

Übungsblatt 4 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. Adjunktionen als Kan-Erweiterungen

Sei $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor (oder ein Morphismus in einer beliebigen 2-Kategorie). Zeige, dass G genau dann einen Linksadjungierten besitzt, wenn eine Rechts-Kan-Erweiterung von $\text{Id}_{\mathcal{M}}$ längs G existiert und G diese bewahrt.

Aufgabe 2. Retrakte in Modulkategorien

Sei $i : U \hookrightarrow M$ die Inklusion eines Untermoduls. Zeige: Genau dann ist U ein direkter Summand von M , wenn i ein Linksinverses besitzt.

Aufgabe 3. Zellkomplexe und Koproducte

Sei \mathcal{I} eine Menge von Morphismen in einer kovollständigen Kategorie. Sei X ein Objekt. Sei $f : A \rightarrow B$ ein relativer \mathcal{I} -Zellkomplex. Zeige: Der induzierte Morphismus $A \amalg X \rightarrow B \amalg X$ ist wieder ein relativer \mathcal{I} -Zellkomplex.

Aufgabe 4. Hochhebung von Wegen bei Überlagerungen

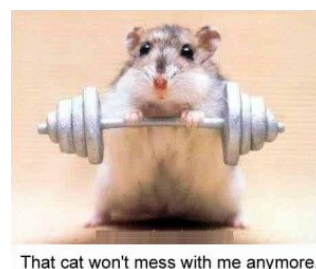
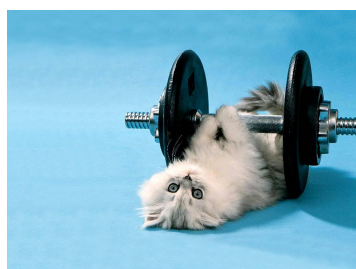
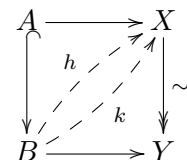
Sei $E \xrightarrow{\pi} X$ eine Überlagerung. Sei $\text{pt} \xrightarrow{\iota} [0, 1]$ die Inklusion eines Intervallendes. Zeige $\iota \boxtimes \pi$.

Aufgabe 5. Erste Schritte mit Modellstrukturen

- Zeige, dass die Kategorie der Mengen zusammen mit den Injektionen als Kofaserungen, den Surjektionen als Faserungen und beliebigen Abbildungen (!) als schwache Äquivalenzen eine Modellkategorie bildet.
- Zeige, dass in einer Modellkategorie je zwei der folgenden fünf Klassen (außer $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ und $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$) die anderen eindeutig festlegen: $\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$.
- Sei \mathcal{M} eine Modellkategorie. Baue auf der Kategorie \mathcal{M}_* der punktierten Objekte in \mathcal{M} eine Modellstruktur.

Aufgabe 6. Eindeutigkeit von Lifts

Sei in einer Modellkategorie ein Quadrat mit zwei Lifts h und k gegeben. Zeige, dass h und k zueinander sehr gut linkshomotop sind.



That cat won't mess with me anymore.