzung nach.

   Tipp: Es gibt ein Lemma über die eindeutige Liftbarkeit von Wegen.

Wenn X lokal wegweise zusammenhängend und semi-lokal einfach zusammenhängend ist, ist die Kategorie der Überlagerungen von X äquivalent zur Kategorie der mengenwertigen Darstellungen von $\Pi_1(X)$. Diese Kategorienäquivalent verfeinert die in der Vorlesung angesprochene Äquivalenz zwischen Überlagerungen und $\pi_1(X, x_0)$-Mengen, die die eine Basispunktwahl erfordert und nur funktioniert, wenn X wegweise zusammenhängend ist.

c) Verifiziere so viele Details dieser Äquivalenz oder der Äquivalenz der Vorlesung, wie du möchtest. Interessant ist insbesondere folgender Aspekt:

   Sei $\widetilde{X}$ die *universelle Überlagerung* von X bezüglich eines Basispunkts x_0. Die Punkte von $\widetilde{X}$ sind Homotopieklassen von Wegen, deren Anfangspunkt x_0 und deren Endpunkt beliebig ist. (Die Homotopien müssen Anfangs- und Endpunkt bewahren.) Topologisiert wird $\widetilde{X}$ als Quotientenraum eines Unterraums des Raums der Abbildungen $[0, 1] \to X$; dieser trägt die Kompakt-Offen-Topologie. Es gibt eine kanonische stetige Abbildung $\pi : \widetilde{X} \to X$, die der Äquivalenzklasse eines Wegs ihren Endpunkt zuordnet.

Sei dann ein beliebiger bei x_0 beginnender Weg γ in X und ein Urbild z von x_0 unter π gegeben. Dann gibt es einen *Lift* von γ auf $\widetilde{X}$, das heißt einen Weg $\widetilde{\gamma}$ in $\widetilde{X}$ mit $\widetilde{\gamma}(0) = z$ und $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.

Hinweis: Mit Notation aus Homotopietyptheorie macht der Beweis mehr Spaß.

d) Sei konkret $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $Y \to X$ der Totalraum der Garbe

$$U \subseteq X \longmapsto \{y \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \,|\, y'(z) = \tfrac{1}{2z} y(z) \text{ für alle } z \in U\}.$$

Da diese Garbe lokal konstant ist, ist $Y \to X$ eine Überlagerung und induziert damit eine Darstellung von $\Pi_1(X)$.

Zeige: Die Wirkung dieser Darstellung auf einer Schleife in X, die sich genau einmal um den Ursprung windet, ist die Abbildung $[y] \mapsto [-y]$.

Aufgabe 3. *Ideale in Banachalgebren*

Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal in einer Banachalgebra A. Zeige, dass der topologische Abschluss von $\mathfrak{a}$ wieder ein Ideal ist. Folgere, dass maximale Ideale in Banachalgebren stets abgeschlossen sind.

Bemerkung: Die Äquivalenz zwischen C*-Algebren und kompakten Hausdorffräumen benötigt das Auswahlaxiom. Eine Verfeinerung dieser Äquivalenz gilt aber auch konstruktiv: C*-Algebren sind äquivalent zu vollständig regulären *Örtlichkeiten*. Dieses Resultat findet Anwendung in der Theorie der *Bohr-Topoi* zu quantenmechanischen Systemen.

Aufgabe 4. *Pontrjagin-Dualität*

Aufgabe 5. *Absolute Galoisgruppe ohne Abschlusswahl*