Universität Augsburg
3. April 2013

Pizzaseminar zur Kategorientheorie
6. Übungsblatt

Aufgabe 1. *Das Yoneda-Lemma*

Sei $\mathcal{C}$ eine lokal kleine Kategorie und $\widehat{\mathcal{C}} := \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$ ihre Prägarbenkategorie. Wir wollen in mehreren Schritten das *Yoneda-Lemma* beweisen, demnach wir eine in $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $F \in \widehat{\mathcal{C}}$ natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X), F) \cong F(X) \tag{1}$$

haben. Mit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X)$ ist der kontravariante Hom-Funktor zu X bezeichnet, den wir auch $\widehat{X}$ geschrieben haben.

a) Zeige, dass eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Hom}(\_, X) \Rightarrow F$ durch ihren Wert $s := \eta_X(\mathrm{id}_X) \in F(X)$ bereits eindeutig festgelegt ist, und zwar über die Formel

$$\eta_Y(f) = F(f)(s) \tag{2}$$

für alle Objekte Y und Morphismen $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

b) Zeige, dass umgekehrt für beliebiges $s \in F(X)$ die Formel (2) eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Hom}(\_, X) \Rightarrow F$ definiert.

c) Zeige mit a) und b), dass zumindest für festes $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $F \in \widehat{\mathcal{C}}$ eine Bijektion (1) existiert.

d) Linke und rechte Seite von (1) können als Auswertungen der Funktoren

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C} \times \widehat{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathrm{Set}, \quad (X, F) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X), F) \\ R : \mathcal{C} \times \widehat{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathrm{Set}, \quad (X, F) \longmapsto F(X) \end{aligned}$$

an der Stelle (X, F) angesehen werden. Überlege, wie diese beiden Funktoren auf Morphismen wirken, und zeige, dass sie zueinander isomorph sind.

e) Du hast soeben das Yoneda-Lemma bewiesen. Herzlichen Glückwunsch!