Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 3 zu Modellkategorien

Jedes Konzept ist eine Kan-Erweiterung.

Aufgabe 1. *Kan-Erweiterungen von darstellbaren Koprägarben*

Sei $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Zeige: $\operatorname{Lan}_K \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(X, \_) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(K(X), \_)$.

Aufgabe 2. *Die Limesformel für punktweise Kan-Erweiterungen*

Sei $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Sei $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ ein Funktor derart, dass für alle Objekte $c \in \mathcal{C}$ der Limes $R(c) := \lim_{f:K(m)\to c} T(m)$ existiert.

a) Erkläre, wie man diese Setzung zu einem Funktor $R : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ausdehnen kann.

b) Beweise, dass R eine Rechts-Kan-Erweiterung von T längs K wird.

Aufgabe 3. *Kan-Erweiterungen längs volltreuer Funktoren*

Sei $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ ein volltreuer Funktor. Sei $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ ein Funktor derart, dass die punktweise Links-Kan-Erweiterung $\operatorname{Lan}_K(T)$ existiert. Zeige: Die kanonische natürliche Transformation $T \Rightarrow \operatorname{Lan}_K(T) \circ K$ ist ein Isomorphismus.

Tipp: Die Kolimesformel für $\operatorname{Lan}_K(T)$ lässt sich stark vereinfachen.