Die Picard-Gruppe und der Satz von Riemann–Roch

Ingo Blechschmidt

16. Oktober 2014

Das sind informale Notizen zum ersten Kapitel von Arnaud Beauvilles Buch *Complex Algebraic Surfaces*.

Inhaltsverzeichnis

1 Garbenkohomologie

Sei X ein Raum (Schema über $\mathbb{C}$ oder komplexe Mannigfaltigkeit). Dann untersucht man (algebraische bzw. holomorphe) Vektorbündel auf X; äquivalent dazu ist die Kategorie der lokal freien $\mathcal{O}_X$-Modulgarben.[1] Diese ist aber keine abelsche Kategorie und daher kein geeigneter Kontext, um Funktoren abzuleiten.

Man behilft sich mit der größeren Kategorie $\mathrm{Coh}(X)$ der *kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modulgarben*. Das ist eine volle Unterkategorie der Kategorie aller $\mathcal{O}_X$-Modulgarben, welche abelsch ist. Im Fall, dass X ein lokal noethersches Schema oder eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, umfasst diese Kategorie die Kategorie der lokal freien Garben und ist die kleinste volle Unterkategorie mit dieser Eigenschaft. Kohärenz ist eine Endlichkeitseigenschaft, die im Allgemeinen stärker ist, als von endlichem Typ zu sein.[2] Die Faserdimension

[1] Die Äquivalenz wird wie folgt vermittelt: Einem Vektorbündel $E \to X$ ordnet man die Garbe seiner algebraischen bzw. holomorphen Schnitte zu. Da man Schnitte addieren und mit regulären bzw. holomorphen Funktionen multiplizieren kann, wird die erhaltene Garbe zu einer Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Die lokale Trivialität von E übersetzt sich in die lokale Freiheit der zugehörigen Garbe. Fasern des Vektorbündels entsprechen Fasern der Garbe (das sind die Halme, tensoriert mit dem Restklassenkörper an der jeweiligen Stelle).

[2] Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{E}$ heißt genau dann *kohärent*, wenn sie von endlichem Typ ist und wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ der Kern eines jeden $\mathcal{O}_X|_U$-linearen Morphismus $(\mathcal{O}_X|_U)^n \to \mathcal{E}|_U$ ebenfalls von endlichem Typ ist. Die Kohärenz von $\mathcal{O}_X$ für den Fall einer komplexen Mannigfaltigkeit ist die Aussage des Kohärenzsatzes von Oka (XXX Quelle).

einer kohärenten Garbe kann – anders als bei lokal freien Garben – von Punkt zu Punkt variieren.

Von zentraler Bedeutung ist der Funktor $\Gamma(X, \_) : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Vect}(\mathbb{C})$, welcher nur linksexakt, aber in allen interessanten Fällen nicht exakt ist und daher abgeleitet werden muss. Damit definiert man *Garbenkohomologie*: Die n-te Kohomologie einer kohärenten Garbe $\mathcal{E}$ ist $H^n(X, \mathcal{E}) := R^n\Gamma(X, \_)(\mathcal{E})$.[3]

Gewöhnliche (singuläre) Kohomologie erhält man aus dieser Definition zurück, wenn man für $\mathcal{E}$ konstante Garben verwendet.[4] Im klassischen Fall spielt die Wahl der Koeffizienten ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, …) dank des universellen Koeffiziententheorems keine große Rolle; das ist bei Garbenkohomologie nicht so. Garbenkohomologie kann man sich *nicht* über „Zykel modulo Ränder" anschaulich vorstellen, geometrische Vorstellung ist bedingt aber durch *Čech-Methoden* gegeben (XXX Quelle).

Garbenkohomologie hat drei für uns sehr wesentliche Eigenschaften:

1. Falls X eigentlich über dem Punkt bzw. kompakt ist, so sind die $H^n(X, \mathcal{E})$ *endlich-dimensionale* Vektorräume[5] und für $i > \dim X$ verschwindet die i-ten Kohomologie. (XXX Quelle)

2. Ist $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von kohärenten Garben, so erhält man eine lange exakte Sequenz in Kohomologie:

$$\cdots \longrightarrow H^n(X, \mathcal{E}') \longrightarrow H^n(X, \mathcal{E}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{E}'') \longrightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{E}) \longrightarrow \cdots$$

3. Die *Eulercharakteristik* einer kohärenten Garbe $\mathcal{E}$, definiert als die alternierende Summe $\chi(\mathcal{E}) := \sum_{n=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{C}} H^n(X, \mathcal{E}) \in \mathbb{Z}$, ist additiv in kurzen exakten Sequenzen. Deshalb hängt $\chi(\mathcal{E})$ nur von der *Klasse von $\mathcal{E}$ in der K-Theorie ab*, also nur von *diskreten Invarianten* von $\mathcal{E}$.[6]

Ein Grund, Garbenkohomologie statt klassischer Kohomologie zu studieren, ist schlichtweg der, dass höhere Kohomologie mit Werten in konstanten Garben auf irreduziblen Schemata stets trivial ist. Das liegt daran, dass auf irreduziblen topologischen Räumen

[3] Das ist etwas gemogelt. Der Kategorie $\mathrm{Coh}(X)$ mangelt es im Allgemeinen an genügend Injektiven, weswegen man zu größeren Kategorien übergeht.

[4] Eine Garbe heißt genau dann *konstant*, wenn sie die Garbifizierung einer konstanten Prägarbe ist – einer solchen, die jeder offenen Teilmenge des Raums dieselbe Menge A zuordnet. Explizit ist die Menge der U-Schnitte einer solchen konstanten Garbe die Menge der stetigen Funktionen $U \to A$, wobei A mit der diskreten Topologie versehen wird. Konstante Garben sind nicht kohärent – sie tragen nicht einmal eine $\mathcal{O}_X$-Modulstruktur – durch Übergang von $\mathrm{Coh}(X)$ zur Kategorie aller Garben abelscher Gruppen kann man aber auch für solche Garben Kohomologie erklären.

[5] Dass das nicht immer so ist, zeigt schon das Beispiel $H^0(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$, der unendlich-dimensionale Raum der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$.

[6] Außerdem ist die Eulercharakteristik auf flachen Familien von kohärenten Garben konstant (XXX Quelle). Die K-Theorie von X ist die abelsche Gruppe formaler $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von Isomorphieklassen von kohärenten Garben auf X modulo den Relationen $\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}''$ für jede kurze exakte Sequenz $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$. Die K-Theorie von $\mathbb{C}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ (mit Isomorphismus $\mathcal{E} \mapsto \operatorname{rank} \mathcal{E}$), die von $\mathbb{P}^n$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}[X]/(X+1)^{n+1}$. (XXX Quelle)

konstante Garben stets welk (flabby) und daher azyklisch bezüglich des globale-Schnitte-Funktors ist.

Ein weiterer Grund liegt darin, dass man oft an der Dimension des globalen Schnittraums einer kohärenten Garbe $\mathcal{E}$ interessiert ist, also an $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{E})$. Diese ist im Allgemeinen aber nicht leicht zu berechnen. Die Eulercharakteristik dagegen, in der diese Dimension als ein Summand auftritt, ist dank ihrer Stabilitätseigenschaften leichter zugänglich. Im Fall, dass $\mathcal{E}$ das zu einem Divisor D assoziierte Geradenbündel ist (siehe Abschnitt 2), ist die Frage nach der Dimension des globalen Schnittraums die sehr konkrete Frage nach der Dimension des Raums meromorpher Funktionen mit durch D vorgegebenem Null- und Polstellenverhalten.

Historisch war auch die *Leray-Spektralsequenz* eine große Motivation, Garbenkohomologie zu untersuchen. Diese liefert im Kontext einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ eine Möglichkeit, aus Kenntnis der (gewöhnlichen) Kohomologie von Y und der Fasern $f^{-1}[y]$ Rückschlüsse auf die Kohomologie von X zu ziehen; dabei kommt unweigerlich Garbenkohomologie vor.[7]

Als letzter Grund sei angeführt, dass Garbenkohomologie geometrische Objekte klassiziferen kann. Etwa stehen die Elemente von $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ auf kanonische Art und Weise mit den Geradenbündeln auf X (bis auf Isomorphie) in Eins-zu-Eins-Korrespondenz.[8]

[7] Nur im Fall, dass f eine Faserung ist, kann man noch auf den Spezialfall der Leray–Serre-Spektralsequenz ausweichen, bei der man nur Kohomologie mit Werten in lokalen Systemen benötigt.

[8] Geradenbündel kann man auch als $\mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_X)$-Hauptfaserbündel ansehen. Allgemeiner klassifiziert $H^1(X, \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X))$ Vektorbündel vom Rang n und $H^1(X, \mathcal{G})$ G-Hauptfaserbündel.