

## Pizzaseminar zur Kategorientheorie 6. Übungsblatt

### Aufgabe 1. Das Yoneda-Lemma

Sei  $\mathcal{C}$  eine lokal kleine Kategorie und  $\widehat{\mathcal{C}} := \text{Funct}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Set})$  ihre Prägarbenkategorie. Wir wollen in mehreren Schritten das *Yoneda-Lemma* beweisen, demnach wir eine in  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  und  $F \in \widehat{\mathcal{C}}$  natürliche Bijektion

$$\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X), F) \cong F(X) \quad (1)$$

haben. Mit  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X)$  ist der kontravariante Hom-Funktor zu  $X$  bezeichnet, den wir auch  $\widehat{X}$  geschrieben haben.

- a) Zeige, dass eine natürliche Transformation  $\eta : \text{Hom}(\_, X) \Rightarrow F$  durch ihren Wert  $s := \eta_X(\text{id}_X) \in F(X)$  bereits eindeutig festgelegt ist, und zwar über die Formel

$$\eta_Y(f) = F(f)(s) \quad (2)$$

für alle Objekte  $Y$  und Morphismen  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ .

- b) Zeige, dass umgekehrt für beliebiges  $s \in F(X)$  die Formel (2) eine natürliche Transformation  $\eta : \text{Hom}(\_, X) \Rightarrow F$  definiert.  
c) Zeige mit a) und b), dass zumindest für festes  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  und  $F \in \widehat{\mathcal{C}}$  eine Bijektion (1) existiert.  
d) Linke und rechte Seite von (1) können als Auswertungen der Funktoren

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \widehat{\mathcal{C}} &\longrightarrow \text{Set}, & (X, F) &\longmapsto \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X), F) \\ R : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \widehat{\mathcal{C}} &\longrightarrow \text{Set}, & (X, F) &\longmapsto F(X) \end{aligned}$$

an der Stelle  $(X, F)$  angesehen werden. Überlege, wie diese beiden Funktoren auf Morphismen wirken, und zeige, dass sie zueinander isomorph sind.

- e) Du hast soeben das Yoneda-Lemma bewiesen. Herzlichen Glückwunsch!

**Hier fehlen noch weitere und interessante Aufgaben. Werden nachgereicht!**