Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 12 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. *Schwache Äquivalenzen zwischen simplizialen Mengen*

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus simplizialer Mengen. Seien $X \to \overline{X}$ und $Y \to \overline{Y}$ anodyne Erweiterungen, wobei $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ Kan-Komplexe sind. Zeige, dass f genau dann eine schwache Äquivalenz ist, wenn ein Lift $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$ von f eine Homotopieäquivalenz ist.

Aufgabe 2. *Modelle für den Einheitskreis*

Zeige oder widerlege: Die simpliziale Menge $\mathbb{S}^1$ (eine Untermenge von $\Delta[2]$) und der Quotient $\Delta[1]/\sim$ aus Blatt 9, Aufgabe 2c) sind zueinander homotopieäquivalent.

Aufgabe 3. *Die lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen*

Für einen Kan-Komplex X und einen Basispunkt $x \in X_0$ ist die *n-te Homotopiegruppe* $\pi_n(X, x)$ die Menge der Homotopieklassen von Basispunkt-bewahrenden Morphismen $\Delta[n]/\partial\Delta[n] \to X$.

a) Sei $p : E \to X$ eine Kan-Faserung, $F := p^{-1}[x]$ die Faser über x und $e \in F_0$ ein Punkt. Verwende die Rechtshochhebungseigenschaft von p bezüglich der Inklusion $\Lambda^0[n] \to \Delta[n]$, um eine Abbildung $\delta : \pi_n(X, x) \to \pi_{n-1}(F, e)$ zu konstruieren.

b) Zeige, dass folgende Sequenz punktierter Mengen exakt ist.

$$\cdots \to \pi_n(F, e) \to \pi_n(E, e) \to \pi_n(X, x) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e) \to \cdots \to \pi_0(F) \to \pi_0(E) \to \pi_0(X)$$

Aufgabe 4. *Das Theorem von Whitehead für Kan-Komplexe*

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Kan-Komplexen. Seien die induzierten Abbildungen $\pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ und $\pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ für alle $x \in X_0$ und $n \geq 1$ bijektiv. Zeige, dass f eine Homotopieäquivalenz ist.

Aufgabe 5. *Rückzüge von starken Deformationsretrakten*

Sei $p : E \to X$ eine Serre-Faserung und $i : A \to X$ ein Monomorphismus. Sei A in X ein starker Deformationsretrakt. Zeige, dass $p^{-1}[A]$ in E ein starker Deformationsretrakt ist.