Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 3 zu Modellkategorien

Jedes Konzept ist eine Kan-Erweiterung.

Aufgabe 1. *Limiten als Enden*

Sei $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Zeige, dass ein Limes von F dasselbe ist wie ein Ende von $\mathcal{I}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{I} \to \mathcal{I} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$. Als Formel: $\lim F = \int_i F(i)$.

Aufgabe 2. *Kan-Erweiterungen von darstellbaren Kopragarben*

Sei $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ ein Funktor und $X \in \mathcal{M}$. Zeige: $\mathrm{Lan}_K \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, \_) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K(X), \_)$.

Aufgabe 3. *Die Limesformel für punktweise Kan-Erweiterungen*

Sei $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Sei $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ ein Funktor derart, dass für alle Objekte $c \in \mathcal{C}$ der Limes $R(c) := \lim_{f : K(m) \to c} T(m)$ existiert.

a) Erkläre, wie man diese Setzung zu einem Funktor $R : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ausdehnen kann.

b) Beweise, dass R eine Rechts-Kan-Erweiterung von T längs K wird.

Aufgabe 4. *Kan-Erweiterungen längs volltreuer Funktoren*

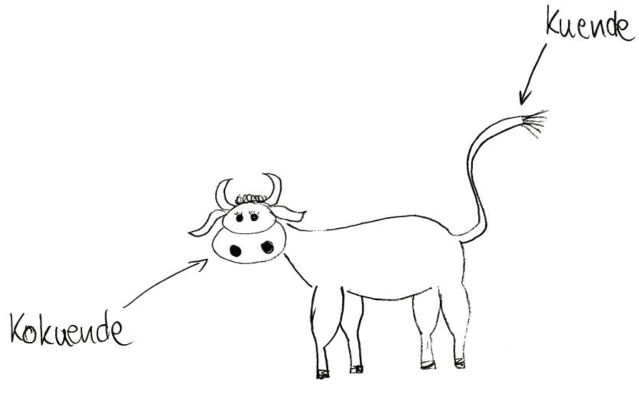
Sei $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ ein volltreuer Funktor. Sei $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ ein Funktor derart, dass die punktweise Links-Kan-Erweiterung $\mathrm{Lan}_K(T)$ existiert. Zeige: Die kanonische natürliche Transformation $T \Rightarrow \mathrm{Lan}_K(T) \circ K$ ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 5. *Beispiele für transfinite Kompositionen in der Kategorie der Mengen*

a) Was ist die transfinite Komposition $\mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{succ}} \mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{succ}} \mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{succ}} \cdots$?

b) Sei $f : X \to X$ eine Abbildung derart, dass sich für jedes $x \in X$ die Folge $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ stabilisiert. Was ist die transfinite Komposition $X \to X \to X \to \cdots$?

c) *Für Fans von Garben.* Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf dem $\mathbb{R}^n$. Was ist die transfinite Komposition der Einschränkungsabbildungen $\mathcal{F}(B_1(0)) \to \mathcal{F}(B_{1/2}(0)) \to \mathcal{F}(B_{1/3}(0)) \to \cdots$?



Bonusaufgabe. *Bastelspaß in der Kategorie der topologischen Räume*

a) Was ist das Kofaserprodukt (Pushout) des folgenden Diagramms?

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{pt} \arrow[d, dashed] \\ D^1 \arrow[r, dashed] & ? \end{tikzcd}$$

b) Überlege dir ein möglichst kniffliges Diagramm dieser Art und fordere deine Mitkohomologinnen heraus!