

Übungsblatt 6 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. Morphismen zwischen fasernden Approximationen

Seien X und X' Objekte einer Modellkategorie. Wähle fasernde Approximationen $r : X \rightarrow RX$ und $r' : X' \rightarrow RX'$. Seien f und g Morphismen $X \rightarrow X'$. Zeige: Wenn $r' \circ f$ und $r' \circ g$ zueinander rechtshomotop sind, so sind auch die induzierten Morphismen $Rf, Rg : RX \rightarrow RX'$ zueinander rechtshomotop.

Aufgabe 2. Ein Kriterium für Identifizierung rechtshomotoper Morphismen

Sei \mathcal{M} eine Modellkategorie und \mathcal{C} eine beliebige Kategorie. Sei $F : \mathcal{M}_c \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor, der azyklische Kofaserungen auf Isomorphismen schickt. Zeige, dass F rechtshomotope Morphismen identifiziert.

Aufgabe 3. Eigenschaften von Scheiben- und Koscheibenkategorien

Sei M eine Modellkategorie. Sei A ein Objekt von M . Zeige:

- Ist M links-eigentlich, so auch M/A .
- Ist M kofasernd erzeugt, so auch M/A .
- Ist M kompakt erzeugt, so auch M/A .

Aufgabe 4. Lokale Präsentierbarkeit von Prägarbenkategorien

Sei \mathcal{C} eine kleine Kategorie. Sei $y : \mathcal{C} \hookrightarrow \text{PSh}(\mathcal{C})$ die Yoneda-Einbettung in die Kategorie der Funktoren $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$. Folgende Aussagen sind alle wahr. Zeige so viele du möchtest.

- Die Kategorie $\text{PSh}(\mathcal{C})$ ist kovollständig.
- Darstellbare Prägarben – solche der Form $y(X)$ für ein $X \in \mathcal{C}$ – sind \aleph_0 -kompakt.
- Jede Prägarbe F ist ein kleiner Kolimes von darstellbaren Prägarben, und zwar gilt etwas genauer $F = \text{colim}_{s \in F(X), X \in \mathcal{C}} y(X)$.
- Die Kategorie $\text{PSh}(\mathcal{C})$ ist lokal endlich-präsentierbar.

Aufgabe 5. Regularität unendlich großer Nachfolgerkardinalzahlen

Sei κ der Nachfolger einer unendlich großen Kardinalzahl. Zeige, dass κ regulär ist.

