Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 10 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. *Der klassifizierende Raum einer Gruppe*

a) Zeige, dass eine simpliziale Menge X genau dann ein Kan-Komplex ist, wenn für alle Zahlen $n \geq 0$ und k mit $0 \leq k \leq n+1$ folgende Bedingung erfüllt ist:

> Sind Simplizes $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1} \in X_n$ mit $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ für alle $i < j$ (wobei i und j ungleich k) vorgegeben, so existiert ein Simplex $y \in X_{n+1}$ mit $d_i(y) = x_i$ für alle $i \neq k$.

b) Zeige, dass jede simpliziale Gruppe ein Kan-Komplex ist.

c) Sei G eine Gruppe. Zeige, dass BG ein Kan-Komplex ist.

Aufgabe 2. *Skelett und Koskelett*

Die Kategorie $\mathrm{sSet}_{\leq n}$ der *n-abgeschnittenen simplizialen Mengen* ist die Kategorie der Funktoren $\Delta_{\leq n}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$, wobei $\Delta_{\leq n}$ die volle Unterkategorie von Δ der Objekte $[0], \ldots, [n]$ ist.

a) Welchen kanonischen Funktor $\mathrm{sSet} \to \mathrm{sSet}_{\leq n}$ gibt es?

b) Finde einen Linksadjungierten zu dem Funktor aus a).

c) Finde einen Rechtsadjungierten zu dem Funktor aus a).

d) Deute die Funktoren aus b) und c) geometrisch.

Aufgabe 3. *Wegzusammenhangskomponenten*

Sei X eine simpliziale Menge. Finde einen kanonischen Isomorphismus $\pi_0(X) \to \pi_0(|X|)$.

Aufgabe 4. *Rückzug längs Monomorphismen*

Sei $f : A \to B$ ein Monomorphismus in sSet. Sei X ein Kan-Komplex. Zeige, dass der induzierte Morphismus $X^B \to X^A$ eine Kan-Faserung ist.