Guide zu Übungsblatt 10

Für **Aufgabe 1** muss man in Teilaufgabe b) wissen, was eine simpliziale Gruppe ist. Dazu gibt es drei äquivalente Definitionen; am praktischsten ist vermutlich die erste:

a) Eine simpliziale Gruppe ist wie eine simpliziale Menge, nur dass man auf den Simplexmengen X_n noch jeweils eine Gruppenstruktur hat und dass die Abbildungen $X(f) : X_m \to X_n$ für $f : [n] \to [m]$ alle Gruppenhomomorphismen sind.

b) Eine simpliziale Gruppe ist ein Funktor $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ zusammen mit der Angabe einer Faktorisierung über den Vergissfunktor $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$.

c) Eine simpliziale Gruppe ist ein Gruppenobjekt in der Kategorie der simplizialen Mengen.

Außerdem kommt in Teilaufgabe c) die simpliziale Menge BG vor. Kurz und knapp definiert ist diese nichts anderes als der Nerv (siehe Blatt 9) der von G induzierten Kategorie (diese hat genau ein Objekt, nämlich $\star$, und für jedes Gruppenelement einen Morphismus $\star \to \star$). Ganz explizit gilt also $(BG)_n = G^n$. Achtung, Falle: Die simpliziale Menge BG kann genau dann mit einer Gruppenstruktur versehen werden, wenn G abelsch ist. Teilaufgabe c) folgt also nicht aus b).

Wenn ihr Indexschlachten vermeiden möchtet, beweist in den Teilaufgaben b) und c) nur die Fälle niedriger Dimension.

Aufgabe 2 hat etwas mit Kan-Erweiterungen zu tun. Wenn du den Zusammenhang herausgefunden hast, kannst du die Limes- bzw. Kolimesformel verwenden, um die gesuchten Funktoren zumindest formal hinzuschreiben; dann sollte die Darstellung nur noch vereinfacht werden. Auch, wenn man keine Formeln findet, ist Teilaufgabe d) machbar.

Wer Fan von Enden und Koenden ist, kann auch folgende Formeln verwenden:

$$\mathrm{Lan}_K(T)(c) = \int^m \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Km, c) \cdot Tm, \qquad \mathrm{Ran}_K(T)(c) = \int_m (Tm)^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Km)}.$$

Wer dagegen Kan-Erweiterungen nicht mag, kann die Aufgabe natürlich auch ohne sie bearbeiten. Ihr könnt es auch dabei belassen, Links- und Rechtsadjungierte zum Funktor $\mathrm{sSet}_{\leq N+1} \to \mathrm{sSet}_{\leq n}$ zu finden; das ist technisch einfacher und enthält auch schon den eigentlichen Inhalt dieser Aufgabe.

In **Aufgabe 3** ist $|X|$ die geometrische Realisierung von X und $\pi_0(|X|)$ die Menge ihrer Wegzusammenhangskomponenten, also die Menge der Punkte von $|X|$ modulo der Äquivalenzrelation, die genau dann zwei Punkte miteinander identifiziert, wenn sie durch einen stetigen Weg verbunden werden können. Die Menge $\pi_0(X)$ ist definiert als der Kodifferenzkern der Morphismen $d_0, d_1 : X_1 \rightrightarrows X_0$, d. h. $\pi_0(X) = X_0/{\sim}$, wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt wird von folgender Forderung: Für alle $v \in X_1$ soll $d_0(v) \sim d_1(v)$ gelten. Noch expliziter: Zwei Ecken aus X_0 sind genau dann äquivalent, wenn es einen Kantenzug von der einen Ecke zur anderen gibt. Dabei ignorieren wir die Orientierung der Kanten (d. h. der 1-Simplizes).

In **Aufgabe 4** ist der Morphismus $f^\star : X^B \to X^A$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit der Eigenschaft, dass die Komposition $X^B \times A \xrightarrow{\mathrm{id}\times f} X^B \times B \xrightarrow{\mathrm{ev}} X$ gleich der Komposition $X^B \times A \xrightarrow{f^\star\times \mathrm{id}} X^A \times A \xrightarrow{\mathrm{ev}} X$ ist.