Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 2 zu Modellkategorien

Das ist das Koende, mein einziger Kofreund.

Aufgabe 1. *Beispiele für Limiten*

a) Was ist das initiale Objekt in der Kategorie der Gruppen?

b) *Für die Fans von Optimierung unter euch.* Sei $\mathcal{C}$ die zur Partialordnung aller konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ gehörige Kategorie. Was sind Koprodukte in $\mathcal{C}$?

c) Zeige: In der Kategorie der k-Vektorräume ist $k[X]$ der Kolimes des Diagramms $(k[X]_{\leq 0} \hookrightarrow k[X]_{\leq 1} \hookrightarrow k[X]_{\leq 2} \hookrightarrow \cdots)$. Dabei ist $k[X]_{\leq n}$ der Unterraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Was ist der Limes dieses Diagramms?

d) Finde ein Diagramm mit Limes $k[[X]]$, dem Vektorraum der formalen Potenzreihen!

Aufgabe 2. *Freie Konstruktionen*

a) Sei $V : \mathrm{Vect}(k) \to \mathrm{Set}$ der Vergissfunktor und $L : \mathrm{Set} \to \mathrm{Vect}(k)$ der Funktor, der einer Menge X den freien k-Vektorraum auf X zuordnet. Beweise: $L \dashv V$.

b) Erkläre, was „$L \dashv V$“ anschaulich bedeutet! Verwende *Erzeuger* und *Relationen*.

c) Finde Linksadjungierte zu den Vergissfunktoren $\mathrm{Mon} \to \mathrm{Set}$ und $\mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$.

Aufgabe 3. *Das Tensorprodukt von Moduln als Koende*

Sei R ein Ring. Seien M ein Rechts-R-Modul und N ein Links-R-Modul. Zeige:

$$M \otimes_R N \cong \int^R M \otimes_{\mathbb{Z}} N.$$

Aufgabe 4. *Das australische Ninja-Yoneda-Lemma*

Sei $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ eine Prägarbe. Beweise das australische Ninja-Yoneda-Lemma:

$$F \cong \int^{c \in \mathcal{C}} F(c) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, c).$$