Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 16 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Universelle Eigenschaft der Garbifizierung*

Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben auf einem topologischen Raum X (oder einer Örtlichkeit). Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben. Sei $\mathcal{G}$ sogar eine Garbe. Sei $\mathcal{F} \xrightarrow{\iota} s(\mathcal{F})$ die Garbifizierung von $\mathcal{F}$. Konstruiere einen Garbenmorphismus $\overline{\alpha} : s(\mathcal{F}) \to \mathcal{G}$ mit $\overline{\alpha} \circ \iota = \alpha$ und weise insbesondere seine Wohldefiniertheit nach.

Aufgabe 2. *Halme des Pushforwards*

a) Sei X ein topologischer Raum. Sei $f : Y \hookrightarrow X$ die Inklusion eines abgeschlossenen Teilraums. Sei $\mathcal{E}$ eine Garbe auf Y. Zeige:

$$(f_*\mathcal{E})_x \cong \begin{cases} \mathcal{E}_x, & \text{falls } x \in Y, \\ \{0\}, & \text{falls } x \notin Y. \end{cases}$$

b) Mache dir anhand eines Beispiels klar, dass die analoge Aussage für Inklusionen offener Teilräume im Allgemeinen nicht gilt.

c) Folgere, dass der Pushforward-Funktor $f_* : \mathrm{AbShv}(Y) \to \mathrm{AbShv}(X)$ in der Situation von Teilaufgabe a) exakt ist.

d) Sei $f : Y \to X$ eine abgeschlossene stetige Abbildung. Sei $\mathcal{E}$ eine Garbe auf Y. Sei $x \in X$. Zeige: $(f_*\mathcal{E})_x \cong \Gamma(f^{-1}[x], \mathcal{E})$.

   Hinweis: Beachte, dass die Faser $f^{-1}[x]$ im Allgemeinen nicht offen sein wird. Die rechte Seite ist daher als Kolimes über die $\mathcal{E}(U)$, wobei $U \subseteq Y$ alle offenen Mengen mit $f^{-1}[x] \subseteq U$ durchläuft, definiert.

   Tipp: Eine stetige Abbildung $f : Y \to X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle $x \in X$ und alle offenen Umgebungen U von $f^{-1}[x]$ in Y eine offene Umgebung V von x mit $f^{-1}[V] \subseteq U$ existiert. (Siehe XXX.)

Jordan–Hölder

Serresche Quotientenkategorien

AB5