Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

# Übungsblatt 6 zu Modellkategorien

**Aufgabe 1.** *Morphismen zwischen fasernden Approximationen*

Seien $X$ und $X'$ Objekte einer Modellkategorie. Wähle fasernde Approximationen $r : X \to RX$ und $r' : X' \to RX'$. Seien $f$ und $g$ Morphismen $X \to X'$. Zeige: Wenn $r' \circ f$ und $r' \circ g$ zueinander rechtshomotop sind, so sind auch die induzierten Morphismen $Rf, Rg : RX \to RX'$ zueinander rechtshomotop.

**Aufgabe 2.** *Ein Kriterium für Identifizierung rechtshomotoper Morphismen*

Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Sei $F : \mathcal{M}_c \to \mathcal{C}$ ein Funktor, der azyklische Kofaserungen auf Isomorphismen schickt. Zeige, dass $F$ rechtshomotope Morphismen identifiziert.

**Aufgabe 3.** *Eigenschaften von Scheibenkategorien*

Sei $M$ eine Modellkategorie. Sei $A$ ein Objekt von $M$. Zeige:

a) Ist $M$ links- oder rechtseigentlich, so auch $M/A$.

b) Ist $M$ kofasernd erzeugt, so auch $M/A$.

**Aufgabe 4.** *Lokale Präsentierbarkeit von Prägarbenkategorien*

Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie. Sei $y : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ die Yoneda-Einbettung in die Kategorie der Funktoren $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$. Folgende Aussagen sind alle wahr. Zeige so viele du möchtest.

a) Die Kategorie $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ ist kovollständig.

b) Darstellbare Prägarben – solche der Form $y(X)$ für ein $X \in \mathcal{C}$ – sind $\aleph_0$-kompakt.

c) Jede Prägarbe $F$ ist ein kleiner Kolimes von darstellbaren Prägarben, und zwar gilt etwas genauer $F = \mathrm{colim}_{s \in F(X), X \in \mathcal{C}}\, y(X)$.

d) Die Kategorie $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ ist lokal endlich-präsentierbar.

**Aufgabe 5.** *Regularität unendlich großer Nachfolgerkardinalzahlen*

Sei $\kappa$ der Nachfolger einer unendlich großen Kardinalzahl. Zeige, dass $\kappa$ regulär ist.