

## Pizzaseminar 2. Übungsblatt

### Aufgabe 1. Doppelnegationsübersetzung

Beweise die fundamentalen Eigenschaften der Doppelnegationsübersetzung, jeweils für alle Aussagen  $\varphi$  und  $\psi$  in beliebigen Kontexten  $\vec{x}$ .

- a) Klassisch gilt:  $\varphi \iff \varphi^\circ$ .
- b) Intuitionistisch gilt:  $\neg\neg\varphi^\circ \implies \varphi^\circ$ .
- c) Wenn  $\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$  klassisch, dann  $\varphi^\circ \vdash_{\vec{x}} \psi^\circ$  intuitionistisch.

*Bemerkung:* Du kannst sogar zeigen, dass  $\varphi^\circ \vdash_{\vec{x}} \psi^\circ$  in *minimaler Logik* gilt, das ist intuitionistische Logik ohne das Prinzip *ex falso quodlibet* ( $\perp \vdash_{\vec{x}} \chi$ ).

### Aufgabe 2. Beweisbäume

Finde für folgende Sequenzen formale Ableitungsbäume:

- a)  $(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash_{\vec{x}} ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$
- b)  $(\exists y : Y : \varphi) \vdash_{\vec{x}, z} \varphi[z/y]$
- c)  $(x = y) \vdash_{x, y} (y = x)$

### Aufgabe 3. Minimumsprinzip

Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine Folge natürlicher Zahlen. Wir wollen die Aussage

$$A := \exists n : \mathbb{N} : \forall m : \mathbb{N} : a_n \leq a_m$$

betrachten, die besagt, dass die Folge ein Minimum annimmt.

- a) Zeige konstruktiv, dass  $\neg\neg A$ .
- b) Formuliere deinen Beweis als Streitgespräch für  $\neg\neg A$  (ohne Zeitsprünge).
- c) Formulieren deinen Beweis als Streitgespräch für  $A$  (notwendigermaßen mit Zeitsprüngen).

*Bemerkung:* Man kann nicht erwarten, konstruktiv  $A$  zeigen zu können. Die Aussage, dass das für alle Folgen doch ginge, ist übrigens ein klassisches Prinzip, das aus dem Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten folgt, aber echt schwächer ist.