① Wiederholung Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$

Definition: $\pi_1(X,x_0) := \{\text{Wege } \alpha : I \to X \mid \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}/_\sim$ Homotopie

↳ x_0 ist fester Basispunkt

mit festem Anfangs- und Endpunkt x_0 ⇝ ĀR heißt Fundamentalgruppe von X mit Basispunkt x_0

$$\alpha \sim \beta \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, H : I \times I \to X \quad \text{stetig}$$

$$H(0,t) = \alpha$$

$$H(1,t) = \beta$$

$t \mapsto H(\underset{\text{fest}}{s}, t)$ ist geschlossene Kurve mit $H(s,0) = H(s,1) = x_0$

Gruppenstruktur:

$[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$

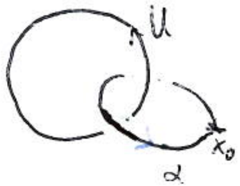
durchläuft erst α, dann β

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & t \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sei $K: S^1 \to \mathbb{R}^3$ Knoten

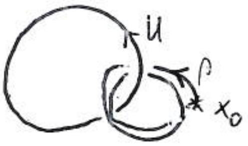
Definition der Knotengruppe: $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ heißt Knotengruppe

Bsp.: $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \underset{\uparrow\,\text{Unknoten}}{U}) \cong \mathbb{Z}$



$[x_0] \triangleq 0$

$[\alpha] \triangleq 1$



$[\beta] \triangleq 2$

Wie lässt sich die Knotengruppe eines komplizierteren Knoten berechnen?

Gruppendarstellungen mit Erzeugern und Relationen:

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$ freie Gruppe über n Erzeugern
↳ d.h. keine Relationen

$$= \{ e, x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_1 x_2, x_2 x_1, \dots \}$$

„Wörter aus $x_1, \dots, x_n$"

Relationen:

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$$

r_i : Polynom in $x_1, \dots, x_n$

$$= \{ e, x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, x_1 x_2, x_2 x_1, \dots \} / \sim$$

$r_i \simeq e$

z. B. $\langle x_1, x_2 \mid r_1 = x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \cong \mathbb{Z}$

$x_1 x_2 = e$

$x_2 = x_1^{-1}$

$$\langle x_1 \mid r_1 = x_1^k \rangle = \langle x_1 \rangle /_{x_1^k = e} \cong \mathbb{Z}/_{k\mathbb{Z}}$$

Freies Produkt von Gruppen:

$$G = \langle x_1, x_2, \dots \mid r_{x_1}, r_{x_2}, \dots \rangle$$

$$H = \langle y_1, y_2, \dots \mid r_{y_1}, r_{y_2}, \dots \rangle$$

$$\rightsquigarrow \quad G * H = \langle x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots \mid r_{x_1}, r_{x_2}, \dots, r_{y_1}, r_{y_2}, \dots \rangle$$

Die Wirtinger-Darstellung:

Algorithmus zur Berechnung der Knotengruppe

- Wähle reguläre Projektion von K (wie in Bsp.) auf (x,y)-Ebene
- Für jeden Bogen j wähle Erzeuger a_j von $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K)$

- für jede Kreuzung v gibt es eine Relation R_v gemäß

$R_v = a_j^{-1} a_k a_i a_k^{-1}$

(d.h. $a_j = a_k a_i a_k^{-1}$)

$R_v = a_j^{-1} a_k^{-1} a_i a_k$

$a_j = a_k^{-1} a_i a_k$

- Die Knotengruppe von K ist gegeben durch

$$\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K) = \langle a_j,\ j \text{ Bogen} \mid R_v,\ v \text{ Kreuzung}\rangle$$

Beispiel: $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus U) = \langle a\rangle = \mathbb{Z}$

$$\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus LK) = \langle a, b, c \mid R_{v_1}, R_{v_2}, R_{v_3}\rangle$$

$R_{v_1} = c^{-1} a b a^{-1}$

$R_{v_2} = b^{-1} c a c^{-1}$

$R_{v_3} = a^{-1} b c b^{-1}$

$$= \left\langle a, b, c \;\middle|\; \begin{array}{l} c = aba^{-1} \\ b = cac^{-1} \\ a = bcb^{-1} \end{array} \right\rangle$$

$$= \left\langle a, b \;\middle|\; \begin{array}{l} (i)\ b = (aba^{-1})\, a\, ((aba^{-1})^{-1}) = abab^{-1}a^{-1} \\ (ii)\ \underbrace{a = b\,(aba^{-1})\,b^{-1}} \end{array} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow\ baba^{-1}b^{-1}a^{-1} = e$$

$$\overset{(\cdot)^{-1}}{\Leftrightarrow}\ abab^{-1}a^{-1}b^{-1} = e \quad \Leftrightarrow (i)$$

$$= \langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1} = e\rangle$$

Seifert-van-Kampen (ohne Beweis)

↳ ist wichtiger Satz über Fundamentalgruppen
wird zum Beweis der Wirtinger-Darstellung benötigt

X top. Raum $= \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{U_\alpha}_{\text{offen}}$ und Basispunkt $x_0 \in \bigcap_\alpha U_\alpha$

Inklusions-Abb.:

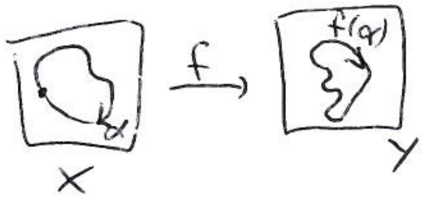
$$\begin{tikzcd} & U_\alpha \arrow[dr, "j_\alpha"] & \\ U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ur, "i_{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "i_{\beta\alpha}"'] & & X \\ & U_\beta \arrow[ur, "j_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

induzieren

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(U_\alpha) \arrow[dr] & \\ \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[ur, "i_{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "i_{\beta\alpha}"'] & & \pi_1(X) \\ & \pi_1(U_\beta) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$f : X \to Y$ stetig

top. Räume



induziert Abb.

$$f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$$
$$[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$$

$$N \subset \mathop{\ast}_\alpha \pi_1(U_\alpha) \xrightarrow{\Phi := \ast_\alpha j_\alpha} \pi_1(X)$$

normale Untergruppe erzeugt von $i_{\alpha\beta}(c)\, i_{\beta\alpha}(c)^{-1}$, $\alpha \neq \beta$, $c \in \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta)$

Satz: U_α, $U_\alpha \cap U_\beta$, $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ wegzshgd. $\forall \alpha, \beta, \gamma$

$\Rightarrow \Phi$ ist surjektiv und $\ker \Phi = N$,
d.h. Φ induziert einen Isom.

$$\mathop{\ast}_\alpha \pi_1(U_\alpha) / N \xrightarrow{\cong} \pi_1(X)$$

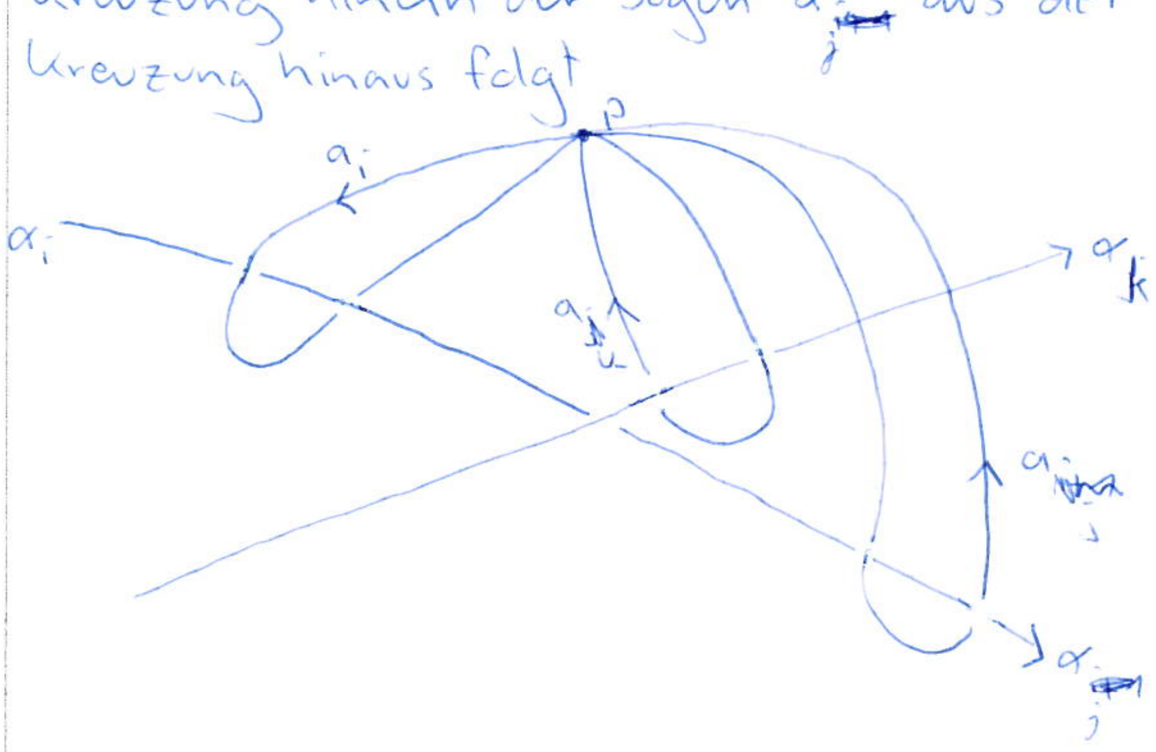
Beweis der Wirtinger-Darstellung:

- Projektion eines Knoten K auf die Ebene derart, dass es höchstens Doppelpunkte (als Kreuzungen) gibt. Im Fall eines Doppelpunktes muss angegeben werden, welcher ~~Zweig~~ Bogen von K dabei oben ist (reguläre Projektion)

- $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ ist gegeben durch Schleifen a_i durch diese Knotenbögen

Folglich hat man genau so viele Erzeuger wie es Kreuzungen gibt. Wir wählen eine Orientierung für den Knoten K und orientieren dann nach der Rechte-Hand-Regel die Erzeuger a_i um die Bögen α_i

~~Es~~ Es ist auch sinnvoll die Indizierung so anzuordnen, dass dem unteren Bogen α_i in eine Kreuzung hinein der Bogen α_j aus der Kreuzung hinaus folgt



Beweis des Algorithmus (~~benötigt~~ braucht den Satz von Seifert-van-Kampen): (6)

Wir können annehmen, dass jeder Bogen α_i des Knotens K in der Ebene $z=1$ liegt, abgesehen von einem vertikalen Teilstück an jedem Bogenende (auf Höhe der Kreuzungen), welche nach $z=0$ heruntergeht. Der Endpunkt von α_i kann dann mit dem Anfangspunkt von α_{i+1} durch das Bogenstück β_{i} in der Ebene $z=0$ verbunden werden, das unter dem ~~Bogen~~ oberen Bogen der Kreuzung α_j verläuft ~~. Wir nehmen dann das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus N$ wobei nehm~~

~~Man nimmt~~ definiert nun N, ~~die~~ eine Umgebung des Knotens

Man definiert nun N, eine Quader-Umgebung des Knotens K mit Seitenlänge ε, deren Mittelpunkt auf K liegt und wobei ε klein ~~genug ist um sicherzustellen, dass $\mathbb{R}^3 \setminus N$ ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^3 \setminus K$ ist, d.h.~~

Deformationsretrakt ist Spezialfall von Homotopieäquivalenz

X, Y homot.-äquiv.

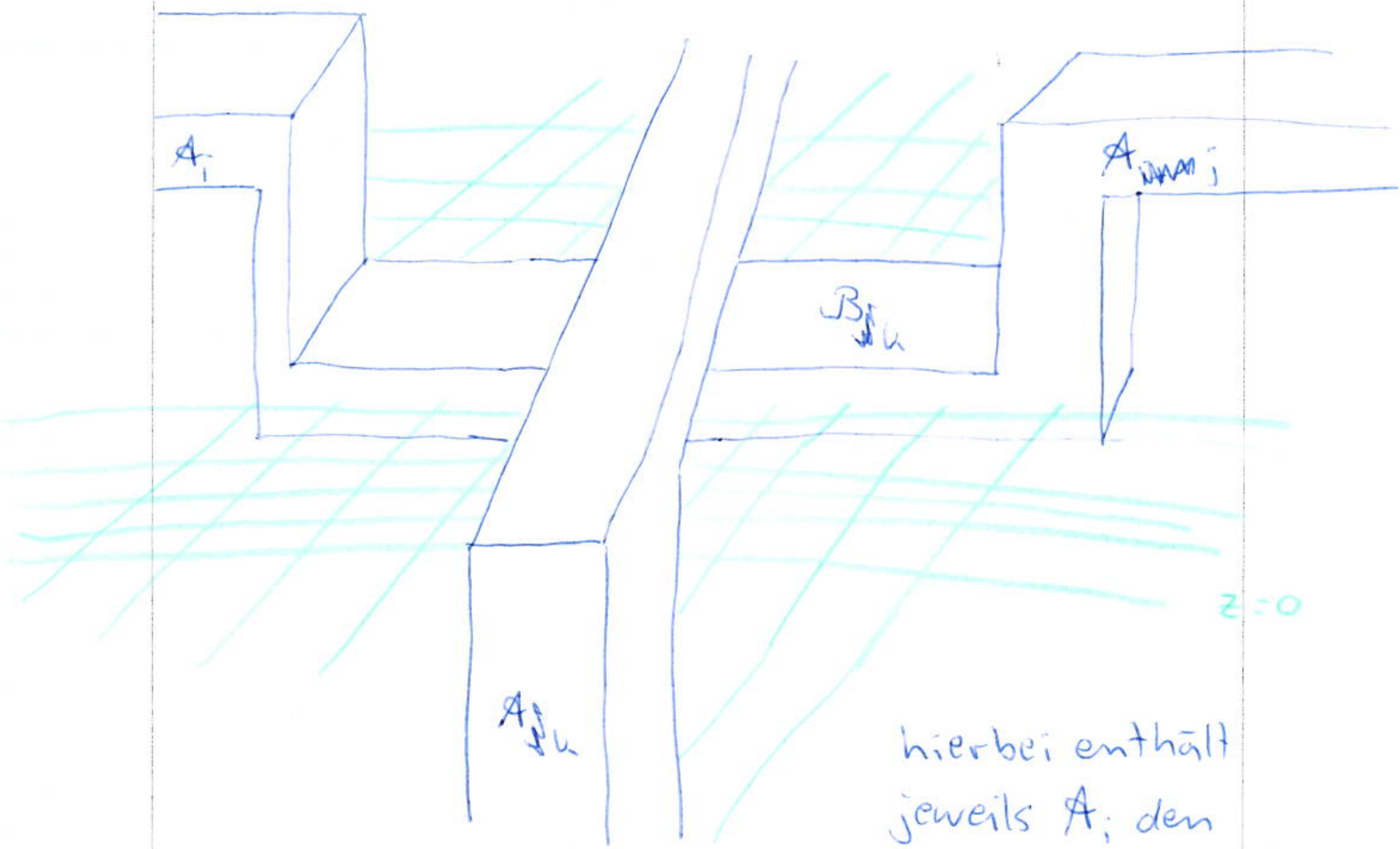
$\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, f: X \to Y$ stetig

$g: Y \to X$ "

s.d. $f \circ g \sim id_Y$

$g \circ f \sim id_X$

homotop



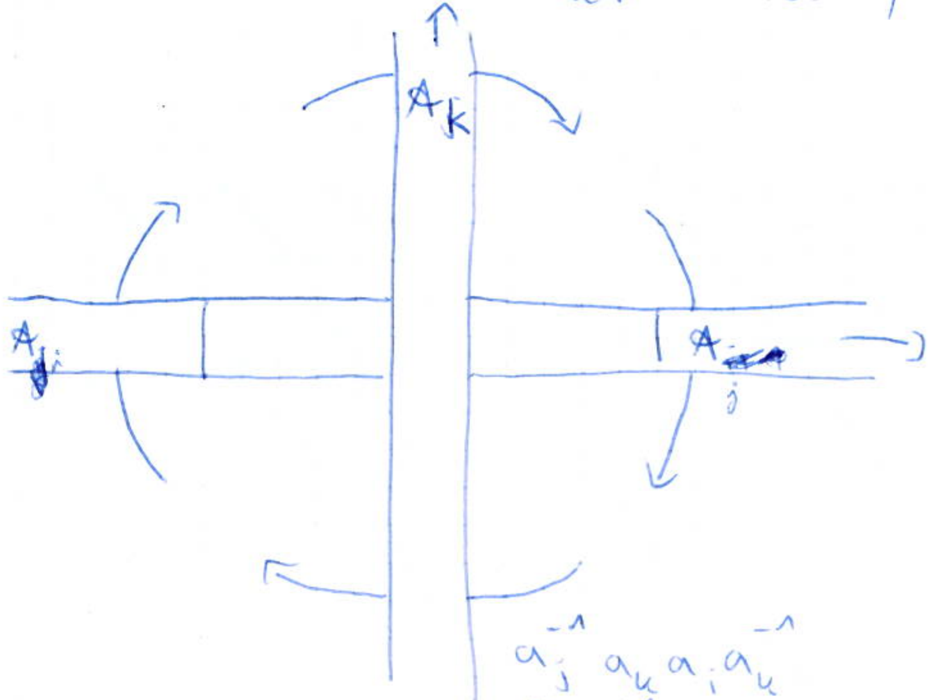
hierbei enthält jeweils A_i den Knotenbogen α_i

- Man definiert $A = \{z > 0\} \setminus N$
  Nun umkreisen $a_1, \ldots, a_n$ den verdickten Knotenbogen, wobei a_i die Schleife ist, die um den Tunnel A_i verläuft
- Man definiert $B = \{z < \frac{\varepsilon}{2}\} \setminus N$ ist ein offener Halbraum mit „Gräben" an den Stellen der B_{jk}-Tunnel. B ist einfach zusammenhängend, d.h. $\pi_1(B) = \{1\}$
  Legt man Schleifen in B, so können diese stets an den Gräben „vorbeigezogen" werden und sind damit nullhomotop.
- $A \cap B = \{0 < z < \frac{\varepsilon}{2}\} \setminus N$ ist eine unendliche verdickte Ebene mit n Löchern an den Stellen der B_{jk}-Gräben (die obere Hälfte der

Gräben)

Daher gilt $\pi_1(A \cap B)$ = freie Gruppe mit n Erzeugern

Der typische Erzeuger von $\pi_1(A \cap B)$ ist ein Kreis um einen der Gräben,



hat also die Form $a_j^{-1} a_k a_i a_k^{-1}$ in $\pi_1(A)$ oder $a_j^{-1} a_k^{-1} a_i a_k$ im Fall der zweiten Art der Kreuzung von vorhin und 1 bei $\pi_1(B)$ Mit dem Satz von Seifert-van-Kampen erhält man dann die Wirtinger-Darstellung für

$$\pi_1(A \cup B) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus N) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$$