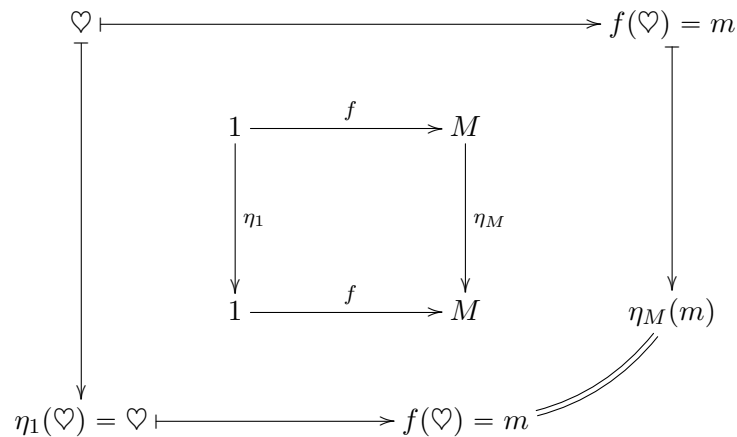


Pizzaseminar zur Kategorientheorie

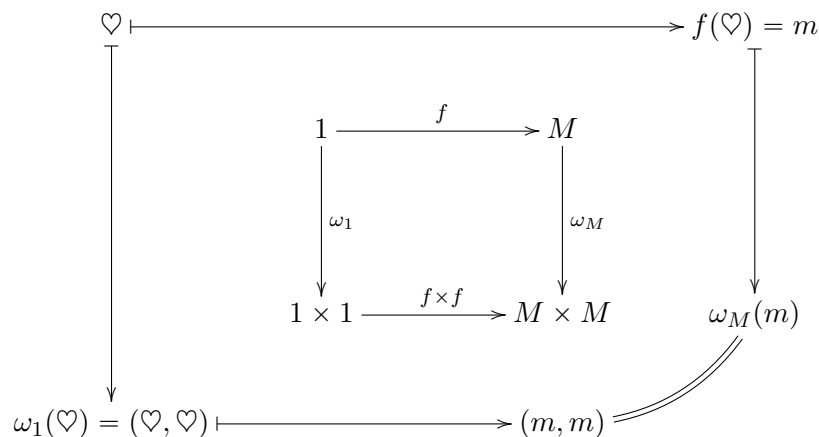
Lösung zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1:

- a) Sei M eine Menge, $m \in M$ beliebig und $\eta : \text{Id}_{\text{Set}} \Rightarrow \text{Id}_{\text{Set}}$ eine natürliche Transformation. Wir wollen beweisen, dass $\eta_M(m) = m$ ist. Wir definieren dazu $1 := \{\heartsuit\}$ und $f : 1 \rightarrow M, \heartsuit \mapsto m$. Die Aussage folgt nun durch eine Diagrammjagd im Natürlichkeitsdiagramm von η :



- b) Sei M eine Menge, $m \in M$ beliebig und $\omega : \text{Id}_{\text{Set}} \Rightarrow K$ eine natürliche Transformation. Wir wollen wieder den gleichen Trick wie in Teilaufgabe a) anwenden. Dazu definieren wir wie oben $f : 1 \rightarrow M, \heartsuit \mapsto m$ und führen dann eine Diagrammjagd durch:

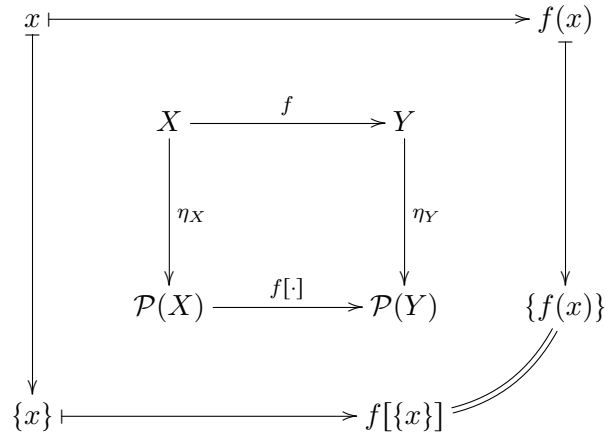


- c) Angenommen, es gäbe eine natürliche Transformation $\epsilon : P \Rightarrow \text{Id}_{\text{Set}}$. Dann würde die Komponente ϵ_{\emptyset} von $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ nach \emptyset verlaufen, also hätte die leere Menge ein Element $f(\emptyset)$. Widerspruch.

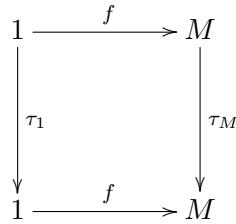
In die andere Richtung gibt es eine natürliche Transformation $\eta : \text{Id}_{\text{Set}} \Rightarrow P$ mit

$$\eta_X : X \rightarrow \mathcal{P}(X), \quad x \mapsto \{x\}.$$

Wir müssen noch die Natürlichkeit überprüfen. Seien dazu X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir machen eine Diagrammjagd, dieses Mal aber um die Kommutativität des Diagramms zu beweisen:



- d) Betrachte die Menge $M := \{1, 2\}$. Sei $f : 1 \rightarrow M$ die Funktion, die \heartsuit auf das Element aus M schickt, das nicht das ausgewählte Element a_M ist. Wenn τ eine natürliche Transformation wäre, müsste folgendes Diagramm kommutieren:



Dieses Diagramm kommutiert aber gerade nicht, da τ_M die Funktion ist, die alles konstant auf a_M schickt und wir f geschickterweise so gewählt haben, dass der Wert von f eben nicht a_M ist.

- e) In der Kategorie der reellen Vektorräume gibt es für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die natürliche Transformation μ gegeben durch

$$\mu_V : V \rightarrow V, \quad v \mapsto \lambda v$$

wie man leicht nachrechnet, wenn man sich an die Eigenschaften von linearen Funktionen erinnert.

Sind das schon alle natürlichen Transformationen von $\text{Id}_{\mathbb{R}\text{-Vect}}$ nach $\text{Id}_{\mathbb{R}\text{-Vect}}$? Angenommen, wir haben eine solche natürliche Transformation η gegeben. Sei V ein reeller Vek-

torraum und $v \in V$ beliebig. Wir definieren die lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow V$, $r \mapsto rv$ und betrachten das Natürlichkeitsdiagramm von η :

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{\quad} & f(1) = v \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad f \quad} & V \\
 \downarrow \eta_{\mathbb{R}} & & \downarrow \eta_V \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad f \quad} & V \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \eta_{\mathbb{R}}(1) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & f(\lambda) = \lambda v
 \end{array}$$

$\eta_V(v)$

Dadurch sehen wir, dass η tatsächlich die Form $\eta_V(v) = \lambda v$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzen muss.

Aufgabe 2:

- a) Mit folgendem Lemma lassen sich diese und viele weitere ähnliche Aussagen elegant beweisen:

Lemma 1. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien mit Quasi-Inversem $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. Dann sind F und G volltreu und wesentlich surjektiv.

Beweis. Seien $\eta : G \circ F \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ und $\mu : F \circ G \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ die natürlichen Isomorphismen der Kategorienäquivalenz. Dann ist jedes $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ isomorph zu $G(F(A))$ mit dem Isomorphismus $\eta_A : G(F(A)) \rightarrow A$ und der Funktor G damit wesentlich surjektiv.

Es kommutiert für alle $A \xrightarrow{f} B \in \mathcal{C}$ das erweiterte Natürlichkeitsdiagramm von η :

$$\begin{array}{ccc}
 GFA & \xrightarrow{G(F(f))} & GFB \\
 \uparrow \eta_A^{-1} & & \uparrow \eta_B^{-1} \\
 A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B
 \end{array}$$

Hieraus kann man direkt ablesen, dass $(G \circ F) : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(GFA, GFB)$ eine Bijektion mit Umkehrabbildung

$$g : \text{Hom}(GFA, GFB) \rightarrow \text{Hom}(A, B), \quad m \mapsto \eta_B \circ m \circ \eta_A^{-1}$$

ist. Insbesondere sind für alle $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ der Funktor

$$F : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(FA, FB)$$

injektiv und

$$G : \text{Hom}(FA, FB) \rightarrow \text{Hom}(GFA, GFB)$$

surjektiv auf Hom-Mengen. Wir können sogar zeigen, dass G ist surjektiv auf $\text{Hom}(E, P)$ für alle $E, P \in \text{Ob } \mathcal{D}$ ist. Sei dazu $f \in \text{Hom}(GE, GP)$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} f &= G(\mu_P) \circ \underbrace{(G(\mu_P^{-1}) \circ f \circ G(\mu_E))}_{\in \text{Hom}(GFGE, GF GP)} \circ G(\mu_E^{-1}) \\ &= G(\mu_P) \circ G(h) \circ G(\mu_E^{-1}) \\ &= G(\underbrace{\mu_P \circ h \circ \mu_E^{-1}}_{\in \text{Hom}(E, P)}) \end{aligned}$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt ausgenützt, dass, wie schon bewiesen,

$$G : \text{Hom}(FGE, FGP) \rightarrow \text{Hom}(GFGE, GF GP)$$

surjektiv ist.

Da die Voraussetzungen symmetrisch in F und G sind, ist F auch surjektiv und G injektiv auf Hom-Mengen und G wesentlich surjektiv. Nach Definition sind F und G damit volltreu. \square

Zum Beweis der eigentlichen Aufgabe: Sei 0 initiales Objekt in \mathcal{C} und $X \in \text{Ob } \mathcal{D}$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass FX initial in \mathcal{D} ist, es also genau einen Morphismus von $F0$ nach X gibt. Da X isomorph zu FGX und der Funktor F volltreu ist, haben wir eine Bijektion

$$\text{Hom}(F0, X) \cong \text{Hom}(F0, FGX) \cong \text{Hom}(0, GX).$$

Weil 0 initial ist, enthält die rechte Hom-Menge und somit auch die linke Hom-Menge genau einen Morphismus.

- b) Wir bezeichnen die Kategorie der Möchtegern-Produkte von X und Y mit $\text{MP}_{X,Y}$, die der Möchtegernprodukte von Y und X mit $\text{MP}_{Y,X}$. Da Möchtegern-Produkte von X und Y aus Symmetriegründen auch Möchtegernprodukte von Y und X sind, können wir den Funktor $F : \text{MP}_{X,Y} \rightarrow \text{MP}_{Y,X}$ definieren:

$$\begin{aligned} \left(X \xleftarrow{\pi_X} Q \xrightarrow{\pi_Y} Y \right) &\mapsto \left(Y \xleftarrow{\pi_Y} Q \xrightarrow{\pi_X} X \right) \\ \left(\begin{array}{ccc} & Q & \\ \swarrow & \downarrow f & \searrow \\ X & & Y \\ \nwarrow & \downarrow & \nearrow \\ & R & \end{array} \right) &\mapsto \left(\begin{array}{ccc} & Q & \\ \swarrow & \downarrow f & \searrow \\ Y & & X \\ \nwarrow & \downarrow & \nearrow \\ & R & \end{array} \right) \end{aligned}$$

Den zu F quasi-inversen Funktor $G : \text{MP}_{Y,X} \rightarrow \text{MP}_{X,Y}$ definieren wir genau spiegelverkehrt zu F . Wie man leicht nachprüft, ergeben F und G eine Äquivalenz von $\text{MP}_{X,Y}$ und $\text{MP}_{Y,X}$ wobei die natürlichen Transformationen zwischen F und G nur aus den Identitätsmorphisamen bestehen.

Ein initiales Objekt in $\text{MP}_{X,Y}$ ist ein Produkt von X und Y , ein initiales Objekt in $\text{MP}_{Y,X}$ ein Produkt von Y und X . Mit Teilaufgabe a) folgt, dass ein Produkt von X und Y auch ein Produkt von Y und X ist und umgekehrt.

Aufgabe 3:

Wähle für jeden endlichdimensionalen Vektorraum V eine feste Basis $(b_1, \dots, b_{\dim V})$ und definiere das Koordinatensystem η_V bezüglich dieser Basis durch die Setzung

$$\eta_V : \mathbb{R}^{\dim V} \rightarrow V, \quad e_i \mapsto b_i.$$

Zwischen der Numerikerkategorie \mathcal{C} und der $\mathbb{R}\text{-Vect}_{\text{FD}}$ verlaufen die Funktoren

$$\begin{aligned} F : \quad & \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}\text{-Vect}_{\text{FD}} \\ & \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n \\ & M \in \mathbb{R}^{m \times n} \longmapsto \text{die von der Matrix } M \text{ dargestellte lineare Abbildung} \\ & \quad \text{zwischen } \mathbb{R}^n \text{ und } \mathbb{R}^m \text{ bezüglich der kanonischen Basen} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G : \quad & \mathbb{R}\text{-Vect}_{\text{FD}} \longrightarrow \mathcal{C} \\ & V \longmapsto \mathbb{R}^{\dim V} \\ & (f : V \rightarrow W) \longmapsto \eta_W^{-1} \circ f \circ \eta_V \text{ (bzw. die Matrix dieser Abbildung)} \end{aligned}$$

Diese Funktoren bilden eine Äquivalenz zwischen den beiden Kategorien, da folgende Natürlichkeitsdiagramme für alle $(V \xrightarrow{f} W) \in \mathbb{R}\text{-Vect}_{\text{FD}}$ bzw. $(\mathbb{R}^n \xrightarrow{M} \mathbb{R}^m) \in \mathcal{C}$ offensichtlich kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} GFV & \xrightarrow{GF M = \eta_W^{-1} \circ M \circ \eta_V} & GFW \\ \downarrow \eta_V & & \downarrow \eta_W \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{M} & \mathbb{R}^m \end{array} \quad \begin{array}{ccc} FGV & \xrightarrow{FG f = \eta_W^{-1} \circ f \circ \eta_V} & FGW \\ \downarrow \eta_V & & \downarrow \eta_W \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Projektaufgabe:

Wir haben einen Morphismus $\varphi : A \rightarrow B$ gegeben und wollen eine natürliche Transformation $\eta : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(_, A) \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(_, B)$ finden, d.h. es muss für alle $f : Y \rightarrow X$ aus \mathcal{C} das Natürlichkeitsdiagramm kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) & \xrightarrow{g \mapsto g \circ f} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) \\ \downarrow \eta_X & & \downarrow \eta_Y \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B) & \xrightarrow{g \mapsto g \circ f} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, B) \end{array}$$

Wir setzen $\eta_Z := (g \mapsto \phi \circ g)$. Wenn wir nun einen Morphismus $p : X \rightarrow A$ im Diagramm von oben links nach unten rechts verfolgen, erhalten wir einerseits $((\varphi \circ p) \circ f)$ und andererseits $(\varphi \circ (p \circ f))$. Aufgrund der Assoziativität der Verknüpfung von Morphismen sind diese Ergebnisse gleich und das Diagramm kommutiert wie gewünscht.