

Übungsblatt 7 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. Dichte Unterkategorien

Ein Funktor $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ heißt genau dann *dicht*, wenn jedes Objekt $c \in \mathcal{C}$ Kolimes von Objekten der Form $K(m)$ ist – und zwar nicht irgendwie, sondern auf die kanonische Art und Weise $c = \operatorname{colim}_{K(m) \rightarrow c} K(m)$.

- Zeige: Die Inklusion $\{\{\heartsuit\}\} \rightarrow \operatorname{Set}$ der vollen Unterkategorie von Set , welche nur das Objekt $\{\heartsuit\}$ enthält, ist dicht.
- Zeige: Die Inklusion $\{\mathbb{R}\} \rightarrow \operatorname{Vect}(\mathbb{R})$ der vollen Unterkategorie von $\operatorname{Vect}(\mathbb{R})$, welche nur das Objekt \mathbb{R} enthält, ist nicht dicht.
- Zeige: Für jede Kategorie \mathcal{C} ist die Yoneda-Einbettung $y : \mathcal{C} \rightarrow \operatorname{PSh}(\mathcal{C})$ dicht.
- Zeige, dass ein Funktor $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ genau dann dicht ist, wenn $(\operatorname{Id}_{\mathcal{C}}, \operatorname{id}_K)$ eine punktweise Links-Kan-Erweiterung von K längs K ist.

Aufgabe 2. Dichtheit der kompakten Objekte

Sei S eine Menge κ -kompakter Objekte in einer Kategorie \mathcal{C} , sodass jedes Objekt aus \mathcal{C} κ -filtrierter Kolimes von Objekten aus S ist.

- Zeige: Ein Objekt aus \mathcal{C} ist genau dann κ -kompakt, wenn es Retrakt von einem Objekt aus S ist.
- Sei α eine reguläre Kardinalzahl mit $|S| < \alpha$ und $|\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)| < \alpha$ für alle $X \in S$. Zeige, dass es $< \alpha$ viele Isomorphieklassen von κ -kompakten Objekten in \mathcal{C} gibt.
- Zeige, dass die volle Unterkategorie der κ -kompakten Objekte in \mathcal{C} dicht in \mathcal{C} liegt.

Aufgabe 3. Beispiele für nicht (endlich-)präsentierbare Kategorien

- Zeige, dass die Kategorie der topologischen Räume nicht lokal präsentierbar ist.
- Zeige, dass in der Kategorie der Banachräume und linearen Kontraktionen das Objekt \mathbb{R} nicht \aleph_0 -kompakt, aber \aleph_1 -kompakt ist.

Aufgabe 4. Quillen-Adjunktionen auf Niveau der Homotopiekategorien

Sei $F \dashv U$ eine Quillen-Adjunktion. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- $F \dashv U$ ist eine Quillen-Äquivalenz.
- $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}U$ ist eine Äquivalenz der Homotopiekategorien.
- F reflektiert schwache Äquivalenzen zwischen kofasernden Objekten und für alle fasernden Objekte Y ist $FQUY \rightarrow FUY \xrightarrow{\varepsilon} Y$ eine schwache Äquivalenz.
- U reflektiert schwache Äquivalenzen zwischen fasernden Objekten und für alle kofasernden Objekte X ist $X \xrightarrow{\eta} UFX \rightarrow URFX$ eine schwache Äquivalenz.

