# Pizzaseminar zur Kategorientheorie

7. März 2013

*Warnung:* Die vielen Beispiele, Erklärungen und Hintergründe fehlen bislang.

## Inhaltsverzeichnis


**1 Was sollen Kategorien? 1**

**2 Produkte und Koprodukte 3**


## 1 Was sollen Kategorien? **Ingo Blechschmidt**

**Definition 1.** Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus

a) einer Klasse von *Objekten* $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$,

b) zu je zwei Objekten $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ einer Klasse $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ von *Morphismen* zwischen ihnen und

c) einer Kompositionsvorschrift:

$$\begin{array}{rlcrl} \text{zu} & f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \qquad & \text{zu} & f : X \to Y \\ \text{und} & g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) & & \text{und} & g : Y \to Z \\ \text{habe} & g \circ f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z), & & \text{habe} & g \circ f : X \to Z, \end{array}$$

sodass

a) die Komposition $\circ$ assoziativ ist und

b) es zu jedem $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ einen *Identitätsmorphismus* $\mathrm{id}_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ mit

$$f \circ \mathrm{id}_X = f, \quad \mathrm{id}_X \circ g = g$$

für alle Morphismen $f, g$ gibt.

**Motto 2** (fundamental)**.** *Kategorientheorie stellt* Beziehungen zwischen Objekten *statt etwaiger innerer Struktur in den Vordergrund.*

**Definition 3.** Ein Objekt $X$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *initial*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\colon \exists! f : X \to Y.$$
- *terminal*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\colon \exists! f : Y \to X.$$

**Beispiel 4.** a) In der Kategorie der Mengen ist genau die leere Menge initial und genau jede einelementige Menge terminal.

b) In der Kategorie der $K$-Vektorräume ist der Nullvektorraum $K^0$ initial und terminal.

**Definition 5.** Ein Morphismus $f : X \to Y$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *Monomorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $p, q : A \to X$ gilt:
$$f \circ p = f \circ q \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$
- *Epimorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $p, q : Y \to A$ gilt:
$$p \circ f = q \circ f \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$

**Beispiel 6.** a) In den Kategorien der Mengen, Gruppen und $K$-Vektorräumen sind die Monomorphismen genau die injektiven und die Epimorphismen genau die surjektiven Abbildungen. Das ist jeweils eine interessante Erkenntnis über die Struktur dieser Kategorien und nicht ganz leicht zu zeigen.

b) In der Kategorie der metrischen Räume mit stetigen Abbildungen gibt es Epimorphismen, die nicht surjektiv sind: nämlich alle stetigen Abbildungen mit dichtem Bild.

**Definition 7.** Ein *Isomorphismus* $f : X \to Y$ in einer Kategorie ist ein Morphismus, zu dem es einen Morphismus $g : Y \to X$ mit
$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$
gibt. Statt „$g$" schreibt man auch „$f^{-1}$". Existiert zwischen Objekten $X$ und $Y$ ein Isomorphismus, so heißen die Objekte *zueinander isomorph*: $X \cong Y$.

**Definition 8.** Die zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ zugehörige *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist folgende:
$$\operatorname{Ob}\mathcal{C}^{\mathrm{op}} := \operatorname{Ob}\mathcal{C}$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

**Beispiel 9.** a) Ein initiales Objekt in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist ein terminales Objekt in $\mathcal{C}$ und umgekehrt.

b) Ein Epimorphismus in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$ und umgekehrt.

c) Zwei Objekte sind genau dann in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ zueinander isomorph, wenn sie es in $\mathcal{C}$ sind.

## 2 Produkte und Koprodukte

**Matthias Hutzler**

**Definition 10.** Seien $X$, $Y$ Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$. Dann besteht ein *Produkt* von $X$ und $Y$ aus

a) einem Objekt $P \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und

b) Morphismen $\pi_X : P \to X$, $\pi_Y : P \to Y$,

sodass für jedes andere *Möchtegern-Produkt*, also

a) jedem Objekt $\widetilde{P} \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ zusammen mit

b) Morphismen $\widetilde{\pi}_X : \widetilde{P} \to X$, $\widetilde{\pi}_Y : \widetilde{P} \to Y$

genau ein Morphismus $\psi : \widetilde{P} \to P$ existiert, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& \widetilde{P} \arrow[dl, "\widetilde{\pi}_X"'] \arrow[dr, "\widetilde{\pi}_Y"] \arrow[dd, dashed, "\psi"'] & \\
X & & Y \\
& P \arrow[ul, "\pi_X"] \arrow[ur, "\pi_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutieren lässt, also die Gleichungen

$$\pi_X \circ \psi = \widetilde{\pi}_X$$
$$\pi_Y \circ \psi = \widetilde{\pi}_Y$$

erfüllt.

**Motto 11.** *Ein Produkt ist ein bestes Möchtegern-Produkt.*

Analog definiert man das Produkt von $n$ Objekten, $n \geq 0$; und dual definiert man das Koprodukt.

**Beispiel 12.** a) Das Produkt in der Kategorie der Mengen ist durch das kartesische Produkt gegeben.

b) Das Produkt in der Kategorie der Gruppen ist durch das direkte Produkt mit der komponentenweisen Verknüpfung gegeben.

c) Das Produkt in der von einer Quasiordnung induzierten Kategorie ist durch das Infimum gegeben, siehe Aufgabe 3 von Übungsblatt 2.

**Proposition 13.** *Die Objektteile je zweier Produkte von Objekten $X$, $Y$ sind zueinander isomorph.*

*Bemerkung* 14. Es gilt sogar noch mehr, siehe Aufgabe 2 von Übungsblatt 2.

**Proposition 15.** *Die Angabe eines Produkts von $X$ und $Y$ ist gleichwertig mit der Angabe eines Produkts von $Y$ und $X$.*

**Proposition 16.** *Die Angabe eines Produkts von null vielen Objekten ist gleichwertig mit der Angabe eines terminalen Objekts.*