Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

Übungsblatt 4 zur Homologischen Algebra I

– Motto –

Aufgabe 1. *Äquivalenzrelationen I*

Sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$ eine Relation auf X (also lediglich eine Teilmenge, nicht unbedingt eine Äquivalenzrelation). Sei $(\sim_R)$ der Schnitt über alle Äquivalenzrelation S auf X, welche R umfassen.

a) Zeige: Der Schnitt $(\sim_R)$ ist wieder eine Äquivalenzrelation auf X – und zwar die feinste, die R umfasst. (Was bedeutet das? Für jede weitere Äquivalenzrelation ...)

b) Zeige, dass diese auch explizit *(prädikativ)* wie folgt beschrieben werden kann:

$$x \sim_R y \quad \iff \quad \exists n \geq 0\colon \exists x_1, \ldots, x_n \in X.\ xRx_1 \wedge x_1Rx_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}Rx_n \wedge x_nRy.$$

c) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Gelte $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in X$ mit xRy. Zeige: Die Setzung $\bar{f} : X/{\sim_R} \to Y,\ [x] \mapsto f(x)$ ist wohldefiniert.

Hinweis: Spannender ist es, wenn man diese Teilaufgabe direkt mit a) und ohne Verwendung von b) löst.

Aufgabe 2. *Äquivalenzrelationen II*

Seien Z eine Menge und R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen auf Z. Sei $\sim$ folgende Relation auf Z/R_1:

$$K \sim L \quad :\iff \quad \exists x \in K, y \in L\colon xR_2y.$$

Sei ferner R die feinste Äquivalenzrelation auf Z, welche $R_1 \cup R_2$ umfasst.

a) Wieso ist $\sim$ im Allgemeinen keine Äquivalenzrelation? (Bemühe dich nicht, ein konkretes Gegenbeispiel aufzustellen.)

b) Sei $\approx$ die feinste Äquivalenzrelation auf Z/R_1, welche $\sim$ umfasst. Gib eine kanonische Abbildung $Z/R \to (Z/R_1)/{\approx}$ an und zeige, dass sie eine wohldefinierte Bijektion ist.

c) Sei Z sogar ein topologischer Raum. Zeige dann, dass die Bijektion aus Teilaufgabe b) sogar ein Homöomorphismus ist. Die diversen Faktormengen sollen dabei die Quotiententopologie tragen.