Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 21 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Ext und Auflösungen*

a) Zeige, dass die kanonische Abbildung $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ für $X^\bullet \in \mathrm{Kom}^-(\mathcal{P})$ oder für $Y^\bullet \in \mathrm{Kom}^+(\mathcal{I})$ ein Isomorphismus ist. Dabei ist $\mathcal{P}$ (bzw. $\mathcal{I}$) die Klasse der projektiven (bzw. injektiven) Objekte einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$.

Tipp: Ist $s : I^\bullet \to W^\bullet$ in Quasiiso in $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, wobei $I^\bullet \in \mathrm{Kom}^+(\mathcal{I})$, so gibt es einen Morphismus $t : W^\bullet \to I^\bullet$ mit $ts \simeq \mathrm{id}$.

b) Seien X und Y Objekte einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Zeige, dass $\mathrm{Ext}^\bullet(X, Y) := \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X[0], Y[n])$ wie klassisch bekannt über eine projektive Auflösung von X oder eine injektive Auflösung von Y berechnet werden kann.

Aufgabe 2. *Die homologische Dimension erblicher Ringe*

a) Zeige, dass die homologische Dimension der Kategorie aller (nicht nur kohärenter) Moduln über einem erblichen Ring ≤ 1 ist.

b) Zeige, dass Hauptidealbereiche erblich sind.

Hinweis: Ein Ring R heißt genau dann *erblich* (engl. *hereditary*), wenn Untermoduln projektiver R-Moduln projektiv sind. Dafür genügt es schon, wenn alle Ideale von R als R-Moduln projektiv sind, siehe Lam, *Lectures on modules and rings*, Thm. 2.24.

Aufgabe 3. *Bewahrung von Injektiven*

Beweise, dass additive Funktoren, die einen linksexakten Linksadjungierten besitzen, injektive Objekte bewahren.

Aufgabe 4. *Die Feinstruktur von Vektorraumendomorphismen*

Sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.

a) Zeige mit der Smithschen Normalform, dass V_φ isomorph zu einer direkten Summe der Form $\bigoplus_i k[T]/(f_i)$ ist, wobei die f_i normierte Polynome mit $f_1 | f_2 | \cdots | f_k$ sind. Wie sieht die Darstellungsmatrix von φ aus, wenn man in jedem Summanden die Basis $[1], [t], \ldots, [t^{\deg f_i - 1}]$ wählt? Diese Matrix heißt *Frobeniussche Normalform.*

b) Zeige, dass sich V_φ weiter in Summanden der Form $k[T]/(p^r)$, wobei p irreduzibel ist, zerlegen lässt. Welche Basis muss man, im Fall dass diese Polynome p alle linear sind, in den Summanden wählen, damit die zugehörige Darstellungsmatrix die bekannte *Jordansche Normalform* ist?

Hinweis: Durch die Setzung $f(t) \cdot v := f(\varphi)(v)$ wird V zu einem $k[t]$-Modul, notiert V_φ. Als solcher ist er endlich präsentiert mit Präsentationsmatrix $tI - A$, wenn A eine Darstellungsmatrix von V ist; es gilt also $V_\varphi \cong \mathrm{coker}(tI - A : k[t]^m \to k[t]^n)$.

Aufgabe 5. *Die K-Theorie der Endomorphismenkategorie*

Zeige, dass $K(\mathrm{Vect}(k)_{\mathrm{findim}}[T])$ isomorph ist zur multiplikativen Gruppe der rationalen Funktionen mit normiertem Zähler- und Nennerpolynom.

Hinweis: Es ist $\mathrm{Vect}(k)_{\mathrm{findim}}[T]$ die Kategorie der Endomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume über einem Körper k: Objekte sind Paare (V, φ) bestehend aus einem endlich-dimensionalen Vektorraum V und einem Endomorphismus $\varphi : V \to V$, Morphismen sind kommutative Quadrate. Das *charakteristische Polynom* einen solchen Paars ist $\det(xI - A) \in k[x]$. Zeige, dass das charakteristische Polynom multiplikativ in kurzen exakten Sequenzen ist, und verwende diese Erkenntnis, um den gesuchten Isomorphismus zu definieren.