Pizzaseminar zur Kategorientheorie

10. April 2013

in Entstehung befindlich

TeXer: Tim Baumann, Ingo Blechschmidt, Justin Gassner, Lukas Graf,
Maximilian Huber, Matthias Hutzler

Inhaltsverzeichnis

1 Was sollen Kategorien? Ingo Blechschmidt

1.1 Beispiele für kategorielles Verständnis

Beispiel: Produkte

Von manchen Konstruktionen in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik wird man das Gefühl nicht los, dass sie einem gemeinsamen Ursprung entstammen: Etwa kennt man...

- das kartesische Produkt von Mengen: $X \times Y$,
- das kartesische Produkt von Vektorräumen: $V \times W$,
- das kartesische Produkt von Gruppen: $G \times H$,
- das kartesische Produkt von Garben: $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$,
- das kartesische Produkt von Vektorbündeln: $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$,
- das Minimum von Zahlen: $\min\{n, m\}$,
- den größten gemeinsamen Teiler von Zahlen: $\mathrm{ggT}(n, m)$,
- den Paartyp in Programmiersprachen: `(a,b)`,
- den Produktautomat zweier endlicher Automaten,
- den Mutterknoten zweier Knoten in einem Graph.

Die Ähnlichkeit untereinander ist mal mehr, mal weniger deutlich. Nur mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Produkts.* Ferner erfüllen all diese Konstruktionen sehr ähnliche Gesetze, etwa gilt

$$\begin{aligned} X \times (Y \times Z) &\cong (X \times Y) \times Z, \\ U \times (V \times W) &\cong (U \times V) \times W, \\ \min\{m, \min\{n, p\}\} &= \min\{\min\{m, n\}, p\}, \\ \mathrm{ggT}(m, \mathrm{ggT}(n, p)) &= \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(m, n), p), \end{aligned}$$

wobei in der ersten Zeile X, Y und Z Mengen sein und das Isomorphiezeichen für Gleichmächtigkeit stehen soll und in der zweiten Zeile U, V und W Vektorräume sein und das Isomorphiezeichen für Vektorraumisomorphie stehen soll. Mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle der allgemeinen Assoziativität des kategoriellen Produkts.

Beispiel: Isomorphie

Ferner fällt auf, dass in vielen Teilgebieten der Mathematik jeweils ein speziell zugeschnittener Isomorphiebegriff vorkommt: Etwa können...

- zwei Mengen X, Y gleichmächtig sein,
- zwei Vektorräume V, W isomorph sein,
- zwei Gruppen G, H isomorph sein,
- zwei top. Räume X, Y homöomorph sein,
- zwei Zahlen n, m gleich sein,
- zwei endliche Automaten isomorph sein,
- zwei Typen `a`, `b` sich verlustfrei ineinander umwandeln lassen.

All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Isomorphiekonzepts.*

Beispiel: Dualität

Von folgenden Konzepten hat man im Gefühl, dass sie in einem gewissen Sinn *zueinander dual* sein sollten:

$f \circ g$	$g \circ f$
$\leq$	$\geq$
injektiv	surjektiv
$\{\star\}$	$\emptyset$
$\times$	$\amalg$
ggT	kgV
$\cap$	$\cup$
Teilmenge	Faktormenge

Mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle eines allgemeinen *kategoriellen Dualitätsprinzips* – und diese Erkenntnis kann man nutzen, um Ergebnisse für jeweils eines der Konzepte auf sein duales Gegenstück zu übertragen.

1.2 Grundlagen

Definition 1.1. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus

a) einer Klasse von *Objekten* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,

b) zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ einer Klasse $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von *Morphismen* zwischen ihnen und

c) einer Kompositionsvorschrift:

$$\begin{array}{rl} \text{zu} & f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \\ \text{und} & g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \\ \text{habe} & g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z), \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{zu} & f : X \to Y \\ \text{und} & g : Y \to Z \\ \text{habe} & g \circ f : X \to Z, \end{array}$$

sodass

a) die Komposition $\circ$ assoziativ ist und

b) es zu jedem $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ einen *Identitätsmorphismus* $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ mit

$$f \circ \mathrm{id}_X = f, \quad \mathrm{id}_X \circ g = g$$

für alle Morphismen f, g gibt.

Die Morphismen von Kategorien müssen nicht unbedingt Abbildungen sein, die Schreibweise „$f : X \to Y$“ missbraucht also Notation. Die genaue Bedeutung von *Klassen* im Gegensatz zu *Mengen* hängt von der persönlich gewählten logischen Fundierung der Mathematik ab. Für uns genügt folgende naive Sichtweise: Klassen können (im Gegensatz zu Mengen) beliebige mathematische Objekte enthalten, sind aber selbst nicht mathematische Objekte. Daher gibt es etwa widerspruchsfrei die Klasse aller Mengen, von einer Klasse aller Klassen kann man aber nicht sprechen.

Beispiel 1.2. a) Archetypisches Beispiel ist Set, die Kategorie der Mengen und Abbildungen:

$$\operatorname{Ob}\mathrm{Set} := \{M \mid M \text{ ist eine Menge}\}$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ ist eine Abbildung}\}$$

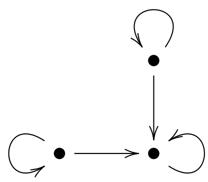
b) Die meisten Teilgebiete der Mathematik studieren jeweils eine bestimmte Kategorie: Gruppentheoretiker beschäftigen sich etwa mit der Kategorie Grp der Gruppen und Gruppenhomomorphismen:

$$\operatorname{Ob}\mathrm{Grp} := \text{Klasse aller Gruppen}$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G, H) := \{f : G \to H \mid f \text{ ist ein Gruppenhomo}\}$$

c) Es gibt aber auch wesentlich kleinere Kategorien. Etwa kann man aus jeder Quasiordnung $(P, \preceq)$ eine Kategorie $\mathcal{C}$ basteln:

$$\operatorname{Ob}\mathcal{C} := P$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) := \begin{cases} \text{einelementige Menge}, & \text{falls } x \preceq y, \\ \text{leere Menge}, & \text{sonst} \end{cases}$$

d) Auch sind gewisse endliche Kategorien bedeutsam, etwa die durch folgende Skizze gegebene:



Motto 1.3 (fundamental)**.** *Kategorientheorie stellt* Beziehungen zwischen Objekten *statt etwaiger innerer Struktur in den Vordergrund.*

Definition 1.4. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *lokal klein*, wenn ihre Hom-Klassen jeweils schon Mengen (statt echte Klassen) sind. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *klein*, wenn zusätzlich auch ihre Klasse von Objekten schon eine Menge bildet.

Initiale und terminale Objekte

In Kategorien sind folgende zwei Arten von Objekten aufgrund ihrer ausgezeichneten Beziehungen zu allen (anderen) Objekten besonders wichtig:

Definition 1.5. Ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *initial*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C} \colon \exists! f : X \to Y.$$

- *terminal*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\colon \exists! f : Y \to X.$$

Diese Definitionen geben ein erstes Beispiel für sog. *universellen Eigenschaften.*

Beispiel 1.6. a) In der Kategorie der Mengen ist genau die leere Menge initial und genau jede einelementige Menge terminal. Diese Erkenntnis ist ein erstes Beispiel dafür, wie das fundamentale Motto gemeint ist: Eine Definition der leeren bzw. einer einelementigen Menge über eine Aufzählung ihrer Elemente betont ihre innere Struktur, während eine Definition als initiales bzw. terminales Objekt die besonderen Beziehungen zu allen Mengen hervorhebt.

b) In der Kategorie der K-Vektorräume ist der Nullvektorraum K^0 initial und terminal.

Viele kategorielle Konstruktionen realisiert man als initiales oder terminales Objekt in einer geeigneten Kategorie von Möchtegern-Konstruktionen. Ein erstes Beispiel dazu werden wir im folgenden Kapitel über Produkte finden.

Mono-, Epi- und Isomorphismen

Definition 1.7. Ein Morphismus $f : X \to Y$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *Monomorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $p, q : A \to X$ gilt:
$$f \circ p = f \circ q \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$
- *Epimorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $p, q : Y \to A$ gilt:
$$p \circ f = q \circ f \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$

Beispiel 1.8. a) In den Kategorien der Mengen, Gruppen und K-Vektorräumen sind die Monomorphismen genau die injektiven und die Epimorphismen genau die surjektiven Abbildungen. Das ist jeweils eine interessante Erkenntnis über die Struktur dieser Kategorien und nicht ganz leicht zu zeigen.

b) In der Kategorie der metrischen Räume mit stetigen Abbildungen gibt es Epimorphismen, die nicht surjektiv sind: nämlich alle stetigen Abbildungen mit dichtem Bild.

Definition 1.9. Ein *Isomorphismus* $f : X \to Y$ in einer Kategorie ist ein Morphismus, zu dem es einen Morphismus $g : Y \to X$ mit
$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$
gibt. Statt „g“ schreibt man auch „f^{-1}“. Existiert zwischen Objekten X und Y ein Isomorphismus, so heißen die Objekte *zueinander isomorph*: $X \cong Y$.

Bemerkung 1.10. In den meisten Kategorien ist die Frage, ob Objekte X, Y tatsächlich gleich (statt nur isomorph) sind, keine interessante Frage: Denn für alle praktischen Belange sind schon zueinander isomorphe Objekte „gleich gut“. Diesen Gedanken werden wir noch manche Male aufgreifen und weiter entwickeln.

Die duale Kategorie

Aus jeder Kategorie $\mathcal{C}$ kann man durch „Umdrehen aller Pfeile“ eine weitere Kategorie erhalten, die sogenannte duale Kategorie von $\mathcal{C}$:

Definition 1.11. Die zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ zugehörige *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist folgende:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} &:= \operatorname{Ob} \mathcal{C} \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) &:= \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \end{aligned}$$

Das ist ein rein formaler Prozess, der mit dem Invertieren bijektiver Abbildungen nichts zu tun hat. Die duale Kategorie ist nützlich, um sich der Dualität mancher kategorieller Konzepte gewahr zu werden:

Beispiel 1.12. a) Ein initiales Objekt in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist ein terminales Objekt in $\mathcal{C}$ und umgekehrt.

b) Ein Epimorphismus in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$ und umgekehrt.

c) Zwei Objekte sind genau dann in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ zueinander isomorph, wenn sie es in $\mathcal{C}$ sind. Isomorphie ist also ein *selbstduales* Konzept.

Spannend ist es, wenn duale Kategorien durch andere, natürlich auftretende Kategorien beschrieben werden können.

2 Produkte und Koprodukte

Matthias Hutzler

Definition 2.1. Seien X, Y Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$. Dann besteht ein *Produkt* von X und Y aus

a) einem Objekt $P \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und

b) Morphismen $\pi_X : P \to X$, $\pi_Y : P \to Y$,

sodass für jedes andere *Möchtegern-Produkt*, also

a) jedem Objekt $\widetilde{P} \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ zusammen mit

b) Morphismen $\widetilde{\pi}_X : \widetilde{P} \to X$, $\widetilde{\pi}_Y : \widetilde{P} \to Y$

genau ein Morphismus $\psi : \widetilde{P} \to P$ existiert, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ X & & Y \\ & \widetilde{P} \arrow[ul, "\widetilde{\pi}_X"] \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_Y"'] \arrow[uu, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutieren lässt, also die Gleichungen

$$\pi_X \circ \psi = \widetilde{\pi}_X$$
$$\pi_Y \circ \psi = \widetilde{\pi}_Y$$

erfüllt.

Motto 2.2. *Ein Produkt ist ein bestes Möchtegern-Produkt.*

Statt „P“ schreibt man gerne „$X \times Y$“; es muss aus dem Kontext klar werden, ob das Kreuzzeichen speziell das kartesische Produkt von Mengen oder das allgemeine kategorielle Produkt bezeichnen soll. Analog definiert man das Produkt von n Objekten, $n \geq 0$, und dual definiert man das Koprodukt.

2.1 Beispiele

Beispiel 2.3. a) Das Produkt in der Kategorie der Mengen ist durch das kartesische Produkt gegeben, das Koprodukt durch die disjunkt-gemachte Vereinigung.

b) Das Produkt in der Kategorie der Gruppen ist durch das direkte Produkt mit der komponentenweisen Verknüpfung gegeben, das Koprodukt durch das sog. freie Produkt von Gruppen.

c) Produkt und Koprodukt endlich vieler Objekte in der Kategorie der K-Vektorräume sind durch die äußere direkte Summe gegeben. Produkte und Koprodukte von unendlich vielen Objekten unterscheiden sich allerdings.

d) Das Produkt in der von einer Quasiordnung induzierten Kategorie ist durch das Infimum gegeben. Dual ist das Koprodukt durchs Supremum gegeben.

Beweis. a) Wir zeigen die Aussage über das kartesische Produkt. Seien also X und Y Mengen. Dann wird das kartesische Produkt $X \times Y$ vermöge der kanonischen Projektionsabbildungen

$$\pi_X : X \times Y \to X,\ (x, y) \mapsto x$$
$$\pi_Y : X \times Y \to Y,\ (x, y) \mapsto y$$

zu einem Möchtegern-Produkt von X und Y:

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Um zu zeigen, dass dieses Möchtegern-Produkt ein tatsächliches Produkt von X und Y ist, müssen wir noch die universelle Eigenschaft nachweisen. Sei also ein Möchtegern-Produkt $(X \leftarrow \widetilde{P} \rightarrow Y)$ gegeben. Dann müssen wir nachweisen, dass es genau einen Morphismus $\psi : \widetilde{P} \to X \times Y$ gibt, der die beiden Dreiecke im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
X & & Y \\
& \widetilde{P} \arrow[ul, "\widetilde{\pi}_X"] \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_Y"'] \arrow[uu, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutieren lässt. Ausgeschreiben besagen die Kommutativitätsbedingungen, dass für alle $p \in \widetilde{P}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
(\text{erste Komponente von } \psi(p)) &= \widetilde{\pi}_X(p) \\
(\text{zweite Komponente von } \psi(p)) &= \widetilde{\pi}_Y(p)
\end{aligned}$$

gelten sollen. Es ist klar, dass diese beiden Bedingung genau durch eine Abbildung ψ erfüllt werden, nämlich durch

$$\psi : \widetilde{P} \to X \times Y,\ p \mapsto (\widetilde{\pi}_X(p), \widetilde{\pi}_Y(p)).$$

b) Der Produkt-Fall geht analog: Zusätzlich kann man jetzt voraussetzen, dass $\widetilde{\pi}_X$ und $\widetilde{\pi}_Y$ Gruppenhomomorphismen sind; im Gegenzug muss man aber nachweisen, dass die konstruierte Abbildung ψ ein Gruppenhomomorphismus wird.

c) Übungsaufgabe.

d) Siehe Übungsblatt 2, Aufgabe 3. □

2.2 Erste Eigenschaften

Proposition 2.4. *Die Objektteile je zweier Produkte von Objekten X, Y sind zueinander isomorph.*

Bemerkung 2.5. Es gilt sogar noch mehr, siehe Aufgabe 2 von Übungsblatt 2.

Proposition 2.6. *Die Angabe eines Produkts von X und Y ist gleichwertig mit der Angabe eines Produkts von Y und X.*

Proposition 2.7. *Die Angabe eines Produkts von null vielen Objekten ist gleichwertig mit der Angabe eines terminalen Objekts.*

3 Funktoren

Felicitas Hörmann

So, wie es Gruppenhomomorphismen zwischen Gruppen gibt, gibt es Funktoren zwischen Kategorien. Ihre beeindruckendste Anwendung liegt darin, dass sie zwischen unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik vermitteln können – das ist ein Grundgedanke der algebraischen Topologie. Man verwendet sie aber auch, um verschiedene Arten von Konstruktionen übersichtlich zu organisieren und einen sinnvollen Rahmen für die Frage nach „bestmöglichen“ Konstruktionen mit vorgegebenem Ziel zu haben.

Definition 3.1. Ein *Funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen Kategorien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ besteht aus

a) einer Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ein Objekt $F(X) \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ zuordnet, und

b) einer Vorschrift, die jedem Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(f) : F(X) \to F(Y)$ zuordnet,

sodass

a) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ für alle Objekte $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und

b) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle komponierbaren Morphismen g, f in $\mathcal{C}$.

Bemerkung 3.2. Quelle und Ziel der abgebildeten Morphismen $F(f)$ sind also durch den Objektteil des Funktors schon vorgegeben. Es ist nicht sinnvoll, von der Gleichheit von Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zu sprechen – denn das würde naheliegenderweise ja die Aussage umfassen, dass für alle Objekte $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ die Gleichheit

$$F(X) = G(X)$$

von Objekten in $\mathcal{D}$ gilt. Aber wie schon in Bemerkung **??** festgehalten, ist das keine sinnvolle Aussage.

Proposition 3.3. *Ein Funktor überführt kommutative Diagramme in kommutative Diagramme:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] & & F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(h)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\
& Z \arrow[r, phantom, "\overset{F}{\longmapsto}"] & {} & & F(Z)
\end{tikzcd}$$

Beweis. Gilt $h = g \circ f$, so folgt $F(h) = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. □

3.1 Funktoren als Diagramme

Es sei $\mathcal{I}$ die durch die folgende Skizze gegebene Kategorie und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie.

$$\begin{tikzcd}
& \bullet_1 \arrow[loop above] \arrow[d] \\
\bullet_2 \arrow[loop left] \arrow[r] & \bullet_3 \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

Um einen Funktor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ anzugeben, muss man

a) Objekte $X_1 = F(\bullet_1)$, $X_2 = F(\bullet_2)$ und $X_3 = F(\bullet_3)$ in $\mathcal{C}$ und

b) Morphismen $f : X_1 \to X_3$ und $g : X_2 \to X_3$ in $\mathcal{C}$

spezifizieren. Ein solcher Funktor ist also durch ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[loop above] \arrow[d, "f"] \\ X_2 \arrow[loop left] \arrow[r, "g"'] & X_3 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{C}$ gegeben. Da diese Überlegung analog mit anderen Kategorien $\mathcal{I}$ funktioniert, sehen wir folgendes Motto:

Motto 3.4. *Funktoren $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ sind $\mathcal{I}$-förmige Diagramme in $\mathcal{C}$.*

3.2 Kontravariante Funktoren

Wie kann man sich einen Funktor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ vorstellen?

a) Objekte $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} = \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ werden auf Objekte $F(X) \in \mathcal{D}$ abgebildet.

b) Morphismen $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (d. h. $f : Y \to X$ in $\mathcal{C}$) werden auf Morphismen $F(f) : F(X) \to F(Y)$ in $\mathcal{D}$ abgebildet.

Das zweite Funktoraxiom lautet für Morphismen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$

$$F(g \circ f) = F(f \bullet g) = F(f) \circ F(g),$$

wobei wir zur Verdeutlichung „$\circ$“ für die Komposition in $\mathcal{C}$ und „$\bullet$“ in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ schreiben. Die Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ X & \longmapsto & F(X) \\ f & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

ist also kein Funktor in unserem Sinne, da er Quelle und Ziel von Morphismen vertauscht und das zweite Funktoraxiom dann nur in entsprechend umgekehrter Kompositionsreihenfolge erfüllt. Solche Zuordnen sind trotzdem wichtig; sie heißen *kontravariante Funktoren*.

3.3 Beispiele für Funktoren

3.3.1 Langweilige Funktoren

a) Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es den *Identitätsfunktor*

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad X \mapsto X, \quad f \mapsto f.$$

b) Für ein festes Object $\heartsuit \in \mathcal{C}$ hat man den *konstanten Funktor*

$$F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}, \quad X \mapsto \heartsuit, \quad f \mapsto \mathrm{id}_{\heartsuit}.$$

Diese Funktoren als solche sind langweilig. Interessant sind aber natürliche Transformationen zwischen ihnen – das werden wir im folgenden Vortrag sehen.

3.3.2 Vergissfunktoren

Die bekannten Strukturen in der Mathematik organisieren sich in einer Hierarchie. Zwischen den Kategorien zu Strukturen verschiedener Stufen hat man sog. Vergissfunktoren:

a) Der Funktor

$$V : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}, \quad (G, \circ) \mapsto G, \quad f \mapsto f.$$

bildet Gruppen auf ihre zugrundeliegenden Mengen und Gruppenhomomorphismen auf ihre zugrundeliegenden Mengenabbildung ab. Er vergisst also die *Struktur* der Gruppenverknüpfung.

b) Der Funktor

$$V : \mathbb{R}\text{-Vect} \to \mathrm{AbGrp}, \quad (V, +, \cdot) \mapsto (V, +), \quad f \mapsto f.$$

vergisst ebenfalls algebraische Struktur, nämlich die Skalarmultiplikation.

c) Der Funktor

$$V : \mathrm{Man} \to \mathrm{Top}, \quad M \mapsto M,$$

die einer Mannigfaltigkeit ihren zugrundeliegenden topologischen Raum zuordnet, vergisst (differentialgeometrische) Struktur.

d) Der Funktor

$$V : \mathrm{AbGrp} \to \mathrm{Grp}, \quad (G, \circ) \mapsto (G, \circ), \quad f \mapsto f.$$

vergisst die *Eigenschaft* der Gruppenverknüpfung $\circ$, kommutativ zu sein.

e) Schreibe 1 für die Kategorie mit $\mathrm{Ob} = \{\bullet\}$ und $\mathrm{Hom}(\bullet, \bullet) = \{\mathrm{id}_\bullet\}$. Der Funktor

$$V : \mathrm{Set} \to 1, \quad M \mapsto \bullet, \quad f \mapsto \mathrm{id}_\bullet$$

vergisst *stuff*, also Zeug.

Die Unterscheidung zwischen Eigenschaft, Struktur und Zeug stammt übrigens von Teilnehmern eines Seminars über Quantengravitation [**lectures-on-n-categories**], siehe auch [**ncatlab:stuff**].

Obwohl die Vergissfunktoren beinahe tautologisch definiert sind, sind sie aus zwei Gründen wichtig: Zum einen ist es eine interessante Frage, inwieweit man die Vergissfunktoren umkehren kann – wie man etwa aus einer Menge eine Gruppe machen kann. Wie diese

Frage zu präzisieren und zu beantworten ist, werden wir im Vortrag über adjungierte Funktoren lernen.

Zum anderen ist es wichtig zu wissen, ob ein Vergissfunktor Produkte (oder allgemeinere Limiten) bewahrt. Etwa gilt für Vektorräume U, W und den Vergissfunktor $V : \mathbb{R}\text{-Vect} \to \text{Set}$, dass

$$V(U \times W) \cong V(U) \times V(W),$$

aber

$$V(U \amalg W) \ncong V(U) \amalg V(W).$$

Was das genau bedeutet, werden wir im Vortrag über Limiten sehen.

3.3.3 Funktoren aus algebraischen Konstruktionen

Zu jedem Ring R gibt es seinen Polynomring $R[X]$ der formalen Polynome mit Koeffizienten aus R,

$$R[X] = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \,\Big|\, a_0, \ldots, a_n \in R, n \geq 0 \Big\}.$$

Diese Konstruktion kann man zu einem Funktor erheben, den sog. *Polynomringfunktor* $F : \text{Ring} \to \text{Ring}$: Dieser ordnet einem Ring R den Polynomring $R[X]$ und einem Ringhomomorphismus $f : R \to S$ folgenden induzierten Ringhomomorphismus zu:

$$F(f) : R[X] \to S[X], \quad \sum a_n X^n \mapsto \sum f(a_n) X^n.$$

Bemerkung 3.5. Algebraiker kann man daran erkennen, dass sie im Gegensatz zu Analytikern die Polynomvariable groß schreiben.

Fast jede algebraische Konstruktion kann man auf diese Art und Weise behandeln.

3.3.4 Funktoren und Mengen

Zu jeder Menge M gibt es die *diskrete Kategorie DM*:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob} DM &:= M \\ \operatorname{Hom}_{DM}(m, \tilde{m}) &:= \{\mathrm{id}_m \mid m = \tilde{m}\} \end{aligned}$$

Die Angabe der Morphismenmengen ist etwas kryptisch geschrieben, ausführlich kann man die Definition auch wie folgt angeben:

$$\operatorname{Hom}_{DM}(m, \tilde{m}) := \begin{cases} \{\mathrm{id}_m\}, & \text{falls } m = \tilde{m} \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sind nun M und N zwei Mengen und $\varphi : M \to N$ eine Abbildung, so ist

$$DM \to DN, \quad m \mapsto \varphi(m), \quad \mathrm{id}_m \mapsto \mathrm{id}_{\varphi(m)}$$

ein Funktor. [Hier fehlt eine Skizze.] Somit sehen wir folgendes Motto:

Motto 3.6. *Das Funktorkonzept verallgemeinert das Konzept der Abbildung zwischen Mengen.*

Potenzmengenfunktoren

Der *kovariante Potenzmengenfunktor* $\mathcal{P} : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ ordnet einer Menge M die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ zu und einer Abbildung $f : M \to N$ die Abbildung

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N), \quad U \mapsto f[U],$$

wobei $f[U] := \{f(u) : u \in U\}$ ist.

Definiert man $\mathcal{P}(f)$ stattdessen durch $U \mapsto f[U]^c$ (Komplement), so erhält man keinen Funktor.

Außerdem gibt es noch den *kontravarianten Potenzmengenfunktor* $\mathcal{P} : \mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$, der ebenfalls jeder Menge M ihre Potenzmenge, aber jeder Abbildung $f : M \to N$ die *Urbild*abbildung

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(M), \quad V \mapsto f^{-1}[V]$$

zuordnet, wobei $f^{-1}[V] := \{x \in M \mid f(x) \in V\}$. Dieser ist sehr bedeutsam, denn er zeigt die Äquivalenz der dualen Kategorie $\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$ mit der Kategorie vollständiger atomischer boolescher Algebren, siehe [**oosten**]. Was *Äquivalenz* bedeutet, werden wir im folgenden Kapitel lernen.

3.3.5 Funktoren und Gruppen

Es sei ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ gegeben. Dann ist

$$f : BG \to BH, \quad \bullet \mapsto \bullet, \quad g \mapsto \varphi(g)$$

ein Funktor. (Zur Konstruktion der Kategorien BG und BH siehe Übungsblatt 1, Aufgabe 5.) Denn das erste Funktoraxiom ist erfüllt,

$$F(\mathrm{id}_\bullet) = F(e_G) = \varphi(e_G) = e_H = \mathrm{id}_\bullet,$$

und das zweite ebenso: Für alle Morphismen $g, \tilde{g} : \bullet \to \bullet$ (d. h. für alle Gruppenelemente $g, \tilde{g} \in G$) gilt

$$F(\tilde{g} \circ g) = F(\tilde{g} \cdot g) = \varphi(\tilde{g} \cdot g) = \varphi(\tilde{g}) \cdot \varphi(g) = \varphi(\tilde{g}) \circ \varphi(g) = F(\tilde{g}) \circ F(g).$$

Damit sehen wir folgendes Motto:

Motto 3.7. *Das Funktorkonzept verallgemeinert das Konzept des Gruppenhomomorphismus.*

Gruppenwirkungen

Was muss man angeben, um einen Funktor $F : BG \to \mathrm{Set}$ zu spezifizieren? Eine Menge $M := \varphi(\bullet)$ und zu jedem $g \in G$ eine Abbildung $\varphi_g : M \to M$, sodass

$$\varphi_{\mathrm{id}_\bullet} = \mathrm{id}_M \quad \text{und} \quad \varphi_{g \circ h} = \varphi_g \circ \varphi_h$$

für alle $g, h \in G$ gilt. Mit der Schreibweise $\varphi_g(x) =: g \cdot x$, $g \in G$, $x \in X$, wird dies zu

$$e \cdot x = x \quad \text{und} \quad (g \circ h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x).$$

Eine solche Struktur bestehend aus einer Menge M und einer Multiplikationsabbildung $G \times M \to M$, die diese Axiome erfüllt, ist eine sog. *Gruppenwirkung von G*. Wir sehen also: Funktoren $BG \to \mathrm{Set}$ sind „dasselbe" wie Gruppenwirkungen von G.

Analog kann man Funktoren $BG \to K\text{-Vect}$ untersuchen. Solche haben auch einen klassischen Namen: Das sind sog. *Gruppendarstellungen*.

3.3.6 Funktoren als Datenbanken

Wir wollen an einem Beispiel zeigen, dass auch so konkrete Dinge wie Datenbanken aus der Informatik kategoriell verstanden werden können. Etwa gibt das zugrundeliegende Datenbankschema der 0815/Datenbank aus Tafel **??** Anlass zu folgender Kategorie $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} \text{Angestellte} \arrow[loop above, "\text{Vorg.}"] \arrow[rr, "\text{Abt.}"] \arrow[d, bend right, "\text{Vorname}"'] \arrow[d, bend left, "\text{Nachname}"] & & \text{Abteilung} \arrow[dll, bend left, "\text{Titel}"] \\ \text{String} & & \end{tikzcd}$$

Die Tabelleninhalte kann man dann über einen Funktor $\mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ kodieren, der jedes Objekt (also jeden Tabellennamen) auf die Menge der Primärschlüssel ihrer Zeilen und jeden Morphismus (also jeden Spaltennamen) auf die entsprechende Abbildung zwischen den Primärschlüsseln der beteiligten Tabellen abbildet.

Gewisse einfache Integritätsbedingungen kann man über die Angabe eines geeigneten Kompositionsgesetzes in $\mathcal{C}$ kodieren. Wenn man etwa ausdrücken möchte, dass der Sekretär einer Abteilung selbst in dieser sitzt, kann man

$$\text{Abt.} \circ \text{Sekretär} = \mathrm{id}_{\text{Abteilung}} : \text{Abteilung} \to \text{Abteilung}$$

definieren. Diese Sichtweise auf Datenbanken ist unter Anderem für das Verständnis von Datenmigrierung bei Schemaänderungen hilfreich. Details hat David Spivak erforscht [**spivak1**, **spivak2**, **spivak3**].

Angestellte				
Nr.	**Vorname**	**Nachname**	**Vorg.**	**Abt.**
101	David	Hilbert	103	q10
102	Bertrand	Russel	102	x02
103	Alan	Turing	103	q10

Abteilung		
Nr.	**Titel**	**Sekretär**
q10	Vertrieb	101
x02	Produktion	102

Abbildung 1: Ein Standardbeispiel einer Datenbank.

3.3.7 Hom-Funktoren

Definition 3.8. Sei $\mathcal{C}$ eine lokal kleine Kategorie (sodass ihre Hom-Klassen sogar schon Hom-Mengen sind) und $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Dann ist...

a) der *kovariante Hom-Funktor zu* A der Funktor

$$\begin{array}{rrcl} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \_): & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ & X & \longmapsto & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \\ & (f : X \to Y) & \longmapsto & f_\star \end{array}$$

b) und der *kontravariante Hom-Funktor zu* A der Funktor

$$\begin{array}{rrcl} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, A): & \mathcal{C}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ & X & \longmapsto & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \\ & (f : X \overset{\mathcal{C}}{\to} Y) & \longmapsto & f^\star. \end{array}$$

Dabei sind die Abbildungen $f_\star, f^\star$ wie folgt definiert:

$$\begin{array}{rrcl} f_\star: & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \\ & g & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} f^\star: & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \\ & g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

Die Hom-Funktoren kodieren die Beziehungen von A mit den Objekten aus $\mathcal{C}$. Das zentrale *Yoneda-Lemma* wird uns sagen, dass A durch Kenntnis des ko- oder kontravarianten Hom-Funktors schon bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

3.3.8 Weitere Beispiele

a) Den Prozess des Differenzierens glatter Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten kann man als Funktor auffassen, der jeder Mannigfaltigkeit ihr Tangentialbündel und jeder glatter Abbildung ihr Differential zuordnet:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Man} & \longrightarrow & \mathrm{Man} \\ M & \longmapsto & TM \\ f & \longmapsto & Df \end{array}$$

Es gibt auch eine „lokale Version“, wenn man die Kategorie der *punktierten glatten Mannigfaltigkeiten* $\mathrm{Man}_\star$ betrachtet: Die Objekte dieser Kategorie sind Tupel (M, x) aus einer Mannigfaltigkeit und einem ausgezeichneten Basispunkt $x \in M$, Morphismen sind basispunkterhaltende glatte Abbildungen. Dann hat man den Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Man}_\star & \longrightarrow & \mathbb{R}\text{-Vect} \\ (M, x) & \longmapsto & T_x M \\ f & \longmapsto & d_x f. \end{array}$$

In beiden Fällen ist das zweite Funktoraxiom gerade deswegen erfüllt, weil die Kettenregel gilt!

b) Hier könnte dein Beispiel stehen.

3.4 Die Kategorie der Kategorien

Nach dem fundamentalen Motto der Kategorientheorie sollen wir die Beziehungen zwischen Untersuchungsgegenständen ernst nehmen und daher die von ihnen gebildete *Kategorie* betrachten. Als wir bisher Kategorientheorie betrieben haben, haben wir dieses Motto bezogen auf Kategorien selbst aber sträflich vernachlässigt! Diesen Missstand behebt folgende Definition.

Definition 3.9. Die Kategorie Cat der (kleinen) Kategorien besteht aus:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat} &:= \text{Klasse aller (kleinen) Kategorien} \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &:= \text{Klasse der Funktoren zwischen } \mathcal{C} \text{ und } \mathcal{D} \end{aligned}$$

Die Verkettung $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ zweier Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ ist dabei als der Funktor

$$\begin{array}{rrcl} G \circ F : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & X & \longmapsto & G(F(X)) \\ & f & \longmapsto & G(F(f)) \end{array}$$

definiert.

Bemerkung 3.10. Ironischerweise ist es keine gute Idee, die so definierte Kategorie Cat zu untersuchen: Denn in Kategorien muss es sinnvoll sein, von der Gleichheit zweier Morphismen zu sprechen – der Gleichheitsbegriff zwischen Funktoren ist aber, wie eingangs schon bemerkt, nicht interessant. Tatsächlich ist die Kategorie Cat nur eine erste Approximation an eine sog. 2-Kategorie, in der es nicht nur Morphismen (Funktoren) zwischen Objekten (Kategorien), sondern auch „höhere Morphismen“, sog. 2-Morphismen (hier natürliche Transformationen), zwischen den gewöhnlichen (1-)Morphismen gibt.

Die Kategorie Cat besitzt Produkte. Diese können durch die Konstruktion in folgender Definition gegeben werden:

Definition 3.11. Die *Produktkategorie* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ zweier Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist die Kategorie mit

$$\begin{aligned} \text{Objekte: } & \text{Paare } (X,Y) \text{ mit } X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C},\ Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D} \\ \text{Morphismen: } & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y})) := \\ & \qquad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\widetilde{X}) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,\widetilde{Y}) = \{(f,g) \mid f : X \to \widetilde{X},\ g : Y \to \widetilde{Y}\}. \end{aligned}$$

Die Kompositionsvorschrift wird von der in $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ induziert.

Proposition 3.12. *Das kategorielle Produkt in* Cat *ist durch die Produktkategoriekonstruktion mit den offensichtlichen Projektionsfunktoren gegeben.*

Im Kapitel über adjungierte Funktoren werden wir einen tieferen Grund dafür kennenlernen (Korollar **????**), wieso zur Definition der Produktkategorie das kartesische Produkt von Klassen verwendet wird.

4 Natürliche Transformationen **Tim Baumann**

Werbung: Wir werden verstehen, was natürliche Transformationen sind, weshalb ihre Definition ganz einfach ist und wozu man sie benötigt. Ihre Bedeutung werden wir aus verschiedenen Blickwinkeln beleuchten. Mit natürlichen Transformationen können wir dann auch Funktorkategorien definieren, die für das Yoneda-Lemma später sehr wichtig sind. Außerdem können wir definieren, wann zwei Kategorien zueinander äquivalent sind.

XXX: Hier fehlt noch Motivation für das Konzept.

Definition 4.1. Eine *natürliche Transformation* $\eta : F \Rightarrow G$ zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus

einem Morphismus $\eta_X : F(X) \to G(X)$ für jedes Objekt $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$

sodass

für alle Morphismen $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Motto 4.2. *Die Komponenten einer natürlichen Transformation sind* gleichmäßig *über alle Objekte $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ definiert.*

4.1 Beispiele für natürliche Transformationen

Erste Beispiele mit Mengen

Seien $\mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}, K : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ die Funktoren mit

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}: & X & \longmapsto & X \\ & f & \longmapsto & f \\ \\ K: & X & \longmapsto & X \times X \\ & f : X \to Y & \longmapsto & (X \times X \to Y \times Y,\ (x_1, x_2) \mapsto (f(x_1), f(x_2)). \end{array}$$

Dann kann man folgende Beobachtungen treffen:

a) Natürlich gibt es für jede konkrete Menge X im Allgemeinen viele Abbildungen

$$X \longrightarrow X.$$

Aber es gibt nur eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}$, nämlich die mit

$$\eta_X : X \longrightarrow X,\ x \longmapsto x.$$

Wir sehen das Motto in diesem Beispiel bestätigt: Denn der Funktionsterm von η_X ist in der Tat gleichmäßig definiert, es kommt keine Fallunterscheidung über X vor.

b) Analog gibt es für jede konkrete Menge X im Allgemeinen viele Abbildungen $X \to X \times X$ (also $\mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}(X) \to K(X)$). Aber es gibt nur eine einzige natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \Rightarrow K$, nämlich die mit

$$\eta_X : X \to X \times X,\ x \mapsto (x, x)$$

für alle Mengen X. Auch hier ist das Motto bestätigt.

c) Für konkrete Mengen X gibt es im Allgemeinen viele Abbildungen

$$\mathcal{P}(X) \longrightarrow X,$$

aber es gibt keine natürliche Transformation $\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}$. Auch dieser Sachverhalt illustriert das Motto: Denn uns fällt kein Abbildungsterm ein, der ohne Fallunterscheidung über X Funktionen des Typs $\mathcal{P}(X) \to X$ definieren könnte.

Entgegengesetzte Gruppe

In der Gruppentheorie trifft man folgende Beobachtung: *Jede Gruppe* $(G, \circ)$ *ist natürlich isomorph zu ihrer entgegengesetzten Gruppe* $(G^{\mathrm{op}}, \bullet)$. Dabei hat G^{op} dieselben Elemente wie G, die Gruppenverknüpfung $\bullet$ ist aber genau anders herum definiert,

$$g \bullet h := h \circ g.$$

In der Tat ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \eta_G : & G & \longrightarrow & G^{\mathrm{op}} \\ & g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

bijektiv und auch wirklich ein Gruppenhomomorphismus, da für alle $g, h \in G$ die Rechnung

$$\eta_G(g \circ h) = (g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \bullet h^{-1} = \eta_G(g) \bullet \eta_G(h)$$

gilt. Ohne den Begriff der natürlichen Transformation kann man aber nicht verstehen, wieso dieser Isomorphismus das Prädikat *natürlich* verdient hat: Man kann sich nur mit der Aussage begnügen, der Isomorphismus sei *kanonisch* definiert; das ist jedoch ein informaler Begriff.

Kategoriell verstehen wir: Die Isomorphismen η_G sind Komponenten einer natürlichen Transformation, und zwar einer vom Identitätsfunktor auf Grp in den „entgegengesetzte Gruppe“-Funktor F:

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathrm{Grp} & \longrightarrow & \mathrm{Grp} \\ & G & \longmapsto & G^{\mathrm{op}} \\ & f & \longmapsto & f^{\mathrm{op}} \end{array}$$

Der Gruppenhomomorphismus f^{op} ist als Abbildung derselbe wie f; durch das doppelte Bilden der entgegengesetzten Gruppen ist er auch wirklich ein Gruppenhomomorphismus. Das Natürlichkeitsdiagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Id}_{\mathrm{Grp}}(G) = G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_G"'] & H = \mathrm{Id}_{\mathrm{Grp}}(H) \arrow[d, "\eta_H"] \\ F(G) = G^{\mathrm{op}} \arrow[r, "f^{\mathrm{op}}"'] & H^{\mathrm{op}} = F(H) \end{tikzcd}$$

kommutiert tatsächlich, wie eine Diagrammjagd zeigt:

$$\begin{tikzcd} g \arrow[rr, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "\eta_G"] & & f(g) \arrow[d, mapsto, "\eta_H"] \\ g^{-1} \arrow[r, mapsto, "f"] & f(g^{-1}) \arrow[r, equal, "f \text{ Homo}"'] & (f(g))^{-1} \end{tikzcd}$$

Bemerkung 4.3. Manchmal findet man Aussagen der Art „es gibt eine natürliche Abbildung von … nach …“ in der Literatur. Damit ist dann oft gemeint, dass man Quelle und Ziel als Auswertungen zweier Funktoren verstehen kann und dass zwischen diesen Funktoren eine natürliche Transformation verläuft.

XXX: Es fehlt noch ein weiteres Beispiel: „Doppeldualraum“

Determinante

In der linearen Algebra lernt man die Determinante von Matrizen kennen. Diese ist bezüglich des Grundrings (oder Grundkörpers) gleichmäßig definiert – das erkennt man entweder an der laplacesche Entwicklungsformel oder an der Charakterisierung als eindeutige multilineare Abbildung mit gewissen Eigenschaften.

Unserem Motto zufolge sollte die Determinantenabbildung daher auch als natürliche Transformation verstanden werden können. Das ist in der Tat der Fall: Für festes $n \geq 0$ haben wir zwei Funktoren von der Kategorie der Ringe in die Kategorie der Monoide, nämlich

a) den Funktor, der jedem Ring R den multiplikativen Monoid der $(n \times n)$-Matrizen über R zuordnet, und

b) den Funktor, der jedem Ring R seinen zugrundeliegenden multiplikativen Monoid zuordnet.

Die Determinante ist eine natürliche Transformation zwischen diesen beiden Funktoren; das Natürlichkeitsdiagramm

$$\begin{tikzcd}
R^{n \times n} \arrow[r] \arrow[d, "\det"'] & S^{n \times n} \arrow[d, "\det"] \\
R \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

besagt für Ringhomomorphismen $f : R \to S$, dass es keine Rolle spielt, ob man eine Matrix über R als Matrix mit Koeffizienten in S interpretiert und dann die Determinante nimmt, oder ob man umgekehrt zuerst die Determinante als Element von R berechnet und dann in den Ring S transportiert.

4.2 Funktorkategorien

Definition 4.4. Seien Funktoren $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und natürliche Transformationen $\alpha : F \Rightarrow G$ und $\beta : G \Rightarrow H$ gegeben:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, "G"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=50, "H"'{name=D}] & \mathcal{D}
\arrow[from=U, to=M, phantom, "\Downarrow\alpha"]
\arrow[from=M, to=D, phantom, "\Downarrow\beta"]
\end{tikzcd}$$

Dann heißt $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow G$ die *(vertikale) Verkettung* von α und β und ist komponentenweise durch

$$(\beta \circ \alpha)_X := \beta_X \circ \alpha_X : F(X) \to H(X)$$

gegeben.

Proposition 4.5. *Die so definierte Zuordnung $\beta \circ \alpha$ ist in der Tat eine natürliche Transformation.*

Beweis. Da für alle $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ die beiden Teilquadrate im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] \arrow[dd, bend right=60, "(\beta\circ\alpha)_X :=\beta_X\circ\alpha_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"'] \arrow[dd, bend left=60, "\beta_Y\circ\alpha_Y =:(\beta\circ\alpha)_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\beta_X"'] & G(Y) \arrow[d, "\beta_Y"'] \\
H(X) \arrow[r, "H(f)"] & H(Y)
\end{tikzcd}$$

kommutieren, kommutiert auch das äußere Rechteck. Das ist gerade das Natürlichkeitsdiagramm für $\beta \circ \alpha$. $\square$

Außerdem gibt es für jeden Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine natürliche Identitätstransformation $\mathrm{id}_F : F \Rightarrow F$ mit $\mathrm{Id}_X := id_{F(X)}$. Damit wird folgende Definition möglich:

Definition 4.6. Die *Funktorkategorie* $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ zu zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist die Kategorie mit Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ als Objekten und natürlichen Transformationen als Morphismen.

XXX: Es fehlt noch eine Bemerkung über die horizontale Verkettung von natürlichen Transformationen.

Lemma 4.7. *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren und $\alpha : F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation. Dann ist α genau dann ein Isomorphismus in der Funktorkategorie* $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, *wenn alle Komponenten α_X, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, jeweils Isomorphismen in $\mathcal{D}$ sind.*

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei α ein Isomorphismus, dann existiert also eine natürliche Transformation α^{-1} mit $\alpha \circ \alpha^{-1} = \mathrm{id}_F$, $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}_G$. Das bedeutet, dass für jedes $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ die Gleichheiten

$$\mathrm{id}_{F(X)} = (\mathrm{id}_F)_X = (\alpha \circ \alpha^{-1})_X = \alpha_X \circ \alpha_X^{-1}$$
$$\mathrm{id}_{G(X)} = (\mathrm{id}_G)_X = (\alpha^{-1} \circ \alpha)_X = \alpha_X^{-1} \circ \alpha_X$$

gelten. Also sind die Komponenten α_X jeweils Isomorphismen in $\mathcal{D}$.

„$\Leftarrow$" Seien alle Komponenten α_X invertierbar. Dann können wir versuchen, eine inverse natürliche Transformation $\beta : G \Rightarrow F$ über die Setzung

$$\beta_X := (\alpha_X)^{-1} : G(X) \to F(X)$$

zu definieren. Sicher gilt dann $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_F$ und $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_G$, aber es bleibt noch zu zeigen, dass β auch wirklich eine natürliche Transformation ist. Dazu rechnen wir für jeden Morphismus $f : X \to Y$ die Natürlichkeitsbedingung nach:

$$\begin{aligned} & G(f) \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ F(f) \\ \Longrightarrow\ & (\alpha_Y)^{-1} \circ G(f) \circ \alpha_X \circ (\alpha_X)^{-1} = (\alpha_Y)^{-1} \circ \alpha_Y \circ F(f) \circ (\alpha_X)^{-1} \\ \Longrightarrow\ & (\alpha_Y)^{-1} \circ G(f) = F(f) \circ (\alpha_X)^{-1} \\ \Longrightarrow\ & \beta_Y \circ G(f) = F(f) \circ \beta_X \end{aligned}$$ □

Definition 4.8. Invertierbare natürliche Transformationen heißen auch *natürliche Isomorphismen*, und Funktoren, zwischen denen ein natürlicher Isomorphismus verläuft, heißen *zueinander (natürlich) isomorph*.

4.3 Kategorienäquivalenzen

Definition 4.9. Eine *Kategorienäquivalenz* zwischen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ besteht aus Funktoren

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd},$$

die zueinander *quasi-invers* sind, d. h. dass die Kompositionen von F und G jeweils natürlich isomorph zu den entsprechenden Identitätsfunktoren sind:

$$G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \qquad F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}.$$

Die Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißen dann *zueinander äquivalent*: $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

Es gibt auch das Konzept der *Isomorphie von Kategorien*. Da fordert man, dass es Funktoren $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ gibt, die zueinander nicht nur quasi-invers, sondern tatsächlich invers sind, d. h. die Beziehungen

$$G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \qquad F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$$

erfüllen. Das ist aber in den meisten Fällen kein gutes Konzept: Denn wie schon in Bemerkung **??** festgehalten, ist die Gleichheit von Funktoren eine böse Bedingung. In der Tat sind die meisten in der Natur vorkommenden Kategorienäquivalenzen auch „nur“ Äquivalenzen, keine Isomorphismen. Kommt doch mal ein Isomorphismus von Kategorien vor, so ist das meist ein überhaupt nicht tiefsinniger „technischer Zufall“, der nur an geeigneten Wahlen bestimmter Definitionen liegt.

Wieso man Äquivalenzen von Kategorien untersucht, liegt in folgendem Motto begründet:

Motto 4.10. *Sei φ eine mathematische Aussage über Kategorien, die sich nur unter Verwendung der Konzepte* Objekt, Morphismus, Verkettung von Morphismen *und* Gleichheit von Morphismen *formulieren lässt. Sind dann $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zueinander äquivalente Kategorien, so gilt φ genau dann in $\mathcal{C}$, wenn φ in $\mathcal{D}$ gilt.*

Beispiele für Aussagen dieser Art sind etwa:

- Die Kategorie besitzt ein initiales Objekt.
- Je zwei parallele Morphismen sind gleich.
- Jeder Morphismus in ein initiales Objekt ist sogar schon ein Isomorphismus.

Beispiele für Aussagen, die über die Reichweite des Mottos hinausgehen, sind:

- Die Kategorie besitzt genau ein Objekt.
- Die Kategorie besitzt genau ein initiales Objekt.
- Sind zwei Objekte zueinander isomorph, so sind sie schon gleich.
- Je zwei Morphismen (egal zwischen welchen Objekten) sind gleich.

Man erachtet es nicht als schlimm, dass diese Aussagen nicht unter Äquivalenz erhalten bleiben. Denn wegen der vorkommenden Vergleiche von Objekten auf Gleichheit handelt es sich sowieso um böse Aussagen.

Bemerkung 4.11. Mit Techniken aus der formalen Logik kann man Motto **??** auch rigoros beweisen. Das ist nicht besonders schwer, die Hauptschwierigkeit liegt darin, den Begriff *Aussage* präzise zu definieren.

Beispiel 4.12. Die duale Kategorie $\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$ kann nicht zu Set äquivalent sein. Denn in Set ist jeder Morphismus in ein initiales Objekt schon ein Isomorphismus, in $\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$ aber nicht.

Beispiel 4.13. Die Kategorie $\mathbf{1}$, die nur aus einem Objekt $\star$ sowie dessen Identitätsmorphismus besteht, ist zu jeder bewohnten *indiskreten Kategorie* $\mathcal{C}$ (d. h. einer solchen, die mindestens ein Objekt besitzt und in der zwischen je zwei Objekten genau ein Morphismus verläuft) äquivalent.

Beweis. Da $\mathcal{C}$ bewohnt ist, gibt es ein Objekt $K \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Dann können wir die Funktoren

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbf{1} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ \star &\longmapsto K \\ \mathrm{id}_\star &\longmapsto \mathrm{id}_K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G : \quad \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbf{1} \\ X &\longmapsto \star \\ f &\longmapsto \mathrm{id}_\star \end{aligned}$$

definieren. Da es nur einen einzigen Funktor von $\mathbf{1}$ nach $\mathbf{1}$ gibt (obacht! Es ist schlecht, das zu sagen), ist klar, dass $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{1}}$ gilt. Noch zu zeigen ist also, dass auch $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ gilt.

Dazu definieren eine natürliche Transformation $\eta : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, die sich als natürlicher Isomorphismus herausstellen wird. Dabei verwenden wir für jedes $X \in \mathcal{C}$ als η_X den *eindeutigen* Morphismus $(F \circ G)(X) \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(X)$. Da diese Definition gleichmäßig in X ist, erwarten wir, dass die Natürlichkeitsbedingung erfüllt ist; und das ist auch in der Tat der Fall:

$$\begin{tikzcd} K = (F \circ G)(X) \arrow[r, "(F\circ G)(f)=\mathrm{id}_K"] \arrow[d, "\eta_X"'] & (F \circ G)(Y) = K \arrow[d, "\eta_Y"] \\ X = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(X) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(f)=f"'] & \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(Y) = Y \end{tikzcd}$$

Da in einer indiskreten Kategorie alle Morphismen Isomorphismen sind, ist insbesondere jede Komponente η_X ein Isomorphismus, und damit ist nach Lemma **??** auch η selbst ein Isomorphismus. □

Bemerkung 4.14. Wer topologische Räume kennt, fühlt sich durch das Beispiel vielleicht an folgende Beobachtung erinnert: Bewohnte topologische Räume, in denen je zwei Punkte bis auf Homotopie durch genau einen Weg miteinander verbunden werden können, sind zusammenziehbar. Die Ähnlichkeit ist nicht nur formal: Jedem topologischen Raum kann man sein *Fundamentalgruppoid* zuordnen, das ist die Kategorie, deren Objekte durch die Punkte des Raums und deren Morphismen durch die Homotopieklassen von Wegen gegeben sind. Der Fundamentalgruppoid eines Raums, der obige Eigenschaft erfüllt, ist indiskret.

Aufgabe 4.15. Zeige, dass folgende Kategorien jeweils nicht zueinander äquivalent sind:

a) Grp und Set

b) AbGrp und Grp

c) Die Kategorie der Ringe und die der Körper

In diesen Fällen würde man natürlich auch keine Äquivalenz erwarten. Es ist aber ähnlich wie in Beispiel **??** interessant, welche kategoriellen Eigenschaften die Unterscheidung möglich machen.

5 Limiten und Kolimiten **Kathrin Gimmi**

Werbung: Wir verstehen, was allgemeine Limiten und Kolimiten von Diagrammen sind. Dazu wird es viele Beispiele geben, unter anderem die uns schon bekannten Produkte und Koprodukte. Speziell sind sog. filtrierte Kolimiten wichtig, da diese in der täglichen Praxis oft vorkommen und besonders schöne Eigenschaften haben. Abschließend werden wir die Frage diskutieren, wie man Kategorien, denen es an Limiten oder Kolimiten mangelt, vervollständigen kann.

In diesem Abschnitt wollen wir Funktoren $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ auch als ($\mathcal{I}$-förmige) Diagramme bezeichnen.

Definition 5.1. Ein *Kegel* eines Diagramms $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ besteht aus

a) einem Objekt $K \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ (der sog. *Kegelspitze*) zusammen mit

b) jeweils einem Morphismus $\pi_i : K \to F(i)$ für jedes Objekt $i \in \operatorname{Ob} \mathcal{I}$,

sodass für alle Morphismen $f : i \to j$ in $\mathcal{I}$ die Dreiecke

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$

kommutieren.

Die Notation etwas missbrauchend werden Kegel oft nur nach ihrer Kegelspitze genannt, obwohl die Morphismen π_i mit zum Datum gehören. Die Morphismen π_i werden manchmal als Projektionsmorphismen bezeichnet, der Grund dafür wird beim ersten Beispiel klar werden.

Definition 5.2. Ein *Morphismus von Kegeln* $K \to \widetilde{K}$ eines Diagramms F besteht aus

einem Morphismus der Kegelspitzen $\psi : K \to \widetilde{K}$ in $\mathcal{C}$

sodass

für alle $i \in \operatorname{Ob} \mathcal{I}$ die Dreiecke

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & \widetilde{K} \arrow[dl, "\widetilde{\pi}_i"] \\ & F(i) & \end{tikzcd}$$

kommutieren.

Abbildung **??** erklärt die Herkunft des Begriffs „Kegel".

Kegelmorphismen kann man auf die offensichtliche Art und Weise miteinander verketten (einfach die Morphismen der Kegelspitzen verketten). Daher ist es sinnvoll, von der *Kategorie der Kegel* zu einem festen Diagramm $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ zu sprechen. Terminale Objekte dieser Kategorie haben einen besonderen Namen:

Definition 5.3. Ein *Limes* eines Diagramms $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ist ein terminales Objekt in der Kategorie der Kegel zu F.

Da allgemein terminale Objekte einer Kategorie bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig sind (siehe Aufgabe 2 von Übungsblatt 2), folgt sofort folgende Beobachtung:

Proposition 5.4. *Limiten sind bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig. Die Kegelspitzen von Limiten sind zumindest bis auf Isomorphie eindeutig.*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rrrrr, dashed] \arrow[dr] \arrow[drrr] \arrow[drrrr] \arrow[ddrr] & & & & & \widetilde{K} \arrow[dllll] \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[ddlll] \\
& F(i) \arrow[rr] \arrow[dr] & & F(j) \arrow[r] \arrow[dl] & F(\ell) & \\
& & F(k) & & &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2: Zwei Kegel und ein Kegelmorphismus zwischen ihnen.

Für ein anschauliches Verständnis von Limiten sind zwei Mottos wichtig:

Motto 5.5. *Ein Limes eines Diagramms ist ein bestes (größtmöglichstes) Objekt, welches das Diagramm zu einem Kegel ergänzt.*

Größtmöglich ist dabei nicht im wörtlichen Sinn, wie er etwa in der Kategorie der Mengen vorstellbar ist, zu interpretieren, sondern nur so zu verstehen, als dass jeder andere Kegel (Möchtegern-Limes) einen Morphismus in den Limes hinein besitzt.

Motto 5.6. *Ein Limes subsumiert das gesamte Diagramm zu einem einzelnen Objekt (der Kegelspitze) – zumindest, was Morphismen in das Diagramm hinein angeht.*

Das ist so verstehen: Immer, wenn man einen Morphismus aus einem Objekt $\widetilde{K}$ „in das Diagramm hinein“ gegeben hat (d. h. einen Kegel des Diagramms gegeben hat), induziert die universelle Eigenschaft einen Morphismus aus $\widetilde{K}$ in den Limes. Umgekehrt kann man aus jedem solchen Morphismus durch Nachschaltung der Projektionen einen Kegel erhalten. Dieses Motto werden wir sogar formal beweisen können: siehe Proposition **??**.

5.1 Beispiele für Limiten

Produkte

Sei speziell $\mathcal{I} = \mathbf{2}$ die Kategorie mit genau zwei Objekten und nur den Identitätsmorphismen:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[loop above] & \bullet \arrow[loop above]
\end{tikzcd}$$

Dann sind Diagramme $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ einfach durch die Angabe zweier Objekte von $\mathcal{C}$ gegeben. Kegel solcher Diagramme haben wir früher schon untersucht: unter dem Namen *Möchtegern-Produkte*. Entsprechend sind Limiten solcher Diagramme schlichtweg Produkte.

Faserprodukte (Pullbacks)

Sei speziell $\mathcal{I}$ die Kategorie

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[loop above] \arrow[d] \\ \bullet \arrow[loop left] \arrow[r] & \bullet. \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Limiten von $\mathcal{I}$-förmigen Diagrammen werden auch *Faserprodukte* genannt und konventionsmäßig gerne als sog. *Faserprodukt-* oder *Pullbackdiagramm* skizziert:

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Dabei steht die Kegelspitze des Limes oben links. Der dritte Projektionsmorphismus (auf Z) ist nicht eingezeichnet, da er sowieso gleich der Komposition des Wegs über X (oder über Y) sein muss. Wenn eine Kategorie jedes $\mathcal{I}$-förmige Diagramm zu einem Faserproduktdiagramm ergänzt werden kann, sagt man auch, dass die Kategorie „alle Faserprodukte besitzt“.

In der Kategorie der Mengen kann das Faserprodukt durch die Konstruktion

$$X \times_Z Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\} \subseteq X \times Y$$

gegeben werden.

Man hat zwei vorschiedene Vorstellungen des Faserprodukts, die unterschiedliche Aspekte betonen: Zum einen kann man die Objekte X und Y als Ausgangsbasis ansehen. Dann stellt man sich als Faserprodukt das Objekt $X \times_Z Y$ vor und sieht es als eine Art „verallgemeinertes Produkt“ an.

Zum anderen kann man sich aber auch den Morphismus g als Ausgangspunkt vorstellen. Als Ergebnis betont man dann nicht das Objekt $X \times_Z Y$ alleine, sondern den Morphismus $X \times_Z Y \to X$. Diesen bezeichnet man dann auch als *Rückzug (Pullback)* von g längs f oder *Basiswechsel* von g nach X.

Beispiel 5.7. Sei $g : Y \to Z$ eine Abbildung von Mengen. Sei $U \subseteq Z$ eine Teilmenge. Dann passt das Urbild $g^{-1}[U]$ in ein Pullbackdiagramm:

$$\begin{tikzcd} g^{-1}[U] \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, hook] & Z \end{tikzcd}$$

Dieser Standpunkt wird unter anderem in der algebraischen Geometrie verwendet. Da sind dann *Stabilitätsaussagen* wichtig: Hat ein Morphismus eine bestimmte Eigenschaft, so hat sein Rückzug längs Morphismen einer bestimmten Klasse dieselbe Eigenschaft.

Beispiel 5.8. Sei ein Pullbackdiagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

in einer beliebigen Kategorie gegeben. Wenn g ein Monomorphismus ist, dann auch g'. Man sagt: *Monomorphismen sind unter Rückzug stabil.*

Bemerkung 5.9. Es ist etwas besonderes, wenn auch Epimorphismen unter Rückzug stabil sind. Das ist etwa in der Kategorie der Mengen und allen abelschen Kategorien der Fall.

Terminale Objekte

Sei speziell $\mathcal{I} = \mathbf{0}$ die leere Kategorie und $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ das einzige $\mathcal{I}$-förmige Diagramm in $\mathcal{C}$. Kegel von F sind dann einfach Objekte von $\mathcal{C}$ und Morphismen solcher Kegel Morphismen zwischen diesen Objekten; die Kategorie der Kegel von F ist also $\mathcal{C}$ selbst.

Damit ist klar: Limiten von F sind dasselbe wie terminale Objekte von $\mathcal{C}$.

Differenzkerne (Equalizer)

Sei speziell $\mathcal{I}$ die Kategorie mit zwei Objekten und zwei parallelen Morphismen:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[loop left] \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \bullet \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

Diagramme $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ sind dann durch die Angabe zweier paralleler Morphismen $f, g : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ gegeben. Ein Limes eines solchen Diagramms heißt dann *Differenzkern* (Equalizer) von f und g.

In der Kategorie der Mengen kann der Differenzkern durch die Konstruktion

$$\mathrm{Eq}(f, g) := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$$

gegeben werden. Genauso funktioniert es in der Kategorie der K-Vektorräume, wenn man diese Menge mit der Untervektorraumstruktur versieht; dann kann man auch kürzer

$$\mathrm{Eq}(f, g) = \ker(f - g)$$

schreiben und so die Begriffsherkunft verstehen.

5.2 Zusammenhang mit dem Limesbegriff in der Analysis

5.3 Existenz von Limiten

Definition 5.10. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann *(ko-)vollständig*, wenn jedes kleine Diagramm in $\mathcal{C}$ einen (Ko-)Limes besitzt. Dabei heißt ein Diagramm $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ genau dann *klein*, wenn seine Indexkategorie $\mathcal{I}$ klein ist (d. h. wenn die Objekt- und Morphismenklassen sogar schon Mengen bilden).

Proposition 5.11. *Die Kategorie der Mengen ist vollständig und kovollständig: Ist $F : \mathcal{I} \to \mathrm{Set}$ ein kleines Diagramm, so wird die Menge*

$$\lim F := \Big\{ (x_i)_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} \in \prod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} F(i) \;\Big|\; F(f)(x_i) = x_j \text{ für alle } f : i \to j \text{ in } \mathcal{I} \Big\}$$

vermöge der kanonischen Projektionsabbildungen zu einem Limes von F und

$$\operatorname{colim} F := \Big(\coprod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} F(i) \Big) \Big/ {\sim},$$

wobei $(\sim)$ die feinste Äquivalenzrelation mit

$$\text{für alle } f : i \to j \text{ in } \mathcal{I},\ x \in F(i){:} \quad \langle i, x \rangle \sim \langle j, F(f)(x) \rangle$$

ist, zu einem Kolimes von F.

Beweis. Die Äquivalenzrelation $(\sim)$ kann definiert werden als Schnitt über alle Äquivalenzrelationen auf $\coprod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} F(i)$, die die angegebene Bedingung erfüllen. Dann kann man die Behauptungen nachrechnen. □

XXX: Hier fehlt der Satz über die Berechnung von Limiten aus Produkten und Differenzkernen.

5.4 Limiten in Funktorkategorien

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie Limiten in Funktorkategorien $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ aussehen. Sei dazu ein Diagramm $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ gegeben. Durch „Nachschaltung der Evaluierungsfunktoren" erhält man aus diesem Diagramm für jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ jeweils ein Diagramm in $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} F_X : \quad \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{D} \\ i &\longmapsto F(i)(X) \end{aligned}$$

Wenn wir voraussetzen, dass all diese Diagramme jeweils einen Limes $\lim F_X$ in $\mathcal{D}$ besitzen, können wir (wie in Aufgabe 4 von Übungsblatt 3) einen Funktor

$$\begin{aligned} L : \quad \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{D} \\ X &\longmapsto \lim F_X \end{aligned}$$

basteln. Dann gilt:

Proposition 5.12. *Der so konstruierte Funktor L wird (mit welchen Projektionen?) ein Limes des Diagramms F.*

Etwas ungenau kann man diesen Zusammenhang auch über die Formel

$$(\lim F)(X) = \lim F_X = \lim_i F(i)(X)$$

ausdrücken. Als Motto kann man daher festhalten:

Motto 5.13. *Besitzt $\mathcal{D}$ $\mathcal{I}$-förmige Limiten, so werden $\mathcal{I}$-förmige Limiten in der Funktorkategorie* $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ *punktweise berechnet. In diesem Fall gilt also: Ein Kegel eines Diagramms $F : \mathcal{I} \to \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ist genau dann ein Limes, wenn sein Bild unter allen Auswertungsfunktoren $\mathrm{ev}_X : \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathcal{D}$, $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, jeweils ein Limes ist.*

5.5 Bewahrung von (Ko-)Limiten

5.6 Vertauschung von (Ko-)Limiten

5.7 Kofinale Unterdiagramme

Definition 5.14. Wir nennen einen Funktor $H : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}$ genau dann *kofinal*, wenn für alle $d \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}$...

1. ein Objekt $d_0 \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}_0$ und ein Morphismus $d \to H(d_0)$ in $\mathcal{D}$ existiert und
2. für je zwei solcher Morphismen ein Objekt $\widetilde{d}_0 \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}_0$ und Morphismen $d_0 \to \widetilde{d}_0$, $d_0' \to \widetilde{d}_0$ existieren, deren Bilder unter H das Diagramm

$$\begin{tikzcd} d_0 \arrow[r] \arrow[d] & H(d_0) \arrow[d, dashed] \\ H(d_0') \arrow[r, dashed] & H(\widetilde{d}_0) \end{tikzcd}$$

   kommutieren lassen.

Etwa ist der Inklusionsfunktor $B(2\mathbb{N}) \to B(\mathbb{N})$ kofinal, wenn $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen mit ihrer gewöhnlichen Ordnung und $2\mathbb{N}$ die Teilordnung der geraden Zahlen bezeichnet.

6 Das Yoneda-Lemma **Justin Gassner**

Werbung: Wir werden das fundamentale Yoneda-Lemma und seine Korollare verstehen. Dazu werden wir zunächst eine hilfreiche Intuition von sog. Prägarben auf Kategorien entwickeln und verstehen, welche Signifikanz die Darstellbarkeit von Prägarben hat. Dann können wir die Yoneda-Einbettung kennenlernen, ihre Eigenschaften studieren und sehen, wozu sie nützlich ist. Das fundamentale Motto der Kategorientheorie wird damit zu einem formalen Theorem.

6.1 Prägarben als ideelle Objekte

Sei in diesem Abschnitt $\mathcal{C}$ eine lokal kleine Kategorie.

Definition 6.1. Funktoren $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ heißen auch *Prägarben auf* $\mathcal{C}$. Die Kategorie der Prägarben auf $\mathcal{C}$ (mit natürlichen Transformationen als Morphismen) ist $\widehat{\mathcal{C}} := \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$.

Definition 6.2. Eine Prägarbe $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ auf $\mathcal{C}$ heißt genau dann *darstellbar*, wenn es ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ mit $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X)$ gibt.

Motto 6.3. *Eine beliebige (nicht unbedingt darstellbare) Prägarbe F auf $\mathcal{C}$ beschreibt die Beziehungen aller Objekte A von $\mathcal{C}$ mit einem imaginären, fiktiven, eingebildeten, ideellen Objekt $\heartsuit$: Wir stellen uns die Menge $F(A)$ als Menge der Morphismen $A \to \heartsuit$ vor.*

Die Prägarbenkategorie $\widehat{\mathcal{C}}$ enthält stets mindestens eine nicht-darstellbare Prägarbe, und zwar die initiale Prägarbe

$$\begin{aligned} 0 : \quad \mathcal{C}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathrm{Set} \\ A &\longmapsto \emptyset \\ f &\longmapsto \mathrm{id}_{\emptyset}. \end{aligned}$$

Proposition 6.4. *Die initiale Prägarbe ist nicht darstellbar.*

Beweis. Sei $0 \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X)$ für ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Dann folgt $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \cong 0(X) = \emptyset$ im Widerspruch zu $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$. □

6.2 Die Yoneda-Einbettung

Der volle Hom-Funktor geht von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}$ zu Set. Aus diesem kann man durch Curryfizierung einen Funktor $\mathcal{C} \to \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$ basteln,

$$\begin{aligned} Y : \quad \mathcal{C} &\longrightarrow \widehat{\mathcal{C}} \\ X &\longmapsto \widehat{X} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X) \\ f &\longmapsto \widehat{f}, \end{aligned}$$

wobei die Komponenten der natürlichen Transformation $\widehat{f}$ durch Nachkomponieren mit f wirken:

$$\begin{aligned} (\widehat{f})_A : \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

Definition 6.5. Der Funktor $Y : \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ heißt *Yoneda-Einbettung* von $\mathcal{C}$.

Die Yoneda-Einbettung hat viele gute Eigenschaften, etwa…

a) ist sie treu und voll,

b) erhält Limiten (aber kaum Kolimiten) und

c) ist dicht.

Vermöge der ersten Eigenschaft können wir daher $\mathcal{C}$ als volle Unterkategorie der Kategorie der ideellen Objekte ansehen. Im Bild der Vervollständigung der rationalen Zahlen lautet die analoge Aussage, dass die Inklusion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tatsächlich injektiv ist. Der Beweis ist eine einfache Anwendung des noch folgenden Yoneda-Lemmas.

Eigenschaft b) drückt aus, dass Limesbildung verträglich mit dem Übergang von tatsächlichen Objekten von $\mathcal{C}$ zu ideellen Objekten ist. Analog erhält auch die Inklusion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ Limiten.

Die Yoneda-Einbettung ist im Allgemeinen weit entfernt davon, wesentlich surjektiv zu sein. Konkret haben wir gesehen, dass die initiale Prägarbe niemals isomorph zu einem Objekt der Form $Y(X)$ ist. In Analogie ist die Inklusion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ weit entfernt davon, surjektiv zu sein. Es ist allerdings jede reelle Zahl Limes rationaler Zahlen – und so ist es hier auch: Eigenschaft c) besagt, dass jede Prägarbe auf kanonische Art und Weise Kolimes darstellbarer Prägarben ist. Für eine genaue Formulierung siehe Aufgabe 3 von Übungsblatt 6.

6.3 Das Yoneda-Lemma

Lemma 6.6 (Yoneda-Lemma). *Es gibt eine in $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $F \in \operatorname{Ob}\widehat{\mathcal{C}}$ natürliche Bijektion*

$$\operatorname{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X), F) \cong F(X).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 1 von Übungsblatt 6. □

Linke und rechte Seite der Isomorphie können als Auswertungen der Funktoren

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \widehat{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathrm{Set}, \quad (X, F) \longmapsto \operatorname{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X), F) \\ R : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \widehat{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathrm{Set}, \quad (X, F) \longmapsto F(X) \end{aligned}$$

an der Stelle (X, F) angesehen werden. Bei $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \widehat{\mathcal{C}}$ handelt es sich um die Produktkategorie aus Definition **??**. Das Prädikat *natürlich* im Yoneda-Lemma bezieht sich darauf, dass diese beide Funktoren zueinander natürlich isomorph sind.

Beispiel 6.7. Für eine Prägarbe F haben wir uns in Motto **??** die Menge $F(A)$ als Menge der Morphismen von A in ein ideelles Objekt $\heartsuit$ vorgestellt. Natürlich können wir nicht „$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \heartsuit)$" schreiben, da $\heartsuit$ nicht wirklich ein Objekt von $\mathcal{C}$ ist; aber in der Prägarbenkategorie gibt es die Morphismenmenge $\operatorname{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\widehat{A}, F)$, und nach dem Yoneda-Lemma ist diese isomorph zu $F(A)$. In diesem Sinn gilt also $\heartsuit = F$ und das Motto ist sogar formal korrekt.

7 Adjungierte Funktoren

Peter Uebele

Definition 7.1. Seien $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Genau dann heißt

- F *linksadjungiert zu* G bzw.
- G *rechtsadjungiert zu* F,

in Zeichen: $F \dashv G$, wenn es eine in $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ natürliche Isomorphie gibt:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, GX)$$

Dabei ist *natürlich* gemäß Bemerkung **??** zu verstehen: Linke und rechte Seiten der Isomorphie sind als Auswertungen der Funktoren

$$\begin{array}{rrcl} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(F\_, \_) : & \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ & (Y, X) & \longmapsto & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\_, G\_) : & \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ & (Y, X) & \longmapsto & \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, GX) \end{array}$$

zu lesen. Die Natürlichkeitsbedingung bedeutet dann, dass für alle Morphismen $f : X \to X'$ in $\mathcal{C}$ und $g : Y' \to Y$ in $\mathcal{D}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(FY', X') \arrow[d, "\cong"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, GX) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y', GX') \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beispiel 7.2. Sei $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ quasi-invers zu $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (im Sinne von Definition **??**). Dann ist F links- und rechtsadjungiert zu G.

Das Konzept zueinander adjungierter Funktoren ist also eine Verallgemeinerung des Konzepts zueinander quasi-inverser Funktoren: Auch, wenn ein Funktor kein Quasi-Inverses besitzt, kann man dennoch fragen, inwieweit man ihn zumindest *so gut wie möglich* invertieren kann. Das folgende Beispiel [**smith**] soll diesen Gedanken illustrieren.

Beispiel 7.3. Sei $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ die Inklusion der ganzen in die rationalen Zahlen, aufgefasst als partiell geordnete Mengen. Diese Abbildung besitzt keine monotone Umkehrabbildung, aber zwei Beinahe-Inverse, nämlich die Auf- und Abrundungsfunktionen:

$$\begin{array}{rrcl} \lceil\_\rceil : & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & \lceil x \rceil = (\text{kleinste ganze Zahl} \geq x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \lfloor\_\rfloor : & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor = (\text{größte ganze Zahl} \leq x) \end{array}$$

Die von diesen monotonen Abbildungen induzierten Funktoren erfüllen tatsächlich die Adjunktionsbeziehungen
$$B\lceil\_\rceil \dashv Bi \dashv B\lfloor\_\rfloor,$$
siehe Aufgabe 1 von Übungsblatt 7.

Beispiel 7.4. Sei K ein Körper (oder Ring), $U : K\text{-Vect} \to \text{Set}$ der Vergissfunktor und $F : \text{Set} \to K\text{-Vect}$ der Funktor, der jeder Menge X den sog. *freien Vektorraum über X*
$$F(X) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, n \geq 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K, x_1, \ldots, x_n \in X \right\}$$
zuordnet. Dessen Elemente sind sog. formale (endliche) Linearkombinationen der Elemente von X; addiert wird also nicht wirklich, man notiert lediglich vor jedes Element aus X einen Koeffizienten aus K.[1] Die Elemente von X bilden dann eine Basis von $F(X)$. Ist $f : X \to X'$ eine Abbildung, so ist die induzierte Abbildung durch
$$F(f) : F(X) \to F(X'),\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$
gegeben und tatsächlich linear. Dann gilt:

Proposition 7.5. *Der so definierte Funktor F ist linksadjungiert zum Vergissfunktor U.*

Beweis. Wir geben den in $Y \in \operatorname{Ob} \text{Set}$ und $V \in \operatorname{Ob} K\text{-Vect}$ natürlichen Isomorphismus explizit an:
$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{K\text{-Vect}}(F(Y), V) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\text{Set}}(Y, U(V)) \\ \varphi &\longmapsto \varphi|_Y \end{aligned}$$
Die Bijektivität dieser Zuordnung drückt gerade aus, dass die Werte auf einer Basis genügen, um eine lineare Abbildung eindeutig festzulegen. Die Natürlichkeitsbedingung besagt, dass für alle $f : V \to V'$ in K-Vect und $g : Y' \to Y$ das Diagramm
$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{K\text{-Vect}}(F(Y), V) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \operatorname{Hom}_{K\text{-Vect}}(FY', U(V')) \arrow[d, "\cong"] \\ \operatorname{Hom}_{\text{Set}}(Y, U(V)) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\text{Set}}(Y', U(V')) \end{tikzcd}$$
kommutiert, d. h. dass für alle $\varphi \in \operatorname{Hom}_{K\text{-Vect}}(F(Y), V)$ die Gleichung
$$(f \circ \varphi \circ F(g))|_{Y'} = f \circ \varphi|_Y \circ g$$
erfüllt ist. Das ist offensichtlich der Fall. $\square$

[1] In konstruktiver Mathematik realisiert man $F(X)$ als Menge von Wörtern über $K \times X$ modulo einer geeigneten Äquivalenzrelation, wenn man nicht voraussetzen möchte, dass X als Menge diskret ist.

Beispiel 7.6. Der Vergissfunktor $U : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Set}$, der einer kleinen Kategorie ihre Menge von Objekten zuordnet, besitzt sowohl einen Links-, als auch einen Rechtsadjungierten, nämlich

$$\begin{array}{llllll} L: & \mathrm{Set} & \longrightarrow & \mathrm{Cat}, & X & \longmapsto & \text{diskrete Kategorie auf } X, \\ R: & \mathrm{Set} & \longrightarrow & \mathrm{Cat}, & X & \longmapsto & \text{indiskrete Kategorie auf } X. \end{array}$$

Denn man hat natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(L(X), \mathcal{E}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Ob}\,\mathcal{E}, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\mathcal{E}, R(Y)).$$

Beispiel 7.7. Analog hat der Vergissfunktor $U : \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$, der jedem topologischen Raum seine zugrundeliegende Menge von Punkten zuordnet, einen Links- und Rechtsadjungierten: die Konstruktion des diskreten bzw. indiskreten topologischen Raums auf einer Menge.

Proposition 7.8. *Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Dann gilt:*

a) F erhält Kolimiten von $\mathcal{D}$.

b) G erhält Limiten von $\mathcal{C}$.

Korollar 7.9. *a) Der Vergissfunktor $U : K\text{-}\mathrm{Vect} \to \mathrm{Set}$ erhält Limiten. Da er aber nicht Kolimiten erhält (Beispiel* **??***), kann er keinen Rechtsadjungierten besitzen.*

b) Der Vergissfunktor $U : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Set}$ erhält Limiten und Kolimiten.

c) Der Vergissfunktor $U : \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ erhält Limiten und Kolimiten.

Beweis der Proposition. Der übliche Beweis geht so: Sei $D : \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ ein Diagramm, mit Limes $\lim_i D(i)$. Dann folgt aus der in $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ natürlichen Isomorphiekette

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, G(\lim_i D(i))) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(Y), \lim_i D(i)) \cong \lim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(Y), D(i)) \\ &\cong \lim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, G(D(i))) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, \lim_i G(D(i))) \end{aligned}$$

mit dem Yoneda-Lemma die Behauptung: $G(\lim_i D(i)) \cong \lim_i G(D(i))$.

Dieser Beweis hat aber noch zwei Lücken: Zum einen wurde die Existenz des Limes $\lim_i G(D(i))$ ohne Beweis verwendet, zum anderen wurde nur die Isomorphie der Kegelspitzen nachgewiesen; das ist aber eine schwächere Aussage als die eigentliche Behauptung der Limesbewahrung. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Lücken zu schließen, siehe etwa [**gaillard**, **lin**]. $\square$

8 Kombinatorische Spezies — Simon Kapfer

9 Topologische Quantenfeldtheorien — Sven Prüfer

Werbung: Topologische Quantenfeldtheorien haben neben ihrer physikalischen Bedeutung vielseitige Anwendungen in der Mathematik. Ihre kategorielle Formulierung erlaubt es zum Beispiel, Berechnungen von topologischen oder geometrischen Invarianten so zu organisieren, dass diese durch Zerlegen des geometrischen Objekts in kleinere Bestandteile erheblich einfacher werden. Konkrete Beispiele sind etwa die Spin–Hurwitz-Zahlen oder Chern–Simons-Theorie.

In diesem Vortrag werden monoidale Kategorien sowie Funktoren eingeführt, alle Begriffe erklärt, die zum Definieren der Kategorien für topologische Quantenfeldtheorien notwendig sind und am Ende das einfachste niedrig-dimensionale Beispiel durchgerechnet. Insbesondere wird kein physikalisches oder tieferes topologisches bzw. geometrisches Grundwissen vorausgesetzt.