

# Die wundersame Welt der unendlich großen Zahlen

Glaube in der Mathematik?

Die Lange Nacht der Wissenschaft

16. Juli 2022

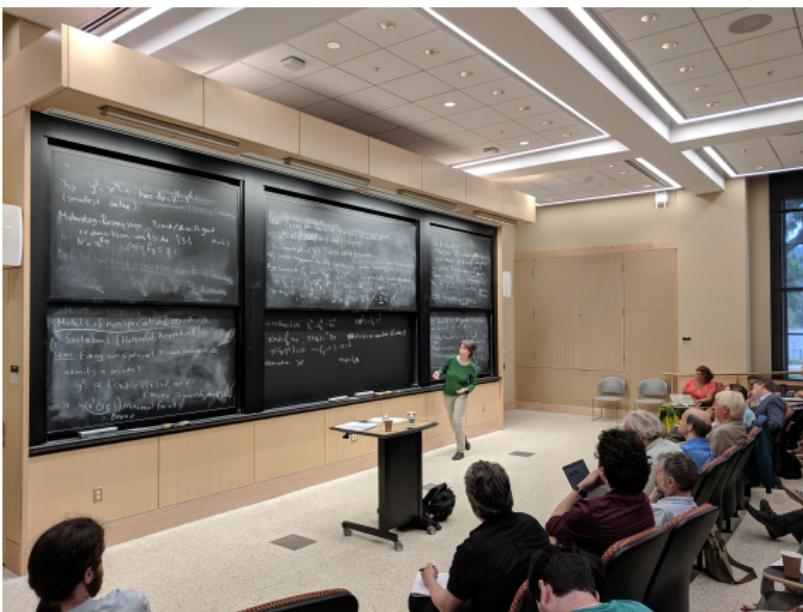


Ingo Blechschmidt

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie

Universität Augsburg

# Fragen sind willkommen



Fragen sind während des gesamten Vortrags willkommen.  
Bitte keinesfalls bis zum Ende aufsparen.  
Vielen Dank dafür! ❤

# Teil 0

## Große Zahlen

300 000 Augsburger\*innen

# Teil 0

## Große Zahlen

300 000 Augsburger\*innen

$10^{19} = \underbrace{10\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}_{19 \text{ Nullen}}$  Sandkörner auf der Erde

# Teil 0

## Große Zahlen

300 000 Augsburger\*innen

$10^{19} = \underbrace{10\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}_{19 \text{ Nullen}}$  Sandkörner auf der Erde

$10^{80} = \underbrace{1000\dots000}_{80 \text{ Nullen}}$  Elementarteilchen im Universum



A wide-angle photograph of a dark night sky. The upper two-thirds of the image are filled with numerous stars of varying brightness, creating a dense field of light. A prominent, faint band of light, characteristic of the Milky Way, stretches across the center of the frame. The lower third of the image features the dark, silhouetted outlines of a forest of tall evergreen trees, their branches reaching upwards. The overall composition is a landscape-oriented night scene.

**6 000 Sterne**



A wide-angle photograph of a coastal scene at sunset. The sky is filled with vibrant orange, red, and yellow clouds. In the foreground, dark silhouettes of large rock formations stand in the water. The ocean waves are visible, reflecting the warm colors of the sky.

**52! =** 80 658 175 170 943 878 571 660  
636 856 403 766 975 289 505 440  
883 277 824 000 000 000 000 Sekunden

# Teil I

## Ordinalzahlen messen Anordnung



# Teil II

## Kardinalzahlen messen Anzahl



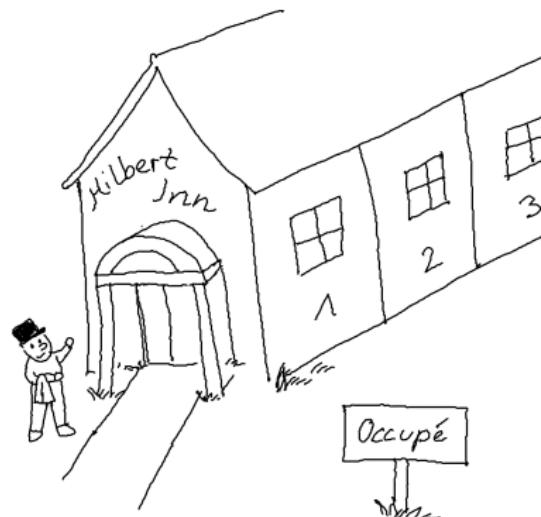
David Hilbert  
\* 1862  
† 1943



Emmy Noether  
\* 1882  
† 1935

# Teil II

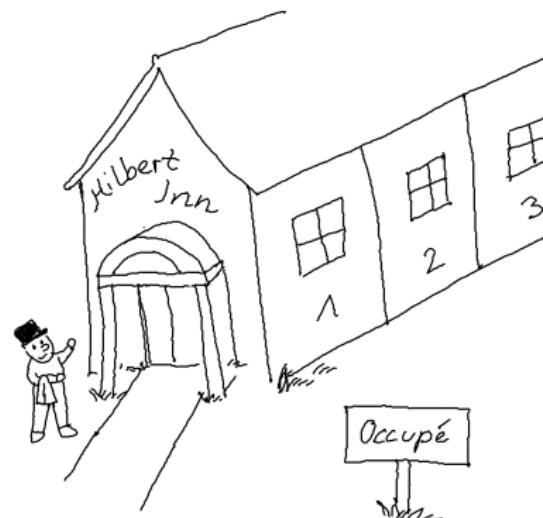
## Kardinalzahlen messen Anzahl



# Teil II

## Kardinalzahlen messen Anzahl

Es gibt  $\aleph_0$  viele natürliche  
Zahlen: 1, 2, 3, ...

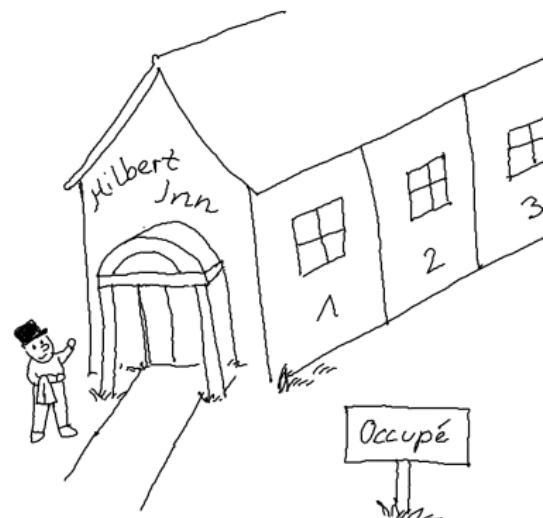


# Teil II

## Kardinalzahlen messen Anzahl

Es gibt  $\aleph_0$  viele natürliche  
Zahlen: 1, 2, 3, ...

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$



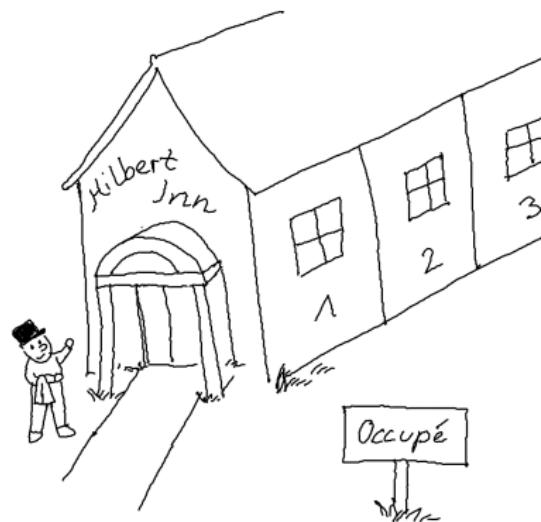
# Teil II

## Kardinalzahlen messen Anzahl

Es gibt  $\aleph_0$  viele natürliche  
Zahlen: 1, 2, 3, ...

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$



# Größen wichtiger Mengen

- Es gibt  $\aleph_0$  viele **natürliche Zahlen**.

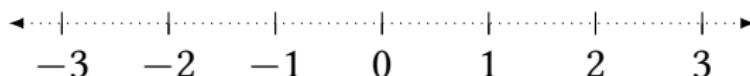


# Größen wichtiger Mengen

- Es gibt  $\aleph_0$  viele **natürliche Zahlen**.



- Es gibt auch nur  $\aleph_0$  viele **ganze Zahlen**.

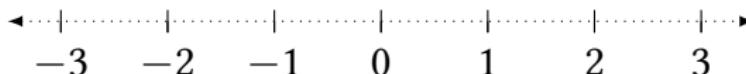


# Größen wichtiger Mengen

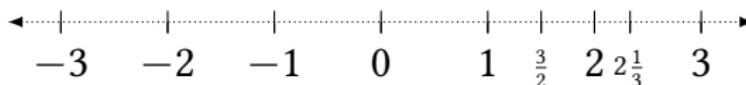
- Es gibt  $\aleph_0$  viele **natürliche Zahlen**.



- Es gibt auch nur  $\aleph_0$  viele **ganze Zahlen**.



- Ebenso gibt es nur  $\aleph_0$  viele **rationale Zahlen**.

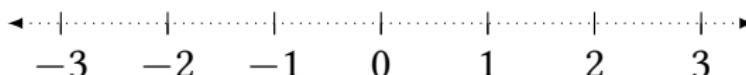


# Größen wichtiger Mengen

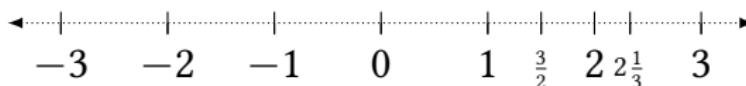
- Es gibt  $\aleph_0$  viele **natürliche Zahlen**.



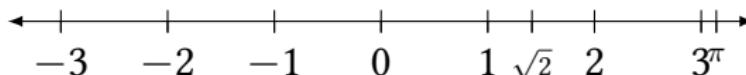
- Es gibt auch nur  $\aleph_0$  viele **ganze Zahlen**.



- Ebenso gibt es nur  $\aleph_0$  viele **rationale Zahlen**.

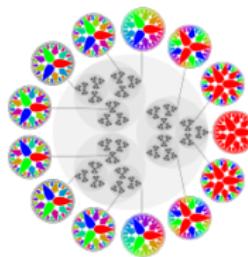


- Aber es gibt **mehr** reelle Zahlen:  $\mathfrak{c}$  viele.



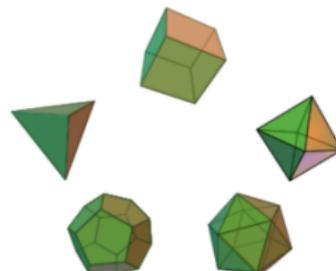
# Teil III

## Erkenntnistheorie



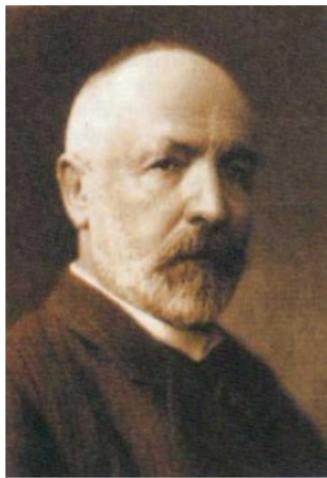
„Es gibt unendlich  
viele Primzahlen.“

„Es gibt nur fünf  
platonische Körper.“



„Der goldene Schnitt ist  
eine irrationale Zahl.“

# Die Kontinuumshypothese



Georg Cantor (\* 1845, † 1918)

Gibt es eine  
Zwischenstufe  
zwischen  $\aleph_0$  und  $\mathfrak{c}$ ?

# Die Kontinuumshypothese



Georg Cantor (\* 1845, † 1918)



Kurt Gödel (\* 1906, † 1978)

Gibt es eine  
Zwischenstufe  
zwischen  $\aleph_0$  und  $\mathfrak{c}$ ?

Es gibt keinen  
Beweis, dass es eine  
Zwischenstufe gibt.

# Die Kontinuumshypothese



Georg Cantor (\* 1845, † 1918)



Kurt Gödel (\* 1906, † 1978)



Paul Cohen (\* 1934, † 2007)

Gibt es eine  
Zwischenstufe  
zwischen  $\aleph_0$  und  $\mathfrak{c}$ ?

Es gibt keinen  
Beweis, dass es eine  
Zwischenstufe gibt.

Es gibt keinen  
Beweis, dass es keine  
Zwischenstufe gibt.

# Abschluss

- Ordinalzahlen messen Anordnung.  $\omega + 1 > \omega$
- Kardinalzahlen messen Anzahl.  $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$
- Es gibt mathematische Fragen, deren Antwort bewiesenermaßen dauerhaft unkennbar ist.

# Abschluss

- Ordinalzahlen messen Anordnung.  $\omega + 1 > \omega$
- Kardinalzahlen messen Anzahl.  $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$
- Es gibt mathematische Fragen, deren Antwort bewiesenermaßen dauerhaft unkennbar ist.