1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50

Große Zahlen,
sehr große Zahlen,
sehr sehr große Zahlen

– eine Einladung in fortgeschrittene Googologie –

Ingo Blechschmidt
Università di Verona

Matthias Hutzler
Universität Augsburg

35th Chaos Communication Congress
December 30th, 2018

Teil 0

Große Zahlen

17 000 Kongressteilnehmer*innen

$$10^{19} = \underbrace{10\,000\,000\,000\,000\,000\,000}_{\text{19 Nullen}} \text{ Sandkörner auf der Erde}$$

$$10^{80} = \underbrace{1000\ldots000}_{\text{80 Nullen}} \text{ Elementarteilchen im Universum}$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \\ 2^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \end{aligned}$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 4 &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \\
2^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \\
2 \uparrow\uparrow 4 &= 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536 \\
2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2))
\end{aligned}
$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 4 &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \\
2^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \\
2 \uparrow\uparrow 4 &= 2^{2^{2^{2}}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536 \\
2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4)
\end{aligned}
$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 4 &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \\
2^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \\
2 \uparrow\uparrow 4 &= 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536 \\
2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536
\end{aligned}
$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$\begin{aligned}
2 \cdot 4 &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \\
2^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \\
2 \uparrow\uparrow 4 &= 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536 \\
2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536 \\
&= \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \right\} \text{65 536 viele Zweien}
\end{aligned}$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 4 &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \\
2^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \\
2 \uparrow\uparrow 4 &= 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536 \\
2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow \big(2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)\big) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536 \\
&= \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\} \text{65 536 viele Zweien} \\
2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow\uparrow \big(2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 2)\big)
\end{aligned}
$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 4 &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \\
2^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \\
2 \uparrow\uparrow 4 &= 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536 \\
2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536 \\
&= \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \right\} \text{65 536 viele Zweien} \\
2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 4)
\end{aligned}
$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$\begin{aligned}
2 \cdot 4 &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \\
2^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \\
2 \uparrow\uparrow 4 &= 2^{2^{2^{2}}} = 2^{2^{4}} = 2^{16} = 65\,536 \\
2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536 \\
&= \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \right\} \text{65 536 viele Zweien} \\
2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 4) \\
&= 2 \uparrow\uparrow\uparrow 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}
\end{aligned}$$

Teil I

Sehr große Zahlen

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 4 &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \\
2^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \\
2 \uparrow\uparrow 4 &= 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536 \\
2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 4) = 2 \uparrow\uparrow 65\,536 \\
&= \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}\text{65 536 viele Zweien} \\
2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 2)) = 2 \uparrow\uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow\uparrow 4) \\
&= 2 \uparrow\uparrow\uparrow 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} = \underbrace{2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (\cdots \uparrow\uparrow 2)))}_{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\ \text{viele Zweien}}
\end{aligned}
$$

Teil I

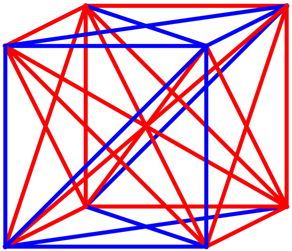
Sehr große Zahlen

$$\textbf{Grahams Zahl} = \left.\begin{matrix} 3\underbrace{\uparrow \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \uparrow}3 \\ 3\underbrace{\uparrow \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \uparrow}3 \\ \vdots \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ 3\underbrace{\uparrow \cdots\cdots \uparrow}3 \\ 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \end{matrix}\right\} \text{64 Ebenen}$$

Teil I

Sehr große Zahlen

Grahams Zahl $= \left.\begin{matrix} 3\underbrace{\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow}3 \\ 3\underbrace{\uparrow\cdots\cdots\cdots\uparrow}3 \\ \vdots \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad} \\ 3\underbrace{\uparrow\cdots\cdots\uparrow}3 \\ 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \end{matrix}\right\}\text{64 Ebenen}$



$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = 2$$

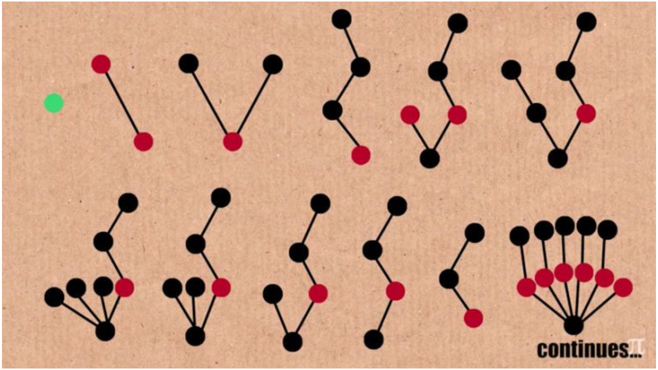
$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = 2$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} = 2$$

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

Teil II

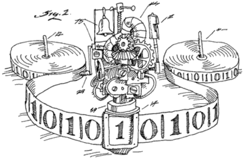
Sehr sehr große Zahlen



Jeder Wald stirbt schlussendlich, bei einer Maximalzahl von TREE(3) Bäumen.

Teil III

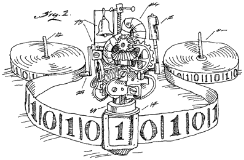
Sehr sehr sehr große Zahlen



- **BB(n)** ist die größte Zahl, die ein terminierendes Computerprogramm bestehend aus n Bytes berechnen kann.

Teil III

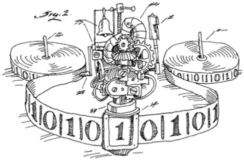
Sehr sehr sehr große Zahlen



- **BB(n)** ist die größte Zahl, die ein terminierendes Computerprogramm bestehend aus n Bytes berechnen kann.
- Die Busy-Beaver-Funktion ist **unberechenbar**.

Teil III

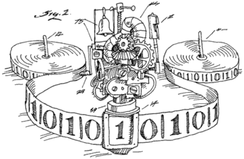
Sehr sehr sehr große Zahlen



- **BB(n)** ist die größte Zahl, die ein terminierendes Computerprogramm bestehend aus n Bytes berechnen kann.
- Die Busy-Beaver-Funktion ist **unberechenbar** und **dominiert** jede berechenbare Funktion.

Teil III

Sehr sehr sehr große Zahlen



- **BB(n)** ist die größte Zahl, die ein terminierendes Computerprogramm bestehend aus n Bytes berechnen kann.
- Die Busy-Beaver-Funktion ist **unberechenbar** und **dominiert** jede berechenbare Funktion.
- Keine Vermutung über den Wert von BB(1919) ist mathematisch beweisbar, noch nicht einmal "BB(1919) $= \heartsuit$" wobei $\heartsuit$ der wahre Wert von BB(1919) ist.

Sehr sehr sehr sehr große Zahlen

- **Rayo(n)** ist die größte Zahl, die man mit höchstens n Zeichen mathematisch präzise beschreiben kann.
- Die Rayo-Funktion **dominiert** *jede* mathematisch präzise definierbare Funktion.