Guide zu Übungsblatt 6

Zu **Aufgabe 2**: Mit $\mathcal{M}_c$ ist die volle Unterkategorie der kofasernden Objekte gemeint. In der Vorlesung gab es ein ähnliches Lemma, an dessen Beweis man sich orientieren kann; man benötigt lediglich noch ein weiteres Argument vorab.

Zu **Aufgabe 3**: Die Kategorie $\mathcal{M}/A$ hat als Objekte

$$\text{Morphismen } X \to A \text{ in } \mathcal{M}$$

und als Morphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}/A}(X \xrightarrow{f} A,\, Y \xrightarrow{g} A) := \{h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y) \,|\, g \circ h = f\}.$$

Man muss nicht nachweisen, dass $\mathcal{M}/A$ wieder eine Modellstruktur ist; das haben wir (in einer spezielleren Situation) schon in Aufgabe 5c) von Blatt 4 gemacht. Ein Morphismus in $\mathcal{M}/A$ ist per Definition genau dann eine schwache Äquivalenz, eine Kofaserung oder eine Faserung, wenn er aufgefasst als Morphismus in $\mathcal{M}$ eine schwache Äquivalenz, eine Kofaserung bzw. eine Faserung ist.

Der Begriff *kofasernd erzeugt* fiel in der Vorlesung noch nicht. Er bedeutet dasselbe wie *kombinatorisch*, nur ohne die Bedingung, dass die Kategorie lokal präsentierbar sein muss. Also ganz explizit: Eine Modellkategorie $\mathcal{M}$ heißt genau dann *kofasernd erzeugt*, wenn Mengen $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \mathrm{Mor}\,\mathcal{M}$ existieren, sodass $\mathcal{C} = \mathrm{Cof}(\mathcal{I})$ und $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = \mathrm{Cof}(\mathcal{J})$. Dabei ist $\mathrm{Cof}(\mathcal{K})$ die Klasse der Retrakte von relativen $\mathcal{K}$-Zellkomplexen.

Der Vergissfunktor $U : \mathcal{M}/A \to \mathcal{M}$ erhält und erzeugt Kolimiten. Das bedeutet, dass sich ein Kolimes in $\mathcal{M}/A$ einfach als Kolimes des zugrundeliegenden Diagramms in $\mathcal{M}$ berechnet (und man die Kolimesspitze auf kanonische Art und Weise mit einem Morphismus nach A hinein ausstattet). Insbesondere bewahrt U daher Pushouts und transfinite Kompositionen.

Für die Aufgabe nicht relevant, aber vielleicht dennoch interessant ist die Tatsache, dass U im Allgemeinen nicht Limiten erhält oder erzeugt. Eine Ausnahme bilden Pullbacks: Diese werden in $\mathcal{M}/A$ genauso berechnet wie in $\mathcal{M}$. (Bei der Koscheibenkategorie $A/\mathcal{M}$ ist es gerade umgekehrt.)

Für das Verständnis der Aufgabe ist die folgende Intuition nicht notwendig. Ich finde sie trotzdem interessant. *Ein Objekt aus $\mathcal{M}/A$ stellt man sich als A-indizierte Familie von Objekten aus $\mathcal{M}$ vor.* Dieser Spruch ergibt formal keinen Sinn, denn A ist keine Menge. Die Sprache kommt vom Spezialfall $\mathcal{M} = \mathrm{Set}$: Eine Abbildung $f : X \to A$ kann man sich nämlich tatsächlich als A-indizierte Familie von Mengen vorstellen, denn zu jedem $a \in A$ gibt es die Faser $f^{-1}[\{a\}]$. Der Vergissfunktor $\mathcal{M}/A \to \mathcal{M}$ berechnet dann zu einer A-indizierten Familie ihren Totalraum.

Wenn du Gefallen an Homotopietyptheorie hast, dann überlege doch (im Fall $\mathcal{M} = \mathrm{Set}$), ob der Vergissfunktor in eine Kette von Adjunktionen passt. (Spoiler: Ja, und das hat mit der abhängigen Summe und dem abhängigen Produkt zu tun.)

Zu **Aufgabe 4**: Details und Hintergründe zu $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ stehen auch im Skript zum ersten Pizzaseminar (ab Seite 42). Die Yoneda-Einbettung y schickt ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ auf die Prägarbe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X)$. *Prägarbe* ist in diesem Zusammenhang nur ein Synonym für *Funktor von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach* Set. *Lokal endlich-präsentierbar* bedeutet lokal $\aleph_0$-präsentierbar.

Zu **Aufgabe 5**: Ist X irgendeine Menge, so zeigt das bekannte Diagonalargument von Cantor, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ größere Mächtigkeit als X hat. Dadurch sieht man, dass es zu jeder Kardinalzahl eine noch größere gibt. Eine Nachfolgerkardinalzahl ist nun eine solche, die direkt nach einer anderen Kardinalzahl kommt. (Je zwei Kardinalzahlen sind gleich, größer oder kleiner, daher ergibt diese Definition Sinn. Die Klasse der Kardinalzahlen ist also total geordnet.)

Schreibe also $\kappa = \lambda^+$ – sei κ also die nächste Kardinalzahl nach λ. Zeige dann: Eine Vereinigung von $\leq \lambda$ vielen Mengen, die jeweils $\leq \lambda$ viele Elemente enthalten, enthält selbst nur $\leq \lambda$ viele Elemente.

Verwende folgendes Lemma (ohne oder mit Beweis, je nach Stimmung): Ist λ eine unendlich große Kardinalzahl, so gilt $\lambda \cdot \lambda = \lambda$.