Guide zu Übungsblatt 4

Hier eine Präzisierung bzw. ein Tipp zu **Aufgabe 1**. In der Rückrichtung hat man eine Rechts-Kan-Erweiterung $(F,\, \varepsilon : FG \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{M}})$ gegeben und muss daraus eine Adjunktion $F \dashv G$ basteln. Das dafür nötige ε hat man ja bereits gegeben. Wie konstruiert man η? Wie weist man die Dreiecksidentitäten nach?

Bei der Hinrichtung hat man eine Adjunktion $(F \dashv G, \eta, \varepsilon)$ gegeben und muss aus F eine Rechts-Kan-Erweiterung von $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$ längs G machen. Außerdem muss man zeigen, dass G diese Erweiterung bewahrt. Man kann sogar zeigen, dass *jeder* Funktor H, der bei $\mathcal{M}$ startet, diese Erweiterung bewahrt – das ist genauso schwer und spart sogar noch Schreibaufwand, da man im Spezialfall $H = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$ das Resultat mitbeweist, dass F selbst eine Rechts-Kan-Erweiterung ist.

Zur Erinnerung: Man sagt genau dann, dass ein Funktor $H : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Rechts-Kan-Erweiterung $(R,\, \varepsilon : RK \Rightarrow T)$ von $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ längs $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ erhält, wenn $(HR,\, H\varepsilon : HRK \Rightarrow HT)$ eine Rechts-Kan-Erweiterung von HT längs K ist.

Ein Tipp für **Aufgabe 3**, der auch an sich eine schöne Übung im Umgang mit Diagrammen abgibt, ist: Sind das linke und rechte Quadrat jeweils Pushout-Diagramme, so ist auch das Gesamtrechteck ein Pushout-Diagramm.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ D \arrow[r] & E \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

Zu **Aufgabe 5a)**: Eine andere Modellstruktur erhält man, wenn man als Kofaserungen die Surjektionen, als Faserungen die Injektionen und als schwache Äquivalenzen beliebige Abbildungen nimmt. Um diese geht es hier aber nicht.

Zu **Aufgabe 5c)**: Die Objekte der Kategorie $\mathcal{M}_\star$ sind Morphismen der Form $1 \to X$ in $\mathcal{M}$ (mit $X \in \mathcal{M}$ beliebig). Dabei bezeichnet $1 \in \mathcal{M}$ das terminale Objekt in $\mathcal{M}$. Die Morphismen sind kommutative Dreiecke. Bei dieser Aufgabe ist einiges zu tun. Zunächst mal muss man zeigen, dass $M_\star$ wieder alle kleinen Limiten und Kolimiten enthält. Holt euch dazu Tipps ab! Anschließend muss man geeignet schwache Äquivalenzen, Faserungen und Kofaserungen definieren. Die naive Vermutung dazu ist die richtige. Holt euch trotzdem dafür Tipps ab!

Übrigens stimmt auch die allgemeinere Behauptung, dass eine Modellstruktur auf $\mathcal{M}$ eine auf den Koscheibenkategorien $A\backslash\mathcal{M}$ und auf den Scheibenkategorien M/A induziert, für alle Objekte $A \in \mathcal{M}$. Wer mag, kann gleich diese Behauptung beweisen; der Beweis der ursprünglichen Behauptung überträgt sich wortwörtlich, und je nachdem, wie man denkt, findet man die allgemeinere Behauptung vielleicht leichter zu beweisen.

Bei **Aufgabe 6** gibt es einen Tipp, der die Aufgabe deutlich vereinfacht. Bitte holt ihn euch bei mir ab. Die Notation soll jedenfalls andeuten, dass der gegebene Morphismus $A \to B$ eine Kofaserung und dass $X \to Y$ eine azyklische Faserung ist. Hängt euch gegebenenfalls nicht daran auf, bei dem von euch konstruierten Zylinder die Kofaserungseigenschaft nachzuweisen.