Universität Augsburg
20. März 2013

Pizzaseminar zur Kategorientheorie
4. Übungsblatt

Aufgabe 1: Sei $\mathrm{Id}_{\mathsf{Set}} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ der Identitätsfunktor auf Set, $P : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ der (kovariante) Potenzmengenfunktor und $K : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ der Funktor

$$\begin{aligned} X &\longmapsto X \times X \\ f &\longmapsto f \times f := ((a,b) \mapsto (f(a), f(b))). \end{aligned}$$

a) Zeige: Es gibt nur eine einzige natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Id}_{\mathsf{Set}} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{Set}}$, nämlich

$$\eta_X : X \to X,\ x \mapsto x.$$

b) Zeige: Es gibt nur eine einzige natürliche Transformation $\omega : \mathrm{Id}_{\mathsf{Set}} \Rightarrow K$, nämlich

$$\omega_X : X \to X \times X,\ x \mapsto (x, x).$$

Tipp für a) und b): Betrachte geeignete Abbildungen $1 \to X$, $\star \mapsto x$.

c) Zeige: Es gibt keine natürliche Transformation $P \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{Set}}$, wohl aber eine in die andere Richtung.

d) Wir nehmen an, dass wir für jede nichtleere Menge X ein bestimmtes Element $a_X \in X$ gegeben haben. Zeige: Die Setzung $\tau_X : X \to X,\ x \mapsto a_X$ definiert *nicht* eine natürliche Transformation $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, wobei $\mathcal{C}$ die Kategorie der nichtleeren Mengen und beliebigen Abbildungen bezeichnet.

e) Welche natürlichen Transformationen $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ gibt es, wenn $\mathcal{C}$ die Kategorie der reellen Vektorräume bezeichnet?

Aufgabe 2:

a) Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien, mit Quasi-Inversem $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Sei X ein Objekt von $\mathcal{C}$. Zeige: X initial in $\mathcal{C} \iff F(X)$ initial in $\mathcal{D}$.

b) Seien nun X und Y Objekte einer Kategorie $\mathcal{E}$. Zeige, dass die Kategorie der Möchtegern-Produkte von X und Y äquivalent zur Kategorie der Möchtegern-Produkte von Y und X ist. Welche bekannte Aussage folgt daher mit a)?

Aufgabe 3: Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie mit

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} &:= \{\mathbb{R}^n \mid n \geq 0\}, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) &:= \mathbb{R}^{m \times n}, \end{aligned}$$

wobei die Morphismenverkettung durch die Matrixmultiplikation gegeben ist. Zeige: Die Kategorie $\mathcal{C}$ ist äquivalent zur Kategorie der endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Tipp: Wähle für jeden endlich-dimensionalen Vektorraum V einen Iso $\eta_V : \mathbb{R}^{\dim V} \to V$.

Projektaufgabe: Sei $\varphi : A \to B$ ein Morphismus in einer lokal kleinen Kategorie $\mathcal{C}$. Bastele daraus eine natürliche Transformation der Hom-Funktoren

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, A) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, B).$$