$$\sum_n \chi(S^n X) q^n$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!} \sum_\sigma \underbrace{\chi((X^n)^\sigma)}_{\cong X^{\sum \nu_i}} q^n$$

$\cong X^{\sum \nu_i}$, wenn der Typ von σ ist: $n = \nu_1 a_1 + \dots + \nu_m a_m$, $\nu_i \geq 1$, $a_1 > \dots > a_m \geq 1$, $m \geq 0$.

$= \chi(X)^{\sum \nu_i}$

Vor.: a) $\chi(X/G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(X^g)$,

(erfüllt für X lok. kompakt, Hd., G endlich, Lefschetz möglich: $L(g^*) = \sum (-1)^i \operatorname{tr} g^*_{|H^i} \stackrel{!}{=} \chi(X^g)$)

b) $\chi(X^n) = \chi(X)^n$

$$\prod_{i=1}^n \sum_{j \in J_i} a_{i,j} = \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_n} \prod_i a_{i,j_i}$$

$$= \sum_{m \geq 0} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m \geq 1} \sum_{a_1 > \dots > a_m} \frac{1}{(\sum \nu_i a_i)!} \chi(X)^{\sum \nu_i} q^{\sum \nu_i a_i} \cdot \frac{(\sum \nu_i a_i)!}{a_1^{\nu_1} \cdots a_m^{\nu_m} \, \nu_1! \cdots \nu_m!}$$

$$= \sum_m \sum_{\vec{a}} \sum_{\nu_1} \cdots \sum_{\nu_m} \prod_i \frac{1}{a_i^{\nu_i}} \frac{1}{\nu_i!} \chi(X)^{\nu_i} q^{\nu_i a_i}$$

für $\nu_i = 0$ ist das 1.

$$= \sum_m \sum_{\vec{a}} \prod_{i=1}^n \underbrace{\sum_{\nu \geq 1} \frac{1}{\nu!} \left(\chi(X) \frac{1}{a_i} q^{a_i} \right)^\nu}_{= e^{\chi(X) q^{a_i}/a_i} - 1}$$

ist Summe über alle Partitionen (jede genau einmal)

$$= \sum_{A \subseteq \mathbb{N}^+} \prod_{a \in A} \left(e^{\chi(X) q^a/a} - 1 \right)$$

$$= 1 + \sum_{a \geq 1} \left(e^{\chi(X) q^a/a} - 1 \right) + \sum_{a > b \geq 1} \left(e^{\chi(X) q^a/a} - 1 \right) \left(e^{\chi(X) q^b/b} - 1 \right) + \dots$$

$$= e^{\chi(X)(q^a/a + q^b/b)} - e^{\chi(X) q^a/a} - e^{\chi(X) q^b/b} + 1$$

$$\stackrel{!}{=} e^{\chi(X) \sum_{n \geq 1} q^n/n} = \prod_{n \geq 1} e^{\chi(X) q^n/n}$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} \left(\chi(X) \cdot \sum_{n \geq 1} q^n/n \right)^r$$

$$\cancel{= \sum_{\substack{A \\ |A| = n}} Y + \sum_{\substack{A \\ |A| = n}} Y + \sum_{\substack{A \\ |A| > n}} Y}$$

$$\cancel{\stackrel{?}{=} \sum_{\substack{A \subseteq \mathbb{N}^+ \\ |A| = n}} \prod_{a \in A} e^{\chi(X) q^a/a}}$$

$$\sum_{r_1 = 0}^{\infty} \cdots \prod_{j \geq 1} \frac{1}{r_j!} \left(\chi(X) \, q^j/j \right)^{r_j}$$

$$= \cancel{\sum_{a_1 \geq 1} \sum_{a_2 \geq a_1} \cdots} \prod$$

$$= \underbrace{\sum_{w_1 \geq 0} \sum_{w_2 \geq 0} \cdots}_{\text{Summe über alle abbrechenden Folgen } (w_1, w_2, \ldots)} \prod_{i=1}^{\infty} \underbrace{\underbrace{\frac{1}{i^{w_i}} \frac{1}{w_i!} z(X)^{w_i} q^{w_i \cdot i}}_{= \frac{1}{w_i!} \left(z(X)\, q^i / i\right)^{w_i}}}_{\text{Produkt bricht ab (Fkt. werden nach endl. Stelle } \underline{1}\text{)}}$$

$$= \prod_{i \geq 1} e^{z(X)\, q^i / i}$$

$$= e^{z(X) \sum q^i / i} = e^{-z(X) \ln(1-q)} = (1-q)^{-z(X)} \quad ✓ \quad :)$$