Sätze mit Fibonaccizahlen, dem goldenen Schnitt und der Zahl 5

24. November 2013

Zusammenfassung

Eine Sammlung hübscher und teilweise überraschender Ergebnisse, worin Fibonaccizahlen, der goldene Schnitt oder die Zahl 5 eine besondere Rolle spielen. Keine Beweise.

1 Fibonaccizahlen

Definition 1. Die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ der Fibonaccizahlen ist rekursiv gegeben durch:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

Satz 1. Die gewöhnliche und die exponentiell erzeugende Funktion der Fibonaccizahlen G_f resp. E_f sind:

$$\begin{aligned} G_f(x) &:= \sum_{n\geq 0} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}, \\ E_f(x) &:= \sum_{n\geq 0} \tfrac{1}{n!} f_n x^n = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \exp\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\, x\right) - \tfrac{1}{\sqrt{5}} \exp\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\, x\right) \end{aligned}$$

Satz 2. Sei B_n eine $n \times n$-Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \text{\Large 0} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ \text{\Large 0} & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist die Permanente von B_n gleich f_{n+1}.

2 Goldener Schnitt

Definition 2. Der goldene Schnitt Φ ist definiert als $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Satz 3. Der goldene Schnitt erfüllt die Gleichungen

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}, \qquad \Phi^{n+1} = f_{n+1}\Phi + f_n.$$

Satz 4. Sei $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ diejenige differenzierbare und bijektive Funktion, deren erste Ableitung gleich ihrer Umkehrfunktion ist. Dann ist f gegeben durch:

$$f(x) = \left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^{\frac{1}{\Phi}} x^{\Phi}.$$

3 Die Zahl 5

Definition 3. Die Zahl 5 ist gleich $1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Satz 5. (Pentagonalzahlensatz.) Die Pentagonalzahlen sind definiert durch $p_n := \frac{3n^2-n}{2}$ und berechnen die Anzahl der Steine, die benötigt werden, um n ineinander liegende regelmäßige Fünfecke zu legen, welche eine Ecke gemeinsam haben. Die Partitionszahlen werden bezeichnet durch $p(n)$ und zählen die Möglichkeiten, die Zahl n als Summe positiver ganzer Zahlen zu schreiben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots} &= \sum_{n\geq 0} p(n)\, x^n \qquad \text{und} \\ (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n x^{p_n}. \end{aligned}$$

Satz 6. (Fünferschritte bei Partitionszahlen.)

$$\frac{5\left((1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\ldots\right)^5}{((1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots)^6} = \sum_{n\geq 1} p(5n-1)\, x^n$$