Die Picard-Gruppe und der Satz von Riemann–Roch

Ingo Blechschmidt

16. Oktober 2014

Das sind informale Notizen zum ersten Kapitel von Arnaud Beauvilles Buch *Complex Algebraic Surfaces*.

Inhaltsverzeichnis

1 Garbenkohomologie

Sei X ein Raum (Schema über $\mathbb{C}$ oder komplexe Mannigfaltigkeit). Dann untersucht man (algebraische bzw. holomorphe) Vektorbündel auf X; äquivalent dazu ist die Kategorie der lokal freien $\mathcal{O}_X$-Modulgarben.[1] Diese ist aber keine abelsche Kategorie und daher kein geeigneter Kontext, um Funktoren abzuleiten.

Man behilft sich mit der größeren Kategorie $\mathrm{Coh}(X)$ der *kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modulgarben*. Das ist eine volle Unterkategorie der Kategorie aller $\mathcal{O}_X$-Modulgarben, welche abelsch ist. Im Fall, dass X ein lokal noethersches Schema oder eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, umfasst diese Kategorie die Kategorie der lokal freien Garben und ist die kleinste volle Unterkategorie mit dieser Eigenschaft. Kohärenz ist eine Endlichkeitseigenschaft,

[1] Die Äquivalenz wird wie folgt vermittelt: Einem Vektorbündel $E \to X$ ordnet man die Garbe seiner algebraischen bzw. holomorphen Schnitte zu. Da man Schnitte addieren und mit regulären bzw. holomorphen Funktionen multiplizieren kann, wird die erhaltene Garbe zu einer Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Die lokale Trivialität von E übersetzt sich in die lokale Freiheit der zugehörigen Garbe. Fasern des Vektorbündels entsprechen Fasern der Garbe (das sind die Halme, tensoriert mit dem Restklassenkörper an der jeweiligen Stelle).

die im Allgemeinen stärker ist, als von endlichem Typ zu sein.[2] Die Faserdimension einer kohärenten Garbe kann – anders als bei lokal freien Garben – von Punkt zu Punkt variieren.

Von zentraler Bedeutung ist der Funktor $\Gamma(X, \_) : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Vect}(\mathbb{C})$, welcher nur linksexakt, aber in allen interessanten Fällen nicht exakt ist und daher abgeleitet werden muss. Damit definiert man *Garbenkohomologie*: Die n-te Kohomologie einer kohärenten Garbe $\mathcal{E}$ ist $H^n(X, \mathcal{E}) := R^n\Gamma(X, \_)(\mathcal{E})$.[3]

Gewöhnliche (singuläre) Kohomologie erhält man aus dieser Definition zurück, wenn man für $\mathcal{E}$ konstante Garben verwendet.[4] Im klassischen Fall spielt die Wahl der Koeffizienten ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ...) dank des universellen Koeffiziententheorems keine große Rolle; das ist bei Garbenkohomologie nicht so. Garbenkohomologie kann man sich *nicht* über „Zykel modulo Ränder" anschaulich vorstellen, geometrische Vorstellung ist bedingt aber durch *Čech-Methoden* gegeben (XXX Quelle).

Garbenkohomologie hat drei für uns sehr wesentliche Eigenschaften:

1. Falls X eigentlich über dem Punkt bzw. kompakt ist, so sind die $H^n(X, \mathcal{E})$ *endlichdimensionale* Vektorräume[5] und für $i > \dim X$ verschwindet die i-ten Kohomologie. (XXX Quelle)

2. Ist $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von kohärenten Garben, so erhält man eine lange exakte Sequenz in Kohomologie:

$$\cdots \longrightarrow H^n(X, \mathcal{E}') \longrightarrow H^n(X, \mathcal{E}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{E}'') \longrightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{E}) \longrightarrow \cdots$$

3. Die *Eulercharakteristik* einer kohärenten Garbe $\mathcal{E}$, definiert als die alternierende Summe $\chi(\mathcal{E}) := \sum_{n=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{C}} H^n(X, \mathcal{E}) \in \mathbb{Z}$, ist additiv in kurzen exakten Sequenzen. Deshalb hängt $\chi(\mathcal{E})$ nur von der *Klasse von $\mathcal{E}$ in der K-Theorie ab*, also nur von *diskreten Invarianten* von $\mathcal{E}$.[6]

[2] Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{E}$ heißt genau dann *kohärent*, wenn sie von endlichem Typ ist und wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ der Kern eines jeden $\mathcal{O}_X|_U$-linearen Morphismus $(\mathcal{O}_X|_U)^n \to \mathcal{E}|_U$ ebenfalls von endlichem Typ ist. Die Kohärenz von $\mathcal{O}_X$ für den Fall einer komplexen Mannigfaltigkeit ist die Aussage des Kohärenzsatzes von Oka (XXX Quelle).

[3] Das ist etwas gemogelt. Der Kategorie $\mathrm{Coh}(X)$ mangelt es im Allgemeinen an genügend Injektiven, weswegen man zu größeren Kategorien übergeht.

[4] Eine Garbe heißt genau dann *konstant*, wenn sie die Garbifizierung einer konstanten Prägarbe ist – einer solchen, die jeder offenen Teilmenge des Raums dieselbe Menge A zuordnet. Explizit ist die Menge der U-Schnitte einer solchen konstanten Garbe die Menge der stetigen Funktionen $U \to A$, wobei A mit der diskreten Topologie versehen wird. Konstante Garben sind nicht kohärent – sie tragen nicht einmal eine $\mathcal{O}_X$-Modulstruktur – durch Übergang von $\mathrm{Coh}(X)$ zur Kategorie aller Garben abelscher Gruppen kann man aber auch für solche Garben Kohomologie erklären.

[5] Dass das nicht immer so ist, zeigt schon das Beispiel $H^0(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$, der unendlich-dimensionale Raum der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$.

[6] Außerdem ist die Eulercharakteristik auf flachen Familien von kohärenten Garben konstant (XXX Quelle). Die K-Theorie von X ist die abelsche Gruppe formaler $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von Isomorphieklassen von kohärenten Garben auf X modulo den Relationen $\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}''$ für jede kurze exakte Sequenz $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$. Die K-Theorie von $\mathbb{C}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ (mit Isomorphismus $\mathcal{E} \mapsto \operatorname{rank} \mathcal{E}$), die von $\mathbb{P}^n$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}[X]/(X+1)^{n+1}$. (XXX Quelle)

Wieso Garbenkohomologie?

Ein Grund, Garbenkohomologie statt klassischer Kohomologie zu studieren, ist schlichtweg der, dass höhere Kohomologie mit Werten in konstanten Garben auf irreduziblen Schemata stets trivial ist. Das liegt daran, dass auf irreduziblen topologischen Räumen konstante Garben stets welk (flabby) und daher azyklisch bezüglich des globale-Schnitte-Funktors ist.

Ein weiterer Grund liegt darin, dass man oft an der Dimension des globalen Schnittraums einer kohärenten Garbe $\mathcal{E}$ interessiert ist, also an $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{E})$. Diese ist im Allgemeinen aber nicht leicht zu berechnen. Die Eulercharakteristik dagegen, in der diese Dimension als ein Summand auftritt, ist dank ihrer Stabilitätseigenschaften leichter zugänglich. Im Fall, dass $\mathcal{E}$ das zu einem Divisor D assoziierte Geradenbündel ist (siehe Abschnitt 2), ist die Frage nach der Dimension des globalen Schnittraums die sehr konkrete Frage nach der Dimension des Raums meromorpher Funktionen mit durch D vorgegebenem Null- und Polstellenverhalten.

Historisch war auch die *Leray-Spektralsequenz* eine große Motivation, Garbenkohomologie zu untersuchen. Diese liefert im Kontext einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ eine Möglichkeit, aus Kenntnis der (gewöhnlichen) Kohomologie von Y und der Fasern $f^{-1}[y]$ Rückschlüsse auf die Kohomologie von X zu ziehen; dabei kommt unweigerlich Garbenkohomologie vor.[7]

Als letzter Grund sei angeführt, dass Garbenkohomologie geometrische Objekte klassiziferen kann. Etwa stehen die Elemente von $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ auf kanonische Art und Weise mit den Geradenbündeln auf X (bis auf Isomorphie) in Eins-zu-Eins-Korrespondenz.[8]

Die kurze exakte Sequenz zu einem Unterschema

Im Folgenden werden wir wiederholt die kurze exakte Sequenz zu einem abgeschlossenen Unterschema $V \overset{i}{\hookrightarrow} X$ bzw. einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit benötigen. Diese ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow O_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_V \longrightarrow 0.$$

Dabei ist $\mathcal{J}$ die *Idealgarbe* zu V, also die Garbe derjenigen Funktionen, welche auf V verschwinden. Das Komplement von V kann daraus als die offene Menge $\{x \in X \mid 1 \in \mathcal{J}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}\}$ wiedergewonnen werden – das ist die Menge derjenigen Punkte, in denen mindestens eine definierende Gleichung von V nicht erfüllt ist.

Die Garbe $i_*\mathcal{O}_V$ ist der Pushforward der Strukturgarbe von V, also der Garbe der regulären bzw. holomorphen Funktionen. Auf Punkten $x \in X$, welche nicht in V liegen, ist ihr Halm trivial: $(i_*\mathcal{O}_V)_x = 0$. Für Punkte $x \in V$ gilt $(i_*\mathcal{O}_V)_x \cong \mathcal{O}_{V,x} \cong \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{J}_x$.

[7] Nur im Fall, dass f eine Faserung ist, kann man noch auf den Spezialfall der Leray–Serre-Spektralsequenz ausweichen, bei der man nur Kohomologie mit Werten in lokalen Systemen benötigt.

[8] Geradenbündel kann man auch als $\mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_X)$-Hauptfaserbündel ansehen. Allgemeiner klassifiziert $H^1(X, \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X))$ Vektorbündel vom Rang n und $H^1(X, \mathcal{G})$ G-Hauptfaserbündel.

Beispiel 1.1. Zum abgeschlossenen Unterschema $\{0\} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{C}$ gehört die exakte Sequenz $0 \to (z) \to \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_{\mathrm{pt}}$. Dabei ist (z) die Idealgarbe aller $\mathcal{O}_X$-Vielfachen der Koordinatenfunktion z.

Zurück und vor

Ist $V \overset{i}{\hookrightarrow} X$ eine abgeschlossene Teilmenge, so definiert der Pushforward-Funktor i_* eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Garben auf V und der Kategorie derjenigen Garben auf X, deren Träger in V liegt. Oft ist es hilfreich, auf einem einzigen Raum zu arbeiten; dann kann man sich also des Pushforward-Funktors bedienen.

Für den Rückzug $\mathcal{E}|_V := i^*\mathcal{E}$ einer kohärenten Garben $\mathcal{E}$ auf X gilt die Rechenregel

$$i_*(\mathcal{E}|_V) \cong \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} i_*\mathcal{O}_V \cong \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{J},$$

wenn $\mathcal{J}$ die Idealgarbe von V ist. Ferner gilt für die Kohomologie

$$H^n(V, \mathcal{F}) \cong H^n(X, i_*\mathcal{F}).$$

Normalgarbe und Konormalgarbe

Ist $V \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Unterschema, so ist $N^\vee_{V/X} := \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ die *Konormalgarbe* von V in X. Sie hat Träger in V und wird daher als Garbe auf V angesehen. Die *Normalgarbe* ist die zugehörige Dualgarbe.

Wenn V in X *regulär eingebettet* ist – das bedeutet, dass es lokal Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ gibt, welche die Idealgarbe $\mathcal{J}$ erzeugen *und eine reguläre Folge in $\mathcal{O}_X$ bilden*[9] – so ist die Konormalgarbe lokal frei vom Rang r. (XXX Quelle)

Im glatten Fall (XXX) gibt es die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N^\vee_{V/X} \longrightarrow \Omega_X|_V \longrightarrow \Omega_V \longrightarrow 0.$$

2 Divisoren

Sei X ein noethersches, reguläres und ganzes Schema über $\mathbb{C}$ oder eine komplexe Mannigfaltigkeit. Es sei $\mathcal{K}_X$ die Garbe der rationalen bzw. meromorphen Funktionen auf X. Im Schemafall ist diese einfach die konstante Garbe mit Faser $\mathcal{O}_{X,\xi}$.

Definition 2.1. 1. Ein *(Weil-)Divisor* auf X ist eine formale $\mathbb{Z}$-Linearkombination von irreduziblen[10] Hyperflächen von X.[11]

[9] Eine Folge $(f_1, \ldots, f_r)$ von Elementen eines Rings A heißt genau dann *regulär*, wenn f_1 in A regulär, f_2 in $A/(f_1)$ regulär, $\ldots$, f_r in $A/(f_1, \ldots, f_{r-1})$ regulär ist. Dabei heißt ein Ringelement f *regulär*, wenn Multiplikation mit f injektiv ist. Anschaulich ist eine reguläre Folge von Funktionen eine, in der keine der einzelnen Gleichungen redundant ist. Etwa ist die Folge z, z von Elementen von $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ nicht regulär, und in der Tat hat das Verschwindungsschema $V(z, z)$ dieser Funktionen auch nicht Kodimension 2.

[10] Das Achsenkreuz in $\mathbb{C}^2$ ist ein Beispiel für eine reduzible Hyperfläche.

[11] Hyperflächen werden lokal durch eine reguläre Gleichung gegeben.

2. Der *Grad* eines Divisors ist die Summe seiner Koeffizienten.

3. Ein Divisor D heißt genau dann *effektiv*, notiert „$D \geq 0$“, wenn seine Koeffizienten alle nichtnegativ sind.

4. Ein Divisor D heißt genau dann *Hauptdivisor*, wenn er von der Form $\operatorname{div}(f)$ für einen globalen Schnitt $f \in \mathcal{K}_X^\times(X)$ ist. Dabei ist $\operatorname{div}(f)$ der *Null- und Polstellendivisor* von f, definiert als $\sum_Y \operatorname{ord}_Y(f) \cdot [Y]$. Der Null- und Polstellendivisor der Nullfunktion ist nicht definiert.

5. Divisoren D und D' heißen genau dann zueinander *linear äquivalent*, geschrieben „$D \equiv D'$“, wenn die Differenz $D - D'$ ein Hauptdivisor ist.

Beispiel 2.2. Der Null- und Polstellendivisor der rationalen Funktion $(x-3)^2(x-4)/(x-5)^3$ auf $\mathbb{C}$ ist $2 \cdot [3] + [4] - 3 \cdot [5]$.

Hauptdivisor zu sein, ist auf $\mathbb{C}$ keine Einschränkung: Offensichtlich kann man zu jedem gegebenen Divisor eine rationale Funktion konstruieren, die genau das gewünschte Null- und Polstellenverhalten zeigt. Auf $\mathbb{P}^1$ dagen, der riemannschen Zahlenkugel, können nur Divisoren vom Grad Null Hauptdivisoren sein. Denn rationale Funktionen auf $\mathbb{P}^1$ sind stets von der Form $f(x,y)/g(x,y)$ für homogene Polynome f und g vom gleichen Grad und haben daher gleich viele Null- wie Polstellen.

Ist s ein rationaler Schnitt eines Geradenbündels $\mathcal{L}$ – das heißt ein auf einer offenen dichten Teilmenge definierter Schnitt –, so lässt sich ebenfalls ein Null- und Polstellendivisor $\operatorname{div}(s)$ definieren. Denn lokal gibt es einen Isomorphismus $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{O}_X$, und $\operatorname{div}(\varphi(s))$ ist bereits erklärt. Andere Wahlen einer lokalen Trivialisierung ändern $\varphi(s)$ nur um eine invertierbare Funktion ab und haben daher keine Auswirkung auf den Null- und Polstellendivisor, weswegen $\operatorname{div}(s)$ global wohldefiniert ist.

Rationale Funktionen sind dasselbe wie Schnitte des trivialen Geradenbündels $\mathcal{O}_X$. Die beiden Definitionen für den Null- und Polstellendivisors einer rationalen Funktion stimmen miteinander überein.

Warnung 2.3. Divisoren der Form $\operatorname{div}(s)$, wobei s ein rationaler Schnitt eines Geradenbündels ist, sind trotz des gegenteiligen Anscheins im Allgemeinen *nicht* Hauptdivisoren.

Tatsächlich zeigt eine Konstruktion, zu der wir gleich kommen werden, dass *jeder* Divisor der Null- und Polstellendivisor eines geeigneten Schnitts eines geeigneten Geradenbündels ist. Das ist in der algebraischen bzw. holomorphen Welt etwas besonderes (wieso?).

Das assoziierte Bündel zu einem Divisor

Definition 2.4. Sei D ein Divisor auf X. Dann ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{O}_X(D)$ für offene Teilmengen $U \subseteq X$ durch folgende Setzung definiert. Damit die Nullfunktion ein Schnitt von $\mathcal{O}_X(D)$ ist, gelte konventionsgemäß $D + \operatorname{div}(0) \geq 0$.

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) := \{ f \in \mathcal{K}_X(U) \mid D + \operatorname{div}(f) \geq 0 \text{ auf } U \}$$

Positive Anteile in D erlauben also, dass Schnitte von $\mathcal{O}_X(D)$ Polstellen besitzen dürfen; negative Anteile erzwingen Nullstellen. Da $\mathcal{O}_X(D)$ als Geradenbündel eine kohärante Garbe ist, ist $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ endlich-dimensional, und es ist eine interessante Frage, die Dimension dieses Raums zu bestimmen.

Beispiel 2.5. Ist $D = \mathrm{div}(f_0)$ ein Hauptdivisor, so ist $\mathcal{O}_X(D)$ vermöge des Morphismus $\mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_X$, $f \mapsto ff_0$ global isomorph zu $\mathcal{O}_X$. (Wieso liegt ff_0 wirklich in $\mathcal{O}_X$?)

Beispiel 2.6. Sei $X = \mathbb{P}^1$ mit den Koordinaten x und y und sei $H = V(x)$. Dahh besitzt $\mathcal{O}(H)$ den globalen Schnitt 1. Die Garbe $\mathcal{O}(-H)$ hat nur den Nullschnitt als globalen Schnitt, denn es gibt keine nichttrivialen rationalen Funktionen auf $\mathbb{P}^1$, welche zwar eine Nullstelle besitzen müssen, aber keine Pole haben dürfen. Auf der standardoffenen Menge $D(y)$ besitzt die Garbe $\mathcal{O}(-H)$ den Schnitt x/y (der Pol bei $[1:0]$ zählt nicht, da $[1:0] \notin D(y)$), auf $D(x)$ den Schnitt 1.

Es ist nicht offensichtlich, dass die Modulgarbe $\mathcal{O}_X(D)$ zu einem Divisor D lokal frei ist. Dazu benötigen wir folgendes Faktum:[12]

Fakt 2.7. *Sei D ein Divisor. Dann gibt es um jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ und eine rationale Funktion $f_0 \in \mathcal{K}_X(U)$, sodass lokal auf U gilt: $D = \mathrm{div}(f_0)$. (XXX Quelle)*

Beispiel 2.8. Sei $H = V(x)$ auf $\mathbb{P}^1$. Auf $D(x)$ gilt $[H] = \mathrm{div}(1) = 0$, auf $D(y)$ gilt $[H] = \mathrm{div}(x/y)$. Die lokalen Funktionen 1 und x/y besitzen auf $D(x)$ bzw. $D(y)$ keine Polstellen; das ist bei effektiven Divisoren immer so. Ein anderes Beispiel liefert $-H$: Auf $D(x)$ gilt $-[H] = \mathrm{div}(1)$, auf $D(y)$ gilt $-[H] = \mathrm{div}(y/x)$.

Ist $x \in X$ ein Punkt, so liefert das Faktum eine trivialisierende Umgebung U für $\mathcal{O}_X(D)$: Auf U gilt $D = \mathrm{div}(f_0)$, wie in Beispiel 2.5 ist daher $\mathcal{O}_X(D)|_U \to \mathcal{O}_X|_U$, $f \mapsto ff_0$ ein Isomorphismus.

Definition 2.9. Die Menge der Geradenbündel auf X modulo Isomorphie, versehen mit dem Tensorprodukt als Gruppenstruktur, ist die *Picard-Gruppe* $\mathrm{Pic}(X)$ von X. Die Menge der Divisoren auf X modulo linearer Äquivalenz, versehen mit der Addition von Divisoren, ist die *Divisorklassengruppe* $\mathrm{Div}(X)$ von X.

Proposition 2.10. *Die Zuordnung $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ definiert eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen Divisoren auf X und Untergeradenbündeln von $\mathcal{K}_X$. Ferner steigt sie zu einer Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen den Divisoren auf X modulo linearer Äquivalenz und den Geradenbündeln auf X modulo Isomorphie ab.*

Beweis. Ist ein Geradenbündel zusammen mit einer Einbettung $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{K}_X$ gegeben, so können wir einen Divisor D als Null- und Polstellendivisor desjenigen rationalen Schnitts von $\mathcal{L}$ definieren, welcher zum Schnitt $1 \in \mathcal{K}_X$ korrespondiert. Man kann zeigen, dass ein solcher stets existiert – dabei geht die Voraussetzung ein, dass $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel ist.

[12] Dieses drückt die Korrespondenz zwischen Weil- und Cartier-Divisoren aus und benötigt zwingend eine Form von Glattheit. XXX Quelle für Gegenbeispiele

Da $\mathcal{O}_X(D)$ für Hauptdivisoren D trivial ist (Beispiel 2.5), steigt die Korrespondenz ab. Man kann zeigen, dass unter unseren Voraussetzungen an X jedes Geradenbündel auf unkanonische Art und Weise eine Untergarbe von $\mathcal{K}_X$ ist. □

Lemma 2.11. *Für Divisoren D und D' gilt $\mathcal{O}_X(D+D') \cong \mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D')$ auf kanonische Art und Weise. Außerdem gilt $\mathcal{O}_X(-D) \cong \mathcal{O}_X(D)^\vee$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Der Träger eines effektiven Divisors

Ist D ein effektiver Divisor, so ist $\mathcal{O}_X(-D)$ auf kanonische Art und Weise eine Untergarbe von $\mathcal{O}_X$.[13] Das gibt Anlass zur kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_* \mathcal{O}_V \longrightarrow 0,$$

die ein abgeschlossenes Unterschema $V := V(\mathcal{O}_X(-D))$ definiert – die Vereinigung der in D vorkommenden Hyperflächen. Dieses (oder seine Reduktion) heißt *Träger* von D.

Beispiel 2.12. Die Idealgarbe zu einem einpunktigen Unterschema in $\mathbb{P}^1$ durch $\mathcal{O}(-1)$ gegeben. Die Idealgarbe einer Hyperfläche, welche durch eine homogene Gleichung vom Grad d ausgeschnitten wird, ist $\mathcal{O}(-d)$.

Divisoren auf $\mathbb{P}^1$

Sei H eine Hyperebene in $\mathbb{P}^n$.

Proposition 2.13. *Der Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{Div}(\mathbb{P}^n)$, $m \mapsto \mathcal{O}(mH)$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Das Bündel $\mathcal{O}(mH)$ ist isomorph zu Serres Twistinggarbe $\mathcal{O}(m)$. Ist etwa $H = V(x_0)$, so ist ein Isomorphismus durch $f \mapsto x_0^m f$ gegeben.

Divisoren auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

XXX

3 Der Satz von Riemann–Roch für Kurven

Fakt 3.1. *Der Grad eines Hauptdivisors auf einer* kompakten *Kurve ist stets Null.*

Definition 3.2. Der *Grad* eines Geradenbündels $\mathcal{L}$ auf einer kompakten Kurve ist der Grad eines Divisors D mit $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$.

[13] Die Inklusion $\mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X$ bleibt auf faserniveau $\mathcal{O}_X(-D)|_x \to \mathcal{O}_X|_x$ nicht unbedingt für alle Punkte x injektiv. Man sollte sich hier also nicht ein Unterbündel eines Geradenbündels vorstellen.

Dank Proposition 2.10 und des Faktums ist diese Setzung wohldefiniert. Anschaulich ist der Grad eines Geradenbündels die Anzahl der Null- und Polstellen, entsprechend gewichtet, die jeder nichttriviale rationale Schnitt von $\mathcal{L}$ hat. Dass alle nichttrivialen rationalen Schnitte dasselbe Null- und Polstellenverhalten zeigen, ist charakteristisch für die *Starrheit* algebraischer bzw. holomorpher Geometrie.

Beispiel 3.3. Der Grad von Serres Twistinggarbe $\mathcal{O}(m)$ auf $\mathbb{P}^n$ ist m.

Bemerkung 3.4. Den Grad eines Vektorbündels $\mathcal{L}$ auf einer kompakten Kurve X kann man auch rein topologisch beschreiben. Ist $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(X, \mathbb{Z})$, so gilt $\deg \mathcal{L} = \int_X c_1(\mathcal{L})$. (XXX Quelle)

Im ersten Abschnitt wurde versprochen, dass die Euler-Charakteristik einer kohärenten Garbe nur von diskreten Invarianten der Garbe abhängt und daher leicht zu berechnen sei. Für den Fall von Geradenbündeln auf Kurven löst der Satz von Riemann–Roch dieses Versprechen ein:

Satz 3.5 (Riemann–Roch für Kurven)**.** *Sei X eine kompakte Kurve und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X. Dann gilt $\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}) + \deg \mathcal{L}$.*

Ravi Vakil nennt diese Formulierung *Baby-Variante* (XXX Quelle), da in $\chi(\mathcal{L})$ noch der schlecht zugängliche Summand $\dim H^1(X, \mathcal{L})$ vorkommt. Mit *Serre-Dualität* kann man diesen noch umschreiben, sodass nur noch nullte Kohomologie vorkommt.

Beweis. Wegen Proposition 2.10 genügt es, die Behauptung für Geradenbündel der Form $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ nachzuweisen, also $\deg D = \chi(\mathcal{O}(D)) - \chi(\mathcal{O}_X)$ nachzurechnen. Für den trivialen Divisor $D = 0$ ist das klar.

Gelte für zwei Divisoren D und D' die Beziehung $D = D' + [P]$, wobei P ein Punkt auf X ist. Zum Unterschema $P \subseteq X$ gibt es die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-P) \longrightarrow O \longrightarrow \mathcal{O}_P \longrightarrow 0.$$

Dabei ist $\mathcal{O}_P$ eine im Punkt P konzentrierte Wolkenkratzergarbe; dort hat sie den Halm $\mathbb{C}$. (Eigentlich sollten wir $i_*\mathcal{O}_P$ schreiben, wobei $i : P \hookrightarrow X$ die Einbettung ist.) Nach Tensorieren mit $\mathcal{O}_X(D)$ erhalten wir die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(D-P) \longrightarrow \mathcal{O}(D) \longrightarrow \mathcal{O}_P \longrightarrow 0,$$

welche immer noch exakt ist, da Tensorieren mit lokal freien Garben Exaktheit erhält. Der rechte Term sollte eigentlich $\mathcal{O}_P \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$ sein, aber da $\mathcal{O}_P$ nur Träger auf P hat und $\mathcal{O}_X(D)$ auf einer Umgebung von P frei ist, gilt $\mathcal{O}_P \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_P \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_P$. Wegen der Additivität der Euler-Charakteristik folgt

$$\begin{aligned} \deg D - \chi(\mathcal{O}(D)) + \chi(\mathcal{O}_X) &= (\deg D' + 1) - \chi(\mathcal{O}(D')) - \chi(\mathcal{O}_P) + \chi(\mathcal{O}_X) \\ &= \deg D' - \chi(\mathcal{O}(D')) + \chi(\mathcal{O}_X), \end{aligned}$$

also gilt die Behauptung genau dann für D, wenn sie für D' gilt. In der Rechnung haben wir $\chi(\mathcal{O}_P) = 1$ verwendet – als Wolkenkratzergarbe hat $\mathcal{O}_P$ nur Kohomologie in Dimension Null.

Da jeder Divisor aus dem trivialen Divisor durch eine endliche Anzahl von Additionen und Subtraktionen von Punkten entsteht, ist der Beweis vollständig. $\square$