Übungsblatt 4 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. Adjunktionen als Kan-Erweiterungen

Sei $G: \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ ein Funktor (oder ein Morphismus in einer beliebigen 2-Kategorie). Zeige, dass G genau dann einen Linksadjungierten besitzt, wenn eine Rechts-Kan-Erweiterung von $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$ längs G existiert und G diese bewahrt.

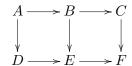
Aufgabe 2. Retrakte in Modulkategorien

Sei $i:U\hookrightarrow M$ die Inklusion eines Untermoduls. Zeige: Genau dann ist U ein direkter Summand von M, wenn i ein Linksinverses besitzt.

Aufgabe 3. Zellkomplexe und Koprodukte

Sei $\mathcal I$ eine Menge von Morphismen in einer kovollständigen Kategorie. Sei X ein Objekt. Sei $f:A\to B$ ein relativer $\mathcal I$ -Zellkomplex. Zeige: Der induzierte Morphismus A II $X\to B$ II X ist wieder ein relativer $\mathcal I$ -Zellkomplex.

 $\it Tipp:$ Sind das linke und rechte Quadrat jeweils Pushout-Diagramme, so ist auch das Gesamtrechteck ein Pushout-Diagramm.

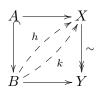


Aufgabe 4. Erste Schritte mit Modellstrukturen

- a) Zeige, dass die Kategorie der Mengen zusammen mit den Injektionen und Surjektionen eine Modellkategorie bildet.
- b) Zeige, dass in einer Modellkategorie je zwei der folgenden fünf Klassen (außer $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ und $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$) die anderen eindeutig festlegen: $\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$.
- c) Sei \mathcal{M} eine Modellkategorie. Baue auf der Kategorie \mathcal{M}_{\star} der punktierten Objekte in \mathcal{M} eine Modellstruktur.

Aufgabe 5. Linkshomotopie

Sei in einer Modellkategorie ein Quadrat mit zwei Lifts h und k gegeben. Zeige, dass h und k zueinander linkshomotop sind.







That cat won't mess with me anymore.