Universität Augsburg
19. Februar 2014

# Pizzaseminar zu erzeugenden Funktionen
## 1. Übungsblatt

**Aufgabe 0:** Spiele mit erzeugenden Funktionen auf dem Rechner! Erstelle dir zum Beispiel auf `sage.math.uni-augsburg.de` einen Account und probiere dann den folgenden Code aus:

```
X.<x> = PowerSeriesRing(QQ)
print 1/(1-x-x^2)
print
XY.<y> = PowerSeriesRing(X)
print 1/(1-y-x*y)
```

**Aufgabe 1:** Sei $f_n$ die Anzahl der Teilmengen der Menge $\{1, \dots, n\}$, welche keine zwei benachbarten Zahlen enthalten. Bestimme eine Rekursionsgleichung für die Folge $(f_n)$ und die (gewöhnliche) erzeugende Funktion.

Verfeinere anschließend die Folge zur Doppelfolge durch Einführung eines neuen Parameters $k$, der die Mächtigkeit zählt: $b_{n,k}$ sei die Anzahl der $k$-Teilmengen der Menge $\{1, \dots, n\}$, welche keine zwei benachbarten Zahlen enthalten. Suche auch hier Rekursionsgleichung und (doppelt gewöhnliche) erzeugende Funktion.

**Aufgabe 2:** Sei $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Folge, die durch die Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} f_n &= a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + a_3 f_{n-3} + c, && n \geq 3 \\ f_n &= b_n, && n = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

mit festen $a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, c$ gegeben ist. Bestimme die gewöhnliche und exponentiell erzeugende Funktion der Folge.

**Aufgabe 3:** Sei $s_{n,p} := \sum_{k=0}^{n} k^p$ die Verallgemeinerung des kleinen Gauß. Leite eine Rekursionsformel für die Doppelfolge $(s_{n,p})$ her (benutze binomische Formel) und bestimme die erzeugende Funktion

$$S(x,t) = \sum_{n,p \geq 0} s_{n,p}\, x^n \frac{t^p}{p!}$$