# Übungsblatt 14 zur Homologischen Algebra II

#### Aufgabe 1. Definition des Kerns

Sei  $\mathcal C$  eine Ab-angereicherte Kategorie. Sei  $\varphi:X\to Y$  ein Morphismus in  $\mathcal C$ . Zeige, dass für ein Objekt K zusammen mit einem Morphismus  $k:K\to X$  folgende Aussagen äquivalent sind:

- 1. Das Paar stellt den Funktor  $\mathcal{C}^{op} \to Ab$ ,  $T \mapsto \ker(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y))$  dar.
- 2. Das Paar hat folgende universelle Eigenschaft: Es gilt  $\varphi \circ k = 0$ , und zu jedem Morphismus  $k': K' \to X$  mit  $\varphi \circ k' = 0$  gibt es genau einen Morphismus  $h: K' \to K$  mit  $k' = k \circ h$ .
- 3. Für alle Objekte T ist folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt.

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T,K) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T,Y)$$

Zur Erinnerung: Ein Paar bestehend aus einem Objekt K und einem Element  $k \in F(K)$  stellt genau dann einen Funktor  $F: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$  dar, wenn es folgende universelle Eigenschaft hat: Für jedes Objekt K' und jedes Element  $k' \in F(K')$  existiert genau ein Morphismus  $h: K' \to K$  mit k' = F(h)(k).

#### Aufgabe 2. Kerne und Monomorphismen

Sei  $\varphi: X \to Y$  ein Morphismus in einer Kategorie  $\mathcal{C}$ , die die Axiome A1 und A2 erfüllt.

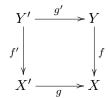
- a) Zeige, dass  $\varphi$  genau dann ein Monomorphismus (d. h. linkskürzbar) ist, wenn das Nullobjekt zusammen mit dem eindeutigen Morphismus nach X ein Kern von  $\varphi$  ist.
- b) Formuliere und beweise mit wenig Aufwand die duale Aussage.
- c) Sei  $\mathcal{C}$  sogar abelsch und  $\varphi$  sowohl ein Mono- als auch ein Epimorphismus. Zeige, dass  $\varphi$  dann sogar ein Isomorphismus ist. (Man sagt auch, abelsche Kategorien seien balanciert. Welche wichtigen Kategorien sind nicht balanciert?)

## Aufgabe 3. Rückzug von Mono- und Epimorphismen

Sei in einer beliebigen Kategorie  $\mathcal{C}$  ein Faserproduktdiagramm gegeben.

- a) Zeige: Ist f ein Monomorphismus, so auch f'.
- b) Sei  $\mathcal{C}$  sogar abelsch. Zeige: Ist f ein Epimorphismus, so auch f'.

  Tipp: Vollziehe die Behauptung erst im Fall  $\mathcal{C} = R$ -Mod nach. Hole dir dann bessere Tipps ab.



### Aufgabe 4. Prägarben abelscher Gruppen

Zeige, dass die Kategorie der Prägarben abelscher Gruppen auf einem topologischem Raum (oder einer Örtlichkeit) eine abelsche Kategorie ist.

## Aufgabe 5. Homotopietheorie von Nerven

- a) Sei  $\eta: F \to G$  eine natürliche Transformation zwischen Funktoren  $F, G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ . Zeige, dass die induzierten simplizialen Abbildungen  $NF, NG: N\mathcal{C} \to N\mathcal{D}$  zwischen den Nerven zueinander homotop sind.
- b) Sei  $F \dashv G$  ein adjungiertes Funktorpaar. Zeige, dass NF eine Homotopieäquivalenz ist (mit NG als schwachem Inversen).
- c) Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, die ein initiales oder terminales Objekt besitzt. Zeige, dass  $N\mathcal{C}$  zusammenziehbar ist, d. h. homotopieäquivalent zu einem Punkt.

Tipp: Elegant kann man das mit Teilaufgabe b) lösen.