Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 6 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. *Morphismen zwischen fasernden Approximationen*

Seien X und X' Objekte einer Modellkategorie. Wähle fasernde Approximationen $r : X \to RX$ und $r' : X' \to RX'$. Seien f und g Morphismen $X \to X'$. Zeige: Wenn $r' \circ f$ und $r' \circ g$ zueinander rechtshomotop sind, so sind auch die induzierten Morphismen $Rf, Rg : RX \to RX'$ zueinander rechtshomotop.

Aufgabe 2. *Ein Kriterium für Identifizierung rechtshomotoper Morphismen*

Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Sei $F : \mathcal{M}_c \to \mathcal{C}$ ein Funktor, der azyklische Kofaserungen auf Isomorphismen schickt. Zeige, dass F rechtshomotope Morphismen identifiziert.

Aufgabe 3. *Eigenschaften von Scheibenkategorien*

Sei M eine Modellkategorie. Sei A ein Objekt von M. Zeige:

a) Ist M linkseigentlich, so auch M/A.

b) Ist M kofasernd erzeugt, so auch M/A.

Aufgabe 4. *Lokale Präsentierbarkeit von Prägarbenkategorien*

Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie. Sei $y : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ die Yoneda-Einbettung in die Kategorie der Funktoren $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$. Folgende Aussagen sind alle wahr. Zeige so viele du möchtest.

a) Die Kategorie $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ ist kovollständig.

b) Darstellbare Prägarben – solche der Form $y(X)$ für ein $X \in \mathcal{C}$ – sind $\aleph_0$-kompakt.

c) Jede Prägarbe F ist ein kleiner Kolimes von darstellbaren Prägarben, und zwar gilt etwas genauer $F = \operatorname{colim}_{s \in F(X), X \in \mathcal{C}} y(X)$.

d) Die Kategorie $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ ist lokal endlich-präsentierbar.

Aufgabe 5. *Regularität unendlich großer Nachfolgerkardinalzahlen*

Sei κ der Nachfolger einer unendlich großen Kardinalzahl. Zeige, dass κ regulär ist.