

Pizzaseminar zur Kategorientheorie

5. April 2013

in Entstehung befindlich

TEXer: Tim Baumann, Ingo Blechschmidt, Justin Gassner, Lukas Graf, Maximilian Huber, Matthias Hutzler

Inhaltsverzeichnis

1	Limiten und Kolimiten	1
1.1	Beispiele für Limiten	3
1.2	Kofinale Unterdiagramme	5
2	Das Yoneda-Lemma	5
3	Adjungierte Funktoren	5

1 Limiten und Kolimiten

Kathrin Gimmi

Werbung: Wir verstehen, was allgemeine Limiten und Kolimiten von Diagrammen sind. Dazu wird es viele Beispiele geben, unter anderem die uns schon bekannten Produkte und Koproducte. Speziell sind sog. filtrierte Kolimiten wichtig, da diese in der täglichen Praxis oft vorkommen und besonders schöne Eigenschaften haben. Abschließend werden wir die Frage diskutieren, wie man Kategorien, denen es an Limiten oder Kolimiten mangelt, vervollständigen kann.

In diesem Abschnitt wollen wir Funktoren $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ auch als (\mathcal{I} -förmige) Diagramme bezeichnen.

Definition 1.1. Ein *Kegel* eines Diagramms $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ besteht aus

- a) einem Objekt $K \in \text{Ob } \mathcal{C}$ (der sog. *Kegelspitze*) zusammen mit
- b) jeweils einem Morphismus $\pi_i : K \rightarrow F(i)$ für jedes Objekt $i \in \text{Ob } \mathcal{I}$,

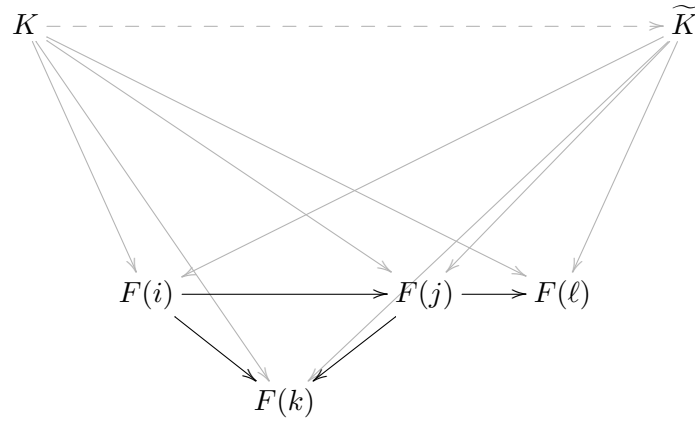


Abbildung 1: Zwei Kegel und ein Kegelmorphismus zwischen ihnen.

sodass für alle Morphismen $f : i \rightarrow j$ in \mathcal{I} die Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} & K & \\ \pi_i \swarrow & & \searrow \pi_j \\ F(i) & \xrightarrow{F(f)} & F(j) \end{array}$$

kommutieren.

Die Notation etwas missbrauchend werden Kegel oft nur nach ihrer Kegelspitze genannt, obwohl die Morphismen π_i mit zum Datum gehören. Die Morphismen π_i werden manchmal als Projektionsmorphismen bezeichnet, der Grund dafür wird beim ersten Beispiel klar werden.

Definition 1.2. Ein *Morphismus von Kegeln* $K \rightarrow \widetilde{K}$ eines Diagramms F besteht aus einem Morphismus der Kegelspitzen $\psi : K \rightarrow \widetilde{K}$ in \mathcal{C} sodass

für alle $i \in \text{Ob } \mathcal{I}$ die Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\psi} & \widetilde{K} \\ \pi_i \searrow & & \swarrow \widetilde{\pi}_i \\ & F(i) & \end{array}$$

kommutieren.

Abbildung 1 erklärt die Herkunft des Begriffs „Kegel“.

Kegelmorphismen kann man auf die offensichtliche Art und Weise miteinander verketten (einfach die Morphismen der Kegelspitzen verketten). Daher ist es sinnvoll, von der *Kategorie der Kegel* zu einem festen Diagramm $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ zu sprechen. Terminale Objekte dieser Kategorie haben einen besonderen Namen:

Definition 1.3. Ein *Limes* eines Diagramms $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ist ein terminales Objekt in der Kategorie der Kegel zu F .

Da allgemein terminale Objekte einer Kategorie bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig sind (siehe Aufgabe 2 von Übungsblatt 2), folgt sofort folgende Beobachtung:

Proposition 1.4. *Limiten sind bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig. Die Kegelspitzen von Limiten sind zumindest bis auf Isomorphie eindeutig.*

Für ein anschauliches Verständnis von Limiten sind zwei Mottos wichtig:

Motto 1.5. *Ein Limes eines Diagramms ist ein bestes (größtmöglichstes) Objekt, welches das Diagramm zu einem Kegel ergänzt.*

Größtmöglich ist dabei nicht im wörtlichen Sinn, wie er etwa in der Kategorie der Mengen vorstellbar ist, zu interpretieren, sondern nur so zu verstehen, als dass jeder andere Kegel (Möchtegern-Limes) einen Morphismus in den Limes hinein besitzt.

Motto 1.6. *Ein Limes subsumiert das gesamte Diagramm zu einem einzelnen Objekt (der Kegelspitze) – zumindest, was Morphismen in das Diagramm hinein angeht.*

Das ist so verstehen: Immer, wenn man einen Morphismus aus einem Objekt \widetilde{K} „in das Diagramm hinein“ gegeben hat (d. h. einen Kegel des Diagramms gegeben hat), induziert die universelle Eigenschaft einen Morphismus aus \widetilde{K} in den Limes. Umgekehrt kann man aus jedem solchen Morphismus durch Nachschaltung der Projektionen einen Kegel erhalten. Dieses Motto werden wir sogar formal beweisen können: siehe Proposition ??.

1.1 Beispiele für Limiten

Produkte

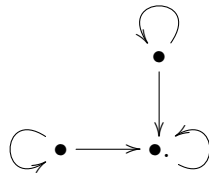
Sei speziell $\mathcal{I} = \mathbf{2}$ die Kategorie mit genau zwei Objekten und nur den Identitätsmorphis-



Dann sind Diagramme $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ einfach durch die Angabe zweier Objekte von \mathcal{C} gegeben. Kegel solcher Diagramme haben wir früher schon untersucht: unter dem Namen *Möchtegern-Produkte*. Entsprechend sind Limiten solcher Diagramme schlichtweg Produkte.

Faserprodukte (Pullbacks)

Sei speziell \mathcal{I} die Kategorie



Limiten von \mathcal{I} -förmigen Diagrammen werden auch *Faserprodukte* genannt und konventionsmäßig gerne als sog. *Faserprodukt*- oder *Pullbackdiagramm* skizziert:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Dabei steht die Kegelspitze des Limes oben links. Der dritte Projektionsmorphismus (auf Z) ist nicht eingezeichnet, da er sowieso gleich der Komposition des Wegs über X (oder über Y) sein muss.

In der Kategorie der Mengen kann das Faserprodukt durch die Konstruktion

$$X \times_Z Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\} \subseteq X \times Y$$

gegeben werden.

Man hat zwei verschiedene Vorstellungen des Faserprodukts, die unterschiedliche Aspekte betonen: Zum einen bilden die Objekte X und Y die Ausgangsbasis. Dann stellt man als Faserprodukt das Objekt $X \times_Z Y$ vor und sieht es als eine Art „verallgemeinertes Produkt“ an.

Zum anderen kann man sich aber auch den Morphismus g als Ausgangspunkt vorstellen. Als Ergebnis betont man dann nicht das Objekt $X \times_Z Y$ alleine, sondern den Morphismus $X \times_Z Y \rightarrow X$. Diesen bezeichnet man dann auch als *Rückzug* (*Pullback*) von g längs f oder *Basiswechsel* von g nach X .

Beispiel 1.7. Sei $g : Y \rightarrow Z$ eine Abbildung von Mengen. Sei $U \subseteq Y$ eine Teilmenge. Dann passt das Urbild $g^{-1}[U]$ in ein Pullbackdiagramm:

$$\begin{array}{ccc} g^{-1}[U] & \hookrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ U & \hookrightarrow & Z \end{array}$$

Dieser Standpunkt wird unter anderem in der algebraischen Geometrie verwendet. Da sind dann *Stabilitätsaussagen* wichtig: Hat ein Morphismus eine bestimmte Eigenschaft, so hat sein Rückzug längs Morphismen einer bestimmten Klasse dieselbe Eigenschaft.

Beispiel 1.8. Sei ein Pullbackdiagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{f'} & Y \\ g' \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

in einer beliebigen Kategorie gegeben. Wenn g ein Monomorphismus ist, dann auch g' . Man sagt: *Monomorphismen sind unter Rückzug stabil*.

Bemerkung 1.9. Es ist etwas besonderes, wenn auch Epimorphismen unter Rückzug stabil sind. Das ist etwa in der Kategorie der Mengen und allen abelschen Kategorien der Fall.

1.2 Kofinale Unterdiagramme

Definition 1.10. Wir nennen einen Funktor $H : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ genau dann *kofinal*, wenn für alle $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$...

1. ein Objekt $d_0 \in \text{Ob } \mathcal{D}_0$ und ein Morphismus $d \rightarrow H(d_0)$ in \mathcal{D} existiert und
2. für je zwei solcher Morphismen ein Objekt $\tilde{d}_0 \in \text{Ob } \mathcal{D}_0$ und Morphismen $d_0 \rightarrow \tilde{d}_0$, $d'_0 \rightarrow \tilde{d}_0$ existieren, deren Bilder unter H das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} d_0 & \longrightarrow & H(d_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(d'_0) & \dashrightarrow & H(\tilde{d}_0) \end{array}$$

kommutieren lassen.

Etwa ist der Inklusionsfunktor $B(2\mathbb{N}) \rightarrow B(\mathbb{N})$ kofinal, wenn \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen mit ihrer gewöhnlichen Ordnung und $2\mathbb{N}$ die Teilordnung der geraden Zahlen bezeichnet.

2 Das Yoneda-Lemma

Justin Gassner

Werbung: Wir werden das fundamentale Yoneda-Lemma und seine Korollare verstehen. Dazu werden wir zunächst eine hilfreiche Intuition von sog. Prägarben auf Kategorien entwickeln und verstehen, welche Signifikanz die Darstellbarkeit von Prägarben hat. Dann können wir die Yoneda-Einbettung kennenlernen, ihre Eigenschaften studieren und sehen, wozu sie nützlich ist. Das fundamentale Motto der Kategorientheorie wird damit zu einem formalen Theorem.

3 Adjungierte Funktoren

Peter Uebele

Definition 3.1. Seien $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren. Genau dann heißt

- F links-adjungiert zu G bzw.
- G rechts-adjungiert zu F ,

in Zeichen: $F \dashv G$, wenn es eine in $X \in \mathcal{C}$ und $Y \in \mathcal{D}$ natürliche Isomorphie

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, GX)$$

gibt.

Dabei ist *natürlich* gemäß Bemerkung ?? zu verstehen: Linke und rechte Seiten der Isomorphie sind als Funktoren

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F_, _) : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathrm{Set} \\ (Y, X) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(_, G_) : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathrm{Set} \\ (Y, X) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, GX) \end{aligned}$$

zu verstehen. Die Natürlichkeitsbedingung bedeutet dann, dass für alle Morphismen $f : X \rightarrow X'$ in \mathcal{C} und $g : Y' \rightarrow Y$ in \mathcal{D} das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FY', X') \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, GX) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y', GX') \end{array}$$

kommutiert.

Literatur

- [1] J. C. Baez und M. Shulman. „Lectures on n -categories and cohomology“. In: *Towards Higher Categories*. Hrsg. von J. C. Baez und J. P. May. Bd. 152. IMA Vol. Math. Appl. Springer-Verlag, 2010, S. 1–68. URL: <http://math.ucr.edu/home/baez/cohomology.pdf>.
- [2] Die nLab-Beitragenden. *stuff, structure, property*. 2012. URL: <http://ncatlab.org/nlab/show/stuff,+structure,+property>.
- [3] J. v. Oosten. *Basic category theory*. 2002. URL: <http://www.staff.science.uu.nl/~ooste110/syllabi/catsmoeder.pdf>.
- [4] D. Spivak. *Categorical databases*. Vortragsfolien. 2012. URL: <http://math.mit.edu/~dspivak/informatics/talks/CTDBIntroductoryTalk>.

- [5] D. Spivak. „Functorial data migration“. In: *Inform. and Comput.* 217 (2012), S. 31–51. URL: <http://arxiv.org/abs/1009.1166>.
- [6] D. Spivak. „Simplicial databases“. 2009. URL: <http://arxiv.org/abs/0904.2012>.