Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt zur Vorlesung
Geheimnis der Zahl 5

Aufgabe 1. *Irrationalste Zahl*

Formuliere präzise und beweise: Der goldene Schnitt ist die irrationalste Zahl.

Tipp: Kettenbruchentwicklung.

Aufgabe 2. *Ableitung vs. Umkehrfunktion*

Finde eine bijektive differenzierbare Funktion $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, deren Ableitung gleich ihrer Umkehrfunktion ist.

Aufgabe 3. *Conways Armee*

Ein unendlich ausgedehntes Damebrett sei in zwei Hälften zerteilt. Im unteren Teil darf man beliebig viele Damesteine platzieren. Ziel des Spiels ist es, einen Damestein möglichst hoch in das obere Spielfeld zu bringen. Dabei darf nur folgender Spielzug angewendet werden: Ein Stein darf einen (horizontal oder vertikal) benachbarten Stein überspringen, wenn das Zielfeld unbesetzt ist. Der übersprungene Stein wird dann aus dem Spiel entfernt.

a) Überzeuge dich davon, dass man, um Höhe 1, 2, 3 bzw. 4 über der Trennlinie zu erreichen, mit 2, 4, 8 bzw. ~~16~~ 20 Steinen beginnen muss.

b) Zeige, dass Höhe 5 mit keiner endlichen Anzahl von Steinen erreichbar ist.

   Tipp: Weise den Spielsteinen eine von der Manhattan-Entfernung zum angepeilten Zielstein abhängige Bewertung zu.

Aufgabe 4. *Auflösbarkeit quintischer Gleichungen*

Zeige, dass Gleichungen vom Grad 5 und höher im Allgemeinen nicht durch Radikale auflösbar sind.

Tipp: Eine Gleichung ist genau dann durch Radikale auflösbar, wenn die zugehörige Galoisgruppe eine auflösbare Gruppe ist. Wenn man daher zeigt, dass die symmetrischen Gruppe in n Ziffern für $n \geq 5$ nicht auflösbar ist, hat man schon mal viel gewonnen.

Aufgabe 5. *Eine Zahl mit besonderer Dezimalbruchentwicklung*

Es gilt:

$$\frac{1}{998999} = 0{,}000\,001\,001\,002\,003\,005\,008\,013\,021\ldots.$$

a) Was ist daran besonders?

b) Inwiefern setzt sich das Muster auch nach 987 fort?

c) Erkläre das Phänomen.

Noch zu TeXen:

- Ein Kästchen verschwindet. Grafik etwa von `http://projects.haskell.org/diagrams/gallery/Paradox.html`.
- Grenzwert aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen.
- Willmore-Satz, wissen Kathrin und Meru.

- http://ncatlab.org/nlab/show/pentagon+decagon+hexagon+identity, eine klassische Identität aus der Geometrie
- http://math.ucr.edu/home/baez/six.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Wythoff%27s_game
- In der Informatik gibt es etwa Fibonacci-Heaps. Diese haben besonders gute Eigenschaften.
- Beweise: $\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$ graphisch, und zwar mit der Skizze aus http://math.stackexchange.com/questions/733754/visually-stunning-math-concepts-which-are-easy-to

Bis Ende des Sommersemesters zu erledigen:

- Tolles Layout überlegen: Je zwei Seitenlängen müssen im goldenen Schnitt zueinander stehen. Das jetzige Layout ist fast ungeändert von seinen eigenen Übungsblättern übernommen.
- Viele weitere kanonische und unkanonische Aufgaben finden.
- Darauf achten, dass die Gesamtzahl von Aufgaben eine Fibonacci-Zahl ist.