

Übungsblatt 7 zur Homologischen Algebra I

Aufgabe 1. Funktorialität der langen exakten Sequenz

Sei ein kommutatives Diagramm von (Koketten-)Komplexen und Komplexmorphismen gegeben, dessen Zeilen exakte Sequenzen sind:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A^\bullet & \longrightarrow & B^\bullet & \longrightarrow & C^\bullet \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f^\bullet & & \downarrow g^\bullet & & \downarrow h^\bullet \\
 0 & \longrightarrow & \tilde{A}^\bullet & \longrightarrow & \tilde{B}^\bullet & \longrightarrow & \tilde{C}^\bullet \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Bekanntlich induzieren die beiden kurzen exakten Sequenzen dann lange exakte Sequenzen in Kohomologie. Zeige, dass diese folgendes Diagramm kommutieren lassen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H^n(A^\bullet) & \longrightarrow & H^n(B^\bullet) & \longrightarrow & H^n(C^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(A^\bullet) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow H^n(f^\bullet) & & \downarrow H^n(g^\bullet) & & \downarrow H^n(h^\bullet) \\
 \cdots & \longrightarrow & H^n(\tilde{A}^\bullet) & \longrightarrow & H^n(\tilde{B}^\bullet) & \longrightarrow & H^n(\tilde{C}^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(\tilde{A}^\bullet) \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Wenn du schon weißt, was ein Funktor ist, dann erkläre den Titel der Aufgabe!

Aufgabe 2. Degenerierte Ketten

Sei A eine simpliziale abelsche Gruppe und CA_\bullet der zugehörige Komplex abelscher Gruppen mit $CA_n = A_n$ und Differential $d = \sum_i (-1)^n A(\partial^i)$. Sei $DA_\bullet \hookrightarrow CA_\bullet$ der Unterkomplex der *degenerierten Ketten* (siehe Rückseite).

- a) Zeige: Das Differential $d : CA_n \rightarrow CA_{n-1}$ bildet die Elemente aus DA_n auf Elemente aus DA_{n-1} ab.

Mit den Einschränkungen von d wird damit DA_\bullet zu einem Komplex und die kanonischen Injektionen $DA_\bullet \rightarrow CA_\bullet$ werden zu einem Komplexmorphismus.

- b) Zeige: $H_n(CA_\bullet) \cong H_n(CA_\bullet/NA_\bullet)$, auf kanonische Art und Weise.
- c) Sei nun X eine simpliziale Menge, sodass Ränder nichtdegenerierter Simplizes wieder nichtdegeneriert sind (vgl. Blatt 2, Aufgabe 2). Erinnere dich, dass $A_n := \mathbb{Z}\langle X_n \rangle$ (freie abelsche Gruppe auf den Elementen von X_n) zu einer simplizialen abelschen Gruppe wird. Sei $\tilde{A}_n := \mathbb{Z}\langle X_{(n)} \rangle$ die freie abelsche Gruppe auf den nichtdegenerierten n -Simplizes.

Überlege zunächst, wie \tilde{A} zu einer simplizialen abelschen Gruppe wird. Zeige dann: $H_n(C\tilde{A}_\bullet) \cong H_n(CA_\bullet)$. Damit ist also gerechtfertigt, dass man sich bei Berechnung von Homologie auf die nichtdegenerierten Simplizes einschränken darf.

Auf der Rückseite gibt es einen ausführlichen Tipp zu Teilaufgabe b).

Der Unterkomplex der degenerierten Ketten ist in Grad n durch

$$DA_n := \sum_{i=0}^{n-1} \text{im}(A(\sigma^i) : A_{n-1} \rightarrow A_n) \subseteq CA_n$$

gegeben. Mit dem Summensymbol ist die Summe von Untergruppen gemeint. Ferner benötigen wir den *normalisierten Moore-Komplex* NA_\bullet mit

$$NA_n := \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(A(\partial^i) : A_{n-1} \rightarrow A_n) \quad (\text{nicht bis } n!)$$

und für alle $j \geq 0$ die Unterkomplexe $N^j A_\bullet$ mit

$$N^j A_n := \begin{cases} \bigcap_{i=0}^j \ker(A(\partial^i) : A_{n-1} \rightarrow A_n), & \text{für } n \geq j+2, \\ NA_n, & \text{für } n \leq j+1. \end{cases}$$

Konventionsgemäß gilt $N^{-1} A_n = CA_n$ (leere Schnitte!). Der Quotientenkomplex CA_\bullet/DA_\bullet ist in Grad n durch die Faktorgruppe CA_n/DA_n gegeben. Das Differential schickt $[x] \mapsto [dx]$ und ist wegen Teilaufgabe a) wohldefiniert. Folgende voneinander unabhängig bearbeitbaren Schritte führen zum Ziel.

1. Der kanonische Morphismus $NA_\bullet \rightarrow CA_\bullet/DA_\bullet$ ist ein Isomorphismus von Kettenkomplexen.

Tipp: Zeige mit Induktion über j , dass für $0 \leq j \leq n-1$ die Verkettung $N^j A_n \hookrightarrow CA_n \rightarrow CA_n/D^j A_n$ ein Isomorphismus ist, wobei $D^j A_n = \sum_{i=0}^j \text{im}(A(\sigma^i))$. Die Behauptung folgt dann für $j = n-1$. Schon der Induktionsanfang $j = 0$ ist interessant.

2. Die $N^j A_\bullet$ sind für alle $j \geq 0$ wirklich Komplexe, mit dem Differential von CA_\bullet .
3. Sei $e^j : N^{j+1} A_\bullet \hookrightarrow N^j A_\bullet$ die Einbettung. Wir definieren eine Möchtegernumkehrung $f^j : N^j A_\bullet \rightarrow N^{j+1} A_\bullet$ durch

$$(f^j)_n(x) := \begin{cases} x - A(\sigma^{j+1})A(\partial^{j+1})x, & \text{für } n \geq j+2, \\ x, & \text{für } n \leq j+1. \end{cases}$$

Dann ist f^j in dem Sinne wohldefiniert, als dass es wirklich Werte in $N^{j+1} A_\bullet$ annimmt, und f^j ist ein Komplexmorphismus.

4. Es gilt $f^j \circ e^j = \text{id}_{N^{j+1} A_\bullet}$.
5. Es gilt $\text{id}_{N^j A_\bullet} - e^j f^j = dt^j + t^j d : N^j A_\bullet \rightarrow N^j A_\bullet$. Dabei ist

$$(t^j)_n(x) := \begin{cases} (-1)^j A(\sigma^{j+1})x, & \text{für } n \geq j+1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

6. Sei $e : NA_\bullet \rightarrow CA_\bullet$ die Einbettung. Dann definiert die Verkettung

$$CA_n = N^{-1} A_n \xrightarrow{f^{-1}} N^0 A_n \xrightarrow{f^0} \dots \xrightarrow{f^{n-2}} N^{n-1} A_n = NA_n$$

einen Komplexmorphismus $f : CA_\bullet \rightarrow NA_\bullet$ mit $f \circ e = \text{id} : NA_\bullet \rightarrow NA_\bullet$.

7. Die Morphismen $T_n : CA_n \rightarrow CA_{n+1}$ mit

$$T_n = e^0 \dots e^{n-2} t^{n-1} f^{n-2} \dots f^0 + e^0 \dots e^{n-3} t^{n-2} f^{n-3} \dots f^0 + \dots + e^0 t^1 f^0 + t^0$$

bezeugen die Kettenkomotopie $e \circ f \simeq \text{id}_{CA_\bullet}$. Also ist f eine Kettenhomotopieäquivalenz und induziert daher in Kohomologie Isomorphismen.

Diese Art der Beweisführung findet sich etwa in Goerss, Jardine: *Simplicial Homotopy Theory* (Seiten 145ff.).