

## Pizzaseminar zur Kategorientheorie

### Lösung zum 3. Übungsblatt

#### Aufgabe 1:

Wenn  $X$  isomorph zu  $Y$  ist, so gibt es Morphismen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$ . Die Morphismen  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$  und  $F(g) : F(Y) \rightarrow F(X)$  sind zueinander invers, da aus den Funktoraxiomen

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$$

und analog  $F(f) \circ F(g) = \text{id}_{F(Y)}$  folgt. Somit ist  $F(X)$  isomorph zu  $F(Y)$ .

Falls umgekehrt  $F(X)$  isomorph zu  $F(Y)$  ist, also Morphismen  $f : F(X) \rightarrow F(Y)$  und  $g : F(Y) \rightarrow F(X)$  existieren, die auf beide Arten miteinander verknüpft die Identität ergeben, und der Funktor  $F$  zusätzlich volltreu ist, so besitzen  $f$  und  $g$  eindeutig bestimmte Urbilder  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$  und  $\tilde{g} : Y \rightarrow X$  mit  $F(\tilde{f}) = f$  und  $F(\tilde{g}) = g$  (die Existenz folgt dabei aus der Vollheit, die Eindeutigkeit aus der Treue von  $F$ ). Da  $F(\tilde{g} \circ \tilde{f}) = F(\tilde{g}) \circ F(\tilde{f}) = \text{id}_{F(X)} = F(\text{id}_X)$  gilt, also das Bild von  $(\tilde{g} \circ \tilde{f})$  unter  $F$  gleich dem Bild von  $\text{id}_X$  ist, folgt aus der Treue von  $F$ , dass  $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \text{id}_X$  ist. Parallel erhält man  $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \text{id}_Y$ . Da  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  zueinander invers sind, ist  $X$  isomorph zu  $Y$ .

#### Aufgabe 2:

Seien  $BP$  und  $BQ$  die aus den Quasiordnungen  $P$  und  $Q$  konstruierten Kategorien, deren Objekte die Elemente der  $P$  und  $Q$  zugrundeliegenden Mengen sind, und die zwischen Objekten  $a$  und  $b$  genau dann einen Morphismus „ $a \leq b$ “ enthält, wenn  $a \leq b$  gilt. Sei ferner  $f : P \rightarrow Q$  eine monotone Abbildung zwischen  $P$  und  $Q$ .

Wir basteln einen Funktor  $F$  durch

$$\begin{array}{ccc} BP & \longrightarrow & BQ \\ x & \longmapsto & f(x) \\ \text{„}x \leq y\text{“} & \longmapsto & \text{„}f(x) \sqsubseteq f(y)\text{“} \end{array}$$

Wir müssen noch begründen, dass diese Definition überhaupt Sinn ergibt, also der Morphismus „ $f(x) \sqsubseteq f(y)$ “ tatsächlich existiert, wenn „ $x \leq y$ “ existiert. Das ist klar, denn übertragen aus der Sprache der Kategorien entspricht dies der Eigenschaft von  $f$ , monoton zu sein.

Außerdem ist zu zeigen, dass die Funktoraxiome erfüllt sind. Wir machen folgende Beobachtung: In den Kategorien  $BP$  und  $BQ$  existiert zwischen zwei Objekten höchstens ein Morphismus. Dadurch sind alle Morphismen mit gleichem Start- und Zielobjekt bereits zueinander identisch und der einzige Morphismus von einem Objekt zu sich selbst ist der Identitätsmorphimus. Solche Kategorien werden auch als *dünn* bezeichnet. Damit können wir diesen Teil der Aufgabe sogar etwas allgemeiner begründen:

**Proposition 1.** Sei  $\mathcal{C}$  eine beliebige und  $\mathcal{D}$  eine dünne Kategorie und  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  eine Zuordnung von Objekten in  $\mathcal{C}$  zu Objekten in  $\mathcal{D}$  und von Morphismen aus  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  zu Morphismen aus  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ . Dann ist  $G$  ein Funktor.

*Beweis.* Wir müssen die Funktoraxiome nachprüfen:

- a)  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ , da es nur einen Morphismus von  $F(X)$  nach  $F(X)$ , nämlich den Identitätsmorphismus, gibt.
- b) Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Morphismen in  $\mathcal{C}$ . Da die Morphismen  $F(g \circ f)$  und  $F(g) \circ F(f)$  beide von  $F(X)$  nach  $F(Z)$  laufen, sind sie bereits identisch.  $\square$

### Aufgabe 3:

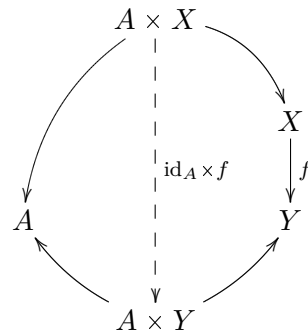
- a) Potenzmengenfunctor  $P : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ ,  $M \mapsto \mathcal{P}(M)$ ,  $f \mapsto f[\cdot]$ 
  - treu:  $\checkmark$
  - voll:  $\times$  Hinweis: Betrachte  $f : \mathcal{P}(\{\star\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{\star\})$ ,  $U \mapsto \emptyset$
  - wes. surj.:  $\times$  Die leere Menge und allgemeiner alle Mengen, deren Kardinalität keine Zweierpotenz ist, sind nicht zu Objekten im Bild von  $P$  isomorph.
- b) Vergissfunctor  $V : \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ 
  - treu:  $\checkmark$
  - voll:  $\times$  Nicht jede (mengentheoretische) Abbildung zwischen Gruppen ist Gruppenhomomorphismus.
  - wes. surj.:  $\times$  Die leere Menge ist nicht zu einem Objekt im Bild von  $V$  isomorph, da jede Gruppe mindestens ein Element enthält.
- c) Vergissfunctor  $V : \text{AbGrp} \rightarrow \text{Grp}$ 
  - treu:  $\checkmark$
  - voll:  $\checkmark$   $\text{Hom}_{\text{AbGrp}}(G, H) = \text{Hom}_{\text{Grp}}(G, H) = \{f : G \rightarrow H \mid f \text{ Gruppenhomo}\}$
  - wes. surj.:  $\times$  Nichtkommutative Gruppen können nicht isomorph zu kommutativen Gruppen sein, denn Kommutativität bleibt als rein gruppentheoretische Eigenschaft unter Isomorphie erhalten. Man kann auch ein ganz explizites Beispiel angeben:  
*Behauptung:* Die symmetrische Gruppe  $S_3$  ist nicht zu einer abelschen Gruppe isomorph.  
*Beweis:* Angenommen,  $f : S_3 \rightarrow G$  ist ein Gruppenisomorphismus und  $G$  eine abelsche Gruppe. Dann ist  $f((1\ 2) \circ (2\ 3)) = f((1\ 2)) \circ f((2\ 3)) = f((2\ 3)) \circ f((1\ 2)) = f((2\ 3) \circ (1\ 2))$ . Da aber  $(1\ 2) \circ (2\ 3) \neq (2\ 3) \circ (1\ 2)$ , ist dies ein Widerspruch zur Injektivität von  $f$ .
- d) Gruppenhomomorphismus  $\phi : G \rightarrow H$  als Funktor  $B\phi : BG \rightarrow BH$ 
  - treu: genau dann, wenn  $\phi$  injektiv ist
  - voll: genau dann, wenn  $\phi$  surjektiv ist
  - wes. surj.:  $\checkmark$  Klar, da  $BH$  aus nur einem Objekt besteht und dieses von  $B\phi$  auch getroffen wird.

#### Aufgabe 4:

Wir vervollständigen die Zuordnungszuordnung zu einer Funktordefinition:

$$\begin{aligned} F: \quad \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ X &\longmapsto A \times X \\ f &\longmapsto \text{id}_A \times f \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir mit  $(\text{id}_A \times f)$  den eindeutig bestimmten Morphismus, der das Diagramm



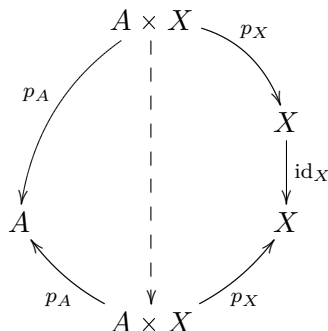
kommutieren lässt. Die Existenz und Eindeutigkeit folgen dabei daraus, dass  $A \times X$  Mächtgern-Produkt von  $A$  und  $Y$  ist.

*Bemerkung:* In  $\text{Set}$ ,  $\text{Grp}$ ,  $\text{AbGrp}$  und  $\mathbb{R}\text{-Vect}$  ist  $(\text{id}_A \times f)$  durch

$$\begin{aligned} A \times X &\longrightarrow A \times Y \\ (a, x) &\longmapsto (a, f(x)) \end{aligned}$$

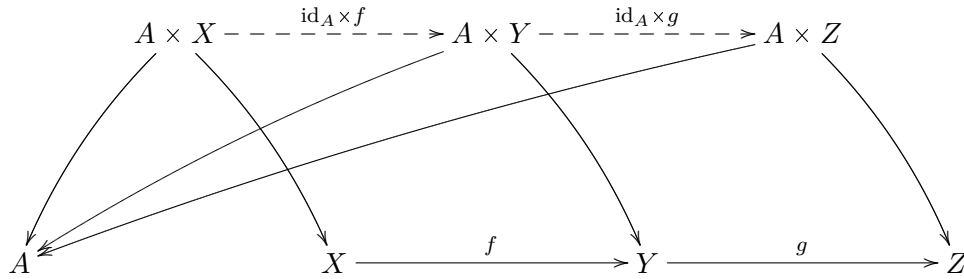
gegeben. Es gibt mehrere Möglichkeiten, das zu begründen: Es ist plausibel; der angegebene Morphismus lässt in der Tat das Diagramm kommutieren; schaut man in den Beweis der universellen Eigenschaft des kartesischen Produkts, erhält man in der Situation hier genau den angegebenen Morphismus.

Wir müssen noch nachweisen, dass die Funktoraxiome erfüllt sind. Dazu betrachten wir zunächst folgendes Diagramm:

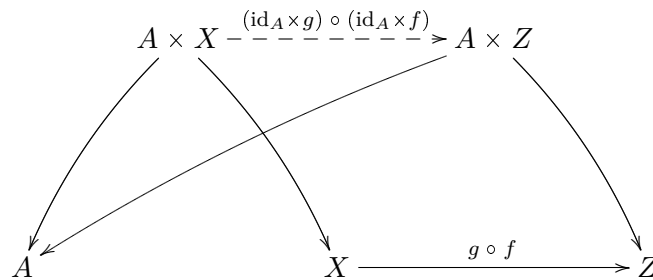


Da  $\text{id}_{A \times X}$  obiges Diagramm kommutieren lässt, gilt  $F(\text{id}_X) = \text{id}_A \times \text{id}_X = \text{id}_{A \times X}$  (warum?).

Zum Nachweis des zweiten Funktoraxioms seien Morphismen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  gegeben. Nach Definition lassen  $\text{id}_A \times f$  und  $\text{id}_A \times g$  folgendes Diagramm kommutieren:



Insbesondere kommutiert daher folgendes „zusammengeschnürtes“ Diagramm:



Nach Definition wird dieses Diagramm auch von  $\text{id}_A \times (g \circ f)$  anstelle von  $(\text{id}_A \times g) \circ (\text{id}_A \times f)$  zum Kommutieren gebracht. Da  $\text{id}_A \times (g \circ f)$  aber mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt ist, gilt die Gleichung

$$F(g) \circ F(f) = (\text{id}_A \times g) \circ (\text{id}_A \times f) = \text{id}_A \times (g \circ f) = F(g \circ f).$$

*Bemerkung:* Man hat vielleicht die Sorge, dass bei anderer Wahl der Produkte  $A \times X$ ,  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , ein völlig anderer Funktor herauskommt. Dem ist nicht so: Unterschiedliche Produktwahlen führen zu isomorphen Funktoren. (Übungsaufgabe!)

*Bemerkung:* Wir werden später sehen, dass der hier konstruierte Funktor eine besondere Eigenschaft erfüllt, die ihn auch schon bis auf Isomorphie auszeichnet: Es ist rechtsadjungiert zu einem gewissen Diagonalfunktor. In der Tat ist diese Charakterisierung eine andere Möglichkeit, Produkte (und allgemeiner Limiten) zu definieren – und zwar auf eine „globale“ Art und Weise (für alle Objekte gleichzeitig).

### Projektaufgabe:

Sei  $m \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$  beliebig. Dann ist

$$(\text{id}_X)_*(m) = \text{id}_X \circ m = m = \text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)}(m).$$

Da  $m$  beliebig war, gilt das erste Funktoraxiom:  $\check{A}(\text{id}_X) = \text{id}_{\check{A}(X)}$ .

Für das zweite Funktoraxiom seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  gegeben. Wir rechnen für alle  $m \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ :

$$(g_* \circ f_*)(m) = g_*(f_*(m)) = g_*(f \circ m) = g \circ (f \circ m) = (g \circ f) \circ m = (g \circ f)_*(m)$$

Somit gilt wie gewünscht  $\check{A}(g) \circ \check{A}(f) = \check{A}(g \circ f)$ .