Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2014

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 3 zur Homologischen Algebra I

– Operationen mit simplizialen Mengen –

Aufgabe 1. *Simpliziale Abbildungen*

Eine *simpliziale Abbildung* $F : X \to Y$ zwischen simplizialen Mengen X und Y ist eine Familie von (mengentheoretischen) Abbildungen $F_n : X_n \to Y_n$ für alle $n \geq 0$ sodass für alle monotonen Abbildungen $f : [n] \to [m]$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} X_m \arrow[r, "F_m"] \arrow[d, "X(f)"'] & Y_m \arrow[d, "Y(f)"] \\ X_n \arrow[r, "F_n"'] & Y_n \end{tikzcd}$$

a) Was besagt die Kommutativitätsbedingung anschaulich? Denke etwa an den Fall, dass f eine Koentartungsabbildung ist.

b) Zeige, dass eine simpliziale Abbildung $F : X \to Y$ auf kanonische Art und Weise eine stetige Abbildung $|F| : |X| \to |Y|$ zwischen den geometrischen Realisierungen induziert. (Gib die induzierte Abbildung explizit an und weise Wohldefiniertheit und Stetigkeit nach. Später werden wir lernen, wie man die händigen Nachweise durch abstrakten Nonsens ersetzen kann.)

c) Wie sollte man die simpliziale Identitätsabbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ für eine simpliziale Menge X definieren? Wie die Verkettung von simplizialen Abbildungen?

d) Weise folgende *Funktorialitätseigenschaft* nach: Für simpliziale Identitätsabbildungen gilt $|\mathrm{id}_X| = \mathrm{id}_{|X|}$, und für komponierbare simpliziale Abbildungen $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z$ gilt $|G \circ F| = |G| \circ |F|$.

Wir werden später lernen, dass eine simpliziale Menge nichts anderes ist als ein Funktor $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$. Eine simpliziale Abbildung ist dann nichts anderes als eine natürliche Transformation zwischen Funktoren. Teilaufgabe d) zeigt, dass „geometrische Realisierung bilden" ein Funktor $\mathrm{sSet} \to \mathrm{Top}$ ist.

Aufgabe 2. *Geometrische Realisierung von Verklebedaten vs. simplizialen Mengen*

Sei X ein Verklebedatum und $\widetilde{X}$ die zugehörige simpliziale Menge (wie in Aufgabe 2 von Übungsblatt 2). Zeige, dass die geometrische Realisierung von X (als Verklebedatum) mit der von $\widetilde{X}$ (als simpliziale Menge) übereinstimmt. Gib also eine kanonische Abbildung $|\widetilde{X}| \to |X|$ an und zeige, dass sie ein Homöomorphismus ist.

– Bitte wenden. –

Aufgabe 3. *Skelette von simplizialen Mengen*

Sei X eine simpliziale Menge. Ihr n-*Skelett* $\operatorname{sk}_n X$ ist die simpliziale (Unter-)Menge mit

$$(\operatorname{sk}_n X)_p := \{x \in X_p \mid \exists q \leq n,\ f : [p] \to [q],\ y \in X_q \colon x = X(f)y\} \subseteq X_p.$$

Die Wirkung auf monotone Abbildungen g, also $(\operatorname{sk}_n X)(g)$, definiert man als Einschränkung der Abbildung $X(g)$. Man kann nachrechnen, dass diese Konstruktion wirklich zu einer simplizialen Menge führt.

a) Was ist $\operatorname{sk}_n X$ anschaulich?

b) Zeige, dass $|\operatorname{sk}_n X|$ in kanonischer Weise eine *abgeschlossene* Teilmenge von $|X|$ ist.