

## Übungsblatt 4 zu Modellkategorien

### Aufgabe 1. Adjunktionen als Kan-Erweiterungen

Sei  $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor (oder ein Morphismus in einer beliebigen 2-Kategorie). Zeige, dass  $G$  genau dann einen Linksadjungierten besitzt, wenn eine Rechts-Kan-Erweiterung von  $\text{Id}_{\mathcal{M}}$  längs  $G$  existiert und  $G$  diese bewahrt.

### Aufgabe 2. Retrakte in Modulkategorien

Sei  $i : U \hookrightarrow M$  die Inklusion eines Untermoduls. Zeige: Genau dann ist  $U$  ein direkter Summand von  $M$ , wenn  $i$  ein Linksinverses besitzt.

### Aufgabe 3. Zellkomplexe und Koproducte

Sei  $\mathcal{I}$  eine Menge von Morphismen in einer kovollständigen Kategorie. Sei  $X$  ein Objekt. Sei  $f : A \rightarrow B$  ein relativer  $\mathcal{I}$ -Zellkomplex. Zeige: Der induzierte Morphismus  $A \amalg X \rightarrow B \amalg X$  ist wieder ein relativer  $\mathcal{I}$ -Zellkomplex.

*Tipp:* Sind das linke und rechte Quadrat jeweils Pushout-Diagramme, so ist auch das Gesamtrechteck ein Pushout-Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F \end{array}$$

### Aufgabe 4. Beispiele für Modellstrukturen

- Zeige, dass die Kategorie der Mengen zusammen mit den Injektionen und Surjektionen eine Modellkategorie bildet.
- Sei  $\mathcal{M}$  eine Modellkategorie. Baue auf der Kategorie  $\mathcal{M}_\star$  der punktierten Objekte in  $\mathcal{M}$  eine Modellstruktur.

### Aufgabe 5. Linkshomotopie

Kommt gleich.

