Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 4 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. *Adjunktionen als Kan-Erweiterungen*

Sei $G : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ ein Funktor (oder ein Morphismus in einer beliebigen 2-Kategorie). Zeige, dass G genau dann einen Linksadjungierten besitzt, wenn eine Rechts-Kan-Erweiterung von $\mathrm{Id}_\mathcal{M}$ längs G existiert und G diese bewahrt.

Aufgabe 2. *Retrakte in Modulkategorien*

Sei $i : U \hookrightarrow M$ die Inklusion eines Untermoduls. Zeige: Genau dann ist U ein direkter Summand von M, wenn i ein Linksinverses besitzt.

Aufgabe 3. *Zellkomplexe und Koprodukte*

Sei $\mathcal{I}$ eine Menge von Morphismen in einer kovollständigen Kategorie. Sei X ein Objekt. Sei $f : A \to B$ ein relativer $\mathcal{I}$-Zellkomplex. Zeige: Der induzierte Morphismus $A \amalg X \to B \amalg X$ ist wieder ein relativer $\mathcal{I}$-Zellkomplex.

Tipp: Sind das linke und rechte Quadrat jeweils Pushout-Diagramme, so ist auch das Gesamtrechteck ein Pushout-Diagramm.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ D \arrow[r] & E \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

Aufgabe 4. *Erste Schritte mit Modellstrukturen*

a) Zeige, dass die Kategorie der Mengen zusammen mit den Injektionen und Surjektionen eine Modellkategorie bildet.

b) Zeige, dass in einer Modellkategorie je zwei der folgenden fünf Klassen (außer $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ und $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$) die anderen eindeutig festlegen: $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$.

c) Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie. Baue auf der Kategorie $\mathcal{M}_\star$ der punktierten Objekte in $\mathcal{M}$ eine Modellstruktur.

Aufgabe 5. *Linkshomotopie*

Sei in einer Modellkategorie ein Quadrat mit zwei Lifts h und k gegeben. Zeige, dass h und k zueinander linkshomotop sind.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, two heads, "\sim"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed, bend left=15, "h"] \arrow[ur, dashed, bend right=15, "k"'] & Y \end{tikzcd}$$