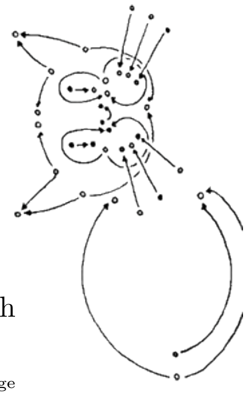
Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 1 zu Modellkategorien



Aufgabe 1. *Beispiele für natürliche Transformationen*

Sei $\mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ der Identitätsfunktor auf Set und $K : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ der Funktor

$$\begin{aligned} X &\longmapsto X \times X \\ f &\longmapsto f \times f := ((a,b) \mapsto (f(a), f(b))). \end{aligned}$$

a) Zeige: Es gibt nur eine einzige natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \to K$, nämlich die mit den Komponenten $\eta_X : X \to X \times X,\ x \mapsto (x,x)$.

Tipp: Betrachte zum Nachweis der Eindeutigkeit geeignete Abbildungen $1 \to X$, $\star \mapsto x$. Dabei ist $1 = \{\heartsuit\}$ eine einelementige Menge, das *einsame Herz*. :-(

b) Wir nehmen an, dass wir für jede nichtleere Menge X ein bestimmtes Element $a_X \in X$ gegeben haben. Zeige: Die Setzung $\tau_X : X \to X,\ x \mapsto a_X$ definiert *nicht* eine natürliche Transformation $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, wobei $\mathcal{C}$ die Kategorie der nichtleeren Mengen und beliebigen Abbildungen bezeichnet.

c) Welche natürlichen Transformationen $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ gibt es, wenn $\mathcal{C}$ die Kategorie der reellen Vektorräume bezeichnet?

d) Seien $\alpha, \beta : M \to N$ zwei Monoidhomomorphismen. Zeige, dass die induzierten Funktoren zwischen den Kategorien BM und BN genau dann isomorph sind, wenn es ein Element $u \in N$ gibt mit $\beta(x) \circ u = u \circ \alpha(x)$ für alle $x \in M$.

Aufgabe 2. *Kanonizität der horizontalen Komposition*

Sei $\eta : F \to G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\varepsilon : J \to K$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $J, K : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$. Zeige, dass die beiden Möglichkeiten, die *horizontale Komposition* $\eta \star \varepsilon : J \circ F \to K \circ G$ zu definieren, übereinstimmen:

$$(\eta \star \varepsilon)_X := K(\eta_X) \circ \varepsilon_{F(X)} \qquad (\eta \star \varepsilon)_X := \varepsilon_{G(X)} \circ J(\eta_X)$$

Aufgabe 3. *Allgemeines zu Kategorienäquivalenzen*

a) Zeige mit allen Details: Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ definiert genau dann eine Kategorienäquivalenz, wenn er volltreu und wesentlich surjektiv ist.

b) Zeige: Das Quasiinverse einer Kategorienäquivalenz ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Aufgabe 4. *Die duale Kategorie der Kategorie der Mengen*

a) Zeige: In der Kategorie der Mengen ist jeder Morphismus ins initiale Objekt ein Iso.

b) Zeige: In $\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$ stimmt die Aussage aus a) nicht.

c) Folgere: Die Kategorien Set und $\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$ sind nicht äquivalent.

Ein initiales Objekt in einer Kategorie ist ein Objekt X, sodass es zu jedem Objekt Y genau einen Morphismus $Y \to X$ gibt. Wenn du noch Lust hast, dann zeige, dass der kontravariante Potenzmengenfunktor eine Äquivalenz zwischen $\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$ und der Kategorie der vollständigen atomischen Heyting-Algebren definiert.