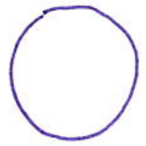
Knotentheorie

4. 9. 2013

Stefan Knoblauch

1

1. Knoten
2. Äquivalenz von Knoten
3. Fundamentalgruppe



Unknoten

Kleeblattknoten

Beispiele

1. Def: Knoten

Ein Knoten ist eine einfache, geschlossene Kurve, also

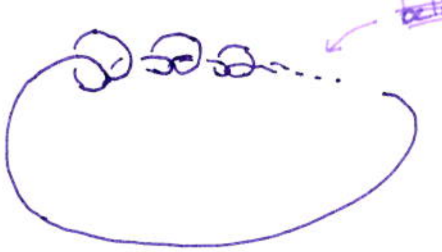
$k : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ stetig

$k(0) = k(1)$ (geschlossen)

$k(x) = k(y) \Rightarrow x = y \vee (x=0 \wedge y=1) \vee (x=1 \wedge y=0)$

„wilder Knoten":

unendlich ~~beliebig~~ viele Schleifen



2. Def: Knoten

stetig differenzierbar

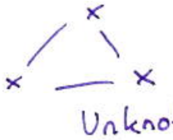
3. Sei $(p_1, \dots, p_n)$ $p_i \in \mathbb{R}^3 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$,

dann heißt die Vereinigung von den Strecken

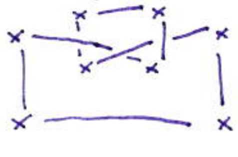
$[p_1, p_2], [p_2, p_3], \dots, [p_{n-1}, p_n], [p_n, p_1] := \{p_n + (p_1 - p_n)t, \ t \in [0,1]\}$

geschlossener Polygonzug.

Ein Knoten ist ein einfacher geschlossener Polygonzug.



Unknoten

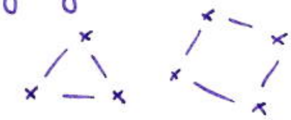


Kleeblatt

parametrischer Knoten

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$$
$$p_1 \; p_2 \; \dots \; p_n$$

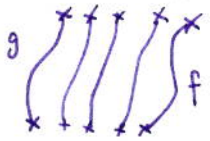
Def: Verschlingung



(trivialer Fall)

Äquivalenz

Def **Homotopie**

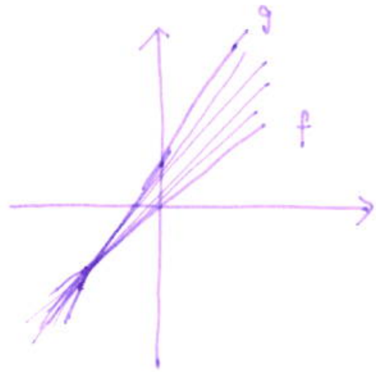


$(X, d_1), (Y, d_2)$ metrische Räume

$$f, g : X \to Y$$
$$h : \overset{s}{X} \times \overset{t}{[0,1]} \to Y \text{ stetig}$$ Homotopie

mit $h(-,0) = f \wedge h(-,1) = g$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x + 1$$
$$h : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$(x,t) \mapsto (1+t)x + t$$



$$K, J : [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

$K \sim J \iff \exists\, H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$
mit $H(-,0) = K$
$H(-,1) = J$
$H(-,t)$ Knoten $\forall\, t \in [0,1]$

} Homotopie

Reflexivität:
$K \sim K$

$$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, -) \mapsto K(x)$$

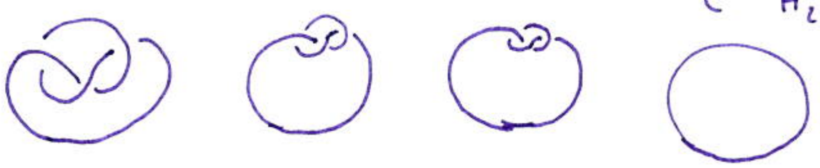
Symmetrie:

$J \overset{H_{alt}}{\sim} K \qquad K \overset{H_{neu}}{\sim} J \qquad H_{neu}(x,t) := H_{alt}(x, 1-t)$

Transitivität:

$K \overset{H_1}{\sim} J \qquad J \overset{H_2}{\sim} L$

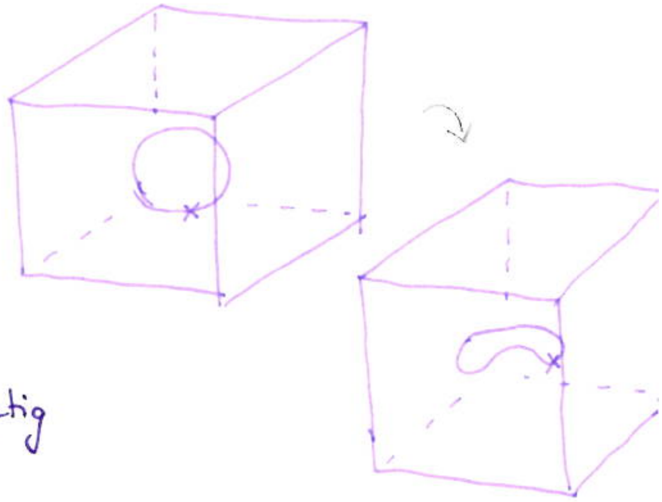
$$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H_1(x, 2t) & , 0 \le t \le 0{,}5 \\ H_2(x, 2t-1) & , 0{,}5 \le t \le 1 \end{cases}$$



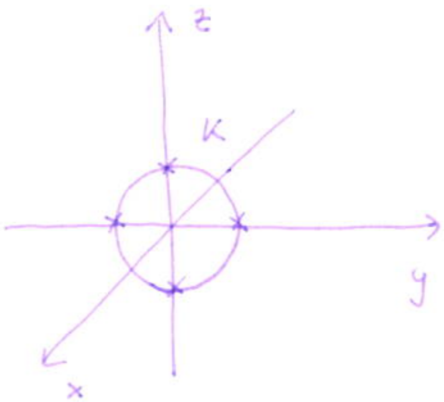
$t=0 \qquad t=0{,}3 \qquad t=0{,}8 \qquad t=1$

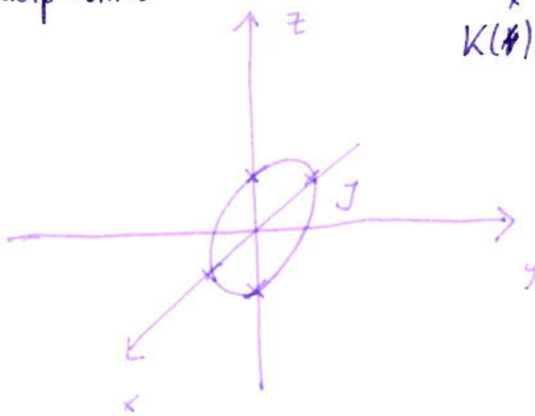
wären jetzt äquivalent

$$K \sim J \iff \exists\, H : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$H(-,0) = \mathrm{id}$$
$$H(K(x),1) = J(x) \quad \forall x \in [0,1]$$
$$\underbrace{H(-,t) \text{ bij., stetig und } H^{-1}(-,t) \text{ stetig}}_{\text{Homöomorphismus}}$$



$$K(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\pi x) \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix}$$





$$J(x) := \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) \\ 0 \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix}$$

$$H\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t\right) := \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) & \sin(\frac{\pi}{2}t) & 0 \\ -\sin(\frac{\pi}{2}t) & \cos(\frac{\pi}{2}t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$H(K(x),1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K(x) \overset{!}{=} J(x)$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) \\ 0 \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix}$$

$P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

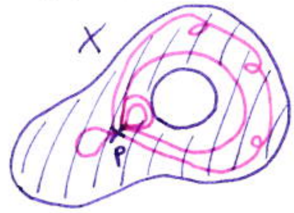
$P[K]$ Knoten

reguläre Position

→ je nur 2 Punkte des Knotens haben das selbe Bild

→ kein Eckpunkt darf auf einen Punkt abgebildet werden, auf den ein anderer Punkt abgebildet wurde

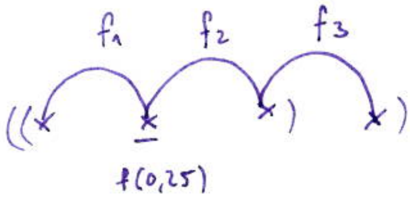
(X, d), $p \in X$



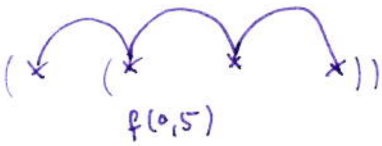
$\Omega(X,p) = \{$ Kurven $k: [0,1] \to X$ mit $k(0) = k(1) = p \}$

Sei $f, g : [0,1] \to X$

$$(f \star g)(t) := \begin{cases} f(2t) & , \ 0 \le t \le 0{,}5 \\ g(2t-1) & , \ 0{,}5 \le t \le 1 \end{cases}$$



$f = (f_1 \star f_2) \star f_3$



$f = f_1 \star (f_2 \star f_3)$

$K \sim J \iff K$ homotop zu J mit festem Endpunkt

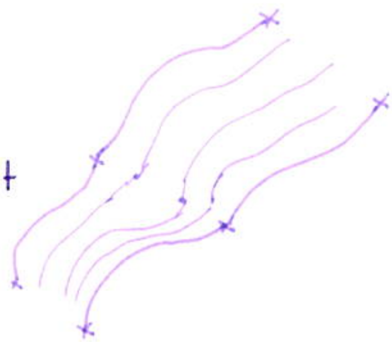
$\Omega(X,p) / \sim \; =: \pi_1(X,p)$

$\iff \exists \; H: [0,1] \times [0,1] \to X$ stetig

mit $H(-,0) = K$

$H(-,1) = J$

$H(0,t) = H(1,t) = p \quad \forall t$



$\star : \pi_1(X,p) \times \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,p),$

$([a],[b]) \mapsto [a \circ b]$

Sei $a, a', b, b' \in \Omega(X,p)$ und gelte $a \overset{H_1}{\sim} a'$ und $b \overset{H_2}{\sim} b'$

$a \circ b \overset{H_3}{\sim} a' \circ b'$

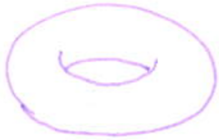
$H_3 : [0,1] \times [0,1] \to X, \quad H_3(-,t) := H_1(-,t) \star H_2(-,t)$

Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^3$ $\quad \pi_1(\mathbb{R}, 1) = \{0\}$

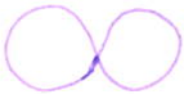
von $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ $\quad \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, 1) = \{0\}$

von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\quad \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, 1) = \mathbb{Z}$

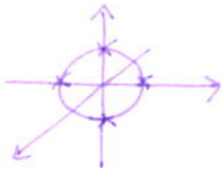
Beispiele



$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$



$\mathbb{Z}$

Bem.: π_1 ist ein Funktor von der Kategorie der (punktierten) topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen. Neben anderen Funktoren (Homologie, Kohomologie, ...) bildet er eine fundamentale Verbindung zwischen Topologie und Algebra.

Wiederholung: 18. 9. 2013

(1)

- Knoten: stetig diff.bare Einbettung $S^1 \to \mathbb{R}^3$
- Äquivalenz von Knoten: Homotopie $h_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$h_0 = id$

$h_1 (K_1) = K_2$

- Verschlingung: „Knoten mit mehreren Komponenten"

„Borromäische Ringe"

Frage: Wie kann man feststellen, ob zwei geg. Knoten äquivalent sind?

Reidemeister-Bewegungen

Typ I:

Typ II:

Typ III:

Satz: Zwei Knoten (mit Orientierung) (Verschlingungen) sind genau dann äquivalent, wenn sie sich nur durch Reidemeister-Bew. unterscheiden.

Bem:

Die Kauffman-Klammer

Idee: Ordne jedem Knotendiagramm ein Polynom zu, um dadurch die Knoten zu unterscheiden.

Def: Die Kauffman-Klammer ist eindeutige Abb.

$$\langle \cdot \rangle : \{\text{nicht-orient. Diagramme}\} \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}], \text{ mit}$$

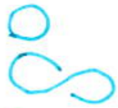
(i) $\langle \bigcirc \rangle = 1$

(ii) $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle$

(iii) 

Bsp: (Linkshändiger) Kleeblattknoten

$\langle$  $\rangle = A \cdot \langle$  $\rangle + A^{-1} \langle$  $\rangle = -A^4 - A^{-4}$

$\langle$  $\rangle = A \cdot \underbrace{\langle}$  $\underbrace{\rangle}_{= (-A^{-2}-A^{2}) \cdot \langle \infty \rangle} + A^{-1} \langle$  $\rangle = -A^3 \langle \infty \rangle$

$= -A^3 \left(A \cdot \langle \bigcirc\ \bigcirc \rangle + A^{-1} \underbrace{\langle \infty \rangle}_{=1} \right)$

$\langle \bigcirc\ \bigcirc \rangle = (-A^{-2}-A^{2} \cdot \underbrace{\langle \bigcirc \rangle}_{=1})$

$= A^6$

$= A^7 - A^3 - A^{-5}$

insg.

Invarianz unter Reidemeister-Bew:

Typ II: $\langle$  $\rangle = A \langle$  $\rangle + A^{-1} \langle$  $\rangle$

$= A \left(A \langle\right.$  $\rangle + A^{-1} \underbrace{\langle}$  $\underbrace{\rangle}_{(-A^{2}-A^{-2})\langle\,)\,(\,\rangle}\left.\right) + A^{-1} \left(A \langle\right.$  $\rangle + A^{-1} \langle$  $\left.\rangle\right)$

$= \langle$  $\rangle$

Typ III: $\langle$  $\rangle = A^{-1} \underbrace{\langle}$  $\underbrace{\rangle} + A \langle$  $\rangle \overset{!}{=} \langle$  $\rangle$

$= \langle$  $\rangle$

$= \langle$  $\rangle$

Typ I: $\langle$  $\rangle = -A^3 \langle$  $\rangle$

$\langle$  $\rangle = -A^{-3} \langle$  $\rangle$

Idee: Zähle die Überkreuzungen im Diagramm mit

positive Überkreuzung

negative Überkreuzung

Def: $w(D) = \#(\text{pos. Üb.}) - \#(\text{neg. Üb.})$

Verwringung

$\rightsquigarrow X(D) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$

ist invariant unter allen Reidemeister-Bew!

Def: Jones-Polynom : $V(D) := X(D)$ mit $A = t^{-1/4}$

Bsp: $D =$  K_l gespiegelt:  K_r

$w(D) = -3$

$V(K_l) = (-A^3)^3 (A^7 - A^3 - A^{-5})$ $\quad V(K_r) = -t^4 + t^3 + t$

$= -A^{16} + A^{12} + A^4$

$\underset{t = A^{-4}}{=} -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$

gespiegelt

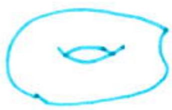
A und A^{-1} vertauscht bzw $t^{1/4}$ und $t^{-1/4}$

allgemein: $\langle \bar{K} \rangle = \overline{\langle K \rangle}$

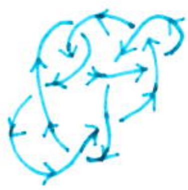
$K_l \not\sim K_r$

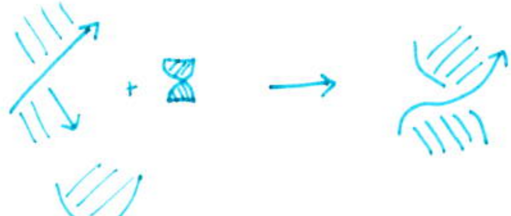
Offene Frage: Ist der Unknoten der einzige Knoten mit $V(K) = 1$

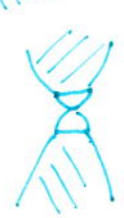
Seifert-Flächen

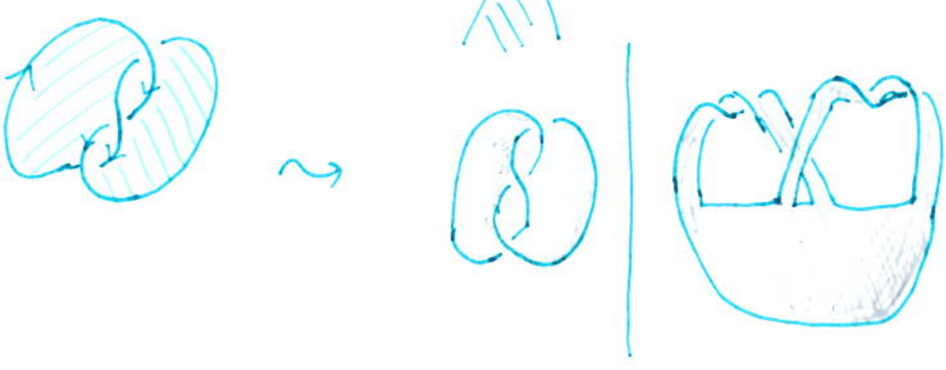


Seifert Algorithmus:

 $\rightsquigarrow$ disjunkte Kreise $\rightsquigarrow$ auffüllen durch Scheiben







1 Wiederholung Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$

Definition: $\pi_1(X, x_0) := \{\text{Wege } \alpha : I \to X \mid \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\} /_{\sim}$ Homotopie

$\hookrightarrow x_0$ ist fester Basispunkt

mit festem Anfangs- und Endpunkt $x_0 \rightsquigarrow$ ĀR heißt Fundamentalgruppe von X mit Basispunkt x_0

$$\alpha \sim \beta :\Longleftrightarrow \exists\, H : I \times I \to X \quad \text{stetig}$$

$$H(0, t) = \alpha$$

$$H(1, t) = \beta$$

$$t \longmapsto H(\underset{\text{fest}}{s}, t) \quad \text{ist geschlossene Kurve}$$

mit $H(s, 0) = H(s, 1) = x_0$

Gruppenstruktur:

$$[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$$

durchläuft erst α, dann β

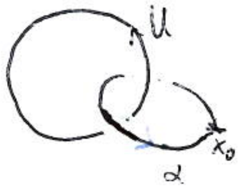
$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sei $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$ Knoten

Definition der Knotengruppe: $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ heißt Knotengruppe

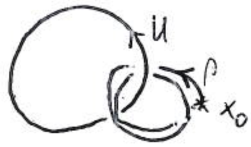
Bsp.: $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \underset{\uparrow}{U}) \cong \mathbb{Z}$

Unknoten



$[x_0] \mathrel{\hat{=}} 0$

$[\alpha] \mathrel{\hat{=}} 1$



$[\beta] \mathrel{\hat{=}} 2$

Wie lässt sich die Knotengruppe eines komplizierteren Knoten berechnen?

Gruppendarstellungen mit Erzeugern und Relationen:

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$ freie Gruppe über n Erzeugern
↳ d.h. keine Relationen

$$= \{ e, x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_1 x_2, x_2 x_1, \dots \}$$

„Wörter aus $x_1, \dots, x_n$"

Relationen:

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$$

r_i : Polynom in $x_1, \dots, x_n$

$$= \{ e, x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, x_1 x_2, x_2 x_1, \dots \} / \sim$$

$r_i \simeq e$

z. B. $\langle x_1, x_2 \mid r_1 = x_1 x_2 \rangle \simeq \langle x_1 \rangle \cong \mathbb{Z}$

$x_1 x_2 = e$

$x_2 = x_1^{-1}$

$$\langle x_1 \mid r_1 = x_1^k \rangle = \langle x_1 \rangle / _{x_1^k = e} \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$$

Freies Produkt von Gruppen:

$$G = \langle x_1, x_2, \dots \mid r_{x_1}, r_{x_2}, \dots \rangle$$
$$H = \langle y_1, y_2, \dots \mid r_{y_1}, r_{y_2}, \dots \rangle$$

$$\rightsquigarrow \quad G * H = \langle x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots \mid r_{x_1}, r_{x_2}, \dots, r_{y_1}, r_{y_2}, \dots \rangle$$

Die Wirtinger-Darstellung: (3)

Algorithmus zur Berechnung der Knotengruppe

- Wähle reguläre Projektion von K (wie in Bsp.) auf (x,y)-Ebene
- Für jeden Bogen j wähle Erzeuger a_j von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$

- für jede Kreuzung v gibt es eine Relation R_v gemäß

$R_v = a_j^{-1} a_k a_i a_k^{-1}$

(d.h. $a_j = a_k a_i a_k^{-1}$)

$R_v = a_j^{-1} a_k^{-1} a_i a_k$

$a_j = a_k^{-1} a_i a_k$

- Die Knotengruppe von K ist gegeben durch

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle a_j, j \text{ Bogen} \mid R_v, v \text{ Kreuzung} \rangle$$

Beispiel: $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus U) = \langle a \rangle = \mathbb{Z}$

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus LK) = \langle a, b, c \mid R_{v_1}, R_{v_2}, R_{v_3} \rangle$$

$$= \left\langle a, b, c \;\middle|\; \begin{array}{l} c = a b a^{-1} \\ b = c a c^{-1} \\ a = b c b^{-1} \end{array} \right\rangle$$

$R_{v_1} = c^{-1} a b a^{-1}$

$R_{v_2} = b^{-1} c a c^{-1}$

$R_{v_3} = a^{-1} b c b^{-1}$

$$= \left\langle a, b \;\middle|\; \begin{array}{l} (i)\ b = (a b a^{-1})\, a\, ((a b a^{-1})^{-1}) = a b a b^{-1} a^{-1} \\ (ii)\ \underbrace{a = b\,(a b a^{-1})\, b^{-1}} \end{array} \right\rangle$$

$$\iff b a b a^{-1} b^{-1} a^{-1} = e$$

$$\overset{(\cdot)^{-1}}{\iff} a b a b^{-1} a^{-1} b^{-1} = e \quad \iff (i)$$

$$= \langle a, b \mid a b a b^{-1} a^{-1} b^{-1} = e \rangle$$

Seifert-van-Kampen (ohne Beweis)

↳ ist wichtiger Satz über Fundamentalgruppen
wird zum Beweis der Wirtinger-Darstellung benötigt

X top. Raum $= \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ und Basispunkt $x_0 \in \bigcap_\alpha U_\alpha$

U_α offen

~~Inklusions-Abb.~~:

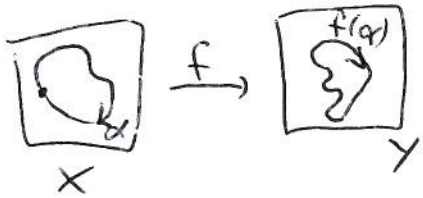
$$\begin{tikzcd} & U_\alpha \arrow[dr, "j_\alpha"] & \\ U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ur, "i_{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "i_{\beta\alpha}"'] & & X \\ & U_\beta \arrow[ur, "j_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

induzieren

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(U_\alpha) \arrow[dr] & \\ \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[ur, "i_{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "i_{\beta\alpha}"'] & & \pi_1(X) \\ & \pi_1(U_\beta) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$f : X \to Y$ stetig

top. Räume



induziert Abb.

$$f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$$
$$[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$$

$$N \subset \ast_\alpha \pi_1(U_\alpha) \xrightarrow{\Phi := \ast_\alpha j_\alpha} \pi_1(X)$$

normale Untergruppe erzeugt von $i_{\alpha\beta}(c) i_{\beta\alpha}(c)^{-1}$, $\alpha \neq \beta$
$c \in \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta)$

Satz: U_α, $U_\alpha \cap U_\beta$, $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ wegzshgd. $\forall \alpha, \beta, \gamma$

$\Rightarrow \Phi$ ist surjektiv und $\ker \Phi = N$,
d.h. Φ induziert einen Isom.

$$\ast_\alpha \pi_1(U_\alpha) / N \xrightarrow{\cong} \pi_1(X)$$

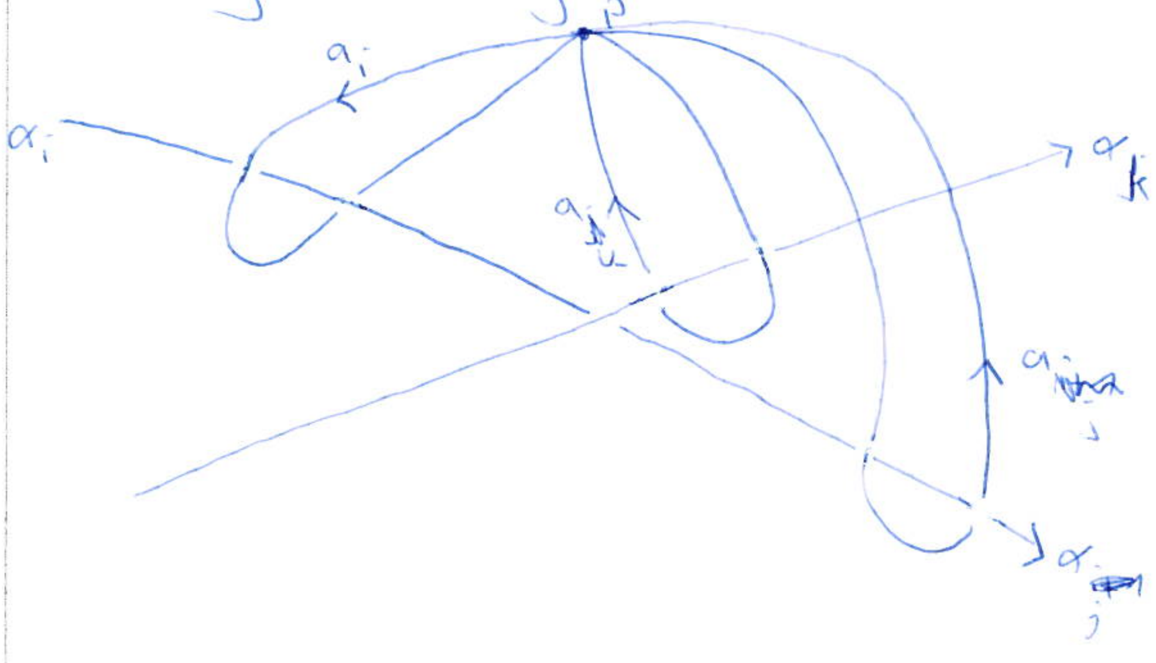
Beweis der Wirtinger-Darstellung:

- Projektion eines Knoten K auf die Ebene derart, dass es höchstens Doppelpunkte (als Kreuzungen) gibt. Im Fall eines Doppelpunktes muss angegeben werden, welcher ~~Zweig~~ Bogen von K dabei oben ist (reguläre Projektion)

- $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ ist gegeben durch Schleifen a_i durch diese Knotenbögen

Folglich hat man genau so viele Erzeuger wie es Kreuzungen gibt. Wir wählen eine Orientierung für den Knoten K und orientieren dann nach der Rechte-Hand-Regel die Erzeuger a_i um die Bögen α_i

~~Als~~ Es ist auch sinnvoll die Indizierung so anzuordnen, dass dem unteren Bogen α_i in eine Kreuzung hinein der Bogen α_j aus der Kreuzung hinaus folgt



Beweis des Algorithmus (~~benötigt~~ braucht den Satz von Seifert-van-Kampen): ⑥

Wir können annehmen, dass jeder Bogen α_i des Knotens K in der Ebene $z=1$ liegt, abgesehen von einem vertikalen Teilstück an jedem Bogenende (auf Höhe der Kreuzungen), welche nach $z=0$ heruntergeht. Der Endpunkt von α_i kann dann mit dem Anfangspunkt von α_{i+1} durch das Bogenstück β_{ik} in der Ebene $z=0$ verbunden werden, das unter dem ~~Bogen~~ oberen Bogen der Kreuzung α_j verläuft. ~~Wir nehmen dann das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus N$ wobei nehm~~

~~Man nimmt~~ definiert ~~nun~~ N, ~~die~~ eine Umgebung des

~~Knotens K~~

Man definiert nun N, eine Quader-Umgebung des Knotens K mit Seitenlänge ε, deren Mittelpunkt auf K liegt und wobei ε klein ~~genug ist um sicherzustellen, dass $\mathbb{R}^3 \setminus N$ ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^3 \setminus K$ ist, d.h.~~

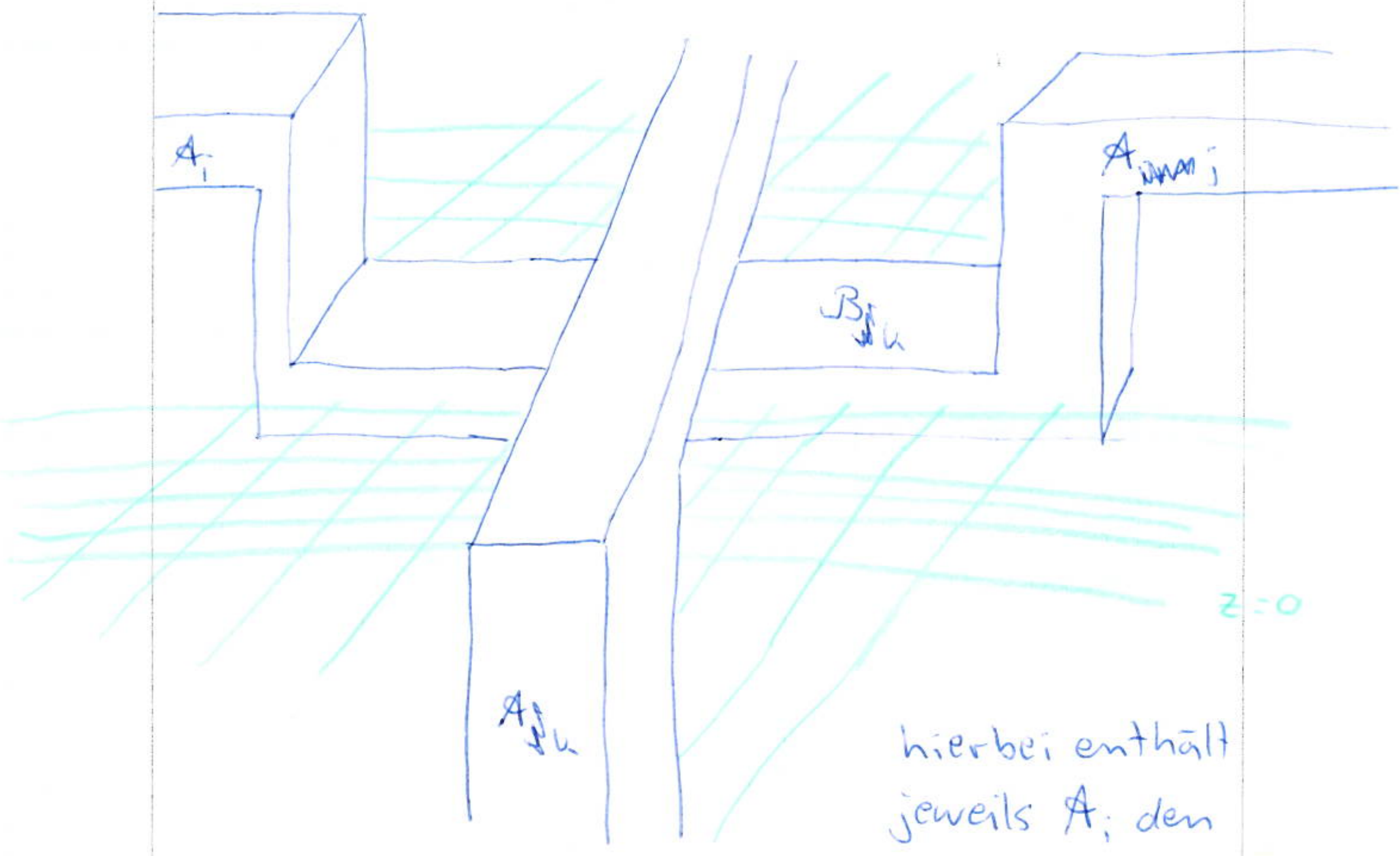
Deformationsretrakt ist Spezialfall von Homotopieäquivalenz

X, Y homot.-äquiv.

$\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, f: X \to Y$ stetig
$g: Y \to X$ ″

s.d. $f \circ g \sim id_Y$
$g \circ f \sim id_X$

homotop



hierbei enthält jeweils A_i den Knotenbogen α_i

- Man definiert $A = \{z > 0\} \setminus N$
Nun umkreisen $a_1, \dots, a_n$ den verdickten Knotenbogen, wobei a_i die Schleife ist, die um den Tunnel A_i verläuft

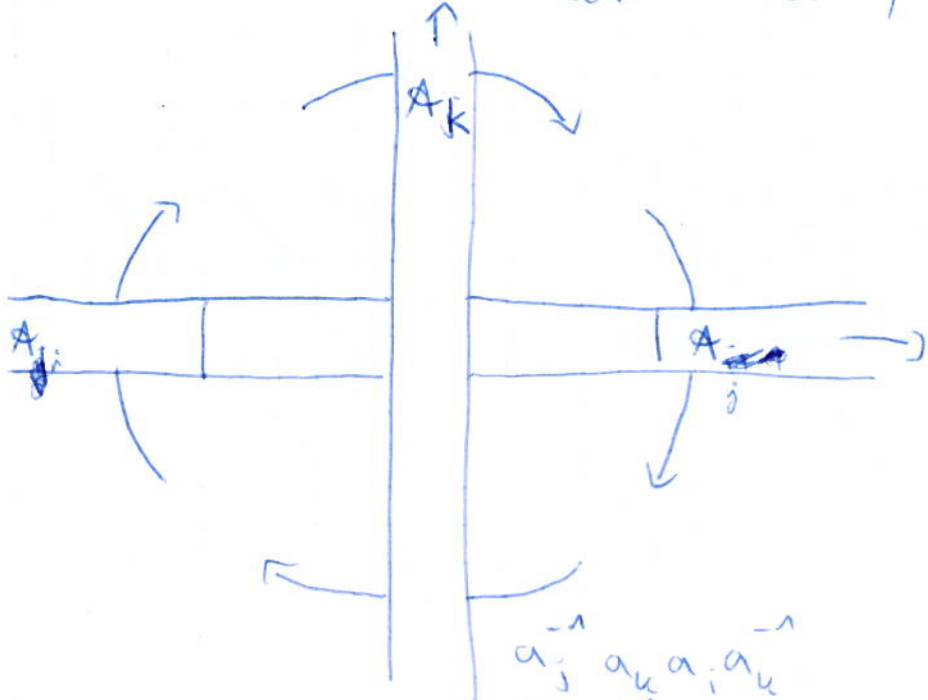
- Man definiert $B = \{z < \frac{\varepsilon}{2}\} \setminus N$ ist ein offener Halbraum mit „Gräben" an den Stellen der B_{j_k}-Tunnel. B ist einfach zusammenhängend, d.h. $\pi_1(B) = \{1\}$
Legt man Schleifen in B, so können diese stets an den Gräben „vorbeigezogen" werden und sind damit nullhomotop.

- $A \cap B = \{0 < z < \frac{\varepsilon}{2}\} \setminus N$ ist eine unendliche verdickte Ebene mit n Löchern an den Stellen der B_{j_k}-Gräben (die obere Hälfte der

Gräben)

Daher gilt $\pi_1(A \cap B)$ = freie Gruppe mit n Erzeugern

Der typische Erzeuger von $\pi_1(A \cap B)$, ist ein Kreis um einen der Gräben,



hat also die Form $a_j^{-1} a_k a_i a_k^{-1}$ in $\pi_1(A)$ oder $a_j^{-1} a_k^{-1} a_i a_k$ im Fall der zweiten Art der Kreuzung von vorhin und 1 bei $\pi_1(B)$ Mit dem Satz von Seifert-van-Kampen erhält man dann die Wirtinger-Darstellung für

$$\pi_1(A \cup B) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus N) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$$