

Pizzaseminar zur Kategorientheorie

5. Übungsblatt

Es folgt noch eine spannende und *konkrete* Aufgabe. Wird nachgereicht!

Aufgabe 1. Spitze schon im Diagramm

Sei $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm in einer Kategorie \mathcal{C} . Besitze \mathcal{D} ein terminales Objekt T . Zeige per Hand oder mit dem Kriterium aus Aufgabe 3, dass dann schon $F(T)$ selbst zu einem Kolimes von F wird.

Aufgabe 2. Monomorphe natürliche Transformationen

- a) Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus einer Kategorie. Zeige, dass f genau dann ein Monomorphismus ist, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}} & X \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

ein Faserprodukt diagramm ist.

- b) Sei $\eta : F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Besitze \mathcal{D} alle Faserprodukte. Zeige: η ist genau dann ein Monomorphismus in $\text{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, wenn alle Komponenten η_X Monomorphismen in \mathcal{D} sind.

Tipp: Limiten in Funktorkategorien berechnet man objektweise. Das wird im Skript noch genauer erklärt werden.

Aufgabe 3. Kofinale Unterdiagramme

In der Analysis gibt es folgende Mottos: *Das Weglassen endlich vieler Folgenglieder ändert nicht das Konvergenzverhalten. Teilfolgen konvergenter Folgen konvergieren ebenfalls, und zwar gegen denselben Grenzwert.* Diese Mottos wollen wir auf (Ko-)Limiten in der Kategorientheorie übertragen.

Dazu nennen wir einen Funktor $H : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ genau dann *kofinal*, wenn für alle $d \in \text{Ob } \mathcal{D} \dots$

1. ein Objekt $d_0 \in \text{Ob } \mathcal{D}_0$ und ein Morphismus $d \rightarrow H(d_0)$ in \mathcal{D} existiert und
2. für je zwei solcher Morphismen ein Objekt $\tilde{d}_0 \in \text{Ob } \mathcal{D}_0$ und Morphismen $d_0 \rightarrow \tilde{d}_0$, $d'_0 \rightarrow \tilde{d}_0$ existieren, deren Bilder unter H das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} d & \longrightarrow & H(d_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(d'_0) & \dashrightarrow & H(\tilde{d}_0) \end{array}$$

kommutieren lassen.

Etwa ist der Inklusionsfunktor $B(2\mathbb{N}) \rightarrow B(\mathbb{N})$ kofinal, wenn \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen mit ihrer gewöhnlichen Ordnung und $2\mathbb{N}$ die Teilordnung der geraden Zahlen bezeichnet.

Sei nun $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein \mathcal{D} -förmiges Diagramm in einer Kategorie \mathcal{C} .

- a) Zeige: Die Kategorie der Kokegel von F ist äquivalent zur Kategorie der Kokegel von $F \circ H$.
- b) Was folgt daher über das Verhältnis der Kolimiten von F und $F \circ H$?