Pizzaseminar zur Kategorientheorie

2. April 2013

in Entstehung befindlich

TEXer: Tim Baumann, Ingo Blechschmidt, Justin Gassner, Lukas Graf, Matthias Hutzler

Inhaltsverzeichnis

1 Was sollen Kategorien?

Ingo Blechschmidt

1.1 Beispiele für kategorielles Verständnis

Beispiel: Produkte

Von manchen Konstruktionen in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik wird man das Gefühl nicht los, dass sie einem gemeinsamen Ursprung entstammen: Etwa kennt man...

- das kartesische Produkt von Mengen: $X \times Y$,
- das kartesische Produkt von Vektorräumen: $V \times W$,
- das kartesische Produkt von Gruppen: $G \times H$,
- das kartesische Produkt von Garben: $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$,
- das kartesische Produkt von Vektorbündeln: $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$,
- das Minimum von Zahlen: $\min\{n, m\}$,
- den größten gemeinsamen Teiler von Zahlen: $\mathrm{ggT}(n, m)$,
- den Paartyp in Programmiersprachen: `(a,b)`,
- den Produktautomat zweier endlicher Automaten,
- den Mutterknoten zweier Knoten in einem Graph.

Die Ähnlichkeit untereinander ist mal mehr, mal weniger deutlich. Nur mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Produkts*. Ferner erfüllen all diese Konstruktionen sehr ähnliche Gesetze, etwa gilt

$$\begin{aligned} X \times (Y \times Z) &\cong (X \times Y) \times Z, \\ U \times (V \times W) &\cong (U \times V) \times W, \\ \min\{m, \min\{n, p\}\} &= \min\{\min\{m, n\}, p\}, \\ \mathrm{ggT}(m, \mathrm{ggT}(n, p)) &= \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(m, n), p), \end{aligned}$$

wobei in der ersten Zeile X, Y und Z Mengen sein und das Isomorphiezeichen für Gleichmächtigkeit stehen soll und in der zweiten Zeile U, V und W Vektorräume sein und das Isomorphiezeichen für Vektorraumisomorphie stehen soll. Mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle der allgemeinen Assoziativität des kategoriellen Produkts.

Beispiel: Isomorphie

Ferner fällt auf, dass in vielen Teilgebieten der Mathematik jeweils ein speziell zugeschnittener Isomorphiebegriff vorkommt: Etwa können...

- zwei Mengen X, Y gleichmächtig sein,
- zwei Vektorräume V, W isomorph sein,
- zwei Gruppen G, H isomorph sein,
- zwei top. Räume X, Y homöomorph sein,
- zwei Zahlen n, m gleich sein,
- zwei endliche Automaten isomorph sein,
- zwei Typen `a`, `b` sich verlustfrei ineinander umwandeln lassen.

All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Isomorphiekonzepts.*

Beispiel: Dualität

Von folgenden Konzepten hat man im Gefühl, dass sie in einem gewissen Sinn *zueinander dual* sein sollten:

$f \circ g$	$g \circ f$
$\leq$	$\geq$
injektiv	surjektiv
$\{\star\}$	$\emptyset$
$\times$	$\amalg$
ggT	kgV
$\cap$	$\cup$
Teilmenge	Faktormenge

Mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle eines allgemeinen *kategoriellen Dualitätsprinzips* – und diese Erkenntnis kann man nutzen, um Ergebnisse für jeweils eines der Konzepte auf sein duales Gegenstück zu übertragen.

1.2 Grundlagen

Definition 1.1. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus

a) einer Klasse von *Objekten* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,

b) zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ einer Klasse $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von *Morphismen* zwischen ihnen und

c) einer Kompositionsvorschrift:

$$\begin{array}{rl} \text{zu} & f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ \text{und} & g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \\ \text{habe} & g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{zu} & f : X \to Y \\ \text{und} & g : Y \to Z \\ \text{habe} & g \circ f : X \to Z, \end{array}$$

sodass

a) die Komposition $\circ$ assoziativ ist und

b) es zu jedem $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ einen *Identitätsmorphismus* $\mathrm{id}_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ mit

$$f \circ \mathrm{id}_X = f, \quad \mathrm{id}_X \circ g = g$$

für alle Morphismen f, g gibt.

Die Morphismen von Kategorien müssen nicht unbedingt Abbildungen sein, die Schreibweise „$f : X \to Y$“ missbraucht also Notation. Die genaue Bedeutung von *Klassen* im Gegensatz zu *Mengen* hängt von der persönlich gewählten logischen Fundierung der Mathematik ab. Für uns genügt folgende naive Sichtweise: Klassen können (im Gegensatz zu Mengen) beliebige mathematische Objekte enthalten, sind aber selbst nicht mathematische Objekte. Daher gibt es etwa widerspruchsfrei die Klasse aller Mengen, von einer Klasse aller Klassen kann man aber nicht sprechen.

Beispiel 1.2. a) Archetypisches Beispiel ist Set, die Kategorie der Mengen und Abbildungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob} \mathrm{Set} &:= \{M \mid M \text{ ist eine Menge}\} \\ \operatorname{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, Y) &:= \{f : X \to Y \mid f \text{ ist eine Abbildung}\} \end{aligned}$$

b) Die meisten Teilgebiete der Mathematik studieren jeweils eine bestimmte Kategorie: Gruppentheoretiker beschäftigen sich etwa mit der Kategorie Grp der Gruppen und Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob} \mathrm{Grp} &:= \text{Klasse aller Gruppen} \\ \operatorname{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G, H) &:= \{f : G \to H \mid f \text{ ist ein Gruppenhomo}\} \end{aligned}$$

c) Es gibt aber auch wesentlich kleinere Kategorien. Etwa kann man aus jeder Quasiordnung $(P, \preceq)$ eine Kategorie $\mathcal{C}$ basteln:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob} \mathcal{C} &:= P \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) &:= \begin{cases} \text{einelementige Menge,} & \text{falls } x \preceq y, \\ \text{leere Menge,} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

d) Auch sind gewisse endliche Kategorien bedeutsam, etwa die durch folgende Skizze gegebene:

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[loop above] \arrow[d] \\ \bullet \arrow[loop left] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Motto 1.3 (fundamental). *Kategorientheorie stellt* Beziehungen zwischen Objekten *statt etwaiger innerer Struktur in den Vordergrund.*

Definition 1.4. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *lokal klein*, wenn ihre Hom-Klassen jeweils schon Mengen (statt echte Klassen) sind. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *klein*, wenn zusätzlich auch ihre Klasse von Objekten schon eine Menge bildet.

Initiale und terminale Objekte

In Kategorien sind folgende zwei Arten von Objekten aufgrund ihrer ausgezeichneten Beziehungen zu allen (anderen) Objekten besonders wichtig:

Definition 1.5. Ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *initial*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\colon \exists! f : X \to Y.$$
- *terminal*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\colon \exists! f : Y \to X.$$

Diese Definitionen geben ein erstes Beispiel für sog. *universellen Eigenschaften.*

Beispiel 1.6. a) In der Kategorie der Mengen ist genau die leere Menge initial und genau jede einelementige Menge terminal. Diese Erkenntnis ist ein erstes Beispiel dafür, wie das fundamentale Motto gemeint ist: Eine Definition der leeren bzw. einer einelementigen Menge über eine Aufzählung ihrer Elemente betont ihre innere Struktur, während eine Definition als initiales bzw. terminales Objekt die besonderen Beziehungen zu allen Mengen hervorhebt.

b) In der Kategorie der K-Vektorräume ist der Nullvektorraum K^0 initial und terminal.

Viele kategorielle Konstruktionen realisiert man als initiales oder terminales Objekt in einer geeigneten Kategorie von Möchtegern-Konstruktionen. Ein erstes Beispiel dazu werden wir im folgenden Kapitel über Produkte finden.

Mono-, Epi- und Isomorphismen

Definition 1.7. Ein Morphismus $f : X \to Y$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *Monomorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $p, q : A \to X$ gilt:
$$f \circ p = f \circ q \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$
- *Epimorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $p, q : Y \to A$ gilt:
$$p \circ f = q \circ f \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$

Beispiel 1.8. a) In den Kategorien der Mengen, Gruppen und K-Vektorräumen sind die Monomorphismen genau die injektiven und die Epimorphismen genau die surjektiven Abbildungen. Das ist jeweils eine interessante Erkenntnis über die Struktur dieser Kategorien und nicht ganz leicht zu zeigen.

b) In der Kategorie der metrischen Räume mit stetigen Abbildungen gibt es Epimorphismen, die nicht surjektiv sind: nämlich alle stetigen Abbildungen mit dichtem Bild.

Definition 1.9. Ein *Isomorphismus* $f : X \to Y$ in einer Kategorie ist ein Morphismus, zu dem es einen Morphismus $g : Y \to X$ mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

gibt. Statt „g" schreibt man auch „f^{-1}". Existiert zwischen Objekten X und Y ein Isomorphismus, so heißen die Objekte *zueinander isomorph*: $X \cong Y$.

Bemerkung 1.10. In den meisten Kategorien ist die Frage, ob Objekte X, Y tatsächlich gleich (statt nur isomorph) sind, keine interessante Frage: Denn für alle praktischen Belange sind schon zueinander isomorphe Objekte „gleich gut". Diesen Gedanken werden wir noch manche Male aufgreifen und weiter entwickeln.

Die duale Kategorie

Aus jeder Kategorie $\mathcal{C}$ kann man durch „Umdrehen aller Pfeile" eine weitere Kategorie erhalten, die sogenannte duale Kategorie von $\mathcal{C}$:

Definition 1.11. Die zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ zugehörige *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist folgende:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\mathrm{op}} &:= \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) &:= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \end{aligned}$$

Das ist ein rein formaler Prozess, der mit dem Invertieren bijektiver Abbildungen nichts zu tun hat. Die duale Kategorie ist nützlich, um sich der Dualität mancher kategorieller Konzepte gewahr zu werden:

Beispiel 1.12. a) Ein initiales Objekt in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist ein terminales Objekt in $\mathcal{C}$ und umgekehrt.

b) Ein Epimorphismus in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$ und umgekehrt.

c) Zwei Objekte sind genau dann in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ zueinander isomorph, wenn sie es in $\mathcal{C}$ sind. Isomorphie ist also ein *selbstduales* Konzept.

Spannend ist es, wenn duale Kategorien durch andere, natürlich auftretende Kategorien beschrieben werden können.

2 Produkte und Koprodukte

Matthias Hutzler

Definition 2.1. Seien X, Y Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$. Dann besteht ein *Produkt* von X und Y aus

a) einem Objekt $P \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und

b) Morphismen $\pi_X : P \to X$, $\pi_Y : P \to Y$,

sodass für jedes andere *Möchtegern-Produkt*, also

a) jedem Objekt $\widetilde{P} \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ zusammen mit

b) Morphismen $\widetilde{\pi}_X : \widetilde{P} \to X$, $\widetilde{\pi}_Y : \widetilde{P} \to Y$

genau ein Morphismus $\psi : \widetilde{P} \to P$ existiert, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
X & & Y \\
& \widetilde{P} \arrow[ul, "\widetilde{\pi}_X"] \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_Y"'] \arrow[uu, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutieren lässt, also die Gleichungen

$$\pi_X \circ \psi = \widetilde{\pi}_X$$
$$\pi_Y \circ \psi = \widetilde{\pi}_Y$$

erfüllt.

Motto 2.2. *Ein Produkt ist ein bestes Möchtegern-Produkt.*

Statt „P“ schreibt man gerne „$X \times Y$“; es muss aus dem Kontext klar werden, ob das Kreuzzeichen speziell das kartesische Produkt von Mengen oder das allgemeine kategorielle Produkt bezeichnen soll. Analog definiert man das Produkt von n Objekten, $n \geq 0$, und dual definiert man das Koprodukt.

2.1 Beispiele

Beispiel 2.3. a) Das Produkt in der Kategorie der Mengen ist durch das kartesische Produkt gegeben, das Koprodukt durch die disjunkt-gemachte Vereinigung.

b) Das Produkt in der Kategorie der Gruppen ist durch das direkte Produkt mit der komponentenweisen Verknüpfung gegeben, das Koprodukt durch das sog. freie Produkt von Gruppen.

c) Produkt und Koprodukt endlich vieler Objekte in der Kategorie der K-Vektorräume sind durch die äußere direkte Summe gegeben. Produkte und Koprodukte von unendlich vielen Objekten unterscheiden sich allerdings.

d) Das Produkt in der von einer Quasiordnung induzierten Kategorie ist durch das Infimum gegeben. Dual ist das Koprodukt durchs Supremum gegeben.

Beweis. a) Wir zeigen die Aussage über das kartesische Produkt. Seien also X und Y Mengen. Dann wird das kartesische Produkt $X \times Y$ vermöge der kanonischen Projektionsabbildungen

$$\pi_X : X \times Y \to X,\ (x,y) \mapsto x$$
$$\pi_Y : X \times Y \to Y,\ (x,y) \mapsto y$$

zu einem Möchtegern-Produkt von X und Y:

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Um zu zeigen, dass dieses Möchtegern-Produkt ein tatsächliches Produkt von X und Y ist, müssen wir noch die universelle Eigenschaft nachweisen. Sei also ein Möchtegern-Produkt $(X \leftarrow \widetilde{P} \to Y)$ gegeben. Dann müssen wir nachweisen, dass es genau einen Morphismus $\psi : \widetilde{P} \to X \times Y$ gibt, der die beiden Dreiecke im Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ X & & Y \\ & \widetilde{P} \arrow[ul, "\widetilde{\pi}_X"] \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_Y"'] \arrow[uu, dashed, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

kommutieren lässt. Ausgeschreiben besagen die Kommutativitätsbedingungen, dass für alle $p \in \widetilde{P}$ die Gleichungen

$$(\text{erste Komponente von } \psi(p)) = \widetilde{\pi}_X(p)$$
$$(\text{zweite Komponente von } \psi(p)) = \widetilde{\pi}_Y(p)$$

gelten sollen. Es ist klar, dass diese beiden Bedingung genau durch eine Abbildung ψ erfüllt werden, nämlich durch

$$\psi : \widetilde{P} \to X \times Y,\ p \mapsto (\widetilde{\pi}_X(p), \widetilde{\pi}_Y(p)).$$

b) Der Produkt-Fall geht analog: Zusätzlich kann man jetzt voraussetzen, dass $\widetilde{\pi}_X$ und $\widetilde{\pi}_Y$ Gruppenhomomorphismen sind; im Gegenzug muss man aber nachweisen, dass die konstruierte Abbildung ψ ein Gruppenhomomorphismus wird.

c) Übungsaufgabe.

d) Siehe Übungsblatt 2, Aufgabe 3. □

2.2 Erste Eigenschaften

Proposition 2.4. *Die Objektteile je zweier Produkte von Objekten X, Y sind zueinander isomorph.*

Bemerkung 2.5. Es gilt sogar noch mehr, siehe Aufgabe 2 von Übungsblatt 2.

Proposition 2.6. *Die Angabe eines Produkts von X und Y ist gleichwertig mit der Angabe eines Produkts von Y und X.*

Proposition 2.7. *Die Angabe eines Produkts von null vielen Objekten ist gleichwertig mit der Angabe eines terminalen Objekts.*

3 Funktoren

Felicitas Hörmann

So, wie es Gruppenhomomorphismen zwischen Gruppen gibt, gibt es Funktoren zwischen Kategorien. Ihre beeindruckendste Anwendung liegt darin, dass sie zwischen unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik vermitteln können – das ist ein Grundgedanke der algebraischen Topologie. Man verwendet sie aber auch, um verschiedene Arten von Konstruktionen übersichtlich zu organisieren und einen sinnvollen Rahmen für die Frage nach „bestmöglichen" Konstruktionen mit vorgegebenem Ziel zu haben.

Definition 3.1. Ein *Funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen Kategorien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ besteht aus

a) einer Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ ein Objekt $F(X) \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ zuordnet, und

b) einer Vorschrift, die jedem Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(f) : F(X) \to F(Y)$ zuordnet,

sodass

a) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ für alle Objekte $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und

b) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle komponierbaren Morphismen g, f in $\mathcal{C}$.

Bemerkung 3.2. Quelle und Ziel der abgebildeten Morphismen $F(f)$ sind also durch den Objektteil des Funktors schon vorgegeben. Es ist nicht sinnvoll, von der Gleichheit von Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zu sprechen – denn das würde naheliegenderweise ja die Aussage umfassen, dass für alle Objekte $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ die Gleichheit

$$F(X) = G(X)$$

von Objekten in $\mathcal{D}$ gilt. Aber wie schon in Bemerkung 1.10 festgehalten, ist das keine sinnvolle Aussage.

Proposition 3.3. *Ein Funktor überführt kommutative Diagramme in kommutative Diagramme:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd} \quad \overset{F}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(h)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\ & F(Z) \end{tikzcd}$$

Beweis. Gilt $h = g \circ f$, so folgt $F(h) = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. $\square$

3.1 Funktoren als Diagramme

Es sei $\mathcal{I}$ die durch die folgende Skizze gegebene Kategorie und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie.

$$\begin{tikzcd} & \bullet_1 \arrow[d] \arrow[loop above] \\ \bullet_2 \arrow[r] \arrow[loop left] & \bullet_3 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Um einen Funktor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ anzugeben, muss man

a) Objekte $X_1 = F(\bullet_1)$, $X_2 = F(\bullet_2)$ und $X_3 = F(\bullet_3)$ in $\mathcal{C}$ und

b) Morphismen $f : X_1 \to X_3$ und $g : X_2 \to X_3$ in $\mathcal{C}$

spezifizieren. Ein solcher Funktor ist also durch ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d, "f"] \arrow[loop above] \\ X_2 \arrow[r, "g"'] \arrow[loop left] & X_3 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{C}$ gegeben. Da diese Überlegung analog mit anderen Kategorien $\mathcal{I}$ funktioniert, sehen wir folgendes Motto:

Motto 3.4. *Funktoren $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ sind $\mathcal{I}$-förmige Diagramme in $\mathcal{C}$.*

3.2 Kontravariante Funktoren

Wie kann man sich einen Funktor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ vorstellen?

a) Objekte $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} = \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ werden auf Objekte $F(X) \in \mathcal{D}$ abgebildet.

b) Morphismen $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (d. h. $f : Y \to X$ in $\mathcal{C}$) werden auf Morphismen $F(f) : F(X) \to F(Y)$ in $\mathcal{D}$ abgebildet.

Das zweite Funktoraxiom lautet für Morphismen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$

$$F(g \circ f) = F(f \bullet g) = F(f) \circ F(g),$$

wobei wir zur Verdeutlichung „$\circ$" für die Komposition in $\mathcal{C}$ und „$\bullet$" in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ schreiben. Die Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ X & \longmapsto & F(X) \\ f & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

ist also kein Funktor in unserem Sinne, da er Quelle und Ziel von Morphismen vertauscht und das zweite Funktoraxiom dann nur in entsprechend umgekehrter Kompositionsreihenfolge erfüllt. Solche Zuordnen sind trotzdem wichtig; sie heißen *kontravariante Funktoren.*

3.3 Beispiele für Funktoren

3.3.1 Langweilige Funktoren

a) Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es den *Identitätsfunktor*

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad X \mapsto X, \quad f \mapsto f.$$

b) Für ein festes Object $\heartsuit \in \mathcal{C}$ hat man den *konstanten Funktor*

$$F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}, \quad X \mapsto \heartsuit, \quad f \mapsto \mathrm{id}_{\heartsuit}.$$

Diese Funktoren als solche sind langweilig. Interessant sind aber natürliche Transformationen zwischen ihnen – das werden wir im folgenden Vortrag sehen.

3.3.2 Vergissfunktoren

Die bekannten Strukturen in der Mathematik organisieren sich in einer Hierarchie. Zwischen den Kategorien zu Strukturen verschiedener Stufen hat man sog. Vergissfunktoren:

a) Der Funktor

$$V : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}, \quad (G, \circ) \mapsto G, \quad f \mapsto f.$$

bildet Gruppen auf ihre zugrundeliegenden Mengen und Gruppenhomomorphismen auf ihre zugrundeliegenden Mengenabbildung ab. Er vergisst also die *Struktur* der Gruppenverknüpfung.

b) Der Funktor

$$V : \mathbb{R}\text{-Vect} \to \mathrm{AbGrp}, \quad (V, +, \cdot) \mapsto (V, +), \quad f \mapsto f.$$

vergisst ebenfalls algebraische Struktur, nämlich die Skalarmultiplikation.

c) Der Funktor

$$V : \mathrm{Man} \to \mathrm{Top}, \quad M \mapsto M,$$

die einer Mannigfaltigkeit ihren zugrundeliegenden topologischen Raum zuordnet, vergisst (differentialgeometrische) Struktur.

d) Der Funktor

$$V : \mathrm{AbGrp} \to \mathrm{Grp}, \quad (G, \circ) \mapsto (G, \circ), \quad f \mapsto f.$$

vergisst die *Eigenschaft* der Gruppenverknüpfung $\circ$, kommutativ zu sein.

e) Schreibe 1 für die Kategorie mit $\mathrm{Ob} = \{\bullet\}$ und $\mathrm{Hom}(\bullet, \bullet) = \{\mathrm{id}_\bullet\}$. Der Funktor

$$V : \mathrm{Set} \to 1, \quad M \mapsto \bullet, \quad f \mapsto \mathrm{id}_\bullet$$

vergisst *stuff*, also Zeug.

Die Unterscheidung zwischen Eigenschaft, Struktur und Zeug stammt übrigens von Teilnehmern eines Seminars über Quantengravitation [1, Abschn. 2.4], siehe auch [2].

Obwohl die Vergissfunktoren beinahe tautologisch definiert sind, sind sie aus zwei Gründen wichtig: Zum einen ist es eine interessante Frage, inwieweit man die Vergissfunktoren umkehren kann – wie man etwa aus einer Menge eine Gruppe machen kann. Wie diese Frage zu präzisieren und zu beantworten ist, werden wir im Vortrag über adjungierte Funktoren lernen.

Zum anderen ist es wichtig zu wissen, ob ein Vergissfunktor Produkte (oder allgemeinere Limiten) bewahrt. Etwa gilt für Vektorräume U, W und den Vergissfunktor $V : \mathbb{R}\text{-Vect} \to \mathrm{Set}$, dass

$$V(U \times W) \cong V(U) \times V(W),$$

aber

$$V(U \amalg W) \ncong V(U) \amalg V(W).$$

Was das genau bedeutet, werden wir im Vortrag über Limiten sehen.

3.3.3 Funktoren aus algebraischen Konstruktionen

Zu jedem Ring R gibt es seinen Polynomring $R[X]$ der formalen Polynome mit Koeffizienten aus R,

$$R[X] = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \,\Big|\, a_0, \ldots, a_n \in R, n \geq 0 \Big\}.$$

Diese Konstruktion kann man zu einem Funktor erheben, den sog. *Polynomringfunktor* $F : \mathrm{Ring} \to \mathrm{Ring}$: Dieser ordnet einem Ring R den Polynomring $R[X]$ und einem Ringhomomorphismus $f : R \to S$ folgenden induzierten Ringhomomorphismus zu:

$$F(f) : R[X] \to S[X], \quad \sum a_n X^n \mapsto \sum f(a_n) X^n.$$

Bemerkung 3.5. Algebraiker kann man daran erkennen, dass sie im Gegensatz zu Analytikern die Polynomvariable groß schreiben.

Fast jede algebraische Konstruktion kann man auf diese Art und Weise behandeln.

3.3.4 Funktoren und Mengen

Zu jeder Menge M gibt es die *diskrete Kategorie DM*:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ob} DM &:= M\\ \operatorname{Hom}_{DM}(m,\tilde{m}) &:= \{\mathrm{id}_m \mid m = \tilde{m}\}\end{aligned}$$

Die Angabe der Morphismenmengen ist etwas kryptisch geschrieben, ausführlich kann man die Definition auch wie folgt angeben:

$$\operatorname{Hom}_{DM}(m,\tilde{m}) := \begin{cases}\{\mathrm{id}_m\}, & \text{falls } m = \tilde{m}\\ \emptyset, & \text{sonst}\end{cases}$$

Sind nun M und N zwei Mengen und $\varphi : M \to N$ eine Abbildung, so ist

$$DM \to DN, \quad m \mapsto \varphi(m), \quad \mathrm{id}_m \mapsto \mathrm{id}_{\varphi(m)}$$

ein Funktor. [Hier fehlt eine Skizze.] Somit sehen wir folgendes Motto:

Motto 3.6. *Das Funktorkonzept verallgemeinert das Konzept der Abbildung zwischen Mengen.*

Potenzmengenfunktoren

Der *kovariante Potenzmengenfunktor* $\mathcal{P} : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ ordnet einer Menge M die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ zu und einer Abbildung $f : M \to N$ die Abbildung

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N), \quad U \mapsto f[U],$$

wobei $f[U] := \{f(u) : u \in U\}$ ist.

Definiert man $\mathcal{P}(f)$ stattdessen durch $U \mapsto f[U]^c$ (Komplement), so erhält man keinen Funktor.

Außerdem gibt es noch den *kontravarianten Potenzmengenfunktor* $\mathcal{P} : \mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$, der ebenfalls jeder Menge M ihre Potenzmenge, aber jeder Abbildung $f : M \to N$ die *Urbild*abbildung

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(M), \quad V \mapsto f^{-1}[V]$$

zuordnet, wobei $f^{-1}[V] := \{x \in M \mid f(x) \in V\}$. Dieser ist sehr bedeutsam, denn er zeigt die Äquivalenz der dualen Kategorie $\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$ mit der Kategorie vollständiger atomischer boolescher Algebren, siehe [3, Thm. 2.4]. Was „Äquivalenz" bedeutet, werden wir im folgenden Kapitel lernen.

3.3.5 Funktoren und Gruppen

Es sei ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ gegeben. Dann ist

$$f : BG \to BH, \quad \bullet \mapsto \bullet, \quad g \mapsto \varphi(g)$$

ein Funktor. (Zur Konstruktion der Kategorien BG und BH siehe Übungsblatt 1, Aufgabe 5.) Denn das erste Funktoraxiom ist erfüllt,

$$F(\mathrm{id}_\bullet) = F(e_G) = \varphi(e_G) = e_H = \mathrm{id}_\bullet,$$

und das zweite ebenso: Für alle Morphismen $g, \tilde{g} : \bullet \to \bullet$ (d. h. für alle Gruppenelemente $g, \tilde{g} \in G$) gilt

$$F(\tilde{g} \circ g) = F(\tilde{g} \cdot g) = \varphi(\tilde{g} \cdot g) = \varphi(\tilde{g}) \cdot \varphi(g) = \varphi(\tilde{g}) \circ \varphi(g) = F(\tilde{g}) \circ F(g).$$

Damit sehen wir folgendes Motto:

Motto 3.7. *Das Funktorkonzept verallgemeinert das Konzept des Gruppenhomomorphismus.*

Gruppenwirkungen

Was muss man angeben, um einen Funktor $F : BG \to \mathrm{Set}$ zu spezifizieren? Eine Menge $M := \varphi(\bullet)$ und zu jedem $g \in G$ eine Abbildung $\varphi_g : M \to M$, sodass

$$\varphi_{\mathrm{id}_\bullet} = \mathrm{id}_M \quad \text{und} \quad \varphi_{g \circ h} = \varphi_g \circ \varphi_h$$

für alle $g, h \in G$ gilt. Mit der Schreibweise $\varphi_g(x) =: g \cdot x$, $g \in G$, $x \in X$, wird dies zu

$$e \cdot x = x \quad \text{und} \quad (g \circ h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x).$$

Eine solche Struktur bestehend aus einer Menge M und einer Multiplikationsabbildung $G \times M \to M$, die diese Axiome erfüllt, ist eine sog. *Gruppenwirkung von G*. Wir sehen also: Funktoren $BG \to \mathrm{Set}$ sind „dasselbe“ wie Gruppenwirkungen von G.

Analog kann man Funktoren $BG \to K\text{-Vect}$ untersuchen. Solche haben auch einen klassischen Namen: Das sind sog. *Gruppendarstellungen.*

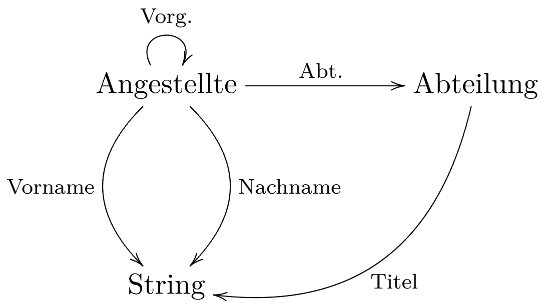
3.3.6 Funktoren als Datenbanken

Wir wollen an einem Beispiel zeigen, dass auch so konkrete Dinge wie Datenbanken aus der Informatik kategoriell verstanden werden können. Etwa gibt das zugrundeliegende Datenbankschema der 0815/Datenbank aus Tafel 1 Anlass zu folgender Kategorie $\mathcal{C}$:

Angestellte				
Nr.	**Vorname**	**Nachname**	**Vorg.**	**Abt.**
101	David	Hilbert	103	q10
102	Bertrand	Russel	102	x02
103	Alan	Turing	103	q10

Abteilung		
Nr.	**Titel**	**Sekretär**
q10	Vertrieb	101
x02	Produktion	102

Abbildung 1: Ein Standardbeispiel einer Datenbank.



Die Tabelleninhalte kann man dann über einen Funktor $\mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ kodieren, der jedes Objekt (also jeden Tabellennamen) auf die Menge der Primärschlüssel ihrer Zeilen und jeden Morphismus (also jeden Spaltennamen) auf die entsprechende Abbildung zwischen den Primärschlüsseln der beteiligten Tabellen abbildet.

Gewisse einfache Integritätsbedingungen kann man über die Angabe eines geeigneten Kompositionsgesetzes in $\mathcal{C}$ kodieren. Wenn man etwa ausdrücken möchte, dass der Sekretär einer Abteilung selbst in dieser sitzt, kann man

$$\mathrm{Abt.} \circ \mathrm{Sekretär} = \mathrm{id}_{\mathrm{Abteilung}} : \mathrm{Abteilung} \to \mathrm{Abteilung}$$

definieren. Diese Sichtweise auf Datenbanken ist unter Anderem für das Verständnis von Datenmigrierung bei Schemaänderungen hilfreich. Details hat David Spivak erforscht [4, 5, 6].

3.3.7 Hom-Funktoren

Definition 3.8. Sei $\mathcal{C}$ eine lokal kleine Kategorie (sodass ihre Hom-Klassen sogar schon Hom-Mengen sind) und $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Dann ist...

a) der *kovariante Hom-Funktor zu A* der Funktor

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \_) : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ & X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \\ & (f : X \to Y) & \longmapsto & f_\star \end{array}$$

b) und der *kontravariante Hom-Funktor zu A* der Funktor

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, A): & \mathcal{C}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ & X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \\ & (f : X \stackrel{\mathcal{C}}{\to} Y) & \longmapsto & f^{\star}. \end{array}$$

Dabei sind die Abbildungen $f_{\star}, f^{\star}$ wie folgt definiert:

$$\begin{array}{rrcl} f_{\star}: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \\ & g & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} f^{\star}: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \\ & g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

Die Hom-Funktoren kodieren die Beziehungen von A mit den Objekten aus $\mathcal{C}$. Das zentrale *Yoneda-Lemma* wird uns sagen, dass A durch Kenntnis des ko- oder kontravarianten Hom-Funktors schon bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

3.3.8 Weitere Beispiele

a) Den Prozess des Differenzierens glatter Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten kann man als Funktor auffassen, der jeder Mannigfaltigkeit ihr Tangentialbündel und jeder glatter Abbildung ihr Differential zuordnet:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Man} & \longrightarrow & \mathrm{Man} \\ M & \longmapsto & TM \\ f & \longmapsto & Df \end{array}$$

Es gibt auch eine „lokale Version“, wenn man die Kategorie der *punktierten glatten Mannigfaltigkeiten* $\mathrm{Man}_{\star}$ betrachtet: Die Objekte dieser Kategorie sind Tupel (M, x) aus einer Mannigfaltigkeit und einem ausgezeichneten Basispunkt $x \in M$, Morphismen sind basispunkterhaltende glatte Abbildungen. Dann hat man den Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Man}_{\star} & \longrightarrow & \mathbb{R}\text{-Vect} \\ (M, x) & \longmapsto & T_x M \\ f & \longmapsto & d_x f. \end{array}$$

In beiden Fällen ist das zweite Funktoraxiom gerade deswegen erfüllt, weil die Kettenregel gilt!

b) Hier könnte dein Beispiel stehen.

3.4 Die Kategorie der Kategorien

Nach dem fundamentalen Motto der Kategorientheorie sollen wir die Beziehungen zwischen Untersuchungsgegenständen ernst nehmen und daher die von ihnen gebildete *Kategorie* betrachten. Als wir bisher Kategorientheorie betrieben haben, haben wir dieses Motto bezogen auf Kategorien selbst aber sträflich vernachlässigt! Diesen Missstand behebt folgende Definition.

Definition 3.9. Die Kategorie Cat der (kleinen) Kategorien besteht aus:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob}\mathrm{Cat} &:= \text{Klasse aller (kleinen) Kategorien} \\ \operatorname{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\mathcal{C},\mathcal{D}) &:= \text{Klasse der Funktoren zwischen } \mathcal{C} \text{ und } \mathcal{D} \end{aligned}$$

Die Verkettung $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ zweier Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ ist dabei als der Funktor

$$\begin{array}{rccc} G \circ F : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & X & \longmapsto & G(F(X)) \\ & f & \longmapsto & G(F(f)) \end{array}$$

definiert.

Bemerkung 3.10. Ironischerweise ist es keine gute Idee, die so definierte Kategorie Cat zu untersuchen: Denn in Kategorien muss es sinnvoll sein, von der Gleichheit zweier Morphismen zu sprechen – der Gleichheitsbegriff zwischen Funktoren ist aber, wie eingangs schon bemerkt, nicht interessant. Tatsächlich ist die Kategorie Cat nur eine erste Approximation an eine sog. 2-Kategorie, in der es nicht nur Morphismen (Funktoren) zwischen Objekten (Kategorien), sondern auch „höhere Morphismen“, sog. 2-Morphismen (hier natürliche Transformationen), zwischen den gewöhnlichen (1-)Morphismen gibt.

4 Natürliche Transformationen

Tim Baumann

Werbung: Wir werden verstehen, was natürliche Transformationen sind, weshalb ihre Definition ganz einfach ist und wozu man sie benötigt. Ihre Bedeutung werden wir aus verschiedenen Blickwinkeln beleuchten. Mit natürlichen Transformationen können wir dann auch Funktorkategorien definieren, die für das Yoneda-Lemma später sehr wichtig sind. Außerdem können wir definieren, wann zwei Kategorien zueinander äquivalent sind.

Definition 4.1. Eine *natürliche Transformation* $\eta : F \Rightarrow G$ zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus

einem Morphismus $\eta_X : F(X) \to G(X)$ für jedes Objekt $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$

sodass

für alle Morphismen $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"'] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Motto 4.2. *Die Komponenten von η sind gleichmäßig über alle $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ definiert.*

Beispiel 4.3. a) Seien $F, G : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ Funktoren mit

$$\begin{array}{llll}
F: & X & \longmapsto & X \\
 & f & \longmapsto & f \\
G: & X & \longmapsto & X \times X \\
 & f : X \to Y & \longmapsto & (X \times X \to Y \times Y : (x_1, x_2) \mapsto (f(x_1), f(x_2))
\end{array}$$

Dann ist η mit $\eta_X : X \to X \times X : x \mapsto (x, x)$ eine natürliche Transformation.

b) Jede Gruppe ist *natürlich isomorph* zu ihrer entgegengesetzten Gruppe, d.h. es gibt eine natürliche Transformation zwischen dem Identitätsfunktor in der Kategorie der Gruppen und dem Funktor $F : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Grp} : G \mapsto G^{\mathrm{op}}, f \mapsto f$.

Beweis. Wir definieren η komponentenweise über $\eta_G : G \to G^{\mathrm{op}} : g \mapsto g^{-1}$ (dies ist ein Gruppenhomomorphismus). Damit gilt für $g \in G$

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[rr, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "\eta_G"] & & f(g) \arrow[d, mapsto, "\eta_H"] \\
g^{-1} \arrow[r, mapsto, "f"] & f(g^{-1}) \arrow[r, equal, "\text{f Gruppenhom.}"'] & (f(g))^{-1}
\end{tikzcd}$$

und das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}(G) = G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_G"'] & H = \mathrm{Id}(H) \arrow[d, "\eta_H"'] \\
F(G) = G^{\mathrm{op}} \arrow[r, "f"] & H^{\mathrm{op}} = F(H)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Also ist $\eta : \mathrm{Id} \Rightarrow F$ tatsächlich eine natürliche Transformation. □

Überlegung 4.4. *Hat man drei Funktoren $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und zwei natürliche Transformationen $\alpha : F \Rightarrow G, \beta : G \Rightarrow H$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=F}] \arrow[r, "G"{name=G}] \arrow[r, bend right=50, "H"'{name=H}] & \mathcal{D}
\arrow[from=F, to=G, phantom, "\Downarrow\alpha"]
\arrow[from=G, to=H, phantom, "\Downarrow\beta"]
\end{tikzcd}$$

Dann können wir α und β zu eine natürlichen Transformation $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow H$ verknüpfen:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] \arrow[dd, bend right, "(\beta\circ\alpha)_X:=\beta_X\circ\alpha_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"'] \arrow[dd, bend left, "\beta_Y\circ\alpha_Y=:(\beta\circ\alpha)_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\beta_X"'] & G(Y) \arrow[d, "\beta_Y"'] \\ H(X) \arrow[r, "H(f)"] & H(Y) \end{tikzcd}$$

Außerdem gibt es eine natürliche Identitätstransformation $\mathrm{Id} : F \Rightarrow F$ *mit* $Id_X := id_{F(X)}$
Damit wird folgende Definition möglich:

Definition 4.5. Die *Funktorkategorie* $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ zu zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist die Kategorie mit Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ als Objekten und natürlichen Transformationen als Morphismen.

Definition 4.6. Eine *Kategorienäquivalenz* zwischen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ besteht aus Funktoren

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D}, \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

die zueinander *quasi-invers* sind, d. h. dass die Kompositionen von F und G jeweils natürlich isomorph zu den entsprechenden Identitätsfunktoren sind:

$$G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \qquad F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}.$$

Die Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißen dann *zueinander äquivalent.*

Lemma 4.7. *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren und $\alpha : F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation. Dann ist α genau dann ein Isomorphismus, wenn α_X für alle $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Zu zeigen ist also: α Isomorphismus in der Funktorkategorie $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \Leftrightarrow \forall X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} : \alpha_x$ ist Isomorphismus in der Kategorie $\mathcal{D}$

„$\Rightarrow$“ α ist ein Isomorphismus, also existiert ein Morphismus α^{-1} mit $\alpha \circ \alpha^{-1} = \mathrm{Id}_F$, $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{Id}_G$ und es gilt für jedes $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$:

$$\mathrm{id}_{F(X)} = (\mathrm{Id}_F)_X = (\alpha \circ \alpha^{-1})_X = \alpha_X \circ \alpha_X^{-1}$$
$$\mathrm{id}_{G(X)} = (\mathrm{Id}_G)_X = (\alpha^{-1} \circ \alpha)_X = \alpha_X^{-1} \circ \alpha_X$$

Also ist α_X ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$.

„$\Leftarrow$" Wir definieren $\beta : G \Rightarrow F$ über $\beta_X = (\alpha_X)^{-1}$. Dann gilt sicher $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_F$ und $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_G$. Bleibt noch zu zeigen, dass β auch eine natürliche Transformation ist:

$$\begin{aligned}
&\forall f : X \to Y : G(f) \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ F(f) \\
\Rightarrow &(\alpha_Y)^{-1} \circ G(f) \circ \alpha_X \circ (\alpha_X)^{-1} = (\alpha_Y)^{-1} \circ \alpha_Y \circ F(f) \circ (\alpha_X)^{-1} \\
\Rightarrow &(\alpha_Y)^{-1} \circ G(f) = F(f) \circ (\alpha_X)^{-1} \\
\Rightarrow &\beta_Y \circ G(f) = F(f) \circ \beta_X
\end{aligned}$$

□

Beispiel 4.8. Die Kategorie **1**, die nur aus einem Element (1) sowie dessen Identitätsmorphismus besteht, und eine beliebige bewohnte *indiskrete Kategorie* $\mathcal{C}$ (d.h. eine Kategorie, in der gilt: $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} : \exists! f : X \to Y$) sind äquivalent.

Beweis. Wähle ein $K \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ (das ist möglich, da $\mathcal{C}$ *bewohnt* ist) und definiere die beiden Funktoren F, G:

$$\begin{aligned}
F :\ & \mathbf{1} \to \mathcal{C} : & 1 \mapsto K, \quad & \mathrm{id}_1 \mapsto id_K \\
G :\ & \mathcal{C} \to \mathbf{1} : & X \mapsto 1, \quad & f \mapsto id_1
\end{aligned}$$

Da es nur einen einzigen Funktor von **1** nach **1** gibt, ist klar, dass $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{1}}$ gilt. Noch zu zeigen ist also, dass auch $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ gilt.
Wir definieren dazu eine natürliche Transformation $\eta : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Dabei verwenden wir für jedes $X \in \mathcal{C}$ als η_X den *eindeutigen* Morphismus $(F \circ G)(X) \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(X)$:

$$\begin{tikzcd}
K = (F \circ G)(X) \arrow[r, "(F \circ G)(f) = id_K"] \arrow[d, "\eta_X"'] & (F \circ G)(Y) = K \arrow[d, "\eta_Y"'] \\
X = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(X) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f"] & \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(Y) = Y
\end{tikzcd}$$

Da in einer indiskreten Kategorie alle Morphismen Isomorphismen sind, ist insbesondere jedes η_X ein Isomorphismus und damit ist, nach Lemma 4.7, auch η ein Isomorphismus. □

Definition 4.9. Eine *natürliche Transformation* $\eta : F \Rightarrow G$ zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus

einem Morphismus $\eta_X : F(X) \to G(X)$ für jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

sodass

für alle Morphismen $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Proposition 4.10. *Eine natürliche Transformation η ist genau dann ein Isomorphismus (d. h. besitzt eine inverse natürliche Transformation), wenn alle Komponenten η_X, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, Isomorphismen sind.*

Invertierbare natürliche Transformationen heißen auch *natürliche Isomorphismen.*

Definition 4.11. Zwei Funktoren heißen *zueinander (natürlich) isomorph*, wenn es einen natürlichen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

Definition 4.12. Eine *Kategorienäquivalenz* zwischen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ besteht aus Funktoren

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd},$$

die zueinander *quasi-invers* sind, d. h. dass die Kompositionen von F und G jeweils natürlich isomorph zu den entsprechenden Identitätsfunktoren sind:

$$G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \qquad F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}.$$

Die Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißen dann *zueinander äquivalent.*

5 Limiten und Kolimiten

Martin Baur und Kathrin Gimmi

Werbung: Wir verstehen, was allgemeine Limiten und Kolimiten von Diagrammen sind. Dazu wird es viele Beispiele geben, unter anderem die uns schon bekannten Produkte und Koprodukte. Speziell sind sog. filtrierte Kolimiten wichtig, da diese in der täglichen Praxis oft vorkommen und besonders schöne Eigenschaften haben. Abschließend werden wir die Frage diskutieren, wie man Kategorien, denen es an Limiten oder Kolimiten mangelt, vervollständigen kann.

6 Das Yoneda-Lemma

Justin Gassner

Werbung: Wir werden das fundamentale Yoneda-Lemma und seine Korollare verstehen. Dazu werden wir zunächst eine hilfreiche Intuition von sog. Prägarben auf Kategorien entwickeln und verstehen, welche Signifikanz die Darstellbarkeit von Prägarben hat. Dann können wir die Yoneda-Einbettung kennenlernen, ihre Eigenschaften studieren und sehen, wozu sie nützlich ist. Das fundamentale Motto der Kategorientheorie wird damit zu einem formalen Theorem.

7 Adjungierte Funktoren

Peter Uebele

Werbung: Kommt noch!

8 Kombinatorische Spezies

Simon Kapfer

Werbung: Auf wie viele Möglichkeiten kann man n gefärbte Kugeln in so und so viele Urnen unter Beachtung dieser oder jener Zusatzbedingungen verpacken? Wir werden eine einfache konzeptuelle Methode kennenlernen, um kombinatorische Zählprobleme dieser Art zu lösen. Dabei werden uns sog. erzeugende Funktionen wundersame Dienste leisten. Um die formale Formulierung sauber hinzubekommen, werden wir uns ein wenig Kategorientheorie zunutze machen.

9 Topologische Quantenfeldtheorien

Sven Prüfer

Literatur

[1] J. C. Baez und M. Shulman. „Lectures on n-categories and cohomology“. In: *Towards Higher Categories*. Hrsg. von J. C. Baez und J. P. May. Bd. 152. IMA Vol. Math. Appl. Springer-Verlag, 2010, S. 1–68. URL: `http://math.ucr.edu/home/baez/cohomology.pdf`.

[2] Die nLab-Beitragenden. *stuff, structure, property*. 2012. URL: `http://ncatlab.org/nlab/show/stuff,+structure,+property`.

[3] J. v. Oosten. *Basic category theory*. 2002. URL: `http://www.staff.science.uu.nl/~ooste110/syllabi/catsmoeder.pdf`.

[4] D. Spivak. *Categorical databases*. Vortragsfolien. 2012. URL: `http://math.mit.edu/~dspivak/informatics/talks/CTDBIntroductoryTalk`.

[5] D. Spivak. „Functorial data migration“. In: *Inform. and Comput.* 217 (2012), S. 31–51. URL: `http://arxiv.org/abs/1009.1166`.

[6] D. Spivak. „Simplicial databases“. 2009. URL: `http://arxiv.org/abs/0904.2012`.