Universität Augsburg
13. März 2013

Pizzaseminar zur Kategorientheorie
3. Übungsblatt

Aufgabe 1: „Funktoren bewahren Isomorphie“: Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor zwischen Kategorien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und seien X und Y Objekte von $\mathcal{C}$. Zeige:

$$X \cong Y \quad \Longrightarrow \quad F(X) \cong F(Y).$$

Zeige ferner, dass die Umkehrung ebenfalls gilt, wenn F voll und treu ist (siehe Aufgabe 3).

Aufgabe 2: Sei $f : P \to Q$ eine *monotone* Abbildung zwischen Quasiordnungen P, Q, d. h. für alle $x, y \in P$ gilt

$$x \preceq y \text{ in } P \implies f(x) \sqsubseteq f(y) \text{ in } Q.$$

Überlege, wie man daraus einen Funktor $BP \to BQ$ der zugehörigen Kategorien aus Aufgabe 3 von Blatt 2 basteln kann. Wieso sind die Funktoraxiome erfüllt?

Aufgabe 3: Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt…

a) *treu*, wenn für je zwei parallele Morphismen f, g in $\mathcal{C}$ (d. h. Morphismen mit gleicher Quelle und gleichem Ziel) gilt: $F(f) = F(g) \quad \Longrightarrow \quad f = g$.

b) *voll*, wenn es für alle Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ und jeden Morphismus $h : F(X) \to F(Y)$ in $\mathcal{D}$ einen Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ mit $F(f) = h$ gibt.

c) *wesentlich surjektiv*, wenn es für jedes Objekt $Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ ein Objekt $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ mit $F(X) \cong Z$ gibt.

Untersuche einen Funktor deiner Wahl daraufhin, ob er treu, voll oder wesentlich surjektiv ist.

Aufgabe 4: Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ein Objekt. Wir nehmen an, dass wir für jedes Objekt $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ein bestimmtes Produkt $A \times X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ gegeben haben. Überlege, wie man die unvollständige Zuordnungsvorschrift

$$\begin{aligned} F\colon \quad \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ X &\longmapsto A \times X \end{aligned}$$

zu einer Funktordefinition ausweiten kann. Wie kann man F auf Morphismen definieren? Wieso sind die Funktoraxiome erfüllt?

Projektaufgabe: Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ein Objekt. Der *kovariante Hom-Funktor zu A* ist definiert als

$$\begin{aligned} \breve{A}\colon \quad \mathcal{C} &\longrightarrow \mathrm{Set} \\ X &\longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \\ (f : X \to Y) &\longmapsto f_\star, \end{aligned}$$

wobei $f_\star$ die Abbildung

$$\begin{aligned} f_\star\colon \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

ist. Zeige als Hinführung auf den Yoneda-Vortrag, dass $\breve{A}$ tatsächlich ein Funktor ist.