Pizzaseminar zur Kategorientheorie

10. März 2013

Warnung: Die vielen Beispiele, Erklärungen und Hintergründe fehlen bislang.

Inhaltsverzeichnis

1 Was sollen Kategorien?

Ingo Blechschmidt

1.1 Beispiele für kategorielles Verständnis

Beispiel: Produkte

Von manchen Konstruktionen in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik wird man das Gefühl nicht los, dass sie einem gemeinsamen Ursprung entstammen: Etwa kennt man...

- das kartesische Produkt von Mengen: $X \times Y$,
- das kartesische Produkt von Vektorräumen: $V \times W$,
- das kartesische Produkt von Gruppen: $G \times H$,
- das kartesische Produkt von Garben: $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$,
- das kartesische Produkt von Vektorbündeln: $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$,
- das Minimum von Zahlen: $\min\{n, m\}$,
- den größten gemeinsamen Teiler von Zahlen: $\mathrm{ggT}(n, m)$,
- den Paartyp in Programmiersprachen: `(a,b)`,
- den Mutterknoten zweier Knoten in einem Graph.

Die Ähnlichkeit untereinander ist mal mehr, mal weniger deutlich. Nur mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Produkts.* Ferner erfüllen all diese Konstruktionen sehr ähnliche Gesetze, etwa gilt

$$\begin{aligned} X \times (Y \times Z) &\cong (X \times Y) \times Z, \\ U \times (V \times W) &\cong (U \times V) \times W, \\ \min\{m, \min\{n, p\}\} &= \min\{\min\{m, n\}, p\}, \\ \mathrm{ggT}(m, \mathrm{ggT}(n, p)) &= \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(m, n), p), \end{aligned}$$

wobei in der ersten Zeile X, Y und Z Mengen sein und das Isomorphiezeichen für Gleichmächtigkeit stehen soll und in der zweiten Zeile U, V und W Vektorräume sein und das Isomorphiezeichen für Vektorraumisomorphie stehen soll. Mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle der allgemeinen Assoziativität des kategoriellen Produkts.

Beispiel: Isomorphie

Ferner fällt auf, dass in vielen Teilgebieten der Mathematik jeweils ein speziell zugeschnittener Isomorphiebegriff vorkommt: Etwa können...

- zwei Mengen X, Y gleichmächtig sein,
- zwei Vektorräume V, W isomorph sein,
- zwei Gruppen G, H isomorph sein,
- zwei top. Räume X, Y homöomorph sein,
- zwei Zahlen n, m gleich sein,
- zwei Typen `a`, `b` sich verlustfrei ineinander umwandeln lassen.

All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Isomorphiekonzepts.*

Beispiel: Dualität

Von folgenden Konzepten hat man im Gefühl, dass sie in einem gewissen Sinn *zueinander dual* sein sollten:

$f \circ g$	$g \circ f$
$\leq$	$\geq$
injektiv	surjektiv
$\{\star\}$	$\emptyset$
$\times$	$\amalg$
ggT	kgV
$\cap$	$\cup$
Teilmenge	Faktormenge

Mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle eines allgemeinen *kategoriellen Dualitätsprinzips* – und diese Erkenntnis kann man nutzen, um Ergebnisse für jeweils eines der Konzepte auf sein duales Gegenstück zu übertragen.

1.2 Grundlagen

Definition 1.1. Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus

a) einer Klasse von *Objekten* $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$,

b) zu je zwei Objekten $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ einer Klasse $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von *Morphismen* zwischen ihnen und

c) einer Kompositionsvorschrift:

$$\begin{array}{rl} \text{zu} & f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ \text{und} & g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \\ \text{habe} & g \circ f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{zu} & f : X \to Y \\ \text{und} & g : Y \to Z \\ \text{habe} & g \circ f : X \to Z, \end{array}$$

sodass

a) die Komposition $\circ$ assoziativ ist und

b) es zu jedem $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ einen *Identitätsmorphismus* $\mathrm{id}_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ mit

$$f \circ \mathrm{id}_X = f, \quad \mathrm{id}_X \circ g = g$$

für alle Morphismen f, g gibt.

Die Morphismen von Kategorien müssen nicht unbedingt Abbildungen sein, die Schreibweise „$f : X \to Y$“ missbraucht also Notation. Die genaue Bedeutung von *Klassen* im Gegensatz zu *Mengen* hängt von der persönlich gewählten logischen Fundierung der Mathematik ab. Für uns genügt folgende naive Sichtweise: Klassen können (im Gegensatz zu Mengen) beliebige mathematische Objekte enthalten, sind aber selbst nicht mathematische Objekte. Daher gibt es etwa widerspruchsfrei die Klasse aller Mengen, von einer Klasse aller Klassen kann man aber nicht sprechen.

Beispiel 1.2. a) Archetypisches Beispiel ist Set, die Kategorie der Mengen und Abbildungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob}\mathrm{Set} &:= \{M \mid M \text{ ist eine Menge}\} \\ \operatorname{Hom}_{\mathrm{Set}}(X, Y) &:= \{f : X \to Y \mid f \text{ ist eine Abbildung}\} \end{aligned}$$

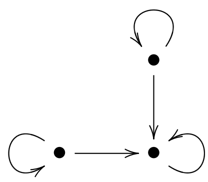
b) Die meisten Teilgebiete der Mathematik studieren jeweils eine bestimmte Kategorie: Gruppentheoretiker beschäftigen sich etwa mit der Kategorie Grp der Gruppen und Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob}\mathrm{Grp} &:= \text{Klasse aller Gruppen} \\ \operatorname{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G, H) &:= \{f : G \to H \mid f \text{ ist ein Gruppenhomo}\} \end{aligned}$$

c) Es gibt aber auch wesentlich kleinere Kategorien. Etwa kann man aus jeder Quasiordnung $(P, \preceq)$ eine Kategorie $\mathcal{C}$ basteln:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob} \mathcal{C} &:= P \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) &:= \begin{cases} \text{einelementige Menge,} & \text{falls } x \preceq y, \\ \text{leere Menge,} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

d) Auch sind gewisse endliche Kategorien bedeutsam, etwa die durch folgende Skizze gegebene:



Motto 1.3 (fundamental)**.** *Kategorientheorie stellt* Beziehungen zwischen Objekten *statt etwaiger innerer Struktur in den Vordergrund.*

Initiale und terminale Objekte

In Kategorien sind folgende zwei Arten von Objekten aufgrund ihrer ausgezeichneten Beziehungen zu allen (anderen) Objekten besonders wichtig:

Definition 1.4. Ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *initial*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C} \colon \exists! f : X \to Y.$$

- *terminal*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C} \colon \exists! f : Y \to X.$$

Diese Definitionen geben ein erstes Beispiel für sog. *universellen Eigenschaften.*

Beispiel 1.5. a) In der Kategorie der Mengen ist genau die leere Menge initial und genau jede einelementige Menge terminal. Diese Erkenntnis ist ein erstes Beispiel dafür, wie das fundamentale Motto gemeint ist: Eine Definition der leeren bzw. einer einelementigen Menge über eine Aufzählung ihrer Elemente betont ihre innere Struktur, während eine Definition als initiales bzw. terminales Objekt die besonderen Beziehungen zu allen Mengen hervorhebt.

b) In der Kategorie der K-Vektorräume ist der Nullvektorraum K^0 initial und terminal.

c) Viele kategorielle Konstruktionen realisiert man als initiales oder terminales Objekt in einer geeigneten Kategorie von Möchtegern-Konstruktionen. Ein erstes Beispiel dazu werden wir im folgenden Kapitel über Produkte finden.

Mono-, Epi- und Isomorphismen

Definition 1.6. Ein Morphismus $f : X \to Y$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *Monomorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $p, q : A \to X$ gilt:

$$f \circ p = f \circ q \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$

- *Epimorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $p, q : Y \to A$ gilt:

$$p \circ f = q \circ f \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$

Beispiel 1.7. a) In den Kategorien der Mengen, Gruppen und K-Vektorräumen sind die Monomorphismen genau die injektiven und die Epimorphismen genau die surjektiven Abbildungen. Das ist jeweils eine interessante Erkenntnis über die Struktur dieser Kategorien und nicht ganz leicht zu zeigen.

b) In der Kategorie der metrischen Räume mit stetigen Abbildungen gibt es Epimorphismen, die nicht surjektiv sind: nämlich alle stetigen Abbildungen mit dichtem Bild.

Definition 1.8. Ein *Isomorphismus* $f : X \to Y$ in einer Kategorie ist ein Morphismus, zu dem es einen Morphismus $g : Y \to X$ mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

gibt. Statt „g“ schreibt man auch „f^{-1}“. Existiert zwischen Objekten X und Y ein Isomorphismus, so heißen die Objekte *zueinander isomorph*: $X \cong Y$.

Die duale Kategorie

Definition 1.9. Die zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ zugehörige *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist folgende:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob}\mathcal{C}^{\mathrm{op}} &:= \operatorname{Ob}\mathcal{C} \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) &:= \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \end{aligned}$$

Beispiel 1.10. a) Ein initiales Objekt in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist ein terminales Objekt in $\mathcal{C}$ und umgekehrt.

b) Ein Epimorphismus in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$ und umgekehrt.

c) Zwei Objekte sind genau dann in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ zueinander isomorph, wenn sie es in $\mathcal{C}$ sind.

2 Produkte und Koprodukte

Matthias Hutzler

Definition 2.1. Seien X, Y Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$. Dann besteht ein *Produkt* von X und Y aus

a) einem Objekt $P \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und

b) Morphismen $\pi_X : P \to X$, $\pi_Y : P \to Y$,

sodass für jedes andere *Möchtegern-Produkt*, also

a) jedem Objekt $\widetilde{P} \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ zusammen mit

b) Morphismen $\widetilde{\pi}_X : \widetilde{P} \to X$, $\widetilde{\pi}_Y : \widetilde{P} \to Y$

genau ein Morphismus $\psi : \widetilde{P} \to P$ existiert, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{P} \arrow[dl, "\widetilde{\pi}_X"'] \arrow[dr, "\widetilde{\pi}_Y"] \arrow[dd, dashed, "\psi"'] & \\ X & & Y \\ & P \arrow[ul, "\pi_X"] \arrow[ur, "\pi_Y"'] & \end{tikzcd}$$

kommutieren lässt, also die Gleichungen

$$\pi_X \circ \psi = \widetilde{\pi}_X$$
$$\pi_Y \circ \psi = \widetilde{\pi}_Y$$

erfüllt.

Motto 2.2. *Ein Produkt ist ein bestes Möchtegern-Produkt.*

Analog definiert man das Produkt von n Objekten, $n \geq 0$; und dual definiert man das Koprodukt.

Beispiel 2.3. a) Das Produkt in der Kategorie der Mengen ist durch das kartesische Produkt gegeben, das Koprodukt durch die disjunkt-gemachte Vereinigung.

b) Das Produkt in der Kategorie der Gruppen ist durch das direkte Produkt mit der komponentenweisen Verknüpfung gegeben, das Koprodukt durch das sog. freie Produkt von Gruppen.

c) Produkt und Koprodukt endlich vieler Objekte in der Kategorie der K-Vektorräume sind durch die äußere direkte Summe gegeben. Produkte und Koprodukte von unendlich vielen Objekten unterscheiden sich allerdings.

d) Das Produkt in der von einer Quasiordnung induzierten Kategorie ist durch das Infimum gegeben, siehe Aufgabe 3 von Übungsblatt 2. Dual ist das Koprodukt durchs Supremum gegeben.

Proposition 2.4. *Die Objektteile je zweier Produkte von Objekten X, Y sind zueinander isomorph.*

Bemerkung 2.5. Es gilt sogar noch mehr, siehe Aufgabe 2 von Übungsblatt 2.

Proposition 2.6. *Die Angabe eines Produkts von X und Y ist gleichwertig mit der Angabe eines Produkts von Y und X.*

Proposition 2.7. *Die Angabe eines Produkts von null vielen Objekten ist gleichwertig mit der Angabe eines terminalen Objekts.*