

## Übungsblatt 10 zur Homologischen Algebra I

### Aufgabe 1. Ein konkretes Modell für endlich-dimensionale Vektorräume

Sei  $k$  ein Körper. Sei  $\mathcal{C}$  die Kategorie mit

$$\begin{aligned}\mathrm{Ob}\mathcal{C} &:= \mathbb{N}, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(n, m) &:= k^{m \times n},\end{aligned}$$

wobei die Morphismenverkettung durch die Matrixmultiplikation gegeben ist.

- a) Zeige, dass die Kategorie  $\mathcal{C}$  (auf unkanonische Art und Weise) zur Kategorie der endlich-dimensionalen  $k$ -Vektorräume äquivalent ist.

*Tipp:* Wähle für jeden endlich-dim. Vektorraum  $V$  einen Iso  $\eta_V : k^{\dim V} \rightarrow V$ .

- b) Zeige, dass  $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$  auf kanonische Art und Weise äquivalent zu  $\mathcal{C}$  ist. (Das ist etwas Besonderes!)
- c) Zeige, dass die Kategorie der endlich-dimensionalen  $k$ -Vektorräume *auf kanonische Art und Weise* zu ihrer dualen Kategorie äquivalent ist.

### Aufgabe 2. Kategorielle Eigenschaften

Es gibt folgendes Motto: Sei  $\varphi$  eine mathematische Aussage über Kategorien, die sich nur unter Verwendung der Konzepte *Objekt*, *Morphismus*, *Verkettung von Morphismen* und *Gleichheit von Morphismen* formulieren lässt. Sind dann  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  zueinander äquivalente Kategorien, so gilt  $\varphi$  genau dann in  $\mathcal{C}$ , wenn  $\varphi$  in  $\mathcal{D}$  gilt. Beispiele für Aussagen dieser Art sind etwa:

- Die Kategorie besitzt ein initiales Objekt (das ist ein Objekt  $0$ , sodass es zu jedem Objekt  $X$  genau einen Morphismus  $0 \rightarrow X$  gibt).
- Je zwei parallele Morphismen sind gleich.
- Je zwei Endomorphismen eines Objekts vertauschen miteinander.
- Jedes initiale Objekt ist auch terminal.

Beispiele für Aussagen, die über die Reichweite des Mottos hinausgehen und also nicht invariant unter Äquivalenz von Kategorien sind, sind:

- Die Kategorie besitzt genau ein Objekt.
- Die Kategorie besitzt genau ein initiales Objekt.
- Sind zwei Objekte zueinander isomorph, so sind sie schon gleich.
- Je zwei Morphismen (egal zwischen welchen Objekten) sind gleich.

- a) Mache dir klar, wieso das Motto gilt.
- b) Anna und ihre Frau Emma haben die Vermutung, dass die folgenden Kategorien paarweise nicht zueinander äquivalent sind. Jemand ruft ihnen zu: *Mit Teilaufgabe a) ist der Nachweis einfach!*, nickt und fliegt davon. Kannst du ihnen helfen?

Set    $\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$     $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$    Ring   Top   Man    $\mathrm{Sh}(\mathbb{R}^7)$    BZ   Hask

### Aufgabe 3. Volltreue Funktoren

- Sei  $f : P \rightarrow Q$  eine monotone Abbildung zwischen Quasiordnungen. Wann ist  $Bf : BP \rightarrow BQ$  treu? Wann voll? Wann wesentlich surjektiv?
- Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein volltreuer Funktor. Zeige, dass  $F$  eine Äquivalenz zwischen  $\mathcal{C}$  und einer gewissen vollen Unterkategorie von  $\mathcal{D}$  (welcher?) induziert.
- Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein volltreuer und wesentlich surjektiver Funktor. Wenn wir ein genügend starkes Auswahlprinzip zur Verfügung haben, können wir zu jedem Objekt  $Y \in \mathcal{D}$  ein Objekt  $X_Y \in \mathcal{C}$  und einen Iso  $g_Y : F(X_Y) \rightarrow Y$  wählen.

Erkläre, wie die Zuordnung  $Y \mapsto X_Y$  einen Funktor definiert. Weise die Funktoraxiome explizit nach. Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus  $G \circ F \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ .

### Aufgabe 4. Quotientenkategorien

Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Seien für je zwei Objekte  $X, Y \in \mathcal{C}$  eine Äquivalenzrelation  $\sim_{X,Y}$  auf  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  gegeben.

- Konstruiere eine Kategorie  $\mathcal{C}/\sim$  zusammen mit einem Funktor  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\sim$  mit folgender universeller Eigenschaft:
  - Wenn  $f \sim_{X,Y} \tilde{f}$  in  $\mathcal{C}$ , dann  $Q(f) = Q(\tilde{f})$  in  $\mathcal{C}/\sim$ .
  - Ist  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor, der wie  $Q$  äquivalente Morphismen auf gleiche schickt, so gibt es genau einen Funktor  $G : \mathcal{C}/\sim \rightarrow \mathcal{D}$  mit  $F = G \circ Q$ .

*Tipp:* Nimm zunächst an, dass für alle passenden Morphismen  $f, a, b$  aus  $f \sim_{X,Y} \tilde{f}$  schon  $a f b \sim_{X',Y'} a \tilde{f} b$  folgt.

- Was ist an Teilaufgabe a) inhaltlich schlecht formuliert?

### Aufgabe 5. Morita-Äquivalenz von Ringen

Ein Objekt  $X$  einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt genau dann *Erzeuger*, wenn der Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \_ ) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  treu ist. Ringe  $A$  und  $B$  heißen genau dann zueinander *Morita-äquivalent*, wenn ihre Kategorien von (Rechts-)Moduln äquivalent sind.

- Welche übersichtliche Menge ist ein Erzeuger von  $\text{Set}$ ?
- Welcher Vektorraum ist Erzeuger der Kategorie der  $k$ -Vektorräume?
- Zeige, dass Morita-äquivalente Ringe isomorphes Zentrum haben.
- Zeige, dass isomorphe Ringe Morita-äquivalent sind.
- Seien  $A$  und  $B$  (nicht notwendigerweise kommutative) Ringe mit Eins. Sei  $P$  ein Rechts- $A$ -Modul. Sei  $\alpha : B \rightarrow \text{End}_A(P)$  ein Ringisomorphismus.

Sei  $M$  ein Rechts- $A$ -Modul. Wie wird  $\text{Hom}_A(P, M)$  zu einem Rechts- $B$ -Modul?

Sei  $N$  ein Rechts- $B$ -Modul. Wie wird  $\text{Hom}_B(P^\vee, N)$  zu einem Rechts- $A$ -Modul? Dabei ist  $P^\vee := \text{Hom}_A(P, A)$ .

- Zeige, dass Ringe  $A, B$  genau dann zueinander Morita-äquivalent sind, wenn es einen endlich erzeugten projektiven Erzeuger  $P$  von  $\text{Mod-}A$  und einen Ringisomorphismus  $B \cong \text{End}_A(P)$  gibt.

*Tipp:* Weise für die schwere Richtung nach, dass die Zuordnung  $M \mapsto \text{Hom}_A(P, M)$  eine Äquivalenz  $\text{Mod-}A \rightarrow \text{Mod-}B$  definiert. Ein  $A$ -Modul  $P$  heißt genau dann *projektiv*, wenn für jede surjektive lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  und jede lineare Abbildung  $g : P \rightarrow W$  eine lineare Abbildung  $\tilde{g} : P \rightarrow V$  mit  $g = f \circ \tilde{g}$  existiert.