Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2014

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 7 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. *Funktorialität der langen exakten Sequenz*

Sei ein kommutatives Diagramm von (Koketten-)Komplexen und Komplexmorphismen gegeben, dessen Zeilen exakte Sequenzen sind:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f^\bullet"'] & B^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "g^\bullet"'] & C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h^\bullet"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{A}^\bullet \arrow[r] & \widetilde{B}^\bullet \arrow[r] & \widetilde{C}^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Bekanntlich induzieren die beiden kurzen exakten Sequenzen dann lange exakte Sequenzen in Kohomologie. Zeige, dass diese folgendes Diagramm kommutieren lassen:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(A^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(f^\bullet)"'] & H^n(B^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(g^\bullet)"'] & H^n(C^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(h^\bullet)"'] & H^{n+1}(A^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H^{n+1}(f^\bullet)"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^n(\widetilde{A}^\bullet) \arrow[r] & H^n(\widetilde{B}^\bullet) \arrow[r] & H^n(\widetilde{C}^\bullet) \arrow[r] & H^{n+1}(\widetilde{A}^\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Wenn du schon weißt, was ein Funktor ist, dann erkläre den Titel der Aufgabe!

Aufgabe 2. *Degenerierte Ketten*

Sei A eine simpliziale abelsche Gruppe und $CA_\bullet$ der zugehörige Komplex abelscher Gruppen mit $CA_n = A_n$ und Differential $d = \sum_i (-1)^i A(\partial^i)$. Sei $DA_\bullet \hookrightarrow CA_\bullet$ der Unterkomplex der *degenerierten Ketten* (siehe Rückseite).

a) Zeige: Das Differential $d : CA_n \to CA_{n-1}$ bildet die Elemente aus DA_n auf Elemente aus DA_{n-1} ab.

Mit den Einschränkungen von d wird damit $DA_\bullet$ zu einem Komplex und die kanonischen Injektionen $DA_\bullet \to NA_\bullet$ werden zu einem Komplexmorphismus.

b) Zeige: $H_n(CA_\bullet) \cong H_n(CA_\bullet / DA_\bullet)$, auf kanonische Art und Weise.

c) Sei nun X eine simpliziale Menge, sodass Ränder nichtdegenerierter Simplizes wieder nichtdegeneriert sind (vgl. Blatt 2, Aufgabe 2). Erinnere dich, dass $A_n := \mathbb{Z}\langle X_n \rangle$ (freie abelsche Gruppe auf den Elementen von X_n) zu einer simplizialen abelschen Gruppe wird. Sei $\widetilde{A}_n := \mathbb{Z}\langle X_{(n)} \rangle$ die freie abelsche Gruppe auf den nichtdegenerierten n-Simplizes.

   Überlege zunächst, wie $\widetilde{A}$ zu einem Verklebedatum abelscher Gruppen wird. Zeige dann: $H_n(C\widetilde{A}_\bullet) \cong H_n(CA_\bullet)$. Damit ist also gerechtfertigt, dass man sich bei Berechnung von Homologie auf die nichtdegenerierten Simplizes einschränken darf.

Auf der Rückseite gibt es einen ausführlichen Tipp zu Teilaufgabe b).

Der Unterkomplex der degenerierten Ketten ist in Grad n durch

$$DA_n := \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{im}(A(\sigma^i) : A_{n-1} \to A_n) \subseteq CA_n$$

gegeben. Mit dem Summensymbol ist die Summe von Untergruppen gemeint. Ferner benötigen wir den *normalisierten Moore-Komplex* $NA_\bullet$ mit

$$NA_n := \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(A(\partial^i) : A_n \to A_{n-1}) \qquad \text{(nicht bis } n!)$$

und für alle $j \geq 0$ die Unterkomplexe $N^j A_\bullet$ mit

$$N^j A_n := \begin{cases} \bigcap_{i=0}^{j} \ker(A(\partial^j) : A_n \to A_{n-1}), & \text{für } n \geq j+2, \\ NA_n, & \text{für } n \leq j+1. \end{cases}$$

Konventionsgemäß gilt $N^{-1}A_n = CA_n$ (leere Schnitte!). Der Quotientenkomplex $CA_\bullet/DA_\bullet$ ist in Grad n durch die Faktorgruppe CA_n/DA_n gegeben. Das Differential schickt $[x] \mapsto [dx]$ und ist wegen Teilaufgabe a) wohldefiniert. Folgende voneinander unabhängig bearbeitbaren Schritte führen zum Ziel.

1. Der kanonische Morphismus $NA_\bullet \to CA_\bullet/DA_\bullet$ ist ein Isomorphismus von Kettenkomplexen.

   Tipp: Zeige mit Induktion über j, dass für $0 \leq j \leq n-1$ die Verkettung $N^j A_n \hookrightarrow CA_n \twoheadrightarrow CA_n/D^j A_n$ ein Isomorphismus ist, wobei $D^j A_n = \sum_{i=0}^{j} \operatorname{im}(A(\sigma^i))$. Die Behauptung folgt dann für $j = n-1$. Schon der Induktionsanfang $j = 0$ ist interessant.

2. Die $N^j A_\bullet$ sind für alle $j \geq 0$ wirklich Komplexe, mit dem Differential von $CA_\bullet$.

3. Sei $e^j : N^{j+1}A_\bullet \hookrightarrow N^j A_\bullet$ die Einbettung. Wir definieren eine Möchtegernumkehrung $f^j : N^j A_\bullet \to N^{j+1} A_\bullet$ durch

   $$(f^j)_n(x) := \begin{cases} x - A(\sigma^{j+1})A(\partial^{j+1})x, & \text{für } n \geq j+2, \\ x, & \text{für } n \leq j+1. \end{cases}$$

   Dann ist f^j in dem Sinne wohldefiniert, als dass es wirklich Werte in $N^{j+1}A_\bullet$ annimmt, und f^j ist ein Komplexmorphismus.

4. Es gilt $f^j \circ e^j = \mathrm{id}_{N^{j+1}A_\bullet}$.

5. Es gilt $\mathrm{id}_{N^j A_\bullet} - e^j f^j = dt^j + t^j d : N^j A_\bullet \to N^j A_\bullet$. Dabei ist

   $$(t^j)_n(x) := \begin{cases} (-1)^j A(\sigma^{j+1}), & \text{für } n \geq j+1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

6. Sei $e : NA_\bullet \to CA_\bullet$ die Einbettung. Dann definiert die Verkettung

   $$CA_n = N^{-1}A_n \xrightarrow{f^{-1}} N^0 A_n \xrightarrow{f^0} \cdots \xrightarrow{f^{n-2}} N^{n-1}A_n = NA_n$$

   einen Komplexmorphismus $f : CA_\bullet \to NA_\bullet$ mit $f \circ e = \mathrm{id} : NA_\bullet \to NA_\bullet$.

7. Die Morphismen $T_n : CA_n \to CA_{n+1}$ mit

   $$T_n = e^0 \cdots e^{n-2} t^{n-1} f^{n-2} \cdots f^0 + e^0 \cdots e^{n-3} t^{n-2} f^{n-3} \cdots f^0 + \cdots + e^0 t^1 f^0 + t^0$$

   bezeugen die Kettenhomotopie $e \circ f \simeq \mathrm{id}_{CA_\bullet}$. Also ist f eine Kettenhomotopieäquivalenz und induziert daher in Kohomologie Isomorphismen.

Diese Art der Beweisführung findet sich etwa in Goerss, Jardine: *Simplicial Homotopy Theory* (Seiten 145ff.).