Pizzaseminar zur Kategorientheorie

10. Juli 2013

in Entstehung befindlich

TeXer: Tim Baumann, Ingo Blechschmidt, Justin Gassner, Lukas Graf,
Maximilian Huber, Matthias Hutzler

Inhaltsverzeichnis

1 Was sollen Kategorien?

Ingo Blechschmidt

1.1 Beispiele für kategorielles Verständnis

Beispiel: Produkte

Von manchen Konstruktionen in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik wird man das Gefühl nicht los, dass sie einem gemeinsamen Ursprung entstammen: Etwa kennt man. . .

- das kartesische Produkt von Mengen: $X \times Y$,
- das kartesische Produkt von Vektorräumen: $V \times W$,
- das kartesische Produkt von Gruppen: $G \times H$,
- das kartesische Produkt von Garben: $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$,
- das kartesische Produkt von Vektorbündeln: $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$,
- das Minimum von Zahlen: $\min\{n, m\}$,
- den größten gemeinsamen Teiler von Zahlen: $\mathrm{ggT}(n, m)$,
- den Paartyp in Programmiersprachen: `(a,b)`,
- den Produktautomat zweier endlicher Automaten,

- den Mutterknoten zweier Knoten in einem Graph.

Die Ähnlichkeit untereinander ist mal mehr, mal weniger deutlich. Nur mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Produkts*. Ferner erfüllen all diese Konstruktionen sehr ähnliche Gesetze, etwa gilt

$$\begin{aligned} X \times (Y \times Z) &\cong (X \times Y) \times Z, \\ U \times (V \times W) &\cong (U \times V) \times W, \\ \min\{m, \min\{n, p\}\} &= \min\{\min\{m, n\}, p\}, \\ \mathrm{ggT}(m, \mathrm{ggT}(n, p)) &= \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(m, n), p), \end{aligned}$$

wobei in der ersten Zeile X, Y und Z Mengen sein und das Isomorphiezeichen für Gleichmächtigkeit stehen soll und in der zweiten Zeile U, V und W Vektorräume sein und das Isomorphiezeichen für Vektorraumisomorphie stehen soll. Mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle der allgemeinen Assoziativität des kategoriellen Produkts.

Beispiel: Isomorphie

Ferner fällt auf, dass in vielen Teilgebieten der Mathematik jeweils ein speziell zugeschnittener Isomorphiebegriff vorkommt: Etwa können...

- zwei Mengen X, Y gleichmächtig sein,
- zwei Vektorräume V, W isomorph sein,
- zwei Gruppen G, H isomorph sein,
- zwei top. Räume X, Y homöomorph sein,
- zwei Zahlen n, m gleich sein,
- zwei endliche Automaten isomorph sein,
- zwei Typen `a`, `b` sich verlustfrei ineinander umwandeln lassen.

All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Isomorphiekonzepts*.

Beispiel: Dualität

Von folgenden Konzepten hat man im Gefühl, dass sie in einem gewissen Sinn *zueinander dual* sein sollten:

$f \circ g$	$g \circ f$
$\leq$	$\geq$
injektiv	surjektiv
$\{\star\}$	$\emptyset$
$\times$	$\amalg$
ggT	kgV
$\cap$	$\cup$
Teilmenge	Faktormenge

Mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle eines allgemeinen *kategoriellen Dualitätsprinzips* – und diese Erkenntnis kann man nutzen, um Ergebnisse für jeweils eines der Konzepte auf sein duales Gegenstück zu übertragen.

1.2 Grundlagen

Definition 1.1. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus

a) einer Klasse von *Objekten* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,

b) zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ einer Klasse $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von *Morphismen* zwischen ihnen und

c) einer Kompositionsvorschrift:

$$\begin{aligned} &\text{zu} && f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \qquad && \text{zu} && f : X \to Y \\ &\text{und} && g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) && \text{und} && g : Y \to Z \\ &\text{habe} && g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z), && \text{habe} && g \circ f : X \to Z, \end{aligned}$$

sodass

a) die Komposition $\circ$ assoziativ ist und

b) es zu jedem $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ einen *Identitätsmorphismus* $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ mit

$$f \circ \mathrm{id}_X = f, \quad \mathrm{id}_X \circ g = g$$

für alle Morphismen f, g gibt.

Die Morphismen von Kategorien müssen nicht unbedingt Abbildungen sein, die Schreibweise „$f : X \to Y$“ missbraucht also Notation. Die genaue Bedeutung von *Klassen* im Gegensatz zu *Mengen* hängt von der persönlich gewählten logischen Fundierung der Mathematik ab. Für uns genügt folgende naive Sichtweise: Klassen können (im Gegensatz zu Mengen) beliebige mathematische Objekte enthalten, sind aber selbst nicht mathematische Objekte. Daher gibt es etwa widerspruchsfrei die Klasse aller Mengen, von einer Klasse aller Klassen kann man aber nicht sprechen.

Beispiel 1.2. a) Archetypisches Beispiel ist Set, die Kategorie der Mengen und Abbildungen:

$$\operatorname{Ob}\mathrm{Set} := \{M \mid M \text{ ist eine Menge}\}$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ ist eine Abbildung}\}$$

b) Die meisten Teilgebiete der Mathematik studieren jeweils eine bestimmte Kategorie: Gruppentheoretiker beschäftigen sich etwa mit der Kategorie Grp der Gruppen und Gruppenhomomorphismen:

$$\operatorname{Ob}\mathrm{Grp} := \text{Klasse aller Gruppen}$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G, H) := \{f : G \to H \mid f \text{ ist ein Gruppenhomo}\}$$

c) Es gibt aber auch wesentlich kleinere Kategorien. Etwa kann man aus jeder Quasiordnung $(P, \preceq)$ eine Kategorie $\mathcal{C}$ basteln:

$$\operatorname{Ob}\mathcal{C} := P$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) := \begin{cases} \text{einelementige Menge}, & \text{falls } x \preceq y, \\ \text{leere Menge}, & \text{sonst} \end{cases}$$

d) Auch sind gewisse endliche Kategorien bedeutsam, etwa die durch folgende Skizze gegebene:

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \arrow[loop above] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[loop left] & \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Motto 1.3 (fundamental)**.** *Kategorientheorie stellt* Beziehungen zwischen Objekten *statt etwaiger innerer Struktur in den Vordergrund.*

Definition 1.4. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *lokal klein*, wenn ihre Hom-Klassen jeweils schon Mengen (statt echte Klassen) sind. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *klein*, wenn zusätzlich auch ihre Klasse von Objekten schon eine Menge bildet.

Initiale und terminale Objekte

In Kategorien sind folgende zwei Arten von Objekten aufgrund ihrer ausgezeichneten Beziehungen zu allen (anderen) Objekten besonders wichtig:

Definition 1.5. Ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *initial*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\colon \exists! f : X \to Y.$$

- *terminal*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\colon \exists! f : Y \to X.$$

Diese Definitionen geben ein erstes Beispiel für sog. *universellen Eigenschaften.*

Beispiel 1.6. a) In der Kategorie der Mengen ist genau die leere Menge initial und genau jede einelementige Menge terminal. Diese Erkenntnis ist ein erstes Beispiel dafür, wie das fundamentale Motto gemeint ist: Eine Definition der leeren bzw. einer einelementigen Menge über eine Aufzählung ihrer Elemente betont ihre innere Struktur, während eine Definition als initiales bzw. terminales Objekt die besonderen Beziehungen zu allen Mengen hervorhebt.

b) In der Kategorie der K-Vektorräume ist der Nullvektorraum K^0 initial und terminal.

Viele kategorielle Konstruktionen realisiert man als initiales oder terminales Objekt in einer geeigneten Kategorie von Möchtegern-Konstruktionen. Ein erstes Beispiel dazu werden wir im folgenden Kapitel über Produkte finden.

Mono-, Epi- und Isomorphismen

Definition 1.7. Ein Morphismus $f : X \to Y$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *Monomorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $p, q : A \to X$ gilt:
$$f \circ p = f \circ q \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$
- *Epimorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $p, q : Y \to A$ gilt:
$$p \circ f = q \circ f \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$

Beispiel 1.8. a) In den Kategorien der Mengen, Gruppen und K-Vektorräumen sind die Monomorphismen genau die injektiven und die Epimorphismen genau die surjektiven Abbildungen. Das ist jeweils eine interessante Erkenntnis über die Struktur dieser Kategorien und nicht ganz leicht zu zeigen.

b) In der Kategorie der metrischen Räume mit stetigen Abbildungen gibt es Epimorphismen, die nicht surjektiv sind: nämlich alle stetigen Abbildungen mit dichtem Bild.

Definition 1.9. Ein *Isomorphismus* $f : X \to Y$ in einer Kategorie ist ein Morphismus, zu dem es einen Morphismus $g : Y \to X$ mit
$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$
gibt. Statt „g“ schreibt man auch „f^{-1}“. Existiert zwischen Objekten X und Y ein Isomorphismus, so heißen die Objekte *zueinander isomorph*: $X \cong Y$.

Bemerkung 1.10. In den meisten Kategorien ist die Frage, ob Objekte X, Y tatsächlich gleich (statt nur isomorph) sind, keine interessante Frage: Denn für alle praktischen Belange sind schon zueinander isomorphe Objekte „gleich gut“. Diesen Gedanken werden wir noch manche Male aufgreifen und weiter entwickeln.

Aufgabe 1.11. Zeige, dass in jeder Kategorie $\mathcal{C}$ die Klasse der Isomorphismen die *2-aus-3-Eigenschaft* hat: Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ komponierbare Morphismen in $\mathcal{C}$ und sind zwei der drei Morphismen f, g und $g \circ f$ Isomorphismen, so auch der dritte.

Die duale Kategorie

Aus jeder Kategorie $\mathcal{C}$ kann man durch „Umdrehen aller Pfeile“ eine weitere Kategorie erhalten, die sogenannte duale Kategorie von $\mathcal{C}$:

Definition 1.12. Die zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ zugehörige *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist folgende:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\mathrm{op}} &:= \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) &:= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \end{aligned}$$

Das ist ein rein formaler Prozess, der mit dem Invertieren bijektiver Abbildungen nichts zu tun hat. Die duale Kategorie ist nützlich, um sich der Dualität mancher kategorieller Konzepte gewahr zu werden:

Beispiel 1.13.

a) Ein initiales Objekt in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist ein terminales Objekt in $\mathcal{C}$ und umgekehrt.

b) Ein Epimorphismus in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$ und umgekehrt.

c) Zwei Objekte sind genau dann in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ zueinander isomorph, wenn sie es in $\mathcal{C}$ sind. Isomorphie ist also ein *selbstduales* Konzept.

Spannend ist es, wenn duale Kategorien durch andere, natürlich auftretende Kategorien beschrieben werden können.

2 Produkte und Koprodukte

Matthias Hutzler

Definition 2.1. Seien X, Y Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$. Dann besteht ein *Produkt* von X und Y aus

a) einem Objekt $P \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und

b) Morphismen $\pi_X : P \to X$, $\pi_Y : P \to Y$,

sodass für jedes andere *Möchtegern-Produkt*, also

a) jedem Objekt $\widetilde{P} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ zusammen mit

b) Morphismen $\widetilde{\pi}_X : \widetilde{P} \to X$, $\widetilde{\pi}_Y : \widetilde{P} \to Y$

genau ein Morphismus $\psi : \widetilde{P} \to P$ existiert, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
X & & Y \\
& \widetilde{P} \arrow[ul, "\widetilde{\pi}_X"] \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_Y"'] \arrow[uu, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutieren lässt, also die Gleichungen

$$\pi_X \circ \psi = \widetilde{\pi}_X$$
$$\pi_Y \circ \psi = \widetilde{\pi}_Y$$

erfüllt.

Motto 2.2. *Ein Produkt ist ein bestes Möchtegern-Produkt.*

Statt „P“ schreibt man gerne „$X \times Y$“; es muss aus dem Kontext klar werden, ob das Kreuzzeichen speziell das kartesische Produkt von Mengen oder das allgemeine kategorielle Produkt bezeichnen soll. Analog definiert man das Produkt von n Objekten, $n \geq 0$, und dual definiert man das Koprodukt.

2.1 Beispiele

Beispiel 2.3. a) Das Produkt in der Kategorie der Mengen ist durch das kartesische Produkt gegeben, das Koprodukt durch die disjunkt-gemachte Vereinigung.

b) Das Produkt in der Kategorie der Gruppen ist durch das direkte Produkt mit der komponentenweisen Verknüpfung gegeben, das Koprodukt durch das sog. freie Produkt von Gruppen.

c) Produkt und Koprodukt endlich vieler Objekte in der Kategorie der K-Vektorräume sind durch die äußere direkte Summe gegeben. Produkte und Koprodukte von unendlich vielen Objekten unterscheiden sich allerdings.

d) Das Produkt in der von einer Quasiordnung induzierten Kategorie ist durch das Infimum gegeben. Dual ist das Koprodukt durchs Supremum gegeben.

Beweis. a) Wir zeigen die Aussage über das kartesische Produkt. Seien also X und Y Mengen. Dann wird das kartesische Produkt $X \times Y$ vermöge der kanonischen Projektionsabbildungen

$$\pi_X : X \times Y \to X,\ (x, y) \mapsto x$$
$$\pi_Y : X \times Y \to Y,\ (x, y) \mapsto y$$

zu einem Möchtegern-Produkt von X und Y:

$$\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Um zu zeigen, dass dieses Möchtegern-Produkt ein tatsächliches Produkt von X und Y ist, müssen wir noch die universelle Eigenschaft nachweisen. Sei also ein Möchtegern-Produkt $(X \leftarrow \widetilde{P} \rightarrow Y)$ gegeben. Dann müssen wir nachweisen, dass es genau einen Morphismus $\psi : \widetilde{P} \rightarrow X \times Y$ gibt, der die beiden Dreiecke im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
X & & Y \\
& \widetilde{P} \arrow[ul, "\widetilde{\pi}_X"] \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_Y"'] \arrow[uu, dashed, "\psi"] &
\end{tikzcd}$$

kommutieren lässt. Ausgeschreiben besagen die Kommutativitätsbedingungen, dass für alle $p \in \widetilde{P}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
(\text{erste Komponente von } \psi(p)) &= \widetilde{\pi}_X(p) \\
(\text{zweite Komponente von } \psi(p)) &= \widetilde{\pi}_Y(p)
\end{aligned}$$

gelten sollen. Es ist klar, dass diese beiden Bedingung genau durch eine Abbildung ψ erfüllt werden, nämlich durch

$$\psi : \widetilde{P} \rightarrow X \times Y,\ p \mapsto (\widetilde{\pi}_X(p), \widetilde{\pi}_Y(p)).$$

b) Der Produkt-Fall geht analog: Zusätzlich kann man jetzt voraussetzen, dass $\widetilde{\pi}_X$ und $\widetilde{\pi}_Y$ Gruppenhomomorphismen sind; im Gegenzug muss man aber nachweisen, dass die konstruierte Abbildung ψ ein Gruppenhomomorphismus wird.

c) Übungsaufgabe.

d) Siehe Übungsblatt 2, Aufgabe 3. $\square$

2.2 Erste Eigenschaften

Proposition 2.4. *Die Objektteile je zweier Produkte von Objekten X, Y sind zueinander isomorph.*

Bemerkung 2.5. Es gilt sogar noch mehr, siehe Aufgabe 2 von Übungsblatt 2.

Proposition 2.6. *Die Angabe eines Produkts von X und Y ist gleichwertig mit der Angabe eines Produkts von Y und X.*

Man sagt auch: Das kategorielle Produkt ist *kommutativ bis auf Isomorphie.*

Proposition 2.7. *Die Angabe eines Produkts von null vielen Objekten ist gleichwertig mit der Angabe eines terminalen Objekts.*

3 Funktoren

Felicitas Hörmann

So, wie es Gruppenhomomorphismen zwischen Gruppen gibt, gibt es Funktoren zwischen Kategorien. Ihre beeindruckendste Anwendung liegt darin, dass sie zwischen unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik vermitteln können – das ist ein Grundgedanke der algebraischen Topologie. Man verwendet sie aber auch, um verschiedene Arten von Konstruktionen übersichtlich zu organisieren und einen sinnvollen Rahmen für die Frage nach „bestmöglichen" Konstruktionen mit vorgegebenem Ziel zu haben.

Definition 3.1. Ein *Funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen Kategorien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ besteht aus

a) einer Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ ein Objekt $F(X) \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ zuordnet, und

b) einer Vorschrift, die jedem Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(f) : F(X) \to F(Y)$ zuordnet,

sodass

a) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ für alle Objekte $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und

b) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle komponierbaren Morphismen g, f in $\mathcal{C}$.

Bemerkung 3.2. Quelle und Ziel der abgebildeten Morphismen $F(f)$ sind also durch den Objektteil des Funktors schon vorgegeben. Es ist nicht sinnvoll, von der Gleichheit von Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zu sprechen – denn das würde naheliegenderweise ja die Aussage umfassen, dass für alle Objekte $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ die Gleichheit

$$F(X) = G(X)$$

von Objekten in $\mathcal{D}$ gilt. Aber wie schon in Bemerkung 1.10 festgehalten, ist das keine sinnvolle Aussage.

Proposition 3.3. *Ein Funktor überführt kommutative Diagramme in kommutative Diagramme:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd} \quad \overset{F}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(h)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\ & F(Z) \end{tikzcd}$$

Beweis. Gilt $h = g \circ f$, so folgt $F(h) = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. $\square$

3.1 Funktoren als Diagramme

Es sei $\mathcal{I}$ die durch die folgende Skizze gegebene Kategorie und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie.

$$\begin{tikzcd} & \bullet_1 \arrow[loop above] \arrow[d] \\ \bullet_2 \arrow[loop left] \arrow[r] & \bullet_3 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Um einen Funktor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ anzugeben, muss man

a) Objekte $X_1 = F(\bullet_1)$, $X_2 = F(\bullet_2)$ und $X_3 = F(\bullet_3)$ in $\mathcal{C}$ und

b) Morphismen $f : X_1 \to X_3$ und $g : X_2 \to X_3$ in $\mathcal{C}$

spezifizieren. Ein solcher Funktor ist also durch ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[loop above] \arrow[d, "f"] \\ X_2 \arrow[loop left] \arrow[r, "g"'] & X_3 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{C}$ gegeben. Da diese Überlegung analog mit anderen Kategorien $\mathcal{I}$ funktioniert, sehen wir folgendes Motto:

Motto 3.4. *Funktoren $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ sind $\mathcal{I}$-förmige Diagramme in $\mathcal{C}$.*

3.2 Kontravariante Funktoren

Wie kann man sich einen Funktor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ vorstellen?

a) Objekte $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} = \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ werden auf Objekte $F(X) \in \mathcal{D}$ abgebildet.

b) Morphismen $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (d. h. $f : Y \to X$ in $\mathcal{C}$) werden auf Morphismen $F(f) : F(X) \to F(Y)$ in $\mathcal{D}$ abgebildet.

Das zweite Funktoraxiom lautet für Morphismen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$

$$F(g \circ f) = F(f \bullet g) = F(f) \circ F(g),$$

wobei wir zur Verdeutlichung „$\circ$“ für die Komposition in $\mathcal{C}$ und „$\bullet$“ in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ schreiben. Die Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ X & \longmapsto & F(X) \\ f & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

ist also kein Funktor in unserem Sinne, da er Quelle und Ziel von Morphismen vertauscht und das zweite Funktoraxiom dann nur in entsprechend umgekehrter Kompositionsreihenfolge erfüllt. Solche Zuordnen sind trotzdem wichtig; sie heißen *kontravariante Funktoren.*

3.3 Beispiele für Funktoren

3.3.1 Langweilige Funktoren

a) Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es den *Identitätsfunktor*

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad X \mapsto X, \quad f \mapsto f.$$

b) Für ein festes Object $\heartsuit \in \mathcal{C}$ hat man den *konstanten Funktor*

$$F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}, \quad X \mapsto \heartsuit, \quad f \mapsto \mathrm{id}_\heartsuit.$$

Diese Funktoren als solche sind langweilig. Interessant sind aber natürliche Transformationen zwischen ihnen – das werden wir im folgenden Vortrag sehen.

3.3.2 Vergissfunktoren

Die bekannten Strukturen in der Mathematik organisieren sich in einer Hierarchie. Zwischen den Kategorien zu Strukturen verschiedener Stufen hat man sog. Vergissfunktoren:

a) Der Funktor

$$V : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}, \quad (G, \circ) \mapsto G, \quad f \mapsto f.$$

bildet Gruppen auf ihre zugrundeliegenden Mengen und Gruppenhomomorphismen auf ihre zugrundeliegenden Mengenabbildung ab. Er vergisst also die *Struktur* der Gruppenverknüpfung.

b) Der Funktor

$$V : \mathbb{R}\text{-Vect} \to \mathrm{AbGrp}, \quad (V, +, \cdot) \mapsto (V, +), \quad f \mapsto f.$$

vergisst ebenfalls algebraische Struktur, nämlich die Skalarmultiplikation.

c) Der Funktor

$$V : \mathrm{Man} \to \mathrm{Top}, \quad M \mapsto M,$$

die einer Mannigfaltigkeit ihren zugrundeliegenden topologischen Raum zuordnet, vergisst (differentialgeometrische) Struktur.

d) Der Funktor

$$V : \mathrm{AbGrp} \to \mathrm{Grp}, \quad (G, \circ) \mapsto (G, \circ), \quad f \mapsto f.$$

vergisst die *Eigenschaft* der Gruppenverknüpfung $\circ$, kommutativ zu sein.

e) Schreibe 1 für die Kategorie mit $\mathrm{Ob} = \{\bullet\}$ und $\mathrm{Hom}(\bullet, \bullet) = \{\mathrm{id}_\bullet\}$. Der Funktor

$$V : \mathrm{Set} \to 1, \quad M \mapsto \bullet, \quad f \mapsto \mathrm{id}_\bullet$$

vergisst *stuff*, also Zeug.

Die Unterscheidung zwischen Eigenschaft, Struktur und Zeug stammt übrigens von Teilnehmern eines Seminars über Quantengravitation [1, Abschn. 2.4], siehe auch [3].

Obwohl die Vergissfunktoren beinahe tautologisch definiert sind, sind sie aus zwei Gründen wichtig: Zum einen ist es eine interessante Frage, inwieweit man die Vergissfunktoren umkehren kann – wie man etwa aus einer Menge eine Gruppe machen kann. Wie diese Frage zu präzisieren und zu beantworten ist, werden wir im Vortrag über adjungierte Funktoren lernen.

Zum anderen ist es wichtig zu wissen, ob ein Vergissfunktor Produkte (oder allgemeinere Limiten) bewahrt. Etwa gilt für Vektorräume U, W und den Vergissfunktor $V : \mathbb{R}\text{-Vect} \to \text{Set}$, dass

$$V(U \times W) \cong V(U) \times V(W),$$

aber

$$V(U \amalg W) \ncong V(U) \amalg V(W).$$

Was das genau bedeutet, werden wir im Vortrag über Limiten sehen.

3.3.3 Funktoren aus algebraischen Konstruktionen

Zu jedem Ring R gibt es seinen Polynomring $R[X]$ der formalen Polynome mit Koeffizienten aus R,

$$R[X] = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \,\Big|\, a_0, \ldots, a_n \in R, n \geq 0 \Big\}.$$

Diese Konstruktion kann man zu einem Funktor erheben, den sog. *Polynomringfunktor* $F : \text{Ring} \to \text{Ring}$: Dieser ordnet einem Ring R den Polynomring $R[X]$ und einem Ringhomomorphismus $f : R \to S$ folgenden induzierten Ringhomomorphismus zu:

$$F(f) : R[X] \to S[X], \quad \sum a_n X^n \mapsto \sum f(a_n) X^n.$$

Bemerkung 3.5. Algebraiker kann man daran erkennen, dass sie im Gegensatz zu Analytikern die Polynomvariable groß schreiben.

Fast jede algebraische Konstruktion kann man auf diese Art und Weise behandeln.

3.3.4 Funktoren und Mengen

Zu jeder Menge M gibt es die *diskrete Kategorie DM*:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob} DM &:= M \\ \operatorname{Hom}_{DM}(m, \tilde{m}) &:= \{\mathrm{id}_m \mid m = \tilde{m}\} \end{aligned}$$

Die Angabe der Morphismenmengen ist etwas kryptisch geschrieben, ausführlich kann man die Definition auch wie folgt angeben:

$$\mathrm{Hom}_{DM}(m, \tilde{m}) := \begin{cases} \{\mathrm{id}_m\}, & \text{falls } m = \tilde{m} \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sind nun M und N zwei Mengen und $\varphi : M \to N$ eine Abbildung, so ist

$$DM \to DN, \quad m \mapsto \varphi(m), \quad \mathrm{id}_m \mapsto \mathrm{id}_{\varphi(m)}$$

ein Funktor. [Hier fehlt eine Skizze.] Somit sehen wir folgendes Motto:

Motto 3.6. *Das Funktorkonzept verallgemeinert das Konzept der Abbildung zwischen Mengen.*

Potenzmengenfunktoren

Der *kovariante Potenzmengenfunktor* $\mathcal{P} : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ ordnet einer Menge M die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ zu und einer Abbildung $f : M \to N$ die Abbildung

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N), \quad U \mapsto f[U],$$

wobei $f[U] := \{f(u) : u \in U\}$ ist.

Definiert man $\mathcal{P}(f)$ stattdessen durch $U \mapsto f[U]^c$ (Komplement), so erhält man keinen Funktor.

Außerdem gibt es noch den *kontravarianten Potenzmengenfunktor* $\mathcal{P} : \mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$, der ebenfalls jeder Menge M ihre Potenzmenge, aber jeder Abbildung $f : M \to N$ die *Urbild*abbildung

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(M), \quad V \mapsto f^{-1}[V]$$

zuordnet, wobei $f^{-1}[V] := \{x \in M \mid f(x) \in V\}$. Dieser ist sehr bedeutsam, denn er zeigt die Äquivalenz der dualen Kategorie $\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$ mit der Kategorie vollständiger atomischer boolescher Algebren, siehe [6, Thm. 2.4]. Was *Äquivalenz* bedeutet, werden wir im folgenden Kapitel lernen.

3.3.5 Funktoren und Gruppen

Es sei ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ gegeben. Dann ist

$$f : BG \to BH, \quad \bullet \mapsto \bullet, \quad g \mapsto \varphi(g)$$

ein Funktor. (Zur Konstruktion der Kategorien BG und BH siehe Übungsblatt 1, Aufgabe 5.) Denn das erste Funktoraxiom ist erfüllt,

$$F(\mathrm{id}_\bullet) = F(e_G) = \varphi(e_G) = e_H = \mathrm{id}_\bullet,$$

und das zweite ebenso: Für alle Morphismen $g, \tilde{g} : \bullet \to \bullet$ (d. h. für alle Gruppenelemente $g, \tilde{g} \in G$) gilt

$$F(\tilde{g} \circ g) = F(\tilde{g} \cdot g) = \varphi(\tilde{g} \cdot g) = \varphi(\tilde{g}) \cdot \varphi(g) = \varphi(\tilde{g}) \circ \varphi(g) = F(\tilde{g}) \circ F(g).$$

Damit sehen wir folgendes Motto:

Motto 3.7. *Das Funktorkonzept verallgemeinert das Konzept des Gruppenhomomorphismus.*

Gruppenwirkungen

Was muss man angeben, um einen Funktor $F : BG \to \mathrm{Set}$ zu spezifizieren? Eine Menge $M := \varphi(\bullet)$ und zu jedem $g \in G$ eine Abbildung $\varphi_g : M \to M$, sodass

$$\varphi_{\mathrm{id}_\bullet} = \mathrm{id}_M \quad \text{und} \quad \varphi_{g \circ h} = \varphi_g \circ \varphi_h$$

für alle $g, h \in G$ gilt. Mit der Schreibweise $\varphi_g(x) =: g \cdot x$, $g \in G$, $x \in X$, wird dies zu

$$e \cdot x = x \quad \text{und} \quad (g \circ h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x).$$

Eine solche Struktur bestehend aus einer Menge M und einer Multiplikationsabbildung $G \times M \to M$, die diese Axiome erfüllt, ist eine sog. *Gruppenwirkung von G*. Wir sehen also: Funktoren $BG \to \mathrm{Set}$ sind „dasselbe“ wie Gruppenwirkungen von G.

Analog kann man Funktoren $BG \to K\text{-Vect}$ untersuchen. Solche haben auch einen klassischen Namen: Das sind sog. *Gruppendarstellungen.*

3.3.6 Funktoren als Datenbanken

Wir wollen an einem Beispiel zeigen, dass auch so konkrete Dinge wie Datenbanken aus der Informatik kategoriell verstanden werden können. Etwa gibt das zugrundeliegende Datenbankschema der 0815/Datenbank aus Tafel 1 Anlass zu folgender Kategorie $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
\text{Angestellte} \arrow[loop above, "\text{Vorg.}"] \arrow[r, "\text{Abt.}"] \arrow[d, bend right, "\text{Vorname}"'] \arrow[d, bend left, "\text{Nachname}"] & \text{Abteilung} \arrow[dl, bend left, "\text{Titel}"] \\
\text{String} &
\end{tikzcd}$$

Die Tabelleninhalte kann man dann über einen Funktor $\mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ kodieren, der jedes Objekt (also jeden Tabellennamen) auf die Menge der Primärschlüssel ihrer Zeilen und

Angestellte				
Nr.	**Vorname**	**Nachname**	**Vorg.**	**Abt.**
101	David	Hilbert	103	q10
102	Bertrand	Russel	102	x02
103	Alan	Turing	103	q10

Abteilung		
Nr.	**Titel**	**Sekretär**
q10	Vertrieb	101
x02	Produktion	102

Abbildung 1: Ein Standardbeispiel einer Datenbank.

jeden Morphismus (also jeden Spaltennamen) auf die entsprechende Abbildung zwischen den Primärschlüsseln der beteiligten Tabellen abbildet.

Gewisse einfache Integritätsbedingungen kann man über die Angabe eines geeigneten Kompositionsgesetzes in $\mathcal{C}$ kodieren. Wenn man etwa ausdrücken möchte, dass der Sekretär einer Abteilung selbst in dieser sitzt, kann man

$$\text{Abt.} \circ \text{Sekretär} = \mathrm{id}_{\text{Abteilung}} : \text{Abteilung} \to \text{Abteilung}$$

definieren. Diese Sichtweise auf Datenbanken ist unter Anderem für das Verständnis von Datenmigrierung bei Schemaänderungen hilfreich. Details hat David Spivak erforscht [8, 9, 10].

3.3.7 Hom-Funktoren

Definition 3.8. Sei $\mathcal{C}$ eine lokal kleine Kategorie (sodass ihre Hom-Klassen sogar schon Hom-Mengen sind) und $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Dann ist...

a) der *kovariante Hom-Funktor zu A* der Funktor

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \_) : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ & X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \\ & (f : X \to Y) & \longmapsto & f_\star \end{array}$$

b) und der *kontravariante Hom-Funktor zu A* der Funktor

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, A) : & \mathcal{C}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ & X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \\ & (f : X \xrightarrow{\mathcal{C}} Y) & \longmapsto & f^\star. \end{array}$$

Dabei sind die Abbildungen $f_\star, f^\star$ wie folgt definiert:

$$\begin{array}{rrcl} f_\star : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \\ & g & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} f^\star : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \\ & g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

Die Hom-Funktoren kodieren die Beziehungen von A mit den Objekten aus $\mathcal{C}$. Das zentrale *Yoneda-Lemma* wird uns sagen, dass A durch Kenntnis des ko- oder kontravarianten Hom-Funktors schon bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

3.3.8 Weitere Beispiele

a) Den Prozess des Differenzierens glatter Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten kann man als Funktor auffassen, der jeder Mannigfaltigkeit ihr Tangentialbündel und jeder glatter Abbildung ihr Differential zuordnet:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Man} & \longrightarrow & \mathrm{Man} \\ M & \longmapsto & TM \\ f & \longmapsto & Df \end{array}$$

Es gibt auch eine „lokale Version“, wenn man die Kategorie der *punktierten glatten Mannigfaltigkeiten* $\mathrm{Man}_\star$ betrachtet: Die Objekte dieser Kategorie sind Tupel (M, x) aus einer Mannigfaltigkeit und einem ausgezeichneten Basispunkt $x \in M$, Morphismen sind basispunkterhaltende glatte Abbildungen. Dann hat man den Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Man}_\star & \longrightarrow & \mathbb{R}\text{-Vect} \\ (M, x) & \longmapsto & T_x M \\ f & \longmapsto & d_x f. \end{array}$$

In beiden Fällen ist das zweite Funktoraxiom gerade deswegen erfüllt, weil die Kettenregel gilt!

b) Hier könnte dein Beispiel stehen.

3.4 Die Kategorie der Kategorien

Nach dem fundamentalen Motto der Kategorientheorie sollen wir die Beziehungen zwischen Untersuchungsgegenständen ernst nehmen und daher die von ihnen gebildete *Kategorie* betrachten. Als wir bisher Kategorientheorie betrieben haben, haben wir dieses Motto bezogen auf Kategorien selbst aber sträflich vernachlässigt! Diesen Missstand behebt folgende Definition.

Definition 3.9. Die Kategorie Cat der (kleinen) Kategorien besteht aus:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat} &:= \text{Klasse aller (kleinen) Kategorien} \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &:= \text{Klasse der Funktoren zwischen } \mathcal{C} \text{ und } \mathcal{D} \end{aligned}$$

Die Verkettung $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ zweier Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ ist dabei als der Funktor

$$\begin{array}{rrcl} G \circ F : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & X & \longmapsto & G(F(X)) \\ & f & \longmapsto & G(F(f)) \end{array}$$

definiert.

Bemerkung 3.10. Ironischerweise ist es keine gute Idee, die so definierte Kategorie Cat zu untersuchen: Denn in Kategorien muss es sinnvoll sein, von der Gleichheit zweier Morphismen zu sprechen – der Gleichheitsbegriff zwischen Funktoren ist aber, wie eingangs schon bemerkt, nicht interessant. Tatsächlich ist die Kategorie Cat nur eine erste Approximation an eine sog. 2-Kategorie, in der es nicht nur Morphismen (Funktoren) zwischen Objekten (Kategorien), sondern auch „höhere Morphismen", sog. 2-Morphismen (hier natürliche Transformationen), zwischen den gewöhnlichen (1-)Morphismen gibt.

Die Kategorie Cat besitzt Produkte. Diese können durch die Konstruktion in folgender Definition gegeben werden:

Definition 3.11. Die *Produktkategorie* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ zweier Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist die Kategorie mit

$$\begin{aligned} \text{Objekte: } & \text{Paare } (X, Y) \text{ mit } X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C},\ Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D} \\ \text{Morphismen: } & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y})) := \\ & \qquad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\widetilde{X}) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,\widetilde{Y}) = \{(f,g) \mid f : X \to \widetilde{X},\ g : Y \to \widetilde{Y}\}. \end{aligned}$$

Die Kompositionsvorschrift wird von der in $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ induziert.

Proposition 3.12. *Das kategorielle Produkt in* Cat *ist durch die Produktkategoriekonstruktion mit den offensichtlichen Projektionsfunktoren gegeben.*

Im Kapitel über adjungierte Funktoren werden wir einen tieferen Grund dafür kennenlernen (Beispiel 7.8b), wieso zur Definition der Produktkategorie das kartesische Produkt von Klassen verwendet wird.

4 Natürliche Transformationen **Tim Baumann**

Werbung: Wir werden verstehen, was natürliche Transformationen sind, weshalb ihre Definition ganz einfach ist und wozu man sie benötigt. Ihre Bedeutung werden wir aus verschiedenen Blickwinkeln beleuchten. Mit natürlichen Transformationen können wir dann auch Funktorkategorien definieren, die für das Yoneda-Lemma später sehr wichtig sind. Außerdem können wir definieren, wann zwei Kategorien zueinander äquivalent sind.

XXX: Hier fehlt noch Motivation für das Konzept.

Definition 4.1. Eine *natürliche Transformation* $\eta : F \Rightarrow G$ zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus

einem Morphismus $\eta_X : F(X) \to G(X)$ für jedes Objekt $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$

sodass

für alle Morphismen $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Motto 4.2. *Die Komponenten einer natürlichen Transformation sind* gleichmäßig *über alle Objekte $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ definiert.*

4.1 Beispiele für natürliche Transformationen

Erste Beispiele mit Mengen

Seien $\mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}, K : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ die Funktoren mit

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}: & X & \longmapsto & X \\ & f & \longmapsto & f \\ & & & \\ K: & X & \longmapsto & X \times X \\ & f : X \to Y & \longmapsto & (X \times X \to Y \times Y,\ (x_1, x_2) \mapsto (f(x_1), f(x_2)). \end{array}$$

Dann kann man folgende Beobachtungen treffen:

a) Natürlich gibt es für jede konkrete Menge X im Allgemeinen viele Abbildungen

$$X \longrightarrow X.$$

Aber es gibt nur eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}$, nämlich die mit

$$\eta_X : X \longrightarrow X,\ x \longmapsto x.$$

Wir sehen das Motto in diesem Beispiel bestätigt: Denn der Funktionsterm von η_X ist in der Tat gleichmäßig definiert, es kommt keine Fallunterscheidung über X vor.

b) Analog gibt es für jede konkrete Menge X im Allgemeinen viele Abbildungen $X \to X \times X$ (also $\mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}(X) \to K(X)$). Aber es gibt nur eine einzige natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \Rightarrow K$, nämlich die mit

$$\eta_X : X \to X \times X,\ x \mapsto (x, x)$$

für alle Mengen X. Auch hier ist das Motto bestätigt.

c) Für konkrete Mengen X gibt es im Allgemeinen viele Abbildungen

$$\mathcal{P}(X) \longrightarrow X,$$

aber es gibt keine natürliche Transformation $\mathcal{P} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}$. Auch dieser Sachverhalt illustriert das Motto: Denn uns fällt kein Abbildungsterm ein, der ohne Fallunterscheidung über X Funktionen des Typs $\mathcal{P}(X) \to X$ definieren könnte.

Entgegengesetzte Gruppe

In der Gruppentheorie trifft man folgende Beobachtung: *Jede Gruppe* $(G, \circ)$ *ist natürlich isomorph zu ihrer entgegengesetzten Gruppe* $(G^{\mathrm{op}}, \bullet)$. Dabei hat G^{op} dieselben Elemente wie G, die Gruppenverknüpfung $\bullet$ ist aber genau anders herum definiert,

$$g \bullet h := h \circ g.$$

In der Tat ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \eta_G : \quad G &\longrightarrow G^{\mathrm{op}} \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

bijektiv und auch wirklich ein Gruppenhomomorphismus, da für alle $g, h \in G$ die Rechnung

$$\eta_G(g \circ h) = (g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \bullet h^{-1} = \eta_G(g) \bullet \eta_G(h)$$

gilt. Ohne den Begriff der natürlichen Transformation kann man aber nicht verstehen, wieso dieser Isomorphismus das Prädikat *natürlich* verdient hat: Man kann sich nur mit der Aussage begnügen, der Isomorphismus sei *kanonisch* definiert; das ist jedoch ein informaler Begriff.

Kategoriell verstehen wir: Die Isomorphismen η_G sind Komponenten einer natürlichen Transformation, und zwar einer vom Identitätsfunktor auf Grp in den „entgegengesetzte Gruppe"-Funktor F:

$$\begin{aligned} F : \quad \mathrm{Grp} &\longrightarrow \mathrm{Grp} \\ G &\longmapsto G^{\mathrm{op}} \\ f &\longmapsto f^{\mathrm{op}} \end{aligned}$$

Der Gruppenhomomorphismus f^{op} ist als Abbildung derselbe wie f; durch das doppelte Bilden der entgegengesetzten Gruppen ist er auch wirklich ein Gruppenhomomorphismus. Das Natürlichkeitsdiagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathrm{Grp}}(G) = G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_G"'] & H = \mathrm{Id}_{\mathrm{Grp}}(H) \arrow[d, "\eta_H"] \\
F(G) = G^{\mathrm{op}} \arrow[r, "f^{\mathrm{op}}"'] & H^{\mathrm{op}} = F(H)
\end{tikzcd}$$

kommutiert tatsächlich, wie eine Diagrammjagd zeigt:

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[rr, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "\eta_G"] & & f(g) \arrow[d, mapsto, "\eta_H"] \\
g^{-1} \arrow[r, mapsto, "f"] & f(g^{-1}) \arrow[r, equal, "f \text{ Homo}"'] & (f(g))^{-1}
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 4.3. Manchmal findet man Aussagen der Art „es gibt eine natürliche Abbildung von ... nach ...“ in der Literatur. Damit ist dann oft gemeint, dass man Quelle und Ziel als Auswertungen zweier Funktoren verstehen kann und dass zwischen diesen Funktoren eine natürliche Transformation verläuft.

XXX: Es fehlt noch ein weiteres Beispiel: „Doppeldualraum“

Determinante

In der linearen Algebra lernt man die Determinante von Matrizen kennen. Diese ist bezüglich des Grundrings (oder Grundkörpers) gleichmäßig definiert – das erkennt man entweder an der laplacesche Entwicklungsformel oder an der Charakterisierung als eindeutige multilineare Abbildung mit gewissen Eigenschaften.

Unserem Motto zufolge sollte die Determinantenabbildung daher auch als natürliche Transformation verstanden werden können. Das ist in der Tat der Fall: Für festes $n \geq 0$ haben wir zwei Funktoren von der Kategorie der Ringe in die Kategorie der Monoide, nämlich

a) den Funktor, der jedem Ring R den multiplikativen Monoid der $(n \times n)$-Matrizen über R zuordnet, und

b) den Funktor, der jedem Ring R seinen zugrundeliegenden multiplikativen Monoid zuordnet.

Die Determinante ist eine natürliche Transformation zwischen diesen beiden Funktoren; das Natürlichkeitsdiagramm

$$\begin{tikzcd} R^{n\times n} \arrow[r] \arrow[d, "\det"'] & S^{n\times n} \arrow[d, "\det"] \\ R \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

besagt für Ringhomomorphismen $f : R \to S$, dass es keine Rolle spielt, ob man eine Matrix über R als Matrix mit Koeffizienten in S interpretiert und dann die Determinante nimmt, oder ob man umgekehrt zuerst die Determinante als Element von R berechnet und dann in den Ring S transportiert.

4.2 Funktorkategorien

Definition 4.4. Seien Funktoren $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und natürliche Transformationen $\alpha : F \Rightarrow G$ und $\beta : G \Rightarrow H$ gegeben:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd} \qquad (\Downarrow\alpha \text{ zwischen } F \text{ und } G,\ \Downarrow\beta \text{ zwischen } G \text{ und } H)$$

Dann heißt $\beta\circ\alpha : F \Rightarrow G$ die *(vertikale) Verkettung* von α und β und ist komponentenweise durch

$$(\beta \circ \alpha)_X := \beta_X \circ \alpha_X : F(X) \to H(X)$$

gegeben.

Proposition 4.5. *Die so definierte Zuordnung $\beta \circ \alpha$ ist in der Tat eine natürliche Transformation.*

Beweis. Da für alle $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ die beiden Teilquadrate im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] \arrow[dd, bend right=60, "(\beta\circ\alpha)_X := \beta_X \circ \alpha_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"'] \arrow[dd, bend left=60, "\beta_Y \circ \alpha_Y =: (\beta\circ\alpha)_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\beta_X"'] & G(Y) \arrow[d, "\beta_Y"'] \\
H(X) \arrow[r, "H(f)"] & H(Y)
\end{tikzcd}$$

kommutieren, kommutiert auch das äußere Rechteck. Das ist gerade das Natürlichkeitsdiagramm für $\beta \circ \alpha$. □

Außerdem gibt es für jeden Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine natürliche Identitätstransformation $\mathrm{id}_F : F \Rightarrow F$ mit $\mathrm{Id}_X := id_{F(X)}$. Damit wird folgende Definition möglich:

Definition 4.6. Die *Funktorkategorie* $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ zu zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist die Kategorie mit Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ als Objekten und natürlichen Transformationen als Morphismen.

XXX: Es fehlt noch eine Bemerkung über die horizontale Verkettung von natürlichen Transformationen.

Lemma 4.7. *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren und $\alpha : F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation. Dann ist α genau dann ein Isomorphismus in der Funktorkategorie* $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$*, wenn alle Komponenten α_X, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, jeweils Isomorphismen in $\mathcal{D}$ sind.*

Beweis. „⇒“ Sei α ein Isomorphismus, dann existiert also eine natürliche Transformation α^{-1} mit $\alpha \circ \alpha^{-1} = \mathrm{id}_F$, $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}_G$. Das bedeutet, dass für jedes $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ die Gleichheiten

$$\mathrm{id}_{F(X)} = (\mathrm{id}_F)_X = (\alpha \circ \alpha^{-1})_X = \alpha_X \circ \alpha_X^{-1}$$
$$\mathrm{id}_{G(X)} = (\mathrm{id}_G)_X = (\alpha^{-1} \circ \alpha)_X = \alpha_X^{-1} \circ \alpha_X$$

gelten. Also sind die Komponenten α_X jeweils Isomorphismen in $\mathcal{D}$.

„$\Leftarrow$“ Seien alle Komponenten α_X invertierbar. Dann können wir versuchen, eine inverse natürliche Transformation $\beta : G \Rightarrow F$ über die Setzung

$$\beta_X := (\alpha_X)^{-1} : G(X) \to F(X)$$

zu definieren. Sicher gilt dann $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_F$ und $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_G$, aber es bleibt noch zu zeigen, dass β auch wirklich eine natürliche Transformation ist. Dazu rechnen wir für jeden Morphismus $f : X \to Y$ die Natürlichkeitsbedingung nach:

$$\begin{aligned} & G(f) \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ F(f) \\ \Longrightarrow\ & (\alpha_Y)^{-1} \circ G(f) \circ \alpha_X \circ (\alpha_X)^{-1} = (\alpha_Y)^{-1} \circ \alpha_Y \circ F(f) \circ (\alpha_X)^{-1} \\ \Longrightarrow\ & (\alpha_Y)^{-1} \circ G(f) = F(f) \circ (\alpha_X)^{-1} \\ \Longrightarrow\ & \beta_Y \circ G(f) = F(f) \circ \beta_X \end{aligned}$$

□

Definition 4.8. Invertierbare natürliche Transformationen heißen auch *natürliche Isomorphismen*, und Funktoren, zwischen denen ein natürlicher Isomorphismus verläuft, heißen *zueinander (natürlich) isomorph.*

4.3 Kategorienäquivalenzen

Definition 4.9. Eine *Kategorienäquivalenz* zwischen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ besteht aus Funktoren

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd},$$

die zueinander *quasi-invers* sind, d. h. dass die Kompositionen von F und G jeweils natürlich isomorph zu den entsprechenden Identitätsfunktoren sind:

$$G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \qquad F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}.$$

Die Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißen dann *zueinander äquivalent*: $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

Es gibt auch das Konzept der *Isomorphie von Kategorien.* Da fordert man, dass es Funktoren $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ gibt, die zueinander nicht nur quasi-invers, sondern tatsächlich invers sind, d. h. die Beziehungen

$$G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \qquad F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$$

erfüllen. Das ist aber in den meisten Fällen kein gutes Konzept: Denn wie schon in Bemerkung 3.2 festgehalten, ist die Gleichheit von Funktoren eine böse Bedingung. In der Tat sind die meisten in der Natur vorkommenden Kategorienäquivalenzen auch „nur“ Äquivalenzen, keine Isomorphismen. Kommt doch mal ein Isomorphismus von Kategorien vor, so ist das meist ein überhaupt nicht tiefsinniger „technischer Zufall“, der nur an geeigneten Wahlen bestimmter Definitionen liegt.

Wieso man Äquivalenzen von Kategorien untersucht, liegt in folgendem Motto begründet:

Motto 4.10. *Sei φ eine mathematische Aussage über Kategorien, die sich nur unter Verwendung der Konzepte* Objekt*,* Morphismus*,* Verkettung von Morphismen *und* Gleichheit von Morphismen *formulieren lässt. Sind dann $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zueinander äquivalente Kategorien, so gilt φ genau dann in $\mathcal{C}$, wenn φ in $\mathcal{D}$ gilt.*

Beispiele für Aussagen dieser Art sind etwa:

- Die Kategorie besitzt ein initiales Objekt.
- Je zwei parallele Morphismen sind gleich.
- Jeder Morphismus in ein initiales Objekt ist sogar schon ein Isomorphismus.

Beispiele für Aussagen, die über die Reichweite des Mottos hinausgehen, sind:

- Die Kategorie besitzt genau ein Objekt.
- Die Kategorie besitzt genau ein initiales Objekt.
- Sind zwei Objekte zueinander isomorph, so sind sie schon gleich.
- Je zwei Morphismen (egal zwischen welchen Objekten) sind gleich.

Man erachtet es nicht als schlimm, dass diese Aussagen nicht unter Äquivalenz erhalten bleiben. Denn wegen der vorkommenden Vergleiche von Objekten auf Gleichheit handelt es sich sowieso um böse Aussagen.

Bemerkung 4.11. Mit Techniken aus der formalen Logik kann man Motto 4.10 auch rigoros beweisen. Das ist nicht besonders schwer, die Hauptschwierigkeit liegt darin, den Begriff *Aussage* präzise zu definieren.

Beispiele für Kategorienäquivalenzen

Beispiel 4.12. Die duale Kategorie $\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$ kann nicht zu Set äquivalent sein. Denn in Set ist jeder Morphismus in ein initiales Objekt schon ein Isomorphismus, in $\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$ aber nicht.

Beispiel 4.13. Die Kategorie $\mathbf{1}$, die nur aus einem Objekt $\star$ sowie dessen Identitätsmorphismus besteht, ist zu jeder bewohnten *indiskreten Kategorie* $\mathcal{C}$ (d. h. einer solchen, die mindestens ein Objekt besitzt und in der zwischen je zwei Objekten genau ein Morphismus verläuft) äquivalent.

Beweis. Da $\mathcal{C}$ bewohnt ist, gibt es ein Objekt $K \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Dann können wir die Funktoren

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbf{1} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ \star &\longmapsto K \\ \mathrm{id}_\star &\longmapsto \mathrm{id}_K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G: \quad \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbf{1} \\ X &\longmapsto \star \\ f &\longmapsto \mathrm{id}_\star \end{aligned}$$

definieren. Da es nur einen einzigen Funktor von **1** nach **1** gibt (obacht! Es ist schlecht, das zu sagen), ist klar, dass $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{1}}$ gilt. Noch zu zeigen ist also, dass auch $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ gilt.

Dazu definieren eine natürliche Transformation $\eta : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, die sich als natürlicher Isomorphismus herausstellen wird. Dabei verwenden wir für jedes $X \in \mathcal{C}$ als η_X den *eindeutigen* Morphismus $(F \circ G)(X) \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(X)$. Da diese Definition gleichmäßig in X ist, erwarten wir, dass die Natürlichkeitsbedingung erfüllt ist; und das ist auch in der Tat der Fall:

$$\begin{tikzcd}
K = (F \circ G)(X) \arrow[r, "(F\circ G)(f)=\mathrm{id}_K"] \arrow[d, "\eta_X"'] & (F \circ G)(Y) = K \arrow[d, "\eta_Y"] \\
X = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(X) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(f)=f"'] & \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(Y) = Y
\end{tikzcd}$$

Da in einer indiskreten Kategorie alle Morphismen Isomorphismen sind, ist insbesondere jede Komponente η_X ein Isomorphismus, und damit ist nach Lemma 4.7 auch η selbst ein Isomorphismus. □

Bemerkung 4.14. Wer topologische Räume kennt, fühlt sich durch das Beispiel vielleicht an folgende Beobachtung erinnert: Bewohnte topologische Räume, in denen je zwei Punkte bis auf Homotopie durch genau einen Weg miteinander verbunden werden können, sind zusammenziehbar. Die Ähnlichkeit ist nicht nur formal: Jedem topologischen Raum kann man sein *Fundamentalgruppoid* zuordnen, das ist die Kategorie, deren Objekte durch die Punkte des Raums und deren Morphismen durch die Homotopieklassen von Wegen gegeben sind. Der Fundamentalgruppoid eines Raums, der obige Eigenschaft erfüllt, ist indiskret.

Beispiel 4.15. Die Kategorie der endlich-dimensionalen K-Vektorräume ist äquivalent zu folgender sehr konkreten Kategorie:

$$\begin{aligned}
\text{Objekte: } & n \in \mathbb{N} \\
\text{Morphismen: } & \mathrm{Hom}(n, m) := K^{m \times n} \\
\text{Verkettung: } & \text{gegeben durch Matrixmultiplikation}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.16. Zeige, dass folgende Kategorien jeweils nicht zueinander äquivalent sind:

a) Grp und Set

b) AbGrp und Grp

c) Die Kategorie der Ringe und die der Körper

In diesen Fällen würde man natürlich auch keine Äquivalenz erwarten. Es ist aber ähnlich wie in Beispiel 4.12 interessant, welche kategoriellen Eigenschaften die Unterscheidung möglich machen.

Charakterisierung von Kategorienäquivalenzen

Funktoren, die Bestandteil einer Kategorienäquivalenz sind, kann man auch ohne Bezug auf ihr Quasi-Inverses charakterisieren:

Lemma 4.17. *Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien mit Quasi-Inversem $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Dann sind F und G volltreu und wesentlich surjektiv. Die Umkehrung gilt auch, falls der umgebende logische Rahmen erlaubt, zu jedem Objekt aus $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{D}$ ein Urbild (bis auf Isomorphie) in $\mathcal{D}$ bzw. $\mathcal{C}$ zu wählen.*

Beweis. Wir beweisen nur die Hinrichtung. Seien $\eta : G \circ F \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ und $\mu : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ die natürlichen Isomorphismen der Kategorienäquivalenz. Dann ist jedes Objekt $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ isomorph zu $G(F(A))$ mit dem Isomorphismus $\eta_A : G(F(A)) \to A$ und der Funktor G damit wesentlich surjektiv.

Es kommutiert für alle $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathcal{C}$ das erweiterte Natürlichkeitsdiagramm von η:

$$\begin{tikzcd} GFA \arrow[r, "G(F(f))"] \arrow[d, shift left, "\eta_A"] & GFB \arrow[d, shift left, "\eta_B"] \\ A \arrow[u, shift left, "\eta_A^{-1}"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, shift left, "\eta_B^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Hieraus kann man direkt ablesen, dass $(G \circ F) : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(GFA, GFB)$ eine Bijektion mit Umkehrabbildung

$$g : \mathrm{Hom}(GFA, GFB) \to \mathrm{Hom}(A, B),\ \ m \mapsto \eta_B \circ m \circ \eta_A^{-1}$$

ist. Insbesondere ist für alle $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ die Abbildung

$$F : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(FA, FB)$$

injektiv und

$$G : \mathrm{Hom}(FA, FB) \to \mathrm{Hom}(GFA, GFB)$$

surjektiv. Wir können sogar zeigen, dass G surjektiv auf $\mathrm{Hom}(E, P)$ für alle $E, P \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ ist. Sei dazu $f \in \mathrm{Hom}(GE, GP)$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} f &= G(\mu_P) \circ \underbrace{(G(\mu_P^{-1}) \circ f \circ G(\mu_E))}_{\in \mathrm{Hom}(GFGE, GFGP)} \circ G(\mu_E^{-1}) \\ &= G(\mu_P) \circ G(h) \circ G(\mu_E^{-1}) \\ &= G(\underbrace{\mu_P \circ h \circ \mu_E^{-1}}_{\in Hom(E,P)}) \end{aligned}$$

Um das passende Urbild h im zweiten Schritt zu erhalten, haben wir die schon bewiesene Surjektivität der Abbildung

$$G : \mathrm{Hom}(FGE, FGP) \to \mathrm{Hom}(GFGE, GFGP)$$

ausgenutzt.

Da die Vorraussetzungen symmetrisch in F und G sind, ist F auch surjektiv und G injektiv auf Hom-Mengen und F wesentlich surjektiv. Nach Definition sind F und G damit volltreu. $\square$

5 Limiten und Kolimiten **Kathrin Gimmi**

Werbung: Wir verstehen, was allgemeine Limiten und Kolimiten von Diagrammen sind. Dazu wird es viele Beispiele geben, unter anderem die uns schon bekannten Produkte und Koprodukte. Speziell sind sog. filtrierte Kolimiten wichtig, da diese in der täglichen Praxis oft vorkommen und besonders schöne Eigenschaften haben. Abschließend werden wir die Frage diskutieren, wie man Kategorien, denen es an Limiten oder Kolimiten mangelt, vervollständigen kann.

In diesem Abschnitt wollen wir Funktoren $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ auch als ($\mathcal{I}$-förmige) Diagramme bezeichnen.

5.1 (Ko-)Kegel und (Ko-)Limiten

Definition 5.1. Ein *Kegel* eines Diagramms $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ besteht aus

a) einem Objekt $K \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ (der sog. *Kegelspitze*) zusammen mit

b) jeweils einem Morphismus $\pi_i : K \to F(i)$ für jedes Objekt $i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}$,

sodass für alle Morphismen $f : i \to j$ in $\mathcal{I}$ die Dreiecke

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$

kommutieren.

Die Notation etwas missbrauchend werden Kegel oft nur nach ihrer Kegelspitze genannt, obwohl die Morphismen π_i mit zum Datum gehören. Die Morphismen π_i werden manchmal als Projektionsmorphismen bezeichnet, der Grund dafür wird beim ersten Beispiel klar werden.

Definition 5.2. Ein *Morphismus von Kegeln* $K \to \widetilde{K}$ eines Diagramms F besteht aus

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rrrrr, dashed] \arrow[dr] \arrow[ddrr] \arrow[drrr] \arrow[drrrr] & & & & & \widetilde{K} \arrow[dllll] \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[ddlll] \\
& F(i) \arrow[rr] \arrow[dr] & & F(j) \arrow[r] \arrow[dl] & F(\ell) & \\
& & F(k) & & &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2: Zwei Kegel und ein Kegelmorphismus zwischen ihnen.

einem Morphismus der Kegelspitzen $\psi : K \to \widetilde{K}$ in $\mathcal{C}$

sodass

für alle $i \in \operatorname{Ob} \mathcal{I}$ die Dreiecke

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & \widetilde{K} \arrow[dl, "\widetilde{\pi}_i"] \\
& F(i) &
\end{tikzcd}$$

kommutieren.

Abbildung 2 erklärt die Herkunft des Begriffs „Kegel“.

Kegelmorphismen kann man auf die offensichtliche Art und Weise miteinander verketten (einfach die Morphismen der Kegelspitzen verketten). Daher ist es sinnvoll, von der *Kategorie der Kegel* zu einem festen Diagramm $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ zu sprechen. Terminale Objekte dieser Kategorie haben einen besonderen Namen:

Definition 5.3. Ein *Limes* eines Diagramms $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ist ein terminales Objekt in der Kategorie der Kegel zu F.

Da allgemein terminale Objekte einer Kategorie bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig sind (siehe Aufgabe 2 von Übungsblatt 2), folgt sofort folgende Beobachtung:

Proposition 5.4. *Limiten sind bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig. Die Kegelspitzen von Limiten sind zumindest bis auf Isomorphie eindeutig.*

Für ein anschauliches Verständnis von Limiten sind zwei Mottos wichtig:

Motto 5.5. *Ein Limes eines Diagramms ist ein bestes (größtmögliches) Objekt, welches das Diagramm zu einem Kegel ergänzt.*

Größtmöglich ist dabei nicht im wörtlichen Sinn, wie er etwa in der Kategorie der Mengen vorstellbar ist, zu interpretieren, sondern nur so zu verstehen, als dass jeder andere Kegel (Möchtegern-Limes) einen Morphismus in den Limes hinein besitzt.

Motto 5.6. *Ein Limes subsumiert das gesamte Diagramm zu einem einzelnen Objekt (der Kegelspitze) – zumindest, was Morphismen in das Diagramm hinein angeht.*

Das ist so verstehen: Immer, wenn man einen Morphismus aus einem Objekt $\widetilde{K}$ „in das Diagramm hinein" gegeben hat (d. h. einen Kegel des Diagramms gegeben hat), induziert die universelle Eigenschaft einen Morphismus aus $\widetilde{K}$ in den Limes. Umgekehrt kann man aus jedem solchen Morphismus durch Nachschaltung der Projektionen einen Kegel erhalten. Dieses Motto werden wir sogar formal beweisen können: siehe Proposition **??**.

Das duale Konzept: Kokegel und Kolimiten

Kegel und Limiten in der dualen Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ haben einen eigenen Namen: Sie heißen Kokegel und Kolimiten in $\mathcal{C}$. Die allgemeine Theorie ist völlig analog – dual – zu der von Kegeln und Kolimiten, um Missverständnisse zu vermeiden halten wir trotzdem explizit die Definitionen fest. Die formale Ähnlichkeit darf nicht dazu verleiten, Limiten und Kolimiten über einen Kamm zu scheren: In konkreten Anwendungen fühlen sich die beiden Konzepte völlig unterschiedlich an – denn die duale Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ fühlt sich völlig anders an als $\mathcal{C}$.

Definition 5.7. Ein *Kokegel* eines Diagramms $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ besteht aus

a) einem Objekt $K \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ (der sog. *Kokegelspitze*) zusammen mit

b) jeweils einem Morphismus $\iota_i : F(i) \to K$ für jedes Objekt $i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}$,

sodass für alle Morphismen $f : i \to j$ in $\mathcal{I}$ die Dreiecke

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\iota_i"'] & & F(j) \arrow[dl, "\iota_j"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

kommutieren.

Definition 5.8. Ein *Morphismus von Kokegeln* $K \to \widetilde{K}$ eines Diagramms F besteht aus

einem Morphismus der Kokegelspitzen $\psi : K \to \widetilde{K}$ in $\mathcal{C}$

sodass

für alle $i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}$ die Dreiecke

$$\begin{tikzcd} & F(i) \arrow[dl, "\iota_i"'] \arrow[dr, "\widetilde{\iota_i}"] & \\ K \arrow[rr, "\psi"'] & & \widetilde{K} \end{tikzcd}$$

kommutieren.

Definition 5.9. Ein *Kolimes* eines Diagramms $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ist ein initiales Objekt in der Kategorie der Kokegel zu F.

Motto 5.10. *Ein Kolimes eines Diagramms ist ein bestes (kleinstmögliches) Objekt, welches das Diagramm zu einem Kokegel ergänzt.*

Motto 5.11. *Ein Kolimes subsumiert das gesamte Diagramm zu einem einzelnen Objekt (der Kokegelspitze) – zumindest, was Morphismen aus dem Diagramm heraus angeht.*

Bemerkung 5.12. Die formale Dualitätsbeziehung zu Limiten ist folgende: Ein Kokegel eines Diagramms $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ist gleichwertig zu einem Kegel des induzierten Diagrams $\mathcal{I}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

5.2 Beispiele für Limiten und Kolimiten

Für spezielle Wahlen der Indexkategorie $\mathcal{I}$ erkennt man im Konzept Konzept $\mathcal{I}$-förmiger Limiten viele bekannte Konstruktionen wieder, das sollen die folgenden Beispiele illustrieren. Diese haben einen eher diskreten Charakter und erwecken nicht das aus der Analysis vertraute Gefühl des beliebig genauen Approximierens; wer dieses sucht, wird erst im übernächsten Abschnitt fündig werden, in dem wir das Konzept *filtrierter* Limiten und Kolimiten behandeln.

Produkte und Koprodukte

Sei speziell $\mathcal{I} = \mathbf{2}$ die Kategorie mit genau zwei Objekten und nur den Identitätsmorphismen:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] & \bullet \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Dann sind Diagramme $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ einfach durch die Angabe zweier Objekte von $\mathcal{C}$ gegeben. Kegel solcher Diagramme haben wir früher schon untersucht: unter dem Namen *Möchtegern-Produkte*. Entsprechend sind Limiten solcher Diagramme schlichtweg Produkte.

Dual dazu sind Kolimiten solcher Diagramme schlichtweg Koprodukte.

Faserprodukte (Pullbacks)

Sei speziell $\mathcal{I}$ die Kategorie

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \arrow[loop above] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[loop left] & \bullet. \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Limiten von $\mathcal{I}$-förmigen Diagrammen werden auch *Faserprodukte* genannt und konventionsmäßig gerne als sog. *Faserprodukt-* oder *Pullbackdiagramm* skizziert:

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Dabei steht die Kegelspitze des Limes oben links. Der dritte Projektionsmorphismus (auf Z) ist nicht eingezeichnet, da er sowieso gleich der Komposition des Wegs über X (oder über Y) sein muss. Wenn eine Kategorie jedes $\mathcal{I}$-förmige Diagramm zu einem Faserproduktdiagramm ergänzt werden kann, sagt man auch, dass die Kategorie „alle Faserprodukte besitzt“.

In der Kategorie der Mengen kann das Faserprodukt durch die Konstruktion

$$X \times_Z Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\} \subseteq X \times Y$$

gegeben werden.

Man hat zwei vorschiedene Vorstellungen des Faserprodukts, die unterschiedliche Aspekte betonen: Zum einen kann man die Objekte X und Y als Ausgangsbasis ansehen. Dann stellt man sich als Faserprodukt das Objekt $X \times_Z Y$ vor und sieht es als eine Art „verallgemeinertes Produkt“ an.

Zum anderen kann man sich aber auch den Morphismus g als Ausgangspunkt vorstellen. Als Ergebnis betont man dann nicht das Objekt $X \times_Z Y$ alleine, sondern den Morphismus $X \times_Z Y \to X$. Diesen bezeichnet man dann auch als *Rückzug (Pullback)* von g längs f oder *Basiswechsel* von g nach X.

Beispiel 5.13. Sei $g : Y \to Z$ eine Abbildung von Mengen. Sei $U \subseteq Z$ eine Teilmenge. Dann passt das Urbild $g^{-1}[U]$ in ein Pullbackdiagramm:

$$\begin{tikzcd} g^{-1}[U] \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & Y \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, hook] & Z \end{tikzcd}$$

Dieser Standpunkt wird unter anderem in der algebraischen Geometrie verwendet. Da sind dann *Stabilitätsaussagen* wichtig: Hat ein Morphismus eine bestimmte Eigenschaft, so hat sein Rückzug längs Morphismen einer bestimmten Klasse dieselbe Eigenschaft.

Beispiel 5.14. Sei ein Pullbackdiagramm der Form

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

in einer beliebigen Kategorie gegeben. Wenn g ein Monomorphismus ist, dann auch g'. Man sagt: *Monomorphismen sind unter Rückzug stabil.*

Bemerkung 5.15. Es ist etwas besonderes, wenn auch Epimorphismen unter Rückzug stabil sind. Das ist etwa in der Kategorie der Mengen und allen abelschen Kategorien der Fall.

Terminale Objekte und initiale Objekte

Sei speziell $\mathcal{I} = \mathbf{0}$ die leere Kategorie und $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ das einzige $\mathcal{I}$-förmige Diagramm in $\mathcal{C}$. Kegel von F sind dann einfach Objekte von $\mathcal{C}$ und Morphismen solcher Kegel sind Morphismen zwischen diesen Objekten; die Kategorie der Kegel von F ist also $\mathcal{C}$ selbst.

Damit ist klar: Limiten von F sind dasselbe wie terminale Objekte von $\mathcal{C}$.

Genauso ist auch die Kategorie der Kokegel von F einfach $\mathcal{C}$, Kolimiten von F sind daher dasselbe wie initiale Objekte von $\mathcal{C}$.

Differenzkerne (Equalizer) und Kodifferenzkerne

Sei speziell $\mathcal{I}$ die Kategorie mit zwei Objekten und zwei parallelen Morphismen:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Diagramme $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ sind dann durch die Angabe zweier paralleler Morphismen $f, g : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ gegeben. Ein Limes eines solchen Diagramms heißt dann *Differenzkern* (Equalizer) von f und g.

In der Kategorie der Mengen kann der Differenzkern durch die Konstruktion

$$\mathrm{Eq}(f, g) := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$$

gegeben werden. Genauso funktioniert es in der Kategorie der K-Vektorräume, wenn man diese Menge mit der Untervektorraumstruktur versieht; dann kann man auch kürzer

$$\mathrm{Eq}(f, g) = \ker(f - g)$$

schreiben und so die Begriffsherkunft verstehen.

Dual dazu kann man den Kolimes solcher Diagramme $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ verstehen: Statt das Objekt X zu einem Unterobjekt $\mathrm{Eq}(f, g)$ zu verkleinern, um die Morphismen f und g gleich zu machen, kann man auch zu einem sog. Quotienten von Y übergehen. In der Kategorie der Mengen kann der *Kodifferenzkern* etwa durch die Konstruktion

$$\mathrm{CoEq}(f, g) := Y/{\sim}$$

gegeben werden, wobei $(\sim)$ die feinste Äquivalenzrelation auf Y mit

$$f(x) \sim g(x) \text{ für alle } x \in X$$

ist. Für jedes $x \in X$ identifiziert man also die Elemente $f(x)$ und $g(x)$ von Y miteinander.

Spannendere Beispiele

Im folgenden Abschnitt wird es ein paar spannendere Beispiele geben, bei denen der Limes- oder Kilimes ein interessantes Objekt ist.

5.3 Filtrierte Limiten und Kolimiten

Der diskrete Charakter der vergangenen Beispiele liegt in der Form der verwendeten Indexkategorien begründet: Diese haben keine Ähnlichkeit mit den Folgen der Analysis. Bei *filtrierten* Indexkategorien ist das anders, und die Vorstellung, dass sich die Objekte des Diagramms dem (Ko-)Limes beliebig genau annähern, ist wieder sehr tragfähig.

Definition 5.16. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann *filtriert*, wenn jedes endliche Diagramm in $\mathcal{C}$ (d. h. jeder Funktor $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ mit $\mathcal{I}$ einer Kategorie, deren Objekt- und Morphismenklassen endlich sind) einen Kokegel besitzt.

Man fordert von diesen Kokegeln keinerlei Universalitätseigenschaft, diese Kokegel müssen also nicht unbedingt Kolimiten sein. Auch das leere Diagramm soll dieser Definition nach einen Kokegel besitzen. Man kann die Definition auch mit elementaren Begriffen formulieren:

Proposition 5.17. *Eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist genau dann filtriert, wenn*

- *sie ein Objekt enthält,*
- *für je zwei Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ein Objekt $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ zusammen mit zwei Morphismen $X \to Z$, $Y \to Z$ existiert und*
- *für je zwei parallele Morphismen $f, g : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ ein Objekt Z und ein Morphismus $h : Y \to Z$ mit $h \circ f = h \circ g$ existiert.*

Aufgabe 5.18. Beweise Proposition 5.17.

Eine wichtige Bezugsquelle (und historisch der Ausgangspunkt für das Konzept filtrierter Kategorien) sind *gerichtete Mengen*:

Definition 5.19. Eine *gerichtete Menge* ist eine Quasiordnung, in der jede endliche Familie von Elementen eine obere Schranke besitzt.

Äquivalent ist eine gerichtete Menge eine Quasiordnung, die mindestens ein Element enthält und in der je zwei Elemente eine obere Schranke besitzen.

Proposition 5.20. *Die von einer Quasiordnung P induzierte Kategorie BP ist genau dann filtriert, wenn P gerichtet ist.*

Beweis. Wenn man die Definition der Filtriertheit entfaltet, steht sofort die Behauptung da. □

Das historisch motivierende Beispiel

Die Kategorie $B\mathbb{N}$ ist filtriert:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots$$

In dieser Skizze fehlen natürlich viele Morphismen, etwa der von 0 direkt nach 2. Historisch wurden Limiten und Kolimiten von Diagrammen dieser Form als erstes untersucht.

a) Der Vektorraum $K[X]$ der Polynome über einem Körper K (oder einem Ring) ist ein Beispiel für einen solchen Kolimes, siehe Übungsblatt 5, Aufgabe 2.

b) Ein interessanteres Beispiel ist der Ring der p-adischen Ganzzahlen, wobei p eine Primzahl ist: Dieser ist Limes des Diagramms

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/(p^2) \longrightarrow \mathbb{Z}/(p^1) \longrightarrow \mathbb{Z}/(p^0)$$

in der Kategorie der Ringe. Da der Limes Projektionsabbildungen zu den $\mathbb{Z}/(p^i)$ besitzt, kann man sich ein Element des Limes als *ideelle Zahl* vorstellen, von der man die Reste bezüglich aller Potenzen p^i kennt. Zu diesen gehören die gewöhnlichen Ganzzahlen, aber auch kuriose neue Zahlen: Denn die p^i-Reste gewöhnlicher Ganzzahlen werden sich für genügend großes i stabilisieren, aber die Reste p-adischer Zahlen sind dieser Bedingung nicht unterworfen.

Bedeutsam sind die p-adischen Zahlen in der Zahlentheorie, da man ein wichtiges *lokal-zu-global-Prinzip* mit ihnen formulieren kann: Eine *quadratische Form* $\sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j$ mit rationalen Koeffizienten besitzt genau dann eine rationale Nullstelle (neben der trivialen $(0, \ldots, 0)$), wenn sie in den reellen Zahlen und allen p-adischen (Bruch-)Zahlen $\mathbb{Q}_p$ jeweils eine nichttriviale Nullstelle besitzt. Diese Aussage ist Gegenstand des zelebrierten Hasse-Minkowski-Theorems.

[Ist p keine Primzahl, so kann man immer noch die p-adischen Ganzzahlen betrachten – diese werden dann aber keinen Integritätsbereich bilden, sondern Nullteiler enthalten. Dagegen beobachtet man im Primzahlfall, dass bis auf die Null jedes Element regulär ist, und dass sogar die meisten Elemente bezüglich der Multiplikation invertierbar sind – nur die Vielfachen von p nicht.]

Beispiel mit der Teilbarkeitsordnung der natürlichen Zahlen

Die Teilbarkeitsordnung auf $\mathbb{N}_{\geq 1}$ induziert ebenfalls eine filtrierte Kategorie (Abbildung 3). Diese wird etwa in der Zahlentheorie verwendet, um den sog. *Prüferring* $\widehat{\mathbb{Z}}$ zu definieren: Er ist Limes des Diagramms

$$\begin{aligned} n &\longmapsto \mathbb{Z}/(n) \\ (n \mid m) &\longmapsto (\mathbb{Z}/(m) \to \mathbb{Z}/(n), [x] \mapsto [x]). \end{aligned}$$

Elemente des Prüferrings kann man sich wie bei den p-adischen Zahlen als *ideelle Ganzzahlen* vorstellen, wobei sich *ideell* jetzt darauf bezieht, dass man von einem Element des Prüferrings die Reste modulo *aller* positiven Zahlen kennt. Das ist insofern ideell, als dass man zwar mit dem chinesischen Restsatz zu *endlich vielen* vorgegebenen (in sich konsistenten) Resten eine passende gewöhnliche Ganzzahl finden kann, zu unendlich vielen Resten das aber nur äußerst selten möglich ist.

Topologisches Beispiel

Sei x ein Punkt eines topologischen Raums X. Dann organisieren sich die offenen Mengen von X, die x enthalten, vermöge der umgekehrten Inklusionsbeziehung zu einer gerichteten Menge, und induzieren daher eine filtrierte Kategorie. In der Garbentheorie verwendet man Kolimiten über Diagramme dieser Form, um den sog. *Halm* einer Garbe an der Stelle x zu definieren.

Ausschöpfung durch endliche Objekte

Ein Beispiel, das nicht von einer gerichteten Menge induziert wird, ist folgendes: Sei X eine feste Menge. Dann ist die Kategorie $\mathrm{Set}_{\mathrm{fp}}/X$ mit

$$\begin{aligned} \text{Objekte: } &\text{Abbildungen } I \to X \text{ mit } I \text{ endlich} \\ \text{Morphismen: } &\mathrm{Hom}(I \to X, J \to X) := \\ &\left\{ \text{(kommutative) Diagramme der Form } \begin{tikzcd} I \arrow[rr] \arrow[dr] & & J \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \right\} \end{aligned}$$

filtriert. Relevant ist diese Kategorie insofern, als dass der Kolimes des kanonischen Diagramms

$$\mathrm{Set}_{\mathrm{fp}}/X \longrightarrow \mathrm{Set}, \ (I \to X) \longmapsto I$$

gerade X ist (eigentlich: durch X gegeben werden kann). Auf diese Weise kann man also jede Menge als Kolimes endlicher Mengen schreiben. Analog kann man jeden Vektorraum als Kolimes endlich-dimensionaler Vektorräume und jeden Modul als Kolimes endlich-präsentierter Moduln schreiben. Diese Beobachtungen sind der Ausgangspunkt der Theorie *zugänglicher Kategorien.*

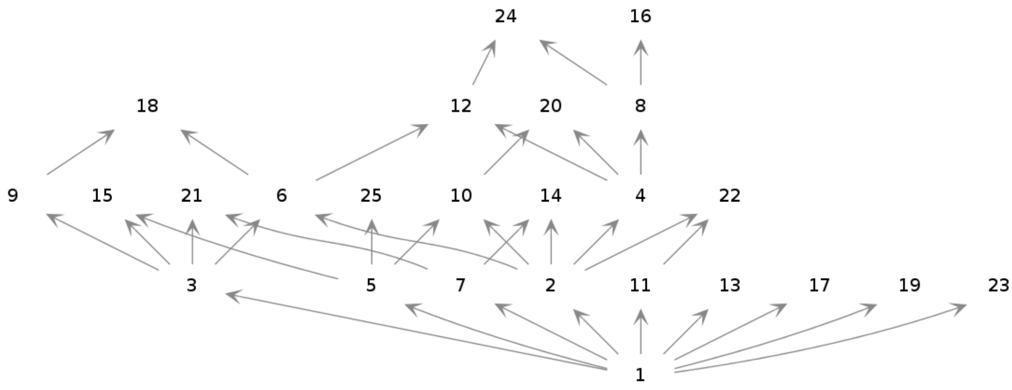

Abbildung 3: Die von der Teilbarkeitsordnung auf den positiven natürlichen Zahlen induzierte Kategorie (Ausschnitt).

Aufgabe 5.21. Formuliere präzise und beweise folgende Aussage: Jeder K-Vektorraum V ist Kolimes all der endlich-dimensionalen K-Vektorräume, die in V hinein abbilden.

In klassischer Logik kann man außerdem zeigen, dass jeder Vektorraum der Kolimes seiner endlich-dimensionalen Unterräume ist. Da sich dieses Resultat aber nicht auf allgemeinere Situationen überträgt (etwa beim Wunsch, jeden Modul als Kolimes endlich-präsentierter Moduln schreiben zu wollen, ober beim Wunsch, in einem intuitionistischen Kontext arbeiten zu wollen), sollte man sich lieber die Formulierung der Aufgabe merken.

5.4 Zusammenhang mit dem Limesbegriff in der Analysis

Zum aus der Analysis vertrauten Limesbegriff ist der kategorielle Begriff insofern verwandt, als dass bei beiden Konzepten die Vorstellung der immer besser werdenden Approximation tragfähig ist: Die Glieder einer Folge nähern sich beliebig genau dem Grenzwert an, die Objekte eines filtrierten Diagramms approximieren immer besser den Kolimes des Diagramms.

Man kann sich aber auch die präzise Frage stellen, ob man den Limes einer reellen Zahlenfolge tatsächlich als kategoriellen Limes oder Kolimes in einer geeigneten Kategorie verstehen kann. Die folgende Proposition gibt darauf eine partielle Antwort:

Proposition 5.22. *Sei $(x_n)_n$ eine monoton steigende Folge reeller Zahlen. Genau dann konvergiert diese Folge gegen eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, wenn das Diagramm*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & B\mathbb{R} \\ n & \longmapsto & x_n \\ \text{„}n \leq m\text{“} & \longmapsto & \text{„}x_n \leq x_m\text{“} \end{array}$$

mit den eindeutigen Morphismen das Objekt $x \in B\mathbb{R}$ als Kolimes besitzt.

Dabei ist mit $B\mathbb{R}$ die von der üblichen Ordnung auf $\mathbb{R}$ induzierte Kategorie gemeint. Grenzwerte monoton steigender Folgen lassen sich also kategoriell als Kolimiten verstehen, und dual lassen sich auch Grenzwerte monoton fallender Folgen als kategorielle Limiten interpretieren. Für allgemeine Folgen gibt es aber (wohl) keine solche Übersetzung. Das ist auch anschaulich plausibel: Den Grenzwert einer monoton steigenden Folge kann man unter allen reellen Zahlen allein über seine Ordnungsbeziehungen (also kategoriell!) zu den Folgegliedern charakterisieren, nämlich als ihr Supremum. Für den Grenzwert einer allgemeinen Folge ist eine solche Charakterisierung dagegen nicht möglich, stattdessen muss tatsächlich die metrische Struktur beachtet werden.

5.5 Existenz von Limiten und Kolimiten

In der Analysis ist die Forderung an eine Folge, zu konvergieren, eine große Einschränkung: Sogar in vollständigen metrischen Räumen, wie etwa dem der reellen Zahlen, konvergieren nicht alle Folgen, sondern nur die, die die Cauchy-Bedingung erfüllen. Metrische Räume, in denen tatsächlich alle Folgen konvergieren, enthalten zwangsläufig höchstens einen Punkt und sind daher uninteressant.

Entsprechend ist es ein im Allgemein schwieriges Problem, die Konvergenz oder Divergenz einer Folge zu entscheiden oder sogar ihren Grenzwert zu berechnen. In der Kategorientheorie dagegen ist die Situation viel besser [langweiliger?]: Viele bedeutsame Kategorien enthalten Limiten und Kolimiten *aller* Diagramme (welche nur eine mengentheoretische Größenbedingung erfüllen müssen).

Definition 5.23. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann *(ko-)vollständig*, wenn jedes kleine Diagramm in $\mathcal{C}$ einen (Ko-)Limes besitzt. Dabei heißt ein Diagramm $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ genau dann *klein*, wenn seine Indexkategorie $\mathcal{I}$ klein ist (d. h. wenn die Objekt- und Morphismenklassen sogar schon Mengen bilden).

Etwa ist das archetypische Beispiel einer Kategorie, die der Mengen, vollständig und kovollständig. Man kann sogar explizit die Limiten und Kolimiten angeben:

Proposition 5.24. *Die Kategorie der Mengen ist vollständig und kovollständig: Ist $F : \mathcal{I} \to \mathrm{Set}$ ein kleines Diagramm, so wird die Menge*

$$\lim F := \left\{ (x_i)_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} \in \prod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} F(i) \;\middle|\; F(f)(x_i) = x_j \text{ für alle } f : i \to j \text{ in } \mathcal{I} \right\}$$

vermöge der kanonischen Projektionsabbildungen zu einem Limes von F und

$$\operatorname{colim} F := \left(\coprod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} F(i) \right) \Big/ \sim,$$

wobei $(\sim)$ die feinste Äquivalenzrelation mit

$$\text{für alle } f : i \to j \text{ in } \mathcal{I},\ x \in F(i): \quad \langle i, x \rangle \sim \langle j, F(f)(x) \rangle$$

ist, zu einem Kolimes von F.

Beweis. Die Äquivalenzrelation $(\sim)$ kann definiert werden als Schnitt über alle Äquivalenzrelationen auf $\coprod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} F(i)$, die die angegebene Bedingung erfüllen. Dann kann man die Behauptungen nachrechnen. $\square$

Wenn man die Vollständigkeit oder Kovollständigkeit einer Kategorie zeigen möchte, ist es hilfreich zu wissen, dass sich allgemeine Limiten und Kolimiten aus gewissen Grundbausteinen zusammenbauen lassen. Folgende Proposition ist eine aus einer ganzen Reihe ähnlicher Beobachtungen dazu:

Proposition 5.25. *Genau dann enthält eine Kategorie $\mathcal{C}$ alle endlichen Limiten (d. h. Limiten von Diagrammen mit endlicher Indexkategorie), wenn*

- *sie ein terminales Objekt enthält,*
- *je zwei Objekte ein Produkt besitzen und*
- *je zwei paralelle Morphismen einen Differenzkern besitzen.*

Die duale Aussage gilt natürlich ebenfalls: Endliche Kolimiten lassen sich aus initialen Objekten, Koprodukten und Kodifferenzkernen zusammenbasteln.

Aufgabe 5.26. Zeige in klassischer Logik folgendes bekanntes Resultat von Freyd: Enthält eine Kategorie tatsächlich *alle* Limiten (nicht nur alle kleinen), dann wird sie von einer Quasiordnung induziert, d. h. je zwei parallele Morphismen sind gleich. Tipp: Bilde ein über die Menge aller Morphismen induziertes Produkt.

Aufgabe 5.27. Beweise Proposition 5.25.

5.6 Limiten und Kolimiten in Funktorkategorien

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie Limiten in Funktorkategorien $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ aussehen. Sei dazu ein Diagramm $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ gegeben. Durch „Nachschaltung der Evaluierungsfunktoren“ erhält man aus diesem Diagramm für jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ jeweils ein Diagramm in $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{rccl} F_X : & \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ & i & \longmapsto & F(i)(X) \end{array}$$

Wenn wir voraussetzen, dass all diese Diagramme jeweils einen Limes $\lim F_X$ in $\mathcal{D}$ besitzen, können wir (wie in Aufgabe 4 von Übungsblatt 3) einen Funktor

$$\begin{array}{rccl} L : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ & X & \longmapsto & \lim F_X \end{array}$$

basteln. Dann gilt:

Proposition 5.28. *Der so konstruierte Funktor L wird (mit welchen Projektionen?) ein Limes des Diagramms F.*

Etwas ungenau kann man diesen Zusammenhang auch über die Formel

$$(\lim F)(X) = \lim F_X = \lim_i F(i)(X)$$

ausdrücken. Als Motto kann man daher festhalten:

Motto 5.29. *Besitzt $\mathcal{D}$ $\mathcal{I}$-förmige Limiten, so werden $\mathcal{I}$-förmige Limiten in der Funktorkategorie* $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ *punktweise berechnet. In diesem Fall gilt also: Ein Kegel eines Diagramms $F : \mathcal{I} \to \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ist genau dann ein Limes, wenn sein Bild unter allen Auswertungsfunktoren* $\mathrm{ev}_X : \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathcal{D}$, *$X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, jeweils ein Limes ist.*

5.7 Bewahrung von Limiten und Kolimiten

In der Analysis ist es eine wichtige Frage, ob eine Abbildung f Limiten erhält, ob also die Bildfolge einer konvergenten Folge wieder konvergiert, und zwar gegen das Bild des Grenzwerts. Eine analoge Begriffsbildung gibt es in der Kategorientheorie:

Definition 5.30. Sei $\mathcal{I}$ eine Indexkategorie. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *erhält genau dann $\mathcal{I}$-förmige Limiten*, wenn für jedes Diagramm $D : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ und jeden Limes K dieses Diagramms

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ D(i) \arrow[rr] & & D(j) \end{tikzcd}$$

der Bildkegel unter F

$$\begin{tikzcd} & F(K) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ F(D(i)) \arrow[rr] & & F(D(j)) \end{tikzcd}$$

ein Limes des Diagramms $F \circ D : \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ ist.

Dabei genügt es nicht, dass das Bild $F(K)$ der Kegelspitze mit irgendwelchen neuen Morphismen zu einem Limes von $F \circ D$ wird. Dual definiert man das Konzept der Erhaltung von Kolimiten.

Beispiel 5.31. Der Vergissfunktor $U : \mathbb{R}\text{-Vect} \to \mathrm{Set}$ erhält Produkte, d. h. Limiten der Form $\bullet\ \bullet$. Koprodukte erhält er aber nie: Ist

$$\begin{tikzcd} V \arrow[dr] & & W \arrow[dl] \\ & V \oplus W & \end{tikzcd}$$

ein Koproduktdiagramm in der Kategorie der $\mathbb{R}$-Vektorräume, so ist das Bild dieses Diagramms in der Kategorie der Mengen sicher kein Koproduktdiagramm. Denn die Inklusionsabbildungen $V \to V \oplus W$, $W \to V \oplus W$ haben beide das Element $(0,0)$ in ihrer Wertemenge; die Injektionen in ein Koprodukt in Set hinein haben aber stets disjunktes Bild.

Definition 5.32. Ein Funktor heißt genau dann *(ko-)stetig*, wenn er alle kleinen (Ko-)Limiten, d. h. alle $\mathcal{I}$-förmigen Limiten mit $\mathcal{I}$ einer kleinen Indexkategorie, erhält.

In vielen Situationen gibt es einen tieferen Grund, wieso ein Funktor Limiten oder Kolimiten erhält: Er kann ein sog. rechts- bzw. linksadjungierter Funktor sein. Das ist etwa beim Vergissfunktor aus dem Beispiel der Fall und erlaubt ganz ohne explizite Rechnungen als Nachweis sogar die Erhaltung aller Limiten überhaupt zu folgern. Wir diskutieren das im Kapitel über adjungierte Funktoren in Proposition 7.7.

Bemerkung 5.33. In der Analysis gibt es verschiedene stärke Varianten des bloßen Konvergenzbegriffs: Etwa kann man die Konvergenzgeschwindigkeit vorgeben. Auch in der Kategorientheorie gibt es stärkere Limesbegriffe: Etwa ist ein *absoluter Limes* einer, der unter *allen* Funktoren überhaupt erhalten bleibt.

5.7.1 Stetigkeit des Hom-Funktors

Sei A ein Objekt einer lokal kleinen Kategorie $\mathcal{C}$; dann haben wir in Definition 3.8 den kovarianten Hom-Funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \_) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}, \ X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$$

eingeführt. Dieser Funktor ist stets stetig:

Proposition 5.34. *Der kovariante Hom-Funktor* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \_)$ *ist stetig, d. h. für alle kleinen Diagramme* $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ *mit existierendem Limes ist die kanonische Abbildung*

$$\lim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, F(i)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \lim_i F(i))$$

ist bijektiv. Stimmt die Reihenfolge?

5.8 Vertauschung von (Ko-)Limiten

Limiten vertauschen stets mit Limiten, und dual vertauschen Kolimiten stets mit Kolimiten:

Proposition 5.35. *Sei* $F : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ *ein Diagramm in* $\mathcal{C}$. *Sei für jedes Objekt* $i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}$ *jeweils ein Limes* $L_i := \lim_j F(i, \_)$ *gegeben, und sei ferner ein Limes* $L := \lim_i L_i$ *gegeben. Dann ist* L *in kanonischer Art und Weise auch ein Limes* $\lim_{(i,j)} F(i,j)$*... genaue Aussage bei nLab nachlesen!*

Allerdings vertauschen im Allgemeinen Limiten nicht mit Kolimiten und umgekehrt. In einem wichtigen Spezialfall stimmt es aber doch:

Proposition 5.36. Filtrierte *Kolimiten vertauschen mit Limiten (nach Set! genaue Aussage nachlesen).*

5.9 Kofinale Unterdiagramme

In der Analysis gibt es folgende Mottos: *Das Weglassen endlich vieler Folgeglieder ändert nicht das Konvergenzverhalten. Teilfolgen konvergenter Folgen konvergieren ebenfalls, und zwar gegen denselben Grenzwert.* Analoge Mottos gibt es auch in der Kategorientheorie; an die Stelle der zur Festlegung einer Teilfolge $(a_{n_k})_k$ verwendeten Abbildung $k \mapsto n_k$ treten *kofinale Funktoren*:

Definition 5.37. Wir nennen einen Funktor $H : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}$ genau dann *kofinal*, wenn für alle Objekte $d \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}\ldots$

1. ein Objekt $d_0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}_0$ und ein Morphismus $d \to H(d_0)$ in $\mathcal{D}$ existiert und
2. für je zwei solcher Morphismen ein Objekt $\widetilde{d}_0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}_0$ und Morphismen $d_0 \to \widetilde{d}_0$, $d_0' \to \widetilde{d}_0$ existieren, deren Bilder unter H das Diagramm

$$\begin{tikzcd} d_0 \arrow[r] \arrow[d] & H(d_0) \arrow[d, dashed] \\ H(d_0') \arrow[r, dashed] & H(\widetilde{d}_0) \end{tikzcd}$$

   kommutieren lassen.

Etwa ist der Inklusionsfunktor $B(2\mathbb{N}) \to B(\mathbb{N})$ kofinal, wenn $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen mit ihrer gewöhnlichen Ordnung und $2\mathbb{N}$ die Teilordnung der geraden Zahlen bezeichnet.

Proposition 5.38. *Sei $H : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}$ ein kofinaler Funktor und $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein $\mathcal{D}$-förmiges Diagramm in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Dann gilt:*

a) Die Kategorie der Kokegel von F ist äquivalent zur Kategorie der Kokegel von $F \circ H$.

b) Die Angabe eines Kolimes von F ist gleichwertig mit der Angabe eines Kolimes von $F \circ H$.

Beweis. Der erste Teil ist Gegenstand von Aufgabe 4 von Übungsblatt 5. Die zweite Aussage folgt sofort aus dem ersten, da ja ein Kolimes von F bzw. $F \circ H$ als initiales Objekt in der entsprechenden Kokegelkategorie definiert ist. □

Natürlich gilt die duale Aussage für Limiten: Ist in der Situation der Proposition der Funktor H aufgefasst als Funktor $\mathcal{D}_0^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ kofinal, so ist die Angabe eines Limes von F gleichwertig mit der Angabe eines Limes von $F \circ H$.

Beispiel 5.39. Wir haben die p-adischen Ganzzahlen als Limes des Diagramms

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/(p^2) \longrightarrow \mathbb{Z}/(p^1) \longrightarrow \mathbb{Z}/(p^0)$$

definiert. Genauso gut, wenn auch ein wenig willkürlich, hätten wir sie als Limes des Diagramms

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/(p^5) \longrightarrow \mathbb{Z}/(p^4) \longrightarrow \mathbb{Z}/(p^3)$$

definieren können.

6 Das Yoneda-Lemma

Justin Gassner

Werbung: Wir werden das fundamentale Yoneda-Lemma und seine Korollare verstehen. Dazu werden wir zunächst eine hilfreiche Intuition von sog. Prägarben auf Kategorien entwickeln und verstehen, welche Signifikanz die Darstellbarkeit von Prägarben hat. Dann können wir die Yoneda-Einbettung kennenlernen, ihre Eigenschaften studieren und sehen, wozu sie nützlich ist. Das fundamentale Motto der Kategorientheorie wird damit zu einem formalen Theorem.

Stellen wir uns vor, wir würden die reellen Zahlen noch nicht kennen. Dann wären die rationalen Zahlen das Maß der Dinge. Mit diesen können wir gut rechnen – bei genauerer Betrachtung stellen wir aber fest, dass der rationale Zahlenstrahl viele Lücken enthält. Obwohl wir diese Lücken per definitionem nicht im rationalen Zahlenstrahl auffinden können, können wir sie doch mithilfe rationaler Zahlen beschreiben – und zwar, indem wir ihre *Beziehungen* zu rationalen Zahlen angeben. Etwa erwarten wir von einer Zahl, die den Namen „$\sqrt{2}$“ verdient haben soll, die Beziehungen

$$q \leq \sqrt{2} \quad :\Longleftrightarrow \quad q \leq 0 \text{ oder } q^2 \leq 2$$

für alle $q \in \mathbb{Q}$. In diesem Sinn ist $\sqrt{2}$ eine *ideelle Zahl*, die aus ihren Beziehungen zu den tatsächlichen rationalen Zahlen lebt.

Mit solchen ideellen Zahlen können wir auch rechnen. Sind etwa x und y ideelle Zahlen, können wir das Infimum von x und y über die Forderung

$$q \leq \inf\{x, y\} \quad :\Longleftrightarrow \quad q \leq x \text{ und } q \leq y$$

für alle $q \in \mathbb{Q}$ definieren. Die rationalen Zahlen kann man also durch Betrachtung ideeller Zahlen vervollständigen. Wenn wir die Menge der ideellen Zahlen mit „$\mathbb{R}$“ bezeichnen, können wir manche Aspekte dieser Vervollständigung wie folgt zusammenfassen: Es gibt eine monotone Abbildung

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R},$$

welche zudem injektiv ist und Infima erhält. Sie ist weit entfernt davon, surjektiv zu sein. Diese Vorstellung der Vervollständigung mittels ideeller Objekte wollen wir im folgenden Abschnitt für Objekte von Kategorien entwickeln.

6.1 Prägarben als ideelle Objekte

Sei $\mathcal{C}$ eine lokal kleine Kategorie.

Definition 6.1. Funktoren $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ heißen auch *Prägarben auf* $\mathcal{C}$. Die Kategorie der Prägarben auf $\mathcal{C}$ (mit natürlichen Transformationen als Morphismen) ist $\widehat{\mathcal{C}} := \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$.

Definition 6.2. Eine Prägarbe $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ auf $\mathcal{C}$ heißt genau dann *darstellbar*, wenn es ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ mit $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X)$ gibt.

Motto 6.3. *Eine beliebige (nicht unbedingt darstellbare) Prägarbe F auf $\mathcal{C}$ beschreibt die Beziehungen aller Objekte A von $\mathcal{C}$ mit einem imaginären, fiktiven, eingebildeten, ideellen Objekt $\heartsuit$: Wir stellen uns die Menge $F(A)$ als Menge der Morphismen $A \to \heartsuit$ vor.*

Unter dieser Sichtweise beschreiben darstellbare Prägarben die Beziehungen mit einem tatsächlich in $\mathcal{C}$ existenten Objekt. Die Prägarbenkategorie $\widehat{\mathcal{C}}$ enthält stets mindestens eine nicht-darstellbare Prägarbe:

Proposition 6.4. *Die initiale Prägarbe ist nicht darstellbar.*

Beweis. Gemeint ist das initiale Objekt 0 in der Prägarbenkategorie, explizit durch

$$\begin{array}{rrcl} 0: & \mathcal{C}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ & A & \longmapsto & \emptyset \\ & f & \longmapsto & \mathrm{id}_{\emptyset} \end{array}$$

gegeben. Wäre $0 \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X)$ für ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, so folgte $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \cong 0(X) = \emptyset$ im Widerspruch zu $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$. $\square$

6.2 Partielle Beziehungsinformationen

Um ein besseres Gefühl dafür zu entwickeln, wie viel Information in darstellbaren Prägarben $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X)$ kodiert ist, wollen wir konkrete Beispiele betrachten.

… bei Mengen

Sei X eine Menge, also ein Objekt von Set. Als Menge ohne besondere Zusatzstruktur kennt man X offensichtlich schon dann, wenn man seine Elemente kennt. Diese stehen in natürlicher Bijektion zu Abbildungen $1 \to X$, wobei $1 := \{\star\}$ ein terminales Objekt der Kategorie Set bezeichnet: Denn zu jedem Element $x \in X$ gibt es die Abbildung

$$1 \longrightarrow X, \ \star \longmapsto x,$$

und umgekehrt spezifiziert jede solche Abbildung f ein Element $f(\star) \in X$. Die Beziehungen der speziellen Menge 1 zu X genügen also schon, um X zu beschreiben; $\widehat{X}(1)$ legt X fest.

... bei Gruppen

Sei G eine Gruppe, also ein Objekt von Grp. In Analogie zum Mengenfall kann man fragen, welche Information in der Menge $\widehat{G}(1)$ kodiert sind. Dabei bezeichnet „1“ jetzt ein terminales Objekt von Grp, etwa obige Menge 1 versehen mit der einzig möglichen Gruppenstruktur. Da aber Gruppenhomomorphismen das neutrale Element bewahren müssen, gibt es nur einen einzigen Morphismus $1 \to G$ in Grp – der, der das neutrale Element von 1 auf das neutrale Element von G schickt. Die Menge solcher Morphismen legt G also überhaupt noch nicht fest.

Mehr Informationen stecken in den Beziehungen der Gruppe $\mathbb{Z}$ zu G, also in den Elementen von $\widehat{G}(\mathbb{Z})$. Denn die Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z} \to G$ stehen in natürlicher Bijektion zu den Elementen von G, da man einen solchen Homomorphismus durch Vorgabe des Bilds eines der beiden Erzeuger von $\mathbb{Z}$ schon eindeutig festlegen kann. Somit kodiert $\widehat{G}(\mathbb{Z})$ also zumindest die Information über die Elemente von G.

Partielle Information über die Gruppenstruktur kann man etwa durch Betrachtung von $\widehat{G}(\mathbb{Z}/(n))$ erhalten: Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z}/(n) \to G$ stehen nämlich in natürlicher Bijektion zu denjenigen Gruppenelementen, deren Ordnung n teilt.

... bei topologischen Räumen

Sei X ein topologischer Raum oder ein strukturierteres geometrisches Objekt, wie etwa eine Mannigfaltigkeit oder ein Schema. Dann lassen sich die Elemente von $\widehat{X}(A)$ besonders anschaulich darstellen, denn das Bild eines Morphismus $A \to X$ sieht wie eine „deformierte Version“ von A aus.

Ist etwa $I = [0, 1]$ das reelle Einheitsintervall, so beschreiben Morphismen $I \to X$ einfach Kurven in X. Geschlossene Schleifen lassen sich ähnlich verstehen: Sie sind Morphismen $S^1 \to X$, wobei S^1 die Einheitskreislinie bezeichnet.

Die Punkte von X stehen in kanonischer Bijektion zu den Elementen von $\widehat{X}(1)$, wobei 1 den terminalen topologischen Raum bestehend aus genau einem Punkt bezeichnet. Zwischen 1 und I bestehen die beiden (langweiligen) stetigen Abbildungen

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow I,\ \star \longmapsto 0, \\ 1 &\longrightarrow I,\ \star \longmapsto 1. \end{aligned}$$

Interessant ist allerdings, welche Abbildungen $\widehat{X}(I) \to \widehat{X}(1)$ sie induzieren: Nämlich die Abbildungen, die jeder Kurve ihren Anfangs- bzw. Endpunkt zuordnet. Auf diese Weise erhält man also partielle Information über die Topologie von X; beispielsweise genügt die Kenntnis dieser Abbildungen, um herauszufinden, ob X wegzusammenhängend ist.

Bemerkung 6.5. In der algebraischen Geometrie hat der Funktor $\widehat{X} = \mathrm{Hom}(\_, X)$, wenn X ein in der algebraischen Geometrie untersuchten Raum ist (wie etwa ein Schema oder ein Stack), einen besonderen Namen: Er heißt *Punktefunktor von X*. Oft wird in modernen Zugängen auf diese Funktoren die Betonung gelegt, denn im Sinne Yonedas genügen sie, um X festzulegen, und sind oftmals einfacher zu verstehen als explizite Beschreibungen der inneren Struktur von X. Etwa benötigt man zur expliziten Konstruktion des n-dimensionalen projektiven Raums entweder die sog. Proj-Konstruktion oder Verklebekünste und affine Überdeckungsschemata, der Punktefunktor kann aber ganz leicht beschrieben werden:

$$\mathrm{Hom}(A, \mathbb{P}^n) \cong \text{Rang-1-Quotienten von } \mathcal{O}_A^{n+1} \text{ modulo Isomorphie.}$$

6.3 Die Yoneda-Einbettung

Jedes Objekt X kann man durch Übergang zur darstellbaren Prägarbe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X)$ auch als ideelles Objekt betrachten. Diese Zuordnung kann man zu einem Funktor $\mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ ausdehnen: Der volle Hom-Funktor geht von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}$ zu Set. Aus diesem kann man durch Curryfizierung einen Funktor $\mathcal{C} \to \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}) = \widehat{\mathcal{C}}$ basteln,

$$\begin{array}{rccl} Y: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{C}} \\ & X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X) =: \widehat{X} \\ & f & \longmapsto & \widehat{f}, \end{array}$$

wobei die Komponenten der natürlichen Transformation $\widehat{f}$ durch Nachkomponieren mit f wirken:

$$\begin{array}{rccl} (\widehat{f})_A: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \\ & g & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

Definition 6.6. Der Funktor $Y : \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ heißt *Yoneda-Einbettung* von $\mathcal{C}$.

Die Yoneda-Einbettung hat viele gute Eigenschaften, etwa...

a) ist sie treu und voll,

b) erhält Limiten (aber kaum Kolimiten) und

c) ist dicht.

Vermöge der ersten Eigenschaft können wir daher $\mathcal{C}$ als volle Unterkategorie der Kategorie der ideellen Objekte ansehen. Im Bild der Vervollständigung der rationalen Zahlen lautet die analoge Aussage, dass die Inklusion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tatsächlich injektiv ist. Der Beweis ist eine einfache Anwendung des noch folgenden Yoneda-Lemmas.

Eigenschaft b) drückt aus, dass Limesbildung verträglich mit dem Übergang von tatsächlichen Objekten von $\mathcal{C}$ zu ideellen Objekten ist. Analog erhält auch die Inklusion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ Limiten.[1]

Die Yoneda-Einbettung ist im Allgemeinen weit entfernt davon, wesentlich surjektiv zu sein. Konkret haben wir zumindest gesehen, dass die initiale Prägarbe niemals isomorph

[1] Die eigentlich analoge Aussage wäre, dass die Inklusion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ Infima erhält. Aber die andere Formulierung ist griffiger.

zu einem Objekt der Form $Y(X)$ ist. In Analogie ist die Inklusion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ weit entfernt davon, surjektiv zu sein. Es ist allerdings jede reelle Zahl Limes rationaler Zahlen – und so ist es hier auch: Eigenschaft c) besagt, dass jede Prägarbe auf kanonische Art und Weise Kolimes darstellbarer Prägarben ist. Für eine genaue Formulierung siehe Aufgabe 3 von Übungsblatt 6.

Bemerkung 6.7. Vielleicht fühlt man sich wegen der Kontravarianz von Prägarben ein wenig unwohl. Diese ist leider nicht vermeidbar: Wenn man nicht Prägarben (also Funktoren $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$) sondern *Koprägarben* (also Funktoren $\mathcal{C} \to \mathrm{Set}$) betrachtet, tritt die Kontravarianz dann beim Einbettungsfunktor auf:

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathrm{Set}), \ X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \_).$$

6.4 Das Yoneda-Lemma

Folgendes Lemma ist das zelebrierte Yoneda-Lemma. Es gibt eine sehr konkrete Antwort auf die Frage, wie Morphismen (natürliche Transformationen) aus darstellbaren Prägarben heraus aussehen:

Lemma 6.8 (Yoneda-Lemma)**.** *Es gibt eine in $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $F \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathcal{C}}$ natürliche Bijektion*

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X), F) \cong F(X).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 1 von Übungsblatt 6. Die Bijektion und ihre Umkehrabbildung sind durch

$$\begin{aligned} \eta &\longmapsto \eta_X(\mathrm{id}_X) \\ (f \in \widehat{X}(A) \mapsto F(f)(s))_{A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} &\longleftarrow s \end{aligned}$$

gegeben. □

Linke und rechte Seite der Isomorphie können als Auswertungen der Funktoren

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \widehat{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathrm{Set}, \quad (X, F) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X), F) \\ R : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \widehat{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathrm{Set}, \quad (X, F) \longmapsto F(X) \end{aligned}$$

an der Stelle (X, F) angesehen werden. Bei $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \widehat{\mathcal{C}}$ handelt es sich um die Produktkategorie aus Definition 3.11. Das Prädikat *natürlich* im Yoneda-Lemma bezieht sich darauf, dass diese beide Funktoren zueinander natürlich isomorph sind.

Beispiel 6.9. Für eine Prägarbe F haben wir uns in Motto 6.3 die Menge $F(A)$ als Menge der Morphismen von A in ein ideelles Objekt $\heartsuit$ vorgestellt. Natürlich können wir nicht „$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \heartsuit)$" schreiben, da $\heartsuit$ nicht wirklich ein Objekt von $\mathcal{C}$ ist; aber in der Prägarbenkategorie gibt es die Morphismenmenge $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\widehat{A}, F)$, und nach dem Yoneda-Lemma ist diese isomorph zu $F(A)$. In diesem Sinn gilt also $\heartsuit = F$ und das Motto ist sogar formal korrekt.

Korollar 6.10. *Die Yoneda-Einbettung Y ist voll und treu.*

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass für je zwei Objekte $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ die von Y induzierte Abbildung

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\widehat{A}, \widehat{B})$$

bijektiv ist. Dazu beginnen wir bei der rechten Hom-Menge und nutzen das Yoneda-Lemma für $F := \widehat{B}$:

$$\operatorname{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\widehat{A}, \widehat{B}) \cong \widehat{B}(A) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

Die vom Beweis des Yoneda-Lemmas gelieferte Bijektion (bzw. ihre Umkehrabbildung) ist gerade die untersuchte Abbildung. □

Korollar 6.11. *Für je zwei Objekte A, B von $\mathcal{C}$ sind äquivalent:*

$$A \cong B \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{A} \cong \widehat{B}.$$

Beweis. Folgt aus der Volltreuheit der Yoneda-Einbettung und der allgemeinen Übungsaufgabe 1 von Blatt 3. □

Dieses Korollar setzt man häufig ein, da man oftmals die Prägarben $\widehat{A}$ besser versteht als die Objekte A selbst. Folgendes Beispiel soll das illustrieren:

Beispiel 6.12. Seien A und B Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$, in der je zwei Objekte ein Produkt besitzen. Dann haben wir schon in Proposition 2.6 gesehen, dass $A \times B$ isomorph zu $B \times A$ ist. Eine Argumentation im Yoneda-Style geht so:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(_, A \times B) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(_, A) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(_, B) \\
&\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(_, B) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(_, A) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(_, B \times A),
\end{aligned}$$

$$\overset{\text{Yoneda}}{\Longrightarrow} A \times B \cong B \times A.$$

Dabei haben wir die Stetigkeit des Hom-Funktors in der zweiten Variable (siehe Proposition **??**) und die bekannte Kommutativität des kartesischen Produkts von Mengen bis auf Isomorphie verwendet; wir kannten zwar nicht das Produkt $A \times B$ (was auch immer das bedeutet), wohl aber die zugeordnete Prägarbe $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, A \times B)$.

Bemerkung 6.13. In der Vollheit der Yoneda-Einbettung sehen wir abermals das Motto natürlicher Transformationen, gleichmäßig über alle Objekte der Kategorie definiert zu sein, bestätigt (Motto 4.2): Jede natürliche Transformation $\eta : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, A) \Rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, B)$ hat notwendigerweise die gleichmäßige Form

$$\eta_X(f) = \varphi \circ f$$

für einen festen (von $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ unabhängigen) Morphismus $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

6.5 Freie Kovervollständigung

Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie. Dann erfüllt die Prägarbenkategorie $\widehat{\mathcal{C}}$ folgende universelle Eigenschaft:

Proposition 6.14. *Sei $\mathcal{D}$ eine beliebige kovollständige Kategorie und $P : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann gibt es einen kostetigen Funktor $\overline{P} : \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{D}$ (vorgestellt als Fortsetzung von P auf die Prägarbenkategorie) sodass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "Y"'] & & \mathcal{D} \\ & \widehat{\mathcal{C}} \arrow[ur, "\overline{P}"'] & \end{tikzcd}$$

bis auf natürliche Isomorphie kommutiert (d. h. dass ein natürlicher Isomorphismus $\eta : \overline{P} \circ Y \Rightarrow P$ existiert), und für je zwei solcher Paare $(\overline{P}, \eta)$ und $(\overline{P}', \eta')$ existiert genau ein natürlicher Isomorphismus $\overline{P} \Rightarrow \overline{P}'$, der mit η und η' verträglich ist.

Die Kommutativitäts- und Eindeutigkeitsaussagen sind notgedrungen nicht ganz so knapp formuliert, wie man es üblicherweise von universellen Eigenschaften gewohnt ist. Das liegt daran, weil man in einer naiveren Formulierung von der Gleichheit gewisser Funktoren sprechen würde – wie in Bemerkung 3.2 festgehalten, ist das aber keine gute Idee. Etwas formaler ausgedrückt handelt es sich bei der Aussage der Proposition um eine sog. *2-universelle Eigenschaft*, da man in der *2-Kategorie* der Kategorien arbeitet.

Beweis der Proposition. Wir können die Fortsetzung $\overline{P}$ explizit angeben:

$$\begin{array}{rccl} \overline{P}: & \widehat{\mathcal{C}} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ & F & \longmapsto & \operatorname{colim}_{s \in F(X)} P(X) \end{array}$$

Genauer sieht die Indexkategorie, über die der Kolimes gebildet wird, wie folgt aus:

$$\text{Objekte: Paare } \langle X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}, s \in F(X) \rangle$$
$$\text{Morphismen: } \operatorname{Hom}(\langle X, s \rangle, \langle Y, t \rangle) := \{X \xrightarrow{f} Y \mid F(f)(t) = s\}$$

Den natürlichen Isomorphismus $\eta : \overline{P} \circ Y \Rightarrow P$ erhält man aus der Beobachtung, dass für darstellbare Prägarben $F = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, A)$ die Indexkategorie $\langle A, \mathrm{id}_A \rangle$ als terminales Objekt enthält und der Kolimes $\overline{P}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, A))$ daher isomorph zu $P(A)$ ist. Der Rest des Beweises ist eine gute Übungsaufgabe und findet sich in Dialogform auch in [2]. □

Die Aussage der Proposition ist mit der in Aufgabe 3 von Übungsblatt 6 formulierten Dichtheit der Yoneda-Einbettung sofort plausibel: Jede Prägarbe ist in kanonischer Weise Kolimes repräsentierbarer Prägarben, und auf diesen ist $\overline{P}$ durch die Maßgabe, Fortsetzung von P zu sein, vorgegeben.

Anschaulich besagt die Proposition, dass die Prägarbenkategorie $\widehat{\mathcal{C}}$ die *freie Kovervollständigung* von $\mathcal{C}$ ist, also aus $\mathcal{C}$ dadurch entsteht, indem man (künstlich) Kolimiten zu allen kleinen Diagrammen hinzufügt – und etwaige bereits existierende Kolimiten in $\mathcal{C}$ dabei zerstört. Daraus kann man ein weiteres Motto über Prägarben extrahieren:

Motto 6.15. *Eine Prägarbe F auf $\mathcal{C}$ ist eine abstrakte Bastelanleitung für einen Kolimes: Ist ein Funktor $P : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ in eine kovollständige Kategorie gegeben, gibt die Prägarbe F vor, wie man die Bilder $P(X)$ für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ zu einem Objekt aus $\mathcal{D}$ verkleben kann.*

Bemerkung 6.16. Durch eine leichte Abwandlung der Konstruktion ist es auch möglich, die Kategorie $\mathcal{C}$ *unter Bewahrung* bereits vorhandener Kolimiten zu verkovollständigen. Außerdem ist es möglich, $\mathcal{C}$ nicht kovollständig, sondern vollständig zu machen: Dazu dualisiert man (d. h. wechselt von $\mathcal{C}$ zu $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$), führt dann die Kovervollständigung aus, und dualisiert erneut.

6.6 Analogie zu Distributionen in der Funktionalanalysis

In physikalischen und technischen Anwendungen der Mathematik ist die sog. *Deltadistribution δ* nützlich. Diese erfüllt die kuriose Rechenregel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$$

für alle glatten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, die in diesem Kontext auch als *Testfunktionen* $f \in \mathcal{D}$ bezeichnet werden.

Aufgabe 6.17. Zeige, dass es keine Funktion $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die diese Rechenregel erfüllt, wenn man das Integral formal etwa als Riemann- oder Lebesgue-Integral versteht.

Ungeachtet dieses Faktums erfreut sich die Deltadistribution trotzdem großer Beliebtheit; es wäre daher eine Schande, nur wegen dieses formalen Problems die Augen vor ihr zu verschließen. Tatsächlich ist es im Rahmen der Funktionalanalysis gelungen, die Deltadistribution (und andere Ausdrücke ihrer Art) formal zu verstehen: Sie ist zwar keine eigenständige Funktion, aber man kann erklären, wie sie sich mit Testfunktionen multipliziert *unter dem Integral* verhält. Man versteht die linke Seite der Rechenregel also lediglich als Kurzschreibweise für die Anwendung von f auf einen geeigneten Operator:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx =: A(f),$$

wobei $A : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ durch $A(f) := f(0)$ definiert ist. Die Abbildung A ist linear und stetig, wenn man auf dem Raum der Testfunktionen eine geeignete Topologie wählt.

Als Motto kann man festhalten: Die Deltadistribution ist zwar keine Funktion, aber eine *ideelle Funktion* – durch die Rechenregel kennt man ihre Beziehungen zu tatsächlichen Funktionen. Ganz offensichtlich ist dieses Motto nur eine Instanz unseres allgemeinen Mottos über Prägarben (Motto 6.3)!

7 Adjungierte Funktoren

Peter Uebele

Definition 7.1. Seien $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Genau dann heißt

- F *linksadjungiert zu* G bzw.
- G *rechtsadjungiert zu* F,

in Zeichen: $F \dashv G$, wenn es eine in $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ natürliche Isomorphie gibt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, GX)$$

Dabei ist *natürlich* gemäß Bemerkung 4.3 zu verstehen: Linke und rechte Seiten der Isomorphie sind als Auswertungen der Funktoren

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F\_,\_): & \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ & (Y, X) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\_, G\_): & \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ & (Y, X) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, GX) \end{array}$$

zu lesen. Die Natürlichkeitsbedingung bedeutet dann, dass für alle Morphismen $f : X \to X'$ in $\mathcal{C}$ und $g : Y' \to Y$ in $\mathcal{D}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY', X') \arrow[d, "\cong"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, GX) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y', GX') \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beispiel 7.2. Sei $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ quasi-invers zu $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (im Sinne von Definition 4.9). Dann ist F links- und rechtsadjungiert zu G.

Das Konzept zueinander adjungierter Funktoren ist also eine Verallgemeinerung des Konzepts zueinander quasi-inverser Funktoren: Auch, wenn ein Funktor kein Quasi-Inverses besitzt, kann man dennoch fragen, inwieweit man ihn zumindest *so gut wie möglich* invertieren kann. Das folgende Beispiel [7] soll diesen Gedanken illustrieren.

Beispiel 7.3. Sei $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ die Inklusion der ganzen in die rationalen Zahlen, aufgefasst als partiell geordnete Mengen. Diese Abbildung besitzt keine monotone Umkehrabbildung, aber zwei Beinahe-Inverse, nämlich die Auf- und Abrundungsfunktionen:

$$\begin{array}{rccl} \lceil\_\rceil: & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & \lceil x \rceil = (\text{kleinste ganze Zahl} \geq x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \lfloor\_\rfloor: & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor = (\text{größte ganze Zahl} \leq x) \end{array}$$

Die von diesen monotonen Abbildungen induzierten Funktoren erfüllen tatsächlich die Adjunktionsbeziehungen

$$B\lceil \_ \rceil \dashv Bi \dashv B\lfloor \_ \rfloor,$$

siehe Aufgabe 1 von Übungsblatt 7.

7.1 Beispiele für adjungierte Funktoren

Wenn man einmal gelernt hat, adjungierte Funktoren zu erkennen, so trifft man ständig auf sie. Im Folgenden wollen wir eine lächerlich kurze Beispielliste aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik zusammenstellen.

Beispiel aus der Algebra: Freie Konstruktionen

Sei K ein Körper (oder Ring), $U : K\text{-Vect} \to \text{Set}$ der Vergissfunktor und $F : \text{Set} \to K\text{-Vect}$ der Funktor, der jeder Menge X den sog. *freien Vektorraum über X*

$$F(X) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, n \geq 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K, x_1, \ldots, x_n \in X \right\}$$

zuordnet. Dessen Elemente sind sog. formale (endliche) Linearkombinationen der Elemente von X; addiert wird also nicht wirklich, man notiert lediglich vor jedes Element aus X einen Koeffizienten aus K.[2] Die Elemente von X bilden dann eine Basis von $F(X)$. Eine Abbildung $f : X \to X'$ von Mengen induziert eine lineare Abbildung zwischen den zugehörigen freien Vektorräumen:

$$F(f) : F(X) \to F(X'),\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Die Konstruktion des freien Vektorraums über einer Menge X ist die *ökonomischste Art und Weise*, um aus der Menge X einen Vektorraum $F(X)$ zu basteln: Denn wenn die Elemente $x \in X$ zu Vektoren werden sollen, müssen in $F(X)$ auch Linearkombinationen von ihnen enthalten sein; weitere Vektoren werden von den Vektorraumaxiomen aber nicht gefordert. Ferner sollten in $F(X)$ genau die Rechenregeln erfüllt sein, die von den Vektorraumaxiomen vorgeschrieben werden, aber keine willkürlichen weiteren. Die im vorherigen Absatz gegebene Konstruktion bewerkstelligt das gerade[3]. Formal kann man das durch folgende Adjunktionsbeziehung ausdrücken:

[2] In konstruktiver Mathematik realisiert man $F(X)$ als Menge von Wörtern über $K \times X$ modulo einer geeigneten Äquivalenzrelation, wenn man nicht voraussetzen möchte, dass X als Menge diskret ist.

[3] Das ist eine gute anschauliche Vorstellung, man kann sie allerdings nicht zu wörtlich nehmen: Etwa folgt aus den Vektorraumaxiomen für kein $n \geq 0$ die Aussage „der Vektorraum ist n-dimensional“, da es ja Vektorräume beliebiger Dimension gibt. Aber für endliches X erfüllt $F(X)$ diese Aussage doch, für $n = |X|$. Nur wenn man bereit ist, den Topos, in dem man arbeitet, zu wechseln, kann man einen völlig generischen Vektorraum konstruieren.

Proposition 7.4. *Der Funktor F ist linksadjungiert zum Vergissfunktor U, d. h. $F \dashv U$.*

Beweis. Wir geben den in $Y \in \operatorname{Ob}\mathrm{Set}$ und $V \in \operatorname{Ob} K\text{-Vect}$ natürlichen Isomorphismus explizit an:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{K\text{-Vect}}(F(Y), V) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathrm{Set}}(Y, U(V)) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi|_Y \end{array}$$

Die Bijektivität dieser Zuordnung drückt gerade aus, dass die Werte auf einer Basis genügen, um eine lineare Abbildung eindeutig festzulegen. Die Natürlichkeitsbedingung besagt, dass für alle $f : V \to V'$ in K-Vect und $g : Y' \to Y$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{K\text{-Vect}}(F(Y), V) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \operatorname{Hom}_{K\text{-Vect}}(FY', U(V')) \arrow[d, "\cong"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathrm{Set}}(Y, U(V)) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathrm{Set}}(Y', U(V')) \end{tikzcd}$$

kommutiert, d. h. dass für alle $\varphi \in \operatorname{Hom}_{K\text{-Vect}}(F(Y), V)$ die Gleichung

$$(f \circ \varphi \circ F(g))|_{Y'} = f \circ \varphi|_Y \circ g$$

erfüllt ist. Das ist offensichtlich der Fall. □

Auf ähnliche Art und Weise kann man viele *freie Konstruktionen* durchführen: freie Monoide (siehe Übungsblatt 7, Aufgabe 2), freie Gruppen, freie Ringe, . . . ; manche Theorien lassen aber auch keine freien Konstruktionen zu, etwa die der Körper (siehe Übungsblatt 7, Aufgabe 3). Im Rahmen der universellen Algebra ist dieses Phänomen vollständig verstanden (und nicht besonders schwer).

Aufgabe 7.5. Wie kann der freie Ring über einer Menge X realisiert werden? *Ring* soll dabei, wie sonst in diesem Skript auch, genauer *kommutativer Ring mit Eins* bedeuten.

Beispiel aus der Kategorientheorie

Der Vergissfunktor $U : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Set}$, der einer kleinen Kategorie ihre Menge von Objekten zuordnet, besitzt sowohl einen Links-, als auch einen Rechtsadjungierten, nämlich

$$\begin{array}{rlcll} L: & \mathrm{Set} & \longrightarrow & \mathrm{Cat}, \quad X & \longmapsto & \text{diskrete Kategorie auf } X, \\ R: & \mathrm{Set} & \longrightarrow & \mathrm{Cat}, \quad X & \longmapsto & \text{indiskrete Kategorie auf } X. \end{array}$$

Denn man hat natürliche Isomorphismen

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{Cat}}(L(X), \mathcal{E}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, \operatorname{Ob}\mathcal{E}) \quad \text{und} \quad \operatorname{Hom}_{\mathrm{Set}}(\operatorname{Ob}\mathcal{E}, Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\mathcal{E}, R(Y)).$$

Beispiel aus der Topologie

Analog hat der Vergissfunktor $U : \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$, der jedem topologischen Raum seine zugrundeliegende Menge von Punkten zuordnet, einen Links- und Rechtsadjungierten: die Konstruktion des diskreten bzw. indiskreten topologischen Raums auf einer Menge.

Beispiel aus der Logik

Lawvere hat beobachtet, dass existenzielle und universelle Quantifikation als Links- bzw. Rechtsadjungierte interpretiert werden können:

$$\exists \dashv f^* \dashv \forall.$$

Hier ist nicht der Platz, um in den nötigen Hintergrund einzuführen, sodass wir diese zelebrierte Adjunktionskette formal diskutieren könnten. Aber eine intuitive Analyse ist durchaus möglich. Dazu müssen wir zunächst verstehen, wie Logiker die fundamentale Schlussregel für den Existenzquantor ausdrücken:

$$\frac{\exists y\colon \varphi \vdash_{\vec{x}} \psi}{\varphi \vdash_{\vec{x},y} \psi} \quad \text{(wenn } y \text{ nicht in } \psi \text{ vorkommt)}$$

Der Doppelstrich deutet an, dass diese Regel sowohl von oben nach unten als auch umgekehrt angewendet werden kann. Ausformuliert besagt sie:

> Seien $x_1, \ldots, x_n$ (kurz $\vec{x}$) sowie y Variablen. Sei φ eine logische Formel in den Variablen $\vec{x}$ sowie y und sei ψ eine logische Formel in $\vec{x}$. Genau dann kann man
>
> im Kontext der Variablen $\vec{x}$ aus $\exists y\colon \varphi$ die Aussage ψ folgern,
>
> wenn man
>
> im Kontext der Variablen $\vec{x}, y$ aus φ die Aussage ψ folgern kann.

Mit anderen Worten: Wenn man die Aussage $\exists y\colon \varphi$ als Voraussetzung gegeben hat und aus ihr die Aussage ψ folgern möchte, dann kann man die Existenz eines Werts y, der die Eigenschaft φ hat, voraussetzen und unter diesem Kontext die Aussage ψ folgern. Umgekehrt geht es auch. Diese Schlussregel wendet man also ständig an, man reflektiert sie nur selten.

Unter dem Doppelstrich wird die Formel ψ, in der die Variable y nicht vorkommt, im Kontext $\vec{x}, y$ betrachtet. Diesen Prozess modelliert man in einem geeigneten Sinn als Rückzug längs eines Projektionsmorphismus $X_1 \times \cdots \times X_n \times Y \to X_1 \times \cdots \times X_n$, wobei X_i die Typen der Variablen x_i und Y der Typ von y ist. So lässt sich die Schlussregel für den Existenzquantor also auch als Ausdruck einer Adjunktionsbeziehung verstehen:

$$\mathrm{Hom}_{\vec{x}}(\exists y\colon \varphi,\ \psi) \cong \mathrm{Hom}_{\vec{x},y}(\varphi,\ \psi).$$

Aufgabe 7.6. Formuliere die fundamentale Schlussregel für den Allquantor.

7.2 Zusammenspiel von adjungierten Funktoren und (Ko-)Limiten

Proposition 7.7. *Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Dann gilt:*

a) F erhält Kolimiten von $\mathcal{C}$.

b) G erhält Limiten von $\mathcal{D}$.

Beispiel 7.8. a) Der Vergissfunktor $U : K\text{-Vect} \to \text{Set}$ erhält Limiten. Da er aber nicht Kolimiten erhält (Beispiel 5.31), kann er keinen Rechtsadjungierten besitzen.

b) Der Vergissfunktor $U : \text{Cat} \to \text{Set}$ erhält Limiten und Kolimiten.

c) Der Vergissfunktor $U : \text{Top} \to \text{Set}$ erhält Limiten und Kolimiten.

Beweis der Proposition. Der übliche Beweis geht so: Sei $D : \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ ein Diagramm, mit Limes $\lim_i D(i)$. Dann folgt aus der in $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ natürlichen Isomorphiekette

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, G(\lim_i D(i))) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(F(Y), \lim_i D(i)) \cong \lim_i \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(F(Y), D(i)) \\ &\cong \lim_i \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, G(D(i))) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, \lim_i G(D(i)))\end{aligned}$$

mit dem Yoneda-Lemma die Behauptung: $G(\lim_i D(i)) \cong \lim_i G(D(i))$.

Dieser Beweis hat aber noch zwei Lücken: Zum einen wurde die Existenz des Limes $\lim_i G(D(i))$ ohne Beweis verwendet, zum anderen wurde nur die Isomorphie der Kegelspitzen nachgewiesen; das ist aber eine schwächere Aussage als die eigentliche Behauptung der Limesbewahrung. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Lücken zu schließen, siehe etwa [4, 5]; es ist eine gute Übungsaufgabe, das auszuführen. □

7.3 Kriterien für die Existenz eines adjungierten Funktors

7.4 Weitere Aspekte

Zu einem abgerundeten Verständnis von Adjunktionen gehören mindestens noch folgende Aspekte:

- Eins und Koeins von Adjunktionen
- Monaden aus Adjunktionen

Diese können hier nicht behandelt werden, sind aber nachzulesen in XXX.

8 Kombinatorische Spezies — Simon Kapfer

9 Topologische Quantenfeldtheorien — Sven Prüfer

Werbung: Topologische Quantenfeldtheorien haben neben ihrer physikalischen Bedeutung vielseitige Anwendungen in der Mathematik. Ihre kategorielle Formulierung erlaubt es zum Beispiel, Berechnungen von topologischen oder geometrischen Invarianten so zu organisieren, dass diese durch Zerlegen des geometrischen Objekts in kleinere Bestandteile erheblich einfacher werden. Konkrete Beispiele sind etwa die Spin–Hurwitz-Zahlen oder Chern–Simons-Theorie.

In diesem Vortrag werden monoidale Kategorien sowie Funktoren eingeführt, alle Begriffe erklärt, die zum Definieren der Kategorien für topologische Quantenfeldtheorien notwendig sind und am Ende das einfachste niedrig-dimensionale Beispiel durchgerechnet. Insbesondere wird kein physikalisches oder tieferes topologisches bzw. geometrisches Grundwissen vorausgesetzt.

Literatur

[1] J. C. Baez und M. Shulman. „Lectures on n-categories and cohomology“. In: *Towards Higher Categories.* Hrsg. von J. C. Baez und J. P. May. Bd. 152. IMA Vol. Math. Appl. Springer-Verlag, 2010, S. 1–68. URL: `http://math.ucr.edu/home/baez/cohomology.pdf`.

[2] Die nLab-Beitragenden. *Free cocompletion.* 2012. URL: `http://ncatlab.org/nlab/show/free+cocompletion`.

[3] Die nLab-Beitragenden. *Stuff, structure, property.* 2012. URL: `http://ncatlab.org/nlab/show/stuff,+structure,+property`.

[4] Pierre-Yves Gaillard. *Right adjoints preserve limits.* Antwort auf Mathematics Stack Exchange. URL: `http://math.stackexchange.com/a/101040/61604`.

[5] Zhen Lin. *Right adjoints preserve limits.* Antwort auf Mathematics Stack Exchange. URL: `http://math.stackexchange.com/a/101012/61604`.

[6] J. v. Oosten. *Basic category theory.* 2002. URL: `http://www.staff.science.uu.nl/~ooste110/syllabi/catsmoeder.pdf`.

[7] Paul Smith. *What is an intuitive view of adjoints?* Antwort auf MathOverflow. URL: `http://mathoverflow.net/questions/6551/what-is-an-intuitive-view-of-adjoints-version-1-category-theory/51659#51659`.

[8] D. Spivak. *Categorical databases.* Vortragsfolien. 2012. URL: `http://math.mit.edu/~dspivak/informatics/talks/CTDBIntroductoryTalk`.

[9] D. Spivak. „Functorial data migration“. In: *Inform. and Comput.* 217 (2012), S. 31–51. URL: `http://arxiv.org/abs/1009.1166`.

[10] D. Spivak. „Simplicial databases“. 2009. URL: `http://arxiv.org/abs/0904.2012`.