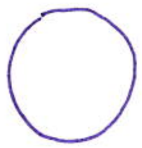
Knotentheorie

4. 9. 2013

Stefan Knoblauch

(1)

1. Knoten
2. Äquivalenz von Knoten
3. Fundamentalgruppe



Unknoten

Kleeblattknoten

Beispiele

1. Def: Knoten

Ein Knoten ist eine einfache, geschlossene Kurve, also

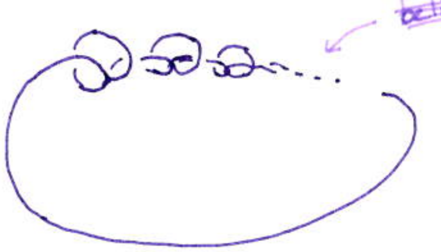
$k : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ stetig

$k(0) = k(1)$ (geschlossen)

$k(x) = k(y) \Rightarrow x = y \vee (x=0 \wedge y=1) \vee (x=1 \wedge y=0)$

„wilder Knoten":

unendlich ~~beliebig~~ viele Schleifen



2. Def: Knoten

stetig differenzierbar

3. Sei $(p_1, \dots, p_n)$ $p_i \in \mathbb{R}^3 \; \forall i \in \{1, \dots, n\}$,

dann heißt die Vereinigung von den Strecken

$[p_1, p_2], [p_2, p_3], \dots, [p_{n-1}, p_n], [p_n, p_1]$ $:= \{p_n + (p_1 - p_n)t, \; t \in [0,1]\}$

geschlossener Polygonzug.

Ein Knoten ist ein einfacher geschlossener Polygonzug.

Unknoten

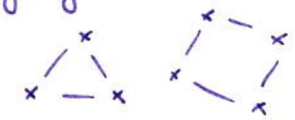
Kleeblatt

parametrischer Knoten

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

$p_1 \; p_2 \; \ldots \; p_n$

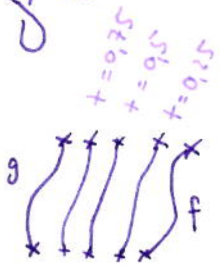
Def: Verschlingung



(trivialer Fall)

Äquivalenz

Def Homotopie



$(X, d_1), (Y, d_2)$ metrische Räume

$$f, g : X \to Y$$

$$h : X \times [0,1] \to Y \text{ stetig}$$ Homotopie

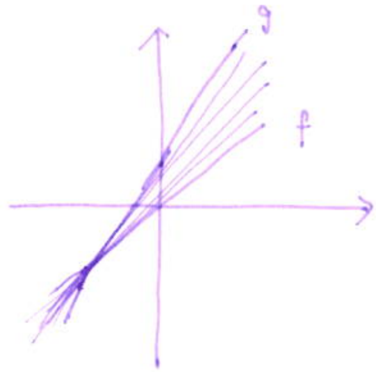
mit $h(-,0) = f \wedge h(-,1) = g$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto 2x + 1$

$h : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$(x, t) \mapsto (1+t)x + t$



$K, J : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$K \sim J \iff \exists \, H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$

mit $H(-,0) = K$

$H(-,1) = J$ Homotopie

$H(-,t)$ Knoten $\forall t \in [0,1]$

Reflexivität:

$K \sim K$ $\quad H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$(x, -) \mapsto K(x)$

Symmetrie:

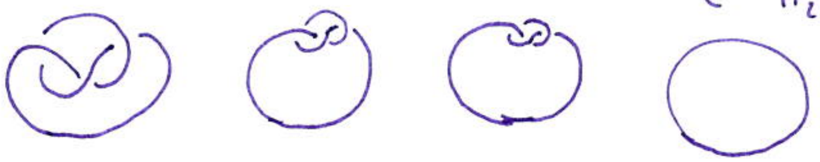
$$J \overset{H_{alt}}{\sim} K \qquad K \overset{H_{neu}}{\sim} J \qquad H_{neu}(x,t) := H_{alt}(x, 1-t)$$

Transitivität:

$$K \overset{H_1}{\sim} J \qquad J \overset{H_2}{\sim} L$$

$$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H_1(x, 2t) & , 0 \le t \le 0{,}5 \\ H_2(x, 2t-1) & , 0{,}5 \le t \le 1 \end{cases}$$



$t=0$ $\quad$ $t=0{,}3$ $\quad$ $t=0{,}8$ $\quad$ $t=1$

wären jetzt äquivalent

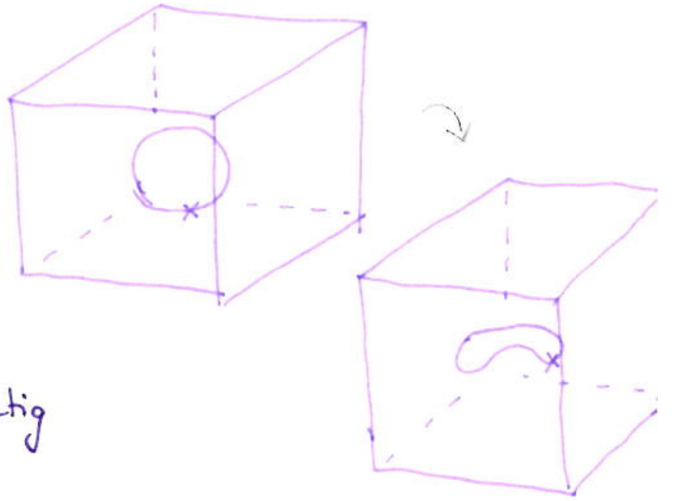
$$K \sim J \iff \exists\, H : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

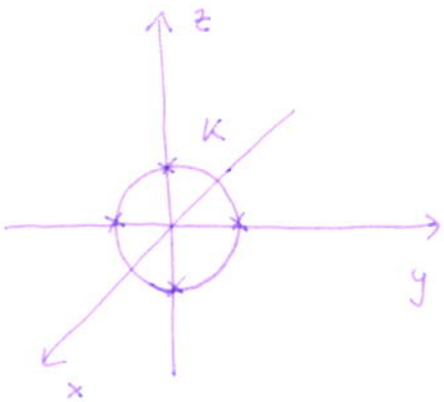
$$H(-,0) = id$$

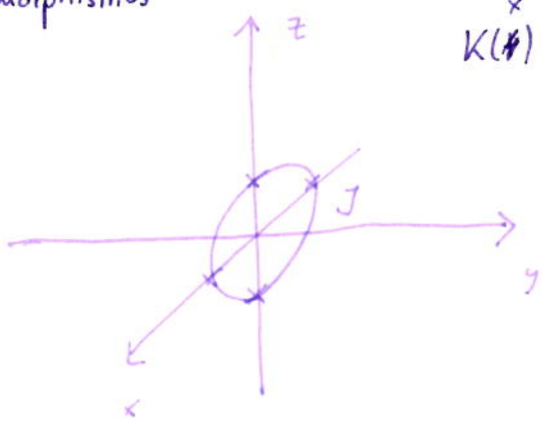
$$H(K(x),1) = J(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

$$H(-,t) \text{ bij., stetig}$$

$$\underbrace{\text{und } H^{-1}(-,t) \text{ stetig}}_{\text{Homöomorphismus}}$$







$$K(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\pi x) \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix}$$

$$J(x) := \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) \\ 0 \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix}$$

$$H\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t\right) := \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) & \sin(\frac{\pi}{2}t) & 0 \\ -\sin(\frac{\pi}{2}t) & \cos(\frac{\pi}{2}t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$H(K(x),1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K(x) \overset{!}{=} J(x)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) \\ 0 \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix}$$

$P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$P[K]$ Knoten

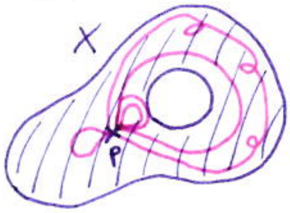
reguläre Position

→ je nur 2 Punkte des Knotens haben das selbe Bild

→ kein Eckpunkt darf auf einen Punkt abgebildet werden, auf den ein anderer Punkt abgebildet wurde

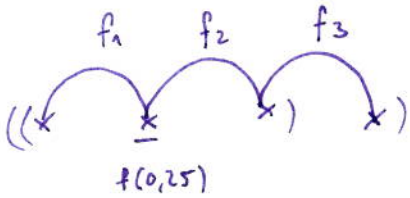
$\Omega(X,p) = \{$ Kurven $k : [0,1] \to X$ mit $k(0) = k(1) = p \}$

(X,d), $p \in X$

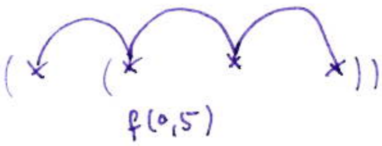


Sei $f, g : [0,1] \to X$

$$(f \star g)(t) := \begin{cases} f(2t) & , \; 0 \le t \le 0{,}5 \\ g(2t-1) & , \; 0{,}5 \le t \le 1 \end{cases}$$



$f = (f_1 \star f_2) \star f_3$



$f = f_1 \star (f_2 \star f_3)$

$K \sim J \iff K$ homotop zu J mit festem Endpunkt

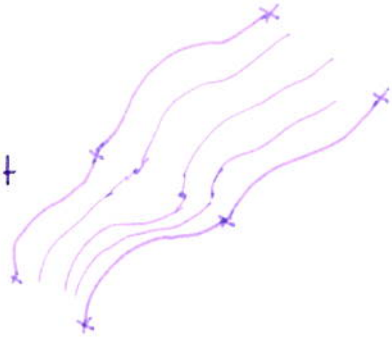
$\Omega(X,p) / \sim =: \pi_1(X,p)$

$\iff \exists \; H : [0,1] \times [0,1] \to X$ stetig

mit $H(-,0) = K$

$H(-,1) = J$

$H(0,t) = H(1,t) = p \quad \forall t$



$\star : \pi_1(X,p) \times \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,p),$

$([a],[b]) \mapsto [a \circ b]$

Sei $a, a', b, b' \in \Omega(X,p)$ und gelte $a \overset{H_1}{\sim} a'$ und $b \overset{H_2}{\sim} b'$

$a \circ b \overset{H_3}{\sim} a' \circ b'$

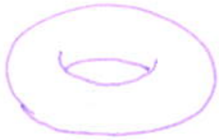
$H_3 : [0,1] \times [0,1] \to X, \quad H_3(-,t) := H_1(-,t) \star H_2(-,t)$

Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^3$ $\qquad \pi_1(\mathbb{R}, 1) = \{0\}$

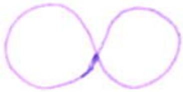
von $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ $\qquad \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, 1) = \{0\}$

von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\qquad \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, 1) = \mathbb{Z}$

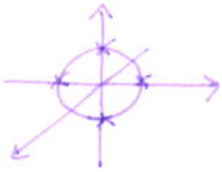
Beispiele



$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$



$\mathbb{Z}$

Bem.: π_1 ist ein Funktor von der Kategorie der (punktierten) topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen. Neben anderen Funktoren (Homologie, Kohomologie, ...) bildet er eine fundamentale Verbindung zwischen Topologie und Algebra.