Guide zu Übungsblatt 9

Zu **Aufgabe 2** folgt weiter unten eine ausführliche Erklärung. Die Aufgabe soll euch damit vertraut machen, wie man simpliziale Mengen durch Erzeuger und Relationen angeben kann. Das ist wichtig, denn wenn man Bilder von simplizialen Mengen malt, macht man das implizit! Schließlich zeichnet niemand die Unmengen an nichtdegenerierten Simplizes dazu.

Zu **Aufgabe 3**: Das *n-Skelett* $\operatorname{sk}_n X$ einer simplizialen Menge X ist die simpliziale (Unter-)Menge mit

$$(\operatorname{sk}_n X)_p := \{x \in X_p \mid \exists q \leq n,\ f : [p] \to [q],\ y \in X_q\colon x = X(f)y\} \subseteq X_p.$$

Die Wirkung auf monotone Abbildungen g, also $(\operatorname{sk}_n X)(g)$, definiert man als Einschränkung der Abbildung $X(g)$.

Anschaulich entsteht das n-Skelett einer simplizialen Menge indem man nur die Simplizes in Graden $\leq n$ behält. Im wörtlichen Sinn ist das nicht ganz wahr, denn das n-Skelett enthält trotzdem auch Simplizes beliebig hoher Dimension; diese sind aber Degenerationen von Simplizes der Dimension $\leq n$.

Die simpliziale Menge $\mathbb{S}^{n-1}$ diejenige simpliziale Untermenge von $\Delta[n]$, der das eindeutig bestimmte nichtdegenerierte n-Simplex fehlt:

$$\dot{\mathbb{S}}^{n-1}_m := \{f : [m] \to [n] \mid f \text{ ist monoton und nicht surjektiv}\} \subseteq \Delta[n]_m.$$

Anschaulich ist $\mathbb{S}^{n-1}$ eine simpliziale Version der $(n-1)$-Sphäre.

Das *Koprodukt* (disjunkt-gemachte Vereinigung) von simplizialen Mengen wird einfach levelweise berechnet. Daher gilt

$$\Big(\coprod_{x \in I} \mathbb{S}^{n-1}\Big)_m = \coprod_{x \in I} \mathbb{S}^{n-1}_m = \{(x, f) \mid x \in I,\ f \in \mathbb{S}^{n-1}_m\}.$$

Zu **Teilaufgabe 3a)**: Grüße Yoneda von mir, wenn ihr diese Teilaufgabe bearbeitet!

Zu **Teilaufgabe 3c)**: Mit $X_{(n)} \subseteq X_n$ bezeichnen wir die Menge der nichtdenerierten n-Simplizes. Dabei heißt ein n-Simplex $x \in X_n$ genau dann *nichtdegeneriert*, wenn es eine *keine* surjektive monotone Abbildung $f : [n] \to [m]$ derart gibt, dass $m < n$ und dass $x = X(f)(y)$ für ein $y \in X_m$. Wenn dir das hilft, dann verwende folgende grundlegende Beobachtungen (die du keinesfalls beweisen musst):

a) Jede monotone Abbildung lässt sich faktorisieren in einer surjektive monotone Abbildung gefolgt von einer injektiven monotonen Abbildung.

b) Ein n-Simplex $x \in X_n$ ist genau dann nichtdegeneriert, wenn aus $x = X(f)y$ für eine monotone Abbildung $f : [n] \to [m]$ und $y \in X_m$ folgt, dass f injektiv ist.

c) Für jedes n-Simplex $x \in X_n$ gibt es ein eindeutiges Paar (f, y) bestehend aus einem nichtdegenerierten Simplex $y \in X_m$ und einer surjektiven monotonen Abbildung $f : [n] \to [m]$ mit $n = X(f)y$.

Das Pushout-Diagramm drückt aus, dass sich das n-Skelett einer simplizialen Menge aus ihrem $(n-1)$-Skelett durch Einkleben der nichtdegenerierten n-Simplizes ergibt.

Um die universelle Eigenschaft nachzuweisen, kann folgender Tipp hilfreich sein. Ein Simplex $x \in (\operatorname{sk}_n X)_m$ lässt sich auf eindeutige Art und Weise in der Form $x = X(f)u$ schreiben, wobei $f : [m] \to [\ell]$ eine Surjektion, $u \in X_\ell$ nichtdegeneriert und $\ell \leq n$ ist. Es genügt schon, die gesuchte Abbildung auf den nichtdegenerierten Simplizes von $\operatorname{sk}_n X$ zu definieren – die restlichen Werte sind durch das Axiom an simpliziale Abbildungen schon festgelegt (inwiefern?).

Zu **Aufgabe 4**: Ein *innerer Kan-Komplex* ist eine simpliziale Menge, in der sich alle *inneren* Hörner füllen lassen. Jeder Kan-Komplex ist auch ein innerer Kan-Komplex, aber nicht umgekehrt. Ihr könnt euch über diese Aufgabe freuen, liefert sie doch ein Beispiel – vielleicht das erste, das ihr seht – für eine $(\infty, 1)$-Kategorie!

Wenn du Schwierigkeiten hast, dir herzuleiten, wie der Morphismenanteil von $N\mathcal{C}$ aussieht, dann googel oder schreib mir eine Mail!

Die zu einem topologischen Raum Y gehörige simpliziale Menge $\operatorname{Sing} Y$ hat als n-Simplizes die stetigen Abbildungen $\Delta^n \to Y$. Dabei ist $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ das topologische Standard-n-Simplex.

Erzeuger und Relationen in der Algebra

Gruppen oder Moduln spezifiert man gelegentlich durch Angabe von *Erzeugern* und *Relationen* zwischen diesen Erzeugern.

- Die additive Gruppe der ganzen Zahlen ist die von einem Erzeuger frei erzeugte Gruppe: $\mathbb{Z} = \langle x \rangle$.
- Der additive Monoid der natürlichen Zahlen ist der von einem Erzeuger frei erzeugte Monoid: $\mathbb{N} = \langle x \rangle$.
- Die Gruppe $\mathbb{Z}/(2)$ ist die von einem Erzeuger x, modulo der Relation $x \circ x = e$ (neutrales Element), erzeugte Gruppe: $\mathbb{Z}/(2) = \langle x \,|\, x \circ x = e \rangle$.
- Die Dieder-Gruppe D_n ist durch zwei Erzeuger und eine Relation erzeugt: $D_n = \langle r, s \,|\, r^n = e, srs = r^{-1} \rangle$.
- Das Tensorprodukt $M \otimes_A N$ kann wie folgt präsentiert werden: $M \otimes_A N = \langle (x, y) \,|\, x \in M, y \in N, (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2), \ldots \rangle$.

Ist ein algebraisches Objekt X durch Erzeuger und Relationen gegeben, so kann man Morphismen in ein weiteres Objekt Y einfach dadurch spezifizieren, indem man für jeden Erzeuger von X jeweils ein gewisses Element von Y als Bild vorgibt und darauf achtet, dass diese Bilder die gegebenen Relationen erfüllen.

Außerdem kann man ein und dieselbe Präsentation durch Erzeuger und Relationen in verschiedenen Kontexten interpretieren. Etwa ist $\langle x, y \rangle$ in der Kategorie der Gruppen die von zwei Elementen frei erzeugte Gruppe $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$. Dieselbe Präsentation führt in der Kategorie der abelschen Gruppen zur abelschen Gruppe $\mathbb{Z}^2$.

Erzeugnisse als Kolimiten

In jeder Kategorie algebraischer Objekte kann man die Erzeugnisse von Präsentationen als gewisse Kolimiten charakterisieren. Sei $\underline{n}$ das von n Erzeugern $e_1, \ldots, e_n$ ohne Relationen erzeugte Objekt: in Grp also $\mathbb{Z} \star \cdots \star \mathbb{Z}$, in Ab ist es $\mathbb{Z}^n$, in $\mathrm{Mod}(R)$ ist es R^n. In Set is es irgendeine n-elementige Menge.

- $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ ist in der Kategorie der Gruppen der Kolimes des folgenden Diagramms:

$$\underline{1} \qquad \underline{1}$$

- $\langle x, y, z \,|\, 2x = 3y\rangle$ ist in der Kategorie der abelschen Gruppen der Kolimes des folgenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
\underline{1} \arrow[dr, "e_1\mapsto e_1"'] & & \underline{1} \arrow[dl, "e_1\mapsto e_2"] & \underline{1} \\
& \underline{2} & & \\
& \underline{1} \arrow[u, bend left, "e_1\mapsto 2e_1"] \arrow[u, bend right, "e_1\mapsto 3e_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

  Kleinere Diagramme sind ebenfalls möglich (etwa $\underline{1} \to \underline{2} \quad \underline{1}$), aber weniger systematisch.

Die allgemeine Regel lautet also wie folgt:

- Für jeden Erzeuger x platziert man eine Kopie von $\underline{1}$ im Diagramm: $\underline{1}_x$.
- Für jede Relation r der Form $t_1(a_1, \ldots, a_n) = t_2(a_1, \ldots, a_n)$ platziert man eine Kopie von $\underline{n}$, notiert $\underline{n}_r$; eine Kopie von $\underline{1}$, notiert $\underline{1}^r$; und folgende Morphismen:

  Für $i = 1, \ldots, n$ einen Morphismus $\underline{1}_{a_i} \to \underline{n}_r$, der den Erzeuger von $\underline{1}_{a_i}$ auf e_i schickt; einen Morphismus $\underline{1}^r \to \underline{n}_r$, der den Erzeuger von $\underline{1}^r$ auf $t_1(e_1, \ldots, e_n)$ schickt; einen Morphismus $\underline{1}^r \to \underline{n}_r$, der den Erzeuger von $\underline{1}^r$ auf $t_2(e_1, \ldots, e_n)$.