

Übungsblatt 1 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. Beispiele für natürliche Transformationen

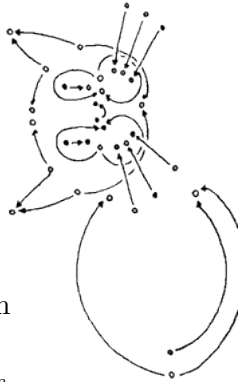
Sei $\text{Id}_{\text{Set}} : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ der Identitätsfunktork auf Set und $K : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ der Funktor

$$\begin{aligned} X &\longmapsto X \times X \\ f &\longmapsto f \times f := ((a, b) \mapsto (f(a), f(b))). \end{aligned}$$

- a) Zeige: Es gibt nur eine einzige natürliche Transformation $\eta : \text{Id}_{\text{Set}} \rightarrow K$, nämlich die mit den Komponenten $\eta_X : X \rightarrow X \times X$, $x \mapsto (x, x)$.

Tipp: Betrachte zum Nachweis der Eindeutigkeit geeignete Abbildungen $1 \rightarrow X$, $\heartsuit \mapsto x$. Dabei ist $1 = \{\heartsuit\}$ eine einelementige Menge, das *einsame Herz*. :-)

- b) Wir nehmen an, dass wir für jede nichtleere Menge X ein bestimmtes Element $a_X \in X$ gegeben haben. Zeige: Die Setzung $\tau_X : X \rightarrow X$, $x \mapsto a_X$ definiert *nicht* eine natürliche Transformation $\text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$, wobei \mathcal{C} die Kategorie der nichtleeren Mengen und beliebigen Abbildungen bezeichnet.
- c) Welche natürlichen Transformationen $\text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ gibt es, wenn \mathcal{C} die Kategorie der reellen Vektorräume bezeichnet?
- d) Seien $\alpha, \beta : M \rightarrow N$ zwei Monoidhomomorphismen. Zeige, dass die induzierten Funktoren zwischen den Kategorien BM und BN genau dann isomorph sind, wenn es ein Element $u \in N$ gibt mit $\beta(x) \circ u = u \circ \alpha(x)$ für alle $x \in M$.



Aufgabe 2. Kanonizität der horizontalen Komposition

Sei $\eta : F \rightarrow G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $\varepsilon : J \rightarrow K$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $J, K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$. Zeige, dass die beiden Möglichkeiten, die *horizontale Komposition* $\eta \star \varepsilon : J \circ F \rightarrow K \circ G$ zu definieren, übereinstimmen:

$$(\eta \star \varepsilon)_X := K(\eta_X) \circ \varepsilon_{F(X)} \quad (\eta \star \varepsilon)_X := \varepsilon_{G(X)} \circ J(\eta_X)$$

Aufgabe 3. Allgemeines zu Kategorienäquivalenzen

- a) Zeige mit allen Details: Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ definiert genau dann eine Kategorienäquivalenz, wenn er volltreu und wesentlich surjektiv ist.
- b) Zeige: Das Quasiinverse einer Kategorienäquivalenz ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Aufgabe 4. Die duale Kategorie der Kategorie der Mengen

- a) Zeige: In der Kategorie der Mengen ist jeder Morphismus ins initiale Objekt ein Iso.
- b) Zeige: In Set^{op} stimmt die Aussage aus a) nicht.
- c) Folgere: Die Kategorien Set und Set^{op} sind nicht äquivalent.

Ein initiales Objekt in einer Kategorie ist ein Objekt X , sodass es zu jedem Objekt Y genau einen Morphismus $X \rightarrow Y$ gibt. Wenn du noch Lust hast, dann zeige, dass der kontravariante Potenzmengenfunktor eine Äquivalenz zwischen Set^{op} und der Kategorie der vollständigen atomischen Heyting-Algebren definiert.

