Universität Augsburg
4. April 2013

Pizzaseminar zur Kategorientheorie
7. Übungsblatt

Aufgabe 1. *Auf- und Abrundung*

Wir betrachten die drei monotonen Abbildungen

$$\begin{array}{rcccccl} \lceil\_\rceil : & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z}, & x & \longmapsto & \text{Aufrundung von } x := (\text{kleinste ganze Zahl} \geq x) \\ i : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q}, & z & \longmapsto & z \\ \lfloor\_\rfloor : & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z}, & x & \longmapsto & \text{Abrundung von } x := (\text{größte ganze Zahl} \leq x) \end{array}$$

und ihre gemäß Aufgabe 2 von Übungsblatt 3 induzierten Funktoren

$$\begin{tikzcd} B\mathbb{Q} \arrow[r, bend left, "B\lceil\_\rceil"] \arrow[r, bend right, "B\lfloor\_\rfloor"'] & B\mathbb{Z}. \arrow[l, "Bi"] \end{tikzcd}$$

a) Mache dir klar, dass für alle $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\lceil x \rceil \leq y \quad\iff\quad x \leq i(y).$$

Welche analoge Beziehung gilt zwischen i und $\lfloor\_\rfloor$?

b) Zeige: $B\lceil\_\rceil \dashv Bi \dashv B\lfloor\_\rfloor$.

Aufgabe 2. *Freie Monoide*

Ein *Monoid* besteht aus einer Menge M, einer assoziativen zweistelligen Verknüpfung $\circ$ und einem neutralen Element e; Monoiden darf es also anders als Gruppen an Inversen fehlen. Monoidhomomorphismen müssen die Verknüpfung und das neutrale Element bewahren.

a) Sei X eine Menge. Ein *Wort* über X ist eine endliche Folge von Elementen aus X. Wir haben keine Angst vor dem leeren Wort. Wie wird die Menge $F(X)$ der Wörter über X zu einem Monoid?

b) Ergänze die Konstruktion aus a) zu einem Funktor der Kategorie der Monoide in die Kategorie der Mengen.

c) Zeige, dass der so gebastelte Funktor linksadjungiert zum Vergissfunktor ist.

Aufgabe 3. *Freie Körper?*

Ein Körperhomomorphismus muss Addition und Multiplikation sowie Null- und Einselement bewahren.

a) Zeige: Die Kategorie der Körper besitzt kein initiales Objekt.

b) Folgere: Der Vergissfunktor von der Kategorie der Körper in die Kategorie der Mengen besitzt keinen Linksadjungierten. Freie Körper gibt es also nicht.