

Pizzaseminar zu konstruktiver Mathematik

5. Übungsblatt

Aufgabe 1. *Monomorphismen und Epimorphismen aus interner Sicht*

Sei X ein topologischer Raum (oder eine Örtlichkeit). Sei $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben auf X . Zeige, ...

- a) ... dass α genau dann Monomorphismus ist, wenn $X \models \forall x, y : \mathcal{F}. \alpha(x) = \alpha(y) \Rightarrow x = y$.
- b) ... dass α genau dann ein Epimorphismus ist, wenn $X \models \forall y : \mathcal{G}. \exists x : \mathcal{F}. \alpha(x) = y$.

Aus Sicht der internen Sprache des Garbentopos $\text{Sh}(X)$ sehen also Monomorphismen wie gewöhnliche injektive und Epimorphismen wie gewöhnliche surjektive Abbildungen aus.

Aufgabe 2. *Topologische Interpretation der Doppelnegation*

Sei X ein topologischer Raum. Sei φ eine Aussage. Zeige:

$$X \models \neg\neg\varphi \quad \text{gdw.} \quad U \models \varphi \text{ für eine dichte offene Teilmenge } U \subseteq X.$$

Aufgabe 3. *Die Ringgarbe stetiger Funktionen als Körper*

Sei X ein topologischer Raum. Sei \mathcal{C}^0 die Garbe der stetigen Funktionen auf X .

- a) Sei $f \in \Gamma(U, \mathcal{C}^0)$. Zeige: Die Funktion f besitzt genau dann ein multiplikatives Inverses in $\Gamma(U, \mathcal{C}^0)$, wenn $X \models \ulcorner f \text{ invertierbar} \urcorner$, d. h. wenn $X \models \exists g : \mathcal{C}^0. fg = 1$.
- b) Zeige, dass \mathcal{C}^0 aus interner Sicht in folgendem Sinn ein Körper ist:

$$X \models \forall f : \mathcal{C}^0. \neg(\ulcorner f \text{ invertierbar} \urcorner) \Rightarrow f = 0.$$

- c) Zeige, dass \mathcal{C}^0 aber nicht folgende Körperbedingung erfüllt:

$$X \models \forall f : \mathcal{C}^0. f = 0 \vee \ulcorner f \text{ invertierbar} \urcorner.$$

Bemerkung. Man kann zeigen, dass \mathcal{C}^0 aus interner Sicht die Menge der über dedekindsche Schnitte konstruierten reellen Zahlen ist.

Aufgabe 4. *Basen endlich erzeugter Vektorräume*

- a) Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Ring k , der die Körperbedingung aus Aufgabe 3b) erfüllt. Zeige konstruktiv, dass V *nicht nicht* eine Basis besitzt.

Tipp. Verwende, dass die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid V \text{ besitzt ein Erzeugendensystem der Länge } n\}$ *nicht nicht* ein Minimum besitzt.

- b) Sei X ein topologischer Raum. Sei \mathcal{F} eine \mathcal{C}^0 -Modulgarbe, die lokal von endlichem Typ ist (das ist gleichbedeutend damit, dass \mathcal{F} aus interner Sicht ein endlich erzeugter \mathcal{C}^0 -Modul ist). Folgere direkt aus a), dass \mathcal{F} auf einer dichten offenen Teilmenge U lokal frei ist (dass es also eine offene Überdeckung $U = \bigcup_i U_i$ gibt, sodass $\mathcal{F}|_{U_i}$ isomorph zu einer Modulgarbe der Form $(\mathcal{C}^0|_{U_i})^{n_i}$ ist).