Guide zu Übungsblatt 7

Die Indexkategorie im Kolimes bei der Definition von Dichtheit in **Aufgabe 1** sieht wie folgt aus. Die Objekte dieser Kategorie sind

$$\text{Morphismen der Form } K(m) \to c \text{ in } \mathcal{C} \text{ mit } m \in \mathcal{M} \text{ beliebig.}$$

Die Morphismen sind

$$\mathrm{Hom}(K(m) \xrightarrow{f} c,\, K(n) \xrightarrow{g} c) := \{h : m \to n \,|\, g \circ K(h) = f\}.$$

Die vier Teilaufgaben von Aufgabe 1 sind voneinander unabhängig. Ich hoffe, dass mindestens eine gefällt! Für **Teilaufgabe b) von Aufgabe 1** überlege dir gut, wie das fragliche Diagramm in diesem Fall aussieht. Skizze! Welche Morphismen verlaufen in diesem Diagramm? Für **Teilaufgabe c) von Aufgabe 1** ist eigentlich nur eine bestimmte Übungsaufgabe von Blatt 6 zu zitieren; welche? Das Yoneda-Lemma lautet (in seiner konventionellen Form):

> Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Sei A ein Objekt von $\mathcal{C}$. Sei $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ ein Funktor. Dann ist die kanonische Abbildung
>
> $$\mathrm{Hom}_{[\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathrm{Set}]}(y(A), F) \xrightarrow{\cong} F(A),$$
>
> welche eine natürliche Transformation η auf $\eta_A(\mathrm{id}_A)$ schickt, eine Bijektion. Außerdem ist diese Abbildung natürlich in A und F.

Verwende für **Teilaufgabe d) von Aufgabe 1** unbedingt die Kolimesformel für die punktweise Links-Kan-Erweiterung; mit der ist die Lösung in wenigen Zeilen machbar, ohne sie wird die Aufgabe deutlich komplizierter. Die Formel lautet:

$$(\mathrm{Lan}_K(T))(c) = \operatorname*{colim}_{f : K(m) \to c} T(m).$$

Für **Teilaufgabe b) von Aufgabe 2** hole dir bei mir einen Tipp ab. Minimaltipp vorab: Retrakte haben etwas mit idempotenten Morphismen zu tun. Für Teilaufgabe c) benötigt man möglicherweise die Voraussetzung, dass $\mathcal{C}$ kovollständig ist (prüfe ich noch).

Verwende bei **Aufgabe 3a)** ohne Beweis, dass jeder nicht-diskrete Raum für keine Kardinalzahl κ κ-kompakt ist. In Aufgabe 2 von Blatt 5 hatten wir gesehen, dass nicht-diskrete Räume zumindest nicht $\aleph_0$-kompakt sind; der Beweis dort überträgt sich auf die allgemeinere Behauptung.

Ich persönlich finde **Teilaufgabe b) von Aufgabe 3** spannender. Wer den Grad an benötigter Technik reduzieren möchte, kann folgende Behauptung beweisen.

> Sei I eine Partialordnung. Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine monotone Familie von abgeschlossenen Unterräumen eines Banachraums V (*monoton* heißt: $i \preceq i' \Rightarrow V_i \subseteq V_{i'}$). Sei ein Vektor aus dem topologischen Abschluss der Vereinigung der V_i gegeben: $x \in \overline{\bigcup_i V_i}$.
>
> - Setze von I nur voraus, dass I gerichtet ist. Zeige anhand eines expliziten Gegenbeispiels, dass dann im Allgemeinen nicht folgt, dass $x \in V_j$ für ein $j \in J$.
> - Setze nun an I voraus, dass I $\aleph_1$-gerichtet ist. (Das bedeutet, dass jede Teilmenge $J \subseteq I$ mit $|J| < \aleph_1$ eine obere Schranke in I besitzt.) Zeige, dass dann durchaus folgt, dass $x \in V_j$ für ein $j \in J$.

Die Zahl $\aleph_1$ ist die nach $\aleph_0$ nächstgrößere Kardinalzahl. Analog wie für eine Menge X genau dann $|X| < \aleph_0$ gilt, wenn X endlich ist, gilt genau dann $|X| < \aleph_1$, wenn X (endlich oder) abzählbar ist.

Wer die eigentliche Aufgabe bearbeite möchte, sollte sich zunächst überlegen, wie filtrierte Kolimiten in der Kategorie der Banachräume und linearen Kontraktionen berechnet werden. (Wie ist die Norm zu definieren? Ist die eigene Vermutung über den Kolimes wieder vollständig?) Außerdem sollte man bedenken, dass $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \_)$ in dieser Kategorie *nicht* die zugrundeliegende Menge, sondern den zugrundeliegenden (abgeschlossenen) Einheitsball berechnet. Eine lineare Abbildung A zwischen Banachräumen heißt genau dann *Kontraktion*, wenn $\|Ax\| \leq \|x\|$ für alle x aus dem Quellraum.

Übrigens: Die Kategorie der Banachräume ist zwar nicht lokal $\aleph_0$-präsentierbar, wohl aber lokal $\aleph_1$-präsentierbar. Das hat sogar eine erstaunlich einfache Begründung (siehe Übung).

Zu **Aufgabe 4** ist zu bemerken, dass per Definition ein Funktor F genau dann schwache Äquivalenzen *reflektiert*, wenn folgendes gilt: Wann immer $F(f)$ eine schwache Äquivalenz ist, ist schon f eine schwache Äquivalenz. Die Morphismen η und ε aus den letzten zwei Bedingungen stammen von der Eins bzw. Koeins der Adjunktion.