Garben :)

①

Def: Garbe $\mathcal{E}$ auf top. Raum X ist ein Funktor $\underbrace{\overbrace{\mathrm{Ouv}(X)}^{\text{Kat. der off. Teilmengen } X}{}^{op} \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathrm{Set}}_{\text{d.h. Menge } \mathcal{E}(U) \text{ für jede off. Tm. } U \subseteq X,\ \text{Abb. } \mathcal{E}(V) \xrightarrow{res^V_U} \mathcal{E}(U) \text{ für } V \supseteq U}$

sodass für jede off. Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ gilt:

„Verklebebed."

Sind kompatible Schnitte $s_i \in \mathcal{E}(U_i)$ geg.,

so ex. genau ein Schnitt $s \in \mathcal{E}(U)$

mit $s|_{U_i} := res^U_{U_i}(s) \overset{!}{=} s_i$ f.a. $i \in I$.

$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ f.a. $i, j \in I$

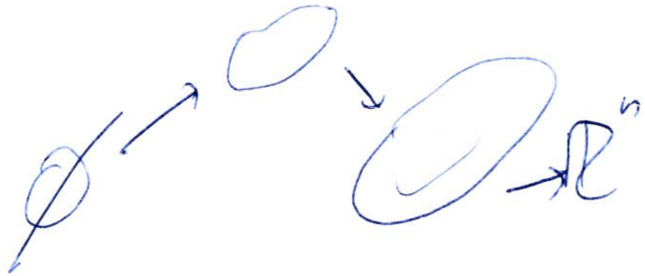
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(V) \arrow[r, "res^V_V"] \arrow[r, bend right, "id"', "="] & \mathcal{E}(V) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(W) \arrow[r, "res^W_V"] \arrow[rr, bend right, "res^W_U"', "="] & \mathcal{E}(V) \arrow[r, "res^V_U"] & \mathcal{E}(U) \end{tikzcd}$$

Kat. $\mathrm{Ouv}(X)$:

Objekte: $U \subseteq X$ offen

Mor: $\mathrm{Hom}(U,V) := \begin{cases} \{*\}, & U \subseteq V \\ \emptyset, & U \not\subseteq V \end{cases} = \{* \mid U \subseteq V\}$



Bsp: X top. Raum.

$\to$ „Garbe $\mathcal{C}$ der stet. Fkt.": $\mathcal{C}(U) := \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$.

Bem: Jede Garbe stellt man sich wie $\mathcal{C}$ vor, nur mit anderer Bed. von „stetige Fkt".

Bsp: X glatte Mf. $\rightsquigarrow$ Garbe $\mathcal{C}^\infty$ der glatten Fkt.

$\mathcal{C}^1$ $\quad$ $\mathcal{C}_{\text{lok. beschränkt}}$

$\mathcal{C}^\omega$ $\quad$ L^p

Def: Der **Halm** $\mathcal{E}_x$ einer Garbe $\mathcal{E}$ bei einem Punkt $x \in X$ ist

$$\mathcal{E}_x := \operatorname*{colim}_{\substack{U \subseteq X \text{ offen} \\ x \in U}} \mathcal{E}(U) = \left(\coprod_{x \in U \subseteq X} \mathcal{E}(U) \right) \Big/ \sim$$

$f \in \mathcal{E}(U) \sim g \in \mathcal{E}(V)$
$:\Leftrightarrow \exists\, x \in W \subseteq_{\text{offen}} U \cap V : f_{|W} = g_{|W}$

: Fkt'wert

$\sim$ Fkt'keim

Die Elemente von $\mathcal{E}_x$ heißen **Keime**.

Fkt.

Bsp: Sei $X = \mathbb{C}^1$, $\mathcal{O}_X$ = Garbe der holomorphen Fkt.

$\mathcal{O}_{X,0} \cong$ Ring der ~~Fkt~~ in einer bel. kleinen Umg. der 0 konv. Potenzreihen

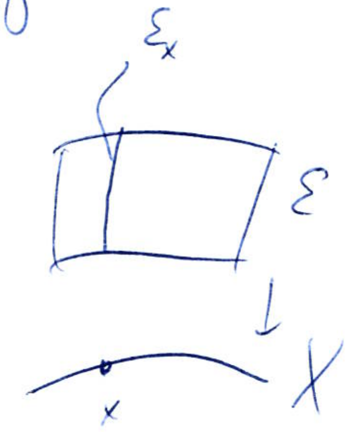
$\cup\!\!\shortmid$

$[f] \quad = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;\middle|\; \text{Konv'radius} > 0 \right\}$

$[f] \longmapsto \sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, z^n$

Motto: Eine Garbe auf X ist eine „stetige Ansammlung von Mengen", eine Menge für jeden Punkt aus X":

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{„stetig"}} & \mathrm{Set} \\ x & \longmapsto & \mathcal{E}_x \end{array}$$



Bem: Formalisierung ist mit Topostheorie möglich.

$$X \xrightarrow{\text{geom. Mor.}} \mathrm{Set}$$

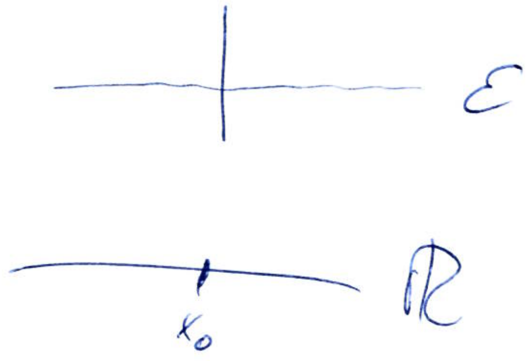
als Topos aufgefasst

Topos, der je einen Punkt für jede Menge hat

<u>Bsp.:</u> $X = \mathbb{R}^1$, $x_0 \in X$ ⇝ Wolkenkratzergarbe bei x_0:

$$\mathcal{E}(U) := \begin{cases} \mathbb{R}, & x_0 \in U \\ 0, & x_0 \notin U \end{cases} = \{ r \in \mathbb{R} \mid r = 0 \vee x_0 \in U \}$$

↑ Nullvektorraum



⇝ $\mathcal{E}_{x_0} \cong \mathbb{R}$, $\quad \mathcal{E}_x = 0$ für $x \neq x_0$.

Satz: Sei $\mathcal{E}$ eine Prägarbe auf X. Dann:

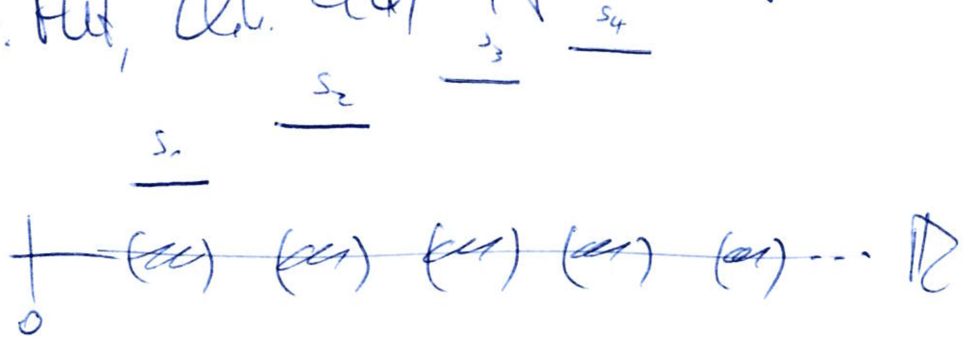
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[rr, "\forall"] \arrow[dr, "\exists"'] & & \forall \mathcal{F} \text{ Garbe} \\
& \exists\, a\mathcal{E} \text{ Garbe} \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] \arrow[u, phantom, "\equiv"] &
\end{tikzcd}$$

$\exists \quad \forall \quad \exists!$

Garbifizierung von $\mathcal{E}$

$a\mathcal{E} = \mathcal{E}^a = \mathcal{E}^{++} = s\mathcal{E}$

Bsp: $X = \mathbb{R}^1$, $\mathcal{E} =$ der Prägarbe der beschr. Fkt., d.h. $\mathcal{E}(U) = \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt} \}$.



$\mathcal{E}$ ist keine Garbe.

$a\mathcal{E}$ ist die Garbe der lok. beschr. Fkt.:

$(a\mathcal{E})(U) = \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ lokal beschr.} \}$

Konstruktion: $a\mathcal{E} = (\mathcal{E}^+)^+$

Konstruktion: $\mathcal{E}^+(U) := $ (Menge der Familien kompatibler Schnitte auf bel. off. ÜD von U) $/\sim$

$\cup$

$[(\mathcal{U}, (s_i \in \mathcal{E}(U_i))_i)]$

$(U_i)_i$ mit $U = \bigcup_{i \in I} U_i$

$(\mathcal{U}, (s_i))_i \sim (\mathcal{U}', (s'_i))$

$:\Leftrightarrow s_i|_{U_i \cap U'_{i'}} = s'_{i'}|_{U_i \cap U'_{i'}}$

für i, i'

$= \operatorname*{colim}_{\substack{\mathcal{U} = (U_i)_i \\ \text{off. ÜD von } U}}$ [Menge der komp. Schnitte bzgl. $\mathcal{U}$]

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(U) &\longrightarrow \mathcal{E}^+(U) \\ s &\longmapsto [(\{U\}, (s))] \end{aligned}$$

6a

Bem.: $\mathcal{E}$ Garbe $\Leftrightarrow$ $\forall U \subseteq X$ offen: $\mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}^+(U)$ bijektiv.

(7) $(a\mathcal{E})_x \cong \mathcal{E}_x$ für alle $x \in X$.

Bem.: (1) $\mathcal{E}^+$ ist separierte Prägarbe.

(2) $\mathcal{E}$ separierte Prägarbe $\Rightarrow$ $\mathcal{E}^+$ Garbe.

(3) $a \dashv$ Vergissfunktor $Sh(X) \to PSh(X)$

„ist linksadj. zu"

(4) RAPL, LAPC a bewahrt bel. Kolimiten, Vergissflkt. bew. Limiten

(5) Kolimiten in $Sh(X)$ berechnet man so: Kolimes in $PSh(X)$ berechnen (wo's man geht), dann garbifizieren.

(6) Ein kleines Wunder: a bew. endl. Limiten.

Bem.: $$\underbrace{\left(\operatorname{colim}_i \mathcal{E}_i\right)}_{\text{Kolimes in PSh}(X)}(U) := \underbrace{\operatorname{colim}_i \mathcal{E}_i(U)}_{\text{Kolimes in Set}}$$ (s. fertige Formel im Pizzaseminarskript)

Bem.: Wann Menge von Würsten als Limes, wann als Kolimes definieren?

$$\lim\left(\mathbb{R}[X]_{\le 0} \xleftarrow{\text{Abschneiden}} \mathbb{R}[X]_{\le 1} \xleftarrow{\text{Abschneiden}} \mathbb{R}[X]_{\le 2} \leftarrow \cdots\right) = \mathbb{R}[[X]]$$

$$\operatorname{colim}\left(\mathbb{R}[X]_{\le 0} \hookrightarrow \mathbb{R}[X]_{\le 1} \hookrightarrow \mathbb{R}[X]_{\le 2} \hookrightarrow \cdots\right) = \mathbb{R}[X]$$

Def

Bem: Für $\alpha : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ (Mor. von Garben) ist äqv:

(1) α ist ein Mono in $Sh(X)$

(2) alle $\alpha_x : \mathcal{E}_x \to \mathcal{F}_x$ sind inj. (f.a. $x \in X$)

(3) alle $\alpha_U : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{F}(U)$ sind inj. (f.a. $U \subseteq X$ offen)

(4) α ist ein Mono in $PSh(X)$

α ist ein Epi in $PSh(X)$

$\Downarrow$ $\not\Uparrow$

(1) α ist ein Epi in $Sh(X)$

(2) alle $\alpha_x : \mathcal{E}_x \to \mathcal{F}_x$ sind surjektiv

(3) $\forall U \subseteq X$ offen $\forall s \in \mathcal{F}(U)$:

~~$\exists t \in \mathcal{E}(U): \alpha_U(t) = s$~~

$\exists U = \bigcup_{i \in I} U_i$: $\forall i \in I$:

$\exists t_i \in \mathcal{E}(U_i): \alpha_{U_i}(t) = s|_{U_i}$

Bsp: $X = \mathbb{C}^1$, $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^\times$ ist ein Epi von Garben, aber kein Epi von Prägarben

auf U: $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)^\times$

$f \longmapsto \exp \circ f$

$\frac{1}{z} \in \mathcal{O}_X^\times(\mathbb{C} \setminus \{0\})$

$\shortparallel$ $e^{f(z)}$ für ein $f \in \mathcal{O}_X(\mathbb{C} \setminus \{0\})$

7a

<u>Bem.:</u> $X \xrightarrow{f} Y$ ist ein Mono

$$\iff \begin{tikzcd} X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "id"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$ ist ein Pullbackdiagramm.

$\{(x,x') \mid f(x) = f$

8

Def.: Sei $\mathcal{E}$ eine lokale Ringgarbe (Ringgarbe + ~~alle Halme~~ die Ringstruktur auf allen Halmen soll lokal sein)

Ringgarbe: $\mathrm{Oun}(X)^{op} \to \mathrm{Ring}$

~~alle $\mathcal{E}(U)$ lokale Ringe~~

R Ring lokal

$:\Leftrightarrow \exists!\, m \subseteq R$ max. Ideal

$\Leftrightarrow 1 \neq 0$ in R und $\forall x, y \in R: x+y$ inv. $\Rightarrow x$ inv. $\vee$ y inv.

$\Leftrightarrow$ in jeder invbaren Summe ist ein Summand invbar.

$R \setminus R^{*}$

Sei $s \in \mathcal{E}(U)$.

Sei $x \in U$.

Dann ist der Wert von s in x definiert als

Bsp.: Ringe von Funktionskeimen sind lokale Ringe.

$$s(x) := s|_x$$

$$:= [[s]] \in \mathcal{E}_x / m_{\mathcal{E}_x} =: k(x)$$

Körper

Ist $\mathcal{E}$ eine Modulgarbe über eine Ringgarbe $\mathcal{O}$, so lautet die Def'n. so:

$$s(x) := [[s]] \in \mathcal{E}_x / m_{\mathcal{O}_x} \mathcal{E}_x \cong \mathcal{E}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x)$$

VR über dem Körper $k(x)$

Bsp.: $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $\mathcal{O}_X$ = Garbe der reg. Fkt.

$\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{Z}$.

$s := 60 \in \mathcal{O}_X(X)$. Was sind die Werte dieses Schnitts?

$$s((2)) = [60] \in k((2)) = \mathbb{Z}/(2)$$
$$= 0$$
$$s((3)) = 0 \in \mathbb{Z}/(3)$$
$$s((5)) = 0 \in \mathbb{Z}/(5)$$
$$s((7)) = 2^4 \in \mathbb{Z}/(7)$$
$$s((11)) = 5 \in \mathbb{Z}/(11)$$

$60 = 2^{2} \cdot 3 \cdot 5$

Bem.: s hat eine doppelte Nst. in $(2) \in X$.

Bsp: X top. Raum, $\mathcal{C}$ ist eine lokale Ringgarbe.

Dann
$$\mathcal{C}_x / \mathfrak{m}_{\mathcal{C}_x} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}.$$
$$[\underbrace{[f]}_{\text{Keim}}] \longmapsto f(x).$$

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{C}_x} = \mathcal{C}_x \setminus \mathcal{C}_x^{\times} = \{[f] \mid f(0)=0\}$$

Unter diesem Iso gilt:

$$\underbrace{s(x)}_{\substack{\text{Wert i.S. von} \\ \text{Seite 8}}} = \underbrace{s(x)_0}_{\text{trad. Fkt'wert}}$$

f.a. $s \in \mathcal{C}(U)$

d.h. $s: U \to \mathbb{R}$ stetig

Def: Ein lokal geringter Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$.

top. Raum

lokale Ringgarbe auf X

Bsp: X Mannf. $\rightsquigarrow$ $(X, \mathcal{C}^\infty)$ LRS.
locally ringed space

U

Bsp: $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^\infty)$.

Bem: ~~Ein~~ Die Kat. der gl. Mannf. ist äqu. zur Kat. der LRS, welche lokal isom. zu den LRS $(U, \mathcal{C}^\infty)$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sind.

Anschauung: $\mathcal{O}_X(U)$ ist die Menge der „guten Fkt. auf U".

Abb., deren Werte „Zahlen" sind

Warnung: Der zugrundeliegende top. Raum legt ein LRS überhaupt nicht eindeutig fest.

Bsp: $pt := (\{\heartsuit\}, \mathcal{C})$ $\cdot$ $\qquad Sh(\{\heartsuit\}) \simeq Set$

$\mathcal{C}_\heartsuit \cong \mathbb{R}$ $\qquad$ Äq. d. Katen $\qquad \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}_\heartsuit \cong \mathcal{E}(\{\heartsuit\})$

Bsp: $\Delta := (\{\heartsuit\}, \mathcal{E})$ $\qquad$ „wandelnder Tangentialvektor"

$\mathcal{E}_\heartsuit := \mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$\varepsilon^2 = 0$

Bem: X glatte Mf.

$\mathrm{Hom}_{LRS/pt}(\Delta, X) \cong$ Menge der Tangentialvektoren auf X.

$\mathrm{Hom}_{LRS/pt}(pt, X) \cong$ Menge der Punkte von X.