Universität Augsburg
25. März 2013
Tim Baumann

Pizzaseminar zur Kategorientheorie

Lösung zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Wenn X isomorph zu Y ist, so gibt es Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Die Morphismen $F(f) : F(X) \to F(Y)$ und $F(g) : F(Y) \to F(X)$ sind zueinander invers, da aus den Funktoraxiomen

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$$

und analog $F(f) \circ F(g) = \mathrm{id}_{F(Y)}$ folgt. Somit ist $F(X)$ isomorph zu $F(Y)$.

Falls umgekehrt $F(X)$ isomorph zu $F(Y)$ ist, also Morphismen $f : F(X) \to F(Y)$ und $g : F(Y) \to F(X)$ existieren, die auf beide Arten miteinander verknüpft die Identität ergeben, und der Funktor F zusätzlich volltreu ist, so besitzen f und g eindeutig bestimmte Urbilder $\widetilde{f} : X \to Y$ und $\widetilde{g} : Y \to X$ mit $F(\widetilde{f}) = f$ und $F(\widetilde{g}) = g$ (die Existenz folgt dabei aus der Vollheit, die Eindeutigkeit aus der Treue von F). Da $F(\widetilde{g} \circ \widetilde{f}) = F(\widetilde{g}) \circ F(\widetilde{f}) = \mathrm{id}_{F(X)} = F(\mathrm{id}_X)$ gilt, also das Bild von $(\widetilde{g} \circ \widetilde{f})$ unter F gleich dem Bild von id_X ist, folgt aus der Treue von F, dass $\widetilde{g} \circ \widetilde{f} = \mathrm{id}_X$ ist. Parallel erhält man $\widetilde{f} \circ \widetilde{g} = \mathrm{id}_Y$. Da $\widetilde{f}$ und $\widetilde{g}$ zueinander invers sind, ist X isomorph zu Y.

Aufgabe 2:

Seien BP und BQ die aus den Quasiordnungen P und Q konstruierten Kategorien, deren Objekte die Elemente der jeweiligen Ordnungsrelation sind, und zwischen zwei Objekten a und b genau dann ein Morphismus „$a \leq b$“ existiert, wenn $a \leq b$ gilt und $f : P \to Q$ eine monotone Abbildung zwischen P und Q. Wir basteln einen Funktor F durch

$$\begin{array}{rcl} BP & \longrightarrow & BQ \\ x & \longmapsto & f(x) \\ „x \leq y“ & \longmapsto & „f(x) \sqsubseteq f(y)“ \end{array}$$

Wir müssen noch begründen, dass diese Definiton überhaupt Sinn ergibt, also der Morphismus „$f(x) \sqsubseteq f(y)$“ tatsächlich existiert, wenn „$x \leq y$“ existiert. Das ist klar, denn übertragen aus der Sprache der Kategorien entspricht dies der Eigenschaft von f, monoton zu sein.

Außerdem ist zu zeigen, dass die Funktoraxiome erfüllt sind. Wir machen folgende Beobachtung: In den Kategorien BP und BQ existiert zwischen zwei Objekten höchstens ein Morphismus. Dadurch sind alle Morphismen mit gleichem Start- und Zielobjekt bereits zueinander identisch und der einzige Morphismus von einem Objekt zu sich selbst ist der Identitätsmorphismus. Solche Kategorien werden auch als *dünn* bezeichnet. Damit können wir diesen Teil der Aufgabe sogar etwas allgemeiner begründen:

Satz. Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige und $\mathcal{D}$ eine dünne Kategorie und $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Zuordnung von Objekten in $\mathcal{C}$ zu Objekten in $\mathcal{D}$ und von Morphismen aus $\mathrm{Hom}(X, Y)$ zu Morphismen aus $\mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$. Dann ist G ein Funktor.

Beweis. Wir müssen die Funktoraxiome nachprüfen:

a) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$, da es nur einen Morphismus von $F(X)$ nach $F(X)$, nämlich den Identitätsmorphismus, gibt.

b) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Morphismen aus C. Da die Morphismen $F(g \circ f)$ und $F(g) \circ F(f)$ beide von $F(X)$ nach $F(Z)$ laufen, sind sie bereits identisch. $\square$

Aufgabe 3:

a) Potenzfunktor $P : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$, $M \mapsto \mathcal{P}(M)$, $f \mapsto f[\cdot]$

treu:	✓	
voll:	✗	Hinweis: Betrachte $f : \mathcal{P}(\{\star\}) \to \mathcal{P}(\{\star\})$, $p \mapsto \varnothing$
wes. surj.:	✗	Die leere Menge und allgemeiner alle Mengen, deren Kardinalität nicht Zweierpotenz ist, sind nicht zu einem Objekt im Bild von P isomorph.

b) Vergissfunktor $V : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$

treu:	✓	
voll:	✗	Nicht jede Abbildung zwischen Gruppen ist Gruppenhomomorphismus.
wes. surj.:	✗	Die leere Menge ist nicht zu einem Objekt im Bild von V isomorph, da jede Gruppe mindestens ein Element enthält.

c) Vergissfunktor $V : \mathrm{AbGrp} \to \mathrm{Grp}$

treu:	✓	
voll:	✓	$\mathrm{Hom}_{\mathrm{AbGrp}}(G, H) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G, H) = \{f : G \to H \mid f \text{ Gruppenhomo}\}$
wes. surj.:	✗	*Behauptung*: Die symmetrische Gruppe S_3 ist nicht zu einer abelschen Gruppe isomorph. *Beweis*: Angenommen, $f : S_3 \to G$ ist ein Gruppenisomorphismus und G eine abelsche Gruppe. Dann ist $f((1\ 2) \circ (2\ 3)) = f((1\ 2)) \circ f((2\ 3)) = f((2\ 3)) \circ f((1\ 2)) = f((2\ 3) \circ (1\ 2))$. Da aber $(1\ 2) \circ (2\ 3) \neq (2\ 3) \circ (1\ 2)$, ist dies ein Widerspruch zur Injektivität von f.

d) Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to H$ als Funktor $B\phi : BG \to BH$

treu:		genau dann, wenn ϕ injektiv ist
voll:		genau dann, wenn ϕ surjektiv ist
wes. surj.:	✓	Klar, da BH aus nur einem Objekt besteht.

Aufgabe 4:

Wir vervollständingen die Zuordnungszuschrift zu einer Funktordefinition:

$$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & X & \longmapsto & A \times X \\ & f & \longmapsto & \mathrm{id}_A \times f \end{array}$$

Dabei bezeichnen wir mit $(\mathrm{id}_A \times f)$ den eindeutig bestimmten Morphismus, der folgendes Diagramm kommutieren lässt (die Existenz und Eindeutigkeit folgen daraus, dass $(A \times X)$ Möchtegern-Produkt von A und Y ist):

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times X \arrow[ddl, bend right] \arrow[dr, bend left] \arrow[ddd, dashed, "\mathrm{id}_A \times f"] & \\
 & & X \arrow[d, "f"] \\
A & & Y \\
 & A \times Y \arrow[ul, bend left] \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}
$$

Bemerkung: In Set, Grp, AbGrp und $\mathbb{R}$-Vect ist $(\mathrm{id}_A \times f)$ definiert durch

$$
\begin{array}{rcl}
A \times X & \longrightarrow & A \times Y \\
(a, x) & \longmapsto & (a, f(x)).
\end{array}
$$

Wir müssen noch nachweisen, dass die Funktoraxiome erfüllt sind. Dazu betrachten wir zunächst folgendes Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times X \arrow[ddl, bend right, "p_A"'] \arrow[dr, bend left, "p_X"] \arrow[ddd, dashed] & \\
 & & X \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] \\
A & & X \\
 & A \times X \arrow[ul, bend left, "p_A"] \arrow[ur, bend right, "p_X"'] &
\end{tikzcd}
$$

Da $\mathrm{id}_{A \times X}$ obiges Diagramm kommutieren lässt, gilt $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_A \times \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{A \times X}$ (warum?).

Zum Nachweis des zweiten Funktoraxioms seien Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gegeben. Nach Definition lassen $\mathrm{id}_A \times f$ und $\mathrm{id}_A \times g$ folgendes Diagramm kommutieren:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times X \arrow[rr, dashed, "\mathrm{id}_A \times f"] \arrow[dl] \arrow[dr] & & A \times Y \arrow[rr, dashed, "\mathrm{id}_A \times g"] \arrow[dlll] \arrow[dr] & & A \times Z \arrow[dlllll] \arrow[dr] & \\
A & & X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[rr, "g"] & & Z
\end{tikzcd}
$$

Insbesondere kommutiert

$$\begin{tikzcd}
& A \times X \arrow[rr, dashed, "(\mathrm{id}_A \times g) \circ (\mathrm{id}_A \times f)"] \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & & A \times Z \arrow[dlll] \arrow[dr, bend left] & \\
A & & X \arrow[rr, "g \circ f"] & & Z
\end{tikzcd}$$

Nach Definition wird obiges Diagramm auch von $\mathrm{id}_A \times (g \circ f)$ anstelle von $(\mathrm{id}_A \times g) \circ (\mathrm{id}_A \times f)$ zum Kommutieren gebracht. Da $\mathrm{id}_A \times (g \circ f)$ aber eindeutig bestimmt ist, gilt die Gleichung

$$F(g) \circ F(f) = (\mathrm{id}_A \times g) \ \circ \ (\mathrm{id}_A \times f) = \mathrm{id}_A \times (g \circ f) = F(g \circ f).$$

Projektaufgabe:

Sei $m \in Hom_C(A, X)$ beliebig. Dann ist

$$(\mathrm{id}_X)_\star(m) = \mathrm{id}_X \circ m = m = \mathrm{id}_{Hom_C(A,X)}(m).$$

Da m beliebig war, gilt das erste Funktoraxiom $\breve{A}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\breve{A}(X)}$.

Für das zweite Funktoraxiom seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gegeben. Wir rechnen:

$$(g_\star \circ f_\star)(m) = g_\star(f \circ m) = g \circ (f \circ m) = (g \circ f) \circ m = (g \circ f)_\star(m)$$

Somit gilt wie gewünscht $\breve{A}(g) \circ \breve{A}(f) = \breve{A}(g \circ f)$.

$$F()$$