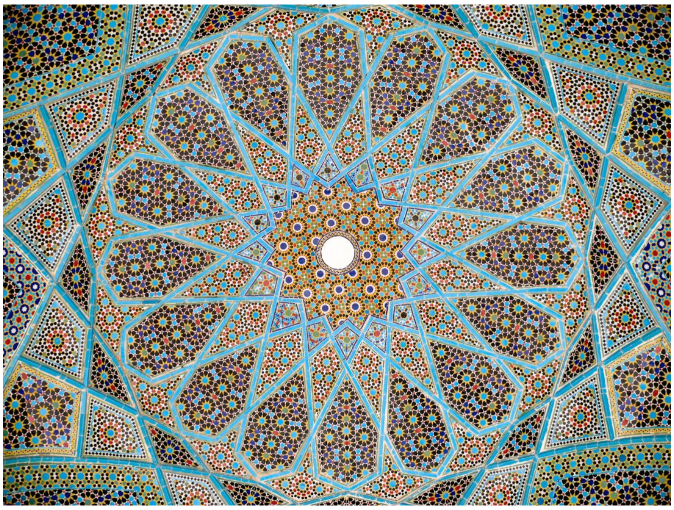
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
Ingo Blechschmidt

Pizza seminar in mathematics
The secret of the number 5



Tomb of Hafez (Iran); photo by Pentocelo (CC-licensed)

The *sequence of Fibonacci numbers* begins with

$$f_0 := 1, \quad f_1 := 1, \quad f_2 := 2, \quad f_3 := 3, \quad f_4 := 5, \quad f_5 := 8.$$

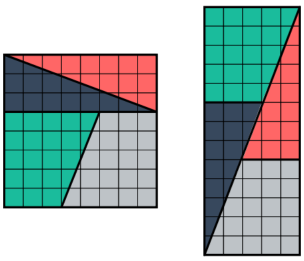
So for $n \geq 1$ it holds that $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. The *golden ratio* is the number $\Phi := (1+\sqrt{5})/2$.

Exercise 1. *One box disappears!*

The two figures below are obviously made up from the same pieces. But they have different area!

a) What happened?

b) What's the relation with approximation by truncated continued fractions? Which number (which is very much related to the golden ratio) is relevant?

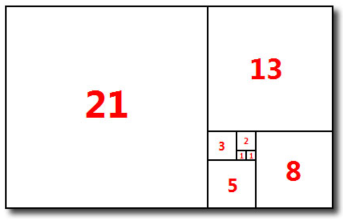


Exercise 2. *Squares of Fibonacci numbers*

There is the identity $f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

a) Proof this by induction.

b) Argue that the following sketch also proves the assertion.



Exercise 3. *About Fibonacci numbers and rectangles*

Let a row of n squares be given, forming a $(1 \times n)$-rectangle. We want to cover this rectangle by minominos, that is (1×1)-rectangles, and by dominos, that is (1×2)-rectangles.

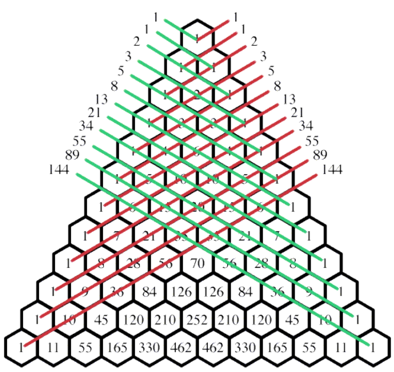
Show that the number of possible such coverings is f_n.

Exercise 4. *A very naive algorithm for computing Fibonacci numbers*

A very naive method for calculating the n-th Fibonacci number is to calculate its two predecessors and then sum them. How many computational steps are necessary if you *don't* store intermediate results and therefore recalculate lots of numbers? Why is the result of this exercise funny?

Exercise 5. *Fibonacci-Zahlen im Pascalschen Dreieck*

The Fibonacci numbers show up in Pascal's triangle. Prove that.



Exercise 6. *A lemma about golden triangles*

a) Show: In an isosceles triangle with internal angles 72°, 36°, and 72° the two long sides divide the base in the golden ratio.

b) Prove the following pentagon-decagon-hexagon identity: Let a regular pentagon, a regular decagon, and a regular hexagon be inscribed in a circle. Then for the side lengths P, D, and H the identity $P^2 = D^2 + H^2$ holds.

Exercise 7. *Icosahedron and dodecahedron*

Let a regular dodecahedron be inscribed in a regular icosahedron (midpoints of faces on vertices). Show that the ratio of the edge lengths of those two objects is $3 : \Phi$.

Exercise 8. *Continued fraction expansion of the golden ratio*

a) Show: $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$. You earn valuable bonus points if you manage to verify this identity by using the geometric definition of the golden ratio: the total length of the segment is to the larger subsegment as the larger subsegment is to the smaller subsegment.

b) Conclude:
$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

c) Prove: The sucessive approximations to the golden ratio obtained by truncating the continued fraction expansion are of the form f_{n+1}/f_n.

Exercise 9. *Derivative vs. inverse*

Find a bijective and differentiable function $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ whose derivative equals its inverse.

Tipp: Have a go with the ansatz $x \mapsto x^a$.

Exercise 10. *Examples for continued fraction expansions*

a) Verify that $\sqrt{2} = [1; 2, 2, \ldots]$.

b) Verify that $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$.

c) What's the continued fraction expansion of $\sqrt{5}$?

d) Convince yourself of the triviality of the following statement: Any real number is the solution of some quadratic equation.

e) Prove: Every number whose continued fraction expansion is periodic is solution of some quadratic equation *with rational coefficients.*

Exercise 11. *Continued fraction expansion and the Euclidean algorithm*

Let x be a nonnegative real number. Assume that the Euclidean algorithm produces the following equations:

$$\begin{aligned} x &= a_0 \cdot 1 \ \ + r_0 \\ 1 &= a_1 \cdot r_0 + r_1 \\ r_0 &= a_2 \cdot r_1 + r_2 \\ r_1 &= a_3 \cdot r_2 + r_3 \\ r_2 &= a_4 \cdot r_3 + r_4 \end{aligned}$$

And so on. The numbers a_n are nonnegative integers and the residues r_n are smaller than the second factor of the respective adjacent product. Prove:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Exercise 12. *The discovery of irrationality*

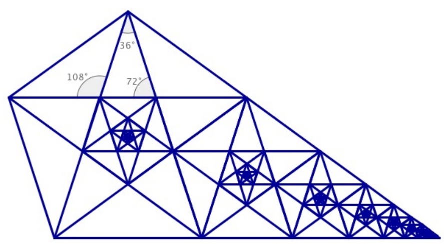
Als Entdecker der Irrationalität gilt der griechische Mathematiker Hippasos von Metapont. Er erkannte, dass der *goldene Schnitt* irrational ist. Damit erschütterte er die Schule der Pythagoreer, denn diese waren von dem Kredo *Alles ist Zahl* überzeugt, wobei sie mit ”‘Zahl”’ *rationale Zahl* meinten. Ironischerweise kam der goldene Schnitt auch noch im Erkennungszeichen der Pythagoreer vor, dem Pentagramm. In dieser Aufgabe möchten wir uns auf Metaponts Spuren begeben.

a) Sei x eine rationale Zahl. Zeige, dass die Anwendung des euklidischen Algorithmus auf x (wie in der vorherigen Aufgabe beschrieben) *terminiert*, das heißt nach einer gewissen endlichen Anzahl von Schritten den Rest Null liefert.

b) Folgere: Die Kettenbruchentwicklung einer rationalen Zahl ist stets endlich.

c) Verwende folgende Figur, um rein geometrisch einzusehen, dass der euklidische Algorithmus beim goldenen Schnitt als Startwert *nicht* terminiert. Somit ist der goldene Schnitt irrational.

d) Halte die Augen offen, wann das Buch *Sternstunden der Mathematik* von Jost-Hinrich Eschenburg erscheint, das diese Station der Geschichte und viele weitere genauer beleuchtet. Der Vorentwurf steht im Digicampus. Es wird ein rundum schönes Buch!



Exercise 13. *Zahlentheoretische Irrationalitätsbeweise*

a) Zeige, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, in dem du die Annahme, es gäbe ganze Zahlen a und b mit $\sqrt{2} = a/b$, zu einem Widerspruch führst. Bonuspunkte gibt es, wenn du in deinem Beweis nicht ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen musst, dass der Bruch a/b vollständig gekürzt ist.

b) Zeige nach demselben Muster, dass Φ irrational ist. Nutze die Identität $\Phi = 1+1/\Phi$.

Exercise* 14. *Rekursionsformel für die Kettenbruchapproximationen*

Sei ein unendlicher Kettenbruch der Form

$$[c_0; c_1, c_2, \ldots] = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

gegeben. Wenn man diesen sukzessive abschneidet, erhält man die Approximationen

$$c_0, \qquad c_0 + \frac{1}{c_1} = \frac{c_0c_1+1}{c_1}, \qquad c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2}} = \frac{c_0c_1c_2 + c_0 + c_2}{c_1c_2+1}$$

und so weiter. Wir definieren rekursiv Folgen $A_{-1}, A_0, \ldots$ und $B_{-1}, B_0, \ldots$:

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 1 & B_{-1} &= 0 \\ A_0 &= c_0 & B_0 &= 1 \\ A_{n+1} &= c_{n+1}A_n + A_{n-1} & B_{n+1} &= c_{n+1}B_n + B_{n-1} \end{aligned}$$

Zeige für alle $n \geq 0$: Der Bruch, der sich durch Abschneidung nach Stelle n ergibt, ist A_n/B_n.

Tipp: Versuche einen Induktionsbeweis. Verwende im Induktionsschritt die zentrale Einsicht, dass der Kettenbruch $[c_0; c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}]$ gleich dem um ein Glied kürzeren Kettenbruch $[c_0; c_1, \ldots, c_n + 1/c_{n+1}]$ ist.

Exercise 15. *Unkürzbarkeit der Kettenbruchapproximationen*

Wie in Aufgabe 14 schreiben wir "'A_n/B_n"' für den Bruch, der sich ergibt, wenn man die Kettenbruchentwicklung einer gegebenen Zahl abschneidet. In dieser Aufgabe möchten wir zeigen, dass dieser Bruch stets schon gekürzt ist.

a) Seien a und b zwei ganze Zahlen. Wieso sind a und b zueinander teilerfremd, wenn es weitere ganze Zahlen p und q mit $1 = pa + qb$ gibt?

b) Zeige für alle $n \geq 0$: $A_{n+1}B_n - B_{n+1}A_n = (-1)^n$.

c) Ziehe das Fazit.

Exercise* 16. *Conways Armee*

Ein unendlich ausgedehntes Damebrett sei in zwei Hälften zerteilt. Im unteren Teil darf man beliebig viele Damesteine platzieren. Ziel des Spiels ist es, einen Damestein möglichst hoch in das obere Spielfeld zu bringen. Dabei darf nur folgender Spielzug angewendet werden: Ein Stein darf einen (horizontal oder vertikal) benachbarten Stein überspringen, wenn das Zielfeld unbesetzt ist. Der übersprungene Stein wird dann aus dem Spiel entfernt.

a) Überzeuge dich davon, dass man, um Höhe 1, 2, 3 bzw. 4 über der Trennlinie zu erreichen, mit 2, 4, 8 bzw. ~~16~~ 20 Steinen beginnen muss.

b) Zeige, dass Höhe 5 mit keiner endlichen Anzahl von Steinen erreichbar ist.

   Tipp: Hier muss man auf geeignete Art und Weise eine von der Feldbesetzung abhängige Größe definieren, die bei jedem Zug abnimmt. Man könnte diese Größe zum Beispiel *Energie* nennen. Dann kann man nachrechnen: Die Energie von beliebig vielen Spielsteinen in der unteren Bretthälfte ist kleiner als die Energie von auch nur einem einzigen Stein in Höhe 5. Eine mögliche Definition für die Energie, die diese Anforderungen erfüllt, besteht darin, für jeden vorhandenen Spielstein die Zahl $(1/\Phi)^d$ aufzusummieren, wobei d die *Manhattan-Entfernung* des Spielsteins zu einem beliebig ausgemachten Ursprungsstein ist. Details findest du im Internet.

Exercise* 17. *Verschoben aufsummierte Fibonacci-Zahlen*

In dieser Aufgabe betrachten wir die "'verschoben aufgeschriebenen"' Fibonacci-Zahlen:

$$\begin{array}{l} 0{,}1 \\ 0{,}01 \\ 0{,}002 \\ 0{,}0003 \\ 0{,}00005 \\ 0{,}000008 \\ 0{,}0000013 \end{array}$$

Setzt man dieses Muster fort und summiert über alle Zeilen, so erhält man als Summe exakt den Wert 10/89. Wieso?

Tipp: Informierere dich über *erzeugende Funktionen*, zum Beispiel in dem tollen Buch *Generatingfunctionology* von Herbert Wilf (auf der Seite des Autors zu finden).

Exercise* 18. *Eine Zahl mit besonderer Dezimalbruchentwicklung*

Es gilt:

$$\frac{1}{998999} = 0{,}000\,001\,001\,002\,003\,005\,008\,013\,021\ldots.$$

a) Was ist daran besonders?

b) Inwiefern setzt sich das Muster auch nach 987 fort?

c) Erkläre das Phänomen.

Exercise 19. *Spiel und Spaß mit den 10-adischen Zahlen*

Bei den gewöhnlichen reellen Zahlen stehen in ihrer Dezimalschreibweise vor dem Komma nur endlich viele Ziffern, hinter dem Komma aber gelegentlich unendlich viele Ziffern. Bei den 10-adischen Zahlen ist es genau umgekehrt: Vor dem Komma dürfen unendlich viele Ziffern stehen, hinter dem Komma dagegen nur endlich viele. Die Rechenverfahren zur Addition, Subtraktion und Multiplikation, wie man sie aus der Schule kennt, funktionieren weitestgehend unverändert. Die Division wird etwas komplizierter.

a) Vollziehe folgende Rechnung nach: $\ldots 13562 + \ldots 90081 = \ldots 03643$.

b) Was ist $\ldots 99999 + 1$? Dabei ist $1 = \ldots 00001$.

c) Was ist -123?

d) Finde eine 10-adische Zahl x – weder Null noch Eins – mit $x^2 = x$.

e) Überlege dir (oder schlage nach), wie in den 10-adischen Zahlen die Division funktioniert. Die Division durch 3, 7, 9 und alle weiteren zu 10 teilerfremden ganzen Zahlen geht übrigens *stets ohne Komma auf.*

f) Gibt es in den 10-adischen Zahlen eine Zahl x mit der Eigenschaft $x = 1 + 1/x$, oder äquivalent $x^2 = x + 1$?

g) Wie sieht es in den 11-adischen Zahlen aus? (Schwer ohne umfangreiche Tipps.)

Bemerkung: Die Gleichung in Teilaufgabe d) kann man zu $x \cdot (x - 1) = 0$ umstellen. In den 10-adischen Zahlen kann also ein Produkt Null sein, ohne dass einer der Faktoren Null ist. Wegen dieser schlechten Eigenschaft werden die 10-adischen Zahlen kaum verwendet. *Allerdings:* Verwendet man als Basis nicht 10, sondern eine Primzahl, so gibt es dieses Problem nicht. Die 2-adischen Zahlen werden gelegentlich in der Informatik und die p-adischen Zahlen, wobei p irgendeine Primzahl ist, überall in der Zahlentheorie verwendet. Dort gibt es beispielsweise folgendes mächtiges "'lokal-zu-global"' Prinzip: Eine Gleichung einer bestimmten Art hat genau dann eine Lösung in $\mathbb{Z}$, wenn sie eine Lösung in $\mathbb{R}$ und jeweils eine Lösung in allen p-adischen Zahlen hat.

Exercise 20. *Pi auswendig lernen*

Die Nachkommaziffern von Pi sind nichts Kanonisches: Sie hängen von der unkanonischen Wahl der Basis Zehn unseres Stellenwertsystems ab. Besser ist, die Kettenbruchentwicklung von Pi auswendig zu lernen. Sofern man die Koeffizienten als Abstrakta begreift, ist das kanonisch. Die ersten Koeffizienten lauten:

3 7 15 1 292 1 1 1 2 1 3 1 14 2 1 1 2 2 2 2 1 84 2 1 1 15 3 13 1 4 2 6 6 99 1 2 2 6 3 5 1 1 6 8 1 7 1 2 3 7 1 2 1 1 12
1 1 1 3 1 1 8 1 1 2 1 6 1 1 5 2 2 3 1 2 4 4 16 1 161 45 1 22 1 2 2 1 4 1 2 24 1 2 1 3 1 2 1 1 10 2 5 4 1 2 2 8 1 5 2 2
26 1 4 1 1 8 2 42 2 1 7 3 3 1 1 7 2 4 9 7 2 3 1 57 1 18 1 9 19 1 2 18 1 3 7 30 1 1 1 3 3 3 1 2 8 1 1 2 1 15 1 2 13 1 2 1
4 1 12 1 1 3 3 28 1 10 3 2 20 1 1 1 1 4 1 1 1 5 3 2 1 6 1 4 1 120 2 1 1 3 1 23 1 15 1 3 7 1 16 1 2 1 21 2 1 1 2 9 1 6
4 127 14 5 1 3 13 7 9 1 1 1 1 1 5 4 1 1 3 1 1 29 3 1 1 2 2 1 3 1 1 1 3 1 1 10 3 1 3 1 2 1 12 1 4 1 1 1 1 7 1 1 2 1 11