Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 14 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. *Ein abstrakter Zugang zum Würfellemma*

Die Aussage von Aufgabe 1b) von Blatt 11 heißt auch *Würfellemma*. Führe einen neuen Beweis dieses Lemmas, aber auf folgende Art und Weise. Mache die Kategorie $\mathcal{B} := (b \leftarrow a \rightarrow c)$ zu einer Reedy-Kategorie, in der $a \rightarrow b$ den Grad erhöht und $a \rightarrow c$ ihn erniedrigt. Zeige, dass dann ein kofaserndes Objekt in der Funktorkategorie $[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ bezüglich der Reedy-Modellstruktur, wobei $\mathcal{C}$ eine beliebige Modellkategorie ist, gerade ein solches Diagramm $(B \leftarrow A \rightarrow C)$ ist, in dem A, B und C kofasernd und $A \rightarrow B$ eine Kofaserung ist. Zeige schließlich, dass der Funktor $[\mathcal{B}, \mathcal{C}] \xrightarrow{\mathrm{colim}} \mathcal{C}$ ein Links-Quillen-Funktor ist, indem du nachweist, dass sein Rechtsadjungierter $\mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{B}, \mathcal{C}]$, der einem Objekt X das konstante Diagramm $(X \leftarrow X \rightarrow X)$ zuweist, schwache Äquivalenzen und Faserungen bewahrt.

Aufgabe 2. *Zylinderobjekte bei Kettenkomplexen*

Sei für ein Kettenkomplex $V_\bullet \in \mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$ sein *Zylinder* definiert als der Kettenkomplex $\mathrm{Cyl}(V_\bullet)$ mit $\mathrm{Cyl}(V_\bullet)_m = V_m \oplus V_{m-1} \oplus V_m$ und Differential $\partial(a, b, c) = (\partial a + b, -\partial b, \partial c - b)$, zusammen mit den Komplexmorphismen $i_0, i_1 : V_\bullet \rightarrow \mathrm{Cyl}(V_\bullet)$ und $p : \mathrm{Cyl}(V_\bullet) \rightarrow V_\bullet$ mit $i_0(x) = (x, 0, 0)$, $i_1(x) = (0, 0, x)$ und $p(a, b, c) = a + c$.

Zeige, dass diese Konstruktion bezüglich der projektiven Modellstruktur ein Zylinderobjekt von $V_\bullet$ definiert. Wann ist dieses gut?

Aufgabe 3. *Kogruppenstruktur auf dem Einheitskreis*

Schlage die Definition einer *Kogruppe* nach und beweise, dass der Einheitskreis S^1 in der Kategorie der punktierten topologischen Räume eine interessante Kogruppenstruktur zulässt.

Noch zu TEXen: Prop. 5.1.4 und Cor. 5.1.5 aus Hovey; kosimpliziale Auflösungen in $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$ und Berechnung von $A \otimes^L K$ für $A \in Ch_{\geq 0}(R)$, $K \in \mathrm{sSet}$ (Tipp: Dold-Kan).