Guide zu Übungsblatt 5

Für **Aufgabe 2** kann man folgendes filtrierte (sogar gerichtete) System von Räumen betrachten.[1] Der Raum Y_n ist als Menge gleich $X \times \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $U \subseteq Y_n$ ist genau dann offen, wenn

> für alle $(x, m) \in U$ gilt: $m < n \Longrightarrow U = X \times \mathbb{N}$.

Eine Teilmenge $U \subseteq Y_n$ ist also genau dann offen, wenn sie schon ganz $X \times \mathbb{N}$ ist oder wenn die zweiten Komponenten von allen Paaren, die in U enthalten sind, größer oder gleich n sind.

Als Übergangsabbildungen $Y_n \to Y_{n+1}$ dienen die (mengentheoretischen) Identitätsabbildungen (wieso sind diese stetig?). Der Kolimes dieses Systems ist dann der indiskrete Raum auf der Menge $X \times \mathbb{N}$ (das heißt: eine Teilmenge U ist genau dann offen, wenn: Enthält U ein Element, so ist U schon gleich ganz $X \times \mathbb{N}$). (Wieso?)

Die Abbildung $X \to \operatorname{colim}_n Y_n$ mit $x \mapsto (x, 0)$ ist stetig (wieso?), faktorisiert aber über keine der Abbildungen $Y_n \to \operatorname{colim}_n Y_n$ (wieso?).

Du wirst nicht richtig warm mit diesem Beispiel? Dann versuche folgenden **alternativen Tipp zu Aufgabe 2**.[2] Fixiere eine nicht-offene Teilmenge $A \subseteq X$. Wähle $Y_n := X \amalg \mathbb{N}$ und versehe diese Menge mit folgender Topologie: Die einzigen nichttrivialen offenen Mengen sollen von der Form $A \amalg \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq k\}$ sein (mit $k \geq n$ beliebig). Wähle als Übergangsabbildungen die Identitäten. Dann ist der Kolimes der indiskrete Raum auf der Menge $X \amalg \mathbb{N}$ und die kanonische Injektion $X \to X \amalg \mathbb{N}$ faktorisiert nicht über einen der Räume Y_n.

Hinweis zu Aufgabe 3. Aufgrund der vielen Indizes, Kegel und Kokegel wird die Lösung möglicherweise unübersichtlich. Wer mag, kann folgende abgespeckte Aufgabe bearbeiten. Sie enthält genau dieselben interessanten Aspekte, kommt aber mit weniger Technik aus.

Sei C eine Partialordnung (zum Beispiel $C = \mathbb{N}$) und D eine Menge. Sei für jedes Paar $(c, d) \in C \times D$ eine Teilmenge F_{cd} einer gewissen Obermenge Ω gegeben.

a) Zeige: Ganz ohne weitere Voraussetzungen gilt

$$\bigcup_{c \in C} \bigcap_{d \in D} F_{cd} \subseteq \bigcap_{d \in D} \bigcup_{c \in C} F_{cd}.$$

b) Sei nun C sogar gerichtet[3] und D endlich. Dann gilt auch „$\supseteq$“.

c) Wer dann noch die Puste hat, kann die Aufgabe ins Unendliche eskalieren: Sei κ eine reguläre Kardinalzahl. Sei D zwar nicht endlich, aber gelte $|D| < \kappa$. Sei C κ-gerichtet – das heißt, dass je $< \kappa$ viele Elemente eine gemeinsame obere Schranke besitzen. Dann gilt ebenfalls „$\supseteq$“.

Noch eine Bemerkung zur ursprünglichen Aufgabe: Es ist tatsächlich wichtig, dass der Funktor F in die Kategorie der Mengen (und nicht sonst irgendeine Kategorie) abbildet.

Tipp zu Aufgabe 4. Die Rückrichtung ist etwas einfacher als die Hinrichtung und auch schon sehr interessant (schließlich konstruieren wir ein Pseudoinverses; es ist doch spannend, woher das kommt!). Verwende folgendes Theorem:

> Sei X kofasernd. Sei $p : Z \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Y$ eine azyklische Faserung. Dann ist $p_\star : \pi^\ell(X, Z) \to \pi^\ell(X, Y)$, $[f] \mapsto [p \circ f]$ eine Bijektion.

[1] Es ist entnommen aus dem schönen Buch *Locally Presentable and Accessible Categories* von Adámek und Rosicky, allerdings etwas modifiziert, um es zum Laufen zu bringen.

[2] Von Marc Olschok in einer Diskussion auf dem n-Kategorien-Café.

[3] Das bedeutet, dass C mindestens ein Element enthält und je zwei Elemente $x, y \in C$ eine gemeinsame obere Schranke besitzen: ein $z \in C$ mit $x \preceq z$ und $y \preceq z$.

Für geeignete Wahl von X, Z, Y und p ist nämlich die Identität ein Element der rechten Seite und besitzt dann ein Urbild. Eine Faktorisierung des gegebenen Morphismus könnte hilfreich sein.

Bei **Aufgabe 5a)** kann man die Abbildung in die umgekehrte Richtung explizit angeben. Denkt dran, dass fasernder und kofasernder Ersatz mit kanonischen Morphismen daher kommen. Es ist auch nützlich, sich die Diagramme aufzumalen, die für einen Morphismus $f : X \to Y$ den Morphismus RQf definieren.

Zur technischen Vereinfachung der Aufgabe kann man ausnutzen, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit $RQX = RX$ und $RQY = QY$ gilt; schließlich ist X schon kofasernd und Y schon fasernd.

Tipps zu **Aufgabe 5b)** können bei mir per Mail abgeholt werden!

♡

Endliche Mengen in konstruktiver Mathematik. Dieser Abschnitt ist (nur) für die Fans konstruktiver Mathematik unter euch gedacht. Eine Menge X heißt genau dann *Kuratowski-endlich*, wenn es eine eine Surjektion $[n] \twoheadrightarrow X$ gibt (mit $n \geq 0$), wobei $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Eine Menge X heißt genau dann *endlich*, wenn es eine Bijektion $[n] \xrightarrow{\cong} X$ gibt.

Von Teilmengen von (Kuratowski-)endlichen Mengen kann man im Allgemeinen nicht zeigen, dass sie wieder (Kuratowski-)endlich sind. Es sind aber Quotienten von Kuratowski-endlichen Mengen wieder Kuratowski-endlich. Endliche Mengen sind stets diskret, Kuratowski-endliche Mengen im Allgemeinen aber nicht. Konstruktiv gibt es noch weitere Endlichkeitsbegriffe, und man kann alle auch so formulieren, dass sie nicht Bezug nehmen auf die (unendlich große) Menge der natürlichen Zahlen.

Bonusaufgabe 1. *Kompakte Objekte in der Kategorie der Mengen konstruktiv*

Zeige: In der Kategorie der Mengen ist eine Menge X genau dann Kuratowski-endlich, wenn $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, \_)$ mit filtrierten Kolimiten von Monomorphismen vertauscht; und genau dann endlich, wenn $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, \_)$ mit beliebigen filtrierten Kolimiten vertauscht.

Bemerkung: Konstruktiv heißt eine Kategorie genau dann filtriert, wenn alle Diagramme mit endlicher (nicht Kuratowski-endlicher) Indexkategorie einen Kokegel zulassen. Das ist äquivalent dazu, dass die Kategorie ein Objekt enthält, zu je zwei Objekten ein Möchtegernkoprodukt enthält und zu je zwei parallelen Morphismen ein Möchtegernkodifferenzkern enthält.

♡

Angst vor bösen Formulierungen. Mich persönlich hat es immer etwas beunruhigt, dass die meisten AutorInnen die 1-kategorielle Definition der Lokalisierung verwenden, habe ich doch auf dem nLab gelernt, dass diese in diesem Kontext im technischen Sinn *böse* ist, da sie Funktoren auf Gleichheit testet. Hinzu kommt noch, dass manche AutorInnen in der 1-kategoriellen Definition zusätzlich fordern, dass der Lokalisierungsfunktor $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ auf Objekten bijektiv ist; das ist doch eine unnatürliche Bedingung, die in universellen Eigenschaften nichts verloren hat.

Sogar in dem wunderschönen Buch *Categorical Homotopy Theory* von Emily Riehl (frei online verfügbar), in dem der Begriff *Kan-Erweiterung* mehr als 130 Mal vorkommt, ist das so!

Wer diese Unstimmigkeiten auch beunruhigend findet, kann die folgende Bonusaufgabe bearbeiten, um diese aus der Welt zu schaffen. Gern geschehen!

Bonusaufgabe 2. *Die 1- und 2-kategorielle Definition der Lokalisierung*

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{W}$ eine Klasse von Morphismen in $\mathcal{C}$. Dann ist die *1-kategorielle Lokalisierung* eine Kategorie $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ zusammen mit einem Funktor $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$, welcher die Morphismen aus $\mathcal{W}$ auf Isomorphismen schickt, sodass folgende 1-kategorielle universelle Eigenschaft erfüllt ist:

> Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ irgendein Funktor, der die Morphismen aus $\mathcal{W}$ auf Isomorphismen schickt, so gibt es genau einen Funktor $\bar{F} : \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathcal{D}$ mit $\bar{F} \circ Q = F$. Anders formuliert: Für jede Kategorie $\mathcal{D}$ induziert $Q^\star$ eine Bijektion zwischen den Funktoren $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathcal{D}$ und denjenigen Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, welche die Morphismen aus $\mathcal{W}$ auf Isomorphismen schicken.

Wie in der Vorlesung diskutiert sollte man diese Eigenschaft allerdings eigentlich nie fordern. Moralisch besser ist folgende 2-kategorielle universelle Eigenschaft:

> Für jede Kategorie $\mathcal{D}$ induziert $Q^\star$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Funktoren $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathcal{D}$ und der Kategorie derjenigen Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, welche die Morphismen aus $\mathcal{W}$ auf Isomorphismen schicken.

a) Zeige, dass eine Lösung des 1-kategoriellen Optimierungsproblems eindeutig ist bis auf eindeutige Isomorphie.

b) Zeige, dass eine Lösung des 2-kategoriellen Optimierungsproblems eindeutig ist bis auf Äquivalenz, wobei je zwei Äquivalenzen eindeutig isomorph zueinander sind.

c) Zeige: Sei $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ Lösung des 1-kategoriellen Problems. Zeige, dass Q auf Objekten bijektiv ist, dass also die von Q induzierte Abbildung $\operatorname{Ob}\mathcal{C} \to \operatorname{Ob}\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ bijektiv ist.

   Tipp: Für Injektivität verwende in der universellen Eigenschaft für $\mathcal{D}$ die Kategorie mit denselben Objekten wie $\mathcal{C}$ und genau einem Morphismus zwischen je zwei Objekten.

d) Zeige: Ist $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ eine Lösung des 1-kategoriellen Problems, so auch des 2-kategoriellen.

   Tipp: Verwende das Ergebnis aus Teilaufgabe c).