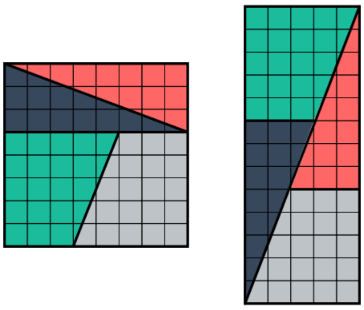
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt zur Vorlesung
Geheimnis der Zahl 5

Aufgabe 1. *Ein Kästchen verschwindet!*

a) Die beiden Figuren bestehen offensichtlich aus denselben Stücken, haben aber unterschiedlichen Flächeninhalt! Was ist hier passiert?

b) Zeige: Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen nähert sich beliebig genau dem goldenen Schnitt an.



Aufgabe 2. *Irrationalste Zahl*

Formuliere präzise und beweise: Der goldene Schnitt ist die irrationalste Zahl.

Tipp: Kettenbruchentwicklung.

Aufgabe 3. *Ableitung vs. Umkehrfunktion*

Finde eine bijektive differenzierbare Funktion $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, deren Ableitung gleich ihrer Umkehrfunktion ist.

Aufgabe 4. *Conways Armee*

Ein unendlich ausgedehntes Damebrett sei in zwei Hälften zerteilt. Im unteren Teil darf man beliebig viele Damesteine platzieren. Ziel des Spiels ist es, einen Damestein möglichst hoch in das obere Spielfeld zu bringen. Dabei darf nur folgender Spielzug angewendet werden: Ein Stein darf einen (horizontal oder vertikal) benachbarten Stein überspringen, wenn das Zielfeld unbesetzt ist. Der übersprungene Stein wird dann aus dem Spiel entfernt.

a) Überzeuge dich davon, dass man, um Höhe 1, 2, 3 bzw. 4 über der Trennlinie zu erreichen, mit 2, 4, 8 bzw. ~~16~~ 20 Steinen beginnen muss.

b) Zeige, dass Höhe 5 mit keiner endlichen Anzahl von Steinen erreichbar ist.

   Tipp: Weise den Spielsteinen eine von der Manhattan-Entfernung zum angepeilten Zielstein abhängige Bewertung zu.

Aufgabe 5. *Auflösbarkeit quintischer Gleichungen*

Zeige, dass Gleichungen vom Grad 5 und höher im Allgemeinen nicht durch Radikale auflösbar sind.

Tipp: Eine Gleichung ist genau dann durch Radikale auflösbar, wenn die zugehörige Galoisgruppe eine auflösbare Gruppe ist. Wenn man daher zeigt, dass die symmetrische Gruppe in n Ziffern für $n \geq 5$ nicht auflösbar ist, hat man schon viel gewonnen.

Aufgabe 6. *Eine Zahl mit besonderer Dezimalbruchentwicklung*

Es gilt:

$$\frac{1}{998999} = 0{,}000\,001\,001\,002\,003\,005\,008\,013\,021\ldots.$$

a) Was ist daran besonders?

b) Inwiefern setzt sich das Muster auch nach 987 fort?

c) Erkläre das Phänomen.

Aufgabe 7. *Willmore-Satz*

Kathrin und Meru, ihr seid gefragt!

Aufgabe 8. *Ein Lemma über goldene Dreiecke*

a) Zeige: In einem gleichschenkligen Dreieck mit den Innenwinkeln 72°, 36° und 72° teilen die langen Seiten die Grundseite im goldenen Schnitt.

b) Beweise damit folgende Pentagon-Dekagon-Hexagon-Identität: Seien ein reguläres Pentagon, ein reguläres Dekagon und ein reguläres Hexagon in einem Kreis einbeschrieben. Dann gilt für die Kantenlängen P, D bzw. H die Identität $P^2 = D^2 + H^2$.

Noch zu TeXen:

- `http://math.ucr.edu/home/baez/six.html`
- `http://en.wikipedia.org/wiki/Wythoff%27s_game`
- In der Informatik gibt es etwa Fibonacci-Heaps. Diese haben besonders gute Eigenschaften.
- Beweise: $\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$ graphisch, und zwar mit der Skizze aus `http://math.stackexchange.com/questions/733754/visually-stunning-math-concepts-which-are-easy-to`
- `https://www.math.hmc.edu/~benjamin/papers/DIE.pdf`, Seite 4, oben: kombinatorische Interpretation der Fibonacci-Zahlen
- Simons Aufgaben: `github.com/NicolasMalebranche/Latex/tree/master/JHE%20S%C3%A4tze`

Bis Ende des Sommersemesters zu erledigen:

- Tolles Layout überlegen: Je zwei Seitenlängen müssen im goldenen Schnitt zueinander stehen. Das jetzige Layout ist fast ungeändert von seinen eigenen Übungsblättern übernommen.
- Viele weitere kanonische und unkanonische Aufgaben finden.
- Darauf achten, dass die Gesamtzahl von Aufgaben eine Fibonacci-Zahl ist.