Universität Augsburg
11. April 2013
Tim Baumann

Pizzaseminar zur Kategorientheorie

Lösung zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1:

a) Sei M eine Menge, $m \in M$ beliebig und $\eta : \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}$ eine natürliche Transformation. Wir wollen beweisen, dass $\eta_M(m) = m$ ist. Wir definieren dazu $1 := \{\heartsuit\}$ und $f : 1 \to M, \heartsuit \mapsto m$. Die Aussage folgt nun durch eine Diagrammjagd im Natürlichkeitsdiagramm von η:

$$\begin{tikzcd}
\heartsuit \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & f(\heartsuit) = m \arrow[dd, mapsto] \\
& 1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_1"] & M \arrow[d, "\eta_M"] & \\
& 1 \arrow[r, "f"] & M & \eta_M(m) \arrow[dl, equal, bend left] \\
\eta_1(\heartsuit) = \heartsuit \arrow[rr, mapsto] & & f(\heartsuit) = m &
\end{tikzcd}$$

b) Sei M eine Menge, $m \in M$ beliebig und $\omega : \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}} \Rightarrow K$ eine natürliche Transformation. Wir wollen wieder den gleichen Trick wie in Teilaufgabe *a)* anwenden. Dazu definieren wir wie oben $f : 1 \to M$, $\heartsuit \mapsto m$ und führen dann eine Diagrammjagd durch:

$$\begin{tikzcd}
\heartsuit \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & f(\heartsuit) = m \arrow[dd, mapsto] \\
& 1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\omega_1"] & M \arrow[d, "\omega_M"] & \\
& 1 \times 1 \arrow[r, "f \times f"] & M \times M & \omega_M(m) \arrow[dl, equal, bend left] \\
\omega_1(\heartsuit) = (\heartsuit, \heartsuit) \arrow[rr, mapsto] & & (m, m) &
\end{tikzcd}$$

c) Angenommen, es gäbe eine natürliche Transformation $\epsilon : P \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}$. Dann würde die Komponente $\epsilon_\varnothing$ von $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ nach $\varnothing$ verlaufen, also hätte die leere Menge ein Element $f(\varnothing)$. Widerspruch.

In die andere Richtung gibt es eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Id}_{\mathsf{Set}} \Rightarrow P$ mit

$$\eta_X : X \to \mathcal{P}(X),\ x \mapsto \{x\}.$$

Wir müssen noch die Natürlichkeit überprüfen. Seien dazu X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir machen eine Diagrammjagd, dieses Mal aber um die Kommutativität des Diagramms zu beweisen:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & f(x) \arrow[dd, mapsto] \\
& X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] & \\
& \mathcal{P}(X) \arrow[r, "{f[\cdot]}"] & \mathcal{P}(Y) & \{f(x)\} \\
\{x\} \arrow[rr, mapsto] & & f[\{x\}] \arrow[ur, equal, bend right] &
\end{tikzcd}$$

d) Betrachte die Menge $M := \{1, 2\}$. Sei $f : 1 \to M$ die Funktion, die $\heartsuit$ auf das Element aus M schickt, das nicht das ausgewählte Element a_M ist. Wenn τ eine natürliche Transformation wäre, müsste folgendes Diagramm kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau_1"] & M \arrow[d, "\tau_M"] \\
1 \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm kommutiert aber gerade nicht, da τ_M die Funktion ist, die alles konstant auf a_M schickt und wir f geschickterweise so gewählt haben, dass der Wert von f eben nicht a_M ist.

e) In der Kategorie der reellen Vektorräume gibt es für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die natürliche Transformation μ gegeben durch

$$\mu_V : V \to V,\ v \mapsto \lambda v$$

wie man leicht nachrechnet, wenn man sich an die Eigenschaften von linearen Funktionen erinnert.

Sind das schon alle natürliche Transformationen von $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}-\mathsf{Vect}}$ nach $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}-\mathsf{Vect}}$? Angenommen, wir haben eine solche natürliche Transformation η gegeben. Sei V ein reeller Vektorraum und $v \in V$ beliebig. Wir definieren die lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \to V,\ r \mapsto rv$ und betrachten das Natürlichkeitsdiagramm von η:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & f(1) = v \arrow[dd, mapsto] \\
& \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_{\mathbb{R}}"] & V \arrow[d, "\eta_V"] & \\
& \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & V & \eta_V(v) \\
\eta_{\mathbb{R}}(1) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \arrow[rr, mapsto] & & f(\lambda) = \lambda v \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}
$$

Dadurch sehen wir, dass η tatsächlich die Form $\eta_V(v) = \lambda v$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzen muss.

Aufgabe 2:

a) Mit folgendem Lemma lassen sich diese und viele weitere ähnliche Aussagen elegant beweisen:
Lemma 1. *Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien mit Quasi-Inversem $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Dann sind F und G volltreu und wesentlich surjektiv.*

Beweis. Seien $\eta : G \circ F \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ und $\mu : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ die natürlichen Isomorphismen der Kategorienäquivalenz. Dann ist jedes $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ isomorph zu $G(F(A))$ mit dem Isomorphismus $\eta_A : G(F(A)) \to A$ und der Funktor G damit wesentlich surjektiv.

Es kommutiert für alle $A \xrightarrow{f} B \in C$ das erweiterte Natürlichkeitsdiagramm von η:

$$
\begin{tikzcd}
GFA \arrow[r, "G(F(f))"] \arrow[d, shift left, "\eta_A"] & GFB \arrow[d, shift left, "\eta_B"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[u, shift left, "\eta_A^{-1}"] & B \arrow[u, shift left, "\eta_B^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Hieraus kann man direkt ablesen, dass $(G \circ F) : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(GFA, GFB)$ eine Bijektion mit Umkehrabbildung

$$g : \mathrm{Hom}(GFA, GFB) \to \mathrm{Hom}(A, B),\ m \mapsto \eta_B \circ m \circ \eta_A^{-1}$$

ist. Insbesondere sind für alle $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ der Funktor

$$F : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(FA, FB)$$

injektiv und

$$G : \mathrm{Hom}(FA, FB) \to \mathrm{Hom}(GFA, GFB)$$

surjektiv auf Hom-Mengen. Wir können sogar zeigen, dass G ist surjektiv auf $\mathrm{Hom}(E, P)$ für alle $E, P \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ ist. Sei dazu $f \in \mathrm{Hom}(GE, GP)$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} f &= G(\mu_P) \circ \underbrace{(G(\mu_P^{-1}) \circ f \circ G(\mu_E))}_{\in \mathrm{Hom}(GFGE, GFGP)} \circ G(\mu_E^{-1}) \\ &= G(\mu_P) \circ G(h) \circ G(\mu_E^{-1}) \\ &= G(\underbrace{\mu_P \circ h \circ \mu_E^{-1}}_{\in Hom(E,P)}) \end{aligned}$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt ausgenützt, dass, wie schon bewiesen,

$$G : \mathrm{Hom}(FGE, FGP) \to \mathrm{Hom}(GFGE, GFGP)$$

surjektiv ist.

Da die Vorraussetzungen symmetrisch in F und G sind, ist F auch surjektiv und G injektiv auf Hom-Mengen und G wesentlich surjektiv. Nach Definition sind F und G damit volltreu. □

Zum Beweis der eigentlichen Aufgabe: Sei 0 initiales Objekt in $\mathcal{C}$ und $X \in \mathrm{Ob}\, D$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass FX initial in $\mathcal{D}$ ist, es also genau einen Morphismus von $F0$ nach X gibt. Da X isomorph zu FGX und der Funktor F volltreu ist, haben wir eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}(F0, X) \cong \mathrm{Hom}(F0, FGX) \cong \mathrm{Hom}(0, GX).$$

Weil 0 initial ist, enthält die rechte Hom-Menge und somit auch die linke Hom-Menge genau einen Morphismus.

b) Wir bezeichnen die Kategorie der Möchtegern-Produkte von X und Y mit $\mathrm{MP}_{X,Y}$, die der Möchtegernprodukte von Y und X mit $\mathrm{MP}_{Y,X}$. Da Möchtegern-Produkte von X und Y aus Symmetriegründen auch Möchtegernprodukte von Y und X sind, können wir den Funktor $F : \mathrm{MP}_{X,Y} \to \mathrm{MP}_{Y,X}$ definieren:

$$\left(X \xleftarrow{\pi_X} Q \xrightarrow{\pi_Y} Y \right) \longmapsto \left(Y \xleftarrow{\pi_Y} Q \xrightarrow{\pi_X} X \right)$$

$$\left(\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "f"] & \\ X & & Y \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \right) \longmapsto \left(\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "f"] & \\ Y & & X \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \right)$$

Den zu F quasi-inversen Funktor $G : \mathrm{MP}_{Y,X} \to \mathrm{MP}_{X,Y}$ definieren wir genau spiegelverkehrt zu F. Wie man leicht nachprüft, ergeben F und G eine Äquivalenz von $\mathrm{MP}_{X,Y}$ und $\mathrm{MP}_{Y,X}$ wobei die natürlichen Transformationen zwischen F und G nur aus den Identitätsmorphismen bestehen.

Ein initiales Objekt in $\mathrm{MP}_{X,Y}$ ist ein Produkt von X und Y, ein initiales Objekt in $\mathrm{MP}_{Y,X}$ ein Produkt von Y und X. Mit Teilaufgabe a) folgt, dass ein Produkt von X und Y auch ein Produkt von Y und X ist und umgekehrt.

Aufgabe 3:

Wähle für jeden endlichdimensionalen Vektorraum V eine feste Basis $(b_1, \dots, b_{\dim V})$ und definiere das Koordinatensystem η_V bezüglich dieser Basis durch die Setzung

$$\eta_V : \mathbb{R}^{\dim V} \to V,\ e_i \mapsto b_i.$$

Zwischen der Numerikerkategorie $\mathcal{C}$ und der $\mathbb{R}-\mathrm{Vect}_{\mathrm{FD}}$ verlaufen die Funktoren

$$\begin{array}{rrcl} F & : \qquad \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\mathrm{Vect}_{\mathrm{FD}} \\ & \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R}^n \\ & M \in \mathbb{R}^{m\times n} & \longmapsto & \text{die von der Matrix } M \text{ dargestellte lineare Abbildung} \\ & & & \text{zwischen } \mathbb{R}^n \text{ und } \mathbb{R}^m \text{ bezüglich der kanonischen Basen} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} G & : \qquad \mathbb{R}-\mathrm{Vect}_{\mathrm{FD}} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & V & \longmapsto & \mathbb{R}^{\dim V} \\ & (f : V \to W) & \longmapsto & \eta_W^{-1} \circ f \circ \eta_V \text{ (bzw. die Matrix dieser Abbildung)} \end{array}$$

Diese Funktoren bilden eine Äquivalenz zwischen den beiden Kategorien, da folgende Natürlichkeitsdiagramme für alle $(V \xrightarrow{f} W) \in \mathbb{R}-\mathrm{Vect}_{\mathrm{FD}}$ bzw. $(\mathbb{R}^n \xrightarrow{M} \mathbb{R}^m) \in \mathcal{C}$ offensichtlicherweise kommutieren:

$$\begin{tikzcd} GFV \arrow[r, "GFM=\eta_W^{-1}\circ M\circ\eta_V"] \arrow[d, "\eta_V"] & GFW \arrow[d, "\eta_W"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "M"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FGV \arrow[r, "FGf=\eta_W^{-1}\circ f\circ\eta_V"] \arrow[d, "\eta_V"] & FGW \arrow[d, "\eta_W"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

Projektaufgabe:

Wir haben einen Morphismus $\varphi : A \to B$ gegeben und wollen eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, A) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, B)$ finden, d.h. es muss für alle $f : Y \to X$ aus $\mathcal{C}$ das Natürlichkeitsdiagramm kommutieren:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \arrow[r, "g\ \mapsto\ g\circ f"] \arrow[d, "\eta_X"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B) \arrow[r, "g\ \mapsto\ g\circ f"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, B) \end{tikzcd}$$

Wir setzen $\eta_Z := (g \mapsto \phi\circ g)$. Wenn wir nun einen Morphismus $p : X \to A$ im Diagramm von oben links nach unten rechts verfolgen, erhalten wir einerseits $((\varphi \circ p) \circ f)$ und andererseits $(\varphi \circ (p \circ f))$. Aufgrund der Assoziativität der Verknüpfung von Morphismen sind diese Ergebnisse gleich und das Diagramm kommutiert wie gewünscht.