Bemerkung zu Treppenfunktionen in der Analysis II

Es gibt eine sehr elegante Art und Weise, um den Integralbegriff kategoriell zu definieren. Das macht diese Notiz nicht. Wir können aber den konventionellen Zugang, wie er gerade in der Analysis-II-Vorlesung gelehrt wird, kategoriell verstehen.

Dazu beobachten wir, dass wir auf der Menge der Zerlegungen eines festen Intervalls $[a, b]$ sogar eine Partialordnung definieren können:

$$Z \preceq Z' \quad :\Longleftrightarrow \quad Z' \text{ ist feiner als } Z \quad :\Longleftrightarrow \quad Z \subseteq Z'.$$

Somit können wir die Zerlegungen von $[a, b]$ sogar zu einer *Kategorie* organisieren. (Diese ist sogar *filtriert*, da es wenigstens eine Zerlegung gibt und je zwei zu einer gemeinsamen verfeinert werden können.)

Zu jeder Zerlegung Z haben wir den Vektorraum

$$T_Z := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ konstant auf den inneren Teilstücken von } Z\}$$

der Treppenfunktionen zu Z. Ist Z' eine feinere Zerlegung, haben wir die kanonische Inklusionsabbildung $T_Z \longrightarrow T_{Z'}$. Somit liegt hier tatsächlich ein *Diagramm* (Funktor) vor:

$$\begin{array}{rcl} \text{Kategorie der Zerlegungen von } [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R}\text{-Vect} \\ Z & \longmapsto & T_Z. \end{array}$$

Der *Kolimes* dieses Diagramms ist gerade der Vektorraum aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$. Wie kommt nun Integration ins Spiel? Jeder der Vektorräume T_Z erlaubt die kanonische Integrationsabbildung

$$\begin{array}{rcl} T_Z & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} (\text{Wert von } f \text{ auf } (x_{j-1}, x_j)) \cdot (x_j - x_{j-1}), \end{array}$$

wobei $Z = \{x_0 < \cdots < x_n\}$. Diese Abbildungen sind miteinander in dem Sinn verträglich, als dass für $Z \preceq Z'$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_Z \arrow[rr] \arrow[dr] & & T_{Z'} \arrow[dl] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Diese Abbildungen definieren also tatsächlich einen *Kokegel*! Da $T_{[a,b]}$ der initiale Kokegel ist, wird somit eine Abbildung

$$T_{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$$

induziert. Das ist die Integrationsabbildung für Treppenfunktionen aus der Analysis II.