Universität Augsburg
3. April 2013

Pizzaseminar zur Kategorientheorie
5. Übungsblatt

XXX: Hier fehlt noch eine spannende *konkrete* Aufgabe!

Aufgabe 1. *Spitze schon im Diagramm*

Sei $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein Diagramm in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Besitze $\mathcal{D}$ ein terminales Objekt T. Zeige per Hand oder mit dem Kriterium aus Aufgabe 3, dass dann schon $F(T)$ selbst zu einem Kolimes von F wird.

Aufgabe 2. *Monomorphe natürliche Transformationen*

a) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus einer Kategorie. Zeige, dass f genau dann ein Monomorphismus ist, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

ein Faserproduktdiagramm ist.

b) Sei $\eta : F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Besitze $\mathcal{D}$ alle Faserprodukte. Zeige: η ist genau dann ein Monomorphismus in $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, wenn alle Komponenten η_X Monomorphismen in $\mathcal{D}$ sind.

Aufgabe 3. *Kofinale Unterdiagramme*

In der Analysis gibt es folgende Mottos: *Das Weglassen endlich vieler Folgeglieder ändert nicht das Konvergenzverhalten. Teilfolgen konvergenter Folgen konvergieren ebenfalls, und zwar gegen denselben Grenzwert.* Diese Mottos wollen wir auf (Ko-)Limiten in der Kategorientheorie übertragen.

Dazu nennen wir einen Funktor $H : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}$ genau dann *kofinal*, wenn für alle $d \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}\ldots$

1. ein Objekt $d_0 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}_0$ und ein Morphismus $d \to H(d_0)$ in $\mathcal{D}$ existiert und
2. für je zwei solcher Morphismen ein Objekt $\widetilde{d_0} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}_0$ und Morphismen $d_0 \to \widetilde{d_0}$, $d_0' \to \widetilde{d_0}$ existieren, deren Bilder unter H das Diagramm

$$\begin{tikzcd} d_0 \arrow[r] \arrow[d] & H(d_0) \arrow[d, dashed] \\ H(d_0') \arrow[r, dashed] & H(\widetilde{d_0}) \end{tikzcd}$$

kommutieren lassen.

Etwa ist der Inklusionsfunktor $B(2\mathbb{N}) \to B(\mathbb{N})$ kofinal, wenn $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen mit ihrer gewöhnlichen Ordnung und $2\mathbb{N}$ die Teilordnung der geraden Zahlen bezeichnet.

Sei nun $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein $\mathcal{D}$-förmiges Diagramm in einer Kategorie $\mathcal{C}$.

a) Zeige: Die Kategorie der Kokegel von F ist äquivalent zur Kategorie der Kokegel von $F \circ H$.

b) Was folgt daher über das Verhältnis der Kolimiten von F und $F \circ H$?