Universität Augsburg
13. August 2013

Pizzaseminar
Lösung zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1. *Diskretheit der natürlichen Zahlen*

Durch Induktion über n:

- Fall 1: $n = 0$. Falls $m = 0$, so ist $n = m$. Wenn jedoch m Nachfolger einer natürlichen Zahl $\widetilde{m}$ ist, so ist $n \neq m$, da $n = 0$ kein Nachfolger einer natürlichen Zahl ist.
- Fall 2: $n = S(\widetilde{n})$: Falls $m = 0$, so ist $n \neq m$, da m nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl ist. Falls $m = S(\widetilde{m})$, so können wir anhand der Induktionsvorraussetzung feststellen, ob $\widetilde{n} = \widetilde{m}$ gilt. Ist dies der Fall, so gilt offensichtlich auch $n = S(\widetilde{n}) = S(\widetilde{m}) = m$. Wenn jedoch $\widetilde{n} \neq \widetilde{m}$ gilt, so gilt auch $n \neq m$, da sonst aufgrund von Axiom 4 $\widetilde{n} = \widetilde{m}$ wäre.

Das Prinzip der Induktion (angewendet über n und versteckt auch über m als Fallunterscheidung) können wir dabei mit Axiom 5 rechtfertigen: Für jede Aussage A über natürliche Zahlen können wir die Menge

$$M = \{n \in \mathbb{N} : A(n)\}$$

bilden. Wenn wir beweisen, dass $0 \in M$ und außerdem $S(p) \in M$ für jede natürliche Zahl p, so folgt aus Axiom 5, dass $M = \mathbb{N}$ und somit gilt $A(n)$ für jede natürliche Zahl n.

Aufgabe 2. *Konstruktive Tautologien*

Seien φ und ψ (bzw. $\psi(x)$) beliebige Aussagen.

a) Zu zeigen: $\varphi \implies \neg\neg\varphi$. Erinnerung: $\neg\neg\varphi$ ist nur eine andere Schreibweise für $(\varphi \implies \bot) \implies \bot$. Angenommen, es gilt φ und $\varphi \implies \bot$. Dann folgt sofort $\bot$.

b) Zu zeigen: $(\varphi \Rightarrow \psi) \implies (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$. Gelte $\varphi \Rightarrow \psi$ und $\neg\psi$, also $\psi \implies \bot$. Gelte außerdem φ. Dann gilt auch ψ (nach der ersten Vorraussetzung), also auch $\bot$ (nach der zweiten Vorraussetzung).

c) Zu zeigen: $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$. Gelte $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$. Dann gilt auch $\neg\varphi$, denn aus φ folgt $\varphi \vee \neg\varphi$ und daraus nach Vorraussetzung $\bot$. Somit haben wir auch $\varphi \vee \neg\varphi$ und es folgt aus derselben Vorraussetzung $\bot$.

d) Zu zeigen: $\neg\neg\exists x \in A\colon \psi(x) \iff \neg\forall x \in A\colon \neg\psi(x)$. Wir zeigen zuerst die Hinrichtung. Gelte erstens $\neg\neg\exists x \in A\colon \psi(x)$ und zweitens $\forall x \in A\colon \neg\psi(x)$. Dann gilt auch $\neg\exists x \in A\colon \psi(x)$, da die Existenz eines $x \in A$ mit Beleg für $\psi(x)$ in Widerspruch zur zweiten Vorraussetzung stehen würde. Somit folgt aus der ersten Vorraussetzung $\bot$.
Zur Rückrichtung: Angenommen, es gilt erstens $\neg\forall x \in A\colon \neg\psi(x)$ und zweitens $\neg\exists x \in A\colon \psi(x)$. Dann gilt auch $\forall x \in A\colon \neg\psi(x)$: Sei $x \in A$ beliebig. Gelte $\psi(x)$. Das ist jedoch ein Widerspruch zur zweiten Vorraussetzung.

Bemerkung. *Es gibt Programmiersprachen, in denen mathematische Aussagen und ihre Beweise formalisiert werden können. Die formalisierten Beweise kann man sodann von einem Computerprogramm auf ihre Richtigkeit überprüfen lassen. Solche Beweise sind leicht maschinell lesbar, aber oft für Menschen schwer verständlich. Unter* `https://gist.github.com/timjb/6308420` *habe ich eine Übersetzung der Beweise obiger Tautologien in die Programmiersprache* Coq *online gestellt.*

Aufgabe 3. *Doppelnegationselimination*

- (LEM) $\Rightarrow$ (DNE): Sei ψ eine Aussage und gelte $\neg\neg\psi$. Aus LEM folgt: $\psi \vee \neg\psi$. Im ersten Fall sind wir fertig, da dieser genau unserem Ziel entspricht. Gelte also $\neg\psi$. Diese Aussage steht aber im Widerspruch zur Annahme, der zweite Fall kann also gar nicht eintreten.
- (DNE) $\Rightarrow$ (LEM): In Aufgabe 2 haben wir bewiesen, dass konstruktiv $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ für jede Aussage φ gilt. Durch Elimination der doppelten Negation erhalten wir den Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

Aufgabe 4. *Teilmengen von* $\{\star\}$

Sei φ eine Aussage. Zu zeigen: $\varphi \vee \neg\varphi$. Wir bilden die Menge

$$M = \{\star : \varphi\} \subset \{\star\}.$$

Nach Annahme ist entweder $M = \emptyset$ oder $M = \{\star\}$. Im ersten Fall haben wir $\neg\varphi$, da sonst $\star$ ein Element von M wäre. Im zweiten Fall gilt offensichtlich φ.