

Pizzaseminar zur Kategorientheorie

8. Übungsblatt

Aufgabe 1. *Permutationen und lineare Ordnungen*

Vergleiche die beiden Spezies

- **Perm** : $A \mapsto \{\sigma : A \rightarrow A \mid \sigma \text{ bijektive Abbildung}\}$
- **LinO** : $A \mapsto \{\text{Anordnungen der Elemente von } A \text{ in einer Reihe}\}$

der Permutationen und der linearen Ordnungen. Begründe, warum gilt:

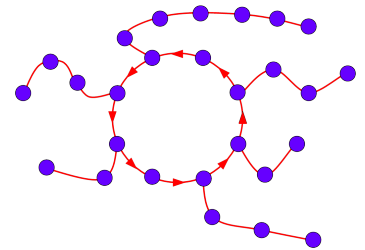
$$\mathbf{Perm} = \mathbf{E}(\mathbf{Cyc})$$

$$\mathbf{LinO} = 1 + \mathbf{X} \cdot \mathbf{LinO}$$

Zeige, daß beide Spezies dieselbe erzeugende Funktion besitzen. Sind sie auch natürlich isomorph?

Aufgabe 2. *Oktopusse*

Das nebenstehende Bild zeigt einen Vertreter der *Oktopusse*.
Formuliere eine genaue Definition dieser Spezies.



Aufgabe 3. *Botanik*

Auf <https://sage.math.uni-augsburg.de/home/pub/0/> finden sich einige Beispiele zu Bäumen. Passe diese Beispiele für folgende Aufgaben an:

- a) Ein *Informatiker-Baum* ist eine Struktur aus Knoten (beginnend mit einem Wurzelknoten), wobei jedem Knoten ein Wert und eine Liste von weiteren Knoten (Sprösslingen) zugeordnet ist. Außer dem Wurzelknoten muß jeder Knoten in genau einer Liste genau einmal vorkommen.

Definiere diese Spezies und berechne die Anzahl der Möglichkeiten, fünf Werte in Informatiker-Bäume zu verpacken. (Antwort: 1680)

- b) Ein *Busch* besteht aus einer Anzahl von Blättern und einer Anzahl von Knoten, verwurzelt an einem Wurzelknoten. Jeder Knoten verzweigt in eine Menge von 2, 3 oder 4 Sprösslingen. Ein Sprössling kann entweder ein Blatt oder ein weiterer Knoten sein.

Bastele aus dieser Information eine Spezies und berechne die Anzahl aller Büsche mit fünf Blättern,

- falls die Blätter unterscheidbar sind. (Antwort: 235)
- falls die Blätter nicht unterscheidbar sind. (Antwort: 11)

Mehr: François Bergeron, Gilbert Labelle, Pierre Leroux.

Introduction to the Theory of Species of Structures, 2008.

http://bergeron.math.uqam.ca/Site/bergeron_uqam_files/livre_combinatoraire_2.pdf