

Übungsblatt 11 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. *Ein erster Einblick in Homotopiepushouts*

- a) Zeige anhand eines Beispiels in \mathbf{Top} , dass folgende wünschenswerte Aussage im Allgemeinen falsch ist: Sei $X \leftarrow A \rightarrow Y$ ein Diagramm. Sei $X' \leftarrow A' \rightarrow Y'$ ein dazu schwach äquivalentes Diagramm. Dann ist auch der Pushout $X \amalg_A Y$ schwach äquivalent zu $X' \amalg_{A'} Y'$.

Der *Homotopiepushout* eines Diagramms $X \leftarrow A \rightarrow Y$ in einer Modellkategorie ist per Definition der Pushout eines schwach äquivalenten Diagramms $X' \leftarrow A' \rightarrow Y'$, in dem A' kofasernd und die beiden Morphismen Kofaserungen sind.

- b) Zeige, dass der Homotopiepushout bis auf schwache Äquivalenz wohldefiniert ist.
c) Sei die Modellkategorie linkseigentlich und sei einer der Morphismen $X \leftarrow A$ und $A \rightarrow Y$ eine Kofaserung. Zeige, dass dann der Homotopiepushout und der gewöhnliche Pushout übereinstimmen.

Aufgabe 2. *Anodynizität von Kofaserungen*

Zeige: Eine Kofaserung zwischen simplizialen Mengen (bezüglich der Quillen-Modellstruktur) ist genau dann anodyn, wenn sie eine schwache Äquivalenz ist.

Aufgabe 3. *Fundamentalgruppe der eindimensionalen Sphäre*

Berechne $\pi_1(\mathbb{S}^1)$.

Aufgabe 4. *Erzeugnis unter beliebigen vs. filtrierten Kolimiten*

Sei S eine Menge κ -kompakter Objekte in einer kovollständigen Kategorie \mathcal{C} . Sei jedes Objekt aus \mathcal{C} kleiner Kolimes von Objekten aus S . Zeige, dass jedes Objekt aus \mathcal{C} dann ein κ -filtrierter Kolimes von Objekten aus \bar{S} ist, wobei \bar{S} der Abschluss von S unter κ -kleinen Kolimiten ist.