Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Sommersemester 2015

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 13 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. *Lokale Präsentierbarkeit der Kategorie der Kettenkomplexe*

Zeige, dass die Kategorie $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$ über einem Ring R lokal präsentierbar ist.

Aufgabe 2. *Die Dold–Kan-Korrespondenz*

a) Sei $V_\bullet \in \mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$. Konstruiere einen simplizialen R-Modul $\Gamma(V)$ mit $\Gamma(V_\bullet)_m = \bigoplus_{[m] \twoheadrightarrow [k]} V_k$ (direkte Summe über alle monotonen Surjektionen $[m] \to [k]$).

b) Sei X ein simplizialer R-Modul. Sei $CX_\bullet$ der Kettenkomplex mit $(CX)_m = X_m$ und Differential $d = \sum_i (-1)^i X(\partial^i)$. Sei $DX_\bullet$ der Unterkomplex der degenerierten Ketten. Sei $NX_\bullet = CX_\bullet / DX_\bullet$. Was ist $N(\Delta[n])$?

c) Zeige, dass die Kategorie der simplizialen R-Moduln vermöge Γ und N zur Kategorie der Kettenkomplexe von R-Moduln (in nichtnegativen Graden) äquivalent ist.

d) Wie ist auf der Kategorie der simplizialen R-Moduln eine Modellstruktur zu definieren, damit diese Quillen-äquivalent zu $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$ wird?

Aufgabe 3. *Ringwechsel*

Sei $R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass Skalarerweiterung und -einschränkung eine Quillen-Adjunktion bezüglich der projektiven Modellstrukturen bilden.

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Ch}_{\geq 0}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Ch}_{\geq 0}(S) \\ V_\bullet & \longmapsto & V_\bullet \otimes_R S \end{pmatrix} \dashv \begin{pmatrix} \mathrm{Ch}_{\geq 0}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Ch}_{\geq 0}(R) \\ W_\bullet & \longmapsto & W_\bullet \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. *Die Ableitung des Tensorprodukts*

Sei k ein Körper. Seien f und g reguläre Elemente von $k[x,y]$. Berechne das abgeleitete Tensorprodukt $k[x,y]/(f) \otimes^{\mathbb{L}}_{k[x,y]} k[x,y]/(g)$. Kannst du das Ergebnis geometrisch deuten?