Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 7 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. *Dichte Unterkategorien*

Ein Funktor $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ heißt genau dann *dicht*, wenn jedes Objekt $c \in \mathcal{C}$ Kolimes von Objekten der Form $K(m)$ ist – und zwar nicht irgendwie, sondern auf die kanonische Art und Weise $c = \operatorname{colim}_{K(m)\to c} K(m)$.

a) Zeige: Die Inklusion $\{\{\heartsuit\}\} \to \mathrm{Set}$ der vollen Unterkategorie von Set, welche nur das Objekt $\{\heartsuit\}$ enthält, ist dicht.

b) Zeige: Die Inklusion $\{\mathbb{R}\} \to \mathrm{Set}$ der vollen Unterkategorie von $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$, welche nur das Objekt $\mathbb{R}$ enthält, ist nicht dicht.

c) Zeige: Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ ist die Yoneda-Einbettung $y : \mathcal{C} \to \mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ dicht.

d) Zeige, dass ein Funktor $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ genau dann dicht ist, wenn $(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathrm{id}_K)$ eine punktweise Rechts-Kan-Erweiterung von K längs K ist.

Aufgabe 2. *Dichtheit der kompakten Objekte*

In etwa so, wird aber noch verfeinert. Sei S eine Menge κ-kompakter Objekten einer Kategorie $\mathcal{C}$, sodass jedes Objekt aus $\mathcal{C}$ κ-filtrierter Kolimes von Objekten aus S ist.

a) Zeige: Ein Objekt aus $\mathcal{C}$ ist genau dann κ-kompakt, wenn es Retrakt von einem Objekt aus S ist.

b) Sei α eine reguläre Kardinalzahl mit $|S| < \alpha$ und $|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)| < \alpha$ für alle $X \in S$. Zeige, dass es $< \alpha$ viele Isomorphieklassen von κ-kompakten Objekten in $\mathcal{C}$ gibt.

c) Zeige, dass die volle Unterkategorie der κ-kompakten Objekte in $\mathcal{C}$ dicht in $\mathcal{C}$ liegt.

Aufgabe 3. *Beispiele für nicht (endlich-)präsentierbare Kategorien*

a) Zeige, dass die Kategorie der topologischen Räume nicht lokal präsentierbar ist.

b) Zeige, dass in der Kategorie der Banachräume und linearen Kontraktionen das Objekt $\mathbb{R}$ nicht $\aleph_0$-kompakt, aber $\aleph_1$-kompakt ist.

Aufgabe 4. *Quillen-Adjunktionen auf Niveau der Homotopiekategorien*

Sei $F \dashv U$ eine Quillen-Adjunktion. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $F \dashv U$ ist eine Quillen-Äquivalenz.
2. $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}U$ ist eine Äquivalenz der Homotopiekategorien.
3. F bewahrt schwache Äquivalenzen zwischen kofasernden Objekten und für alle fasernden Objekte Y ist $FQUY \to FUY \xrightarrow{\varepsilon} Y$ eine schwache Äquivalenz.
4. U bewahrt schwache Äquivalenzen zwischen fasernden Objekten und für alle kofasernden Objekte X ist $X \xrightarrow{\eta} UFX \to URFX$ eine schwache Äquivalenz.