

Übungsblatt 5 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. Kompakte Objekte in Modulkategorien

- a) Zeige, dass ein A -Modul M genau dann endlich erzeugt ist, wenn der Funktor $\text{Hom}(M, _) : \text{Mod}(A) \rightarrow \text{Set}$ mit filtrierten Kolimiten von Monomorphismen vertauscht, wenn also für jedes filtrierte Diagramm $(V_i)_i$, in der die Übergangsabbildungen $V_i \rightarrow V_j$ alle injektiv sind, folgende kanonische Abbildung bijektiv ist.

$$\text{colim}_i \text{Hom}(M, V_i) \longrightarrow \text{Hom}(M, \text{colim}_i V_i)$$

- b) Zeige, dass ein A -Modul M genau dann endlich präsentiert ist, wenn der Funktor $\text{Hom}(M, _)$ mit beliebigen filtrierten Kolimiten vertauscht, wenn M also \aleph_0 -kompakt ist.

Aufgabe 2. Kompakte Objekte in der Kategorie der topologischen Räume

Sei X ein topologischer Raum, der eine Teilmenge $A \subseteq X$ besitzt, die nicht offen ist. Zeige, dass X in der Kategorie der topologischen Räume nicht \aleph_0 -kompakt ist.

Aufgabe 3. Vertauschbarkeit von filtrierten Kolimiten mit endlichen Limiten

Sei $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$ ein Funktor.

- a) Konstruiere einen kanonischen Morphismus $\lambda : \text{colim}_{c \in \mathcal{C}} \lim_{d \in \mathcal{D}} F(c, d) \rightarrow \lim_{d \in \mathcal{D}} \text{colim}_{c \in \mathcal{C}} F(c, d)$.
- b) Sei \mathcal{C} sogar eine filtrierte Kategorie. Zeige, dass dann λ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4. Morphismen zwischen kofasernden und fasernden Objekten

Seien X ein kofaserndes und Y ein faserndes Objekt in einer Modellkategorie. Zeige, dass der kanonische Morphismus $\pi(X, Y) \rightarrow \pi(RX, QY)$ bijektiv ist.