Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 4 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. *Adjunktionen als Kan-Erweiterungen*

Sei $G : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ ein Funktor (oder ein Morphismus in einer beliebigen 2-Kategorie). Zeige, dass G genau dann einen Linksadjungierten besitzt, wenn eine Rechts-Kan-Erweiterung von $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$ längs G existiert und G diese bewahrt.

Aufgabe 2. *Retrakte in Modulkategorien*

Sei $i : U \hookrightarrow M$ die Inklusion eines Untermoduls. Zeige: Genau dann ist U ein direkter Summand von M, wenn i ein Linksinverses besitzt.

Aufgabe 3. *Zellkomplexe und Koprodukte*

Sei $\mathcal{I}$ eine Menge von Morphismen in einer kovollständigen Kategorie. Sei X ein Objekt. Sei $f : A \to B$ ein relativer $\mathcal{I}$-Zellkomplex. Zeige: Der induzierte Morphismus $A \amalg X \to B \amalg X$ ist wieder ein relativer $\mathcal{I}$-Zellkomplex.

Aufgabe 4. *Zylinder und Überlagerungen*

Sei $E \xrightarrow{\pi} X$ eine Überlagerung. Sei $\mathrm{pt} \xrightarrow{\iota} [0,1]$ die Inklusion eines Intervallendes. Zeige $\iota \boxslash \pi$.

Aufgabe 5. *Erste Schritte mit Modellstrukturen*

a) Zeige, dass die Kategorie der Mengen zusammen mit den Injektionen als Kofaserungen, den Surjektionen als Faserungen und beliebigen Abbildungen (!) als schwache Äquivalenzen eine Modellkategorie bildet.

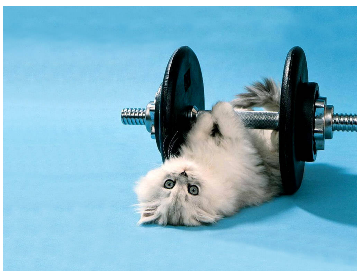
b) Zeige, dass in einer Modellkategorie je zwei der folgenden fünf Klassen (außer $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ und $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$) die anderen eindeutig festlegen: $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$.

c) Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie. Baue auf der Kategorie $\mathcal{M}_\star$ der punktierten Objekte in $\mathcal{M}$ eine Modellstruktur.

Aufgabe 6. *Eindeutigkeit von Lifts*

Sei in einer Modellkategorie ein Quadrat mit zwei Lifts h und k gegeben. Zeige, dass h und k zueinander sehr gut linkshomotop sind.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "\sim"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed, bend left, "h"] \arrow[ur, dashed, bend right, "k"'] & Y \end{tikzcd}$$



That cat won't mess with me anymore.