

Übungsblatt 20 zur Homologischen Algebra II

Aufgabe 1. Beispiele für Ext-Gruppen

- a) Seien A und B abelsche Gruppen. Sei U eine Untergruppe von A . Sei $f : U \rightarrow B$ ein Gruppenhomomorphismus. Formuliere und verifiziere ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür, dass sich f zu einem Gruppenhomomorphismus $\bar{f} : A \rightarrow B$ fortsetzen lässt, in dem $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A/U, B)$ vorkommt.
- b) Sei A eine abelsche Gruppe. Zeige: $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(\mathbb{Z}, A) = 0$ für alle $n > 0$.
- c) Sei A eine abelsche Torsionsgruppe. Zeige: $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.
- d) Zeige: $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)) \cong \mathbb{Z}/(m, n)$.

Aufgabe 2. Kohomologischer Kleber

Seien X und Y Objekte einer abelschen Kategorie \mathcal{A} .

- a) Sei $\eta : Y[0] \rightarrow X[2]$ ein Morphismus in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ und C^\bullet ein Kegel von η .
Zeige: $H^{-2}(C^\bullet) \cong X$, $H^{-1}(C^\bullet) \cong Y$ und die restliche Kohomologie verschwindet.
- b) Sei C^\bullet ein Komplex mit $H^{-2}(C^\bullet) \cong X$, $H^{-1}(C^\bullet) \cong Y$ und restlicher Kohomologie Null. Zeige, dass C^\bullet ein Kegel eines Morphismus $\eta : Y[0] \rightarrow X[2]$ ist.
- c) Ziehe das Fazit: Komplexe mit Kohomologie wie in Teilaufgabe b) sind bis auf Isomorphie eindeutig durch H^{-2} , H^{-1} und *kohomologischen Kleber* gegeben.

Aufgabe 3. Kein kohomologischer Kleber

Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie mit $\text{Ext}^n(X, Y) = 0$ für alle Objekte X und Y und alle $n \geq 2$. Zeige, dass jeder beschränkte Komplex K^\bullet in $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ isomorph zu seinem Kohomologiekomplex $H^\bullet(K^\bullet)$ (mit Nulldifferentialen) ist.

Hinweis: Verwende ohne Beweis, dass ein ausgezeichnetes Dreieck der Form $A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow$, wobei der Morphismus $C^\bullet \rightarrow A^\bullet[1]$ Null ist, zerfällt und daher insbesondere B^\bullet isomorph zu $A^\bullet \oplus C^\bullet$ ist. Das werden wir in angemessener Allgemeinheit später beweisen. *Tipp:* Führe einen Induktionsbeweis über die Amplitude von K^\bullet (was kann das wohl sein?) und verwende die kanonische Filtrierung (Blatt 19, Aufgabe 5).

Aufgabe 4. Homotopie und Zylinder

Folgt in Kürze.