Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Sommersemester 2014

Übungsblatt 5 zur Homologischen Algebra I

– Motto –

Aufgabe 1. *Homologische Charakterisierung von Zusammenhang*

Sei X eine simpliziale Menge. Sei $\approx$ die feinste Äquivalenzrelation auf X_0 mit $X(\partial^1)u \approx X(\partial^0)u$ für alle $u \in X_1$; anschaulich gilt genau dann $x \approx y$, wenn sich die 0-Simplizes x und y durch einen Kantenzug miteinander verbinden lassen.

a) Seien $x, y \in X_0$. Zeige, dass die entsprechenden Punkte in der geometrischen Realisierung $|X|$ genau dann durch einen stetigen Pfad miteinander verbunden werden können, wenn $x \approx y$.

   Tipp: Eine Richtung ist leichter als die andere. Konstruiere für die andere eine geeignete simpliziale Abbildung $X \to \underline{\Omega}$ und betrachte deren geometrische Realisierung. Dabei bezeichnet $\Omega \supseteq \{0, 1\}$ die Menge der Wahrheitswerte und $\underline{\Omega}$ die diskrete simpliziale Menge mit Eckenmenge Ω. Verwende, dass das Einheitsintervall zusammenhängend ist.

b) Zeige für beliebige 0-Simplizes $x, y \in X_0$:

$$x \approx y \quad \Longrightarrow \quad x - y \in \operatorname{im}(d^0 : C_1(X, \mathbb{Z}) \to C_0(X, \mathbb{Z})).$$

c) Zeige: $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\langle\text{Wegzusammenhangskomponenten von } |X|\rangle$ (freier $\mathbb{Z}$-Modul).

Aufgabe 2. *Homologieberechnungen*

Berechne die Homologie (mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$) von folgenden simplizialen Mengen:

a) das Standard-n-Simplex $\Delta[n]$,

b) die $(n-1)$-dimensionale Sphäre $\dot{\Delta}[n]$,

c) der zweidimensionale Torus,

d) die reelle projektive Ebene.

Verwende dazu als Kettengruppen die freien $\mathbb{Z}$-Moduln über den *nichtdegenerierten* Simplizes; später werden wir verstehen, wieso diese die volle Homologie berechnen. Inwieweit bestätigt sich das Motto *Homologie misst (mehrdimensionale) Löcher*?[1]

[1] Mit Homologie kann man auch Löcher des umgebenden logischen Rahmens messen, etwa inwieweit das Auswahlaxiom fehlschlägt: Andreas Blass. *Cohomology detects failures of the axiom of choice.* Trans. Amer. Math. Soc. **279**, S. 257–269.