Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 22 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Erzeugte Unterkategorie*

Sei X ein Objekt einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Sei $\langle X \rangle \subseteq \mathcal{A}$ die volle Unterkategorie aller direkten Summen direkter Summanden von X. Diese Unterkategorie wird eine additive Kategorie.

a) Sei $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, X) = 0$ für alle $i > 0$. Zeige, dass der kanonische Funktor $K^b(\langle X \rangle) \to D^b(\mathcal{A})$ volltreu ist.

b) Gelte außerdem, dass jedes Objekt aus $\mathcal{A}$ eine endliche Auflösung durch Objekte aus $\langle X \rangle$ besitzt. Zeige, dass der Funktor aus a) dann sogar eine Äquivalenz ist.

Aufgabe 2. *Auflösungen unbeschränkter Komplexe*

Eine *projektive Linksauflösung* eines Komplexes $K^\bullet$ ist ein Komplex $P^\bullet$ aus Projektiven zusammen mit einem Quasiisomorphismus $P^\bullet \to K^\bullet$. Zeige, dass unbeschränkte Komplexe auch bis auf Homotopieäquivalenz nicht unbedingt eindeutige projektive (ihrerseits unbeschränkte) Linksauflösungen besitzen müssen.

Tipp: Zeige, dass der Komplex $P^\bullet : \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/(4) \xrightarrow{2} \cdots$ abelscher Gruppen eine projektive Linksauflösung des Nullkomplexes ist, aber nicht homotopieäquivalent zum Nullkomplex ist.

Aufgabe 3. *Kategorielle Charakterisierung von Endlichkeitseigenschaften*

a) Zeige, dass ein A-Modul M genau dann endlich erzeugt ist, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}(M, \_) : \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Set}$ mit filtrierten Kolimiten von Monomorphismen vertauscht, dass also für jedes filtrierte Diagramm $(V_i)_i$, in der die Übergangsabbildungen $V_i \to V_j$ alle injektiv sind, folgende kanonische Abbildung bijektiv ist.

$$\mathrm{colim}_i \, \mathrm{Hom}(M, V_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathrm{colim}_i \, V_i)$$

b) Zeige, dass ein A-Modul M genau dann endlich präsentiert ist, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}(M, \_)$ mit beliebigen filtrierten Kolimiten vertauscht.

Wird nach dem Mittagessen noch ergänzt.