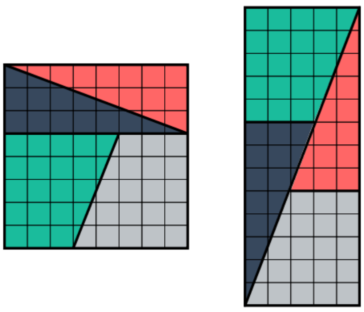
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt zur Vorlesung
Geheimnis der Zahl 5

Aufgabe 1. *Ein Kästchen verschwindet!*

a) Die beiden Figuren bestehen offensichtlich aus denselben Stücken, haben aber unterschiedlichen Flächeninhalt! Was ist passiert?

b) Zeige: Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen nähert sich beliebig genau dem goldenen Schnitt an.

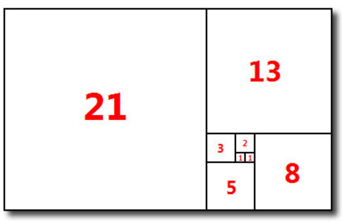


Aufgabe 2. *Die Quadrate der Fibonacci-Zahlen*

Es gilt die Identität $f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

a) Führe einen Induktionsbeweis.

b) Argumentiere, wieso folgende Skizze die Behauptung auch schon beweist.



Aufgabe 3. *Eine Zahl mit besonderer Dezimalbruchentwicklung*

Es gilt:

$$\frac{1}{998999} = 0{,}000\,001\,001\,002\,003\,005\,008\,013\,021\ldots.$$

a) Was ist daran besonders?

b) Inwiefern setzt sich das Muster auch nach 987 fort?

c) Erkläre das Phänomen.

Aufgabe 4. *Von Fibonacci-Zahlen und Rechtecken*

Gegeben sei eine Reihe von n Quadraten, die ein $(1 \times n)$-Rechteck bilden. Wir möchten dieses Rechteck mit Monominos (also (1×1)-Rechtecken) sowie Dominos ((1×2)-Rechtecken) überdecken.

Zeige, dass die Anzahl von möglichen Überdeckungen des $(1 \times n)$-Rechtecks mittels Monominos und Dominos gleich f_n ist.

Aufgabe 5. *Ein naiver Algorithmus für Fibonacci-Zahlen*

Eine ganz naive Methode, die n-te Fibonacci-Zahl zu bestimmen, besteht darin, die beiden Vorgänger zu bestimmen und dann zu summieren. Wie viele Rechenschritte sind dabei notwendig, wenn man sich *nicht* Zwischenergebnisse merkt und daher viele Fibonacci-Zahlen immer wieder berechnet?

Aufgabe 6. *Fibonacci-Zahlen als Permanente*

Zeige: Die Permanente einer $(n \times n)$-Bandmatrix, die auf der Hauptdiagonale und den beiden Nebendiagonalen mit Einsern und sonst nur mit Nullern besetzt ist, ist f_{n+1}.

Aufgabe 7. *Die irrationalste Zahl*

Formuliere präzise und beweise: Der goldene Schnitt ist die irrationalste aller Zahlen.

Tipp: Kettenbruchentwicklung.

Aufgabe 8. *Ableitung vs. Umkehrfunktion*

Finde eine bijektive differenzierbare Funktion $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, deren Ableitung gleich ihrer Umkehrfunktion ist.

Aufgabe 9. *Ein Lemma über goldene Dreiecke*

a) Zeige: In einem gleichschenkligen Dreieck mit den Innenwinkeln $72°$, $36°$ und $72°$ teilen die langen Seiten die Grundseite im goldenen Schnitt.

b) Beweise damit folgende Pentagon-Dekagon-Hexagon-Identität: Seien ein reguläres Pentagon, ein reguläres Dekagon und ein reguläres Hexagon in einem Kreis einbeschrieben. Dann gilt für die Kantenlängen P, D bzw. H die Identität $P^2 = D^2 + H^2$.

Aufgabe 10. *Ikosaeder und Dodekaeder*

Sei einem regelmäßigen Ikosaeder ein regelmäßiges Dodekaeder einbeschrieben (Seitenflächenmittelpunkte auf Ecken). Zeige, dass das Verhältnis der Kantenlängen beider Objekte gleich $3 : \Phi$ ist.

Aufgabe 11. *Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen [Vadim Gorin]*

Sei ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen gegeben. Zeige, dass seine Hypothenuse mindestens die Länge 5 hat.

Aufgabe 12. *Rotation um* $72°$

a) Zeige: Die dreidimensionale Rotation um $72° = \frac{2\pi}{5}$ hat Spur Φ.

b) Zeige: Die zweidimensionale Rotation um $72°$ hat Spur $\frac{1}{\Phi}$.

Aufgabe 13. *Erzeugende Funktionen für Fibonacci-Zahlen*

a) Zeige, dass die gewöhnliche und exponentiell erzeugende Funktionen der Fibonacci-Zahlen durch

$$\sum_{n\geq 0} f_{n+1}x^n = \frac{1}{1-x-x^2} \qquad \text{bzw.}$$

$$\sum_{n\geq 0} \tfrac{1}{n!} f_n x^n = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \exp\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,x\right) - \tfrac{1}{\sqrt{5}} \exp\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,x\right)$$

gegeben sind.

b) Zeige weiter:

$$\sum_{n\geq 0} f_{n+1}^2 x^n = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3-2x}{1-3x+x^2}$$

$$\sum_{n\geq 0} f_{n+1}^3 x^n = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1+x-x^2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-4x-x^2}$$

$$\sum_{n\geq 0} f_{n+1}^4 x^n = \frac{6}{25}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{4}{25}\cdot\frac{3+2x}{1+3x+x^2} + \frac{1}{25}\cdot\frac{7-2x}{1-7x+x^2}$$

$$\sum_{n\geq 0} f_{n+1}^5 x^n = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-x-x^2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1+4x-x^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-11x-x^2}$$

Die einzelnen Summanden haben alle eine besondere Bedeutung. Welche? Wie lautet die erzeugende Funktion einer beliebigen Potenz von Fibonacci-Zahlen?

Aufgabe 14. *Pentagonal- und Partitionszahlen*

Die Pentagonalzahlen sind definiert durch $p_n := \frac{3n^2-n}{2}$ und berechnen die Anzahl der Steine, die benötigt werden, um n ineinander liegende regelmäßige Fünfecke zu legen, welche eine Ecke gemeinsam haben. Die Partitionszahl $p(n)$ zählt die Möglichkeiten, die Zahl n als Summe positiver ganzer Zahlen zu schreiben.

a) Zeige folgenden Zusammenhang zwischen den Pentagonal- und den Partitionszahlen:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots} = \sum_{n\geq 0} p(n)\,x^n \qquad \text{und}$$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n x^{p_n}.$$

b) Verifiziere folgende Identität über Fünferschritte bei Partitionszahlen:

$$\frac{5\left((1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\ldots\right)^5}{\left((1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots\right)^6} = \sum_{n\geq 1} p(5n-1)\,x^n.$$

Aufgabe 15. *Conways Armee*

Ein unendlich ausgedehntes Damebrett sei in zwei Hälften zerteilt. Im unteren Teil darf man beliebig viele Damesteine platzieren. Ziel des Spiels ist es, einen Damestein möglichst hoch in das obere Spielfeld zu bringen. Dabei darf nur folgender Spielzug angewendet werden: Ein Stein darf einen (horizontal oder vertikal) benachbarten Stein überspringen, wenn das Zielfeld unbesetzt ist. Der übersprungene Stein wird dann aus dem Spiel entfernt.

a) Überzeuge dich davon, dass man, um Höhe 1, 2, 3 bzw. 4 über der Trennlinie zu erreichen, mit 2, 4, 8 bzw. ~~16~~ 20 Steinen beginnen muss.

b) Zeige, dass Höhe 5 mit keiner endlichen Anzahl von Steinen erreichbar ist. *Tipp:* Weise den Spielsteinen eine von der Manhattan-Entfernung zum angepeilten Zielstein abhängige Bewertung zu.

Aufgabe 16. *Wythoffs Spiel*

Zwei Spieler spielen folgendes Spiel: Gegeben sind zwei Haufen mit n bzw. m Spielsteinen. Die Spieler nehmen abwechselnd Spielsteine von den Haufen weg, und zwar entweder eine beliebige Anzahl von einem der Haufen oder die gleiche Anzahl von beiden Haufen. Gewonnen hat der Spieler, der die letzten Spielsteine wegnimmt.

a) Überzeuge dich davon, dass für $(n, m) = (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10)$ oder $(8, 13)$ der anziehende Spieler bei perfektem Spiel verliert.

b) Zeige, dass alle Positionen (n, m) (mit $n \leq m$), in denen der anziehende Spieler bei perfektem Spiel verliert, durch die Formeln

$$n = \lfloor k\phi \rfloor, \quad m = \lfloor k\phi^2 \rfloor$$

mit $k \in \mathbb{N}$ gegeben sind.

Aufgabe 17. *Summe von fünf Kuben [Massimiliano Mella]*

Zeige: Ein generisches homogenes Polynom vom Grad 3 in vier Variablen kann auf eindeutige Art und Weise als Summe von fünf Kuben von Linearformen geschrieben werden

Aufgabe 18. *Auflösbarkeit quintischer Gleichungen*

Zeige, dass Gleichungen vom Grad 5 und höher im Allgemeinen nicht durch Radikale auflösbar sind.

Tipp: Eine Gleichung ist genau dann durch Radikale auflösbar, wenn die zugehörige Galoisgruppe eine auflösbare Gruppe ist. Wenn man daher zeigt, dass die symmetrische Gruppe in n Ziffern für $n \geq 5$ nicht auflösbar ist, hat man schon viel gewonnen.

Aufgabe 19. *Semistabilität von Vektorbündeln [Andrei Okounkov]*

Sei E ein Vektorbündel auf $\mathbb{CP}^2$, das in eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^s \xrightarrow{M} \mathcal{O}(1)^{r+s} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

passt. Dann ist E genau dann semistabil (d. h. $\frac{\chi(U(n))}{\dim U} \leq \frac{\chi(E(n))}{\dim E}$ für Unterbündel U von E und große n), wenn

$$\frac{s}{r} \in \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, \frac{21}{34}, \dots\right\} \cup \left\{\alpha \mid \alpha > \frac{1}{\Phi}\right\}.$$

Aufgabe 20. *Wallsche Vermutung*

Bekanntlich gilt $f_5 = 5$. Allgemeiner gibt es für jede positive Zahl k eine positive Zahl r sodass $f_{r\mathbb{N}} \subseteq k\mathbb{N}$. Sei die kleinste solche Zahl $r(k)$. Beweise oder widerlege: Für Primzahlen p gilt $r(p^\ell) = p^{\ell-1}r(p)$. Insbesondere ist f_{5^ℓ} stets durch 5 teilbar.

Aufgabe 21. *Minimalflächen in der dreidimensionalen Sphäre*

Sei M eine kompakte, orientierbare Minimalfläche in der dreidimensionalen Einheitssphäre $S^3(1)$. Der Jacobi-Operator der zweiten Variation ist gegeben durch $L = \Delta + |\sigma^2| + 2$, wobei σ die zweite Fundamentalform von M und Δ der Laplace-Operator der induzierten Metrik ist. Der Index von M, $\mathrm{ind}(M)$, is definiert als die Anzahl negativer Eigenwerte von L.

Sei M weiter nicht total geodätische Minimalfläche in $S^3(1)$. Was ist eine untere Schranke für $\mathrm{ind}(M)$ und für welche Minimalflächen wird diese angenommen?