

Pizzaseminar 2. Übungsblatt

Aufgabe 1. Doppelnegationsübersetzung

Beweise die fundamentalen Eigenschaften der Doppelnegationsübersetzung, jeweils für alle Aussagen φ und ψ in beliebigen Kontexten \vec{x} .

- a) Klassisch gilt: $\varphi \iff \varphi^\circ$.
- b) Intuitionistisch gilt: $\neg\neg\varphi^\circ \implies \varphi^\circ$.
- c) Wenn $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$ klassisch, dann $\varphi^\circ \vdash_{\vec{x}} \psi^\circ$ intuitionistisch.

Bemerkung: Du kannst sogar zeigen, dass $\varphi^\circ \vdash_{\vec{x}} \psi^\circ$ in *minimaler Logik* gilt, das ist intuitionistische Logik ohne das Prinzip *ex falso quodlibet* ($\perp \vdash_{\vec{x}} \chi$).

Aufgabe 2. Beweisbäume

Finde für folgende Sequenzen formale Ableitungsbäume:

- a) $(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash_{\vec{x}} ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$
- b) $(\exists y : Y : \varphi) \vdash_{\vec{x}, z} \varphi[z/y]$
- c) $(x = y) \vdash_{x, y} (y = x)$

Aufgabe 3. Minimumsprinzip

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge natürlicher Zahlen. Wir wollen die Aussage

$$A := \exists n : \mathbb{N} : \forall m : \mathbb{N} : a_n \leq a_m$$

betrachten, die besagt, dass die Folge ein Minimum annimmt.

- a) Zeige konstruktiv, dass $\neg\neg A$.
- b) Formuliere deinen Beweis als Streitgespräch für $\neg\neg A$ (ohne Zeitsprünge).
- c) Formulieren deinen Beweis als Streitgespräch für A (notwendigermaßen mit Zeitsprüngen).
- d) Welcher Algorithmus zur Minimumssuche ist in deinem Beweis versteckt?

Bemerkung: Man kann nicht erwarten, konstruktiv A zeigen zu können. Die Aussage, dass das für alle Folgen doch ginge, ist übrigens ein klassisches Prinzip, das aus dem Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten folgt, aber echt schwächer ist.