

Übungsblatt 6 zur Homologischen Algebra I

– Garben organisieren lokale Daten. –

Aufgabe 1. Beispiele für Garben

Sei X ein topologischer Raum. Das fundamentale Beispiel für eine Garbe auf X ist durch die Zuordnung

$$a) \mathcal{E} : U \longmapsto \{s : U \rightarrow E \mid s \text{ stetig mit } \pi \circ f = \text{id}|_U\}$$

und den gewöhnlichen Einschränkungsabbildungen gegeben. Dabei ist $\pi : E \rightarrow X$ eine feste stetige Abbildung. Zeige, dass \mathcal{E} tatsächlich eine Garbe ist.

Welche der folgenden Setzungen mit den gewöhnlichen Einschränkungsabbildungen führen zu Prägarben? Welche sogar zu Garben?

- b) $\mathcal{C} : U \longmapsto \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$
- c) $\mathcal{C}_{\text{const.}} : U \longmapsto \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ konstant}\}$
- d) $\mathcal{C}_{\text{l.c.}} : U \longmapsto \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lokal konstant}\}$
- e) $\mathcal{C}_0 : U \longmapsto \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ hat kompakten Träger in } U\}$
- f) $\mathcal{C}_{\text{bounded}} : U \longmapsto \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$

Aufgabe 2. Exakte Sequenzen von Garben

Eine Sequenz $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ von Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X heißt genau dann *exakt* (bei \mathcal{G}), wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

- „im $\subseteq \ker$ “. Für jeden Schnitt $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ gilt $\beta_U(\alpha_U(s)) = 0 \in \Gamma(U, \mathcal{H})$.
- „im $\supseteq \ker$ “. Für jeden Schnitt $t \in \Gamma(U, \mathcal{G})$ mit $\beta_U(t) = 0 \in \Gamma(U, \mathcal{H})$ existieren eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Schnitte $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$ mit $\alpha_{U_i}(s_i) = t|_{U_i}$ für alle $i \in I$.

Der Begriff der Exaktheit einer Sequenz von *Prägarben* abelscher Gruppen wurde anders definiert. Beide Definitionen fallen nicht vom Himmel, in ihrem jeweiligen Kontext (Garben bzw. Prägarben) sind sie jeweils genau die richtigen. Das werden wir noch verstehen.

- a) Zeige, dass eine Sequenz von Garben abelscher Gruppen genau dann exakt ist, wenn sie *halmweise exakt* ist, wenn also die induzierten Sequenzen $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ von abelschen Gruppen für alle $x \in X$ exakt sind.
- b) Sei $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ eine exakte Sequenz von *Prägarben*. Seien \mathcal{F} , \mathcal{G} und \mathcal{H} aber trotzdem sogar Garben. Zeige, dass die Sequenz dann auch als Sequenz von Garben exakt ist.
- c) Sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von *Prägarben* auf einem topologischen Raum. Seien \mathcal{F} und \mathcal{H} sogar Garben. Zeige, dass \mathcal{G} ebenfalls eine Garbe ist.

- d) *Schnitte nehmen ist linksexakt.* Sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen. Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Zeige, dass die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{H}) \twoheadrightarrow 0$$

noch exakt ist. Wieso geht die Surjektivität hinten verloren? (Wenn dem nicht so wäre, gäbe es übrigens das gesamte Teilgebiet der *Garbenkohomologie* nicht.)

Aufgabe 3. Inneres Hom

Seien \mathcal{F} und \mathcal{G} Prägarben auf einem topologischen Raum X . Dann definieren wir eine weitere Prägarbe durch die Setzung

$$\Gamma(U, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) := \{\alpha : \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U \text{ Morphismus von Prägarben auf } U\}$$

und die offensichtlichen Einschränkungsabbildungen (welche?).

Zeige: Ist \mathcal{G} sogar eine Garbe, so ist $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ebenfalls eine Garbe.

Aufgabe 4. Welche Garben

Eine Garbe \mathcal{F} auf einem topologischen Raum X heißt genau dann *welk* (engl. *flabby*, franz. *flasque*), wenn die Einschränkungsabbildungen $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ surjektiv sind.

- a) Zeige durch ein explizites Beispiel, dass die Garbe \mathcal{C} der stetigen Funktionen auf \mathbb{R} aus Aufgabe 1b) nicht welk ist.
- b) Sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X . Sei \mathcal{F} welk. Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Zeige, dass dann auch die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

exakt ist. Wegen dieser besonderen Eigenschaft sind welche Garben für die homologische Algebra wichtig.

Tipp: Opfere eine Katze, um geeignete maximale Fortsetzungen zu konstruieren.

- c) Sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X . Seien \mathcal{F} und \mathcal{G} welk. Zeige, dass dann auch \mathcal{H} welk ist.
- d) Sei $\pi : E \rightarrow X$ eine stetige Surjektion. Zeige, dass die Garbe $\tilde{\mathcal{E}}$ aller Schnitte von $E \xrightarrow{\pi} X$, also die Garbe mit $\Gamma(U, \tilde{\mathcal{E}}) = \{s : U \rightarrow E \mid \pi \circ s = \text{id}|_U\}$ und den gewöhnlichen Einschränkungsabbildungen, welk ist.
- e) Zeige, dass man jede Garbe auf einem topologischen Raum in eine geeignete welke Garbe einbetten kann.

Aufgabe 5. Weiche Garben

Eine Garbe \mathcal{F} auf einem topologischen Raum X heißt genau dann *weich* (engl. *soft*, franz. *mou*), wenn die Abbildungen $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(A, \mathcal{F})$ für alle *abgeschlossenen* Teilmengen $A \subseteq X$ surjektiv sind. (Zur Erinnerung: $\Gamma(A, \mathcal{F}) = \text{colim}_{U \subseteq X \text{ offen}, A \subseteq U} \Gamma(U, \mathcal{F})$.)

Weiche Garben werden vor allem auf parakompakten Hausdorffräumen studiert. Ein topologischer Raum ist genau dann *parakompakt*, wenn jede offene Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$

eine *lokal endliche Verfeinerung* $X = \bigcup_j V_j$ besitzt: Jede der offenen Teilmengen V_j soll in einer der Mengen U_i enthalten sein, und jeder Punkt von X soll in nur endlich vielen Mengen V_j liegen. Parakompakte Hausdorffräume haben ferner folgende besondere Eigenschaft: Zu jeder offenen Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$ existieren offene Mengen V_i mit $\overline{V_i} \subseteq U_i$, welche immer noch X überdecken.

- Zeige, dass die Garbe \mathcal{C} der stetigen Funktionen auf \mathbb{R} aus Aufgabe 1b) weich ist.
- Zeige, dass welche Garben stets weich sind.
- Sei X ein parakompakter Hausdorffraum. Zeige die analoge Behauptung wie bei Aufgabe 4b), nur mit „ \mathcal{F} weich“ statt „ \mathcal{F} welk“ und mit „ $A \subseteq X$ abgeschlossen“ statt „ $U \subseteq X$ offen“.
- Sei X ein parakompakter Hausdorffraum. Zeige die analoge Behauptung wie bei Aufgabe 4c), nur mit „weich“ statt „welk“.

Aufgabe 6. Feine Garben

Eine Garbe \mathcal{F} abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X heißt genau dann *fein* (engl. *fine*, franz. *fin*), wenn für je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen $A_1, A_2 \subseteq X$ ein Morphismus $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ von Garben abelscher Gruppen existiert, sodass α auf einer offenen Umgebung von A_1 Null und auf einer offenen Umgebung von A_2 die Identität ist. (Das bedeutet, dass es offene Mengen $U_1 \supseteq A_1$ und $U_2 \supseteq A_2$ gibt, sodass α_V für alle offenen Teilmengen $V \subseteq U_1$ die Nullabbildung und sodass α_V für alle offenen Teilmengen $V \subseteq U_2$ die Identitätsabbildung ist.)

- Zeige, dass feine Garben auf parakompakten Hausdorffräumen stets weich sind.
- Zeige, dass eine Garbe \mathcal{F} abelscher Gruppen auf einem parakompakten Hausdorffraum genau dann fein ist, wenn die Hom-Garbe $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ welk ist.

Tipp: Parakompakte Hausdorffräume sind *normal*, das heißt je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen besitzen offene disjunkte Umgebungen.

– Noch zu $T_E X$ en –

- Ausgelagerter Beweis: lokaler Homöomorphismus ...
- Affine Schemata

– Weitere mögliche Aufgaben –

- Halme von \mathcal{O}_X für $X = \mathbb{C}$ berechnen.
- Exaktheit der Sequenz $0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^\times \rightarrow 0$ nachrechnen.
- Verträglichkeit der beiden Definition für $\Gamma(A, \mathcal{F})$ nachrechnen, falls A sowohl offen als auch abgeschlossen ist.