Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 25 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Čech-Methoden zur Berechnung von Garbenkohomologie*

Für eine Prägarbe $\mathcal{F}$ abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum ist die Gruppe der n-Čech-Koketten bezüglich einer Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_i$ von X definiert als $\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0,\ldots,i_n \in I} \mathcal{F}(U_{i_0 \cdots i_n})$, wobei $U_{i_0 \cdots i_n} := U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}$. Sei $\mathcal{F}$ im Folgenden sogar eine Garbe abelscher Gruppen.

a) Sei $\iota : \mathrm{AbSh}(X) \to \mathrm{AbPSh}(X)$ der Vergissfunktor. Sei $U \subseteq X$ eine offene Menge. Zeige: $(R^n \iota \mathcal{F})(U) \cong H^n(U, \mathcal{F})$.

   Tipp: Verwende die Grothendieck-Spektralsequenz für $\Gamma_U \circ \iota : \mathrm{AbSh}(X) \to \mathrm{Ab}$, wobei $\Gamma_U : \mathrm{AbPSh}(X) \to \mathrm{Ab}$ die Gruppe der U-Schnitte bestimmt. Benutze Aufgabe 3 von Blatt 21, um dazu eine technische Voraussetzung nachzuweisen.

b) Zeige: Die Garbifizierung der Prägarben $R^n \iota \mathcal{F}$ ist für $n \geq 1$ Null.

   Tipp: Verwende die Grothendieck-Spektralsequenz für $\mathrm{Id}_{\mathrm{AbSh}(X)} \cong s \circ \iota$, wobei s der Garbifizierungsfunktor ist.

c) Konstruiere zwei Spektralsequenzen mit

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, R^q \iota \mathcal{F}) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F}) \quad \text{und} \quad \check{H}^p(U, R^q \iota \mathcal{F}) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

   Hinweis: Es ist $\check{H}^p(U, \mathcal{E}) := \mathrm{colim}_{\mathcal{U}} \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{E})$, wobei $\mathcal{U}$ über alle offenen Überdeckungen von U läuft. Man kann zeigen, dass für verschiedene Verfeinerungen $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ die induzierten Morphismen $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \to \check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ übereinstimmen.

d) Gelte $H^q(U_{i_0 \cdots i_r}, \mathcal{F}) = 0$ für alle $q > 0$ und $r \geq 0$. Zeige: $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^p(X, \mathcal{F})$.

e) Zeige: Die Abbildung $\check{H}^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F})$ ist für $n = 0$ und für $n = 1$ ein Isomorphismus und für $n = 2$ ein Monomorphismus.

   Tipp: Verwende Aufgabe 2.

f) Zeige: Ist X parakompakt, ist die Abbildung sogar für alle $n \geq 0$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 2. *Die exakte Sequenz in niedrigen Graden zu einer Spektralsequenz*

XXX

Aufgabe 3. *Gruppenkohomologie*

Seite 214, Aufgabe 1