

Quasikohärente Modulgarben

Ingo Blechschmidt

28. Mai 2015

1 Grundlagen

Motto 1.1. Nur die quasikohärenten Modulgarben auf einem Schema haben geometrische Bedeutung. Die anderen sind Artefakt der Kodierung über lokal geringte Räume.

Definition 1.2. Sei X ein Schema und \mathcal{E} eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe. Genau dann heißt \mathcal{E} *quasikohärent*, wenn es lokal exakte Sequenzen der Form

$$\mathcal{O}_X^{\oplus I} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus J} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

gibt. Dabei können I und J beliebige Mengen sein.

Proposition 1.3. Sei X ein Schema und \mathcal{E} eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe. Dann sind äquivalent:

1. Die Modulgarbe \mathcal{E} ist quasikohärent.
2. Es gibt eine Überdeckung von X durch offene affine Teilmengen U sodass für jede Überdeckungsmenge $U = \operatorname{Spec} A$ die Einschränkung $\mathcal{E}|_U$ isomorph zu einer Modulgarbe der Form M^\sim für einen A -Modul M ist.
3. Für alle offenen affinen Teilmengen $U = \operatorname{Spec} A$ ist $\mathcal{E}|_U$ isomorph zu einer Modulgarbe der Form M^\sim für einen A -Modul M .
4. Für alle offenen affinen Teilmengen $U = \operatorname{Spec} A$ und Funktionen $f \in A$ ist die kanonische Abbildung $\mathcal{E}(U)[f^{-1}] \rightarrow \mathcal{E}(D(f))$ ein Isomorphismus von $A[f^{-1}]$ -Moduln.

Bemerkung 1.4. Eine Modulgarbe \mathcal{E} auf einem Schema X ist genau dann quasikohärent, wenn aus Sicht der internen Sprache des Topos $\operatorname{Sh}(X)$ für alle $f : \mathcal{O}_X$ der lokalisierte Modul $\mathcal{E}[f^{-1}]$ eine Garbe bezüglich der Modalität \square mit $\square\varphi \equiv (f \text{ inv.} \Rightarrow \varphi)$ ist.

Beispiel 1.5. Die Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf einem affinen Schema $\operatorname{Spec} A$ ist äquivalent zur Kategorie der A -Moduln. Die Äquivalenz wird vermittelt durch den Funktor $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}(\operatorname{Spec} A)$ mit Pseudoinversem $M \mapsto M^\sim$.

Beispiel 1.6. Die Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf einem projektiven Schema $\text{Proj } A$ ist äquivalent zum Quotient der Kategorie der \mathbb{Z} -graduierten A -Moduln modulo der Serreschen Unterkategorie derjenigen graduierten Moduln, welche ab einem gewissen Grad verschwinden. Die Äquivalenz wird durch eine projektive Variante der Tilde-Konstruktion vermittelt.

Beispiel 1.7. Der Rückzug quasikohärenter Modulgarben ist stets wieder quasikohärent. Der Pushforward einer quasikohärenten Modulgarbe längs einem quasikompakten und quasiparierten Morphismus ist wieder quasikohärent.

Proposition 1.8. Sei $f : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B$ ein Morphismus affiner Schemata. Betrachte A vermöge $f^\#$ als B -Algebra.

1. Sei M ein A -Modul. Dann gilt $f_*(M^\sim) \cong (M_B)^\sim$.
2. Sei N ein B -Modul. Dann gilt $f^*(N^\sim) \cong (N \otimes_B A)^\sim$.

Bemerkung 1.9. Aus der Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf einem Schema X zusammen mit ihrer abelschen Struktur kann man das Schema rekonstruieren; das besagt der Rekonstruktionssatz von Gabriel–Rosenberg. Für affine Schemata folgt das aus der für Ringe A gültigen Isomorphiekette

$$A \cong \text{End}(\text{Id}_{\text{Mod}(A)}) \cong \text{End}(\text{Id}_{\text{QCoh}(\text{Spec } A)}).$$

Allgemein heißt für eine abelsche Kategorie \mathcal{C} die Menge der Endomorphismen des Identitätsfunktors auf \mathcal{C} auch *Zentrum von \mathcal{C}* . Mit der Addition und Verkettung von natürlichen Transformationen wird diese zu einem kommutativen Ring.

Bemerkung 1.10. Die Kategorie $\text{QCoh}(X)$ der quasikohärenten Modulgarben ist eine koreflektive Unterkategorie der Kategorie $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ aller Modulgarben, das heißt die Inklusion $\text{QCoh}(X) \hookrightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ besitzt einen Rechtsadjungierten, den so genannten *Kohäerator*. Als Konsequenz kann man zeigen, dass $\text{QCoh}(X)$ wie auch $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ eine Grothendieck-Kategorie ist. Kolimiten berechnet man in $\text{QCoh}(X)$ genau wie in $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$. Limiten in $\text{QCoh}(X)$ berechnet man, indem man sie zunächst in $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ bestimmt und dann den Kohäerator anwendet. Für endliche Limiten kann man auf den Kohäerator verzichten.¹

2 Tiefere kategorielle Interpretation

Sei \mathcal{E} eine quasikohärente Modulgarbe auf einem Schema X . Dann erhalten wir für jeden Morphismus $f : \text{Spec } A \rightarrow X$ durch Betrachtung des Rückzugs $f^*\mathcal{E}$ einen A -Modul, den wir „ $\underline{\mathcal{E}}(A)$ “ bezeichnen möchten. In der Notation unterdrücken wir also den Morphismus f und notieren nur seine Quelle. Ist $p : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ ein weiterer Morphismus, so gibt es eine

¹Seien M_i Moduln über A . Das Produkt der M_i^\sim in der Kategorie aller Modulgarben auf $\text{Spec } A$ ist dann eine Garbe mit $D(f) \mapsto \prod_i M_i[f^{-1}]$. Dagegen ist das Produkt der M_i^\sim in der Kategorie der quasikohärenten Modulgarben eine Garbe mit $D(f) \mapsto (\prod_i M_i)[f^{-1}]$. Es gibt zwar einen kanonischen Morphismus $(\prod_i M_i)[f^{-1}] \rightarrow \prod_i M_i[f^{-1}]$; im Allgemeinen ist dieser jedoch weder injektiv noch surjektiv.

kanonische Abbildung $\underline{\mathcal{E}}(A) \rightarrow \underline{\mathcal{E}}(B)$. Insgesamt definiert daher die Zuordnung $(\text{Spec } A \rightarrow X) \mapsto \underline{\mathcal{E}}(A)$ eine *Prägarbe* auf der Kategorie Aff/X der affinen Schemata über X .

Die Familie dieser Moduln $\underline{\mathcal{E}}(A)$ hat drei Besonderheiten:

0. Die Prägarbe $\underline{\mathcal{E}}$ ist ein Modulobjekt über dem Ringobjekt $\underline{\mathcal{O}}_X$, das ist die Prägarbe

$$\begin{aligned} (\text{Aff}/X)^{\text{op}} &\longrightarrow \text{Set} \\ (\text{Spec } A \rightarrow X) &\longmapsto A. \end{aligned}$$

1. Seien Morphismen $f : \text{Spec } A \rightarrow X$ und $p : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ gegeben. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\underline{\mathcal{E}}(A) \otimes_A B \xrightarrow{\cong} \underline{\mathcal{E}}(B),$$

denn $p^* f^* \mathcal{E}$ ist kanonisch isomorph zu $(f \circ p)^* \mathcal{E}$. Diese Isomorphismen erfüllen ihrerseits eine Kohärenzbedingung.

2. Sei $f : \text{Spec } A \rightarrow X$ ein Morphismus und sei $\text{Spec } A$ überdeckt durch offene affine Unterschemata $\text{Spec } A[f_i^{-1}]$. Dann ist das Diagramm

$$\underline{\mathcal{E}}(A) \rightarrow \prod_i \underline{\mathcal{E}}(A[f_i^{-1}]) \rightrightarrows \prod_{i,j} \underline{\mathcal{E}}(A[f_i^{-1}, f_j^{-1}])$$

ein Differenzkernendiagramm. Man sagt auch, die Zuordnung $(\text{Spec } A \rightarrow X) \mapsto \underline{\mathcal{E}}(A)$ sei eine *Zariski-Garbe*.

Man kann sich überlegen, dass für eine Prägarbe \mathcal{F} auf Aff/X Eigenschaft 2 schon aus den Eigenschaften 0 und 1 folgt. Denn das fragliche Diagramm ist dann isomorph zu

$$\mathcal{F}(A) \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(A)[f_i^{-1}] \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(A)[f_i^{-1}, f_j^{-1}],$$

und es ist eine elementare Beobachtung aus der linearen Algebra über Ringen, dass dieses ein Differenzkernendiagramm ist.

Als Zwischenfazit halten wir fest: Eine quasikohärente Modulgarbe \mathcal{E} definiert ein kohärentes System von Moduln $(\underline{\mathcal{E}}(A))_{\text{Spec } A \rightarrow X}$, also ein System, das Eigenschaft 1 hat. Umgekehrt kann man sich überlegen, dass jedes solche System auch eine quasikohärente Modulgarbe festlegt.

Die Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf X ist also äquivalent zur Kategorie der kohärenten Aff/X -indizierten Systeme von Moduln. Das kann einen an die Konstruktion von Limiten in der Kategorie der Mengen erhalten! Tatsächlich gilt

$$\text{QCoh}(X) = \lim_{\text{Spec } A \rightarrow X} \text{Mod}(A).$$

Der Limes auf der rechten Seite muss in einem 2-kategoriiellen Sinn verstanden werden; ein Objekt dieser Kategorie besteht aus

1. einer Familie von Moduln: für jeden Morphismus $\text{Spec } A \rightarrow X$ einen A -Modul M_A , und
2. Isomorphismen: für jeden Morphismus $\text{Spec } A \rightarrow X$ und jeden Morphismus $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ einen Isomorphismus $M_A \otimes_A B \rightarrow M_B$,

sodass diese bezüglich weiterer Morphismen $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } B$ ein Kohärenzaxiom erfüllen.

Die rechte Seite kann man als Instanz der *Limesformel für Rechts-Kan-Erweiterungen* erkennen. Damit können wir also auch schreiben:

$$\text{QCoh} = \text{Ran}_{\text{inkl}}(\text{Mod}).$$

Der Funktor QCoh , der einem Schema seine Kategorie quasikohärenter Modulgarben zuordnet, ist also die Rechts-Kan-Erweiterung des Funktors $\text{Mod} : \text{Ring} \rightarrow \text{Cat}$ (welcher einem Ring A die Kategorie der A -Moduln zuordnet) längs der Inklusion $\text{inkl} : \text{Aff}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sch}^{\text{op}}$; bedenke $\text{Aff}^{\text{op}} = \text{Ring}$.

Man kann diese Geschichte auch noch anders erzählen. Angenommen, wir fangen gerade an, die Grundzüge der Schematheorie zu entwickeln. Als einleuchtendes Konzept für quasikohärente Modulgarben auf affinen Schemata $\text{Spec } A$ fällt uns dann die Kategorie der gewöhnlichen A -Moduln ein. Auf diese Weise erhalten wir einen Funktor $\text{Mod} : \text{Aff}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$. Wenn es nun doch nur eine Möglichkeit gäbe, diesen Funktor längs der Inklusion $\text{Aff}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sch}^{\text{op}}$ zu erweitern!



Beide der Ausdrücke für $\text{QCoh}(X)$ lassen sich auf Objekte X verallgemeinern, die nicht Schemata im engeren Sinn sind: zum Beispiel Garben auf Ring^{op} , welche nicht unbedingt lokal affin sind, oder sogar Prägarben auf Ring^{op} . Die Limesformel ist auch eine zentrale Idee zur Definition der Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf einem Stack.

Wer mag, kann die Formel auch noch zu

$$\text{QCoh}(X) = \int_A \text{Hom}(\text{Spec } A, X) \cdot \text{Mod}(A) = \int_A [\underline{X}(A), \text{Mod}(A)]$$

umschreiben. Damit endet dieser Ausflug in die 2-kategorielle Interpretation quasikohärenter Modulgarben.