Universität Augsburg
16. Oktober 2013

Pizzaseminar zu konstruktiver Mathematik
4. Übungsblatt

Aufgabe 1. *Distributionen*

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{supp}(\phi) \text{ ist eine kompakte Teilmenge von } \mathbb{R}\}$$

ist das wichtigste Beispiel für einen *Raum von Testfunktionen.* Man topologisiert $C_c^\infty(\mathbb{R})$ so, dass eine Funktionenfolge $(\phi_n)_n$ in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ genau dann gegen eine Funktion ϕ konvergiert, wenn es ein Kompaktum $K \subseteq \Omega$ gibt, sodass alle ϕ_n Träger in K haben und sodass für jede Ableitungsordnung k die Konvergenz

$$\sup_{x\in K} \left| \tfrac{\partial^k}{\partial x^k}(\phi_n(x) - \phi(x)) \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

vorliegt. Eine *Distribution auf* $\mathbb{R}$ ist eine stetige lineare Abbildung $C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lokal integrable Funktion. Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} T_f & : & C_c^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \phi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\phi(x)\,dx \end{array}$$

eine Distribution auf $\mathbb{R}$ ist. (Wieso ist das unbeschränkte Integral wohldefiniert?) In diesem Sinn kann man also jede (lokal integrable) Funktion auch als Distribution auffassen.

b) Die *Ableitung* D' einer (beliebigen!) Distribution D ist über die Vorschrift

$$D'(\phi) := -D(\phi')$$

definiert, wobei auf der rechten Seite die gewöhnliche Ableitung von ϕ auftritt. Zeige, dass die so definierte Abbildung tatsächlich eine Distribution ist.

c) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Zeige: $(T_f)' = T_{f'}$.

Die Einbettung von Funktionen in Distributionen respektiert also den Ableitungsbegriff.

In der Literatur schreibt man oft „$\int D(x)\phi(x)\,dx$“ für $D(\phi)$, falls D eine Distribution und ϕ eine Testfunktion ist. Diese Notation spiegelt folgendes Motto wieder:

Motto. Distributionen sind *verallgemeinerte Funktionen*; sie definieren sich nicht durch ihre Funktionswerte, sondern dadurch, wie sie sich „unter dem Integral“ mit beliebigen Testfunktionen verhalten.

Dieses Motto harmoniert mit der kategorientheoretischen Vorstellung von Prägarben als ideelle Objekte, welche allein dadurch bestimmt werden, welche Beziehungen sie zu anderen Objekten haben.

Aufgabe 2. *Die Delta-Distribution*

Sei $\delta : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\phi \mapsto \phi(0)$.

a) Zeige, dass δ tatsächlich eine Distribution ist.

b) Rechtfertige folgende Notation: $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\phi(x)\,dx = \phi(0)$.

Eine Folge $(\delta_n)_n$ nichtnegativer integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}$ heißt genau dann *Dirac-Folge*, wenn $\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\,dx = 1$ für alle $n \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \delta_n(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für alle $\varepsilon > 0$.

c) Zeige, dass $(\delta_n)_n$ mit $\delta_n(x) := \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \exp(-x^2/n^2)$ eine Dirac-Folge ist.

d) Zeige für alle $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$: $\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\phi(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \delta(\phi)$.

Aufgabe 3. *Bra-Ket-Notation*

Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, also ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einer positiv definiten hermiteschen Sesquilinearform $(\_,\_)$, der bezüglich der induzierten Metrik vollständig ist. Sei $H^\vee = \{A : H \to \mathbb{C} \mid A \text{ linear und stetig}\}$ der topologische Dualraum von H. Die Konvention sei so, dass die Sesquilinearform im rechten Argument linear ist.

a) Der für die Hilbertraumtheorie fundamentale *Satz von Riesz* besagt, dass die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow H^\vee \\ x &\longmapsto (x,\_) \end{aligned}$$

eine antilineare Bijektion ist. Beweise diese Behauptung für den Fall, dass H endlichdimensional ist.

Man schreibt nun „$|x\rangle$“ für $x \in H$ und „$\langle x|$“ für $(\_,x) \in H^\vee$.

b) Zeige: $\langle x|y\rangle := (\langle x|)(|y\rangle) = (x,y)$ für alle $x, y \in H$.

c) Zeige: $\langle x|A|y\rangle := \big(\langle x| \circ A\big)\big(|y\rangle\big) = \big(\langle x|\big)\big(A(|y\rangle)\big) = (x, Ay)$ für alle $x, y \in H$, $A : H \to H$ linear und stetig.

d) Sei $x \in H$ ein Vektor von Norm 1. Zeige: Der Operator $P := |x\rangle\,\langle x| : H \to H$, definiert über $P(y) = \langle x|\,(y) \cdot |x\rangle$ für $y \in H$, erfüllt $P \circ P = P$ und hat $\operatorname{span}(x)$ als Bild.

e) Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von H. Zeige: Der Operator $\sum_{i=1}^n |e_i\rangle\,\langle e_i|$ ist der Identitätsoperator.

f) Sei weiterhin $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von H. Beobachte, wie suggestiv die Notation dich in einem Beweis der Identität $|x\rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_i|x\rangle \cdot |e_i\rangle$ leitet.