

Übungsblatt 16 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Universelle Eigenschaft der Garbifizierung*

Seien \mathcal{F} und \mathcal{G} Prägarben auf einem topologischen Raum X (oder einer Örtlichkeit). Sei $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben. Sei \mathcal{G} sogar eine Garbe. Sei $\mathcal{F} \xrightarrow{\iota} s(\mathcal{F})$ die Garbifizierung von \mathcal{F} . Konstruiere einen Garbenmorphismus $\bar{\alpha} : s(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{G}$ mit $\bar{\alpha} \circ \iota = \alpha$ und weise insbesondere seine Wohldefiniertheit nach.

Aufgabe 2. *Halme des Pushforwards*

- a) Sei X ein topologischer Raum. Sei $f : Y \hookrightarrow X$ die Inklusion eines abgeschlossenen Teilraums. Sei \mathcal{E} eine Garbe auf Y . Zeige:

$$(f_*\mathcal{E})_x \cong \begin{cases} \mathcal{E}_x, & \text{falls } x \in Y, \\ \{0\}, & \text{falls } x \notin Y. \end{cases}$$

- b) Mache dir anhand eines Beispiels klar, dass die analoge Aussage für Inklusionen offener Teilräume im Allgemeinen nicht gilt.
- c) Folgere, dass der Pushforward-Funktor $f_* : \text{AbShv}(Y) \rightarrow \text{AbShv}(X)$ in der Situation von Teilaufgabe a) exakt ist.
- d) Sei $f : Y \rightarrow X$ eine abgeschlossene stetige Abbildung. Sei \mathcal{E} eine Garbe auf Y . Sei $x \in X$. Zeige: $(f_*\mathcal{E})_x \cong \Gamma(f^{-1}[x], \mathcal{E})$.

Hinweis: Beachte, dass die Faser $f^{-1}[x]$ im Allgemeinen nicht offen sein wird. Die rechte Seite ist daher als Kolimes über die $\mathcal{E}(U)$, wobei $U \subseteq Y$ alle offenen Mengen mit $f^{-1}[x] \subseteq U$ durchläuft, definiert.

Tipp: Eine stetige Abbildung $f : Y \rightarrow X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle $x \in X$ und alle offenen Umgebungen U von $f^{-1}[x]$ in Y eine offene Umgebung V von x mit $f^{-1}[V] \subseteq U$ existiert.