

Die Picard-Gruppe und der Satz von Riemann–Roch

Ingo Blechschmidt

16. Oktober 2014

Das sind informale Notizen zum ersten Kapitel von Arnaud Beauvilles
Buch *Complex Algebraic Surfaces*.

1	Garbenkohomologie	2
2	Divisoren	5
3	Der Satz von Riemann–Roch für Kurven	9
4	Die Schnittform auf der Picard-Gruppe	10
5	Der Satz von Riemann–Roch für Flächen	15

Literatur

- Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*
- Griffiths, Harris, *Principles of Algebraic Geometry*
- Hartshorne, *Algebraic Geometry*
- Huybrechts, *Complex Geometry*
- Manin, *Lectures on the K-functor in Algebraic Geometry*
- Shafarevich (Ed.), *Algebraic Geometry II*
- The Stacks Project Authors, *Stacks Project*
- Vakil, *Foundations of Algebraic Geometry*

1 Garbenkohomologie

Sei X ein Raum (Schema über \mathbb{C} oder komplexe Mannigfaltigkeit). Dann untersucht man (algebraische bzw. holomorphe) Vektorbündel auf X ; zur Kategorie solcher ist die Kategorie der lokal freien \mathcal{O}_X -Modulgarben äquivalent.¹ Diese ist aber keine abelsche Kategorie und daher kein geeigneter Rahmen, um Funktoren abzuleiten.

Man behilft sich mit der größeren Kategorie $\text{Coh}(X)$ der *kohärenten* \mathcal{O}_X -Modulgarben. Die ist eine volle abelsche Unterkategorie der abelschen Kategorie aller \mathcal{O}_X -Modulgarben. Im Fall, dass X ein lokal noethersches Schema oder eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, umfasst diese Kategorie die Kategorie der lokal freien Garben und ist die kleinste volle abelsche Unterkategorie mit dieser Eigenschaft. Kohärenz ist eine Endlichkeitseigenschaft, die im Allgemeinen stärker ist, als von endlichem Typ zu sein.² Die Faserdimension einer kohärenten Garbe kann – anders als bei lokal freien Garben – von Punkt zu Punkt variieren.

Von zentraler Bedeutung ist der Funktor $\Gamma(X, _) : \text{Coh}(X) \rightarrow \text{Vect}(\mathbb{C})$, welcher nur linksexakt, aber in allen interessanten Fällen nicht exakt ist und daher abgeleitet werden muss. Damit definiert man *Garbenkohomologie*: Die n -te Kohomologie einer kohärenten Garbe \mathcal{E} ist $H^n(X, \mathcal{E}) := R^n\Gamma(X, _)(\mathcal{E})$.³

Gewöhnliche (singuläre) Kohomologie erhält man aus dieser Definition zurück, wenn man für \mathcal{E} konstante Garben verwendet.⁴ Im klassischen Fall spielt die Wahl der Koeffizienten (\mathbb{Z} , \mathbb{Q} , ...) dank des universellen Koeffiziententheorems keine große Rolle; das ist bei Garbenkohomologie nicht so. Garbenkohomologie kann man sich *nicht* über „Zykel modulo Ränder“ anschaulich vorstellen, geometrische Vorstellung ist bedingt aber durch *Čech-Methoden* gegeben.

Garbenkohomologie hat drei für uns sehr wesentliche Eigenschaften [Vakil, Hartshorne]:

¹Die Äquivalenz wird wie folgt vermittelt: Einem Vektorbündel $E \rightarrow X$ ordnet man die Garbe seiner algebraischen bzw. holomorphen Schnitte zu. Da man Schnitte addieren und mit regulären bzw. holomorphen Funktionen multiplizieren kann, wird die erhaltene Garbe zu einer Garbe von \mathcal{O}_X -Moduln. Die lokale Trivialität von E übersetzt sich in die lokale Freiheit der zugehörigen Garbe. Fasern des Vektorbündels entsprechen Fasern der Garbe (das sind die Halme, tensoriert mit dem Restklassenkörper an der jeweiligen Stelle).

²Eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe \mathcal{E} heißt genau dann *kohärent*, wenn sie von endlichem Typ ist und wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ der Kern eines jeden $\mathcal{O}_X|_U$ -linearen Morphismus $(\mathcal{O}_X|_U)^n \rightarrow \mathcal{E}|_U$ ebenfalls von endlichem Typ ist. Die Kohärenz von \mathcal{O}_X für den Fall einer komplexen Mannigfaltigkeit ist die Aussage des Kohärenzsatzes von Oka.

³Das ist etwas gemogelt. Der Kategorie $\text{Coh}(X)$ mangelt es im Allgemeinen an genügend Injektiven, weswegen man zu größeren Kategorien übergeht.

⁴Eine Garbe heißt genau dann *konstant*, wenn sie die Garbifizierung einer konstanten Prägarbe ist – einer solchen, die jeder offenen Teilmenge des Raums dieselbe Menge A zuordnet. Explizit ist die Menge der U -Schnitte einer solchen konstanten Garbe die Menge der stetigen Funktionen $U \rightarrow A$, wobei A mit der diskreten Topologie versehen wird. Konstante Garben sind nicht kohärent – sie tragen nicht einmal eine \mathcal{O}_X -Modulstruktur – durch Übergang von $\text{Coh}(X)$ zur Kategorie aller Garben abelscher Gruppen kann man aber auch für solche Garben Kohomologie erklären.

1. Falls X eigentlich über dem Punkt bzw. kompakt ist, so sind die $H^n(X, \mathcal{E})$ endlich-dimensionale Vektorräume⁵ und für $i > \dim X$ verschwindet die i -ten Kohomologie.
2. Ist $0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von kohärenten Garben, so erhält man eine lange exakte Sequenz in Kohomologie:

$$\cdots \longrightarrow H^n(X, \mathcal{E}') \longrightarrow H^n(X, \mathcal{E}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{E}'') \longrightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{E}') \longrightarrow \cdots$$

3. Die *Euler-Charakteristik* einer kohärenten Garbe \mathcal{E} , definiert als die alternierende Summe $\chi(\mathcal{E}) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dim_{\mathbb{C}} H^n(X, \mathcal{E}) \in \mathbb{Z}$, ist additiv in kurzen exakten Sequenzen. Deshalb hängt $\chi(\mathcal{E})$ nur von der Klasse von \mathcal{E} in der *K-Theorie* ab, also nur von *diskreten Invarianten* von \mathcal{E} .⁶

Wieso Garbenkohomologie?

Ein Grund, Garbenkohomologie statt klassischer Kohomologie zu studieren, ist schlichtweg der, dass höhere Kohomologie mit Werten in konstanten Garben auf irreduziblen Schemata stets trivial ist. Das liegt daran, dass auf irreduziblen topologischen Räumen konstante Garben stets welk (flabby) und daher azyklisch bezüglich des globale-Schnitte-Funktors sind.

Ein weiterer Grund liegt darin, dass man oft an der Dimension des globalen Schnitt-raums einer kohärenten Garbe \mathcal{E} interessiert ist, also an $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{E})$. Diese ist im Allgemeinen aber nicht leicht zu berechnen. Die Euler-Charakteristik dagegen, in der diese Dimension als ein Summand auftritt, ist dank ihrer Stabilitätseigenschaften leichter zugänglich. Im Fall, dass \mathcal{E} das zu einem Divisor D assoziierte Geradenbündel ist (siehe Abschnitt 2), ist die Frage nach der Dimension des globalen Schnitttraums die sehr konkrete Frage nach der Dimension des Raums meromorpher Funktionen mit durch D vorgegebenem Null- und Polstellenverhalten.

Historisch war auch die *Leray-Spektralsequenz* eine große Motivation, Garbenkohomologie zu untersuchen. Diese liefert im Kontext einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ eine Möglichkeit, aus Kenntnis der (gewöhnlichen) Kohomologie von Y und der Kohomologie der Fasern $f^{-1}[y]$ Rückschlüsse auf die Kohomologie von X zu ziehen; dabei kommt unweigerlich Garbenkohomologie vor.⁷

⁵Dass das nicht immer so ist, zeigt schon das Beispiel $H^0(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1})$ der unendlichdimensionale Raum der holomorphen Funktionen auf \mathbb{C} . Hier und im Folgenden ist \mathbb{A}^1 der eindimensionale affine Raum über \mathbb{C} .

⁶Außerdem ist die Euler-Charakteristik auf flachen Familien von kohärenten Garben konstant [Shafarevich, Abschn. 3.8 und 4.1]. Die K-Theorie von X ist die abelsche Gruppe formaler \mathbb{Z} -Linearkombinationen von Isomorphieklassen von kohärenten Garben auf X modulo den Relationen $\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}''$ für jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0$. Die K-Theorie von \mathbb{A}^1 ist isomorph zu \mathbb{Z} (mit Isomorphismus $\mathcal{E} \mapsto \text{rank } \mathcal{E}$), die von \mathbb{P}^n ist isomorph zu $\mathbb{Z}[X]/(X+1)^{n+1}$ [Manin].

⁷Nur im Fall, dass f eine Faserung ist, kann man noch auf den Spezialfall der Leray–Serre-Spektralsequenz ausweichen, bei der man nur Kohomologie mit Werten in lokalen Systemen benötigt [Shafarevich, Kap. 1].

Als letzter Grund sei angeführt, dass Garbenkohomologie geometrische Objekte klassifizieren kann. Etwa stehen die Elemente von $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ auf kanonische Art und Weise mit den Geradenbündeln auf X (bis auf Isomorphie) in Eins-zu-Eins-Korrespondenz.⁸

Die kurze exakte Sequenz zu einem Unterschema

Im Folgenden werden wir wiederholt die kurze exakte Sequenz zu einem abgeschlossenen Unterschema $V \xrightarrow{i} X$ bzw. einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit benötigen. Diese ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_V \longrightarrow 0.$$

Dabei ist \mathcal{I} die *Idealgarbe* zu V , also die Garbe derjenigen Funktionen, welche auf V verschwinden. Das Komplement von V kann daraus als die offene Menge $\{x \in X \mid 1 \in \mathcal{I}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}\}$ wiedergewonnen werden – das ist die Menge derjenigen Punkte, in denen mindestens eine definierende Gleichung von V nicht erfüllt ist.

Die Garbe $i_*\mathcal{O}_V$ ist der Pushforward der Strukturgarbe von V , also der Garbe der regulären bzw. holomorphen Funktionen. Auf Punkten $x \in X$, welche nicht in V liegen, ist ihr Halm trivial: $(i_*\mathcal{O}_V)_x = 0$. Für Punkte $x \in V$ gilt $(i_*\mathcal{O}_V)_x \cong \mathcal{O}_{V,x} \cong \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_x$.

Beispiel 1.1. Zum abgeschlossenen Unterschema $\{0\} \xrightarrow{i} \mathbb{A}^1$ gehört die exakte Sequenz $0 \rightarrow (z) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \rightarrow i_*\mathcal{O}_{\text{pt}}$. Dabei ist (z) die Idealgarbe aller $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ -Vielfachen der Koordinatenfunktion z .

Beispiel 1.2. Zum Schnitt $V \cap V' \xrightarrow{j} X$ zweier abgeschlossener Unterschema gehört die Idealgarbe $\mathcal{I} + \mathcal{I}'$. Die vorgedrückte Strukturgarbe ergibt sich daher als $j_*\mathcal{O}_{V \cap V'} = \mathcal{O}_X/(\mathcal{I} + \mathcal{I}') \cong \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{I}' \cong i_*\mathcal{O}_V \otimes_{\mathcal{O}_X} i'_*\mathcal{O}_{V'}$.

Zurück und vor

Ist $V \xrightarrow{i} X$ eine abgeschlossene Teilmenge, so definiert der Pushforward-Funktor i_* eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Garben auf V und der Kategorie derjenigen Garben auf X , deren Träger in V liegt. Oft ist es hilfreich, auf einem einzigen Raum zu arbeiten; dann kann man sich also des Pushforward-Funktors bedienen.

Für den Rückzug $\mathcal{E}|_V := i^*\mathcal{E}$ einer kohärenten Garben \mathcal{E} auf X gilt die Rechenregel

$$i_*(\mathcal{E}|_V) \cong \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} i_*\mathcal{O}_V \cong \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{I},$$

wenn \mathcal{I} die Idealgarbe von V ist. Ferner gilt für die Kohomologie

$$H^n(V, \mathcal{F}) \cong H^n(X, i_*\mathcal{F}).$$

⁸Geradenbündel kann man auch als $\text{GL}_1(\mathcal{O}_X)$ -Hauptfaserbündel ansehen. Allgemeiner klassifiziert $H^1(X, \text{GL}_n(\mathcal{O}_X))$ Vektorbündel vom Rang n und $H^1(X, \mathcal{G})$ G -Hauptfaserbündel.

Normalgarbe und Konormalgarbe

Ist $V \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Unterschema, so ist $\mathcal{N}_{V/X}^\vee := \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \cong \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_V \cong \mathcal{I}|_V$ die *Konormalgarbe* von V in X . Sie hat Träger in V und wird daher als Garbe auf V angesehen. Die *Normalgarbe* ist die zugehörige Dualgarbe.

Wenn V in X *regulär eingebettet* ist – das bedeutet, dass es lokal Funktionen f_1, \dots, f_r gibt, welche die Idealgarbe \mathcal{I} erzeugen und eine reguläre Folge in \mathcal{O}_X bilden⁹ – so ist die Konormalgarbe lokal frei vom Rang r [Manin, Prop. 3.4].

Im glatten Fall gibt es die kurze exakte Sequenz [Vakil, Thm. 21.3.8]

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{V/X}^\vee \longrightarrow \Omega_X|_V \longrightarrow \Omega_V \longrightarrow 0.$$

2 Divisoren

Sei X ein noethersches, reguläres und ganzes Schema über \mathbb{C} oder eine komplexe Mannigfaltigkeit. Es sei \mathcal{K}_X die Garbe der rationalen bzw. meromorphen Funktionen auf X . Im Schemafall ist diese einfach die konstante Garbe mit Faser $\mathcal{O}_{X,\xi}$.

- Definition 2.1.**
1. Ein (*Weil-*)*Divisor* auf X ist eine formale \mathbb{Z} -Linearkombination von irreduziblen Hyperflächen von X . (Das Achsenkreuz in \mathbb{A}^2 ist ein Beispiel für eine reduzible Hyperfläche. Hyperflächen werden lokal durch eine reguläre Gleichung ausgeschnitten.)
 2. Der *Grad* eines Divisors ist die Summe seiner Koeffizienten.
 3. Ein Divisor D heißt genau dann *effektiv*, notiert „ $D \geq 0$ “, wenn seine Koeffizienten alle nichtnegativ sind.
 4. Ein Divisor D heißt genau dann *Hauptdivisor*, wenn er von der Form $\text{div}(f)$ für einen globalen Schnitt $f \in \mathcal{K}_X^\times(X)$ ist. Dabei ist $\text{div}(f)$ der *Null- und Polstellendivisor* von f , definiert als $\sum_Y \text{ord}_Y(f) \cdot [Y]$. Der Null- und Polstellendivisor der Nullfunktion ist nicht definiert.
 5. Divisoren D und D' heißen genau dann zueinander *linear äquivalent*, geschrieben „ $D \equiv D'$ “, wenn die Differenz $D - D'$ ein Hauptdivisor ist.

Beispiel 2.2. Der Null- und Polstellendivisor der rationalen Funktion $(x - 3)^2(x - 4)/(x - 5)^3$ auf \mathbb{A}^1 ist $2 \cdot [3] + [4] - 3 \cdot [5]$.

⁹Eine Folge (f_1, \dots, f_r) von Elementen eines Rings A heißt genau dann *regulär*, wenn f_1 in A regulär, f_2 in $A/(f_1)$ regulär, \dots , f_r in $A/(f_1, \dots, f_{r-1})$ regulär ist. Dabei heißt ein Ringelement f *regulär*, wenn Multiplikation mit f injektiv ist. Anschaulich ist eine reguläre Folge von Funktionen eine, in der keine der einzelnen Gleichungen redundant ist. Etwa ist die Folge z, z von Elementen von $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ nicht regulär, und in der Tat hat das Verschwindungsschema $V(z, z)$ dieser Funktionen auch nicht Kodimension 2.

Hauptdivisor zu sein, ist auf \mathbb{A}^1 keine Einschränkung: Offensichtlich kann man zu jedem gegebenen Divisor eine rationale Funktion konstruieren, die genau das gewünschte Null- und Polstellenverhalten zeigt. Auf \mathbb{P}^1 dagegen, der riemannschen Zahlenkugel, können nur Divisoren vom Grad Null Hauptdivisoren sein. Denn rationale Funktionen auf \mathbb{P}^1 sind stets von der Form $f(x, y)/g(x, y)$ für homogene Polynome f und g vom gleichen Grad und haben daher gleich viele Null- wie Polstellen.

Ist s ein rationaler Schnitt eines Geradenbündels \mathcal{L} – das heißt ein auf einer offenen dichten Teilmenge definierter Schnitt –, so lässt sich ebenfalls ein Null- und Polstellendivisor $\text{div}(s)$ definieren. Denn lokal gibt es einen Isomorphismus $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_X$, und $\text{div}(\varphi(s))$ ist bereits erklärt. Andere Wahlen einer lokalen Trivialisierung ändern $\varphi(s)$ nur um eine invertierbare Funktion ab und haben daher keine Auswirkung auf den Null- und Polstellendivisor, weswegen $\text{div}(s)$ global wohldefiniert ist.

Rationale Funktionen sind dasselbe wie rationale Schnitte des trivialen Geradenbündels \mathcal{O}_X . Die beiden Definitionen für den Null- und Polstellendivisor einer rationalen Funktion stimmen miteinander überein.

Warnung 2.3. Divisoren der Form $\text{div}(s)$, wobei s ein rationaler Schnitt eines Geradenbündels ist, sind trotz des gegenteiligen Anscheins im Allgemeinen *nicht* Hauptdivisoren.

Tatsächlich zeigt eine Konstruktion, zu der wir gleich kommen werden, dass *jeder* Divisor der Null- und Polstellendivisor eines geeigneten rationalen Schnitts eines geeigneten Geradenbündels ist. Das ist in der algebraischen bzw. holomorphen Welt etwas besonderes (wieso?).

Das assoziierte Bündel zu einem Divisor

Definition 2.4. Sei D ein Divisor auf X . Dann ist eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe $\mathcal{O}_X(D)$ für offene Teilmengen $U \subseteq X$ durch folgende Setzung definiert. Damit die Nullfunktion ein Schnitt von $\mathcal{O}_X(D)$ ist, gelte konventionsgemäß $D + \text{div}(0) \geq 0$.

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) := \{f \in \mathcal{K}_X(U) \mid D + \text{div}(f) \geq 0 \text{ auf } U\}$$

Positive Anteile in D erlauben also, dass Schnitte von $\mathcal{O}_X(D)$ Polstellen besitzen dürfen; negative Anteile erzwingen Nullstellen. Da $\mathcal{O}_X(D)$ als Geradenbündel eine kohärente Garbe ist, ist $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ endlichdimensional, und es ist eine interessante Frage, die Dimension dieses Raums zu bestimmen.

Beispiel 2.5. Ist $D = \text{div}(f_0)$ ein Hauptdivisor, so ist $\mathcal{O}_X(D)$ vermöge des Morphismus $\mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_X$, $f \mapsto ff_0$ global isomorph zu \mathcal{O}_X . (Wieso liegt ff_0 wirklich in \mathcal{O}_X ?)

Beispiel 2.6. Sei $X = \mathbb{P}^1$ mit den Koordinaten x und y und sei $H = V(x)$. Dann besitzt $\mathcal{O}_X(H)$ den globalen Schnitt 1. Die Garbe $\mathcal{O}_X(-H)$ hat nur den Nullschnitt als globalen Schnitt, denn es gibt keine nichttrivialen rationalen Funktionen auf \mathbb{P}^1 , welche zwar eine Nullstelle besitzen müssen, aber keine Pole haben dürfen. Auf der standardoffenen Menge $D(y)$ besitzt die Garbe $\mathcal{O}_X(-H)$ den Schnitt x/y (der Pol bei $[1 : 0]$ zählt nicht, da $[1 : 0] \notin D(y)$), auf $D(x)$ den Schnitt 1.

Es ist nicht offensichtlich, dass die Modulgarbe $\mathcal{O}_X(D)$ zu einem Divisor D lokal frei ist. Dazu benötigen wir folgendes Faktum:¹⁰

Fakt 2.7 (Huybrechts, Prop. 2.3.9). *Sei D ein Divisor. Dann gibt es um jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ und eine rationale Funktion $f_0 \in \mathcal{K}_X(U)$, sodass lokal auf U gilt: $D = \operatorname{div}(f_0)$.*

Beispiel 2.8. Sei $H = V(x)$ auf \mathbb{P}^1 . Auf $D(x)$ gilt $[H] = \operatorname{div}(1) = 0$, auf $D(y)$ gilt $[H] = \operatorname{div}(x/y)$. Die lokalen Funktionen 1 und x/y besitzen auf $D(x)$ bzw. $D(y)$ keine Polstellen; das ist bei effektiven Divisoren immer so. Ein anderes Beispiel liefert $-H$: Auf $D(x)$ gilt $-[H] = \operatorname{div}(1)$, auf $D(y)$ gilt $-[H] = \operatorname{div}(y/x)$.

Ist $x \in X$ ein Punkt, so liefert das Faktum eine trivialisierende Umgebung U für $\mathcal{O}_X(D)$: Auf U gilt $D = \operatorname{div}(f_0)$, wie in Beispiel 2.5 ist daher $\mathcal{O}_X(D)|_U \rightarrow \mathcal{O}_X|_U$, $f \mapsto f f_0$ ein Isomorphismus.

Definition 2.9. Die Menge der Geradenbündel auf X modulo Isomorphie, versehen mit dem Tensorprodukt als Gruppenstruktur, ist die *Picard-Gruppe* $\operatorname{Pic}(X)$ von X . Die Menge der Divisoren auf X modulo linearer Äquivalenz, versehen mit der Addition von Divisoren, ist die *Divisorklassengruppe* $\operatorname{Div}(X)$ von X .

Proposition 2.10. *Die Zuordnung $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ definiert eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen Divisoren auf X und Untergeradenbündeln von \mathcal{K}_X . Ferner steigt sie zu einer Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen den Divisoren auf X modulo linearer Äquivalenz und den Geradenbündeln auf X modulo Isomorphie ab.*

Beweis. Ist ein Geradenbündel zusammen mit einer Einbettung $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{K}_X$ gegeben, so können wir einen Divisor D als Null- und Polstellendivisor desjenigen rationalen Schnitts von \mathcal{L} definieren, welcher zum Schnitt $1 \in \mathcal{K}_X$ korrespondiert. Man kann zeigen, dass ein solcher stets existiert – dabei geht die Voraussetzung ein, dass \mathcal{L} ein Geradenbündel ist.

Warnung. Der Null- und Polstellendivisor der rationalen Einsfunktion ist natürlich stets trivial. Um den geht es hier aber nicht – es geht um den Divisor zu einem bestimmten rationalen Schnitt *des Geradenbündels* \mathcal{L} . Dieser war über den Null- und Polstellendivisor einer zugehörigen rationalen Funktion *unter einer lokalen Trivialisierung* definiert.

Da $\mathcal{O}_X(D)$ für Hauptdivisoren D trivial ist (Beispiel 2.5), steigt die Korrespondenz ab. Man kann zeigen, dass unter unseren Voraussetzungen an X jedes Geradenbündel auf unkanonische Art und Weise eine Untergarbe von \mathcal{K}_X ist. \square

Lemma 2.11. *Für Divisoren D und D' gilt $\mathcal{O}_X(D + D') \cong \mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D')$ auf kanonische Art und Weise. Außerdem gilt $\mathcal{O}_X(-D) \cong \mathcal{O}_X(D)^\vee$.*

¹⁰Dieses drückt die Korrespondenz zwischen Weil- und Cartier-Divisoren aus und benötigt zwingend eine Form von Glattheit. Siehe <http://math.stackexchange.com/questions/651292/what-fails-in-the-cartier-weil-divisor-correspondence-in-the-singular-case> für ein kurzes Beispiel.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung 2.12. Die Geradenbündel $\mathcal{O}_X(D)$ können auch explizit durch Übergangsfunktionen beschrieben werden. Ist $X = \bigcup_i U_i$ eine offene Überdeckung, sodass D auf U_i der Null- und Polstellendivisor zu einer rationalen Funktion f_i ist, so wird $\mathcal{O}_X(D)$ bezüglich dieser Überdeckung durch die Übergangsfunktionen f_i/f_j realisiert (diese sind nicht nur Schnitte von \mathcal{K}_X^\times , sondern sogar von \mathcal{O}_X^\times – wieso?).

Der Träger eines effektiven Divisors

Ist D ein effektiver Divisor, so ist $\mathcal{O}_X(-D)$ auf kanonische Art und Weise eine Untergarbe von \mathcal{O}_X .¹¹ Das gibt Anlass zur kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_V \longrightarrow 0,$$

die ein abgeschlossenes Unterschema $V := V(\mathcal{O}_X(-D))$ definiert – die Vereinigung der in D vorkommenden Hyperflächen. Dieses (oder seine Reduktion) heißt *Träger* von D .

Beispiel 2.13. Die Idealgarbe zu einem einpunktigen Unterschema in \mathbb{P}^1 ist durch Serres Twistingbündel $\mathcal{O}(-1)$ gegeben. Die Idealgarbe einer Hyperfläche, welche durch eine homogene Gleichung vom Grad d ausgeschnitten wird, ist $\mathcal{O}(-d)$.

Für den Spezialfall, dass D aus nur einer irreduziblen Kurve C mit einfacher Wertung besteht, zeigt diese Sequenz, dass die Konormalgarbe von C in X durch $\mathcal{O}_X(-C)|_C$ gegeben ist. Das ist auch anschaulich plausibel: XXX

Divisoren auf \mathbb{P}^n

Sei H eine Hyperebene in \mathbb{P}^n .

Proposition 2.14. Der Homomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Div}(\mathbb{P}^n)$, $m \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mH)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Das Bündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mH)$ ist isomorph zu Serres Twistinggarbe $\mathcal{O}(m)$. Ist etwa $H = V(x_0)$, so ist ein Isomorphismus durch $f \mapsto x_0^m f$ gegeben.

Divisoren auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

XXX

¹¹Die Inklusion $\mathcal{O}_X(-D) \rightarrow \mathcal{O}_X$ bleibt auf faserniveau $\mathcal{O}_X(-D)|_x \rightarrow \mathcal{O}_X|_x$ nicht unbedingt für alle Punkte x injektiv. Man sollte sich hier also nicht ein Unterbündel eines Geradenbündels vorstellen. Tatsächlich ist die Inklusion für Punkte $x \in V = V(\mathcal{O}_X(-D))$ auf faserniveau die Nullabbildung: Denn eine Funktion aus $\mathcal{O}_X(-D)$ muss ja längs V verschwinden, die Äquivalenzklasse $[f]$ einer solchen Funktion f wird also auf $f(x) = 0$ geschickt. *Punkte sind nicht flach!*

3 Der Satz von Riemann–Roch für Kurven

Fakt 3.1. *Der Grad eines Hauptdivisors auf einer kompakten Kurve ist stets Null.*

Definition 3.2. Der Grad eines Geradenbündels \mathcal{L} auf einer kompakten Kurve ist der Grad eines Divisors D mit $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$.

Dank Proposition 2.10 und des Faktums ist diese Setzung wohldefiniert. Anschaulich ist der Grad eines Geradenbündels die Anzahl der Null- und Polstellen (entsprechend gewichtet), die jeder nichttriviale rationale Schnitt von \mathcal{L} hat. Es ist bemerkenswert, dass alle nichttrivialen rationalen Schnitte tatsächlich dasselbe Null- und Polstellenverhalten zeigen.

Beispiel 3.3. Der Grad von Serres Twistinggarbe $\mathcal{O}(m)$ auf \mathbb{P}^1 ist m .

Beispiel 3.4. Für jedes Geradenbündel \mathcal{L} auf einer kompakten Kurve gilt $\deg \mathcal{L}^\vee = -\deg \mathcal{L}$.

Bemerkung 3.5. Den Grad eines Vektorbündels \mathcal{L} auf einer kompakten Kurve X kann man auch rein topologisch beschreiben. Ist $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(X, \mathbb{Z})$, so gilt $\deg \mathcal{L} = \int_X c_1(\mathcal{L})$. (XXX Quelle)

Im ersten Abschnitt wurde versprochen, dass die Euler-Charakteristik einer kohärenten Garbe nur von diskreten Invarianten der Garbe abhängt und daher leicht zu berechnen sei. Für den Fall von Geradenbündeln auf Kurven löst der Satz von Riemann–Roch dieses Versprechen ein:

Satz 3.6 (Riemann–Roch für Kurven). *Sei X eine kompakte Kurve und \mathcal{L} ein Geradenbündel auf X . Dann gilt $\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_X) + \deg \mathcal{L}$.*

Ravi Vakil bezeichnet diese Formulierung als *Baby-Variante* von Riemann–Roch, da in $\chi(\mathcal{L})$ noch der schlecht zugängliche Summand $\dim H^1(X, \mathcal{L})$ vorkommt. Mit *Serre-Dualität* kann man diesen noch zu $\dim H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{L}^\vee)$ umschreiben, sodass nur noch nullte Kohomologie vorkommt:

$$h^0(\mathcal{L}) - h^0(\Omega_X^1 \otimes \mathcal{L}^\vee) = 1 - g(X) + \deg \mathcal{L}.$$

Dabei haben wir auch die Euler-Charakteristik der Strukturgarbe durch das Geschlecht von X ausgedrückt.

Beweis des Satzes. Wegen Proposition 2.10 genügt es, die Behauptung für Geradenbündel der Form $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ nachzuweisen, also $\deg D = \chi(\mathcal{O}_X(D)) - \chi(\mathcal{O}_X)$ nachzurechnen. Für den trivialen Divisor $D = 0$ ist das klar.

Gelte für zwei Divisoren D und D' die Beziehung $D = D' + [P]$, wobei P ein Punkt auf X ist. Zum Unterschema $P \subseteq X$ gibt es die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-P) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_P \longrightarrow 0.$$

Dabei ist \mathcal{O}_P eine im Punkt P konzentrierte Wolkenkratzergarbe; dort hat sie den Halm \mathbb{C} . (Eigentlich sollten wir $i_*\mathcal{O}_P$ schreiben, wobei $i : P \hookrightarrow X$ die Einbettung ist.) Nach Tensorieren mit $\mathcal{O}_X(D)$ erhalten wir die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D - P) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{O}_P \longrightarrow 0,$$

welche immer noch exakt ist, da Tensorieren mit lokal freien Garben Exaktheit erhält. Der rechte Term sollte eigentlich $\mathcal{O}_P \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$ sein, aber da \mathcal{O}_P nur Träger auf P hat und $\mathcal{O}_X(D)$ auf einer Umgebung von P frei ist, gilt $\mathcal{O}_P \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_P \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_P$. Wegen der Additivität der Euler-Charakteristik folgt

$$\begin{aligned} \deg D - \chi(\mathcal{O}_X(D)) + \chi(\mathcal{O}_X) &= (\deg D' + 1) - \chi(\mathcal{O}_X(D')) - \chi(\mathcal{O}_P) + \chi(\mathcal{O}_X) \\ &= \deg D' - \chi(\mathcal{O}_X(D')) + \chi(\mathcal{O}_X), \end{aligned}$$

also gilt die Behauptung genau dann für D , wenn sie für D' gilt. In die Rechnung ging $\chi(\mathcal{O}_P) = 1$ ein – als Wolkenkratzergarbe hat \mathcal{O}_P nur Kohomologie in Dimension Null.

Da jeder Divisor aus dem trivialen Divisor durch eine endliche Anzahl von Additionen und Subtraktionen von Punkten entsteht, ist der Beweis vollständig. \square

4 Die Schnittform auf der Picard-Gruppe

Sei X eine kompakte Fläche (projektive Varietät über \mathbb{C} oder kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension 2).

Definition 4.1. Seien C und C' Kurven auf X in allgemeiner Lage. Die *Schnittmultiplizität* von C und C' bei einem Punkt $x \in X$ ist

$$m_x(C, C') := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C \cap C', x} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X, x} / (f, g),$$

wenn f und g lokale Gleichungen (das heißt lokale Erzeuger der jeweiligen Idealgarben) für C bzw. C' sind.

Allgemeine Lage bedeutet: Um jeden Punkt gibt es eine offene Umgebung mit lokalen Gleichungen f und g auf dieser Umgebung, sodass (f, g) eine reguläre Folge in \mathcal{O}_X ist (siehe Fußnote 9). Diese Bedingung garantiert, dass der Schnitt $C \cap C'$ Kodimension 2, also Dimension 0 hat und daher aus isolierten Punkten besteht.

XXX Transversalität impliziert allgemeine Lage.

Beispiel 4.2. Sei $X = \mathbb{A}^2$ (noch benötigen wir keine Kompaktheit). Sei $C = V(y)$ und $C' = V(y - x^2)$. Trotz des tangentialen Anschmiegeverhaltens beim Ursprung befinden sich C und C' in allgemeiner Lage. Die Schnittmultiplizität beim Ursprung ist

$$m_0(C, C') = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\} / (y, y - x^2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x] / (x^2) = 2.$$

Bemerkung 4.3. Wer *glatte* Schnitttheorie schon kennt, erwartet vielleicht geeignete Vorzeichen in der Definition der Schnittmultiplizität und hätte beim vorherigen Beispiel eher das Ergebnis Null (zwei Nullstellen mit unterschiedlichen Vorzeichen) erwartet. Solche Vorzeichen gibt es in der algebraischen bzw. holomorphen Welt aber nicht.

Beispiel 4.4. Seien C und C' Kurven in allgemeiner Lage und x ein Punkt, der nicht im Schnitt liegt. Seien f bzw. g lokale Gleichungen. Dann gilt $f(x) \neq 0$ oder $g(x) \neq 0$, also ist f oder g in $\mathcal{O}_{X,x}$ invertierbar. Somit ist $m_x(C, C') = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,x}/(f, g) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,x}/(1) = 0$.

Beispiel 4.5. Seien C und C' Kurven in allgemeiner Lage und x ein Punkt des Schnitts. Seien f bzw. g lokale Gleichungen. Dann ist die Schnittmultiplizität genau dann Eins, wenn f und g das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ – das Ideal derjenigen Funktionskeime, welche bei x Null sind – erzeugen.

Sei konkret etwa $X = \mathbb{A}^2$ (noch benötigen wir keine Kompaktheit), $C = V(x)$ und $C' = V(y)$. Dann ist die Schnittmultiplizität beim Ursprung Eins. Und in der Tat: Ist h ein Funktionskeim am Ursprung mit $h(0) = 0$, so lässt sich h in der Form $ax + by$ mit geeigneten weiteren Funktionskeimen a und b schreiben.

Ist dagegen $C = V(x)$ und $C' = V(x - y^2)$, so ist die Schnittmultiplizität 2. Und tatsächlich lässt sich der beim Ursprung verschwindende Funktionskeim y *nicht* als Linearkombination von x und $x - y^2$ ausdrücken.

Definition 4.6. Seien C und C' Kurven auf X , nicht notwendigerweise in allgemeiner Lage. Dann ist ihre *Schnittzahl* die Zahl

$$(C \cdot C') := \chi(\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{C'}) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi(\mathrm{Tor}_n^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{C'})) \in \mathbb{Z}.$$

Dabei verwenden wir das *abgeleitete Tensorprodukt* – ein Komplex von Garben, dessen Kohomologie die Tor-Gruppengarben berechnet. Dieser selbst ist als Komplex von Garben nicht wohldefiniert, aber seine Homologiegarben („Kern modulo Bild“) sind es schon; daher ist auch die Euler-Charakteristik wohldefiniert.¹²

Im Fall, dass C und C' in allgemeiner Lage sind, kann man zeigen, dass das gewöhnliche Tensorprodukt genügt, die höheren Tor-Terme also verschwinden.¹³ In diesem Fall gilt

$$(C \cdot C') = \chi(\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{C'}) = \chi(\mathcal{O}_{C \cap C'}) = \sum_{x \in C \cap C'} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C \cap C', x} = \sum_{x \in C \cap C'} m_x(C, C').$$

¹²Die Euler-Charakteristik eines Komplexes \mathcal{E}^\bullet ist $\chi(\mathcal{E}^\bullet) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \chi(\mathcal{E}^n)$. Es ist eine nette Übungsaufgabe, die Identität $\chi(\mathcal{E}^\bullet) = \sum_n (-1)^n \chi(\mathcal{H}^n(\mathcal{E}^\bullet))$ zu bestätigen. Diese bezeugt, dass die Euler-Charakteristik eines Komplexes nur von dessen Kohomologie abhängt.

¹³Zur Berechnung des abgeleiteten Tensorprodukts muss man einen der beiden Faktoren flach auflösen. Eine geeignete Auflösung von \mathcal{O}_C ist $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-C) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$; das ist sogar eine lokal freie Auflösung. Wenn f eine lokale Gleichung für C ist und diese auch noch regulär ist, sodass $\mathcal{O}_X(-C) = (f)$ isomorph zu \mathcal{O}_X ist, hat man also die Auflösung $0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{f} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$. Das abgeleitete Tensorprodukt ist daher der Komplex $0 \rightarrow \mathcal{O}_{C'} \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{C'} \rightarrow 0$. Dessen Homologie in Grad -1 ist Null, denn wegen der Voraussetzung der allgemeinen Lage ist f auch noch in $\mathcal{O}_{C'}$ regulär. Die Homologie in Grad 0 ist $\mathcal{O}_{C'}/(f) \cong \mathcal{O}_{C'} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_C$.

In diesem Fall ist die Schnittzahl also auch nichtnegativ. Im allgemeinen Fall muss das nicht unbedingt sein, dazu werden wir Beispiele sehen. Die Kompaktheit von X geht insofern ein, als dass wir die Euler-Charakteristik kohärenter Garben verwenden. Damit diese wohldefiniert ist, muss die Garbenkohomologie endlichdimensional sein.

Definition 4.7. Für Geradenbündel \mathcal{E} und \mathcal{F} auf X ist die *Schnittzahl* die Zahl

$$(\mathcal{E} \cdot \mathcal{F}) := \chi((\mathcal{O}_X - \mathcal{E}^\vee) \cdot (\mathcal{O}_X - \mathcal{F}^\vee)) := \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{E}^\vee) - \chi(\mathcal{F}^\vee) + \chi(\mathcal{E}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}^\vee).$$

Der mittlere Ausdruck ist dabei als formale Rechnung in der K-Theorie von X zu verstehen. Offensichtlich hängt die Schnittzahl nur von den Isomorphieklassen von \mathcal{E} und \mathcal{F} ab, weswegen sie zu einer *Schnittform* auf der Picard-Gruppe absteigt.

Proposition 4.8. 1. Seien C und C' Kurven auf X . Dann ist $(\mathcal{O}_X(C) \cdot \mathcal{O}_X(C')) = (C \cdot C')$.

2. Sei C eine Kurve und \mathcal{L} ein Geradenbündel auf X . Dann ist $(\mathcal{O}_X(C) \cdot \mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L}|_C)$.

3. Die Schnittzahl definiert eine symmetrische und bilineare Abbildung $\text{Pic}(X) \times \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Aus der ersten Teilaussage folgt insbesondere, dass die Schnittzahl nur von der linearen Äquivalenzklasse der beteiligten Kurven abhängt – denn für $C \equiv \tilde{C}$ gilt $\mathcal{O}_X(C) \cong \mathcal{O}_X(\tilde{C})$. Es ist auch bemerkenswert, dass man die Schnittzahl ganz ohne Rückgriff auf Torsionsgarben nur mit Geradenbündeln beschreiben kann.

Beweis. 1. Die erste Aussage folgt sofort mit den kurzen exakten Sequenzen zu den Unterschemata C und C' : In K -Theorie gilt $\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_X - \mathcal{O}_X(-C)$ und analog für C' .

2. Aus der kurzen exakten Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-C) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ ergibt sich durch Tensorieren mit \mathcal{L}^\vee die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{O}_X(-C) \longrightarrow \mathcal{L}^\vee \longrightarrow \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow 0.$$

Dabei sollten wir eigentlich $i_*\mathcal{O}_C$ schreiben und die Tensorprodukte mit dem Grundring \mathcal{O}_X dekorieren. Jedenfalls folgt

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_X(C) \cdot \mathcal{L}) &= \chi(\mathcal{O}) - \chi(\mathcal{O}_X(-C)) - \chi(\mathcal{L}^\vee) + \chi(\mathcal{O}_X(-C) \otimes \mathcal{L}^\vee) \\ &= \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{O}_C) \\ &= \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{L}^\vee|_C) \\ &= -\deg \mathcal{L}^\vee|_C \\ &= \deg \mathcal{L}|_C. \end{aligned}$$

Beim Schritt, wo der Grad ins Spiel kommt, haben wir den Satz von Riemann–Roch für die Kurve C verwendet. Im nächsten Schritt haben wir Dualisieren mit Rückzug auf C vertauscht – das ist für lokal freie Modulgarben in Ordnung.

3. Die Symmetrie ist offensichtlich. Die Bilinearität ist nichttrivial und benötigt, neben etwas Rechnerei, ein Resultat von Serre [Beauville, Seite 4]. \square

Selbstschnitte

Das Extrembeispiel für Schnitte von Kurven, die nicht in allgemeiner Lage sind, sind *Selbstschnitte*.

Beispiel 4.9. Sei H eine Hyperebene in \mathbb{P}^2 , also eine Gerade. Um den Selbstschnitt $(H \cdot H)$ zu bestimmen, betrachten wir eine weitere Gerade H' , die H in genau einem Punkt schneidet. Da je zwei Hyperflächen desselben Grads auf \mathbb{P}^2 linear äquivalent sind, gilt $(H \cdot H) = (H \cdot H') = 1$. Das folgt natürlich auch sofort mit dem Satz von Bézout.

Proposition 4.10. *Sei C eine Kurve in X . Dann gilt*

$$(C \cdot C) = \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{O}_X(-C)|_C) \stackrel{\text{RR}}{=} \deg \mathcal{O}_X(C)|_C.$$

Beweis. Zur Auflösung von \mathcal{O}_C verwenden wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0.$$

Ein Komplex zur Berechnung des abgeleiteten Tensorprodukts ist daher

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-C) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_C \xrightarrow{0} \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow 0.$$

Das Differential ist Null (bedenke $\mathcal{O}_C \cong \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-C)$). Daher ist der Selbstschnitt gleich

$$(C \cdot C) = \chi(\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{O}_X(-C) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{O}_X(-C)|_C). \quad \square$$

Die Proposition wird anschaulicher, wenn man sie allgemeinert.

Proposition 4.11. *Sei X von Dimension $2n$. Sei C in X regulär eingebettet und von Kodimension n . Sei $\mathcal{N}_{C/X}^\vee$ das Konormalenbündel. Dann ist*

$$(C \cdot C) = \chi(\Lambda_{\mathcal{O}_C}^\bullet \mathcal{N}_{C/X}^\vee).$$

Im Spezialfall, dass C eine Kurve auf einer Fläche X ist, ist das Konormalenbündel durch $\mathcal{O}_X(-C)|_C$ gegeben und die einzigen nichttrivialen äußeren Potenzen sind Λ^0 und Λ^1 . So erhält man aus der allgemeinen Proposition die spezielle zurück.

Beweis. Ist lokal f_1, \dots, f_n eine reguläre Folge von Funktionen, welche die Idealgarbe \mathcal{J} von C erzeugen, so liefert der *Koszul-Komplex* eine freie Auflösung von \mathcal{O}_C . Im Spezialfall $n = 1$ hat dieser die Form

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{f_1} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0,$$

im Fall $n = 2$ die Form

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{(f_1 - f_2)} \mathcal{O}_X^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0,$$

und allgemein ist er über äußere Potenzen von \mathcal{O}_X^n gegeben. Die Differentiale sind unter den Standardbasen durch Matrizen gegeben, deren Einträge nur die Funktionen f_i (mit Vorfaktoren aus $\{-1, 0, 1\}$) sind. Einen zur Berechnung des in der Definition von $(C \cdot C)$ auftretenden abgeleiteten Tensorprodukts Komplex erhalten wir durch Tensorieren der Auflösung mit $\mathcal{O}_C \cong \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$. Dabei werden die Differentiale alle zu Null, und wir erhalten den Komplex $\Lambda_{\mathcal{O}_X}^\bullet \mathcal{O}_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{J} \cong \Lambda_{\mathcal{O}_X/\mathcal{J}}^\bullet (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})^n \cong \Lambda_{\mathcal{O}_C}^\bullet (\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) = \Lambda_{\mathcal{O}_C}^\bullet \mathcal{N}_{C/X}^\vee$.¹⁴ Der resultierende Isomorphismus $\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) \rightarrow \Lambda_{\mathcal{O}_C}^i \mathcal{N}_{C/X}^\vee$ hängt nicht von der Wahl der regulären Folge ab. Daher erhalten wir diesen Isomorphismus auch auf globaler Ebene. [Manin, Thm. 3.5] \square

Der Selbstschnitt einer Kurve C kann negativ sein. Das drückt aus, dass die Kurve nicht algebraisch bzw. holomorph zu einer linear äquivalenten Kurve C' bewegt werden kann, welche zu C allgemeine Lage hat – denn der Schnitt zweier Kurven in allgemeiner Lage ist stets nichtnegativ. In der glatten Welt sind solche Bewegungen immer möglich, ein negativer Selbstschnitt liegt dann an negativen Indizes.

In der glatten Welt kann man sich die Formel für den Selbstschnitt auch wie folgt anschaulich klarmachen. Um die Kurve C in X zu deformieren, können wir sie in Normalenrichtung bewegen: Ist s ein Schnitt des Normalenbündels, so bewegen wir in einer Tubenumgebung einen Punkt x der Kurve zu $x + s(x)$. Die entstehende Kurve C' wird die Kurve C in genau den Stellen schneiden, an denen s Null ist. Die Anzahl dieser Nullstellen ist gerade der Grad des Normalenbündels.¹⁵

Beispiel 4.12. Sei X die Aufblasung der projektiven Ebene an einem Punkt und E der exzeptionelle Divisor in X . Dann ist E isomorph zu $\mathbb{P}(\mathcal{N})$, der Projektivierung des Normalenbündels des Punkts in \mathbb{P}^2 ; und das Konormalenbündel von E in X ist unter dieser Korrespondenz Serres Twistingbündel $\mathcal{O}(1)$.¹⁶ Daher ist $(E \cdot E) = \deg \mathcal{O}(1)^\vee = \deg \mathcal{O}(-1) = -1$.

¹⁴Ein Isomorphismus $(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})^n \rightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ ist durch $([g_1], \dots, [g_n]) \mapsto [\sum_i g_i f_i]$ gegeben.

¹⁵Siehe den Kommentar von Donu Arapura und die Antwort von Daniel Litt auf <http://mathoverflow.net/questions/111464/self-intersection-and-the-normal-bundle>.

¹⁶Sei $Y \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Unterschema. Dann sind die Grundtatsachen über die Aufblasung $X' \rightarrow X$ und den exzeptionellen Divisor $Y' \hookrightarrow X'$ (das ist das Urbild von Y unter $X' \rightarrow X$) folgende. (1) Der eingeschränkte Morphismus $X' \setminus Y' \rightarrow X \setminus Y$ ist ein Isomorphismus. (2) $Y' \rightarrow Y$ ist isomorph zu $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y/X}) \rightarrow Y$. (3) Die Einbettung $Y' \hookrightarrow X'$ ist regulär von Kodimension Eins mit Konormalgarbe $\mathcal{N}_{Y'/X'}^\vee \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y/X})}(1)$. Diese drei Fakten werden etwa in [Manin, Prop. 12.2] erläutert und bewiesen. Außerdem wichtig ist: (4) Die Aufblasung $X' \rightarrow X$ ist die universelle (finale) Art und Weise, das Unterschema Y zu einem Unterschema zu machen, das regulär von Kodimension Eins ist [Stacks, Tag 0806].

Topologische Beschreibung der Schnittzahl

Die Schnittzahl lässt sich auch rein topologisch, ohne Rückgriff auf die algebraische bzw. holomorphe Struktur, beschreiben. Dazu sei an ein Faktum über die erste Chernklasse erinnert:

Fakt 4.13 (Griffiths/Harris, Seite 141). *Ist $i : C \hookrightarrow X$ die Einbettung einer Kurve, so gilt $\int_X c_1(\mathcal{O}_X(C)) \cup \beta = \int_C i^*(\beta)$ für alle $\beta \in H^2(X, \mathbb{Z})$.*

Daher folgt für Kurven C und C' auf X (mit $i : C \hookrightarrow X$)

$$\begin{aligned} (C \cdot C')_{\text{top.}} &:= \int_X \text{PD}(C) \cup \text{PD}(C') = \int_X c_1(\mathcal{O}_X(C)) \cup c_1(\mathcal{O}_X(C')) \\ &= \int_C i^*(c_1(\mathcal{O}_X(C'))) = \int_C c_1(i^*\mathcal{O}_X(C')) = \int_C c_1(\mathcal{O}_X(C')|_C) \\ &= \deg \mathcal{O}_X(C')|_C = (C \cdot C'). \end{aligned}$$

5 Der Satz von Riemann–Roch für Flächen

Sei X eine kompakte Fläche (projektive Varietät über \mathbb{C} oder kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension 2). Sei $\omega_X := \Lambda^2 \Omega_X^1$ das Bündel der Differentialformen im Topgrad. Ein Divisor K_X mit $\mathcal{O}_X(K_X) \cong \omega_X$ (ein solcher ist bis auf lineare Äquivalenz eindeutig bestimmt) heißt auch *kanonischer Divisor*.

Beispiel 5.1. Auf $X = \mathbb{P}^1$ mit Koordinaten x und y (noch ist die Dimension nicht wichtig) gilt $\omega_X \cong \mathcal{O}(-2)$. Das kann man schnell einsehen, wenn man den Null- und Polstellendivisor eines beliebigen nichttrivialen rationalen Schnitts von ω_X betrachtet: Ein solcher ist beispielsweise $d(x/y)$. Wegen $d(x/y) = (y dx - x dy)/y^2$ hat dieser eine doppelte Polstelle und keine Nullstellen.

Beispiel 5.2. Auf $X = \mathbb{P}^2$ mit Koordinaten x, y und z gilt $\omega_X \cong \mathcal{O}(-3)$. Ein rationaler Schnitt von ω_X ist nämlich

$$d(x/z) \wedge d(y/z) = \frac{z dx - x dz}{z^2} \wedge \frac{z dy - y dz}{z^2} = \frac{z dx dy - y dx dz + x dy dz}{z^3}.$$

Fakt 5.3. *Es ist $H^2(X, \omega_X)$ eindimensional und für $i = 0, 1, 2$ induziert das Cup-Produkt für jedes Geradenbündel \mathcal{L} eine nicht ausgeartete Bilinearform.*

$$H^i(X, \mathcal{L}) \times H^{2-i}(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}^\vee) \longrightarrow H^2(X, \omega_X) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$$

XXX Bedeutung, Intuition, Poincaré-Dualität, ...

Korollar 5.4. *Für jedes Geradenbündel \mathcal{L} gilt $\chi(\mathcal{L}) = \chi(\omega_X \otimes \mathcal{L}^\vee)$. Insbesondere gilt $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\omega_X)$.*

Beweis. Es gilt $\dim H^i(X, \mathcal{L}) = \dim H^{2-i}(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}^\vee)$, und die Vorzeichen passen. \square

Satz 5.5 (Riemann–Roch für Flächen). *Sei \mathcal{L} ein Geradenbündel auf X . Dann gilt*

$$\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2} \cdot ((\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}) - (\mathcal{L} \cdot \omega_X)).$$

Beweis. Die Behauptung folgt durch Umstellen der Gleichung

$$\begin{aligned} -(\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}) + (\mathcal{L} \cdot \omega_X) &= (\mathcal{L}^\vee \cdot \mathcal{L}) + (\mathcal{L}^\vee \cdot \omega_X^\vee) \\ &= (\mathcal{L}^\vee \cdot (\mathcal{L} \otimes \omega_X^\vee)) \\ &= \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L}) - \chi(\omega_X \otimes \mathcal{L}^\vee) + \chi(\omega_X) \\ &= \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L}) - \chi(\mathcal{L}) + \chi(\mathcal{O}_X) \\ &= 2 \cdot (\chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L})). \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 5.6. Angewendet auf das zu einem Divisor assoziierte Geradenbündel $\mathcal{O}_X(D)$ lautet der Satz von Riemann–Roch wie folgt:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^1(\mathcal{O}_X(D)) + h^0(\mathcal{O}_X(K - D)) = 1 - h^1(\mathcal{O}_X) + p_g + \frac{1}{2} \cdot D(D - K_X).$$

Dabei ist $p_g := h^0(\mathcal{O}_X(K_X)) = h^0(\omega_X)$ das *geometrische Geschlecht* von X . Ferner ist $q := h^1(\mathcal{O}_X)$ auch als *Irregularität* von X bekannt; aus Hodgetheorie folgt, dass $2q = b_1 = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathbb{C})$.

Fakt 5.7 (Noethers Formel). *Es gilt $\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12} \cdot (K_X^2 + \chi_{\text{top}}(X))$.*

Korollar 5.8 (Formel für das Geschlecht). *Sei C eine irreduzible Kurve auf X . Für ihr Geschlecht $g(C) := \dim_{\mathbb{C}} H^1(C, \mathcal{O}_C)$ gilt*

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2} \cdot C(C + K_X).$$

Beweis.

$$g(C) = h^1(\mathcal{O}_C) = 1 - \chi(\mathcal{O}_C) = 1 - (\chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-C))) = 1 + \frac{1}{2} \cdot C(C + K). \quad \square$$

Proposition 5.9 (Adjunktionsformel). *Sei C eine glatte Kurve auf X . Dann gilt*

$$\mathcal{O}_X(K_X + C)|_C \cong \omega_C.$$

Beweis. Es gibt die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{C/X}^\vee \longrightarrow \Omega_X^1|_C \longrightarrow \Omega_C^1 \longrightarrow 0.$$

Dabei ist das Konormalenbündel durch $\mathcal{O}_X(-C)|_C$ gegeben. Durch Übergang zu den Determinantenbündeln folgt $\Lambda^2 \Omega_X^1|_C \cong \mathcal{O}_X(-C)|_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \omega_C$ und somit $\omega_C \cong \omega_X|_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(C)|_C \cong \mathcal{O}_X(K_X + C)|_C$. \square