

# Pizzaseminar zur Kategorientheorie

17. März 2013

*in Entstehung befindlich*

T<sub>E</sub>Xer: Tim Baumann, Ingo Blechschmidt, Justin Gassner, Matthias Hutzler

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Was sollen Kategorien?</b>	<b>2</b>
1.1	Beispiele für kategorielles Verständnis . . . . .	2
1.2	Grundlagen . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Produkte und Koprodukte</b>	<b>6</b>
2.1	Beispiele . . . . .	7
2.2	Erste Eigenschaften . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Funktoren</b>	<b>8</b>
3.1	Funktoren als Diagramme . . . . .	9
3.2	Langweilige Funktoren . . . . .	10
3.3	Kontravariante Funktoren . . . . .	10
3.4	Vergissfunktoren . . . . .	11
3.5	Funktoren aus algebraischen Konstruktionen . . . . .	12
3.6	Funktoren und Mengen . . . . .	12
3.7	Funktoren und Gruppen . . . . .	13
3.8	Funktoren als Datenbanken . . . . .	14
3.9	Hom-Funktoren . . . . .	15
3.10	Weitere Beispiele . . . . .	15
3.11	Die Kategorie der Kategorien . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Natürliche Transformationen</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Limiten und Kolimiten</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Das Yoneda-Lemma</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Adjungierte Funktoren</b>	<b>17</b>

# 1 Was sollen Kategorien?

Ingo Blechschmidt

## 1.1 Beispiele für kategorielles Verständnis

### Beispiel: Produkte

Von manchen Konstruktionen in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik wird man das Gefühl nicht los, dass sie einem gemeinsamen Ursprung entstammen: Etwa kennt man. . .

- das kartesische Produkt von Mengen:  $X \times Y$ ,
- das kartesische Produkt von Vektorräumen:  $V \times W$ ,
- das kartesische Produkt von Gruppen:  $G \times H$ ,
- das kartesische Produkt von Garben:  $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ ,
- das kartesische Produkt von Vektorbündeln:  $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ ,
- das Minimum von Zahlen:  $\min\{n, m\}$ ,
- den größten gemeinsamen Teiler von Zahlen:  $\text{ggT}(n, m)$ ,
- den Paartyp in Programmiersprachen:  $(a, b)$ ,
- den Mutterknoten zweier Knoten in einem Graph.

Die Ähnlichkeit untereinander ist mal mehr, mal weniger deutlich. Nur mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Produkts*. Ferner erfüllen all diese Konstruktionen sehr ähnliche Gesetze, etwa gilt

$$\begin{aligned}X \times (Y \times Z) &\cong (X \times Y) \times Z, \\U \times (V \times W) &\cong (U \times V) \times W, \\ \min\{m, \min\{n, p\}\} &= \min\{\min\{m, n\}, p\}, \\ \text{ggT}(m, \text{ggT}(n, p)) &= \text{ggT}(\text{ggT}(m, n), p),\end{aligned}$$

wobei in der ersten Zeile  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  Mengen sein und das Isomorphiezeichen für Gleichmächtigkeit stehen soll und in der zweiten Zeile  $U$ ,  $V$  und  $W$  Vektorräume sein und das Isomorphiezeichen für Vektorraumisomorphie stehen soll. Mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle der allgemeinen Assoziativität des kategoriellen Produkts.

### Beispiel: Isomorphie

Ferner fällt auf, dass in vielen Teilgebieten der Mathematik jeweils ein speziell zugeschnittener Isomorphiebegriff vorkommt: Etwa können. . .

- zwei Mengen  $X, Y$  gleichmächtig sein,

- zwei Vektorräume  $V, W$  isomorph sein,
- zwei Gruppen  $G, H$  isomorph sein,
- zwei top. Räume  $X, Y$  homöomorph sein,
- zwei Zahlen  $n, m$  gleich sein,
- zwei Typen  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  sich verlustfrei ineinander umwandeln lassen.

All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategorischen Isomorphiekonzepts*.

### Beispiel: Dualität

Von folgenden Konzepten hat man im Gefühl, dass sie in einem gewissen Sinn *zueinander dual* sein sollten:

$f \circ g$	$g \circ f$
$\leq$	$\geq$
injektiv	surjektiv
$\{\star\}$	$\emptyset$
$\times$	$\Pi$
ggT	kgV
$\cap$	$\cup$
Teilmenge	Faktormenge

Mit Kategorientheorie versteht man: All dies sind Spezialfälle eines allgemeinen *kategorischen Dualitätsprinzips* – und diese Erkenntnis kann man nutzen, um Ergebnisse für jeweils eines der Konzepte auf sein duales Gegenstück zu übertragen.

## 1.2 Grundlagen

**Definition 1.1.** Eine *Kategorie*  $\mathcal{C}$  besteht aus

- einer Klasse von *Objekten*  $\text{Ob } \mathcal{C}$ ,
- zu je zwei Objekten  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  einer Klasse  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  von *Morphismen* zwischen ihnen und
- einer Kompositionsvorschrift:

$$\begin{array}{ll}
 \text{zu } f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \text{zu } f : X \rightarrow Y \\
 \text{und } g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) & \text{und } g : Y \rightarrow Z \\
 \text{habe } g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), & \text{habe } g \circ f : X \rightarrow Z,
 \end{array}$$

sodass

- a) die Komposition  $\circ$  assoziativ ist und  
 b) es zu jedem  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  einen *Identitätsmorphismus*  $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  mit

$$f \circ \text{id}_X = f, \quad \text{id}_X \circ g = g$$

für alle Morphismen  $f, g$  gibt.

Die Morphismen von Kategorien müssen nicht unbedingt Abbildungen sein, die Schreibweise „ $f : X \rightarrow Y$ “ missbraucht also Notation. Die genaue Bedeutung von *Klassen* im Gegensatz zu *Mengen* hängt von der persönlich gewählten logischen Fundierung der Mathematik ab. Für uns genügt folgende naive Sichtweise: Klassen können (im Gegensatz zu Mengen) beliebige mathematische Objekte enthalten, sind aber selbst nicht mathematische Objekte. Daher gibt es etwa widerspruchsfrei die Klasse aller Mengen, von einer Klasse aller Klassen kann man aber nicht sprechen.

**Beispiel 1.2.** a) Archetypisches Beispiel ist  $\text{Set}$ , die Kategorie der Mengen und Abbildungen:

$$\begin{aligned} \text{Ob } \text{Set} &:= \{M \mid M \text{ ist eine Menge}\} \\ \text{Hom}_{\text{Set}}(X, Y) &:= \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ ist eine Abbildung}\} \end{aligned}$$

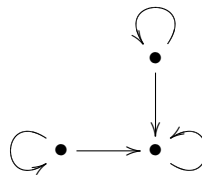
- b) Die meisten Teilgebiete der Mathematik studieren jeweils eine bestimmte Kategorie: Gruppentheoretiker beschäftigen sich etwa mit der Kategorie  $\text{Grp}$  der Gruppen und Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{aligned} \text{Ob } \text{Grp} &:= \text{Klasse aller Gruppen} \\ \text{Hom}_{\text{Grp}}(G, H) &:= \{f : G \rightarrow H \mid f \text{ ist ein Gruppenhomo}\} \end{aligned}$$

- c) Es gibt aber auch wesentlich kleinere Kategorien. Etwa kann man aus jeder Quasiordnung  $(P, \preceq)$  eine Kategorie  $\mathcal{C}$  basteln:

$$\begin{aligned} \text{Ob } \mathcal{C} &:= P \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) &:= \begin{cases} \text{einelementige Menge,} & \text{falls } x \preceq y, \\ \text{leere Menge,} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

- d) Auch sind gewisse endliche Kategorien bedeutsam, etwa die durch folgende Skizze gegebene:



**Motto 1.3** (fundamental). *Kategorientheorie stellt Beziehungen zwischen Objekten statt etwaiger innerer Struktur in den Vordergrund.*

**Definition 1.4.** Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt *lokal klein*, wenn ihre Hom-Klassen jeweils schon Mengen (statt echte Klassen) sind. Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt *klein*, wenn zusätzlich auch ihre Klasse von Objekten schon eine Menge bildet.

## Initiale und terminale Objekte

In Kategorien sind folgende zwei Arten von Objekten aufgrund ihrer ausgezeichneten Beziehungen zu allen (anderen) Objekten besonders wichtig:

**Definition 1.5.** Ein Objekt  $X$  einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt genau dann

- *initial*, wenn

$$\forall Y \in \text{Ob } \mathcal{C}: \exists ! f : X \rightarrow Y.$$

- *terminal*, wenn

$$\forall Y \in \text{Ob } \mathcal{C}: \exists ! f : Y \rightarrow X.$$

Diese Definitionen geben ein erstes Beispiel für sog. *universellen Eigenschaften*.

**Beispiel 1.6.** a) In der Kategorie der Mengen ist genau die leere Menge initial und genau jede einelementige Menge terminal. Diese Erkenntnis ist ein erstes Beispiel dafür, wie das fundamentale Motto gemeint ist: Eine Definition der leeren bzw. einer einelementigen Menge über eine Aufzählung ihrer Elemente betont ihre innere Struktur, während eine Definition als initiales bzw. terminales Objekt die besonderen Beziehungen zu allen Mengen hervorhebt.

b) In der Kategorie der  $K$ -Vektorräume ist der Nullvektorraum  $K^0$  initial und terminal.

c) Viele kategorielle Konstruktionen realisiert man als initiales oder terminales Objekt in einer geeigneten Kategorie von Mächtgern-Konstruktionen. Ein erstes Beispiel dazu werden wir im folgenden Kapitel über Produkte finden.

## Mono-, Epi- und Isomorphismen

**Definition 1.7.** Ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt genau dann

- *Monomorphismus*, wenn für alle Objekte  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$  und  $p, q : A \rightarrow X$  gilt:

$$f \circ p = f \circ q \implies p = q.$$

- *Epimorphismus*, wenn für alle Objekte  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$  und  $p, q : Y \rightarrow A$  gilt:

$$p \circ f = q \circ f \implies p = q.$$

**Beispiel 1.8.** a) In den Kategorien der Mengen, Gruppen und  $K$ -Vektorräumen sind die Monomorphismen genau die injektiven und die Epimorphismen genau die surjektiven Abbildungen. Das ist jeweils eine interessante Erkenntnis über die Struktur dieser Kategorien und nicht ganz leicht zu zeigen.

b) In der Kategorie der metrischen Räume mit stetigen Abbildungen gibt es Epimorphismen, die nicht surjektiv sind: nämlich alle stetigen Abbildungen mit dichtem Bild.

**Definition 1.9.** Ein *Isomorphismus*  $f : X \rightarrow Y$  in einer Kategorie ist ein Morphismus, zu dem es einen Morphismus  $g : Y \rightarrow X$  mit

$$g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

gibt. Statt „ $g$ “ schreibt man auch „ $f^{-1}$ “. Existiert zwischen Objekten  $X$  und  $Y$  ein Isomorphismus, so heißen die Objekte *zueinander isomorph*:  $X \cong Y$ .

*Bemerkung 1.10.* In den meisten Kategorien ist die Frage, ob Objekte  $X, Y$  tatsächlich gleich (statt nur isomorph) sind, keine interessante Frage: Denn für alle praktischen Belange sind schon zueinander isomorphe Objekte „gleich gut“. Diesen Gedanken werden wir noch manche Male aufgreifen und weiter entwickeln.

## Die duale Kategorie

**Definition 1.11.** Die zu einer Kategorie  $\mathcal{C}$  zugehörige *duale Kategorie*  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  ist folgende:

$$\begin{aligned} \text{Ob } \mathcal{C}^{\text{op}} &:= \text{Ob } \mathcal{C} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) &:= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \end{aligned}$$

**Beispiel 1.12.** a) Ein initiales Objekt in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  ist ein terminales Objekt in  $\mathcal{C}$  und umgekehrt.

b) Ein Epimorphismus in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  ist ein Monomorphismus in  $\mathcal{C}$  und umgekehrt.

c) Zwei Objekte sind genau dann in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  zueinander isomorph, wenn sie es in  $\mathcal{C}$  sind.

## 2 Produkte und Koprodukte

Matthias Hutzler

**Definition 2.1.** Seien  $X, Y$  Objekte einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Dann besteht ein *Produkt* von  $X$  und  $Y$  aus

- a) einem Objekt  $P \in \text{Ob } \mathcal{C}$  und
- b) Morphismen  $\pi_X : P \rightarrow X$ ,  $\pi_Y : P \rightarrow Y$ ,

sodass für jedes andere *Möchtegern-Produkt*, also

- a) jedem Objekt  $\tilde{P} \in \text{Ob } \mathcal{C}$  zusammen mit
- b) Morphismen  $\tilde{\pi}_X : \tilde{P} \rightarrow X$ ,  $\tilde{\pi}_Y : \tilde{P} \rightarrow Y$

genau ein Morphismus  $\psi : \tilde{P} \rightarrow P$  existiert, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \pi_X \swarrow & \uparrow & \searrow \pi_Y \\ X & \vdots \psi & Y \\ \tilde{\pi}_X \swarrow & \downarrow & \searrow \tilde{\pi}_Y \\ & \tilde{P} & \end{array}$$

kommutieren lässt, also die Gleichungen

$$\begin{aligned}\pi_X \circ \psi &= \tilde{\pi}_X \\ \pi_Y \circ \psi &= \tilde{\pi}_Y\end{aligned}$$

erfüllt.

**Motto 2.2.** *Ein Produkt ist ein bestes Möchtegern-Produkt.*

Statt „ $P$ “ schreibt man gerne „ $X \times Y$ “; es muss aus dem Kontext klar werden, ob das Kreuzzeichen speziell das kartesische Produkt von Mengen oder das allgemeine kategorielle Produkt bezeichnen soll. Analog definiert man das Produkt von  $n$  Objekten,  $n \geq 0$ , und dual definiert man das Koprodukt.

## 2.1 Beispiele

- Beispiel 2.3.**
- a) Das Produkt in der Kategorie der Mengen ist durch das kartesische Produkt gegeben, das Koprodukt durch die disjunkt-gemachte Vereinigung.
  - b) Das Produkt in der Kategorie der Gruppen ist durch das direkte Produkt mit der komponentenweisen Verknüpfung gegeben, das Koprodukt durch das sog. freie Produkt von Gruppen.
  - c) Produkt und Koprodukt endlich vieler Objekte in der Kategorie der  $K$ -Vektorräume sind durch die äußere direkte Summe gegeben. Produkte und Koprodukte von unendlich vielen Objekten unterscheiden sich allerdings.
  - d) Das Produkt in der von einer Quasiordnung induzierten Kategorie ist durch das Infimum gegeben. Dual ist das Koprodukt durchs Supremum gegeben.

*Beweis.* a) Wir zeigen die Aussage über das kartesische Produkt. Seien also  $X$  und  $Y$  Mengen. Dann wird das kartesische Produkt  $X \times Y$  vermöge der kanonischen Projektionsabbildungen

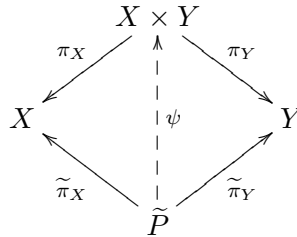
$$\begin{aligned}\pi_X : X \times Y &\rightarrow X, (x, y) \mapsto x \\ \pi_Y : X \times Y &\rightarrow Y, (x, y) \mapsto y\end{aligned}$$

zu einem Möchtegern-Produkt von  $X$  und  $Y$ :

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\ X & & Y\end{array}$$

Um zu zeigen, dass dieses Möchtegern-Produkt ein tatsächliches Produkt von  $X$  und  $Y$  ist, müssen wir noch die universelle Eigenschaft nachweisen. Sei also ein Möchtegern-Produkt  $(X \leftarrow \tilde{P} \rightarrow Y)$  gegeben. Dann müssen wir nachweisen, dass

es genau einen Morphismus  $\psi : \tilde{P} \rightarrow X \times Y$  gibt, der die beiden Dreiecke im Diagramm



kommutieren lässt. Ausgeschreiben besagen die Kommutativitätsbedingungen, dass für alle  $p \in \tilde{P}$  die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 (\text{erste Komponente von } \psi(p)) &= \tilde{\pi}_X(p) \\
 (\text{zweite Komponente von } \psi(p)) &= \tilde{\pi}_Y(p)
 \end{aligned}$$

gelten sollen. Es ist klar, dass diese beiden Bedingung genau durch eine Abbildung  $\psi$  erfüllt werden, nämlich durch

$$\psi : \tilde{P} \rightarrow X \times Y, \quad p \mapsto (\tilde{\pi}_X(p), \tilde{\pi}_Y(p)).$$

- b) Der Produkt-Fall geht analog: Zusätzlich kann man jetzt voraussetzen, dass  $\tilde{\pi}_X$  und  $\tilde{\pi}_Y$  Gruppenhomomorphismen sind; im Gegenzug muss man aber nachweisen, dass die konstruierte Abbildung  $\psi$  ein Gruppenhomomorphismus wird.
- c) Übungsaufgabe.
- d) Siehe Übungsblatt 2, Aufgabe 3. □

## 2.2 Erste Eigenschaften

**Proposition 2.4.** *Die Objektteile je zweier Produkte von Objekten  $X, Y$  sind zueinander isomorph.*

*Bemerkung 2.5.* Es gilt sogar noch mehr, siehe Aufgabe 2 von Übungsblatt 2.

**Proposition 2.6.** *Die Angabe eines Produkts von  $X$  und  $Y$  ist gleichwertig mit der Angabe eines Produkts von  $Y$  und  $X$ .*

**Proposition 2.7.** *Die Angabe eines Produkts von null vielen Objekten ist gleichwertig mit der Angabe eines terminalen Objekts.*

## 3 Funktoren

Felicitas Hörmann

So, wie es Gruppenhomomorphismen zwischen Gruppen gibt, gibt es Funktoren zwischen Kategorien. Ihre beeindruckendste Anwendung liegt darin, dass sie zwischen unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik vermitteln können – das ist ein Grundgedanke der



algebraischen Topologie. Man verwendet sie aber auch, um verschiedene Arten von Konstruktionen übersichtlich zu organisieren und einen sinnvollen Rahmen für die Frage nach „bestmöglichen“ Konstruktionen mit vorgegebenem Ziel zu haben.

**Definition 3.1.** Ein *Funktor*  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwischen Kategorien  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  besteht aus

- a) einer Vorschrift, die jedem Objekt  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  ein Objekt  $F(X) \in \text{Ob } \mathcal{D}$  zuordnet, und
- b) einer Vorschrift, die jedem Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  einen Morphismus  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$  zuordnet,

sodass

- a)  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$  für alle Objekte  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  und
- b)  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$  für alle komponierbaren Morphismen  $g, f$  in  $\mathcal{C}$ .

*Bemerkung 3.2.* Quelle und Ziel der abgebildeten Morphismen  $F(f)$  sind also durch den Objektteil des Funktors schon vorgegeben. Es ist nicht sinnvoll, von der Gleichheit von Funktoren  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zu sprechen – denn das würde naheliegenderweise ja die Aussage umfassen, dass für alle Objekte  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  die Gleichheit

$$F(X) = G(X)$$

von Objekten in  $\mathcal{D}$  gilt. Aber wie schon in Bemerkung 1.10 festgehalten, ist das keine sinnvolle Aussage.

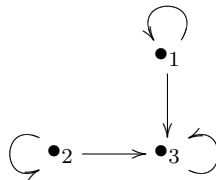
**Proposition 3.3.** Ein Funktor überführt kommutative Diagramme in kommutative Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & Z \end{array} \xrightarrow{F} \begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ & \searrow F(h) & \downarrow F(g) \\ & & F(Z) \end{array}$$

*Beweis.* Gilt  $h = g \circ f$ , so folgt  $F(h) = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ . □

### 3.1 Funktoren als Diagramme

Es sei  $\mathcal{I}$  die durch die folgende Skizze gegebene Kategorie und  $\mathcal{C}$  eine beliebige Kategorie.



Um einen Funktor  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  anzugeben, muss man

a) Objekte  $X_1 = F(\bullet_1)$ ,  $X_2 = F(\bullet_2)$  und  $X_3 = F(\bullet_3)$  in  $\mathcal{C}$  und

b) Morphismen  $f : X_1 \rightarrow X_3$  und  $g : X_2 \rightarrow X_3$  in  $\mathcal{C}$

spezifizieren. Ein solcher Funktor ist also durch ein Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} & \curvearrowright & \\ & X_1 & \\ & \downarrow f & \\ \curvearrowleft X_2 & \xrightarrow{g} & X_3 \curvearrowright \end{array}$$

in  $\mathcal{C}$  gegeben. Da diese Überlegung analog mit anderen Kategorien  $\mathcal{I}$  funktioniert, sehen wir folgendes Motto:

**Motto 3.4.** *Funktoren  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  sind  $\mathcal{I}$ -förmige Diagramme in  $\mathcal{C}$ .*

### 3.2 Langweilige Funktoren

a) Für jede Kategorie  $\mathcal{C}$  gibt es den *Identitätsfunktor*

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, \quad X \mapsto X, \quad f \mapsto f.$$

b) Für ein festes Objekt  $\heartsuit \in \mathcal{C}$  hat man den *konstanten Funktor*

$$F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}, \quad X \mapsto \heartsuit, \quad f \mapsto \text{id}_{\heartsuit}.$$

Diese Funktoren als solche sind langweilig. Interessant sind aber natürliche Transformationen zwischen ihnen – das werden wir im folgenden Vortrag sehen.

### 3.3 Kontravariante Funktoren

Wie kann man sich einen Funktor  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$  vorstellen?

a) Objekte  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}^{\text{op}} = \text{Ob } \mathcal{C}$  werden auf Objekte  $F(X) \in \mathcal{D}$  abgebildet.

b) Morphismen  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  (d. h.  $f : Y \rightarrow X$  in  $\mathcal{C}$ ) werden auf Morphismen  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$  in  $\mathcal{D}$  abgebildet.

Das zweite Funktoraxiom lautet für Morphismen  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$

$$F(g \circ f) = F(f \bullet g) = F(f) \circ F(g),$$

wobei wir zur Verdeutlichung „ $\circ$ “ für die Komposition in  $\mathcal{C}$  und „ $\bullet$ “ in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  schreiben. Die Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ X & \longmapsto & F(X) \\ f & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

ist also kein Funktor in unserem Sinne, da er Quelle und Ziel von Morphismen vertauscht und das zweite Funktoraxiom dann nur in entsprechend umgekehrter Kompositionsreihenfolge erfüllt. Solche Zuordnungen sind trotzdem wichtig; sie heißen *kontravariante Funktoren*.

### 3.4 Vergissfunktoren

Die bekannten Strukturen in der Mathematik organisieren sich in einer Hierarchie. Zwischen den Kategorien zu Strukturen verschiedener Stufen hat man sog. Vergissfunktoren:

a) Der Funktor

$$V : \text{Grp} \rightarrow \text{Set}, \quad (G, \circ) \mapsto G, \quad f \mapsto f.$$

bildet Gruppen auf ihre zugrundeliegenden Mengen und Gruppenhomomorphismen auf ihre zugrundeliegenden Mengenabbildung ab. Er vergisst also die *Struktur* der Gruppenverknüpfung.

b) Der Funktor

$$V : \mathbb{R}\text{-Vect} \rightarrow \text{AbGrp}, \quad (V, +, \cdot) \mapsto (V, +), \quad f \mapsto f.$$

vergisst ebenfalls algebraische Struktur, nämlich die Skalarmultiplikation.

c) Der Funktor

$$V : \text{Man} \rightarrow \text{Top}, \quad M \mapsto M,$$

die einer Mannigfaltigkeit ihren zugrundeliegenden topologischen Raum zuordnet, vergisst (differentialgeometrische) Struktur.

d) Der Funktor

$$V : \text{AbGrp} \rightarrow \text{Grp}, \quad (G, \circ) \mapsto (G, \circ), \quad f \mapsto f.$$

vergisst die *Eigenschaft* der Gruppenverknüpfung  $\circ$ , kommutativ zu sein.

e) Schreibe 1 für die Kategorie mit  $\text{Ob} = \{\bullet\}$  und  $\text{Hom}(\bullet, \bullet) = \{\text{id}_\bullet\}$ . Der Funktor

$$V : \text{Set} \rightarrow 1, \quad M \mapsto \bullet, \quad f \mapsto \text{id}_\bullet.$$

vergisst *stuff*, also Zeug.

Die Unterscheidung zwischen Eigenschaft, Struktur und Zeug stammt übrigens von Teilnehmern eines Seminars über Quantengravitation [1, Abschn. 2.4], siehe auch [2].

Obwohl die Vergissfunktoren beinahe tautologisch definiert sind, sind sie aus zwei Gründen wichtig: Zum einen ist es eine interessante Frage, inwieweit man die Vergissfunktoren umkehren kann – wie man etwa aus einer Menge eine Gruppe machen kann. Wie diese Frage zu präzisieren und zu beantworten ist, werden wir im Vortrag über adjungierte Funktoren lernen.

Zum anderen ist es wichtig zu wissen, ob ein Vergissfunktorkonstruktion Produkte (oder allgemeinere Limiten) bewahrt. Etwa gilt für Vektorräume  $U, W$  und den Vergissfunktorkonstruktion  $V : \mathbb{R}\text{-Vect} \rightarrow \text{Set}$ , dass

$$V(U \times W) \cong V(U) \times V(W),$$

aber

$$V(U \amalg W) \not\cong V(U) \amalg V(W).$$

Was das genau bedeutet, werden wir im Vortrag über Limiten sehen.

### 3.5 Funktoren aus algebraischen Konstruktionen

Zu jedem Ring  $R$  gibt es seinen Polynomring  $R[X]$  der formalen Polynome mit Koeffizienten aus  $R$ ,

$$R[X] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i X^i \mid a_0, \dots, a_n \in R, n \geq 0 \right\}.$$

Diese Konstruktion kann man zu einem Funktor erheben, den sog. *Polynomringfunktorkonstruktion*  $F : \text{Ring} \rightarrow \text{Ring}$ : Dieser ordnet einem Ring  $R$  den Polynomring  $R[X]$  und einem Ringhomomorphismus  $f : R \rightarrow S$  folgenden induzierten Ringhomomorphismus zu:

$$F(f) : R[X] \rightarrow S[X], \quad \sum a_n X^n \mapsto \sum f(a_n) X^n.$$

*Bemerkung 3.5.* Algebraiker kann man daran erkennen, dass sie im Gegensatz zu Analytikern die Polynomvariable groß schreiben.

Fast jede algebraische Konstruktion kann man auf diese Art und Weise behandeln.

### 3.6 Funktoren und Mengen

Zu jeder Menge  $M$  gibt es die *diskrete Kategorie*  $DM$ :

$$\begin{aligned} \text{Ob } DM &:= M \\ \text{Hom}_{DM}(m, \tilde{m}) &:= \{\text{id}_m \mid m = \tilde{m}\} \end{aligned}$$

Die Angabe der Morphismenmengen ist etwas kryptisch geschrieben, ausführlich kann man die Definition auch wie folgt angeben:

$$\text{Hom}_{DM}(m, \tilde{m}) := \begin{cases} \{\text{id}_m\}, & \text{falls } m = \tilde{m} \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sind nun  $M$  und  $N$  zwei Mengen und  $\varphi : M \rightarrow N$  eine Abbildung, so ist

$$DM \rightarrow DN, \quad m \mapsto \varphi(m), \quad \text{id}_m \mapsto \text{id}_{\varphi(m)}$$

ein Funktor. [Hier fehlt eine Skizze.] Somit sehen wir folgendes Motto:

**Motto 3.6.** *Das Funktorkonzept verallgemeinert das Konzept der Abbildung zwischen Mengen.*

## Potenzmengenfunktoren

Der *kovariante Potenzmengenfunktor*  $\mathcal{P} : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$  ordnet einer Menge  $M$  die Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$  zu und einer Abbildung  $f : M \rightarrow N$  die Abbildung

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(N), \quad U \mapsto f[U],$$

wobei  $f[U] := \{f(u) : u \in U\}$  ist.

Definiert man  $\mathcal{P}(f)$  stattdessen durch  $U \mapsto f[U]^c$  (Komplement), so erhält man keinen Funktor.

Außerdem gibt es noch den *kontravarianten Potenzmengenfunktor*  $\mathcal{P} : \text{Set}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ , der ebenfalls jeder Menge  $M$  ihre Potenzmenge, aber jeder Abbildung  $f : M \rightarrow N$  die *Urbildabbildung*

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathcal{P}(M), \quad V \mapsto f^{-1}[V]$$

zuordnet, wobei  $f^{-1}[V] := \{x \in M \mid f(x) \in V\}$ . Dieser ist sehr bedeutsam, denn er zeigt die Äquivalenz der dualen Kategorie  $\text{Set}^{\text{op}}$  mit der Kategorie vollständiger atomischer boolescher Algebren, siehe [3, Thm. 2.4]. Was „Äquivalenz“ bedeutet, werden wir im folgenden Kapitel lernen.

## 3.7 Funktoren und Gruppen

Es sei ein Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  gegeben. Dann ist

$$f : BG \rightarrow BH, \quad \bullet \mapsto \bullet, \quad g \mapsto \varphi(g)$$

ein Funktor. (Zur Konstruktion der Kategorien  $BG$  und  $BH$  siehe Übungsblatt 1, Aufgabe 5.) Denn das erste Funktoraxiom ist erfüllt,

$$F(\text{id}_{\bullet}) = F(e_G) = \varphi(e_G) = e_H = \text{id}_{\bullet},$$

und das zweite ebenso: Für alle Morphismen  $g, \tilde{g} : \bullet \rightarrow \bullet$  (d. h. für alle Gruppenelemente  $g, \tilde{g} \in G$ ) gilt

$$F(\tilde{g} \circ g) = F(\tilde{g} \cdot g) = \varphi(\tilde{g} \cdot g) = \varphi(\tilde{g}) \cdot \varphi(g) = \varphi(\tilde{g}) \circ \varphi(g) = F(\tilde{g}) \circ F(g).$$

Damit sehen wir folgendes Motto:

**Motto 3.7.** *Das Funktorkonzept verallgemeinert das Konzept des Gruppenhomomorphismus.*

## Gruppenwirkungen

Was muss man angeben, um einen Funktor  $F : BG \rightarrow \text{Set}$  zu spezifizieren? Eine Menge  $M := \varphi(\bullet)$  und zu jedem  $g \in G$  eine Abbildung  $\varphi_g : M \rightarrow M$ , sodass

$$\varphi_{\text{id}_\bullet} = \text{id}_M \quad \text{und} \quad \varphi_{g \circ h} = \varphi_g \circ \varphi_h$$

für alle  $g, h \in G$  gilt. Mit der Schreibweise  $\varphi_g(x) =: g \cdot x$ ,  $g \in G$ ,  $x \in X$ , wird dies zu

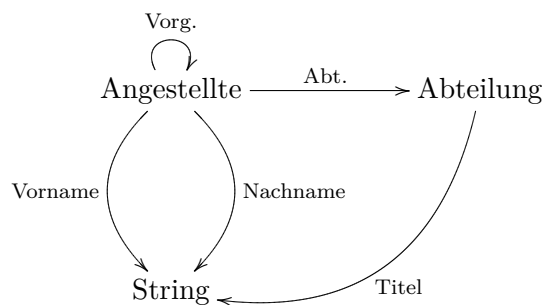
$$e \cdot x = x \quad \text{und} \quad (g \circ h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x).$$

Eine solche Struktur bestehend aus einer Menge  $M$  und einer Multiplikationsabbildung  $G \times M \rightarrow M$ , die diese Axiome erfüllt, ist eine sog. *Gruppenwirkung von  $G$* . Wir sehen also: Funktoren  $BG \rightarrow \text{Set}$  sind „dasselbe“ wie Gruppenwirkungen von  $G$ .

Analog kann man Funktoren  $BG \rightarrow K\text{-Vect}$  untersuchen. Solche haben auch einen klassischen Namen: Das sind sog. *Gruppendarstellungen*.

## 3.8 Funktoren als Datenbanken

Wir wollen an einem Beispiel zeigen, dass auch so konkrete Dinge wie Datenbanken aus der Informatik kategoriell verstanden werden können. Etwa gibt das zugrundeliegende Datenbankschema der 0815/Datenbank aus Tafel 1 Anlass zu folgender Kategorie  $\mathcal{C}$ :



Die Tabelleninhalte kann man dann über einen Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  kodieren, der jedes Objekt (also jeden Tabellennamen) auf die Menge der Primärschlüssel ihrer Zeilen und jeden Morphismus (also jeden Spaltennamen) auf die entsprechende Abbildung zwischen den Primärschlüsseln der beteiligten Tabellen abbildet.

Gewisse einfache Integritätsbedingungen kann man über die Angabe eines geeigneten Kompositionsgesetzes in  $\mathcal{C}$  kodieren. Wenn man etwa ausdrücken möchte, dass der Sekretär einer Abteilung selbst in dieser sitzt, kann man

$$\text{Abt.} \circ \text{Sekretär} = \text{id}_{\text{Abteilung}} : \text{Abteilung} \rightarrow \text{Abteilung}$$

definieren. Diese Sichtweise auf Datenbanken ist unter Anderem für das Verständnis von Datenmigrierung bei Schemaänderungen hilfreich. Details hat David Spivak erforscht [4, 5, 6].

Angestellte					Abteilung		
Nr.	Vorname	Nachname	Vorg.	Abt.	Nr.	Titel	Sekretär
101	David	Hilbert	103	q10	q10	Vertrieb	101
102	Bertrand	Russel	102	x02	x02	Produktion	102
103	Alan	Turing	103	q10			

Abbildung 1: Ein Standardbeispiel einer Datenbank.

### 3.9 Hom-Funktoren

**Definition 3.8.** Sei  $\mathcal{C}$  eine lokal kleine Kategorie (sodass ihre Hom-Klassen sogar schon Hom-Mengen sind) und  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ . Dann ist...

a) der *kovariante Hom-Funktor* zu  $A$  der Funktor

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \_) : \quad & \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set} \\ & X \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \\ (f : X \rightarrow Y) & \longmapsto f_{\star} \end{aligned}$$

b) und der *kontravariante Hom-Funktor* zu  $A$  der Funktor

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, A) : \quad & \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Set} \\ & X \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \\ (f : X \xrightarrow{\mathcal{C}} Y) & \longmapsto f^{\star}. \end{aligned}$$

Dabei sind die Abbildungen  $f_{\star}, f^{\star}$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f_{\star} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) & \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \\ g & \longmapsto f \circ g \\ \\ f^{\star} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) & \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \\ g & \longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

Die Hom-Funktoren kodieren die Beziehungen von  $A$  mit den Objekten aus  $\mathcal{C}$ . Das zentrale *Yoneda-Lemma* wird uns sagen, dass  $A$  durch Kenntnis des ko- oder kontravarianten Hom-Funktors schon bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

### 3.10 Weitere Beispiele

a) Den Prozess des Differenzierens glatter Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten kann man als Funktor auffassen, der jeder Mannigfaltigkeit ihr Tangentialbündel und jeder glatter Abbildung ihr Differential zuordnet:

$$\begin{aligned} \text{Man} & \longrightarrow \text{Man} \\ M & \longmapsto TM \\ f & \longmapsto Df \end{aligned}$$

Es gibt auch eine „lokale Version“, wenn man die Kategorie der *punktierten glatten Mannigfaltigkeiten*  $\text{Man}_\star$  betrachtet: Die Objekte dieser Kategorie sind Tupel  $(M, x)$  aus einer Mannigfaltigkeit und einem ausgezeichneten Basispunkt  $x \in M$ , Morphismen sind basispunkterhaltende glatte Abbildungen. Dann hat man den Funktor

$$\begin{aligned} \text{Man}_\star &\longrightarrow \mathbb{R}\text{-Vect} \\ (M, x) &\longmapsto T_x M \\ f &\longmapsto d_x f. \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist das zweite Funktoraxiom gerade deswegen erfüllt, weil die Kettenregel gilt!

b) Hier könnte dein Beispiel stehen.

### 3.11 Die Kategorie der Kategorien

Nach dem fundamentalen Motto der Kategorientheorie sollen wir die Beziehungen zwischen Untersuchungsgegenständen ernst nehmen und daher die von ihnen gebildete *Kategorie* betrachten. Als wir bisher Kategorientheorie betrieben haben, haben wir dieses Motto bezogen auf Kategorien selbst aber sträflich vernachlässigt! Diesen Missstand behebt folgende Definition.

**Definition 3.9.** Die Kategorie  $\text{Cat}$  der (kleinen) Kategorien besteht aus:

$$\begin{aligned} \text{Ob Cat} &:= \text{Klasse aller (kleinen) Kategorien} \\ \text{Hom}_{\text{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &:= \text{Klasse der Funktoren zwischen } \mathcal{C} \text{ und } \mathcal{D} \end{aligned}$$

Die Verkettung  $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  zweier Funktoren  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  ist dabei als der Funktor

$$\begin{aligned} G \circ F : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ X &\longmapsto G(F(X)) \\ f &\longmapsto G(F(f)) \end{aligned}$$

definiert.

*Bemerkung 3.10.* Ironischerweise ist es keine gute Idee, die so definierte Kategorie  $\text{Cat}$  zu untersuchen: Denn in Kategorien muss es sinnvoll sein, von der Gleichheit zweier Morphismen zu sprechen – der Gleichheitsbegriff zwischen Funktoren ist aber, wie eingangs schon bemerkt, nicht interessant. Tatsächlich ist die Kategorie  $\text{Cat}$  nur eine erste Approximation an eine sog. 2-Kategorie, in der es nicht nur Morphismen (Funktoren) zwischen Objekten (Kategorien), sondern auch „höhere Morphismen“, sog. 2-Morphismen (hier natürliche Transformationen), zwischen den gewöhnlichen (1-)Morphismen gibt.

## 4 Natürliche Transformationen

Tim Baumann

*Werbung:* Wir werden verstehen, was natürliche Transformationen sind, weshalb ihre Definition ganz einfach ist und wozu man sie benötigt. Ihre Bedeutung werden wir aus



verschiedenen Blickwinkeln beleuchten. Mit natürlichen Transformationen können wir dann auch Funktorkategorien definieren, die für das Yoneda-Lemma später sehr wichtig sind. Außerdem können wir definieren, wann zwei Kategorien zueinander äquivalent sind.

## 5 Limiten und Kolimiten

Martin Baur und Kathrin Gimmi

*Werbung:* Wir verstehen, was allgemeine Limiten und Kolimiten von Diagrammen sind. Dazu wird es viele Beispiele geben, unter anderem die uns schon bekannten Produkte und Koprodukte. Speziell sind sog. filtrierte Kolimiten wichtig, da diese in der täglichen Praxis oft vorkommen und besonders schöne Eigenschaften haben. Abschließend werden wir die Frage diskutieren, wie man Kategorien, denen es an Limiten oder Kolimiten mangelt, vervollständigen kann.

## 6 Das Yoneda-Lemma

Justin Gassner

*Werbung:* Wir werden das fundamentale Yoneda-Lemma und seine Korollare verstehen. Dazu werden wir zunächst eine hilfreiche Intuition von sog. Prägarben auf Kategorien entwickeln und verstehen, welche Signifikanz die Darstellbarkeit von Prägarben hat. Dann können wir die Yoneda-Einbettung kennenlernen, ihre Eigenschaften studieren und sehen, wozu sie nützlich ist. Das fundamentale Motto der Kategorientheorie wird damit zu einem formalen Theorem.

## 7 Adjungierte Funktoren

Peter Uebele

*Werbung:* Kommt noch!

## Literatur

- [1] J. C. Baez und M. Shulman. „Lectures on  $n$ -categories and cohomology“. In: *Towards Higher Categories*. Hrsg. von J. C. Baez und J. P. May. Bd. 152. IMA Vol. Math. Appl. Springer-Verlag, 2010, S. 1–68. URL: <http://math.ucr.edu/home/baez/cohomology.pdf>.
- [2] Die nLab-Beitragenden. *stuff, structure, property*. 2012. URL: <http://ncatlab.org/nlab/show/stuff,+structure,+property>.
- [3] J. v. Oosten. *Basic category theory*. 2002. URL: <http://www.staff.science.uu.nl/~ooste110/syllabi/catsmoeder.pdf>.
- [4] D. Spivak. *Categorical databases*. Vortragsfolien. 2012. URL: <http://math.mit.edu/~dspivak/informatics/talks/CTDBIntroductoryTalk>.

- [5] D. Spivak. „Functorial data migration“. In: *Inform. and Comput.* 217 (2012), S. 31–51. URL: <http://arxiv.org/abs/1009.1166>.
- [6] D. Spivak. „Simplicial databases“. 2009. URL: <http://arxiv.org/abs/0904.2012>.