Universität Augsburg
3. April 2013

Pizzaseminar zur Kategorientheorie
5. Übungsblatt

Aufgabe 1. *Spitze schon im Diagramm*

Sei $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein Diagramm in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Besitze $\mathcal{D}$ ein terminales Objekt T. Zeige per Hand oder mit dem Kriterium aus Aufgabe 4, dass dann schon $F(T)$ selbst zu einem Kolimes von F wird.

Aufgabe 2. *Polynome und Potenzreihen*

Sei K ein Körper und sei $K[X]_n$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten in K. Bearbeite eine der folgenden Teilaufgaben:

a) Zeige, dass der Vektorraum $K[X]$ zu einem Kolimes des Diagramms

$$K[X]_0 \hookrightarrow K[X]_1 \hookrightarrow K[X]_2 \hookrightarrow \cdots$$

wird. Die Morphismen sind jeweils die Inklusionsabbildungen.

b) Zeige, dass der Vektorraum $K[\![X]\!] := \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid a_0, a_1, \ldots \in K\}$ der formalen Potenzreihen in K zu einem Limes des Diagramms

$$\cdots \twoheadrightarrow K[X]_2 \twoheadrightarrow K[X]_1 \twoheadrightarrow K[X]_0$$

wird. Die Morphismen schneiden jeweils den höchsten Koeffizienten ab.

Aufgabe 3. *Monomorphe natürliche Transformationen*

a) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus einer Kategorie. Zeige, dass f genau dann ein Monomorphismus ist, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

ein Faserproduktdiagramm ist (Definition im Skript).

b) Sei $\eta : F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Besitze $\mathcal{D}$ alle Faserprodukte. Zeige: η ist genau dann ein Monomorphismus in $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, wenn alle Komponenten η_X Monomorphismen in $\mathcal{D}$ sind.

Tipp: Limiten in Funktorkategorien berechnet man objektweise, siehe Skript.

Aufgabe 4*. *Kofinale Unterdiagramme*

In der Analysis gibt es folgende Mottos: *Das Weglassen endlich vieler Folgeglieder ändert nicht das Konvergenzverhalten. Teilfolgen konvergenter Folgen konvergieren ebenfalls, und zwar gegen denselben Grenzwert.* Diese Mottos wollen wir auf (Ko-)Limiten in der Kategorientheorie übertragen.

Sei dazu $H : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}$ ein *kofinaler* Funktor (Definition im Skript) und $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein $\mathcal{D}$-förmiges Diagramm in einer Kategorie $\mathcal{C}$.

a) Zeige: Die Kategorie der Kokegel von F ist äquivalent zur Kategorie der Kokegel von $F \circ H$.

b) Was folgt daher über das Verhältnis der Kolimiten von F und $F \circ H$?