Guide zu Übungsblatt 11

In **Aufgabe 1** heißen zwei Diagramme $X \leftarrow A \rightarrow Y$ und $X' \leftarrow A' \rightarrow Y'$ genau dann zueinander schwach äquivalent, wenn es ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & A \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X' & A' \arrow[l] \arrow[r] & Y' \end{tikzcd}$$

gibt, in dem die vertikalen Morphismen schwache Äquivalenzen sind.

Verwende bei **Aufgabe 1a)** als Definition von „schwache Äquivalenz“ einfach „Homotopieäquivalenz“. (Oder „schwache Homotopieäquivalenz“, der Unterschied spielt für diese Teilaufgabe keine Rolle.) Ein Tipp: Denke an die beiden Hälften eines Überraschungseis!

Stresst euch bei **Aufgabe 2a)** nicht zu sehr mit den mehreren Schichten von Definitionen! Die nichtdegenerierten Simplizes von $\Delta[1]$ sind zum Beispiel (in kurzer praktischer Notation) $[0]$, $[1]$ und $[0,1]$. Die Ordnung ist so, dass $[0]$ und $[1]$ unvergleichbar sind und dass beide kleiner als $[0,1]$ sind. Die nichtdegenerierten Simplizes von $\Delta[2]$ sind

$$[0], \quad [1], \quad [2], \quad [0,1], \quad [0,2], \quad [1,2], \quad [0,1,2].$$

Die Behauptung bei **Aufgabe 2c)** ist präzise ausformuliert folgende. Ist irgendein Morphismus $\Lambda^i[n] \to \mathrm{Ex}(X)$ gegeben, so existiert ein Morphismus $\Delta[n] \to \mathrm{Ex}^2(X)$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Lambda^i[n] \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ex}(X) \arrow[d, "j_{\mathrm{Ex}(X)}"] \\ \Delta[n] \arrow[r, dashed] & \mathrm{Ex}^2(X) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Mit „$\mathrm{Ex}^2(X)$“ ist $\mathrm{Ex}(\mathrm{Ex}(X))$ gemeint.

Verwende bei **Aufgabe 3** folgendes Lemma (ohne Beweis): Eine Kan-Faserung ist genau dann trivial, wenn sie eine schwache Äquivalenz ist. Wir wissen auch schon, dass anodyne Erweiterungen schwache Äquivalenzen sind. Es ist also nur noch die Rückrichtung zu zeigen. Orientiere dich an folgendem Muster: Faktorisiere die gegebene Kofaserung i in eine anodyne Erweiterung j (welche sogar eine schwache Äquivalenz ist) gefolgt von einer Kan-Faserung p. Mit einem 2-aus-3-Argument kann man zeigen, dass p eine triviale Faserung ist. Nutze dann $i \boxslash p$, um zu zeigen, dass i ein Retrakt von j ist. Da Retrakte von anodynen Erweiterungen wieder anodyn sind, ist man dann fertig.

Beachte bei **Aufgabe 4**, dass $\mathbb{S}^1$ kein Kan-Komplex ist!

Verwende bei **Aufgabe 5** die *freie Vervollständigung unter κ-kleinen Kolimiten*: Sei $\mathcal{I}$ eine kleine Kategorie. Dann gibt es eine Kategorie $\overline{\mathcal{I}}$ zusammen mit einem volltreuen Funktor $\mathcal{I} \to \overline{\mathcal{I}}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\overline{\mathcal{I}}$ enthält alle κ-kleinen Kolimiten.
2. Ist $F : \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ irgendein Funktor in eine Kategorie, die κ-kleine Kolimiten enthält, so gibt es genau einen Funktor $\overline{F} : \overline{\mathcal{I}} \to \mathcal{D}$, der κ-kleine Kolimiten enthält und eingeschränkt auf $\mathcal{I}$ mit F übereinstimmt.

Die Kategorie $\overline{\mathcal{I}}$ kann man übrigens explizit konstruieren als den Abschluss des Bildes der Yoneda-Einbettung $\mathcal{I} \to [\mathcal{I}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ unter κ-kleinen Kolimiten.