Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 5 zu Modellkategorien

Lokal präsentierbare Kategorien:
große Kategorien, die von kleinen Daten erzeugt werden.

Aufgabe 1. *Kompakte Objekte in Modulkategorien*

a) Zeige, dass ein A-Modul M genau dann endlich erzeugt ist, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}(M, \_) : \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Set}$ mit filtrierten Kolimiten von Monomorphismen vertauscht, wenn also für jedes filtrierte Diagramm $(V_i)_i$, in dem die Übergangsabbildungen $V_i \to V_j$ alle injektiv sind, folgende kanonische Abbildung bijektiv ist.

$$\operatorname*{colim}_i \mathrm{Hom}(M, V_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, \operatorname*{colim}_i V_i)$$

b) Zeige, dass ein A-Modul M genau dann endlich präsentiert ist, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}(M, \_)$ mit beliebigen filtrierten Kolimiten vertauscht, wenn M also $\aleph_0$-kompakt ist.

Aufgabe 2. *Kompakte Objekte in der Kategorie der topologischen Räume*

Sei X ein topologischer Raum, der eine Teilmenge $A \subseteq X$ besitzt, die nicht offen ist. Zeige, dass X in der Kategorie der topologischen Räume nicht $\aleph_0$-kompakt ist.

Aufgabe 3. *Vertauschbarkeit von filtrierten Kolimiten mit endlichen Limiten*

Sei $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathrm{Set}$ ein Funktor.

a) Konstruiere einen kanonischen Morphismus $\psi : \operatorname*{colim}_{c\in\mathcal{C}} \lim_{d\in\mathcal{D}} F(c,d) \to \lim_{d\in\mathcal{D}} \operatorname*{colim}_{c\in\mathcal{C}} F(c,d)$.

b) Sei $\mathcal{C}$ sogar eine filtrierte Kategorie und $\mathcal{D}$ eine endliche Kategorie. Zeige, dass dann ψ ein Isomorphismus ist.

Folgere: Endliche Kolimiten von $\aleph_0$-kompakten Objekten sind $\aleph_0$-kompakt.

Aufgabe 4. *Das Theorem von Whitehead für Modellkategorien*

Zeige, dass ein Morphismus zwischen bifasernden Objekten in einer Modellkategorie genau dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn er eine schwache Äquivalenz ist.

Aufgabe 5. *Morphismen zwischen kofasernden und fasernden Objekten*

a) Seien X ein kofaserndes und Y ein faserndes Objekt in einer Modellkategorie $\mathcal{M}$. Zeige, dass der kanonische Morphismus $\pi(X,Y) \to \pi(RX, QY)$ bijektiv ist.

b) Beweise, dass in $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ jeder Morphismus Komposition von Morphismen der Form $\gamma(f)$ mit $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{M}$ und Morphismen der Form $\gamma(f)^{-1}$ mit $f \in \mathcal{W}$ ist.