Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 8 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. *Was tun, wenn das terminale Objekt nicht kofasernd ist?*

Diese Aufgabe ist offen gestellt und soll zum Experimentieren einladen. Bekanntlich gibt es folgende Aussage (Lemma 16.4.9 in May/Ponto): Sei $\mathcal{V}$ eine kartesisch abgeschlossene monoidale Modellkategorie. Sei das terminale Objekt $\star$ kofasernd. Dann wird die Modellkategorie $\mathcal{V}_\star$ der punktierten Objekte mit dem Smash-Produkt zu einer monoidalen Modellkategorie.

Sei in diesem Kontext das terminale Objekt nicht kofasernd. Welche Bedingung könnte man stellen, damit $QS^0 \wedge X \to S^0 \wedge X$ immer noch für alle kofasernden Objekte X eine schwache Äquivalenz ist? Dabei ist S^0 das Einsobjekt von $\mathcal{V}_\star$.

Aufgabe 2. *Euler-Charakteristik in monoidalen Kategorien*

Ein Objekt X einer symmetrischen monoidalen Kategorie heißt genau dann *dualisierbar*, wenn es ein Objekt $X^\vee$ zusammen mit Morphismen $I \xrightarrow{\eta} X \otimes X^\vee$ und $X^\vee \otimes X \xrightarrow{\varepsilon} I$ gibt, welche die Dreiecksidentitäten erfüllen:

$$(\mathrm{id}_X \otimes \varepsilon) \circ (\eta \otimes \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X \qquad (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{X^\vee}) \circ (\mathrm{id}_{X^\vee} \otimes \eta) = \mathrm{id}_{X^\vee}.$$

Die *Spur* eines Endomorphismus $f : X \to X$ eines dualisierbaren Objekts X ist die Verkettung $I \xrightarrow{\eta} X \otimes X^\vee \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}} X \otimes X^\vee \longrightarrow X^\vee \otimes X \xrightarrow{\varepsilon} I$.

a) Was ist nach dieser Definition die Spur eines Endomorphismus eines endlichdimensionalen k-Vektorraums?

b) Zeige allgemein: Die Spur von $f \circ g$ ist gleich der Spur von $g \circ f$.

c) Die Kategorie Cob_n hat als Objekte geschlossene $(n-1)$-Mannigfaltigkeiten. Morphismen $M \to N$ sind Diffeomorphieklassen von n-Mannigfaltigkeiten W mit $\partial W = M \amalg N$. Wie sollte man die Verknüpfung definieren? Wie eine symmetrische monoidale Struktur, in der das Tensorprodukt durch disjunkte Vereinigung gegeben ist? Wieso ist bezüglich dieser jedes Objekt dualisierbar? Was ist die Spur eines Endomorphismus in dieser Kategorie?

Aufgabe 3. *Präzise Definitionen*

a) Buchstabiere die Definitionen von monoidalen Funktoren und (Rechts-)Moduln über monoidalen Kategorien aus.

b) Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein monoidaler Funktor. Wie wird $\mathcal{D}$ zu einem $\mathcal{C}$-Modul?