Quasikohärente Modulgarben

Ingo Blechschmidt

28. Mai 2015

1 Definitionen

Definition 1.1. Eine ($\mathcal{O}_X$-)Modulgarbe auf einem geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ besteht aus … sodass …

Definition 1.2. Eine Modulgarbe $\mathcal{E}$ heißt genau dann *lokal endlich frei*, wenn … Sie heißt genau dann *von endlichem Typ*, wenn …

Bemerkung 1.3. Die Kategorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$ der $\mathcal{O}_X$-Modulgarben ist abelsch, vollständig und kovollständig und sogar eine Grothendieck-Kategorie.

Bemerkung 1.4. Aus Sicht der internen Sprache des Topos $\mathrm{Sh}(X)$ ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe nichts anderes als ein gewöhnlicher Modul über dem gewöhnlichen Ring $\mathcal{O}_X$. Sie ist genau dann lokal endlich frei, wenn sie aus interner Sicht endlich frei ist. Sie ist genau dann von endlichem Typ, wenn sie aus interner Sicht endlich erzeugt ist.

2 Beispiele

Definition/Proposition 2.1. *Sei M ein A-Modul. Dann gibt es auf $\operatorname{Spec} A$ eine Modulgarbe $M^\sim$ mit*

1. $M^\sim(D(f)) \cong M[f^{-1}]$ *für alle* $f \in A$ *und*
2. $(M^\sim)_\mathfrak{p} \cong M_\mathfrak{p} = M[(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}]$ *für alle* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

Bemerkung 2.2. Im Topos $\mathrm{Sh}(\operatorname{Spec} A)$ gibt es den *generischen Filter* $\mathcal{F}$, die Untergarbe der konstanten Garbe $\underline{A}$ mit $\mathcal{F}(U) := \{f : U \to A \mid f(\mathfrak{p}) \notin \mathfrak{p} \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U\}$. Aus interner Sicht ist dann $M^\sim$ einfach die Lokalisierung $\underline{M}[\mathcal{F}^{-1}]$.

Beispiel 2.3. $A^\sim \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$.

Beispiel 2.4. Die Garbe $(k[x,y]/(x-2,y-3))^\sim$ auf $\operatorname{Spec} k[x,y]$ ist im Punkt $(x-2,y-3)$ konzentriert, d. h. die Menge derjenigen Punkte, an denen der Halm dieser Garbe nicht Null ist, enthält nur diesen einen Punkt. Daher heißt eine solche Garbe auch *Wolkenkratzergarbe*.

Proposition 2.5. *Sei M ein A-Modul. Genau dann ist $M^\sim$ lokal endlich frei, wenn M endlich erzeugt und projektiv ist.*

Beispiel 2.6. Seien M und N quadratische $(n \times n)$-Matrizen über einem Körper k. Eine notwendige Bedingung dafür, dass M und N zueinander ähnlich sind, ist, dass ihr Spektrum übereinstimmt. Bekanntlich ist diese Bedingung aber nicht hinreichend.

Eine Charakterisierung von Ähnlichkeit ist mit $k[X]$-Moduln möglich: Genau dann sind M und N zueinander ähnlich, wenn die $k[X]$-Moduln k^n_M und k^n_N zueinander isomorph sind. (Als abelsche Gruppe ist $k^n_M = k^n$. Die Skalarmultiplikation ist definiert als $f \cdot v := f(M)v$.) Das ist genau dann der Fall, wenn die induzierten Modulgarben $(k^n_M)^\sim$ und $(k^n_N)^\sim$ auf $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[X]$ isomorph sind. Man kann sich nun überlegen, dass diese Garben Träger im Spektrum haben.

Fazit: Wir können die Modulgarbe $(k^n_M)^\sim$ als Verfeinerung der noch zu groben Invariante des Spektrums deuten. Sie kodiert genau den Ähnlichkeitstyp von M.

Definition 2.7. Die *Faser* einer Modulgarbe $\mathcal{E}$ über einem Punkt x ist der $k(x)$-Vektorraum

$$\mathcal{E}|_x := \mathcal{E}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \cong \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x.$$

Ist $s \in \mathcal{E}(U)$ ein lokaler Schnitt einer Modulgarbe, so ist für jeden Punkt $x \in U$ die Restklasse von s in $\mathcal{E}|_x$ ein Element eines (von x abhängigen) Vektorraums. In diesem Sinn kann man Schnitte von Modulgarben als *verallgemeinerte Funktionen* betrachten. Diese sind wichtig, da es interessanten Schemata oftmals an globalen gewöhnlichen Funktionen – globalen Schnitten von $\mathcal{O}_X$ – mangelt.

Beispiel 2.8. Sei W ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und $X = \mathbb{P}(W) = \operatorname{Proj} \operatorname{Sym} W^\vee$ seine Projektivierung. Die k-rationalen Punkte dieses Schemas sind gerade die eindimensionalen Unterräume von W. Auf X gibt es die wichtigen Modulgarben $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(-1)$. Für die Fasern dieser Garben an einem Punkt $\ell \subseteq W$ gilt

$$\mathcal{O}(1)|_\ell \cong \ell^\vee \qquad \text{und} \qquad \mathcal{O}(-1)|_\ell \cong \ell.$$

Die Garbe $\mathcal{O}(-1)$ heißt daher auch *tautologisches Bündel.*

In Skizzen kann man die beiden Garben nicht unterscheiden – wenn man X als Kreis zeichnet ($\dim W = 2$), so sehen beide wie das Möbiusbündel aus. Als Garben sind sie aber nicht isomorph; das tautologische Bündel hat nur den Nullschnitt als globalen Schnitt, während $\mathcal{O}(1)(X)$ kanonisch isomorph zu $W^\vee$ ist.

Allgemeiner gibt es für alle $m \in \mathbb{Z}$ jeweils eine besondere Modulgarbe $\mathcal{O}(m)$; für die globalen Schnitte gilt $\mathcal{O}(m)(X) \cong \operatorname{Sym}^m W^\vee$.

Beispiel 2.9. Sei D ein Cartier-Divisor auf einem Schema X. Dann ist die Untermodulgarbe

$$\mathcal{O}_X(D) := \{f : \mathcal{K}_X \mid \operatorname{div}(f) + D \geq 0\}$$

der Garbe der rationalen Funktionen lokal frei vom Rang 1. Die Signifikanz dieser Garben erklärt sich dadurch, dass in vielen Situationen jede Modulgarbe, die lokal frei vom Rang 1 ist, von dieser Form ist; und dass man sie verwenden kann, um Schnitttheorie zu betreiben: Ist X eine Fläche, so ist die Schnittzahl zweier Divisoren D und D' gleich

$$(D \cdot D') := \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-D)) - \chi(\mathcal{O}_X(-D')) + \chi(\mathcal{O}_X(-D - D')).$$

Dabei berechnet χ die *Euler-Charakteristik* einer (kohärenten) Garbe.

Beispiel 2.10. Sei $\mathcal{E}$ eine lokal freie Modulgarbe vom Rang n. Solche Garben heißen auch *Vektorbündel*. In der Tat kann man aus einer solchen Garbe ein Vektorbündel im eigentlichen Sinn konstruieren, nämlich den Morphismus $\underline{\mathrm{Spec}}_X \operatorname{Sym} \mathcal{E}^\vee \to X$.

Beispiel 2.11. Wie kann man einen Morphismus $X \to \mathbb{P}^n$ angeben? Naiv erwartet man, dass eine Setzung der Form $x \mapsto [s_0(x) : \cdots : s_n(x)]$ Erfolg haben sollten, solange die s_i nirgends gemeinsam verschwinden. Aber was können die s_i sein? Sich hier auf globale Funktionen zu beschränken wäre sehr restriktiv – auf vielen interessanten Schemata gibt es nur wenige globale Funktionen. Tatsächlich genügt es, wenn die s_i globale Schnitte eines Geradenbündels auf X sind, also einer lokal freien Modulgarbe vom Rang 1.

Bemerkung 2.12. Das vorherige Beispiel kann man zu einer universellen Eigenschaft des projektiven Raums verbessern: Für lokal geringte Räume X stehen die Morphismen $X \to \mathbb{P}^n$ in kanonischer Eins-zu-Eins-Korrespondenz mit Geradenbündeln $\mathcal{L}$ auf X zusammen mit $n+1$ globalen Schnitten, welche nirgends gemeinsam verschwinden, bis auf Isomorphie. Kurz:

$$\operatorname{Hom}(X, \mathbb{P}^n) \cong \{(\mathcal{L},\, \mathcal{O}_X^{n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{L})\}/\cong.$$

Beispiel 2.13. Sei X ein Schema über S. Dann gibt es auf X die Modulgarbe $\Omega^1_{X/S}$ der relativen Kählerdifferentialformen.

Beispiel 2.14. Sei $V(\mathcal{J}) \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Unterschema. Dann hat die Garbe $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ nur Träger in $V(\mathcal{J})$, kann also auch als Garbe auf $V(\mathcal{J})$ angesehen werden. Als solche heißt sie *Konormalgarbe* von $V(\mathcal{J})$ in X. Wenn $\mathcal{J}$ lokal von regulären Sequenzen der Länge r erzeugt wird, ist sie lokal frei vom Rang r.

3 Quasikohärente Modulgarben

Motto 3.1. Nur die quasikohärenten Modulgarben auf einem Schema haben geometrische Bedeutung. Die anderen sind Artefakt der Kodierung über lokal geringte Räume.

Definition 3.2. Sei X ein Schema und $\mathcal{E}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Genau dann heißt $\mathcal{E}$ *quasikohärent*, wenn es lokal exakte Sequenzen der Form

$$\mathcal{O}_X^{\oplus I} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus J} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

gibt. Dabei können I und J beliebige, auch unendlich große, Mengen sein.

Proposition 3.3. *Sei X ein Schema und $\mathcal{E}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Dann sind äquivalent:*

1. *Die Modulgarbe $\mathcal{E}$ ist quasikohärent.*

2. *Es gibt eine Überdeckung von X durch offene affine Teilmengen U sodass für jede Überdeckungsmenge $U = \operatorname{Spec} A$ die Einschränkung $\mathcal{E}|_U$ isomorph zu einer Modulgarbe der Form $M^\sim$ für einen A-Modul M ist.*

3. *Für alle offenen affinen Teilmengen $U = \operatorname{Spec} A$ ist $\mathcal{E}|_U$ isomorph zu einer Modulgarbe der Form $M^\sim$ für einen A-Modul M.*

4. *Für alle offenen affinen Teilmengen $U = \operatorname{Spec} A$ und Funktionen $f \in A$ ist die kanonische Abbildung $\mathcal{E}(U)[f^{-1}] \to \mathcal{E}(D(f))$ ein Isomorphismus von $A[f^{-1}]$-Moduln.*

Bemerkung 3.4. Eine Modulgarbe $\mathcal{E}$ auf einem Schema X ist genau dann quasikohärent, wenn aus Sicht der internen Sprache des Topos $\mathrm{Sh}(X)$ für alle $f : \mathcal{O}_X$ der lokalisierte Modul $\mathcal{E}[f^{-1}]$ eine Garbe bezüglich der Modalität $\Box$ mit $\Box\varphi :\equiv (f \text{ inv.} \Rightarrow \varphi)$ ist.

Beispiel 3.5. Die Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf einem affinen Schema $\operatorname{Spec} A$ ist äquivalent zur Kategorie der A-Moduln. Die Äquivalenz wird vermittelt durch den Funktor $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}(\operatorname{Spec} A)$ mit Pseudoinversem $M \mapsto M^\sim$.

Beispiel 3.6. Die Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf einem projektiven Schema $\operatorname{Proj} A$ ist äquivalent zum Quotient der Kategorie der $\mathbb{Z}$-graduierten A-Moduln modulo der Serreschen Unterkategorie derjenigen graduierten Moduln, welche ab einem gewissen Grad verschwinden. Die Äquivalenz wird durch eine projektive Variante der Tilde-Konstruktion vermittelt.

Beispiel 3.7. Der Rückzug quasikohärenter Modulgarben ist stets wieder quasikohärent. Der Pushforward einer quasikohärenten Modulgarbe längs einem quasikompakten und quasiseparierten Morphismus ist wieder quasikohärent.

Proposition 3.8. *Sei $f : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ ein Morphismus affiner Schemata. Betrachte A vermöge $f^\sharp$ als B-Algebra.*

1. *Sei M ein A-Modul. Dann gilt $f_*(M^\sim) \cong (M_B)^\sim$.*

2. *Sei N ein B-Modul. Dann gilt $f^*(N^\sim) \cong (N \otimes_B A)^\sim$.*

Bemerkung 3.9. Aus der Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf einem Schema X zusammen mit ihrer abelschen Struktur kann man das Schema rekonstruieren; das besagt der Rekonstruktionssatz von Gabriel–Rosenberg. Für affine Schemata folgt das aus der für Ringe A gültigen Isomorphiekette

$$A \cong \mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\mathrm{Mod}(A)}) \cong \mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\mathrm{QCoh}(\operatorname{Spec} A)}).$$

Allgemein heißt für eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$ die Menge der Endomorphismen des Identitätsfunktors auf $\mathcal{C}$ auch *Zentrum von $\mathcal{C}$*. Mit der Addition und Verkettung von natürlichen Transformationen wird diese zu einem kommutativen Ring.

Bemerkung 3.10. Die Kategorie $\mathrm{QCoh}(X)$ der quasikohärenten Modulgarben ist eine koreflektive Unterkategorie der Kategorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$ aller Modulgarben, das heißt die Inklusion $\mathrm{QCoh}(X) \hookrightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$ besitzt einen Rechtsadjungierten, den so genannten *Kohärator*. Als Konsequenz kann man zeigen, dass $\mathrm{QCoh}(X)$ wie auch $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$ eine Grothendieck-Kategorie ist. Kolimiten berechnet man in $\mathrm{QCoh}(X)$ genau wie in $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$. Limiten in $\mathrm{QCoh}(X)$ berechnet man, indem man sie zunächst in $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$ bestimmt und dann den Kohärator anwendet. Für endliche Limiten kann man auf den Kohärator verzichten.[1]

4 Tiefere kategorielle Interpretation

Sei $\mathcal{E}$ eine quasikohärente Modulgarbe auf einem Schema X. Dann erhalten wir für jeden Morphismus $f : \operatorname{Spec} A \to X$ durch Betrachtung des Rückzugs $f^*\mathcal{E}$ einen A-Modul, den wir „$\underline{\mathcal{E}}(A)$" bezeichnen möchten. In der Notation unterdrücken wir also den Morphismus f und notieren nur seine Quelle. Ist $p : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ ein weiterer Morphismus, so gibt es eine kanonische Abbildung $\underline{\mathcal{E}}(A) \to \underline{\mathcal{E}}(B)$. Insgesamt definiert daher die Zuordnung $(\operatorname{Spec} A \to X) \mapsto \underline{\mathcal{E}}(A)$ eine *Prägarbe* auf der Kategorie Aff/X der affinen Schemata über X.

Die Familie dieser Moduln $\underline{\mathcal{E}}(A)$ hat drei Besonderheiten:

0. Die Prägarbe $\underline{\mathcal{E}}$ ist ein Modulobjekt über dem Ringobjekt $\underline{\mathcal{O}_X}$, das ist die Prägarbe

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{Aff}/X)^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ (\operatorname{Spec} A \to X) & \longmapsto & A. \end{array}$$

1. Seien Morphismen $f : \operatorname{Spec} A \to X$ und $p : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ gegeben. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\underline{\mathcal{E}}(A) \otimes_A B \xrightarrow{\cong} \underline{\mathcal{E}}(B),$$

denn $p^* f^* \mathcal{E}$ ist kanonisch isomorph zu $(f \circ p)^* \mathcal{E}$. Diese Isomorphismen erfüllen ihrerseits eine Kohärenzbedingung.

2. Sei $f : \operatorname{Spec} A \to X$ ein Morphismus und sei $\operatorname{Spec} A$ überdeckt durch offene affine Unterschemata $\operatorname{Spec} A[f_i^{-1}]$. Dann ist das Diagramm

$$\underline{\mathcal{E}}(A) \to \prod_i \underline{\mathcal{E}}(A[f_i^{-1}]) \rightrightarrows \prod_{i,j} \underline{\mathcal{E}}(A[f_i^{-1}, f_j^{-1}])$$

ein Differenzkerndiagramm. Man sagt auch, die Zuordnung $(\operatorname{Spec} A \to X) \mapsto \underline{\mathcal{E}}(A)$ sei eine *Zariski-Garbe*.

[1]Seien M_i Moduln über A. Das Produkt der $M_i^\sim$ in der Kategorie aller Modulgarben auf $\operatorname{Spec} A$ ist dann eine Garbe mit $D(f) \mapsto \prod_i M_i[f^{-1}]$. Dagegen ist das Produkt der $M_i^\sim$ in der Kategorie der quasikohärenten Modulgarben eine Garbe mit $D(f) \mapsto (\prod_i M_i)[f^{-1}]$. Es gibt zwar einen kanonischen Morphismus $(\prod_i M_i)[f^{-1}] \to \prod_i M_i[f^{-1}]$; im Allgemeinen ist dieser jedoch weder injektiv noch surjektiv.

Man kann sich überlegen, dass für eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf Aff/X Eigenschaft 2 schon aus den Eigenschaften 0 und 1 folgt. Denn das fragliche Diagramm ist dann isomorph zu

$$\mathcal{F}(A) \to \prod_i \mathcal{F}(A)[f_i^{-1}] \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(A)[f_i^{-1}, f_j^{-1}],$$

und es ist eine elementare Beobachtung aus der linearen Algebra über Ringen, dass dieses ein Differenzkerndiagramm ist.

Als Zwischenfazit halten wir fest: Eine quasikohärente Modulgarbe $\mathcal{E}$ definiert ein kohärentes System von Moduln $(\underline{\mathcal{E}}(A))_{\mathrm{Spec}\,A \to X}$, also ein System, das Eigenschaft 1 hat. Umgekehrt kann man sich überlegen, dass jedes solche System auch eine quasikohärente Modulgarbe festlegt.

Die Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf X ist also äquivalent zur Kategorie der kohärenten Aff/X-indizierten Systeme von Moduln. Das kann einen an die Konstruktion von Limiten in der Kategorie der Mengen erhalten! Tatsächlich gilt

$$\mathrm{QCoh}(X) = \lim\nolimits_{\mathrm{Spec}\,A \to X} \mathrm{Mod}(A).$$

Der Limes auf der rechten Seite muss in einem 2-kategoriellen Sinn verstanden werden; ein Objekt dieser Kategorie besteht aus

1. einer Familie von Moduln: für jeden Morphismus $\mathrm{Spec}\,A \to X$ einen A-Modul M_A, und

2. Isomorphismen: für jeden Morphismus $\mathrm{Spec}\,A \to X$ und jeden Morphismus $\mathrm{Spec}\,B \to \mathrm{Spec}\,A$ einen Isomorphismus $M_A \otimes_A B \to M_B$,

sodass diese bezüglich weiterer Morphismen $\mathrm{Spec}\,C \to \mathrm{Spec}\,B$ ein Kohärenzaxiom erfüllen.

Die rechte Seite kann man als Instanz der *Limesformel für Rechts-Kan-Erweiterungen* erkennen. Damit können wir also auch schreiben:

$$\mathrm{QCoh} = \mathrm{Ran}_{\mathrm{inkl}}(\mathrm{Mod}).$$

Der Funktor QCoh, der einem Schema seine Kategorie quasikohärenter Modulgarben zuordnet, ist also die Rechts-Kan-Erweiterung des Funktors $\mathrm{Mod} : \mathrm{Ring} \to \mathrm{Cat}$ (welcher einem Ring A die Kategorie der A-Moduln zuordnet) längs der Inklusion $\mathrm{inkl} : \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sch}^{\mathrm{op}}$; bedenke $\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} = \mathrm{Ring}$.

Man kann diese Geschichte auch noch anders erzählen. Angenommen, wir fangen gerade an, die Grundzüge der Schematheorie zu entwickeln. Als einleuchtendes Konzept für quasikohärente Modulgarben auf affinen Schemata $\mathrm{Spec}\,A$ fällt uns dann die Kategorie der gewöhnlichen A-Moduln ein. Auf diese Weise erhalten wir einen Funktor $\mathrm{Mod} : \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}$. Wenn es nun doch nur eine Möglichkeit gäbe, diesen Funktor längs der Inklusion $\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sch}^{\mathrm{op}}$ zu erweitern!

Beide der Ausdrücke für $\mathrm{QCoh}(X)$ lassen sich auf Objekte X verallgemeinern, die nicht Schemata im engeren Sinn sind: zum Beispiel Garben auf $\mathrm{Ring}^{\mathrm{op}}$, welche nicht unbedingt lokal affin sind, oder sogar Prägarben auf $\mathrm{Ring}^{\mathrm{op}}$. Die Limesformel ist auch eine zentrale Idee zur Definition der Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf einem Stack.

Wer mag, kann die Formel auch noch zu

$$\mathrm{QCoh}(X) = \int_A \mathrm{Mod}(A)^{\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, A, X)} = \int_A [\underline{X}(A), \mathrm{Mod}(A)]$$

umschreiben. Damit endet dieser Ausflug in die 2-kategorielle Interpretation quasikohärenter Modulgarben.