Ein synthetischer Zugang zur Grassmannschen

Wir möchten zeigen, dass für lokal freie Garben $\mathcal{V}$ endlichen Rangs über einem beliebigen Basisschema S die Grassmannsche $\mathrm{Gr}(\mathcal{V}, r)$ der lokal freien Quotienten von $\mathcal{V}$ vom Rang r (definiert als Funktor wie in Carens Vortrag) durch ein S-Schema von endlichem Typ darstellbar ist.

Dazu arbeiten wir intern im großen Zariski-Topos von S. Dort sehen dann $\mathcal{O}_S$ wie ein gewöhnlicher Ring, die Modulgarbe $\mathcal{V}$ wie ein gewöhnlicher freier Modul und der Punktfunktor der Grassmannschen wie eine gewöhnlichen Menge aus; wir dürfen synthetisch arbeiten und müssen zu keinem Zeitpunkt topologische Struktur beachten, konstruieren oder mitschleppen. Das Spektrum einer Algebra wird zur Menge ihrer rationalen Punkte. Der Preis für diese Vorteile ist, dass wir konstruktiv arbeiten müssen.

Sei also V ein freier k-Modul vom Rang n. Wir werden von k nur voraussetzen, dass er ein lokaler Ring ist (obwohl er in der Anwendung sogar ein Körper ist).

Definition 1. Die *Grassmannsche der Quotienten vom Rang r von V* ist die Menge

$$\mathrm{Gr}(V, r) := \{U \subseteq V \text{ Untermodul} \,|\, V/U \text{ frei vom Rang } r\}.$$

Ferner definieren wir für jeden freien Untermodul $W \subseteq V$ vom Rang r die Teilmenge

$$G_W := \{U \in \mathrm{Gr}(V, r) \,|\, W \to V \to V/U \text{ ist bijektiv}\}.$$

Diese Menge besitzt noch eine konkretere Beschreibung, denn sie steht in kanonischer Bijektion zur Menge

$$G'_W := \{\pi : V \to W \,|\, \pi \circ \iota = \mathrm{id}\}$$

aller Zerfällungen der Inklusion $\iota : W \hookrightarrow V$: Ein Element $U \in G_W$ können wir auf die Surjektion $V \twoheadrightarrow V/U \xrightarrow{(\cong)^{-1}} W$ schicken. Umgekehrt können wir eine Zerfällung π auf $U := \ker(\pi)$ schicken.

Proposition 2. *Die Vereinigung der G_W ist ganz $\mathrm{Gr}(V, r)$.*

Beweis. Sei $U \in \mathrm{Gr}(V, r)$ beliebig. Dann gibt es eine Basis $([v_1], \ldots, [v_r])$ von V/U. Die Familie $(v_1, \ldots, v_r)$ ist in V linear unabhängig, daher ist der Untermodul $W := \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_r) \subseteq V$ frei vom Rang r. Die kanonische lineare Abbildung $W \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/U$ bildet die Basis $(v_i)_i$ auf die Basis $([v_i])_i$ ab und ist daher bijektiv. Somit liegt U in G_W. □

Proposition 3. *Die G_W sind (quasikompakt-)offene Teilmengen von $\mathrm{Gr}(V, r)$, in folgendem Sinn: Für jedes Element U aus $\mathrm{Gr}(V, r)$ gibt es Zahlen $f_1, \ldots, f_n$ aus k sodass U genau dann in G_W liegt, wenn eine dieser Zahlen invertierbar ist.*

Beweis. Sei $U \in \mathrm{Gr}(V, r)$ beliebig. Genau dann liegt U in G_W, wenn die kanonische lineare Abbildung $W \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/U$ bijektiv ist. Da W und V/U beide frei vom Rang r sind, ist diese Abbildung durch eine $(r \times r)$-Matrix M über k gegeben und daher genau dann bijektiv, wenn die Determinante dieser Zahl invertierbar ist. Wir können also $n := 1$ und $f_1 := \det(M)$ setzen. □

Proposition 4. *Die G_W sind affin in dem Sinn, dass es eine k-Algebra A gibt, sodass G_W in Bijektion zu den k-Algebrenhomomorphismen $A \to k$ steht:*

$$G_W \cong \mathrm{Hom}_k(A, k) =: \mathrm{Spec}(A).$$

Im Beweis werden wir sehen, dass wir A sogar als endlich präsentiert wählen können.

Beweis. Die Menge aller linearen Abbildungen $V \to W$ ist das Spektrum von $R := \mathrm{Sym}(\mathrm{Hom}_k(V, W)^\vee)$, denn

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(R) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}(k)}(\mathrm{Sym}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(k)}(V, W)^\vee), k) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(k)}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(k)}(V, W)^\vee, k) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(k)}(V, W)^{\vee\vee} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(k)}(V, W). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt geht ein, dass nicht nur W, sondern auch V freie Moduln endlichen Rangs sind. Es ist das erste Mal, dass wir diese Voraussetzung für V benötigen.

Die Menge G'_W ist eine abgeschlossene Teilmenge dieses Spektrums, nämlich der Ort, wo die generische lineare Abbildung $V \to W$ eine Zerfällung der Inklusion $\iota : W \hookrightarrow V$ ist. Weg mag, kann Basen von V und W wählen: Dann ist $\mathrm{Sym}(\mathrm{Hom}_k(V, W)^\vee)$ isomorph zu $k[M_{11}, \ldots, M_{rn}]$ und G'_W zu

$$\mathrm{Spec}(k[M_{11}, \ldots, M_{rn}]/(MN - I)).$$

Dabei ist I die $(r \times r)$-Einheitsmatrix, M die generische Matrix $M = (M_{ij})_{ij}$ und N die Darstellungsmatrix von ι bezüglich der gewählten Basen. Mit $(MN - I)$ ist das von den Einträgen von $MN - I$ erzeugte Ideal gemeint. □

Korollar 5. *Die Grassmannsche* $\mathrm{Gr}(V, r)$ *ist ein Schema von endlichem Typ.*

Beweis. Die Grassmannsche $\mathrm{Gr}(V, r)$ besitzt eine offene Überdeckung durch die affinen Schemata G_W und ist daher ein Schema.

Wenn wir einen Isomorphismus $V \cong k^n$ wählen, sehen wir, dass schon $\binom{n}{r}$ viele dieser affinen Schemata genügen: nämlich diese, wo W einer der Standarduntermoduln von k^n ist (erzeugt durch Einheitsvektoren).

Denn ist $U \in \mathrm{Gr}(k^n, r)$, so bildet die Surjektion $V \to V/U$ die Basis von mindestens einem dieser Standarduntermoduln auf eine Basis ab und ist daher bijektiv. (Aus einer surjektiven $(r \times n)$-Matrix über einem lokalen Ring kann man stets r Spalten auswählen, die eine linear unabhängige Familie bilden.) □

Proposition 6. *Für den Tangentialraum an $U \in$* $\mathrm{Gr}(V, r)$ *gilt:* $T_U\mathrm{Gr}(V, r) \cong \mathrm{Hom}(U, V/U)$.

Beweis. Die Menge der Tangentialvektoren an U kann kanonisch mit den Abbildungen $\gamma : \Delta \to \mathrm{Gr}(V, r)$ mit $\gamma(0) = U$ identifiziert werden. Dabei ist $\Delta := \{\varepsilon \in k \,|\, \varepsilon^2 = 0\}$. Eine solche Abbildung liftet stets zu einer Abbildung von Δ in die Menge der linear unabhängigen Familien der Länge r in V. Der Rest sei als Übungsaufgabe überlassen. Willkommen in der wunderbaren Welt synthetischer Geometrie. □

Bemerkung 7. Wiederholt man genau dieselben Argumente in einem anderen Topos – einem, der für Differentialgeometrie angepasst ist – erhält man mehr oder weniger die Darstellbarkeit der Grassmannschen als Mannigfaltigkeit. Das einzige, was fehlt, ist ein Nachweis der Glattheit.