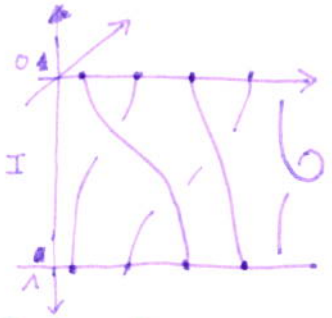
Gruppenstruktur auf Knoten? Nein. 18.10.2013

↳ #



<u>Def:</u> Ein <u>geometrischer Zopf</u> auf $n \geq 1$ Strängen ist eine Teilmenge $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$ mit $b = \coprod_{i=1}^{n} I_i$, I_i homöomorph zu Intervall I s.d.

(1) $\mathbb{R}^2 \times I \to I$ gibt Homöo. $I_i \xrightarrow{\cong} I$

(2) $b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(1,0,0), (2,0,0), \dots, (n,0,0)\}$

$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(1,0,1), \dots, (n,0,1)\}$

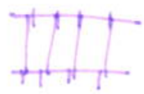
<u>Def:</u> b, b' Zöpfe, $b \sim b' \Leftrightarrow \exists F \quad b \times I \to \mathbb{R}^2 \times I$ stetig s.d. $\forall s \in I$

- $F_s : b \to \mathbb{R}^2 \times I$ ist Einbettung
- $F_s(b)$ ist ein geometrischer Zopf auf n Strängen
- $F_0 = id_b$, $F_1(b) = b'$

<u>Bem:</u> $\sim$ ist Äquivalenzrelation $\Rightarrow \mathbb{B}_n := \{$ geom. Zöpfe auf n Strängen $\}/_\sim$

<u>Multiplikation:</u> b_1, b_2 Zöpfe auf n Strängen

$b_1 b_2 = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times I \mid (x,y,2t) \in b_1$ für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ und $(x,x,2t-1) \in b_2$ für $\frac{1}{2} \leq t \leq 1\}$

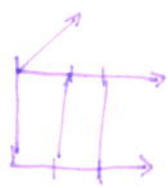
$\Rightarrow$ Multiplikation auf $\mathbb{B}_n$, assoziativ, neutrales Element: 1_n 

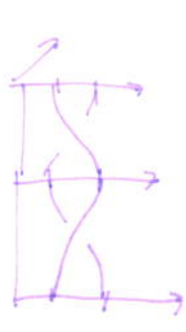
<u>Verallgemeinerung:</u> $\Sigma^n \setminus \Delta$

↳ fette Diagonale $(x_1, \dots, x_n)$ s.d. $x_i = x_j$ für min. ein (i,j), $i \neq j$

$\rightsquigarrow$ Zopfgruppen $\sim \pi_1(\Sigma^n \setminus \Delta, p)$

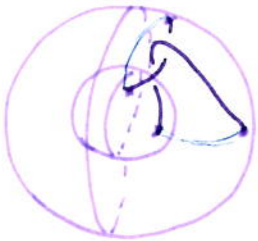
$B_2 \cong \mathbb{Z}$





$B_3 = \langle A, B \mid ABA = BAB \rangle$

$S^2 \times I$



$\pi_1((S^2)^n \setminus \Delta) \simeq 1$

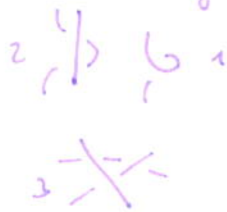
Zopfdiagramme: $\mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R} \times I$, $(x,y,t) \mapsto (x,t)$, $b \mapsto D(b)$

nach kleiner Isotopie sind diese regulär
max. Doppelpunkte und diese sind transversal

Def: D, D' Zopfdiagramme $D \sim D' \iff \exists F \; Db \times I \to \mathbb{R}^1 \times I$ stetig s.d. $\forall s \in I$

- $F_s : D \to \mathbb{R} \times I$ ist Einbettung
- $F_s(D)$ ist ein geom. Zopfdiagramm auf n Strängen
- $D_0 = D$, $D_1 = D'$ + Bed. an die Kreuzungen

Satz: b_1, b_2 Zöpfe $b_1 \sim b_2 \iff D(b_1) \sim D(b_2) \iff D(b_1)$ und $D(b_2)$ unterscheiden sich nur durch Reidemeister II und III + Umgebungshomotopien



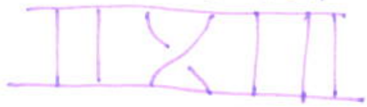
Lemma: $\mathbb{B}_n \cong \langle b_1, \dots, b_{n-1} \mid \text{Zopfrelation} \rangle$ siehe Beweis

!!

Artin Zopfgruppe

Bew: $[b] \in \mathbb{B}_n \rightsquigarrow D(b)$ reg.

alle Segmente haben Form



$\sim D(b_k^+)$

$\rightsquigarrow D(b_k^-)$

$\Rightarrow b = b_{i_1}^{\varepsilon_1} b_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots b_{i_k}^{\varepsilon_k}$

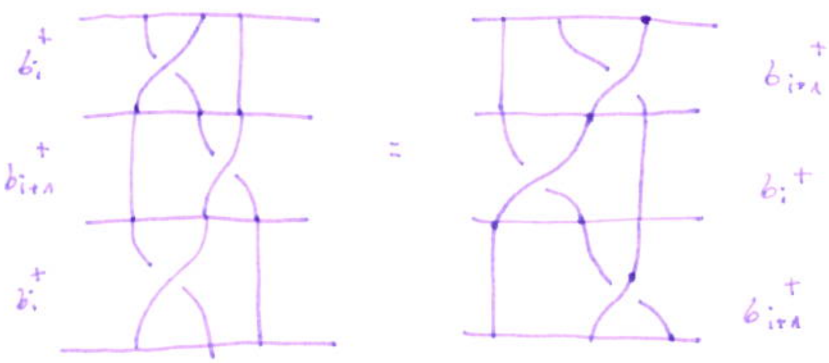
1. $b_i^+ b_i^- =$  $=$  $= 1_n = b_i^- b_i^+$

$\rightsquigarrow b^{-1} = b_{i_k}^{-\varepsilon_k} b_{i_{k-1}}^{-\varepsilon_{k-1}} \cdots b_{i_1}^{-\varepsilon_1} \rightsquigarrow \mathbb{B}_n$ Gruppe

2. $b_1^+, \dots, b_{n-1}^+ \in B_n$ erfüllen Zopfrelationen

nicht benachbart

$$\begin{cases} b_i^+ b_j^+ = b_j^+ b_i^+ & i,j = 1,\dots,n-1 \quad |i-j| \geq 2 \\ b_i^+ b_{i+1}^+ b_i^+ = b_{i+1}^+ b_i^+ b_{i+1}^+ \end{cases}$$



3. Schritt: $\varphi^+ : B_n \to B_n$ $\qquad B_n = \langle b_1, \dots, b_{n-1} \mid \text{Zopfrel.} \rangle$

$b_i \mapsto b_i^+$

- Gruppenhomo
- surjektiv
- injektiv

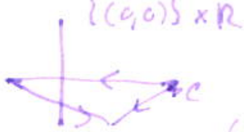
□

Zöpfe $\longrightarrow$ Verschlingung in $\mathbb{R}^3$

$D^2 \times I \to D^2 \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$

Satz von Alexander: Jede Verschlingung ist isotop zu geschl. Zopf

Bew: $\rightsquigarrow$ polynomial



(□)

Satz (Markov): 2 Zöpfe haben isotope Abschlüsse im $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow$ Sie unterscheiden sich durch Umgeb. hom. + Markov züge M_1 u. M_2

M_1: Konjugation mit Zopf

M_2: $b^{\in B_n} \longrightarrow b_n(b)$