Universität Augsburg
8. März 2013

Pizzaseminar zur Kategorientheorie
Lösung zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

a) Eine mögliche Antwort ist die Kategorie **Grp**, deren Objekte die Klasse aller Gruppen ist, und die als Morphismen die Gruppenhomomorphismen mit der üblichen Komposition von Abbildungen besitzt. Initiale und terminale Objekte in **Grp** sind alle trivialen Gruppen.

b) Wir nennen die Kategorie K und geben den Objekten und den Morphismen im Diagramm Namen und können mit diesen die Objekte, Morphismen und die Kompositionsvorschrift direkt angeben:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[loop left, "\mathrm{id}_B"] \arrow[r, "g"] & C \arrow[loop right, "\mathrm{id}_C"] \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ob}(K) = \{A, B, C\}$

$\mathrm{Hom}(A,A) = \{\mathrm{id}_A\}$	$\mathrm{Hom}(B,A) = \varnothing$	$\mathrm{Hom}(C,B) = \varnothing$
$\mathrm{Hom}(A,B) = \varnothing$	$\mathrm{Hom}(B,B) = \{\mathrm{id}_B\}$	$\mathrm{Hom}(C,B) = \varnothing$
$\mathrm{Hom}(A,C) = \{f\}$	$\mathrm{Hom}(B,C) = \{g\}$	$\mathrm{Hom}(C,C) = \{\mathrm{id}_C\}$
$\mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A$	$\mathrm{id}_B \circ \mathrm{id}_B = \mathrm{id}_B$	$\mathrm{id}_C \circ \mathrm{id}_C = \mathrm{id}_C$
$f \circ \mathrm{id}_A = f$	$g \circ \mathrm{id}_B = g$	$\mathrm{id}_C \circ f = f$
		$\mathrm{id}_C \circ g = g$

c) Angenommen id_X und $\widetilde{\mathrm{id}}_X$ sind beides Identitätsmorphismen für ein Objekt X einer Kategorie. Dann gilt für alle passende Morphismen f und g

$f \circ \widetilde{\mathrm{id}}_X = f$ und $\mathrm{id}_X \circ g = g$.

Insbesondere ist $\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X \circ \widetilde{\mathrm{id}}_X = \widetilde{\mathrm{id}}_X$.

Aufgabe 2: Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen Mengen.

a) f injektiv $\Rightarrow$ f Monomorphismus:

Seien $g, g' : W \to X$ zwei Abbildungen mit $f \circ g = f \circ g'$. Zu zeigen: $g = g'$. Sei dazu $w \in W$ beliebig. Dann ist $f(g(w)) = f(g'(w))$ und weil f injektiv ist, $g(w) = g'(w)$ für alle $w \in W$.

f Monomorphismus $\Rightarrow$ f injektiv:

Seien $x, x' \in X$ beliebig mit $f(x) = f(x')$. Zu zeigen: $x = x'$. Definiere dazu

$$g\colon \{\star\} \to X, \ \star \mapsto x$$
$$g'\colon \{\star\} \to X, \ \star \mapsto x'.$$

Es gilt offensichtlicherweise $f \circ g = f \circ g'$ und da f Monomorphismus ist, auch $g = g'$. Also ist $x = g(\star) = g'(\star) = x'$.

b) f surjektiv $\Rightarrow$ f Epimorphismus:

Seien $g, g' : Y \to Z$ zwei Abbildungen mit $g \circ f = g' \circ f$. Zu zeigen: $g = g'$. Sei dazu $y \in Y$ beliebig. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Rechne:

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (g' \circ f)(x) = g'(f(x)) = g'(y)$$

f Epimorphismus $\Rightarrow$ f surjektiv:

Sei $y \in Y$. Zu zeigen: $y \in \operatorname{im}(f)$. Definiere dazu

$$\begin{aligned} g &: Y \to \mathcal{P}(\{\star\}), \;\; \widetilde{y} \mapsto \{\star\} \\ g' &: Y \to \mathcal{P}(\{\star\}), \;\; \widetilde{y} \mapsto \{\star \mid \widetilde{y} \in \operatorname{im}(f)\}. \end{aligned}$$

Es gilt offensichtlicherweise $g \circ f = g' \circ f$ und da f Epimorphismus ist, auch $g = g'$. Also ist $\{\star\} = g(y) = g'(y) = \{\star \mid y \in \operatorname{im}(f)\}$ und damit beide Mengen gleich sind, muss $y \in \operatorname{im}(f)$ gelten.

Aufgabe 3: Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Morphismen einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$.

a) Zu zeigen: f ist Monomorphismus, wenn $g \circ f$ Monomorphismus ist. Seien dazu $h, h' : W \to X$ mit $f \circ h = f \circ h'$. Dann ist $g \circ f \circ h = g \circ f \circ h'$ und da $g \circ f$ Monomorphismus ist, folgt $h = h'$ wie gewünscht.

b) Die zu a) duale Aussage ist:

Seien $f : Y \to X$ und $g : Z \to Y$ Morphismen einer beliebigen Kategorie. Wenn $f \circ g$ Epimorphismus ist, so ist auch f Epimorphismus.

Aufgabe 4:

a) f Isomorphismus in **Grp** $\Rightarrow$ f Gruppenisomorphismus:

Wenn f Isomorphismus in **Grp** ist, so ist f ein Gruppenhomomorphismus und besitzt eine Umkehrabbildung f^{-1}, ist also bijektiv. Damit ist f nach Definition Gruppenisomorphismus.

f Gruppenisomorphismus $\Rightarrow$ f Isomorphismus in **Grp**:

Da $f : H \to G$ Gruppenisomorphismus ist, ist f insbesondere bijektiv und besitzt daher eine Umkehrabbildung f^{-1}. Diese Umkehrabbildung ist sogar ein Gruppenhomomorphismus:

$$f^{-1}(h \circ \widetilde{h}) = f^{-1}(f(g) \circ f(\widetilde{g})) = f^{-1}(f(g \circ \widetilde{g})) = g \circ \widetilde{g} = f^{-1}(h) \circ f^{-1}(\widetilde{h})$$

Dabei haben wir verwendet, dass f surjektiv ist, und daher $g, \widetilde{g} \in G$ existieren mit $f(g) = h$ und $f(\widetilde{g}) = \widetilde{h}$. Damit befindet sich f^{-1} auch in **Grp** und bildet dort das Inverse zu f.

b) *Beobachtung*: In jeder beliebigen Kategorie sind die Identitätsmorphismen sowohl Mono- als auch Epimorphismus, denn wenn $\mathrm{id} \circ f = \mathrm{id} \circ \widetilde{f}$ bzw. $g \circ \mathrm{id} = \widetilde{g} \circ \mathrm{id}$ gilt, folgt $f = \widetilde{f}$ bzw. $g = \widetilde{g}$ aus den Kategorienaxiomen.

Wenn f Isomorphismus ist, so gibt es einen Morphismus f^{-1} mit

(1) $f \circ f^{-1} = id$

(2) $f^{-1} \circ f = id$

Aus (1) folgt mit 3b), dass f Epimorphismus ist, und aus (2) folgt mit 3a), dass f Monomorphismus ist.

Die Umkehrung gilt nicht, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop right, "\mathrm{id}_B"] \end{tikzcd}$$

Hier ist f Monomorphismus und Epimorphismus, da wir f nur mit den Identitätsmorphismen id_A und id_B verknüpfen können und somit wieder f erhalten. Allerdings ist f kein Isomorphismus, da es keinen Morphismus von B nach A gibt.

Aufgabe 5: Sei G eine Gruppe. Wir definieren die Kategorie BG durch

(1) $\mathrm{Ob}(BG) = \{A\}$

(2) $\mathrm{Hom}(A, A) = G$

(3) Die Komposition in BG entspricht der Komposition der Gruppe.

Diese Definition ergibt tatsächlich eine Kategorie, da die Komposition in jeder Gruppe assoziativ ist, und jede Gruppe ein neutrales Element besitzt, das in BG den Identitätsmorphismus auf A ergibt. Diese Definition ist auch sinnvoll, da sich aus der Komposition von Morphismen wieder die gesamte Struktur der Gruppe ablesen lässt.