

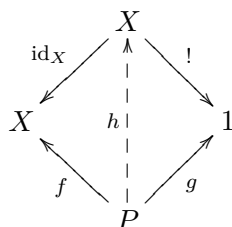
Pizzaseminar zur Kategorientheorie

Lösung zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1:

- a) Zu zeigen: Es gibt Morphismen $X \rightarrow X$ und $X \rightarrow 1$, mit denen X ein Produkt von X und 1 ist.

Wähle als Morphismen $\text{id}_X : X \rightarrow X$ und den (da 1 terminales Objekt ist) eindeutig bestimmten Morphismus $! : X \rightarrow 1$. Nun muss für jedes Möchtegern-Produkt P mit den Morphismen $f : P \rightarrow X$ und $g : P \rightarrow 1$ genau ein Morphismus $h : P \rightarrow X$ existieren, sodass folgendes Diagramm kommutiert:



Existenz von h :

Setze $h := f$. Es gilt also $\text{id}_X \circ h = h = f$. (Das linke Dreieck kommutiert.) Und da $! \circ h$ und g zwei Morphismen $P \rightarrow 1$ sind (und 1 terminal ist), gilt auch $! \circ h = g$. (Das rechte Dreieck kommutiert.)

Eindeutigkeit von h :

Für jedes $h : P \rightarrow X$, das das Diagramm kommutieren lässt, gilt: $\text{id}_X \circ h = f$. Es folgt also sofort $h = f$.

- b) Die duale Aussage lautet:
 Besitzt C ein initiales Objekt 0 , so gilt

$$X \amalg 0 \cong X.$$

(X kann mit den Morphismen $\text{id}_X : X \rightarrow X$ und $! : 0 \rightarrow X$ als Koproduct von X und 0 dienen.)