Verklebung von Garben :)

Wie man Schnitte verklebt:

$s_i \in \mathcal{E}(U_i)$, $U = \bigcup_i U_i$ off. ÜD, $\mathcal{E}$ Garbe auf X

Kompatibilitätsbed.: $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ f.a. i, j

$$\xRightarrow[\text{Garben-ax.}]{} \exists!\, s \in \mathcal{E}(U):\ s|_{U_i} = s_i \text{ f.a. } i$$

Abstrakter

$$\prod_i \mathcal{E}(U_i) \rightrightarrows \prod$$

Abstrahiten:

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}) \longrightarrow \text{Menge der } \mathcal{E}\text{-Verklebedaten über } \mathcal{U}$$

$$s \longmapsto (s|_{U_i})_i$$

eine ÜD

Garbenax. sagt: Diese Abb. ist bijektiv für ÜD $\mathcal{U}$ von jeder off. Tm. $U \subseteq X$.

Bem.: Menge der $\mathcal{E}$-Verklebedaten über $\mathcal{U}$ „Differenzkerndiagramm"

$$= \lim\Big(\prod_k \mathcal{E}(U_k) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{E}(U_i \cap U_j) \Big)$$

$$(s)_k \longmapsto (s_i|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$$

$$\longmapsto (s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$$

Bem.: Seien V, W VR über $\mathbb{R}$.

Seien $f, g: V \to W$ lin. Abb.

$$\ker(f-g) = \lim\left(V \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} W\right) = \{v \in V \mid f(v) = g(v)\} = \{v \in V \mid f(v) - g(v) = 0\}$$

Bem.:

$$\lim\left(\prod_k \mathcal{E}(U_k) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{E}(U_i \cap U_j)\right)$$

$$= \left\{ (s_k)_k \;\middle|\; s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \text{ f.a. } i,j \right\}$$

s. pizzaseminar.speicherleck.de, Abschnitt Limiten in Set

Nun: Verkleben von Garben

Seien Garben $\mathcal{E}_i$ auf U_i gegeben, $U = \bigcup_i U_i$ off. Üb.

Ges.: Garbe $\mathcal{E}$ auf U s.d. $\mathcal{E}|_{U_i} \cong \mathcal{E}_i$.

$(V \subseteq U_i) \mapsto \mathcal{E}(V)$

+ Komp'bed.

Warnung: Man darf Garben nicht auf Gleichheit testen

Komp'bed.:

$$\mathcal{E}_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow[\alpha_{ij}]{\cong} \mathcal{E}_j|_{U_i \cap U_j} \quad \text{f.a. } i,j$$

mit Kozykelbedingung:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathcal{E}_i|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \arrow[r, "\alpha_{ij}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}"] \arrow[rr, bend right, "\alpha_{ik}|_{U_{ijk}}"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\equiv"] & \mathcal{E}_j|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \arrow[r, "\alpha_{jk}|_{U_{ijk}}"] & \mathcal{E}_k|_{U_i \cap U_j \cap U_k}
\end{tikzcd}$$

„Die $(\alpha_{ij})_{ij}$ sind ‚kohärente' Isomorphismen."

Wenn die Isos α_{ij} wirklich von einer Garbe $\mathcal{E}$ auf ganz U herrühren, so gilt sogar:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{ii} = \mathrm{id}_{\mathcal{E}_i} \\[2ex] \alpha_{jk}|_{U_{ijk}} \circ \alpha_{ij}|_{U_{ijk}} = \alpha_{ik}|_{U_{ijk}} \quad \text{f.a. } i,j,k \end{array}\right\} \text{„Kozykel-bed.“}$$

<u>Bem.:</u> Die Bed. „$\alpha_{ii} = \mathrm{id}_{\mathcal{E}_i}$“ folgt schon aus der zweiten:

$$\alpha_{ii} \circ \alpha_{ii} = \alpha_{ii} \circ \mathrm{id}_{\mathcal{E}_i}$$

$$\xRightarrow[\alpha_{ii}\text{ Mono}]{} \quad \alpha_{ii} = \mathrm{id}_{\mathcal{E}_i}$$

Abstraktes:

Kat. d. Garben auf U

Obj: $\left((\mathcal{E}_i)_i, \left(\alpha_{ij}: \mathcal{E}_i|_{U_{ij}} \to \mathcal{E}_j|_{U_{ij}}\right)\right)$

α_{ij} Isos & Kozykelbed.

$$\mathrm{Sh}(U) \xrightarrow[\simeq]{F} \text{Kat. der Verklebedaten}^{\text{"gluing data"}} \text{ für Garben bzgl. der ÜD } \mathfrak{U}$$

$$\mathcal{E} \longmapsto \left((\mathcal{E}|_{U_i})_i, \left(\alpha_{ij}: (\mathcal{E}|_{U_i})|_{U_{ij}} \xrightarrow{\mathrm{id}} (\mathcal{E}|_{U_j})|_{U_{ij}}\right)\right)$$

Das Lemma übers Verkleben von Garben sagt:
Dieser Funktor F ist eine Kategorienäquivalenz.

(Abb. : Funktoren = Bij. : Äqu.

Bem.: $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ volltreu. Dann:

$$F(X) \cong F(Y) \implies X \cong Y.$$

Präzises Ziel beim Verkleben von Garben ist:

Finde zu Verklebedaten $\mathcal{D}$ eine Garbe $\mathcal{E}$ mit $F(\mathcal{E}) \cong \mathcal{D}$.

Korrekte Form. der Eindkt.:

Falls $F(\mathcal{E}') \cong \mathcal{D}$, dann $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$.

<u>Warnung:</u> Seien $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ Garben auf U, $U = \bigcup_i U_i$

Gelte $\mathcal{E}_{|U_i} \cong \mathcal{F}_{|U_i}$ f.a. i

Thema: Verkl. von Mor. zw. Garben

$\not\Longrightarrow$ $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$.

<u>Ersatz:</u> Seien $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ Garben auf U, $U = \bigcup_i U_i$.

Gelte, dass wir <u>kohärente Isos</u> $\mathcal{E}_{|U_i} \xrightarrow[\alpha_i]{\cong} \mathcal{F}_{|U_i}$ haben.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$.

$\alpha_{i|U_{ij}} = \alpha_{j|U_{ij}}$ f.a. i,j

Wie man die Verklebung konstruiert: $\alpha_{ij}: \mathcal{E}_i|_{U_{ij}} \to \mathcal{E}_j|_{U_{ij}}$ 8

Sei ein Verklebedatum $((\mathcal{E}_i)_i, (\alpha_{ij})_{ij})$ gegeben.

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{E}: V \overset{\subseteq U}{\longmapsto} \left\{ (s_i \in \mathcal{E}_i(V \cap U_i))_i \;\middle|\; \text{f.a. } i, j: \; \alpha_{ij}\Big(\underbrace{s_i|_{V \cap U_{ij}}}_{\in \mathcal{E}_i(V \cap U_{ij})}\Big) = \underbrace{s_j|_{V \cap U_{ij}}}_{\in \mathcal{E}_j(V \cap U_{ij})} \right\}$$

$$V = \bigcup_i \underbrace{(V \cap U_i)}_{\subseteq U_i}$$

(n,m)-Kat.

$(\infty,1)$-Kat.:

✓ Lurie,
Joyal

Ab Sh(U) (9) · Čech
· 2-Kat.
Ab(Sh(U)) · Kastr.:✓

Normale Kat.: $(1, \hat{1})$-Kat.
(Objekte, Mor. zw. Obj.
0 1

Gruppoide:
= normale Kat.,
in der jeder Mor. invbar
ist

$(1, 1)$-Kat.
Objekte, Mor. zw. Obj.
0 1

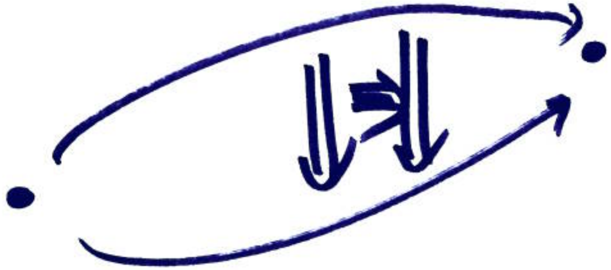
Ab$(\mathcal{C})$ = Kat.
d. ab. Gruppenobj.
in $\mathcal{C}$

9a

2-Kat. d. Kat.: (2, 2)-Kat.

Obj.,	Mor. zw. Obj.,	Mor. zw. Mor.
0	1	2

∞-Kat.

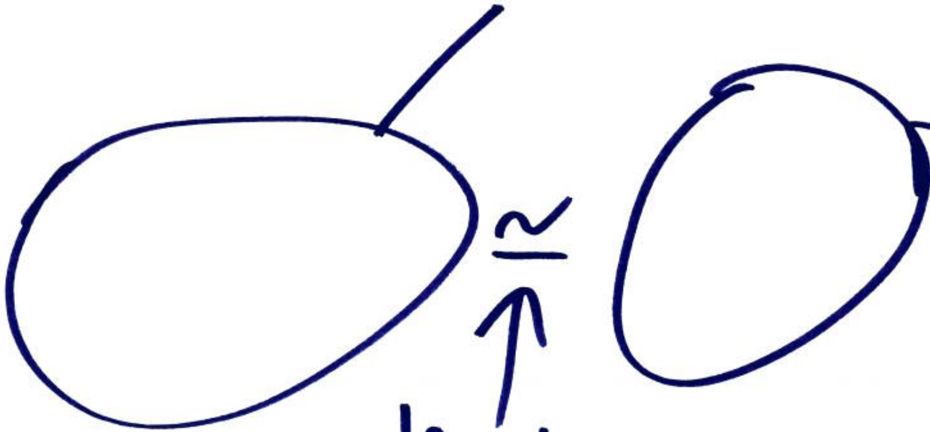


Bsp.: X top. Raum

$\rightsquigarrow$ $S_\bullet X$ ist eine $(\infty,1)$-Kat., sogar eine $(\infty,0)$-Kat.,

Name:

Fundamental-∞-Gruppoid



Homotopieäqv.

Verbindung zu Čech-Kohomologie:

(10)

$$\mathrm{Pic}(X) = \left(\begin{array}{l} \text{Garben auf } X \text{, die} \\ \text{lokal isomorph zu } \mathcal{O}_X \\ \text{sind} \qquad\qquad \mathcal{E} \end{array} \right) \Big/ \cong \;\; \underset{\text{kanon.}}{\cong} \;\; \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

$\mathrm{Aut}(\mathcal{E}) = \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{E})$

||

Gruppe der „lokal fr. Garben vom Rang 1"

oder „Vektorbündel vom Rang 1"

oder „Geradenbündel"

Bsp.: X Mf.,

$\mathcal{O}_X(U) = \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ glatt} \}$.

$\mathcal{O}_X^*(U) = \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ glatt},$

$f(u)$ inv. $\forall u$

Wie berechnet sich $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$? (11)

$$= \operatorname*{colim}_{\substack{\mathfrak{U} \text{ bel.} \\ \text{ÜD von } X}} \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*)$$

$\mathfrak{U} = (U_i)_i, \quad X = \bigcup_i U_i$

Wie berechnet sich $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*)$?

$$\begin{array}{ccccccc}
\check{C}^0 & \longrightarrow & \check{C}^1 & \longrightarrow & \check{C}^2 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & (s_{ij})_{ij} & \longmapsto & (-s_{ik} + s_{jk} + s_{ij})_{ijk} & & \\
(s_i)_i & & s_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_{ij}) & & & & \\
s_i \in \mathcal{O}_X^*(U_i) & & (s_j^{-1}|_{\cdots} \circ s_i|_{\cdots})_{ij} & & & & \\
(s_k)_k & \longmapsto & (s_i|_{U_{ij}} - s_j|_{U_{ij}})_{ij} & & & &
\end{array}$$

$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*) = \mathcal{O}_X^*(\mathfrak{U})$

<u>Bem.:</u> Sei $j : U \hookrightarrow X$ eine off. Imm.
off. Einb.

Dann gilt:

$$j^{-1}\mathcal{E} \underset{\text{kan.}}{\cong} \mathcal{E}|_U$$ für Garben von Mengen

$$\underbrace{j^{-1}\mathcal{E} \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U}_{} = j^*\mathcal{E} \underset{\text{kan.}}{\cong} \mathcal{E}|_U$$ für Garben von $\mathcal{O}_X$-Moduln

Schemata :)

- $\mathrm{Spec}(A) = \{ \mathfrak{p} \subseteq A \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal} \}$

  + Zariskitop.

  + Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$:

$$\mathcal{O}_X(U) = \Big\{ f : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \;\Big|\; \text{es gibt off. ÜD } U = \bigcup D(h_i): \text{ für } i: \text{ ex. } s \in A,\ n \geq 0: f(\mathfrak{p}) = \frac{s}{h_i^n} \text{ für } \mathfrak{p} \in D(h_{[illegible]}) \Big\}$$

$D(h) = \{ \mathfrak{p} \mid h \notin \mathfrak{p} \}$
= „Ort, wo h invertierbar ist"

$D(h_{[illegible]})$

- Schema: lokal geringte Raum, der lokal isomorph ist zu $\mathrm{Spec}(A)$, A bel. Ring

Fun Facts zu $\mathcal{O}_X$ $\quad (X = \mathrm{Spec}(A))$

14

- $\mathcal{O}_X(D(h)) \underset{\text{kanon.}}{\cong} A[h^{-1}] = \left\{ \frac{a}{h^n} \,\middle|\, a \in A,\ n \geq 0 \right\}$

- $\mathcal{O}_X(X) \underset{\text{kan.}}{\cong} A$

anschaulich: Menge der regulären Fkt. auf X

So können wir uns Elemente von A vorstellen als Fkt. auf X.

„Abb., deren Werte ‚Zahlen' sind"

Bei jedem LRS $(X, \mathcal{O}_X)$ nennt man die (15)

Elemente von $\mathcal{O}_X(X)$ „glob. Fkt. auf X".

Plausibel, denn:

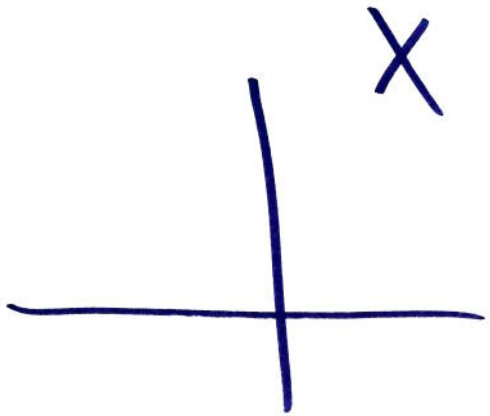
- $\mathcal{O}_X$ ~~bildet~~ ist eine Garbe (genau wie Fkt. Garben bilden)
- $\mathcal{O}_{X,x}$ sind lokale Ringe (die Halme von Garben von stetigen Fkt. ~~bilden~~ sind ebenfalls lokale Ringe)

$1 \neq 0$

$f+g$ inv. $\Rightarrow$ f inv. $\vee$ g inv. f.a. $f, g \in \mathcal{O}_{X,x}$

- $\mathrm{Hom}_{LRS}(X, \underbrace{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x])}_{\text{"}\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}\text{"}}) \underset{\text{kan.}}{\cong} \mathcal{O}_X(X)$

Bsp.: $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec}(k[X,Y]) =: X$ (16)



$\mathcal{O}_X(X) \cong k[X,Y]$.

$\ni$

$2X - 3Y^2 + 5$

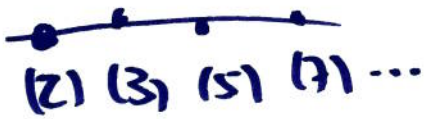
↑ ist nach unser Vereinbarung (15) eine glob. Fkt. auf X und ist auch anschaulich eine glob. Fkt.

Bsp.: $X = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$

$\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{Z}$.

$34 = 2 \cdot 17$

↑ glob. Fkt. auf $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$



Wert dieser Fkt. an der Stelle (2) ist $0 \in \mathbb{Z}/(2)$.

(17) ist $0 \in \mathbb{Z}/(17)$

(3) ist $1 \in \mathbb{Z}/(3)$

Ist $f \in \mathcal{O}_X(X)$, so definiert man:

Der <u>Wert</u> von f an der Stelle $x \in X$

ist $\big[[f]\big] \in \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x =: k(x)$

↑ Restklassenkörper bei x

ist weder inj. und surj. ← dass es nicht surj. ist, ist zu erwarten und nicht schlimm

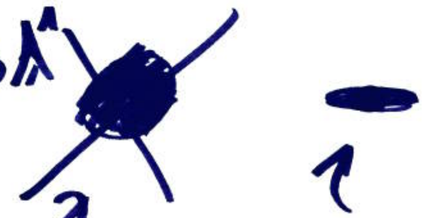
$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \prod_{x \in X} k(x)$$

$$f \longmapsto \big(x \in X \mapsto [[f]]\big)$$

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = Y^X = \prod_{x \in X} Y$$

$$|Y^X| = |Y|^{|X|}$$

Bsp.: $X = \operatorname{Spec}(k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \overset{\text{df}}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^1$

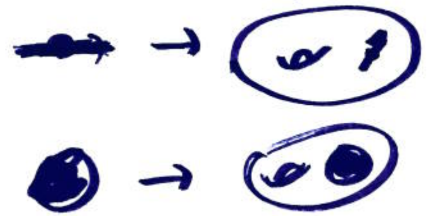


bel. LRS

X sieht nicht so aus

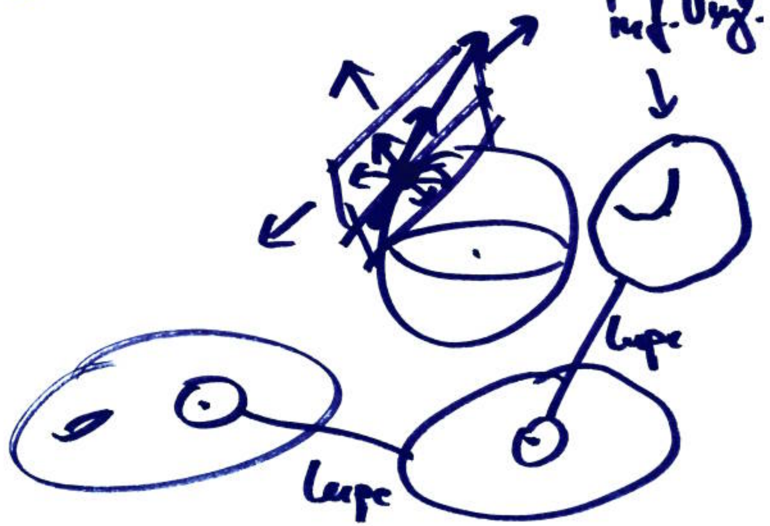
in x-Richtung infinitesimal aufgedickt

Bem.: $\mathrm{Hom}_k(\operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon^2), Y) \cong$ Menge aller Tangentialvektoren in Y

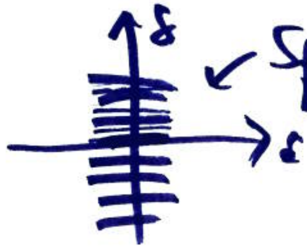


$\mathrm{Hom}_k(\operatorname{Spec} k, Y) \cong$ Menge der Punkte von Y

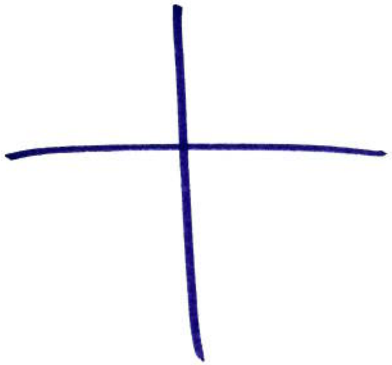
$\mathrm{Hom}_k(\operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon^3), Y)$



Spec $k[\varepsilon, \delta]/(\varepsilon^2, \delta^2)$:



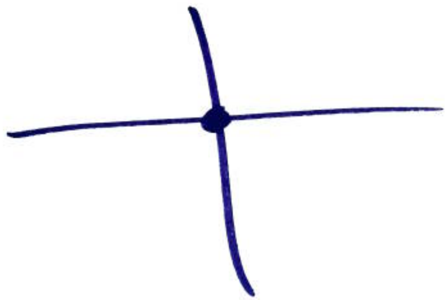
Spec $k[\varepsilon, \delta]$:



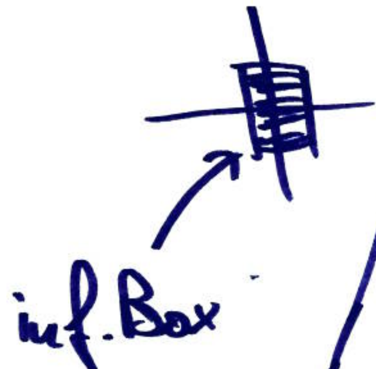
Lsg.menge von

$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon^2 = 0 \\ \varepsilon^2 = 0 \end{matrix} \right\},$$

Spec $k[\varepsilon, \delta]/(\varepsilon, \delta)$



Spec $\underbrace{k[\varepsilon, \delta]/(\varepsilon^2, \delta^2)}$:



$\ni \square + \varepsilon \square + \delta \square$

$+ \varepsilon \delta \square$

10

Erinnerung: Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\cancel{C}$ C^ω

Dann:
$$f(x,y) = f(0,0) + x \cdot Df(0,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot Df(0,0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}x^2\, D^2 f(0,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \dots$$

(21)

Bsp.: $X = \operatorname{Spec}(k[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$.

Hierauf gibt es die glob. Fkt.

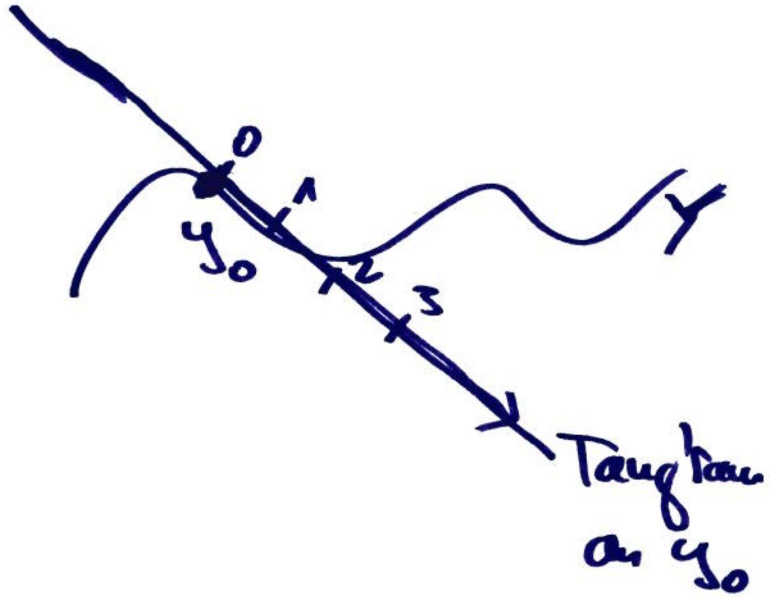
$f := \varepsilon \in \mathcal{O}_X(X)$. $\neq 0$

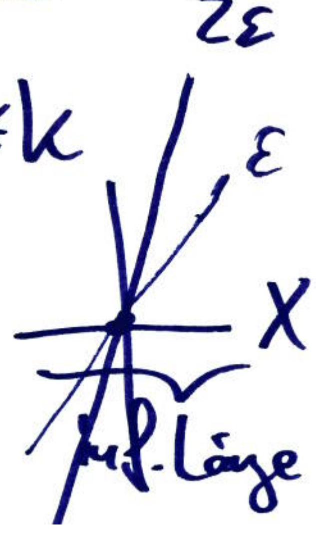
Sie ist überall Null.

den einzigen Punkt: (ε) Ideal

$f(0) = [[f]] \in k(0) = k((\varepsilon)) \cong k$

Ursprung





Bsp.: Das term. Obj. in der Kategorie der Schemata ist $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Kat. der aff. Schemata

Kat. der LRS

LRL

LRT

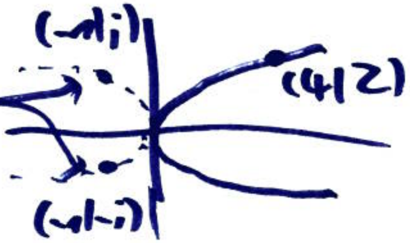
~~DS~~

Das ist etwas komisch!

in Top, Man, … ist es der Punkt $\bullet$.

Def.: Ein A-rat. Punkt (A-wertiger Pkt) eines Schemas Y ist ein Mor. $\mathrm{Spec}(A) \to Y$.

Bsp.: $\mathrm{Spec}\, \mathbb{R}[X,Y]/(X-Y^2) =: M$



als Pl: $(X+1, Y^2+1)$

$(4|2)$ ist ein $\mathbb{R}$-wertiger Punkt; als Pl $(X-4, Y-2)$

Bem.: Jeder top. Punkt y_0 eines Schemas Y ist auch ein κ-wertiger Punkt, nämlich für $\kappa = k(y_0)$.

Hier haben wir **zwei** versch. Mor. $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \to M$: (22a)

$$\bullet \mapsto \bullet$$

1. $\mathbb{R}[X,Y]/(X-Y^2) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$[p] \longmapsto p(-1, i)$$

$\ne$

2. $$[p] \longmapsto p(-1, -i)$$

Diese beiden versch. Mor. haben top. das gleiche Bild, nämlich $\{(X+1, Y^2+1)\}$. ← ist eine abg. Teilm.

$$\mathbb{R}[X,Y]/(X-Y^2)/(X+1, Y^2+1) = \mathbb{R}[X,Y]/(\cancel{X}^{-1} - Y^2, X+1, Y^2+1)$$
$$= (\mathbb{R}[X]/(X+1))[Y]/(Y^2+1) = \mathbb{R}[Y]/(Y^2+1) \cong \mathbb{C}$$

Bem.: Die top. Punkte eines Schemas haben etwas mit den „gedachten Punkten" zu tun, sind aber nicht das gleiche.

A-wertig für viele Wahlen von A

Die top. Punkte entsprechen 1:1 den abg. irred. Teilen des Schemas.

$$y_0 \in Y \longmapsto \overline{\{y_0\}}$$

x^2+y^2-1

$$\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \cong \mathbb{R}^2$$

Bsp.: $\mathbb{A}^1_k \underset{\text{in Top}}{\times} \mathbb{A}^1_k \not\cong \mathbb{A}^2_k$

$$\mathbb{A}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{A}^2(\mathbb{R}). \checkmark$$

Bsp.: $\mathbb{A}^1_k \underset{\operatorname{Spec}(k)}{\times} \mathbb{A}^1_k \cong \operatorname{Spec}(k[X] \otimes_k k[Y])$ Σ_k

Faserprodukt
in Sch
in LRS
in Aff
in ~~Top~~

$$\cong \operatorname{Spec}(k[X,Y]) \cong \mathbb{A}^2.$$

$$\begin{tikzcd}
V & & W \\
& V \times W \arrow[ul, "(x,y)\mapsto x"'] \arrow[ur, "(x,y)\mapsto y"] & \\
V \arrow[ur, "x \mapsto (x,0)"] & & W \arrow[ul, "y \mapsto (0,y)"']
\end{tikzcd}$$

Bem.[5]

$$\mathcal{O}_X = \underline{A}[\mathcal{F}^{-1}] = \mathcal{F}^{-1}\underline{A}$$

$X = \mathrm{Spec}(A)$

konstante Garbe A,

- $U \overset{X}{\subseteq} \mapsto \{f : U \to A \mid f \text{ stetig}\}$

mit diskret. Topologie

- alle Halme sind A
- Vergarbung von $(U \overset{X}{\subseteq} \mapsto A)$

generischer/universeller Filter (lebt nicht in Set! sondern in Sh(X))

$\mathcal{F} \hookrightarrow \underline{A}$

Bem.: Komplemente von Primidealen heißen auch Filter.

Erinn.:

A Ring, $\mathfrak{p} \subseteq A$ PI

$\to A_{\mathfrak{p}} := A[(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}] = (A\setminus\mathfrak{p})^{-1}A$ ist ein lokaler Ring

gilt nicht konstr.

1. $\mathcal{F}(U) = \{ f : U \to A$ stetig

$\mid f(p) \notin \mathfrak{p}$ f.a. $p \in U \}$

$f(p) \in \underbrace{A \setminus \mathfrak{p}}_{\text{ist ein Filter}}$

Filterax.:

$0 \notin F$

$a \cdot b \in F \Leftrightarrow a \in F \wedge b \in F$

$a+b \in F \Rightarrow a \in F \vee b \in F$

$\hat{=}$ $a \notin \mathfrak{p} \wedge b \notin \mathfrak{p} \Rightarrow a+b \notin \mathfrak{p}$

$1 \in F$

$\neg(x$ inv. $\vee$ y inv.$) \Rightarrow \neg(x+y$ inv.$)$

Ax. für lok. Rg:

$1 \neq 0$

$x+y$ inv. $\Rightarrow x$ inv. $\vee$ y inv.

gilt auch konstr.

Bem.: $F^{-1}A$, ist ein lok. Rg., falls $F \subseteq A$ Filter.

Konstr. sollte man def'n: Spec(A) = Menge der Filter in A.

(2) $$\mathcal{F}^{-1}\underline{A} = \Big(\underbrace{\mathcal{F}^{-1,\mathrm{pre}}\underline{A}}_{U \subseteq X \;\mapsto\; \mathcal{F}(U)^{-1}\underline{A}(U)}\Big)^{a}$$

Frage: Wieso ~~ist~~ sind bei Idealgarben $\mathcal{J}$ alle $\mathcal{J}(U)$ schon Ideale, aber bei Filtergarben nicht alle $F(U)$ Filter und bei (lok.-Ring)-garben nicht alle $R(U)$ lokale Ringe?

Idealaxiome

Ringax.
Assoz...

$\top \Rightarrow 0 \in I$

$\forall a,b: (a \in I \wedge b \in I \Rightarrow a+b \in I)$

$\forall a,b: \; a \in I \wedge b \in R \Rightarrow ab \in I$

$\top, \wedge$ $\boxed{\forall: (\sim) \Rightarrow (\sim)}$

Filteraxiome

$0 \in F \Rightarrow \bot$

$ab \in F \Leftrightarrow a \in F \wedge b \in F$

$a+b \in F \Rightarrow a \in F \vee b \in F$

$1 \in F$

$\top, \wedge, \bot, \vee, \exists$

(lok.-Ring)-Axiome

Assoziativität....

$1=0 \Rightarrow \bot$

$x+y$ inv. $\Rightarrow x$ inv. $\vee$ y inv. ✓

$:\Leftrightarrow \exists y': yy'=1$

Def inj. Abb.	surj. Abb.
$\forall a,b: f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$	$\forall b: \exists a: f(a)=b$

Die gute Definition ist immer die toposinterne.

Falls die Axiome ~~nur~~ nur $\wedge, \top$ enthalten, dann ist die gleichwertig zu: „auf off. Mengen".

Falls die Ax. nur $\top, \wedge, \bot, \vee, \exists$ enthalten, dann ist die gleichwertig zu: „auf Halmen"

30

$X \models \forall a,b : J.\ (a \in J \wedge b \in J \Rightarrow a+b \in J)$

$\Leftrightarrow$ f.a. $a, b \in J(U)$, $U \subseteq X$ offen

mit $U \models a \in J \wedge b \in J$

gilt $U \models a+b \in J$

$U \rightsquigarrow \cancel{X}$

$\mathrm{Hom}(-, U)$

$\Leftrightarrow$ f.a. $a, b \in J(U)$, $U \subseteq X$ offen

$X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(-, X) = 1$

mit $\underbrace{(U \models a \in J)}_{\Leftrightarrow\, a \in J(U)}$ und $\underbrace{(U \models b \in J)}_{\Leftrightarrow\, b \in J(U)}$

gilt $a+b \in J(U)$.

$\Leftrightarrow$ das Axiom gilt auf offenen Mengen.

$X \models \forall a,b\colon\ a+b\in\mathcal{F} \Rightarrow a\in\mathcal{F} \vee b\in\mathcal{F}$

$\Leftrightarrow$ f.a. $a,b\in\mathcal{R}(U)$, $U\subseteq X$ offen:

wenn $\underbrace{U\models a+b\in\mathcal{F}}_{\Leftrightarrow\ a+b\in\mathcal{F}(U)}$,

dann $U\models a\in\mathcal{F} \vee b\in\mathcal{F}$

$\Leftrightarrow \exists\, U=\bigcup U_i$ off. ÜD: $\forall i$:

$\underbrace{U_i\models a\in\mathcal{F}}_{\Updownarrow\ a\in\mathcal{F}(U_i)}$ oder $\underbrace{U_i\models b\in\mathcal{F}}_{\Updownarrow\ b\in\mathcal{F}(U_i)}$

$\Leftrightarrow$ das Axiom gilt halmweise.

von Mike Shulman

Idempotenzlemma:

$$\underset{\text{Topos}}{\mathcal{F}} \xrightarrow[\text{geom. Mor.}]{} \underset{\text{Topos}}{\mathcal{E}}$$

aus $\mathcal{E}$-Sicht:

$$\mathbb{F} \longrightarrow \mathrm{Set} \simeq \mathrm{Sh}(\{\heartsuit\})$$

$X \to S$

sieht aus $\mathrm{Sh}(S)$ aus wie:

$X \to pt$

(32)

$$\mathcal{E} \models (\mathbb{F} \models \varphi) \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{F} \models \varphi.$$