9.7.15
Marc

Serre-Dualität

1. Der projektive Raum

A noeth., kommut. Ring
E freier A-Modul vom Rang $n+1$

Wenn $E = A^{n+1}$, dann $\mathrm{Sym}_A E = A[x_0, ..., x_n]$

$$\mathbb{P}(E) := \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}_A E) \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$$

Satz:

Das Paar $(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft:

Für jedes A-Schema X und jeden (lokal freien) Rang-1-Quotienten der Form $E \otimes_A \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ auf X existiert genau ein A-Morphismus $f: X \to \mathbb{P}(E)$, so dass

Identifiziert von $\mathcal{L}$ bis auf Iso (frei) $\to E\otimes\mathcal{O} \to$ also [illegible]

$$E \otimes_A \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{L} = f^*(\pi^* E \xrightarrow{can} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1));$$

geschrieben $\mathcal{L} = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$

Bemerkung:

1) Quotienten bleiben unter Pullback erhalten
2) $\mathbb{P}(E)$ parametrisiert Hyperebenen (durch 0) von E, also Ursprungsgeraden in $\mathrm{Spec}\,\mathrm{Sym}(E)$

Beispiel

1) $E = A$. Dann ist $\mathbb{P}(E) \overset{can}{\cong} \mathrm{Spec}\, A$
2) Sei $E \twoheadrightarrow F$ eine Surjektion. Dies induziert Morphismus $\mathbb{P}(F) \xrightarrow[g]{can} \mathbb{P}(E)$ mit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)} = g^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$

2. Die Eulersequenz

Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(E,E) = E^\vee \otimes_A E$ linear. Dies induziert einen Quotienten $E \otimes_A \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}[\varepsilon] \xrightarrow[\text{invers mit } id+\varepsilon\varphi \text{ weg } \varepsilon^2=0]{id-\varepsilon\varphi} E \otimes_A \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}[\varepsilon] \xrightarrow{can} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)[\varepsilon]$

auf $\mathbb{P}(E) \otimes_A \operatorname{Spec} A[\varepsilon] =: \mathbb{P}(E)[\varepsilon]$, also einen Morphismus $\mathbb{P}(E)[\varepsilon] \to \mathbb{P}(E)$ über $\mathbb{P}(E)$.

$\mathbb{P}$ aufgedickt in eine Richtung durch ε

Dieser Morphismus ist ein kanonischer Schnitt in $\Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{T}_{\mathbb{P}(E)})$

Wir erhalten also $\mathrm{Hom}_A(E,E) \xrightarrow{can} \Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{T}_{\mathbb{P}(E)})$

Satz:

Auf $\mathbb{P}(E)$ gibt es genau eine exakte Sequenz der Form

$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \xrightarrow{can} E^\vee \otimes_A \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \xrightarrow{\psi} \mathcal{T}_{\mathbb{P}(E)} \to 0$, so dass ⊛ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(E,E) & \to & \Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{T}_{\mathbb{P}(E)}) \\ \| & & \uparrow \psi \\ E^\vee \otimes_A E & & \Gamma(\mathbb{P}(E), E^\vee \otimes_{\mathbb{P}(E)} \mathcal{O}(1)) \end{array}$$

kommutiert.

Beweis: lokale Rechnung □

Folgerung: obige Sequenz dualisieren (dreht um)

Die Sequenz $0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}(E)} \xrightarrow{can} E \otimes_A \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1) \xrightarrow{can} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \to 0$ (Eulersequenz) ist exakt

Folgerung:

$\omega_{\mathbb{P}(E)} := \Omega^n_{\mathbb{P}(E)} = \Lambda^n \Omega^1_{\mathbb{P}(E)} \overset{can}{\simeq} \Lambda^{n+1}_A E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-n-1)$

3. Kohomologie des projektiven Raumes

Wir setzen $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(q) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)^{\otimes q}$ für $q \in \mathbb{Z}$.

<u>Satz 1:</u>

Der von $E \otimes_A \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ induzierte graduierte A-Algebrenhomomorphismus

$$\mathrm{Sym}_A E \to \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(q))$$

ist ein Isomorphismus. Insbesondere

$H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}(q)) = 0$ für $q < 0$ keine globalen Schnitte von $\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-2),$

<u>Satz 2:</u>

Es ist $H^i(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(q)) = 0$ für $0 < i < n$ und alle q

Sei $L \subseteq E$ ein 1-dim Unterraum, so dass E/L frei von Rang n. Sei $i_L\colon \mathbb{P}(E/L) \to \mathbb{P}(E)$ der kanonische Morphismus. Dann ist die Sequenz

$$0 \to L \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}\overset{-n-1}{(-1)} \xrightarrow{\text{can}_L} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}^{(-n)} \xrightarrow{\text{can}} i_{L*}\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E/L)}^{(-n)} \to 0 \quad \text{exakt}$$

Nach Definition der Kohomologie existieren

$$\begin{array}{l} \delta_L^*\colon H^*(\mathbb{P}(E), i_{L*}\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E/L)}^{(-n)}) \xrightarrow{\text{can}} H^{*+1}(\mathbb{P}(E), L \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}\overset{(-n-1)}{(-1)}) \\ \qquad\qquad \uparrow \wr\, \text{can} \\ \qquad H^*(\mathbb{P}(E/L), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E/L)}) \end{array}$$

<u>Satz:</u>

Für $n \geq 1$ ist

$\partial_L := \partial_L^{n-1}\colon H^{n-1}(\mathbb{P}(E/L), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E/L)}(-n)) \to H^n(\mathbb{P}(E), L \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-n-1))$

ein Isomorphismus.

<u>Beweis:</u> „lokale" Rechnung in Čech-Kohomologie □

__Satz:__

Es existiert genau eine in E natürliche Abbildung

$S: H^n(\mathbb{P}(E), \overbrace{\Lambda^{n+1}E \otimes_A \mathcal{O}(-n-1)}^{\omega_{\mathbb{P}(E)}}) \to A$, so dass

(1) $S: H^0(\mathbb{P}(A), \underbrace{\Lambda^1 A \otimes_A \mathcal{O}(-1)}_{A\ \cong\ \mathrm{can}}) \to A$ die Identität von A ist

(2)
$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}(\mathbb{P}(E/L), \Lambda^n(E/L) \otimes_A \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E/L)}(-n)) \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\partial_L"] & A \\
H^n(\mathbb{P}(E), \Lambda^{n+1}(E) \otimes_A \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-n-1)) \arrow[ru, "S"'] &
\end{tikzcd}$$
kommutiert

__Beweis:__ Scharf hinschauen $\square$

__Satz 3:__

Es ist $H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}(q)) \otimes_A H^n(\mathbb{P}(E), \omega_{\mathbb{P}(E)} \otimes \mathcal{O}(-q)) \to$

$\xrightarrow{\mathrm{can}} H^n(\mathbb{P}(E), \omega_{\mathbb{P}(E)}) \xrightarrow[S]{} A$

eine nicht-ausgeartete Paarung für alle q.

__Beweis:__ Čech-Kohomologie

4. Dualität für den projektiven Raum

Sei k ein Körper (vormals A). $X = \mathbb{P}(E)$, $\omega := \omega_{\mathbb{P}(E)}$

__Satz:__

Die natürliche Paarung $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega) \otimes_k H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \omega) \xrightarrow{S} k$

ist nicht ausgeartet für alle kohärenten Garben $\mathcal{F}$.

__Beweis:__

Wir zeigen, dass $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega) \to H^n(X, \mathcal{F})^\vee$ ein Isomorphismus ist. Dazu wähle Präsentation $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{F} \to 0$ mit $\mathcal{E}_i = \bigoplus_j \mathcal{O}(q_j)$. Da $\mathrm{Hom}(-, \omega)$ und $H^n(X, -)^\vee$ rechts-exakt sind, erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_0, \omega) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{can}"', "\wr"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \omega) \arrow[d, "\mathrm{can}"', "\wr"] \\
0 \arrow[r] & H^n(X, \mathcal{F})^\vee \arrow[r] & H^n(X, \mathcal{E}_0)^\vee \arrow[r] & H^n(X, \mathcal{E}_1)^\vee
\end{tikzcd}$$

Satz 3, dann 5er Lemma

Satz:

Der von $Hom(-,\omega) \xrightarrow{\sim} H^n(X,-)^\vee$ induzierte Morphismus $Ext^i(-,\omega) \to H^{n-i}(X,-)^\vee$ kontravarianter δ-Funktor ist ein Isomorphismus für kohärente Garben $\mathcal{F}$.

Beweis:

Sei $\mathcal{F}$ kohärent. Dann gibt es $\bigoplus_N \mathcal{O}(-q) \twoheadrightarrow \mathcal{F}$, $q \gg 0$.
Es gilt $H^{n-i}(X, \bigoplus_N \mathcal{O}(-q)) = 0$ für $i > 0$, d.h.
$H^{n-*}(X,-)^\vee$ ist koauslöschbar, also ebenfalls universell. $\square$

Folgerung:

Die induzierte Paarung $Ext^i_{\mathbb{P}(E)}(\mathcal{F},\omega) \otimes_k H^{n-i}(\mathbb{P}(E),\mathcal{F}) \to k$ ist nicht ausgeartet für alle kohärenten $\mathcal{F}$.