

Übungsblatt 3 zu Modellkategorien

Jedes Konzept ist eine Kan-Erweiterung.

Aufgabe 1. Limiten als Enden

Sei $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Zeige, dass ein Limes von F dasselbe ist wie ein Ende von $\mathcal{I}^{\text{op}} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$. Als Formel: $\lim F = \int_i F(i)$.

Aufgabe 2. Kan-Erweiterungen von darstellbaren Koprägarben

Sei $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor und $X \in \mathcal{M}$. Zeige: $\text{Lan}_K \text{Hom}_{\mathcal{M}}(X, _) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(K(X), _)$.

Aufgabe 3. Die Limesformel für punktweise Kan-Erweiterungen

Sei $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Sei $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor derart, dass für alle Objekte $c \in \mathcal{C}$ der Limes $R(c) := \lim_{f:c \rightarrow K(m)} T(m)$ existiert.

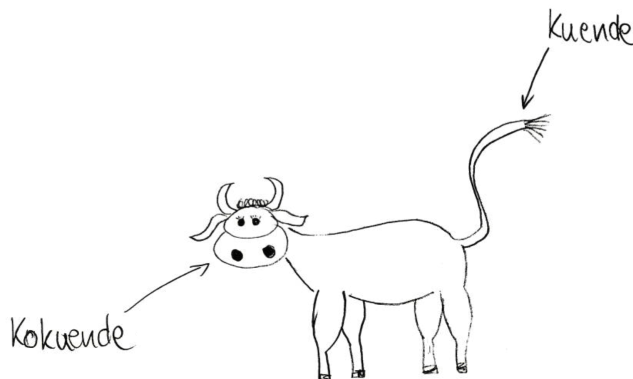
- Erkläre, wie man diese Setzung zu einem Funktor $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ausdehnen kann.
- Beweise, dass R eine Rechts-Kan-Erweiterung von T längs K wird.

Aufgabe 4. Kan-Erweiterungen längs volltreuer Funktoren

Sei $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ ein volltreuer Funktor. Sei $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor derart, dass die punktweise Links-Kan-Erweiterung $\text{Lan}_K(T)$ existiert. Zeige: Die kanonische natürliche Transformation $T \Rightarrow \text{Lan}_K(T) \circ K$ ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 5. Beispiele für transfinite Kompositionen in der Kategorie der Mengen

- Was ist die transfinite Komposition $\mathbb{N} \xrightarrow{\text{succ}} \mathbb{N} \xrightarrow{\text{succ}} \mathbb{N} \xrightarrow{\text{succ}} \dots$?
- Sei $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung derart, dass sich für jedes $x \in X$ die Folge $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ stabilisiert. Was ist die transfinite Komposition $X \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow \dots$?
- Für Fans von Garben. Sei \mathcal{F} eine Garbe auf dem \mathbb{R}^n . Was ist die transfinite Komposition der Einschränkungsabbildungen $\mathcal{F}(B_1(0)) \rightarrow \mathcal{F}(B_{1/2}(0)) \rightarrow \mathcal{F}(B_{1/3}(0)) \rightarrow \dots$?



Bonusaufgabe. *Bastelspaß in der Kategorie der topologischen Räume*

- a) Was ist das Kofaserprodukt (Pushout) des folgenden Diagramms?

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & \text{pt} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^2 & \dashrightarrow & ? \end{array}$$

- b) Überlege dir ein möglichst kniffliges Diagramm dieser Art und fordere deine MitkohomologInnen heraus!