Universität Augsburg
16. März 2013
Matthias Hutzler

Pizzaseminar zur Kategorientheorie

Lösung zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1:

a) Zu zeigen: Es gibt Morphismen $X \to X$ und $X \to 1$, mit denen X ein Produkt von X und 1 ist.

Wähle als Morphismen $\mathrm{id}_X : X \to X$ und den (da 1 terminales Objekt ist) eindeutig bestimmten Morphismus $! : X \to 1$. Nun muss für jedes Möchtegern-Produkt P mit den Morphismen $f : P \to X$ und $g : P \to 1$ genau ein Morphismus $h : P \to X$ existieren, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "!"] & \\
X & & 1 \\
& P \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}$$

Existenz von h:
Setze $h := f$. Es gilt also $\mathrm{id}_X \circ h = h = f$. (Das linke Dreieck kommutiert.) Und da $! \circ h$ und g zwei Morphismen $P \to 1$ sind (und 1 terminal ist), gilt auch $! \circ h = g$. (Das rechte Dreieck kommutiert.)

Eindeutigkeit von h:
Für jedes $h : P \to X$, das das Diagramm kommutieren lässt, gilt: $\mathrm{id}_X \circ h = f$. Es folgt also sofort $h = f$.

b) Die duale Aussage lautet:
Besitzt C ein initiales Objekt 0, so gilt

$$X \amalg 0 \cong X.$$

(X kann mit den Morphismen $\mathrm{id}_X : X \to X$ und $! : 0 \to X$ als Koprodukt von X und 0 dienen.)