

Übungsblatt 13 zu Modellkategorien

Aufgabe 1. Lokale Präsentierbarkeit der Kategorie der Kettenkomplexe

Zeige, dass die Kategorie $\text{Ch}_{\geq 0}(R)$ über einem Ring R lokal präsentierbar ist.

Aufgabe 2. Die Dold-Kan-Korrespondenz

- Sei $V_{\bullet} \in \text{Ch}_{\geq 0}(R)$. Konstruiere einen simplizialen R -Modul $\Gamma(V)$ mit $\Gamma(V_{\bullet})_m = \bigoplus_{[m] \rightarrow [k]} V_k$ (direkte Summe über alle monotonen Surjektionen $[m] \rightarrow [k]$).
- Sei X ein simplizialer R -Modul. Sei CX_{\bullet} der Kettenkomplex mit $(CX)_m = X_m$ und Differential $d = \sum_i (-1)^i X(\partial^i)$. Sei DX_{\bullet} der Unterkomplex der degenerierten Ketten. Sei $NX_{\bullet} = CX_{\bullet}/DX_{\bullet}$. Was ist $N(R\langle\Delta[n]\rangle)$? Dabei ist $(R\langle\Delta[n]\rangle)_m$ der freie R -Modul mit Basis $\Delta[n]_m$.
- Zeige, dass die Kategorie der simplizialen R -Moduln vermöge Γ und N zur Kategorie der Kettenkomplexe von R -Moduln (in nichtnegativen Graden) äquivalent ist.
- Wie ist auf der Kategorie der simplizialen R -Moduln eine Modellstruktur zu definieren, damit diese Quillen-äquivalent zu $\text{Ch}_{\geq 0}(R)$ wird?

Aufgabe 3. Ringwechsel

Sei $R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass Skalarerweiterung und -einschränkung eine Quillen-Adjunktion bezüglich der projektiven Modellstrukturen bilden.

$$\left(\begin{array}{ccc} \text{Ch}_{\geq 0}(R) & \longrightarrow & \text{Ch}_{\geq 0}(S) \\ V_{\bullet} & \longmapsto & V_{\bullet} \otimes_R S \end{array} \right) \dashv \left(\begin{array}{ccc} \text{Ch}_{\geq 0}(S) & \longrightarrow & \text{Ch}_{\geq 0}(R) \\ W_{\bullet} & \longmapsto & W_{\bullet} \end{array} \right)$$

Aufgabe 4. Die Ableitung des Tensorprodukts

Sei k ein Körper. Seien f und g reguläre Elemente von $k[x, y]$. Berechne das abgeleitete Tensorprodukt $k[x, y]/(f) \otimes_{k[x, y]}^{\mathbb{L}} k[x, y]/(g)$. Kannst du das Ergebnis geometrisch deuten?

