Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 11 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. *Ein erster Einblick in Homotopiepushouts*

a) Zeige anhand eines Beispiels in Top, dass folgende wünschenswerte Aussage im Allgemeinen falsch ist: Sei $X \leftarrow A \rightarrow Y$ ein Diagramm. Sei $X' \leftarrow A' \rightarrow Y'$ ein dazu schwach äquivalentes Diagramm. Dann ist auch der Pushout $X \amalg_A Y$ schwach äquivalent zu $X' \amalg_{A'} Y'$.

Der *Homotopiepushout* eines Diagramms $X \leftarrow A \rightarrow Y$ in einer Modellkategorie ist per Definition der Pushout eines schwach äquivalenten Diagramms $X' \leftarrow A' \rightarrow Y'$, in dem A' kofasernd und die beiden Morphismen Kofaserungen sind.

b) Zeige, dass der Homotopiepushout bis auf schwache Äquivalenz wohldefiniert ist.

c) Sei die Modellkategorie linkseigentlich und sei einer der Morphismen $X \leftarrow A$ und $A \rightarrow Y$ eine Kofaserung. Zeige, dass dann der Homotopiepushout und der gewöhnliche Pushout übereinstimmen.

Aufgabe 2. *Fasernder Ersatz durch baryzentrische Unterteilung und Erweiterung*

Die *baryzentrische Unterteilung* $\operatorname{sd}\Delta[n]$ von $\Delta[n]$ ist der Nerv der Partialordnung der nichtdegenerierten Simplizes von $\Delta[n]$. Wir definieren einen Funktor $\mathrm{Ex} : \mathrm{sSet} \rightarrow \mathrm{sSet}$ durch $\mathrm{Ex}(X)_n := \mathrm{Hom}_{\mathrm{sSet}}(\operatorname{sd}\Delta[n], X)$.

a) Wie sehen $\operatorname{sd}\Delta[1]$ und $\operatorname{sd}\Delta[2]$ aus?

b) Gib den kanonischen Morphismus $j_X : X \rightarrow \mathrm{Ex}(X)$ an.

c) Zeige, dass sich alle Hörner von $\mathrm{Ex}(X)$ in $\mathrm{Ex}^2(X)$ füllen lassen.

d) Folgere, dass der Kolimes von $X \rightarrow \mathrm{Ex}(X) \rightarrow \mathrm{Ex}^2(X) \rightarrow \cdots$ ein Kan-Komplex ist.

Aufgabe 3. *Anodynizität von Kofaserungen*

Zeige: Eine Kofaserung zwischen simplizialen Mengen (bezüglich der Quillen-Modellstruktur) ist genau dann anodyn, wenn sie eine schwache Äquivalenz ist.

Aufgabe 4. *Fundamentalgruppe der eindimensionalen Sphäre*

Berechne $\pi_1(\mathbb{S}^1)$.

Aufgabe 5. *Erzeugnis unter beliebigen vs. filtrierten Kolimiten*

Sei S eine Menge κ-kompakter Objekte in einer kovollständigen Kategorie $\mathcal{C}$. Sei jedes Objekt aus $\mathcal{C}$ kleiner Kolimes von Objekten aus S. Zeige, dass jedes Objekt aus $\mathcal{C}$ dann ein *κ-filtrierter* Kolimes von Objekten aus $\overline{S}$ ist, wobei $\overline{S}$ der Abschluss von S unter κ-kleinen Kolimiten ist.