Wiederholung:

- Knoten: stetig diff.bare Einbettung $S^1 \to \mathbb{R}^3$
- Äquivalenz von Knoten: Homotopie $h_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h_0 = id$, $h_1(K_1) = K_2$

- Verschlingung: „Knoten mit mehreren Komponenten"

„Borromäische Ringe"

Frage: Wie kann man feststellen, ob zwei geg. Knoten äquivalent sind?

Reidemeister-Bewegungen

Typ I: 

Typ II: 

Typ III: 

Satz: Zwei Knoten (Verschlingungen) (mit Orientierung) sind genau dann äquivalent, wenn sie sich nur durch Reidemeister-Bew. unterscheiden.

Bem:

Die Kauffman-Klammer

Idee: Ordne jedem Knotendiagramm ein Polynom zu, um dadurch die Knoten zu unterscheiden.

Def: Die Kauffman-Klammer ist eindeutige Abb.

$$\langle \cdot \rangle : \{\text{nicht-orient. Diagramme}\} \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}], \text{ mit}$$

(i) $\langle O \rangle = 1$

(ii) $\langle D \sqcup O \rangle = (-A^{-2} - A^{2}) \langle D \rangle$

(iii) $\langle \times \rangle = A \langle)(\rangle + A^{-1} \langle \asymp \rangle$

Bsp: (Linkshändiger) Kleeblattknoten

$$\langle\ \rangle = A \cdot \langle\ \rangle + A^{-1} \underbrace{\langle\ \rangle}_{= -A^{4} - A^{-4}}$$

$$\langle\ \rangle = A \cdot \underbrace{\langle\ \rangle}_{= (-A^{-2} - A^{2}) \cdot \langle\ \rangle} + A^{-1} \langle\ \rangle = -A^{3} \langle\ \rangle$$

$$= -A^{3} \Big(A \cdot \underbrace{\langle\ \rangle}_{(-A^{-2} - A^{2} \cdot \underbrace{\langle O \rangle}_{=1})} + A^{-1} \underbrace{\langle\ \rangle}_{=1} \Big)$$

$$= A^{6}$$

$$= A^{7} - A^{3} - A^{-5}$$

insg.

Invarianz unter Reidemeister-Bew:

Typ II: $\langle\ \rangle = A \langle\ \rangle + A^{-1} \langle\ \rangle$

$$= A \Big(A \langle\ \rangle + A^{-1} \underbrace{\langle\ \rangle}_{(-A^{2} - A^{-2}) \langle\ \rangle} \Big) + A^{-1} \Big(A \langle\ \rangle + A^{-1} \langle\ \rangle \Big)$$

$$= \langle\ \rangle$$

Typ III: $\langle\ \rangle = A^{-1} \underbrace{\langle\ \rangle}_{= \langle\ \rangle = \langle\ \rangle} + A \langle\ \rangle \overset{!}{=} \langle\ \rangle$

Typ I: $\langle\ \rangle = -A^{3} \langle\ \rangle$

$\langle\ \rangle = -A^{-3} \langle\ \rangle$

Idee: Zähle die Überkreuzungen im Diagramm mit

positive Überkreuzung negative Überkreuzung

Def: $w(D) = \#(\text{pos. Üb.}) - \#(\text{neg. Üb.})$

w: Verwringung

$\rightsquigarrow \; X(D) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$

ist invariant unter allen Reidemeister-Bew!

Def: Jones-Polynom: $V(D) := X(D)$ mit $A = t^{-1/4}$

Bsp: $D =$  K_l gespiegelt:  K_r

$w(D) = -3$

$V(K_l) = (-A^3)^3 \, (A^7 - A^3 - A^{-5})$ $V(K_r) = -t^4 + t^3 + t$

$= -A^{16} + A^{12} + A^4$

$\underset{t = A^{-4}}{=} -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$

gespiegelt A und A^{-1} vertauscht bzw $t^{1/4}$ und $t^{-1/4}$

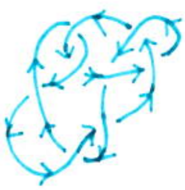
allgemein: $\langle \overline{K} \rangle = \overline{\langle K \rangle}$

$K_l \not\sim K_r$

Offene Frage: Ist der Unknoten der einzige Knoten mit $V(K) = 1$

Seifert-Flächen

Seifert Algorithmus:

 $\rightsquigarrow$ disjunkte Kreise $\rightsquigarrow$ auffüllen durch Scheiben