

Pizzaseminar zur Kategorientheorie

Lösung zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Wenn X isomorph zu Y ist, so gibt es Morphismen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$. Die Morphismen $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ und $F(g) : F(Y) \rightarrow F(X)$ sind zueinander invers, da aus den Funktoraxiomen

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$$

und analog $F(f) \circ F(g) = \text{id}_{F(Y)}$ folgt. Somit ist $F(X)$ isomorph zu $F(Y)$.

Falls umgekehrt $F(X)$ isomorph zu $F(Y)$ ist, also Morphismen $f : F(X) \rightarrow F(Y)$ und $g : F(Y) \rightarrow F(X)$ existieren, die auf beide Arten miteinander verknüpft die Identität ergeben, und der Funktor F zusätzlich volltreu ist, so besitzen f und g eindeutig bestimmte Urbilder $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ und $\tilde{g} : Y \rightarrow X$ mit $F(\tilde{f}) = f$ und $F(\tilde{g}) = g$ (die Existenz folgt dabei aus der Vollheit, die Eindeutigkeit aus der Treue von F). Da $F(\tilde{g} \circ \tilde{f}) = F(\tilde{g}) \circ F(\tilde{f}) = \text{id}_{F(X)} = F(\text{id}_X)$ gilt, also das Bild von $(\tilde{g} \circ \tilde{f})$ unter F gleich dem Bild von id_X ist, folgt aus der Treue von F , dass $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \text{id}_X$ ist. Parallel erhält man $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \text{id}_Y$. Da \tilde{f} und \tilde{g} zueinander invers sind, ist X isomorph zu Y .

Aufgabe 2:

Seien BP und BQ die aus den Quasiordnungen P und Q konstruierten Kategorien, deren Objekte die Elemente der jeweiligen Ordnungsrelation sind, und zwischen zwei Objekten a und b genau dann ein Morphismus „ $a \leq b$ “ existiert, wenn $a \leq b$ gilt und $f : P \rightarrow Q$ eine monotone Abbildung zwischen P und Q . Wir basteln einen Funktor F durch

$$\begin{array}{ccc} BP & \longrightarrow & BQ \\ x & \longmapsto & f(x) \\ \text{„}x \leq y\text{“} & \longmapsto & \text{„}f(x) \sqsubseteq f(y)\text{“} \end{array}$$

Wir müssen noch begründen, dass diese Definition überhaupt Sinn ergibt, also der Morphismus „ $f(x) \sqsubseteq f(y)$ “ tatsächlich existiert, wenn „ $x \leq y$ “ existiert. Das ist klar, denn übertragen aus der Sprache der Kategorien entspricht dies der Eigenschaft von f , monoton zu sein.

Außerdem ist zu zeigen, dass die Funktoraxiome erfüllt sind. Wir machen folgende Beobachtung: In den Kategorien BP und BQ existiert zwischen zwei Objekten höchstens ein Morphismus. Dadurch sind alle Morphismen mit gleichem Start- und Zielobjekt bereits zueinander identisch und der einzige Morphismus von einem Objekt zu sich selbst ist der Identitätsmorphimus. Solche Kategorien werden auch als *dünn* bezeichnet. Damit können wir diesen Teil der Aufgabe sogar etwas allgemeiner begründen:

Satz. Sei \mathcal{C} eine beliebige und \mathcal{D} eine dünne Kategorie und $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine Zuordnung von Objekten in \mathcal{C} zu Objekten in \mathcal{D} und von Morphismen aus $\text{Hom}(X, Y)$ zu Morphismen aus $\text{Hom}(G(X), G(Y))$. Dann ist G ein Funktor.

Beweis. Wir müssen die Funktoraxiome nachprüfen:

- a) $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$, da es nur einen Morphismus von $F(X)$ nach $F(X)$, nämlich den Identitätsmorphismus, gibt.
- b) Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Morphismen aus \mathcal{C} . Da die Morphismen $F(g \circ f)$ und $F(g) \circ F(f)$ beide von $F(X)$ nach $F(Z)$ laufen, sind sie bereits identisch. \square

Aufgabe 3:

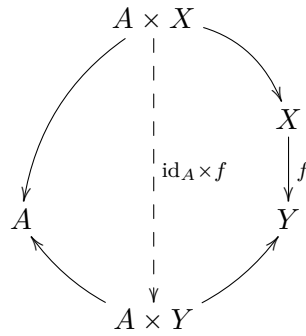
- a) Potenzfunktor $P : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$, $M \mapsto \mathcal{P}(M)$, $f \mapsto f[\cdot]$
 - treu: \checkmark
 - voll: \times Hinweis: Betrachte $f : \mathcal{P}(\{\star\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{\star\})$, $p \mapsto \emptyset$
 - wes. surj.: \times Die leere Menge und allgemeiner alle Mengen, deren Kardinalität nicht Zweierpotenz ist, sind nicht zu einem Objekt im Bild von P isomorph.
- b) Vergissfunktor $V : \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$
 - treu: \checkmark
 - voll: \times Nicht jede Abbildung zwischen Gruppen ist Gruppenhomomorphismus.
 - wes. surj.: \times Die leere Menge ist nicht zu einem Objekt im Bild von V isomorph, da jede Gruppe mindestens ein Element enthält.
- c) Vergissfunktor $V : \text{AbGrp} \rightarrow \text{Grp}$
 - treu: \checkmark
 - voll: \checkmark $\text{Hom}_{\text{AbGrp}}(G, H) = \text{Hom}_{\text{Grp}}(G, H) = \{f : G \rightarrow H \mid f \text{ Gruppenhomo}\}$
 - wes. surj.: \times *Behauptung:* Die symmetrische Gruppe S_3 ist nicht zu einer abelschen Gruppe isomorph.
Beweis: Angenommen, $f : S_3 \rightarrow G$ ist ein Gruppenisomorphismus und G eine abelsche Gruppe. Dann ist $f((1\ 2) \circ (2\ 3)) = f((1\ 2)) \circ f((2\ 3)) = f((2\ 3)) \circ f((1\ 2)) = f((2\ 3) \circ (1\ 2))$. Da aber $(1\ 2) \circ (2\ 3) \neq (2\ 3) \circ (1\ 2)$, ist dies ein Widerspruch zur Injektivität von f .
- d) Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow H$ als Funktor $B\phi : BG \rightarrow BH$
 - treu: genau dann, wenn ϕ injektiv ist
 - voll: genau dann, wenn ϕ surjektiv ist
 - wes. surj.: \checkmark Klar, da BH aus nur einem Objekt besteht.

Aufgabe 4:

Wir vervollständigen die Zuordnungszuschrift zu einer Funktordefinition:

$$\begin{array}{lll} F: & \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{C} \\ & X & \longmapsto A \times X \\ & f & \longmapsto \text{id}_A \times f \end{array}$$

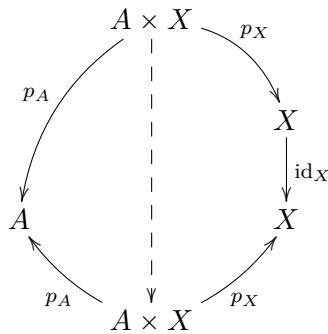
Dabei bezeichnen wir mit $(\text{id}_A \times f)$ den eindeutig bestimmten Morphismus, der folgendes Diagramm kommutieren lässt (die Existenz und Eindeutigkeit folgen daraus, dass $(A \times X)$ Möchtegern-Produkt von A und X ist):



Bemerkung: In Set, Grp, AbGrp und \mathbb{R} -Vect ist $(\text{id}_A \times f)$ definiert durch

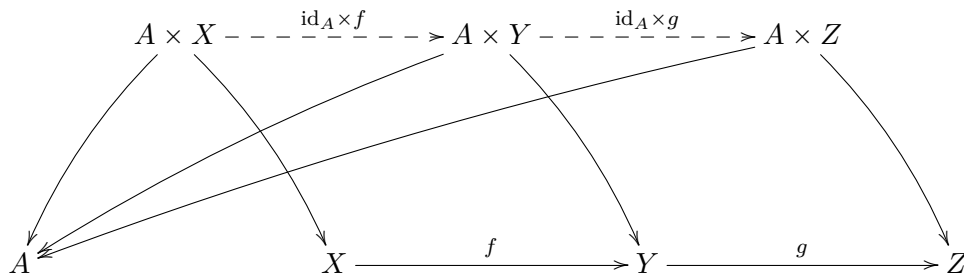
$$\begin{aligned} A \times X &\longrightarrow A \times Y \\ (a, x) &\longmapsto (a, f(x)). \end{aligned}$$

Wir müssen noch nachweisen, dass die Funktoraxiome erfüllt sind. Dazu betrachten wir zunächst folgendes Diagramm:

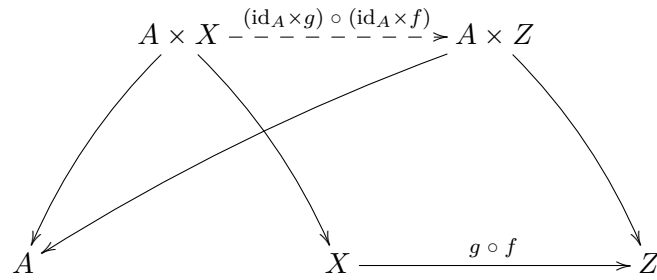


Da $\text{id}_{A \times X}$ obiges Diagramm kommutieren lässt, gilt $F(\text{id}_X) = \text{id}_A \times \text{id}_X = \text{id}_{A \times X}$ (warum?).

Zum Nachweis des zweiten Funktoraxioms seien Morphismen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ gegeben. Nach Definition lassen $\text{id}_A \times f$ und $\text{id}_A \times g$ folgendes Diagramm kommutieren:



Insbesondere kommutiert



Nach Definition wird obiges Diagramm auch von $\text{id}_A \times (g \circ f)$ anstelle von $(\text{id}_A \times g) \circ (\text{id}_A \times f)$ zum Kommutieren gebracht. Da $\text{id}_A \times (g \circ f)$ aber eindeutig bestimmt ist, gilt die Gleichung

$$F(g) \circ F(f) = (\text{id}_A \times g) \circ (\text{id}_A \times f) = \text{id}_A \times (g \circ f) = F(g \circ f).$$

Projektaufgabe:

Sei $m \in \text{Hom}_C(A, X)$ beliebig. Dann ist

$$(\text{id}_X)_\star(m) = \text{id}_X \circ m = m = \text{id}_{\text{Hom}_C(A, X)}(m).$$

Da m beliebig war, gilt das erste Funktoraxiom $\check{A}(\text{id}_X) = \text{id}_{\check{A}(X)}$.

Für das zweite Funktoraxiom seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ gegeben. Wir rechnen:

$$(g_\star \circ f_\star)(m) = g_\star(f \circ m) = g \circ (f \circ m) = (g \circ f) \circ m = (g \circ f)_\star(m)$$

Somit gilt wie gewünscht $\check{A}(g) \circ \check{A}(f) = \check{A}(g \circ f)$.

$$F()$$