

Übungsblatt 4 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. Adjunktionen als Kan-Erweiterungen

Sei $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor (oder ein Morphismus in einer beliebigen 2-Kategorie). Zeige, dass G genau dann einen Linksadjungierten besitzt, wenn eine Rechts-Kan-Erweiterung von $\text{Id}_{\mathcal{M}}$ längs G existiert und G diese bewahrt.

Aufgabe 2. Hom als Delta-Distribution

Sei $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ eine Prägarbe und $c \in \mathcal{C}$. Zeige: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(_, c) \otimes F = F(c)$.

Aufgabe 3. Retrakte in Modulkategorien

Sei $i : U \hookrightarrow M$ die Inklusion eines Untermoduls. Zeige: Genau dann ist U ein direkter Summand von M , wenn i ein Linksinverses besitzt.

Aufgabe 4. Komposition von Pushout-Quadraten

Zeige: Sind das linke und rechte Quadrat jeweils Pushout-Diagramme, so ist auch das Gesamtrechteck ein Pushout-Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F \end{array}$$

Aufgabe 5. Transfinite Kompositionen von relativen Zellkomplexen

Sei \mathcal{I} eine Menge von Morphismen in einer kovollständigen Kategorie. Zeige, dass die transfinite Komposition von relativen \mathcal{I} -Zellkomplexen ein relativer \mathcal{I} -Zellkomplex ist.

