

Übungsblatt 2 zu Modellkategorien

Das ist das Koende, mein einziger Kofreund.

Aufgabe 1. Beispiele für Limiten

- Zeige: In der Kategorie der k -Vektorräume ist $k[X]$ der Kolimes des Diagramms $(k[X]_{\leq 0} \hookrightarrow k[X]_{\leq 1} \hookrightarrow k[X]_{\leq 2} \hookrightarrow \dots)$. Dabei ist $k[X]_{\leq n}$ der Unterraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Was ist der Limes dieses Diagramms?
- Finde ein Diagramm mit Limes $k[[X]]$, dem Vektorraum der formalen Potenzreihen!

Aufgabe 2. Freie Konstruktionen

- Sei $V : \text{Vect}(k) \rightarrow \text{Set}$ der Vergissfunktork und $L : \text{Set} \rightarrow \text{Vect}(k)$ der Funktor, der einer Menge X den freien k -Vektorraum auf X zuordnet. Beweise: $L \dashv V$.
- Erkläre, was „ $L \dashv V$ “ anschaulich bedeutet! Verwende *Erzeuger* und *Relationen*.
- Finde Linksadjungierte zu den Vergissfunktoren $\text{Mon} \rightarrow \text{Set}$ und $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$.

Aufgabe 3. Das Tensorprodukt von Moduln als Koende

Sei R ein Ring. Seien M ein Rechts- R -Modul und N ein Links- R -Modul. Zeige:

$$M \otimes_R N \cong \int^R M \otimes_{\mathbb{Z}} N.$$

Aufgabe 4. Die Limesformel für punktweise Kan-Erweiterungen

Sei $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Sei $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor derart, dass für alle Objekte $c \in \mathcal{C}$ der Limes $R(c) := \lim_{f:K(m) \rightarrow c} T(m)$ existiert.

- Erkläre, wie man diese Setzung zu einem Funktor $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ausdehnen kann.
- Beweise, dass R eine Rechts-Kan-Erweiterung von T längs K wird.

Aufgabe 5. Das australische Ninja-Yoneda-Lemma

Sei $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ eine Prägarbe. Beweise das australische Ninja-Yoneda-Lemma:

$$F \cong \int^{c \in \mathcal{C}} F(c) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, _).$$

