Guide zu Übungsblatt 8

Tipp zu **Aufgabe 2a)**: Wenn V ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist, so ist V als Objekt der symmetrischen monoidalen Kategorie der Vektorräume (mit dem gewöhnlichen Tensorprodukt als monoidale Struktur) dualisierbar mit $V^\vee = \mathrm{Hom}_k(V,k)$, $\varepsilon(\vartheta \otimes v) = \vartheta(v)$ und $\eta(1) = \sum_i v_i \otimes \vartheta_i$ (wobei $(v_i)_i$ eine Basis von V und $(\vartheta_i)_i$ die zugehörige Dualbasis ist). Bitte beachtet, dass in der gleichungsbasierten Definition der Dreiecksidentitäten verschiedene Isomorphismen aus der monoidalen Struktur unterdrückt sind. Zum Beispiel startet der Morphismus auf der linken Seite der ersten Gleichung bei $1 \otimes X$, der Morphismus auf der rechten Seite der ersten Gleichung aber bei X. Wenn man Teilaufgabe a) bearbeitet, muss man sich diese Isomorphismen also dazudenken.

Bei **Aufgabe 2b)** sollte man keinesfalls einen gleichungsbasierten Beweis führen! Mit den vielen Kohärenzisomorphismen kommt man dabei in Teufels Küche. Führe deinen Beweis mit der grafischen Notation. Verwende folgende Bausteine (die aus einem Artikel entnommen sind, den ich jetzt noch nicht angebe):

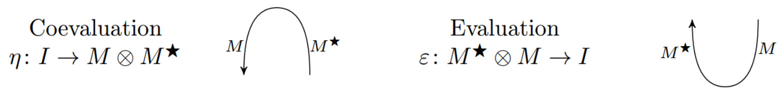


Figure 1. Coevaluation and evaluation

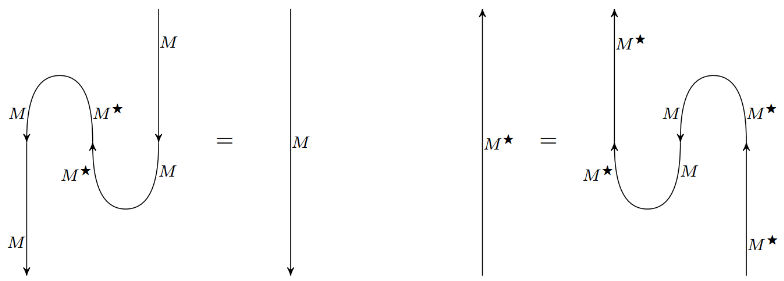


Figure 2. The triangle identities

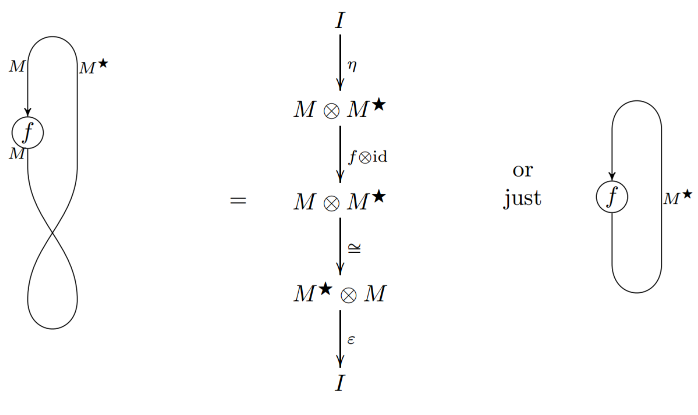
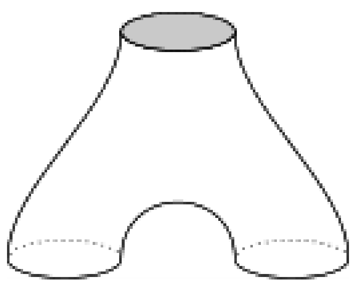


Figure 3. The trace

Um die Begriffe in **Aufgabe 2c)** zu klären, hilft vielleicht folgende Skizze (vom Wikipedia-Eintrag zu Kobordismen). Sie illustriert einen Morphismus von S^1 nach $S^1 \amalg S^1$.



Hier eine Bemerkung zur Motivation. Das tolle an der Spur-Definition aus der Aufgabe ist, dass sie in vielen Situationen anwendbar ist und viele Einzelfälle von Spur-Begriffen vereinigt. Das sind zum einen algebraische Begriffe wie Spur einer Matrix und Lefschetz-Zahl eines Endomorphismus eines Komplex von Vektorräumen, zum anderen aber auch Begriffe aus Topologie und Homotopietheorie. Es gibt einen wunderschönen erklärenden Artikel zum Thema, den ich euch verlinke, sobald ihr alle das Blatt bearbeitet habt. (In dem Artikel wird die Aufgabe vollständig gelöst.)

Noch eine Bemerkung für die Gegner von Vektorräumen unter euch: Wer mag, kann Teilaufgabe a) auch für Moduln bearbeiten. Allerdings ist nicht jeder Modul dualisierbar; nur die, die endlich erzeugt und projektiv sind. Das könnte man auch beweisen. (In diesem Zusammenhang ist interessant, dass ein Modul genau dann endlich erzeugt und projektiv ist, wenn er *lokal frei* ist; siehe Marcs Geburtstagsgeschenk auf `https://github.com/iblech/talk-homological-algebra/raw/master/kaplansky-de.pdf`.)

Bei **Aufgabe 3** soll man sich überlegen, wie die Definitionen sinnvollerweise auszusehen haben. Welche Isomorphismen sollte man fordern? Welche Gleichheiten zwischen Morphismen?