

## Guide zu Übungsblatt 10

Für **Aufgabe 1** muss man in Teilaufgabe b) wissen, was eine simpliziale Gruppe ist. Dazu gibt es drei äquivalente Definitionen; am praktischsten ist vermutlich die erste:

- a) Eine simpliziale Gruppe ist wie eine simpliziale Menge, nur dass man auf den Simplexmengen  $X_n$  noch jeweils eine Gruppenstruktur hat und dass die Abbildungen  $X(f) : X_m \rightarrow X_n$  für  $f : [n] \rightarrow [m]$  alle Gruppenhomomorphismen sind.
- b) Eine simpliziale Gruppe ist ein Funktor  $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  zusammen mit der Angabe einer Faktorisierung über den Vergissfunktor  $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ .
- c) Eine simpliziale Gruppe ist ein Gruppenobjekt in der Kategorie der simplizialen Mengen.

Außerdem kommt in Teilaufgabe c) die simpliziale Menge  $BG$  vor. Kurz und knapp definiert ist diese nichts anderes als der Nerv (siehe Blatt 9) der von  $G$  induzierten Kategorie (diese hat genau ein Objekt, nämlich  $\star$ , und für jedes Gruppenelement einen Morphismus  $\star \rightarrow \star$ ). Ganz explizit gilt also  $(BG)_n = G^n$ . Achtung, Falle: Die simpliziale Menge  $BG$  kann genau dann mit einer Gruppenstruktur versehen werden, wenn  $G$  abelsch ist. Teilaufgabe c) folgt also nicht aus b).

Wenn ihr Indexschlachten vermeiden möchtet, beweist in den Teilaufgaben b) und c) nur die Fälle niedriger Dimension.

**Aufgabe 2** hat etwas mit Kan-Erweiterungen zu tun. Wenn du den Zusammenhang herausgefunden hast, kannst du die Limes- bzw. Kolimesformel verwenden, um die gesuchten Funktoren zumindest formal hinzuschreiben; dann sollte die Darstellung nur noch vereinfacht werden. Auch, wenn man keine Formeln findet, ist Teilaufgabe d) machbar.

Wer Fan von Enden und Koenden ist, kann auch folgende Formeln verwenden:

$$\text{Lan}_K(T)(c) = \int^m \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Km, c) \cdot Tm \quad \text{Ran}_K(T)(c) = \int_m (Tm)^{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Km)}.$$

Wer dagegen Kan-Erweiterungen nicht mag, kann die Aufgabe natürlich auch ohne sie bearbeiten. Ihr könnt es auch dabei belassen, Links- und Rechtsadjungierte zum Funktor  $\text{sSet}_{\leq N+1} \rightarrow \text{sSet}_{\leq n}$  zu finden; das ist technisch einfacher und enthält auch schon den eigentlichen Inhalt dieser Aufgabe.

In **Aufgabe 3** ist  $|X|$  die geometrische Realisierung von  $X$  und  $\pi_0(|X|)$  die Menge ihrer Wegzusammenhangskomponenten, also die Menge der Punkte von  $|X|$  modulo der Äquivalenzrelation, die genau dann zwei Punkte miteinander identifiziert, wenn sie durch einen stetigen Weg verbunden werden können.

In **Aufgabe 4** ist der Morphismus  $f^* : X^B \rightarrow X^A$  der eindeutig bestimmte Morphismus mit der Eigenschaft, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X^B \times B & \longrightarrow & X \\ f^* \times \text{id}_B \downarrow & & \downarrow f \\ Y^B \times B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

kommutiert. Als Tipp kann ich anbieten: Universelle Eigenschaft des Funktionenkomplex und der Satz von Gabriel–Zisman.