Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

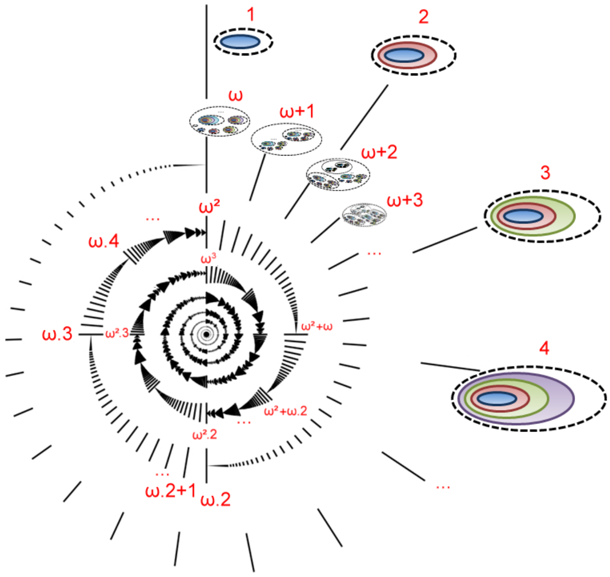
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

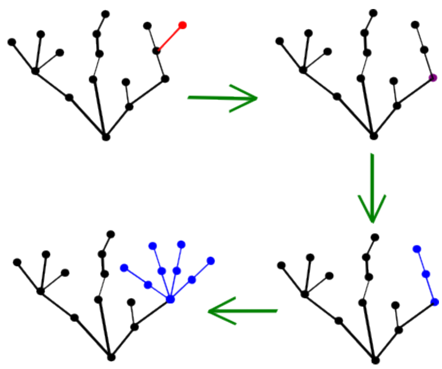
Übungsblatt 0 zu Modellkategorien

Eine *Ordinalzahl* stellt einen *Ordnungstyp* dar, d. h. eine wohlgeordnete Menge. In Mengenlehre kann man eine Ordinalzahl schick als Menge ihrer Vorgänger definieren:

$$0 := \emptyset \qquad 1 := \{0\} \qquad 2 := \{0, 1\}$$
$$\omega := \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad \omega + 1 := \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\omega\}$$

Stellen zwei Ordinalzahlen Ordnungstypen K und L dar, so definieren wir ihre Summe als Repräsentant von $K \amalg L$ (wobei die Elemente aus K als kleiner als die von L angesehen werden) und ihr Produkt als Repräsentant von $K \times L$ (mit der lexikografischen Ordnung). Jede Ordinalzahl ist entweder Null, ein direkter Nachfolger einer Ordinalzahl oder sonst eine *Limeszahl*. Es gilt das Prinzip der *transfiniten Induktion*: Sei $P(\alpha)$ eine von einer Ordinalzahl abhängige Aussage. Wenn für jede Ordinalzahl α aus der Gültigkeit von $P(\beta)$ für alle $\beta < \alpha$ schon folgt, dass $P(\alpha)$ gilt, so gilt P für alle Ordinalzahlen.





Aufgabe 1. *Links- und Rechtskürzbarkeit*

Genau eine der folgenden Rechenregeln für Ordinalzahlen ist korrekt. Welche?

a) Aus $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ folgt $\beta = \gamma$.

b) Aus $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ folgt $\beta = \gamma$.

Aufgabe 2. *Herkules vs. Hydra*

Immer, wenn Herkules einen Kopf der Hydra abtrennt, passiert folgendes: Der Teil der Hydra ab dem jeweiligen Mutterkopf vervielfältigt sich eine gewisse endliche Anzahl von Malen (siehe Skizze). Es wächst nur dann nichts nach, wenn der abgetrennte Kopf direkt an der Wurzel lebte. Kannst du Herkules helfen, diesen ungleichen Kampf zu bestehen?