Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2014/2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 23 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. *Abgeleitetes Dualisieren*

Sei A ein kommutativer Ring, der als Modul über sich selbst kohärent ist.

a) Zeige: $D^b(\mathrm{Mod}(A)_{\mathrm{coh}}) \simeq D^b(\mathrm{Mod}(A))_{\mathrm{coh}}$.

b) Sei $(\_)^{\mathbb{W}} : D^-(\mathrm{Mod}(A))^{\mathrm{op}} \to D^+(\mathrm{Mod}(A))$ die Rechtsableitung des Dualisierungsfunktors. Sei M ein kohärenter A-Modul. Zeige: $(M^{\mathbb{W}})^{\mathbb{W}} \cong M$.

Hinweis: Die Kategorie $\mathrm{Mod}(A)_{\mathrm{coh}}$ ist die volle Unterkategorie der kohärenten A-Moduln. Unter der Voraussetzung, dass A als Modul über sich selbst kohärent ist, ist das die kleinste volle abelsche Unterkategorie von $\mathrm{Mod}(A)$, welche alle freien Moduln endlichen Rangs enthält. Ist A noethersch (was du gerne voraussetzen darfst), sind die kohärenten Moduln gerade die endlich erzeugten. Die Kategorie $D^b(\mathrm{Mod}(A))_{\mathrm{coh}}$ ist die volle Unterkategorie derjenigen Komplexe, deren Kohomologiemoduln alle kohärent sind.

Aufgabe 2. *Auflösungen durch azyklische Objekte*

Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor. Existiere seine Rechtsableitung $RF : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$. Ein Objekt U heißt genau dann F-*azyklisch*, wenn $R^{\geq 1}F(U) = 0$.

a) Sei $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ eine kurze exakte Sequenz. Zeige, dass wenn X und Y oder X und Z jeweils F-azyklisch sind, dann auch das dritte Objekt F-azyklisch ist.

b) Sei $X^\bullet \in K^+(\mathcal{A})$ ein azyklischer Komplex aus F-azyklischen Objekten. Zeige, dass $F(X^\bullet)$ ebenfalls azyklisch ist.

c) Beweise Lerays Azyklizitätslemma: Ist $X^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$ ein Komplex, der nur aus F-azyklischen Objekten besteht, so ist der kanonische Morphismus $F(X^\bullet) \to RF(X^\bullet)$ ein Isomorphismus.

d) Folgere: Ist $0 \to M \to X^\bullet$ eine Auflösung durch F-azyklische Objekte, so ist $R^nF(M)$ kanonisch zu $H^n(F(X^\bullet))$ isomorph.

Tipp: Teilaufgabe c) baut nicht direkt auf den ersten beiden Teilaufgaben auf. Wenn du magst, dann beschränke dich in Teilaufgabe c) auf den Fall, dass $X^\bullet$ in beide Richtungen beschränkt ist. Führe einen Induktionsbeweis und verwende das ausgezeichnete Dreieck $\hat{\tau}_{\geq a+1}X^\bullet \to X^\bullet \to \hat{\tau}_{\leq a}X^\bullet \to$, das zwischen dummen Abschneidungen vermittelt. Teilaufgabe d) kann schnell aus c) gefolgert werden. Es gibt aber auch elementare Beweise, die c) nicht verwenden.

Aufgabe 3. *Triangulierte Kategorien*

Eine *triangulierte Kategorie* ist eine additive Kategorie $\mathcal{C}$ zusammen mit einer Autoäquivalenz $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ und einer Klasse *ausgezeichneter Dreiecke*, die die unten stehenden Axiome erfüllen (wobei wir „$X[1]$“ statt „$T(X)$“ schreiben). Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Beweise, dass $K^*(\mathcal{A})$ und $D^*(\mathcal{A})$ mit dem Verschiebungsfunktor und den gwöhnlichen ausgezeichneten Dreiecken triangulierte Kategorien sind. Auf den Nachweis von TR4 kannst du verzichten.

TR1 Für jedes Objekt X ist $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \to 0 \to$ ausgezeichnet.
Für jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ existiert ein Objekt Z und ein ausgezeichnetes Dreieck $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to$.
Jedes zu einem ausgezeichneten Dreieck isomorphe Dreieck ist selbst ausgezeichnet.

TR2 Ist $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h}$ ein ausgezeichnetes Dreieck, so ist auch $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]}$ ausgezeichnet.

TR3 Jedes kommutative Diagramm der abgebildeten Form, in dem die beiden Zeilen ausgezeichnete Dreiecke sind, kann vermöge eines (nicht notwendigerweise eindeutigen!) gestrichelt eingezeichneten Morphismus zu einem Morphismus von Dreiecken ergänzt werden.

TR4 Das zu Unrecht gefürchtete Oktaederaxiom.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed] & {} \\ \widetilde{X} \arrow[r] & \widetilde{Y} \arrow[r] & \widetilde{Z} \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Hinweis: Die Uneindeutigkeit des Morphismus in TR3 – die fehlende Funktorialität der Kegel – führt zu gravierenden Problemen. Zum Glück sind die meisten in der Natur vorkommenden triangulierten Kategorien nur die 1-kategoriellen Schatten von stabilen $(\infty, 1)$-Kategorien, die diese Probleme nicht haben.