

Wiederholung:

- Knoten: stetig diff. bare Einbettung
- Äquivalenz von Knoten: Homotopie

$$\begin{aligned} S^1 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ h_+ : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ h_0 &= \text{id} \\ h_+|_{K_1} &= K_2 \end{aligned}$$



- Verschlingung: "Knoten mit mehreren Komponenten"



"Borromäische Ringe"

Frage: Wie kann man feststellen, ob zwei geg. Knoten äquivalent sind?

Reidemeister - Bewegungen

Typ I: \Leftrightarrow

Typ II: \Leftrightarrow

Typ III: \Leftrightarrow

Satz: Zwei Knoten (Verschlingungen) sind genau dann äquivalent, wenn sie sich nur durch Reidemeister - Bew. unterscheiden.

Bem: $\underset{\text{I}}{\sim}$ $\underset{\text{II}}{\sim}$ \sim

$\underset{\text{II}}{\sim}$ $\underset{\text{III}}{\sim}$ $\underset{\text{II}}{\sim}$

Die Kauffman - Klammer

Idee: Ordne jedem Knotendiagramm ein Polynom zu, um dadurch die Knoten zu unterscheiden.

Def: Die Kauffman - Klammer ist eindeutige Abb.

$$\langle \cdot \rangle : \{ \text{nicht-orient. Diagramme} \} \rightarrow \mathbb{Z}[A, A^{-1}], \text{ mit}$$

(i) $\langle O \rangle = 1$

(ii) $\langle D \sqcup O \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle$

(iii) $\langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{right crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{left crossing} \rangle$

Bsp: (Linkshändiger) Kleeblattknoten

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Kleeblattknoten} \rangle &= A \cdot \langle \text{Knoten 1} \rangle + A^{-1} \langle \text{Knoten 2} \rangle = -A^4 - A^{-4} \quad (2) \\
 \langle \text{Knoten 1} \rangle &= A \cdot \langle \text{Knoten 3} \rangle + A^{-1} \langle \text{Knoten 4} \rangle = -A^3 \langle \infty \rangle \\
 &= (-A^{-2} - A^2) \cdot \langle \infty \rangle \quad \rightarrow \quad (A \cdot \langle 00 \rangle + A^{-1} \langle \infty \rangle) \\
 &= (-A^{-2} - A^2) \cdot \underbrace{\langle 0 \rangle}_{=1} \quad \rightarrow \quad (-A^{-2} - A^2) \cdot \underbrace{\langle \infty \rangle}_{=1} \\
 &= A^6
 \end{aligned}$$

$$\text{insg.} = A^7 - A^3 - A^{-5}$$

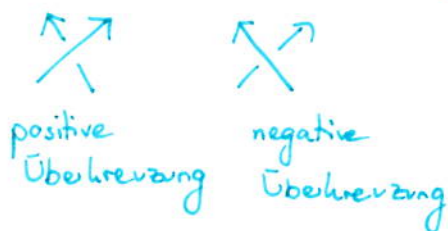
Invarianz unter Reidemeister-Bew:

$$\begin{aligned}
 \text{Typ II: } \langle \text{Type II move} \rangle &= A \langle \text{Diagram 1} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 2} \rangle \\
 &= A (A \langle \text{Diagram 3} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 4} \rangle) + A^{-1} (A \langle \text{Diagram 5} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 6} \rangle) \\
 &= \langle \text{Diagram 7} \rangle \quad \quad \quad (-A^2 - A^{-2}) \langle \text{Diagram 8} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 9} \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Typ III: } \langle \text{Type III move} \rangle &= A^{-1} \langle \text{Diagram 1} \rangle + A \langle \text{Diagram 2} \rangle \stackrel{!}{=} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
 &= \langle \text{Diagram 4} \rangle \\
 &= \langle \text{Diagram 5} \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Typ I: } \langle \text{Type I move} \rangle &= -A^3 \langle \text{Diagram 1} \rangle \\
 \langle \text{Diagram 2} \rangle &= -A^{-3} \langle \text{Diagram 3} \rangle
 \end{aligned}$$

Idee: Zähle die Überkreuzungen im Diagramm mit



$$\text{Def: } w(D) = \#(\text{pos. Ü.}) - \#(\text{neg. Ü.})$$

Verwindung

$$\leadsto X(D) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$$

ist invariant unter allen Reidemeister-Bew!

Def: Jones-Polynom : $V(D) := X(D)$ mit $A = t^{-1/4}$

Bsp: $D = K_L$

gespiegelt: K_R

$$w(D) = -3$$

$$V(K_L) = (-A^3)^3 (A^7 - A^3 - A^{-5}) \quad V(K_R) = -t^4 + t^3 + t$$

$$= -A^{16} + A^{12} + A^4$$

$$= -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$$

$$t = A^{-4}$$

gespiegelt

A und A^{-1} vertauscht
bzw t und t^{-1}

$$\text{allgemein: } \langle \overline{K} \rangle = \langle K \rangle$$

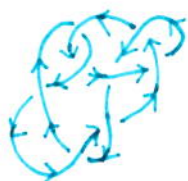
$$K_L \neq K_R$$

Offene Frage: Ist der Unknoten der einzige Knoten mit $V(K)=1$

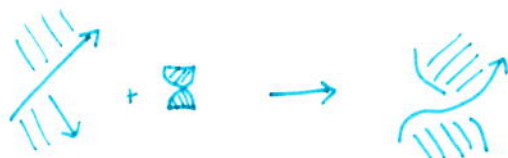
Seifert-Flächen



Seifert Algorithmus:



\leadsto disjunkte Kreise \leadsto auffüllen durch Scheiben



\leadsto

