Mathematik-Bootcamp

Grenzwerte, Ableitungen, Extremwerte

von Philipp Düren & Ingo Blechschmidt

E-Mail: `philipp.dueren@gmail.com`

Zusammenfassung

In diesem Skript wirst du (fast) alles lernen, was du für unseren Kurs an Wissen über Differentialrechnung brauchst. Die Differentialrechnung ist ein großartiges Gebiet der Mathematik, das sich mit der Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Zahlen beschäftigt. Klingt etwas esoterisch, ist aber unglaublich nützlich!

Klassische Fragestellungen sind:

- Was ist „Geschwindigkeit“? Was ist „Beschleunigung“? Wie hängen die beiden zusammen?
- Wie finde ich maximale und minimale Werte von Funktionen?
- Wie finde ich Nullstellen von Funktionen?

Grundlagen

Funktionen und Visualisierungen

In der Differentialrechnung befassen wir uns mit Funktionen, die auf einer Teilmenge der reellen Zahlen definiert sind und Werte in den reellen Zahlen haben, z.B.

$$f\colon \mathbb{R}_+ \supset M \;\to\; \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

Bemerkung 1. Diese anfänglich etwas ungewohnte Darstellung $f\colon \mathbb{R}_+ \supset M \to \mathbb{R}$ liest man folgendermaßen: Die Funktion bildet von der Menge M, die eine Teilmenge der positiven reellen Zahlen ($\mathbb{R}_+$) ist, in die reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) ab.

Diese Funktion ist auf einer Teilmenge M der positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_+$ definiert (das ist wiederum eine Teilmenge der reellen Zahlen) und bildet jeden Punkt aus dieser Definitionsmenge auf seine Quadratwurzel ab.

In der angewandten Mathematik erweist es sich oft nützlich, Funktionen zuzulassen, die Definitions- und Wertemengen haben, die eine höhere Dimension haben als 1. Zum Beispiel kann man eine Karte eines Berges so beschreiben, dass man jedem Punkt (der durch geographische Breiten- und Längengrade beschrieben wird, also zwei Koordinatenkomponenten hat) die Höhe zuordnet, die der Berg an diesem Punkt hat. Die Funktion hat dann die Form

$$f\colon \mathbb{R}^2 \supset M \to \mathbb{R}$$

Bemerkung 2. Das liest sich so: Die Funktion bildet von der Menge M, die eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist (z.B. ein Quadrat oder ein Kreis), in die reellen Zahlen ab.

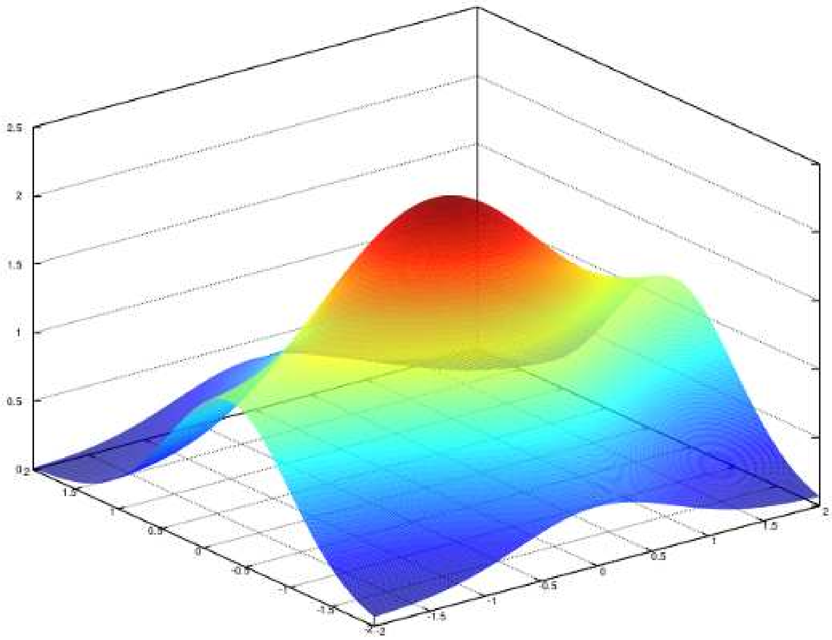

Abbildung 1. Der Graph einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \supset M \to \mathbb{R}$ (also von zwei Dimensionen in eine Dimension). Die beiden „Eingabekoordinaten“ sind auf der waagerechten Ebene eingetragen. Der Wert der Funktion in diesem Punkt entspricht der Höhe der Oberfläche senkrecht über diesem Punkt.

Ein weiteres Beispiel ist die Geschwindigkeit von Wasserwellen auf einer Wasseroberfläche: Wir können in jedem Punkt auf der Wasseroberfläche einen Pfeil einzeichnen, der in die Richtung zeigt, in den sich ein Molekül Wasser in der nächsten Sekunde bewegen wird.

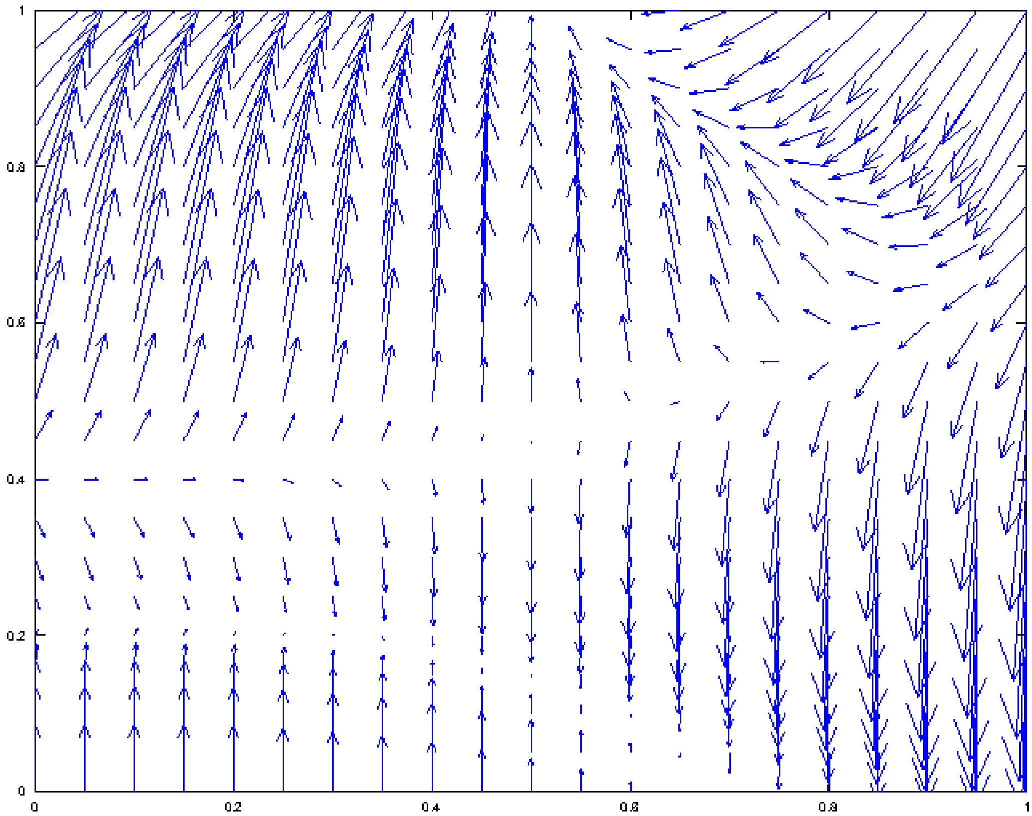

Abbildung 2. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \supset M \to \mathbb{R}^2$ (also von zwei Dimensionen in zwei Dimensionen). In jedem Punkt $w \in M \subset \mathbb{R}^2$ erhalten wir einen zweikomponentigen Funktionswert $f(w) \in \mathbb{R}^2$, den wir graphisch an w als Vektor anhängen. Dies machen wir natürlich nicht in jedem Punkt (sonst wäre alles voller Linien). Die Länge des Vektors entspricht der Stärke der Strömung in diesem Punkt.

Ein letztes Beispiel: Wenn wir ein Pendel anstoßen und filmen, erhalten wir zu jedem Zeitpunkt $t \in [t_1,\ t_2]$ (das Zeitintervall, in dem gefilmt wurde) eine Position des Pendelgewichts in der Schwingungsebene (das ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$). Legen wir diese Einzelbilder wie Toastscheiben aneinander, erhalten wir eine Kurve durch den dreidimensionalen Raum.

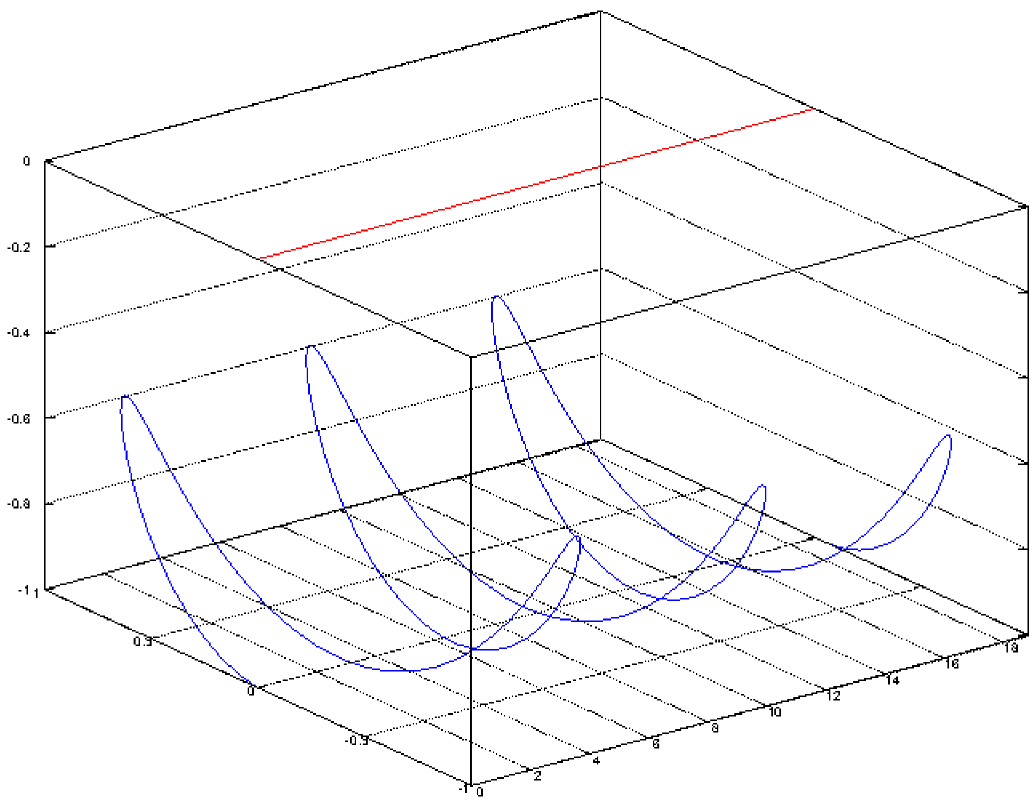

Abbildung 3. Die Bahnkurve eines Pendels. Zu jedem Zeitpunkt im Intervall $[t_1, t_2]$ (die rote Linie ist die Zeitachse) können wir eine dazu senkrecht stehende Schnittebene einsetzen. Auf dieser Ebene ist genau ein Punkt der blauen Kurve. Verschieben wir nun die Schnittebene entlang der Zeitachse, beschreibt der Punkt auf der Schnittebene, der auf der Kurve liegt, genau die Bahn eines Pendels. Dies ist ein Beispiel für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \supset [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$, also von einer Dimension in zwei Dimensionen.

Für Funktionen $f\colon \mathbb{R} \supset M \to \mathbb{R}^n$, also speziell Funktionen, die von einer Dimension in beliebige Dimensionen gehen, wählt man oft auch eine alternative Wahl der Visualisierung: Man interpretiert die Eingabekoordinate (also die Variablen in der Definitionsmenge) als Zeitkoordinate und trägt den „aktuellen Punkt zur Zeit t“ in ein Koordinatensystem $\mathbb{R}^n$ ein: Das dritte Beispiel sähe dann so aus:

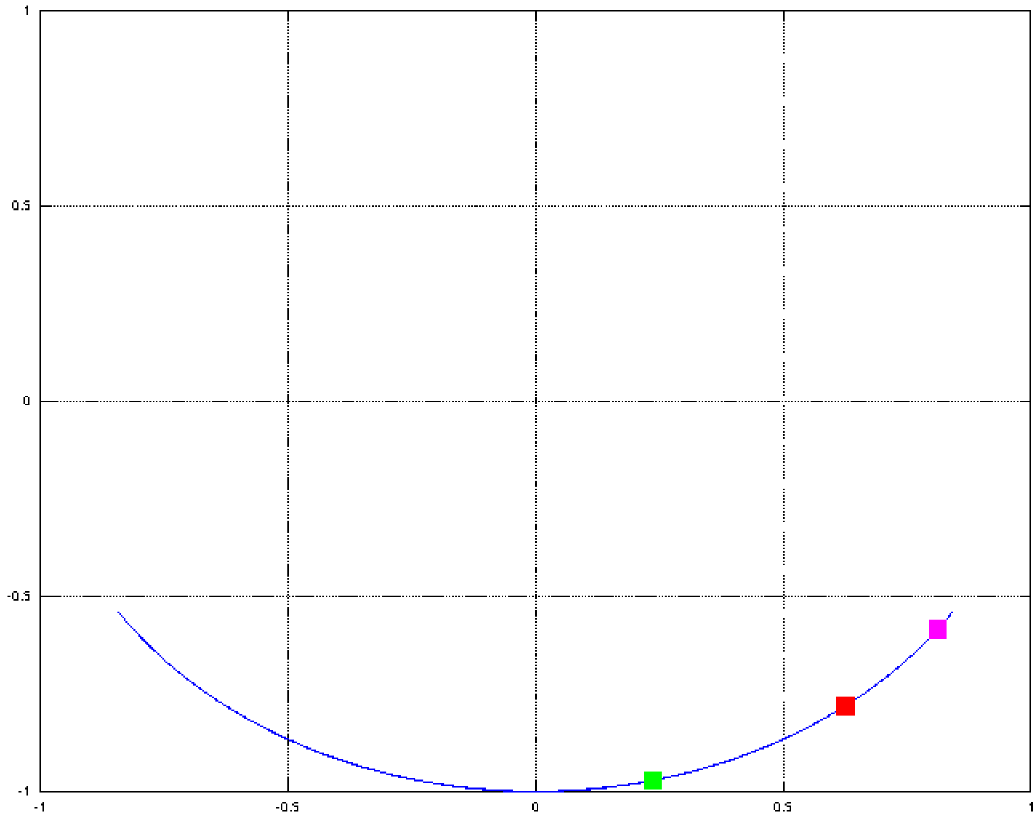

Abbildung 4. Ein parametriserter Plot des Pendelbeispiels. Die Graphik entsteht, wenn man alle „Zeitscheiben“ aufeinanderklept und die blaue Kurve in Abbildung 3 zusammenstaucht. Außerdem sind die Funktionswerte für drei Zeitpunkte eingetragen: Den Punkten pink, rot und grün entsprechen die Zeitpunkte 1.9, 2.4 und 2.9. Wir sehen, dass die Punkte trotz gleicher Zeitdifferenzen unterschiedliche Entfernungen voneinander haben. Das liegt an der unterschiedlichen Geschwindigkeit der Bahnkurve (wir werden diese Idee noch genauer behandeln).

Aufgabe 1. Welche Dimensionen hat eine Abbildung, die die Temperaturverteilung in einem Raum angibt, also den Wert der Temperatur in Grad Celsius in jedem Punkt im Zimmer? Mit anderen Worten: Bestimme m

und n in $T\colon \mathbb{R}^m \supset M \to \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2. Bestimme m und n in $v\colon \mathbb{R}^m \supset M \to \mathbb{R}^n$, wenn v den Geschwindigkeitsvektor der Luft in der Atmosphäre beschreibt? Nimm an, dass wir nur einen kleinen Abschnitt der Atmosphäre betrachten (also ein würfelförmiges „Stück Luft“, das über der Oberfläche schwebt). Versuche, dir eine Visualisierung dieser Funktion zu überlegen (mittelschwierig), zu zeichnen (mittelschwierig) oder mit einem Computerprogramm zu zeichnen (schwierig)

Position und Geschwindigkeit

Die Hauptfragestellung der Differentialrechnung ist die Folgende:

Frage. *Was ist die aktuelle Änderungsrate einer Funktion in einem Punkt?*

Zuerst müssen wir verstehen, was diese Frage überhaupt bedeuten soll. Betrachten wir dazu die Höhenfunktion einer Silvesterrakete nach dem Anzünden der Zündschnur:

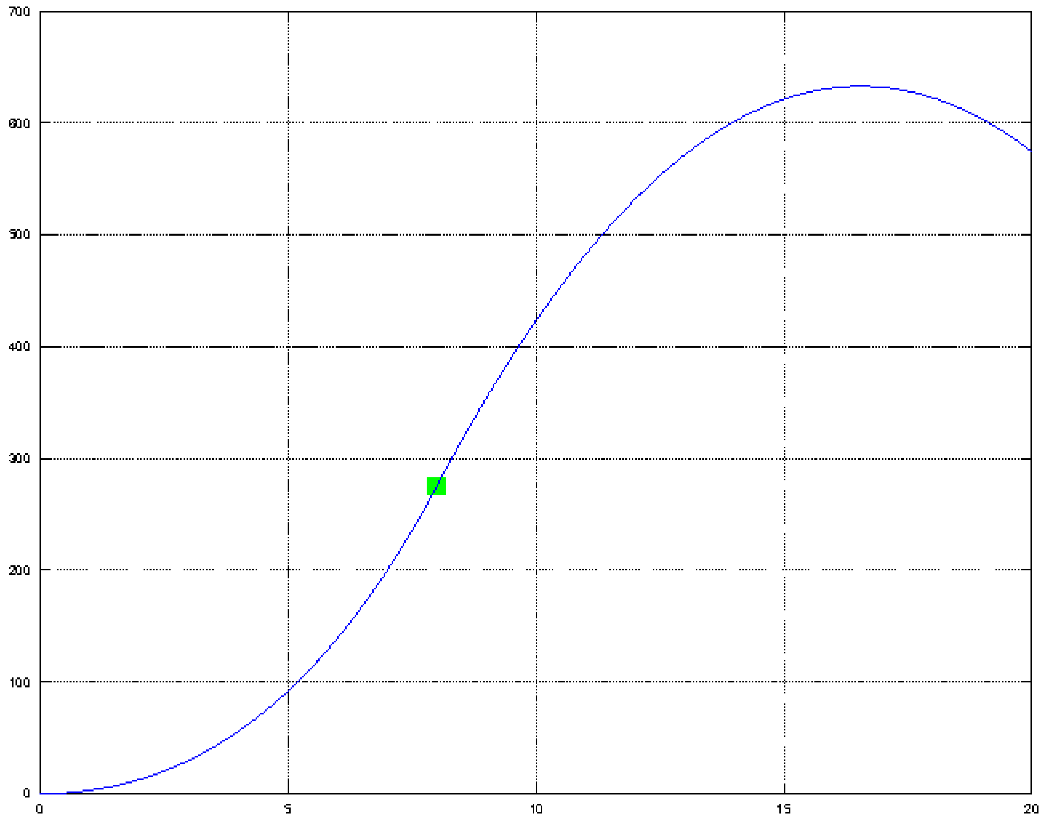

Abbildung 5. Die Höhe einer (nicht explodierenden) Silvesterrakete nach dem Anzünden als eine Funktion von der Zeit in Sekunden: $h\colon [0,20] \to \mathbb{R}$. Als Punkt markiert ist der Zeitpunkt, an dem der Treibstoff der Rakete verbraucht ist.

Außerdem haben wir für euch auch zu jedem Zeitpunkt die Geschwindigkeit der Rakete gemessen und in diesen Geschwindigkeitsplot eingetragen:

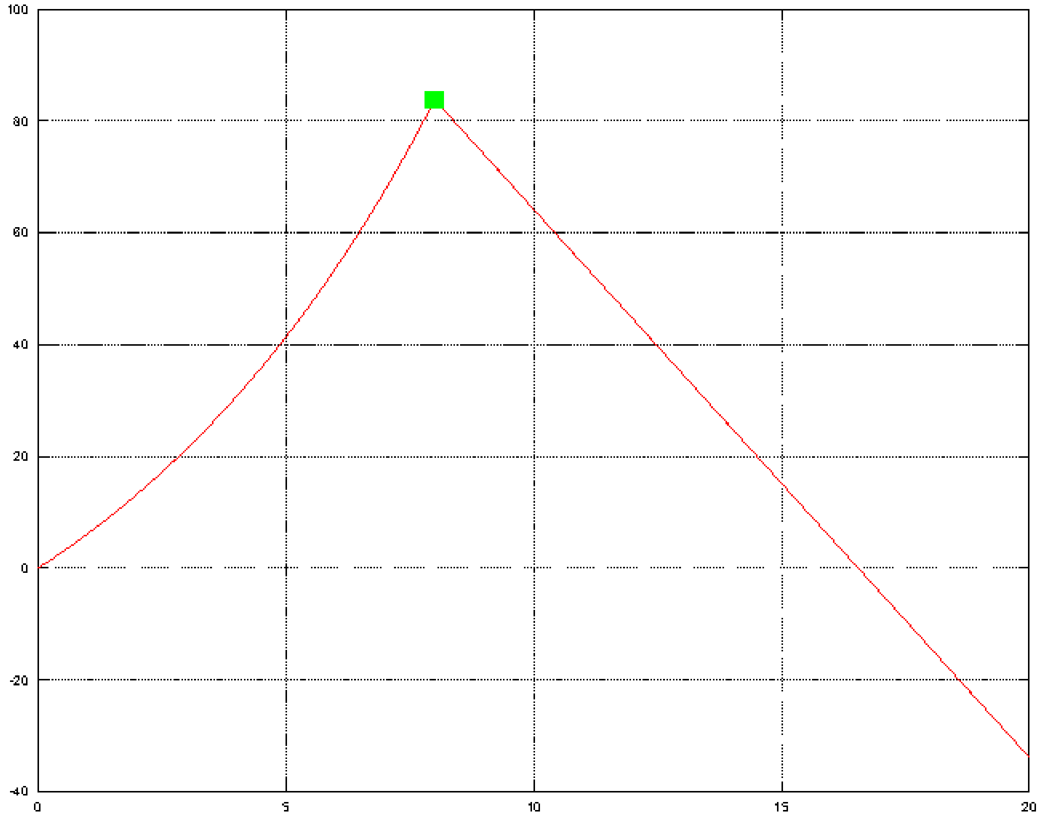

Abbildung 6. Die vertikale Geschwindigkeit der Silvesterrakete. Die Geschwindigkeitszunahme (Beschleunigung) ist nicht konstant, da die Rakete mit dem Verbrauch des Treibstoffs leichter wird und bei gleicher Antriebskraft immer schneller beschleunigt wird (Newtons Gesetz $a = \frac{F}{m}$). Markiert ist der Punkt, an dem der Treibstoff verbraucht ist. Hier nimmt die Geschwindigkeit aufgrund der Fallbeschleunigung wieder ab (bleibt aber weiterhin positiv, die Rakete steigt also immer noch). Zum Zeitpunkt, wo die rote Linie die 0-Linie durchbricht (bei etwa 17s), ist die Geschwindigkeit der Rakete 0. In diesem Moment hängt die Rakete regungslos in der Luft, um gleich darauf Richtung Boden zu fallen (negative Geschwindigkeit).

Wir können folgende relevanten Zeitpunkte und Phasen ausmachen:

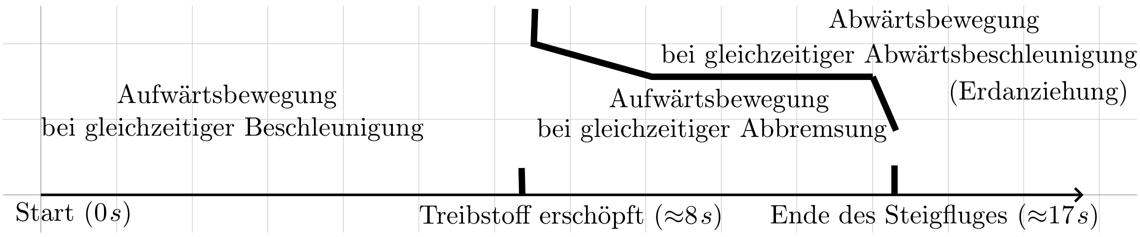

Abbildung 7. Der Lebenslauf unserer Rakete (viel später, bei etwa $30s$, wird die Rakete auf dem Boden aufprallen). Wir nennen die drei Zeitintervalle Phase 1, 2 und 3.

Sehen wir uns die Graphen der Funktionen in diesen Phasen genauer an:

	Höhendiagramm	Geschwindigkeitsdiagramm
Start	0	0
Phase 1	steigend, linksgekrümmt	positiv, steigend
Treibstoff verbraucht	Krümmungswechsel	Wechsel zwischen steigend und fallend
Phase 2	steigend, rechtsgekrümmt	positiv, fallend
Ende des Steigfluges	waagerechte Richtung	0
Phase 3	fallend, rechtsgekrümmt	negativ, fallend

Tabelle 1. Eigenschaften der Graphen

Wir erkennen folgende Zusammenhänge:

Anmerkung. Was ist deine Interpretation?

- Immer, wenn das Höhendiagramm ansteigt, ist das Geschwindigkeitsdiagramm positiv.
- Immer, wenn das Höhendiagramm abfällt, ist das Geschwindigkeitsdiagramm negativ.
- Immer, wenn das Höhendiagramm linksgekrümmt ist, ist das Geschwindigkeitsdiagramm steigend.
- Immer, wenn das Höhendiagramm rechtsgekrümmt ist, ist das Geschwindigkeitsdiagramm fallend.
- Punkte, an denen das Höhendiagramm flach ist ($0s$ und $17s$), sind Nullstellen des Geschwindigkeitsdiagramms.

Wir wollen nun verstehen, wie man diese Zusammenhänge mathematisch fassen kann.

(Durchschnitts-)geschwindigkeit

Die Ableitung einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \supset [a, b] \to \mathbb{R}$ ist so definiert, wie die Geschwindigkeit definiert ist. Man misst die (Durchschnitts-)Geschwindigkeit eines Objektes, indem man zwei Zeitpunkte t_1 und t_2 wählt und die Strecke s misst, die das Objekt in dieser Zeit $t = t_2 - t_1$ zurücklegt. Die Durchschnittsgeschwindigkeit während dieser Bewegung (also im Zeitraum $[t_1, t_2]$) ist dann der Quotient aus Distanz und Dauer, also

$$v_{t_1 \to t_2} = \frac{s}{t_2 - t_1}$$

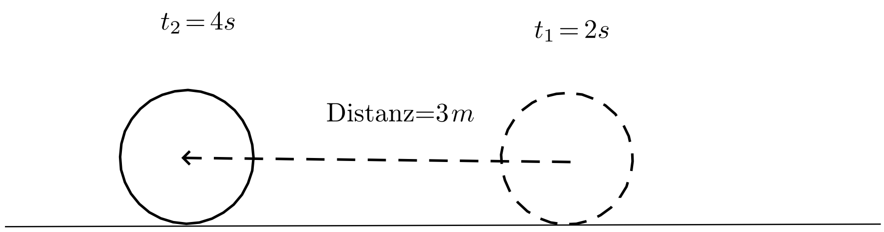

Abbildung 8. Durchschnittsgeschwindigkeitsmessung: Wir haben zwei Zeitpunkte t_1 und t_2 gewählt und eine Distanz gemessen. Damit ist die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen t_1 und t_2 gleich $v_{t_1 \to t_2} = \frac{3m}{(4s - 2s)} = 1.5\frac{m}{s}$

Wir wollen nun verstehen, ob diese Definition wasserdicht ist (natürlich nicht, sonst würde ich nicht so fragen).

Problem. Angenommen, Gudrun fährt um 8:00 Uhr mit ihrem Auto die 400km zu ihrem Vater und kommt um 12:00 Uhr an. Unser Formel zufolge war ihre Geschwindigkeit also $v = \frac{400\text{km}}{4h} = 100\frac{\text{km}}{h}$. Es ist aber unwahrscheinlich, dass ihr Tacho die ganze Zeit konstant $100\frac{\text{km}}{h}$ angezeigt hat. Vermutlich stand sie einmal an einer Tankstelle ($0\frac{\text{km}}{h}$) oder fuhr mit Richtgeschwindigkeit $130\frac{\text{km}}{h}$ auf der Autobahn. Was wir berechnet haben, ist also vielmehr die Durchschnittsgeschwindigkeit auf der ganzen Strecke.

Wie kommen wir an die „besseren" Werte von 0 oder 130 (ich verzichte im Folgenden auf Einheiten, um Ballast loszuwerden)? Intuitiv sagen wir, dass wir in kürzeren Abständen Durchschnittsgeschwindkeiten messen müssen.

Der Tacho eines Fahrrads funktioniert im einfachsten Fall so, dass die Zeit gemessen wird, in dem die Reifen eine vollständige Umdrehung haben. Da ein Reifen einen bekannten Umfang haben, muss sich das Fahhrad in dieser Zeit um diese Entfernung nach vorne bewegt haben. Der Tacho zeigt also eine Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten an, in dem das Rad sich einmal komplett gedreht hat.

Die mathematische Definition geht noch weiter und macht die Zeitabstände immer noch kürzer und noch kürzer. Das wollen wir nun als nächstes verstehen. Dafür brauchen wir aber zuerst den Begriff des Grenzwerts.

Wir haben die Durchschnittsgeschwindigkeit von Gudruns Auto bestimmt, indem wir die Entfernung zwischen Anfangs- und Endpunkt bestimmt haben und durch die (lange) Zeit von vier Stunden geteilt haben, die sie benötigt hat.

Der Tacho misst die Durchschnittsgeschwindigkeit, indem er jedesmal, wenn das Rad sich komplett gedreht hat, den Reifenumfang durch dieses Zeitintervall teil (das dauert normalerweise höchstens eine Sekunde).

Intuitiv wollen wir diese Messzeitpunkte nun noch kürzer als wenige Sekunden (und natürlich viel kürzer als vier Stunden) setzen. Die Methode dafür entwickeln wir dann beim nächsten Mal.

Grenzwerte

Grenzwerte sind das Ergebnis einer Folge von Berechnungen.

Beispiel 3. Wir stellen uns einen Floh vor, der auf einer Gardinenstange sitzt. Flöhe können sehr weit springen, aber dieser spezielle Floh ist schon ziemlich alt und hat es in den „Knien“. Er schafft mit einem Sprung die halbe Stange. Danach ist er aber ziemlich erschöpft und schafft danach nur noch eine Viertelstange. Danach eine Achtelstange etc.

Die zurückgelegte Länge ist also (in der Reihenfolge der Sprünge):

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, ...

Oder, für den N-ten Sprung:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k}$$

Diese Schreibweise bedeutet: Summiere alles, was hinter dem Buchstaben Σ (Sigma) steht, für k von 1 bis N, also:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^N}$$

Angenommen, der Floh hat unendlich lange Zeit. Wie weit kommt er?

Das entspricht der Summe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Aber unendliche Summen sind nichts, was man in einen Taschenrechner eingeben kann, und es ergibt auch nicht richtig viel Sinn. Der Grenzwert dieser Berechnung ist definiert als diese „imaginäre unendliche Summe“. Man kann zeigen, dass diese Summe 1 ergibt. Nach unendlicher Zeit schafft der Floh also genau die gesamte Gardinenstange.

Mathematisch schreiben wir das so (das neue Symbol $\lim_{N\to\infty}$ nennen wir „Limes für N gegen unendlich“):

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} = 1$$

Beispiel 4. Wir betrachten die Funktion $f: x \mapsto \sin(1/x)$. Hier ist ein Bild ihres Graphen:

Wenn wir sukzessive immer größere Werte für x einsetzen, bekommen wir folgende Werte:

x	1	10	100	1000
$f(x)$	0.8415	0.0998	0.010	0.0001

Tabelle. $f(x)$ für verschiedene x.

Intuitiv würden wir sagen, dass $f(x)$ „gegen 0 geht“, wenn x groß wird. Das ist in der Tat so und wir schreiben dafür

$$\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Beispiel 5. Wir addieren alle Zahlen von 1 bis N, in Formeln: $\sum_{k=1}^{N} k$. Berechnen wir diese Summe für verschiedene N:

N	1	2	3	10	300
$\sum_{k=1}^{N} k$	1	3	6	55	45150

Tabelle 2. Die Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen

Hat diese Summe für N gegen ∞ einen Grenzwert? Die Summe wird immer größer und größer. Daher ist der Grenzwert keine Zahl, sondern „Unendlich“:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} k = \infty$$

Beispiel 6. Wir betrachten wieder die Funktion f wie in Beispiel 4, aber diesmal nehmen wir immer kleinere Werte für x:

x	1	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	0.8415	-0.5440	-0.5064	0.8269

Tabelle. $f(x)$ für verschiedene x.

Hier können wir kein „Muster“ erkennen. Die Funktion oszilliert hin und her und behält große Amplituden bei. Hier gibt es kein „Endresultat“, zu dem sich die Funktion hinbewegt. Hier sagen wir:

Der Grenzwert von f für $x \to 0$ existiert nicht.

Bemerkung. Grenzwerte auszurechnen ist nicht immer ganz leicht, in der Universität brauchen angehende Mathematiker ein ganzes Semester, um damit umgehen zu können. Wir erwarten daher natürlich nicht, dass du alles hier perfekt verstanden hast, es geht uns vielmehr darum, dass dir die generelle Idee vertraut wird. Zur Übung sind hier ein paar Beispiele, an denen du dich bitte versuchst:

Aufgabe 3. Gibt es zu den folgenden Objekten einen Grenzwert? Wenn ja, welcher? (Raten ist hier in Ordnung)

1. $\lim_{x \to 0} x^2$
2. $\lim_{x \to -\infty} x^2$
3. $\lim_{x \to \infty} \sin(x)$
4. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(x)$
5. $\lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} (-1)^k$
6. $\lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$
7. $\lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$

Ableitung: Eine „instantane Durchschnittsgeschwindigkeit“

Wir haben festgestellt, dass wir immer zuverlässigere Durchschnittsgeschwindigkeiten erhalten, wenn wir die Zeitpunkte der Messung immer näher zusammenlegen. Betrachten wir die Dynamik eines Pendels: Zu jedem Zeitpunkt messen wir den Winkel φ („phi“), den das Pendel zur senkrechten Position einnimmt

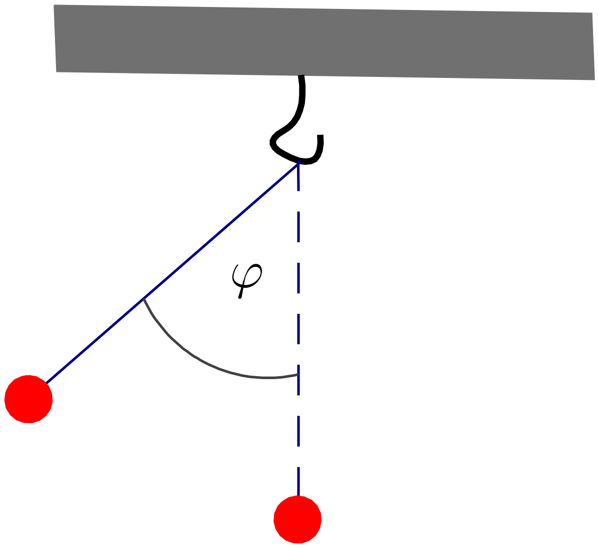

Abbildung 9. Ein Pendel an einem Haken. Zu jedem Zeitpunkt t notieren wir die Auslenkung als Winkel φ.

Ein Graph, der die Auslenkung in Abhängigkeit von der Zeit angibt, sieht etwa so aus:

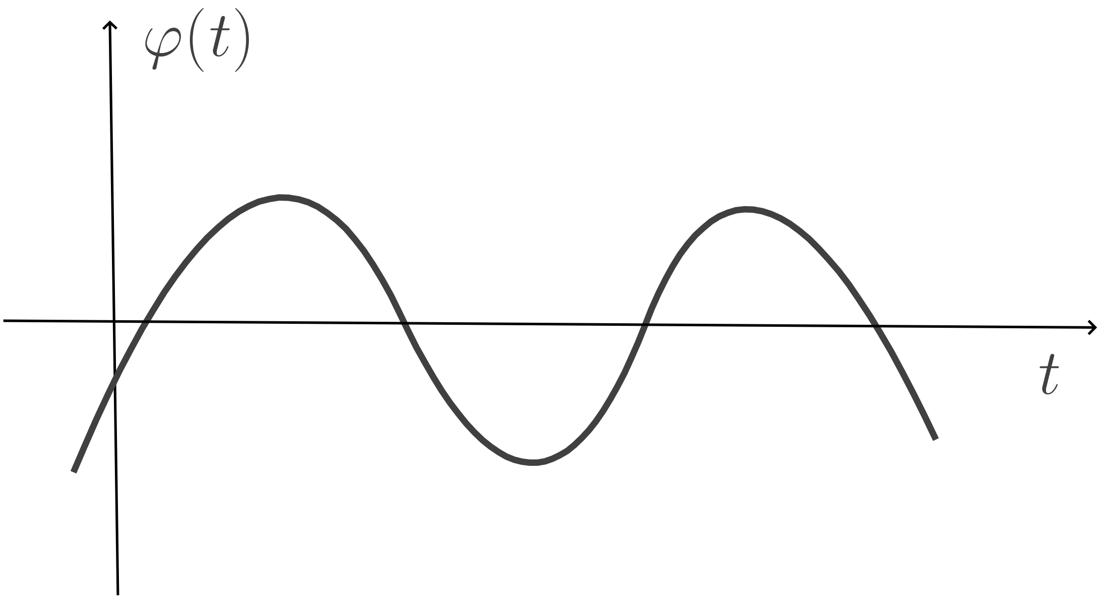

Abbildung 10. Plot der Auslenkung in Abhängigkeit von der Zeit

Nun sehen wir uns die Geschwindigkeit der Winkelveränderung an („Um wieviel Grad pro Sekunde ändert sich φ“). Dazu zoomen wir in einen Teil der Kurve (siehe Abbildung 11). Wir wählen zwei Zeitpunkte t_1 und t_2 und berechnen die Durchschnittsgeschwindigkeit in diesem Zeitintervall. Sie entspricht dem Quotienten zweier Längen (im Bild h und l). Geometrisch entspricht dies der Steigung des Dreiecks („h Höhenmeter auf l Meter Entfernung“).

$$v_{t_0 \to t_1} \;=\; \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{h}{l}$$

Um nicht ständig neue Buchstaben erfinden zu müssen, schreiben wir $\Delta\varphi$ und Δt. Das Δ (ausgesprochen „Delta“) bedeutet „Differenz, Veränderung“. Wir dividieren also die Differenz zwischen zwei φ-Werten durch die Differenz zwischen zwei t-Werten und wir erhalten

$$v_{t_0 \to t_1} \;=\; \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

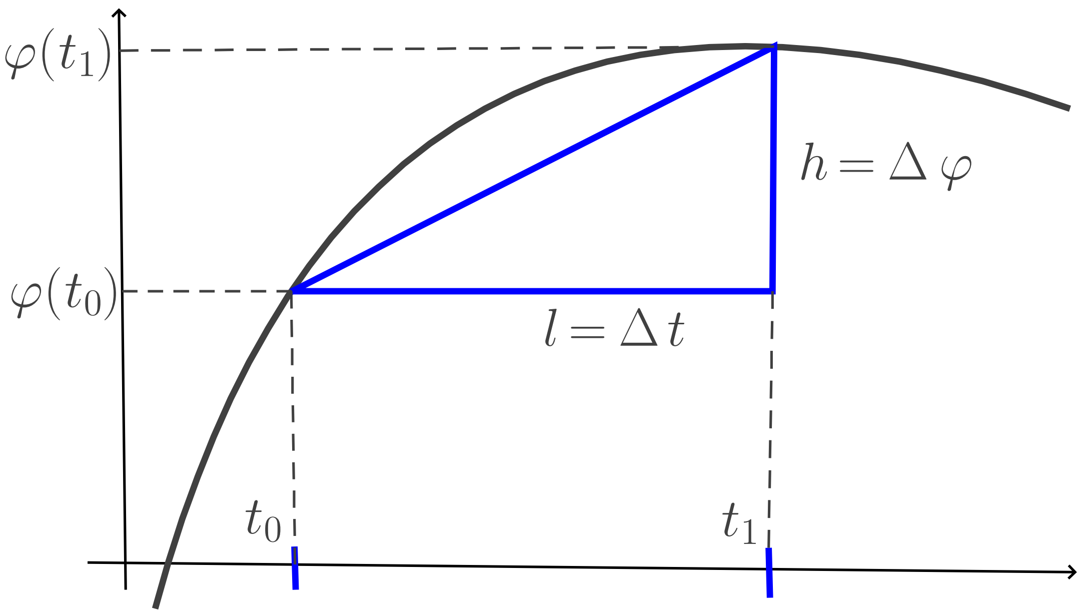

Abbildung 11. Zoom in die Geschwindigkeitsberechnung: Die Geschwindigkeit ist die Steigung der dritten Seite des Dreiecks: $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Wir haben uns bereits überlegt, dass Durchschnittsgeschwindigkeiten umso aussagekräftiger werden, umso kleiner das Zeitintervall ist, das man zur Berechnung benutzt. Wir machen das Gleiche nun für ein kleineres Zeitintervall, indem wir t_1 festlassen, aber den zweiten Zeitpunkt t_1 näher an t_0 ranrutschen und ihn t_1' nennen (siehe Abbildung 12):

$$v_{t_1 \to t_2'} \;=\; \frac{\varphi(t_2') - \varphi(t_1)}{t_2' - t_1} = \frac{\Delta\,\varphi}{\Delta t}$$

Nun ist sowohl Δt also auch $\Delta\,\varphi$ kleiner geworden, aber die Steigung des Dreiecks ist etwas gestiegen. Außerdem ist die Sekante, deren Steigung der Durchschnittsgeschwindigkeit entspricht, näher an die Kurve herangerückt.

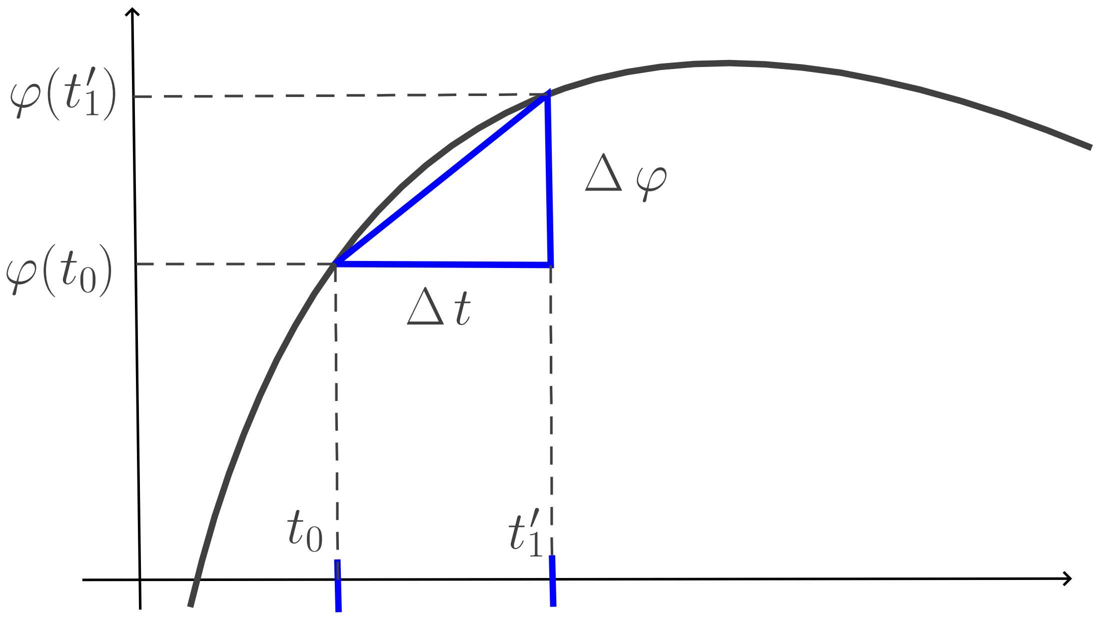

Abbildung 12. Geschwindigkeitsberechnung mit kleinerem Zeitintervall

Machen wir nun ein Gedankenexperiment: Wir wählen die Zeitabstände zwischen t_1 und dem zweiten Messpunkt, also t_1, t_1' oder wie wir ihn nennen wollen, immer kleiner und kleiner. Wir müssen dann immer genauer heranzoomen, aber die Sekante wird immer näher und näher an die Kurve herangehen. Die Differenzen Δt und $\Delta\,\varphi$ werden beide immer kleiner, aber der Bruch $\frac{\Delta\,\varphi}{\Delta t}$ nicht notwendigerweise. Die Steigung nähert sich immer mehr einem Wert an, der der „momentanen“ Steigung der Kurve entspricht, nämlich der Steigung der Tangente in diesem Punkt.

Dies sehen wir in Abbildung 13:

Wenn wir nur die Sekanten zwischen t_1 und immer näher heranrückenden t_2 einzeichnen, sehen wir, dass sie gegen die Tangente an t_1 „konvergieren“, also immer näher an sie herangehen.

Die Durchschnittsgeschwindigkeiten $v_{t_1 \to t_2}$ sind die Steigungen der Sekanten. Also konvergieren die Durchschnittsgeschwindigkeiten gegen die Steigung der Tangente.

Die Steigung der Tangente nennen wir die „Momentangeschwindigkeit“ der Funktion.

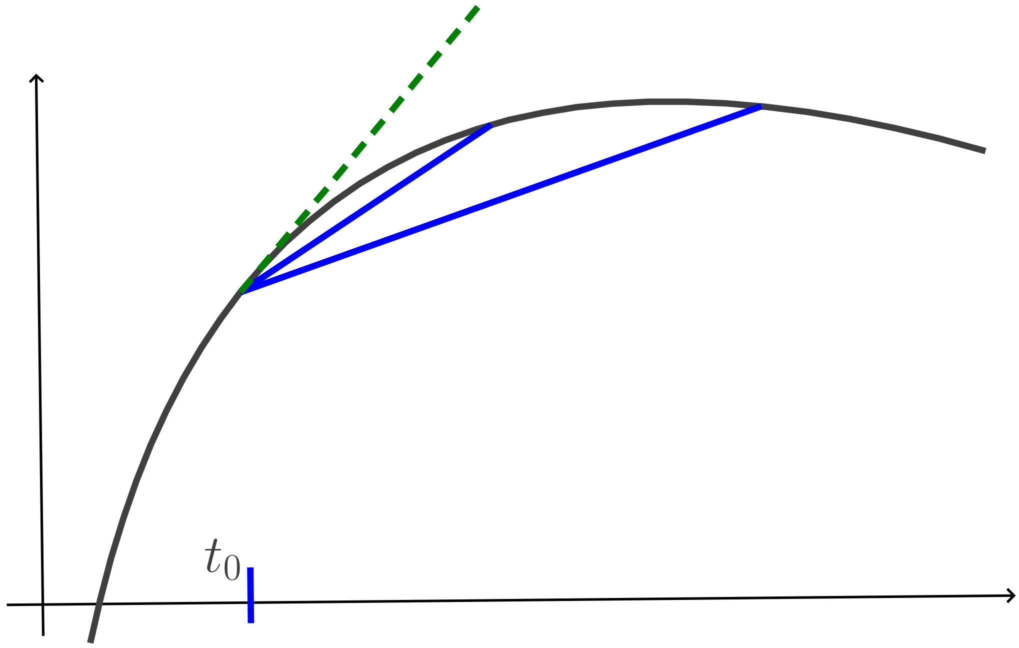

Abbildung 13. Die Sekanten streben gegen die Tangente (eingezeichnet in gestrichelt).

Nun brauchen wir unsere Definition von Grenzwerten, um diese Intuition, die wir von „unendlich nahen Zeitpunkten“ haben, mathematisch auszudrücken. Dazu wählen wir uns einen Zeitpunkt $t_1 0$

Definition 7. *Ableitung einer Funktion*

Wir haben eine Funktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Wir definieren ihre ***Ableitung*** *im Punkt t_0, geschrieben $\varphi'(t_0)$ („f Strich von t_0“) als den folgenden Grenzwert:*

$$\varphi'(t_0) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{(t_0 + h) - t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h},$$

falls er existiert.

Den Quotienten $\frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h}$ nennt man auch den ***Differenzenquotienten*** *im Punkt t_0. Die Ableitung ist also der Grenzwert des Differenzenquotienten.*

Die Funktion $\varphi'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nennen wir ***Ableitungsfunktion****: In jedem Punkt berechnen wir die Ableitung der ursprünglichen Funktion φ in diesem Punkt.*

Dies ist genau der Quotient aus $\Delta\varphi$ und Δt für immer kleiner werdendes $\Delta t = (t_1 - t_0)$ mit $t_1 = t_0 + h$, also muss nur h gegen 0 gehen, damit das Zeitintervall immer kleiner wird.

Bemerkung 8. Manchmal ist die Strich-Notation irreführend (besonders bei Ableitungen von Funktionen in mehreren Dimensionen). Wir schreiben daher auch (rein symbolisch): Die Ableitung der Funktion φ nach der Variablen t an der Stelle t_0 ist

$$\varphi'(t_0) = \frac{d\varphi}{dt}(t_0).$$

Wenn wir die Funktion $f(x,y)$ an der Stelle (x_0, y_0) ableiten (und zwar nur nach y), so schreiben wir analog

$$\frac{df}{dy}(x_0, y_0)$$

Berechnung von Ableitungen mit dem Computer

Berechnung der Ableitung in einem Punkt

Mit dem Computer können wir keine unendlich kleinen Zahlen einsetzen, aber wir können uns ansehen, was passiert, wenn wir „immer kleinere“ Zahlen einsetzen. Als Beispiel nehmen wir die Funktion, die in Abbildung 14 zu sehen ist. Wir versuchen, ihre Ableitung im Punkt $t_0 = 6$ (markiert mit einem roten Quadrat) zu finden.

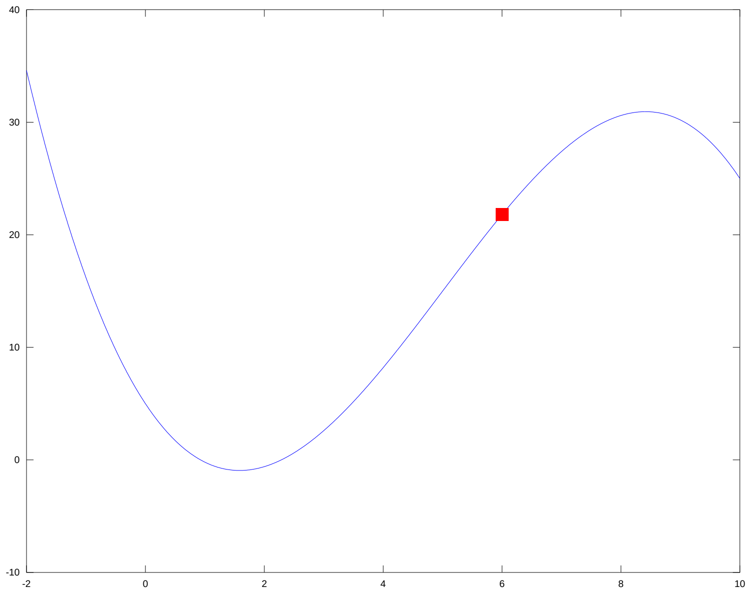

Abbildung 14. Eine Funktion, deren Ableitung wir bestimmen wollen.

Eine Möglichkeit, dies zu machen, ist viele (und immer kleinere) Werte für h in die Definition der Sekantensteigung einzusetzen. Je näher wir den zweiten Zeitpunkt $t_0 + h$ an t_0 wählen (je kleiner h also ist), desto genauer kommen wir an die Ableitung.

h	1	0.5	0.25	0.125	$\cdots$
$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}$	5.8	6.2	6.3	6.37	

Tabelle 3. Approximative Berechnung der Ableitung

Die Steigung ist also ungefähr 6. Dies entspricht auch optisch in etwa der Steigung, die wir ablesen können.

Berechnung einer Ableitungsfunktion

Wir nehmen eine sehr einfache Funktion, deren Ableitungsfunktion wir bestimmen wollen. Achtung, wir wechseln den Variablennamen von t auf x. Das ändert konzeptionell nichts.

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = x^2$$

Wie im letzten Beispiel müssen wir nur die Ableitung in jedem Punkt bestimmen. Das geht natürlich nicht (wir können nicht unendlich viele Zahlen ausrechnen). Aber wir können die Ableitung in „sehr vielen“ Punkten bestimmen. Wir wählen uns die folgende Punktemenge:

$$x_i = i \cdot 0.1, \quad i = 1, \ldots, 10$$

Die Punkte sind also 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0..5, ..., 1. In jedem dieser Punkte bestimmen wir die Ableitung mit dem Computer. Wir fangen an mit $x_1 = 0.1$:

h	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$\frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h}$	0.3	0.21	0.201	0.2001

Tabelle 4. Approximative Berechnung der Ableitung in $x_1 = 0.5$

Offenbar ist also die Ableitung in x_1 ungefähr 0.2. Für $x_2 = 0.2$:

h	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$\frac{\varphi(x_2 + h) - \varphi(x_2)}{h}$	0.5	0.41	0.401	0.4001

Tabelle 5. Approximative Berechnung der Ableitung in $x_2 = 0.2$

Die Ableitung ist also ungefähr 0.4. Wenn wir das nun für alle Punkte x_i machen und $h = 0.0001$ (also klein) wählen, erhalten wir folgende Tabelle:

i	x_i	$\frac{\varphi(x_i + 10^{-4}) - \varphi(x_i)}{10^{-4}}$
1	0.1	0.2001
2	0.2	0.4001
3	0.3	0.6001
4	0.4	0.8001
$\vdots$		
9	0.9	1.8001
10	1.0	2.0001

Tabelle 6. Approximative Berechnung der Ableitung von $\varphi(x) = x^2$ in mehreren Punkten

Wenn wir diese Funktion plotten, erhalten wir das folgende Bild:

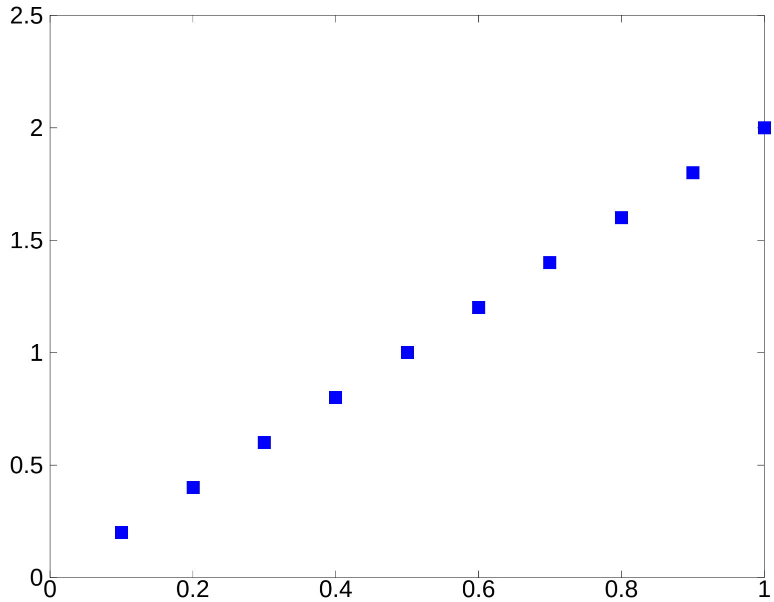

Abbildung 15. Approximativ berechnete Ableitung von $\varphi(x) = x^2$

Die Ableitung stimmt also verdächtig genau mit der Funktion $g(x) = 2 \cdot x$ überein! Im nächsten Abschnitt werden wir dieses Problem analytisch angehen.

Wir können also die Ableitung einer Funktion einfach mit einem Computer ausrechnen. Es ist nur etwas mühsam, weil man die Ableitung in jedem Punkt ausrechnen müsste. Da das nicht geht, muss man sich damit begnügen, die Ableitung in „sehr vielen" Punkten auszurechnen (also z.B. im Punkt 0.01, im Punkt 0.02, ...)

Algebraische Berechnung von Ableitungen

Oft ist es leichter, Ableitungen mit Stift und Papier auszurechnen, statt einen Computer zu bemühen. Sehen wir uns ein leichtes Beispiel an: Die oben bereits mit dem PC attackierte Funktion

$$\varphi: x \mapsto x^2.$$

Wählen wir einen festen (aber beliebigen) Punkt x_0 aus, an dem wir die Ableitung berechnen wollen (also z.B. $x_0 = 1$, aber wir lassen den Wert beliebig!), so können wir mit dem Differentialquotienten die Ableitung aufschreiben:

$$\varphi'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

Schauen wir uns diesen Bruch mal genauer an (und ignorieren den Grenzwert für eine Weile).

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} &= \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \frac{x_0^2 + 2 \cdot x_0 \cdot h + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= \frac{2 \cdot x_0 \cdot h + h^2}{h} \\ &= 2 \cdot x_0 + h \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt den Grenzwert gegen 0 betrachten, erhalten wir

$$\varphi'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} 2 \cdot x_0 + h = 2 \cdot x_0$$

Hier ist es unglaublich leicht, den Grenzwert zu berechnen: Man setzt einfach $h = 0$ ein. So kann man immer zuerst versuchen, Grenzwerte zu berechnen (das geht nur nicht immer).

Also ist die Ableitung der Funktion $\varphi(x) = x^2$ im Punkt x_0 gleich $\varphi'(x_0) = 2 \cdot x_0$.

Die Ableitungsfunktion ist also

$$\varphi'(x) = 2 \cdot x$$

Mit solchen Grenzwerttricks kann man meist viel leichter Ableitungen berechnen!

Höhere Ableitungen

Man kann eine abgeleitete Funktion auch noch einmal ableiten:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Das nennt man dann die **zweite Ableitung**. Das geht dann so weiter mit dritter, vierter etc. Ableitung.

Wichtige Ableitungen

Hier folgt eine Liste (ohne Beweis) von Funktionen und ihren Ableitungen:

$f(x)$	$f'(x)$	Bemerkung
c	0	Konstanten abgeleitet sind 0
x	1	Spezialfall der nächsten Zeile!
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	Wichtigste Regel für Polynome
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\exp(x)$	$\exp(x)$	Exponentialfunktionen sind ihre eigene Ableitung
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
$g(x)+h(x)$	$g'(x)+h'(x)$	Summen kann man einfach separat ableiten
$a \cdot g(x)$	$a \cdot g'(x)$	Konstante Faktoren schleppt man mit
$g(x) \cdot h(x)$	$g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$	Produktregel
$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$	Quotientenregel
$g(h(x))$	$g'(h(x)) \cdot h'(x)$	Kettenregel

Tabelle 7. Wichtige Ableitungsmerkregeln

Die letzten vier Zeilen sind Ableitungsregeln: Wenn man die Ableitungen zu zwei Funktionen g und h bereits kennt, kann man ihre Verkettung, ihr Produkt, ihren Quotienten etc. berechnen.

Beispiel 9. Wir leiten die Funktion $f(x) = \tan(5 \cdot x)$ ab. Wir wissen, dass $\tan = \frac{\sin}{\cos}$. Also:

$$f(x) = \frac{\sin(5 \cdot x)}{\cos(5 \cdot x)}.$$

Das ist ein Quotient, also müssen wir die Quotientenregel benutzen:

$f'(x) = \frac{[\sin(5 \cdot x)]' \cdot \cos(5 \cdot x) - \sin(5 \cdot x) \cdot [\cos(5 \cdot x)]'}{(\cos(5 \cdot x))^2}$, wobei $[\sin(5 \cdot x)]'$ bedeutet, dass wir die ganze Funktion $\sin(5 \cdot x)$ nach x ableiten.

Was ist $[\sin(5 \cdot x)]'$? Die Funktion ist eine Verkettung der Funktion $g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = 5 \cdot x$, denn $g(h(x)) = g(5 \cdot x) = \sin(5 \cdot x)$. Also benutzen wir die Kettenregel und erhalten mit $g'(x) = \cos(x)$ und $h'(x) = 5 \cdot$

$[\sin(5 \cdot x)]' = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \cos(5 \cdot x) \cdot 5$. Überlege dir selbst, dass $[\cos(5 \cdot x)]' = -5 \cdot \sin(5 \cdot x)$ ist!

Insgesamt ist also

$f'(x) = \frac{5 \cdot \cos(5 \cdot x) \cdot \cos(5 \cdot x) - \sin(5 \cdot x) \cdot (-5) \cdot \sin(5 \cdot x)}{(\cos(5 \cdot x))^2} = 5 \cdot \frac{(\cos(5 \cdot x))^2 + (\sin(5 \cdot x))^2}{(\cos(5 \cdot x))^2} = \frac{5}{(\cos(5 \cdot x))^2}$, wobei wir im letzten Schritt die Identität $\sin(y)^2 + \cos(y)^2 = 1$ benutzt haben.

Beispiel 10. Noch ein Ableitungsbeispiel: $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) + 5$. Diese Funktion hat die Struktur $f(x) = g(x) \cdot h(x) + c$. Wir gehen von außen vor: Der additive Faktor c wird zu 0 abgeleitet. Jetzt fehlt nur noch die Ableitung des Produktes $g(x) \cdot h(x)$. Das geht wieder mit der Produktregel:

$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) + 0 = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$.

Ableiten ist nicht schwer, aber es erfordert einiges an Übung, bis man sich damit wohlfühlt. Daher beschäftige dich bitte mit folgenden Aufgaben:

Aufgabe 4. Leite $f(x) = x^2$ nach der Tabelle 7 ab. Stimmt das Ergebnis mit unserer Herleitung mittels des Differentialquotienten überein?

Aufgabe 5. Bestimme die erste, zweite, dritte und vierte Ableitung von $f(x) = 5 \cdot x^3 - 2 \cdot x$

Aufgabe 6. Bestimme die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - \exp(x) \cdot x$

Nicht differenzierbare Funktionen

Es gibt einen Grund, dass wir in der Definition von Ableitung schreiben „... falls [der Differntialquotient] existiert". Es gibt nämlich Funktionen, wo das nicht klappt. Der Grund ist der folgende:

Funktionen mit „Knicken" sind dort nicht differenzierbar.

Beispiel 11. Die Betragsfunktion

$$f(x) = |x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geqslant 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist nicht differenzierbar in $x = 0$, sonst aber schon. Der Knick in $x = 0$ sorgt für Probleme, wie wir sehen werden. Betrachten wir zuerst den Fall $x \neq 0$.

Für $x > 0$ gilt:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1.$$

Beachte, dass wir beim zweiten Gleichheitszeichen benutzt haben, dass wir uns auf dem rechten Ast der Funktion befinden, wo wirklich $f(x) = x$ ist.

Die Ableitung ist also $f'(x) = 1$ für $x > 0$. Das ist nachvollziehbar, denn dort stimmt f ja mit der Funktion $g(x) = x$ überein (die die Ableitung $g'(x) = 1$ hat), also sollten auch ihre Ableitungen gleich sein.

Jetzt sehen wir uns $x < 0$ an:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-x-h-(-x)}{h} = -1.$$

Auch das ist wieder nachvollziehbar: Auf dem linken Ast stimmt f mit $g(x) = -x$ überein. Diese Funktion hat die Ableitung $g'(x) = -1$.

Was passiert nun in der Mitte? Der Punkt ist, dass der Grenzwert hier nicht eindeutig ist: Nehmen wir zuerst an, dass wir *von rechts* an die Null herangehen, also positive h benutzen.

$$\lim_{h \to 0, h > 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0, h > 0} \frac{h}{h} = 1$$

Wenn wir *von links* an die Null herangehen, also negative h benutzen:

$$\lim_{h \to 0, h < 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0, h > 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Also ist der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

nicht definiert, weil er nicht eindeutig ist. Daher ist die Funktion nicht differenzierbar in 0.

Die Ableitung der Betragsfunktion ist also

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

(und undefiniert für $x = 0$).

Anschaulich gesehen können wir an den Nullpunkten Tangenten mit Steigung 1 (nämlich von rechts) und Tangenten mit Steigung -1 (von links) ranlegen. Damit ist die Steigung in diesem Punkt nicht wohldefiniert.

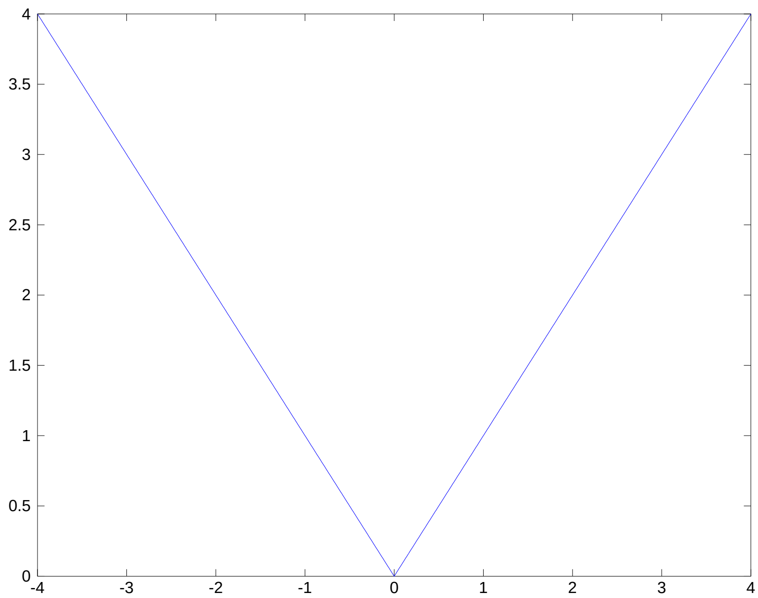

Abbildung 16. Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$

Ableitungen zur Bestimmung von Maxima und Minima

Betrachte Abbildung 14. Angenommen, wir suchen nach dem x-Wert, für den $f(x)$ sein Maximum oder Minimum annimmt (also die Bergspitze, beziehungsweise das Tal). Es fällt auf, dass in diesen beiden Punkten die Ableitung der Funktion (denn sie ist die „lokale“ Steigung) den Wert 0 annimmt.

Wenn man nach Maxima und Minima einer (differenzierbaren) Funktion sucht, sollte man die Ableitung auf Nullstellen untersuchen. Diese Nullstellen sind dann gute Kandidaten für solche Maxima und Minima (aber nicht garantierterweise, wie die folgenden Beispiele zeigen sollen).

Beispiele und Gegenbeispiele

Beispiel 12. Nullstellen eines Polynoms. Betrachte $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{4}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 1$. Wir suchen seine Maxima und Minima. Auf dem Plot im Abbildung 17 erkennen wir, dass es zwei lokale Minima (bei $x = 0$ und $x = 3$) und ein lokales Maximum ($x = 1$) gibt. Das globale Minimum ist das linke der beiden Minima. Ein globales Maximum gibt es nicht, denn je weiter nach außen man geht, desto größer werden die Funktionswerte. Wir versuchen, diese Extremwerte analytisch zu finden:

Die Ableitung von f ist $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^{4-1} - \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot x^{3-1} + \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 = x^3 - 4 \cdot x^2 + 3 \cdot x$.

Wir formen das Ergebnis um, indem wir ausklammern und die Nullstellen des verbleibenden quadratischen Polynoms ausrechnen:

$$f'(x) = x \cdot (x^2 - 4 \cdot x + 3)$$

Die Nullstellen des zweiten Faktors sind nach der Mitternachtsformel

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = 2 \pm 1$$

Die Nullstellen sind also 0, 1 und 3 und wir können faktorisieren:

$$f'(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-3)$$

Bei allen drei Nullstellen sind lokale Extrema. Im Moment können wir noch nicht entscheiden, ob die Extrema nun Minima oder Maxima sind. Und wir sehen auch nicht, wo globale Extrema sind (wenn sie überhaupt existieren).

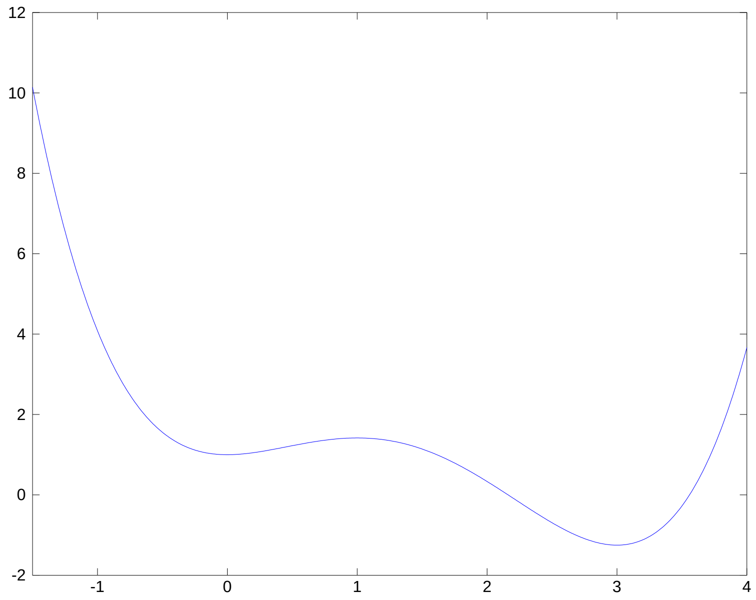

Abbildung 17. Ein Plot der Funktion $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{4}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 1$.

Aufgabe 7. Finde alle Extremwerte der Funktion $f(x) = \cos(x)$. Stimmen deine Ergebnisse mit deinem Wissen über die Cosinusfunktion überein?

Beispiel 13. Nicht differenzierbare Funktionen

Unser Verfahren schlägt fehl, wenn wir nicht-differenzierbare Funktionen nehmen: Wir nehmen wir unsere Betragsfunktion von vorhin: $f(x) = |x|$. Ihre Ableitungsfunktion ist

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Diese Funktion hat keine Nullstellen, deswegen finden wir keine Extremwerte. Natürlich hat die Betragsfunktion Extremwerte: Im Punkt $x = 0$ hat die Funktion ein (globales) Minimum. Also müssen wir Punkte, in denen die Funktion nicht differenzierbar ist, immer separat untersuchen.

Beispiel 14. Sattelpunkte

Nicht alle Punkte, an denen die Ableitung 0 ist, sind auch Minima oder Maxima:

Betrachte $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)^3 + 2$, deren Plot in Abbildung 18 zu sehen ist. Die Ableitung ist $f'(x) = 3 \cdot (x-1)^2$ mit der einzigen Nullstelle $x = 1$. Dies ist aber kein Extremwert, sondern ein „Sattelpunkt". Trotzdem hat die Funktion dort eine waagerechte Tangente, also ist die Ableitung 0.

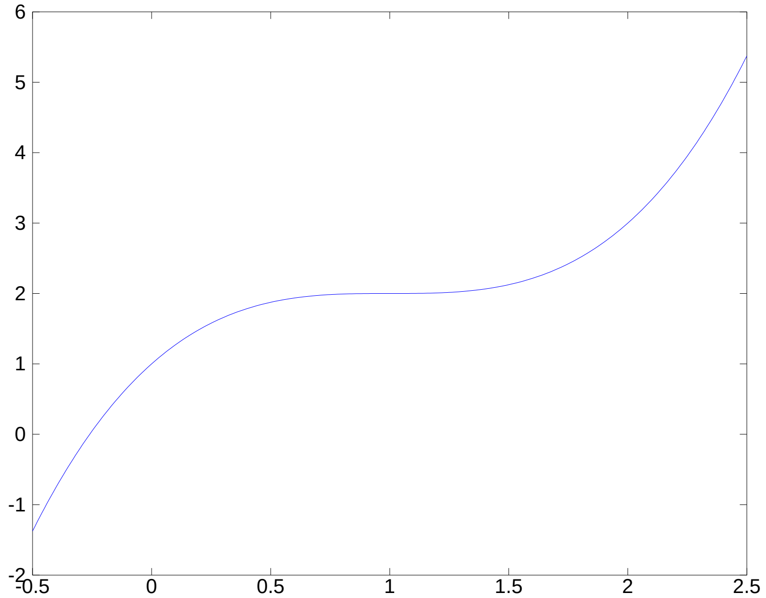

Abbildung 18. Ein Plot der Funktion $f(x) = (x-1)^3 + 2$.

Beispiel 15. Maxima von Funktionen in mehreren Dimensionen

Auch Funktionen der Form $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ können Maxima und Minima haben: Wir betrachten

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto -e^{-(x^2+y^2)} - \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{2}y^2. \end{aligned}$$

Ein Plot des Graphen der Funktion (Abbildung 19) und ein sogenannter Konturenplot (die Linien sind als Höhenlinien des Berges zu verstehen, den man im dreidimensionalen Plot sehen kann) in Abbildung 20. Jetzt suchen wir nicht waagerechte Tangenten (denn das wären Linien), sondern waagerechte tangentiale Flächen an den Graphen. Die Verallgemeinerung ist einfach: Wir bestimmen die Ableitung nach x und die Ableitung nach y und suchen die Werte von x und y, sodass beide Ableitungen 0 sind.

Die Ableitung nach x (siehe Bemerkung 8):

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x,y) &= 2\cdot x\cdot e^{-(x^2+y^2)} - \frac{1}{5}x = \frac{1}{5}\cdot x\cdot\left(10\cdot e^{-(x^2+y^2)} - 1\right) \\ \frac{df}{dy}(x,y) &= 2\cdot y\cdot e^{-(x^2+y^2)} - y = y\cdot\left(2\,e^{-(x^2+y^2)} - 1\right) \end{aligned}$$

Die Ableitung nach x ist 0, wenn $x=0$ oder $x^2+y^2=\ln(10)$, die Ableitung nach y ist 0, wenn $y=0$ oder $x^2+y^2=\ln(2)$. Beide Ableitungen müssen gleichzeitig 0 sein, also gibt es folgende Fälle zu betrachten:

1. $x=0$ und $y=0$
2. $x=0$ und $x^2+y^2=\ln(2)$, also $y=\pm\sqrt{\ln(2)}\approx 0.83$.
3. $y=0$ und $x^2+y^2=\ln(10)$, also $x=\pm\sqrt{\ln(10)}\approx 1.52$.
4. $x^2+y^2=\ln(2)$ und $x^2+y^2=\ln(10)$ (unmöglicher Fall)

Jeder dieser fünf Punkte $(0,0)$, $\left(0,\pm\sqrt{\ln(2)}\right)$, $\left(\pm\sqrt{\ln(10)},0\right)$ ist entweder Minimum, Maximum oder Sattelpunkt. Wie genau man das herausfindet, ist etwas schwieriger und wird hier nicht behandelt. Im Plot lässt sich aber relativ schnell ablesen, was hier passiert.

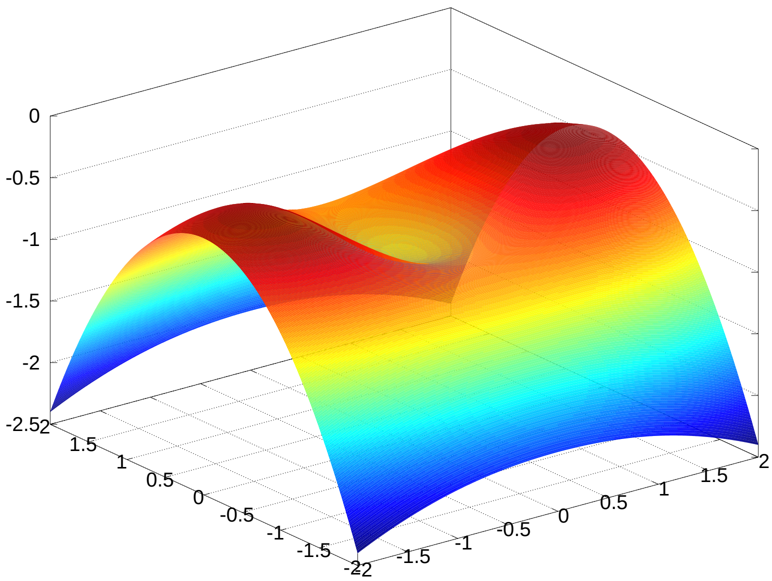

Abbildung 19. Plot der Funktion $f\colon (x,y) \mapsto -e^{-(x^2+y^2)} - \frac{1}{10}\,x^2 - \frac{1}{2}\,y^2$

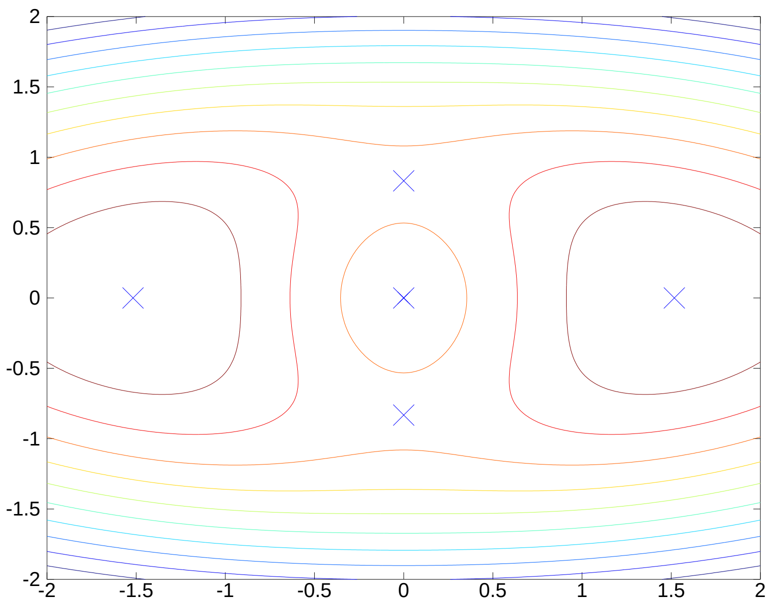

Abbildung 20. Konturenplot der Funktion $f\colon (x,y) \mapsto -e^{-(x^2+y^2)} - \frac{1}{10}\,x^2 - \frac{1}{2}\,y^2$ inklusive aller „kritischen“ Punkte. Vergleiche mit Abbildung 19: Welche Punkte sind Maxima, Minima, Sattelpunkte?

Beispiel 16. Extremwerte auf dem Rand des Definitionsbereichs

Neben Nichtdifferenzierbarkeitsstellen gibt es noch weitere Extremwerte, die man nicht finden kann, wenn man nur die Ableitung betrachtet: Wir nehmen $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $[-1, 2]$. Die Ableitung liefert uns ein Minimum für $x = 0$. Durch „Hinkucken“ sehen wir, dass die Randpunkte Maxima sind, wobei das Maximum bei $x = 2$ das globale (also absolute) Maximum ist. Die Ableitung in diesen Punkten ist aber nicht 0.

Außerdem ist die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ nur von unten beschränkt (wieder bei $x = 0$). Es gibt kein Maximum! Wir sehen also, dass der Begriff von Extremwerten auch von der Definitionsmenge abhängt!

Wenn die Definitionsmenge zweidimensional ist, ist der Rand eine Linie: Wenn der Definitionsbereich das ausgefüllte Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ ist, so ist der Rand des Definitionsbereich das Quadrat (unausgefüllt). Wir müssen also die Funktion auf dieser ganzen Linie betrachten, um Extremwerte darauf zu finden.

Kochrezept zur Findung von Extremwerten und Sattelpunkten

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir suchen ihre Extremwerte und Sattelpunkte.

1. Bestimme die Ableitung nach jeder einzelnen Variable. Finde Punkte $x \in \mathbb{R}^n$, sodass jede Ableitung in diesem Punkt ausgewertet 0 ergibt. Das sind die sogenannten **kritischen Punkte**.

2. Überprüfe die kritischen Punkte genauer: Welche sind Minima, welche Maxima und welche Sattelpunkte? (In kleinen Dimensionen ist das am Besten durch „Hinkucken“ möglich, in höheren Dimensionen braucht man etwas ausgefuchstere Methoden, die wir aber vorerst nicht brauchen werden)

3. Hat die Funktion Stellen, an denen sie nicht differenzierbar ist? Ist vielleicht dort ein Extremwert? (vergleiche Beispiel 13: Dort ist der Nullpunkt ein Minimum, doch die Ableitung liefert darauf keinen Hinweis)

4. Betrachte das Randgebiet des Definitionsintervalls: Wird die Funktion unbeschränkt oder gibt es dort vielleicht Extremwerte? (siehe auch Beispiel 16)

Aufgabe 8. Finde alle Extremwerte und Sattelpunkte zu $f(x) = 5 \cdot |x| + (x-1)^2 - \frac{x^3}{3}$.

Aufgabe 9. Finde alle Extremwerte und Sattelpunkte zur Funktion

$$f(x, y) = (x-1)^2 \cdot (y-1)^2 + (x+1)^2 \cdot (y+1)^2$$

auf dem Definitionsbereich $D = [-2, 2] \times [-2, 2]$. Es könnte dir helfen, die Funktion zu plotten.