Die interne Sprache von Sh(X)

Sei X ein topologischer Raum. Dann definieren wir rekursiv

$$U \models \varphi \quad (\text{“}\varphi \text{ gilt auf } U\text{”})$$

für offene Teilmengen $U \subseteq X$ und Aussagen φ.

$$\begin{aligned}
U \models f = g : \mathcal{F} &\quad :\Longleftrightarrow \quad f|_U = g|_U \in \Gamma(U, \mathcal{F}) \\
U \models \varphi \wedge \psi &\quad :\Longleftrightarrow \quad U \models \varphi \text{ und } U \models \psi \\
U \models \varphi \vee \psi &\quad :\Longleftrightarrow \quad \cancel{U \models \varphi \text{ oder } U \models \psi} \\
&\qquad\qquad\quad \text{es gibt eine Überdeckung } U = \textstyle\bigcup_i U_i \text{ sd. für alle } i\text{:} \\
&\qquad\qquad\qquad\quad U_i \models \varphi \text{ or } U_i \models \psi \\
U \models \varphi \Rightarrow \psi &\quad :\Longleftrightarrow \quad \text{für alle offenen } V \subseteq U\text{: } V \models \varphi \text{ impliziert } V \models \psi \\
U \models \forall f : \mathcal{F}.\ \varphi(f) &\quad :\Longleftrightarrow \quad \text{für alle Schnitte } f \in \Gamma(V, \mathcal{F}), V \subseteq U\text{: } V \models \varphi(f) \\
U \models \exists f : \mathcal{F}.\ \varphi(f) &\quad :\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt eine Überdeckung } U = \textstyle\bigcup_i U_i \text{ sd. für alle } i\text{:} \\
&\qquad\qquad\qquad\quad \text{es gibt } f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F}) \text{ sodass } U_i \models \varphi(f_i)
\end{aligned}$$