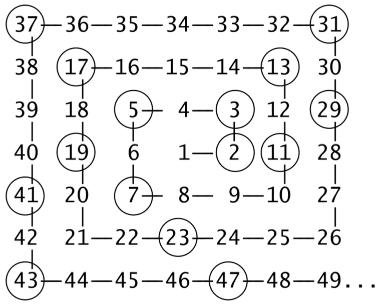
Begabungsstützpunkt Mathematik
Schuljahr 2023/2024

Ingo Blechschmidt

Primzahlen



Aufgabe 1. *Die Mysterien der Ulam-Spirale*

Rechts abgebildet ist der Beginn der *Ulam-Spirale*.

a) Vielleicht macht es dir Spaß, sie weiter zu zeichnen. Primzahlen häufen sich an den Diagonal- und Querachsen.

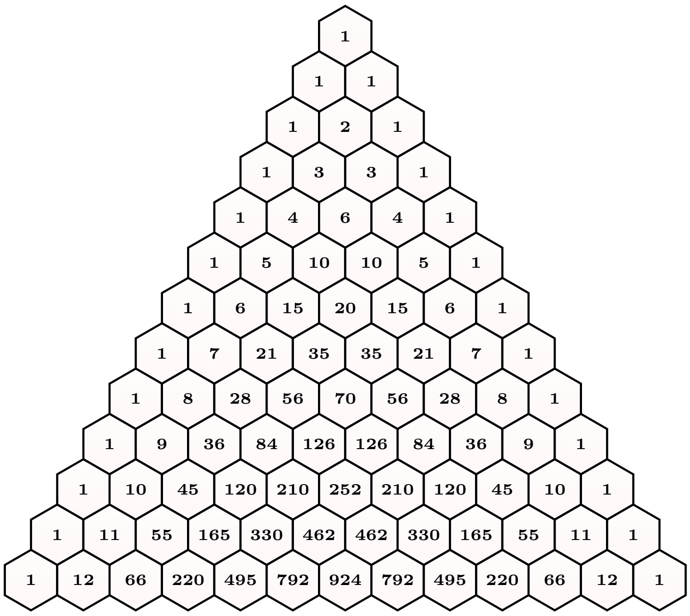
b) Was passiert, wenn du statt der 1 die 41 als Ausgangspunkt nimmst?

Aufgabe 2. *Ein verstecktes Fraktal im Pascalschen Dreieck*

a) Die Grafik zeigt die ersten 12 Zeilen des sog. Pascalschen Dreiecks. Nach welchem Bildungsprinzip ergeben sich die Zahlen?

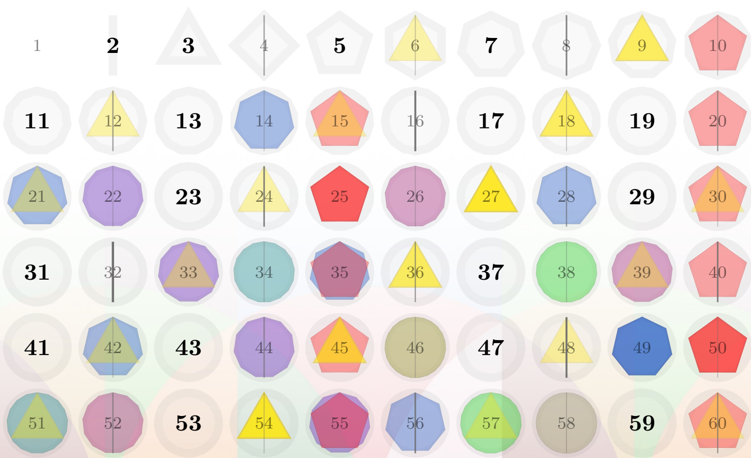
b) Färbe alle Vielfachen der Zahl 2 ein. Was stellst du fest?

c) Ein ähnliches Fraktal ergibt sich, wenn man die Vielfachen einer anderen Primzahl einfärbt. Probiere es aus.



Aufgabe 3. *Das Sieb des Eratosthenes*

Vielleicht macht es dir Spaß, das *Sieb des Eratosthenes* länger als abgebildet durchzuführen. Eine gute Anleitung gibt der Wikipedia-Artikel zu diesem Thema.



Aufgabe 4. *Lucas–Lehmer-Test in Aktion*

Die Lucas–Lehmer-Zahlenfolge ist folgende unendliche Zahlenfolge:

$$4, \quad 14, \quad 194, \quad 37634, \quad 1416317954, \quad \ldots$$

Die jeweils nächste Zahl ist zwei weniger als das Quadrat der vorherigen: $s_{n+1} = s_n^2 - 2$. Der *LL-Rest* einer Mersenne-Zahl $2^p - 1$ ist der Rest bei Division der $(p-1)$-ten Lucas–Lehmer-Zahl durch $2^p - 1$. Zum Beispiel:

- Der LL-Rest von $2^3 - 1 = 7$ ist der Divisionsrest bei $14 : 7$, also Null.
- Der LL-Rest von $2^4 - 1 = 15$ ist der Divisionsrest bei $194 : 15$, also 14 (da $194 = 12 \cdot 15 + 14$).
- Der LL-Rest von $2^5 - 1 = 31$ der Divisionsrest bei $37634 : 31$, also Null (da $37634 = 31 \cdot 1214$).

Dass die LL-Reste von 7 und 31 jeweils Null sind, ist kein Zufall: *Ist p eine ungerade Primzahl, so ist die Zahl $2^p - 1$ dann und nur dann ebenfalls prim, wenn ihr LL-Rest Null ist.*

a) Was ist der LL-Rest von $2^6 - 1 = 63$?

b) Verwende den LL-Test, um zu prüfen, ob $2^{11} - 1 = 2047$ prim ist.

Aufgabe 5. *Beliebig große Lücken zwischen Primzahlen*

Zeige: Zu jeder Lauflänge $n \geq 1$ gibt es eine Folge von n direkt aufeinanderfolgenden Zahlen, welche alle keine Primzahlen sind.

Mit anderen Worten: Irgendwo auf dem Zahlenstrahl gibt es fünf aufeinanderfolgende Zahlen, die alle keine Primzahlen sind; irgendwo anders gibt es hundert aufeinanderfolgende Zahlen, die alle keine Primzahlen sind; und so weiter.

Tipp. Kannst du den Zahlen $m! + 2$ bis $m! + m$ ansehen, welche Teiler sie auf jeden Fall haben? Dabei ist $m! = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (gesprochen: „m Fakultät“).

Aufgabe 6. *Primzahlen mögen die 6 und die 24*

a) Zeige: Jede Primzahl größer als 3 liegt benachbart zu einem Vielfachen von 6. Mit anderen Worten: Ist $p > 3$ eine Primzahl, so $6 \mid p - 1$ oder $6 \mid p + 1$.

   Tipp. Eine Zahl ist genau dann ein Vielfaches von 6, wenn sie ein Vielfaches von 2 und von 3 ist. Weißt du von den drei Zahlen $p - 1$, p und $p + 1$, ob sie ein Vielfaches von 3 sind?

b) Sei p eine beliebige Primzahl größer als 3. Zeige: Die Zahl $p^2 - 1$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 24. (In anderen Worten: $24 \mid p^2 - 1$.)

Aufgabe 7. *Zusammengesetzte Mersenne-Zahlen*

Positive Zahlen, die nicht Primzahlen sind, heißen *zusammengesetzte Zahlen.* Zeige: Ist n eine zusammengesetzte Zahl, so ist die Mersenne-Zahl $2^n - 1$ ebenfalls zusammengesetzt. (In der Folge hat $2^n - 1$ also nur dann eine Chance, prim zu sein, wenn n selbst prim ist. Das heißt aber nicht, dass in diesem Fall $2^n - 1$ sicher prim ist.)

Tipp. Beginne deine Überlegungen mit der Feststellung, dass sich n als $n = ab$ für gewisse Faktoren a und b schreiben lässt. Nutze dann die *Formel für die geometrische Reihe*: Für jede Zahl q gilt $q^k - 1 = (q-1) \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1})$. Dies ist eine von einer kleinen Handvoll Formeln, die die meisten Mathematiker*innen auswendig kennen.

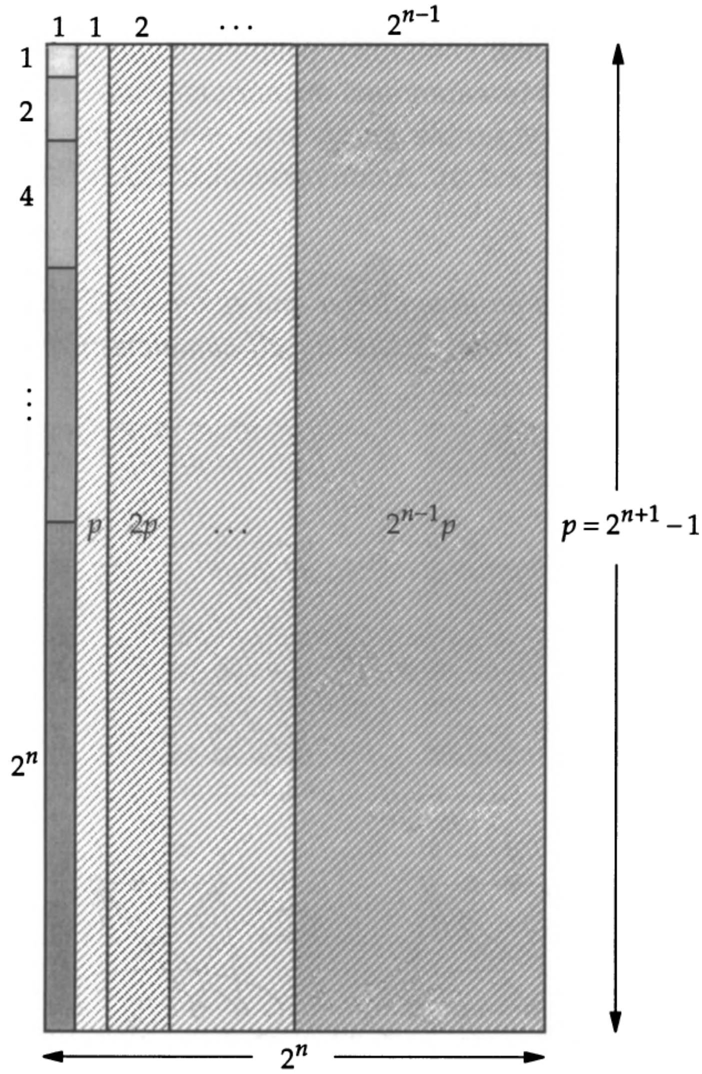
Aufgabe 8. *Charakterisierung gerade perfekter Zahlen*

Eine positive natürliche Zahl heißt genau dann *perfekt*, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Etwa sind die Zahlen 6 und 28 perfekt, denn $6 = 1 + 2 + 3$ und $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Für die Mersenne-Zahl $q = 2^2 - 1 = 3$ gilt $6 = q(q + 1)/2$ und für die Mersenne-Zahl $q = 2^3 - 1 = 7$ gilt $28 = q(q + 1)/2$. Das ist kein Zufall: Es ist nämlich ein Theorem, dass wenn $q = 2^{n+1} - 1$ eine beliebige Mersenne-Zahl ist, die Zahl $N = q(q + 1)/2$ gerade und perfekt ist.

a) Verifiziere: In dieser Situation gilt $q(q + 1)/2 = 2^n \cdot (2^{n+1} - 1)$. (Damit ist also N gerade.)

b) Die Grafik zeigt einen grafischen Beweis, dass N perfekt ist. Vollziehe ihn nach.

Übrigens: Es gilt auch die Umkehrung – jede gerade perfekte Zahl ist von der hier vorgestellten Form.



$$1 + 2 + \cdots + 2^n + p + 2p + \cdots + 2^{n-1}p = 2^n p = N$$

Aufgabe 9. *Eine stumpfe obere Schranke an die Größen von Primzahlen*

Euklid bewies die Unendlichkeit der Primzahlen wie folgt:

> *Sind Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ gegeben, so hat die Zahl $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ wie jede natürliche Zahl, die mindestens 2 ist, irgendwelche Primfaktoren – aber die gegebenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ können das nicht sein, also sind diese Primfaktoren neue Primzahlen.*

Sei im Folgenden $p_1 = 2$ die erste Primzahl, $p_2 = 3$ die zweite und so weiter.

a) Zeige: Für die $(r + 1)$-te Primzahl gilt die Abschätzung $p_{r+1} \leq p_1 \cdots p_r + 1$.

b) Folgere mit vollständiger Induktion für alle natürlichen Zahlen $r \geq 1$: $p_r < 2^{(2^r)}$.

Tipp. Verwende, dass für alle Zahlen $m \geq 2$ gilt: $m/4 + 1 \leq m$. Verwende außerdem die Formel $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 2$.