Universität Augsburg
26. Februar 2014

Pizzaseminar zu erzeugenden Funktionen
2. Übungsblatt

Aufgabe 1: *Nochmal kleiner Gauß / Faulhabersche Formel.* Zeige:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \sum_{j=0}^{p+1} a_{pj}\, n^j,$$

wobei die Matrix der Koeffizienten $A = (a_{ij})_{ij}$ sich schreiben läßt als: $A = UZV$. Dabei sind $U = \left(\left\{ {i \atop j} \right\}\right)_{ij}$ und $V = \left(\left[{i \atop j} \right]\right)_{ij}$ Matrizen von Stirlingzahlen. Was ist Z für eine Matrix?

Aufgabe 2: *Stirlingzahlen und Differentialoperatoren.*

a) Stelle den Operator $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n$ als Polynom in den Operatoren $\left\{x^k \frac{d^k}{dx^k},\ k \geq 0\right\}$ dar.

b) Berechne den Kommutator $\left[x^n \frac{d^n}{dx^n}, x^m \frac{d^m}{dx^m}\right] := x^m \frac{d^m}{dx^m} x^n \frac{d^n}{dx^n} - x^n \frac{d^n}{dx^n} x^m \frac{d^m}{dx^m}$.

c) Sei $x = e^w$ und f eine Potenzreihe. Zeige: $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \frac{d^n}{dw^n} f(x)$.

d) Allgemeiner sei $\lambda(x)$ ein Polynom und $x = x(w)$ eine Lösung der Gleichung $\frac{d}{dw}x = \lambda(x)$. Zeige: $\left(\lambda(x)\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \frac{d^n}{dw^n} f(x)$.

Aufgabe 3: Jeder der Zahlen $1, \ldots, n$ soll eine der folgenden Farben zugeordnet werden: Rot, Blau, Weiß, Grün. Dabei müssen ungerade viele Zahlen rot gefärbt und gerade viele Zahlen grün gefärbt werden. Abhängig von n, wieviele Möglichkeiten gibt es? Benutze exponentiell erzeugende Funktionen!

Aufgabe 4: Gegeben sind n verschiedene Zahlen. Diese sollen in Dreiecke, Vierecke, Fünfecke usw. aufgeteilt werden. Zwei Vielecke gelten dabei als gleich, wenn die (zyklische) Anordnung ihrer Zahlen übereinstimmt. Finde die exponentiell erzeugende Funktion der Anzahl solcher möglichen Aufteilungen.

Aufgabe 5: Sei $(p_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Polynomen, gegeben durch: $p_n(x) = \sum_k \left\{ {i \atop j} \right\} x^k$. Zeige:

a) Es gibt eine eindeutige Potenzreihe f, welche $\sum_n p_n(x) \frac{u^n}{n!} = \exp(xf(u))$ erfüllt.

b) Es gibt einen linearen Operator D, welcher $Dp_n(x) = np_{n-1}(x)$ erfüllt und außerdem mit der Operation $x \mapsto x + a$ verträglich ist.

c) Sei $m \in \mathbb{N}$ und Q ein Operator, für den $Qp_n = \delta_{mn}$ gilt. Dann gibt es eine eindeutige Potenzreihe q, die $q(\frac{d}{dx}) = Q$ erfüllt. Es ist q die Umkehrfunktion zu f.