Quasikohärente Modulgarben

Ingo Blechschmidt

28. Mai 2015

1 Grundlagen

Motto 1.1. Nur die quasikohärenten Modulgarben auf einem Schema haben geometrische Bedeutung. Die anderen sind Artefakt der Kodierung über lokal geringte Räume.

Definition 1.2. Sei X ein Schema und $\mathcal{E}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Genau dann heißt $\mathcal{E}$ *quasikohärent*, wenn es lokal exakte Sequenzen der Form

$$\mathcal{O}_X^{\oplus I} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus J} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

gibt. Dabei können I und J beliebige Mengen sein.

Proposition 1.3. *Sei X ein Schema und $\mathcal{E}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Dann sind äquivalent:*

1. *Die Modulgarbe $\mathcal{E}$ ist quasikohärent.*
2. *Es gibt eine Überdeckung von X durch offene affine Teilmengen U sodass für jede Überdeckungsmenge $U = \operatorname{Spec} A$ die Einschränkung $\mathcal{E}|_U$ isomorph zu einer Modulgarbe der Form $M^\sim$ für einen A-Modul M ist.*
3. *Für alle offenen affinen Teilmengen $U = \operatorname{Spec} A$ ist $\mathcal{E}|_U$ isomorph zu einer Modulgarbe der Form $M^\sim$ für einen A-Modul M.*
4. *Für alle offenen affinen Teilmengen $U = \operatorname{Spec} A$ und Funktionen $f \in A$ ist die kanonische Abbildung $\mathcal{E}(U)[f^{-1}] \to \mathcal{E}(D(f))$ ein Isomorphismus von $A[f^{-1}]$-Moduln.*

Bemerkung 1.4. Eine Modulgarbe $\mathcal{E}$ auf einem Schema X ist genau dann quasikohärent, wenn aus Sicht der internen Sprache des Topos $\operatorname{Sh}(X)$ für alle $f : \mathcal{O}_X$ der lokalisierte Modul $\mathcal{E}[f^{-1}]$ eine Garbe bezüglich der Modalität $\Box$ mit $\Box\varphi :\equiv (f \text{ inv.} \Rightarrow \varphi)$ ist.

Beispiel 1.5. Die Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf einem affinen Schema $\operatorname{Spec} A$ ist äquivalent zur Kategorie der A-Moduln. Die Äquivalenz wird vermittelt durch den Funktor $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}(\operatorname{Spec} A)$ mit Pseudoinversem $M \mapsto M^\sim$.

Beispiel 1.6. Die Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf einem projektiven Schema $\operatorname{Proj} A$ ist äquivalent zum Quotient der Kategorie der $\mathbb{Z}$-graduierten A-Moduln modulo der Serreschen Unterkategorie derjenigen graduierten Moduln, welche ab einem gewissen Grad verschwinden. Die Äquivalenz wird durch eine projektive Variante der Tilde-Konstruktion vermittelt.

Beispiel 1.7. Der Rückzug quasikohärenter Modulgarben ist stets wieder quasikohärent. Der Pushforward einer quasikohärenten Modulgarbe längs einem quasikompakten und quasiseparierten Morphismus ist wieder quasikohärent.

Proposition 1.8. *Sei $f : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ ein Morphismus affiner Schemata. Betrachte A vermöge $f^\sharp$ als B-Algebra.*

1. *Sei M ein A-Modul. Dann gilt $f_*(M^\sim) \cong (M_B)^\sim$.*
2. *Sei N ein B-Modul. Dann gilt $f^*(N^\sim) \cong (N \otimes_B A)^\sim$.*

Bemerkung 1.9. Aus der Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf einem Schema X zusammen mit ihrer abelschen Struktur kann man das Schema rekonstruieren; das besagt der Rekonstruktionssatz von Gabriel–Rosenberg. Für affine Schemata folgt das aus der für Ringe A gültigen Isomorphiekette

$$A \cong \operatorname{End}(\operatorname{Id}_{\operatorname{Mod}(A)}) \cong \operatorname{End}(\operatorname{Id}_{\operatorname{QCoh}(\operatorname{Spec} A)}).$$

Allgemein heißt für eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$ die Menge der Endomorphismen des Identitätsfunktors auf $\mathcal{C}$ auch *Zentrum von $\mathcal{C}$*. Mit der Addition und Verkettung von natürlichen Transformationen wird diese zu einem kommutativen Ring.

Bemerkung 1.10. Die Kategorie $\operatorname{QCoh}(X)$ der quasikohärenten Modulgarben ist eine koreflektive Unterkategorie der Kategorie $\operatorname{Mod}(\mathcal{O}_X)$ aller Modulgarben, das heißt die Inklusion $\operatorname{QCoh}(X) \hookrightarrow \operatorname{Mod}(\mathcal{O}_X)$ besitzt einen Rechtsadjungierten, den so genannten *Kohärator*. Als Konsequenz kann man zeigen, dass $\operatorname{QCoh}(X)$ wie auch $\operatorname{Mod}(\mathcal{O}_X)$ eine Grothendieck-Kategorie ist. Kolimiten berechnet man in $\operatorname{QCoh}(X)$ genau wie in $\operatorname{Mod}(\mathcal{O}_X)$. Limiten in $\operatorname{QCoh}(X)$ berechnet man, indem man sie zunächst in $\operatorname{Mod}(\mathcal{O}_X)$ bestimmt und dann den Kohärator anwendet. Für endliche Limiten kann man auf den Kohärator verzichten.[1]

2 Tiefere kategorielle Interpretation

Sei $\mathcal{E}$ eine quasikohärente Modulgarbe auf einem Schema X. Dann erhalten wir für jeden Morphismus $f : \operatorname{Spec} A \to X$ durch Betrachtung des Rückzugs $f^*\mathcal{E}$ einen A-Modul, den wir „$\underline{\mathcal{E}}(A)$“ bezeichnen möchten. In der Notation unterdrücken wir also den Morphismus f und notieren nur seine Quelle. Ist $p : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ ein weiterer Morphismus, so gibt es eine

[1] Seien M_i Moduln über A. Das Produkt der $M_i^\sim$ in der Kategorie aller Modulgarben auf $\operatorname{Spec} A$ ist dann eine Garbe mit $D(f) \mapsto \prod_i M_i[f^{-1}]$. Dagegen ist das Produkt der $M_i^\sim$ in der Kategorie der quasikohärenten Modulgarben eine Garbe mit $D(f) \mapsto (\prod_i M_i)[f^{-1}]$. Es gibt zwar einen kanonischen Morphismus $(\prod_i M_i)[f^{-1}] \to \prod_i M_i[f^{-1}]$; im Allgemeinen ist dieser jedoch weder injektiv noch surjektiv.

kanonische Abbildung $\underline{\mathcal{E}}(A) \to \underline{\mathcal{E}}(B)$. Insgesamt definiert daher die Zuordnung $(\operatorname{Spec} A \to X) \mapsto \underline{\mathcal{E}}(A)$ eine *Prägarbe* auf der Kategorie Aff/X der affinen Schemata über X.

Die Familie dieser Moduln $\underline{\mathcal{E}}(A)$ hat drei Besonderheiten:

0. Die Prägarbe $\underline{\mathcal{E}}$ ist ein Modulobjekt über dem Ringobjekt $\underline{\mathcal{O}_X}$, das ist die Prägarbe

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{Aff}/X)^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ (\operatorname{Spec} A \to X) & \longmapsto & A. \end{array}$$

1. Seien Morphismen $f : \operatorname{Spec} A \to X$ und $p : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ gegeben. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\underline{\mathcal{E}}(A) \otimes_A B \xrightarrow{\cong} \underline{\mathcal{E}}(B),$$

denn $p^* f^* \mathcal{E}$ ist kanonisch isomorph zu $(f \circ p)^* \mathcal{E}$. Diese Isomorphismen erfüllen ihrerseits eine Kohärenzbedingung.

2. Sei $f : \operatorname{Spec} A \to X$ ein Morphismus und sei $\operatorname{Spec} A$ überdeckt durch offene affine Unterschemata $\operatorname{Spec} A[f_i^{-1}]$. Dann ist das Diagramm

$$\underline{\mathcal{E}}(A) \to \prod_i \underline{\mathcal{E}}(A[f_i^{-1}]) \rightrightarrows \prod_{i,j} \underline{\mathcal{E}}(A[f_i^{-1}, f_j^{-1}])$$

ein Differenzkerndiagramm. Man sagt auch, die Zuordnung $(\operatorname{Spec} A \to X) \mapsto \underline{\mathcal{E}}(A)$ sei eine *Zariski-Garbe.*

Man kann sich überlegen, dass für eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf Aff/X Eigenschaft 2 schon aus den Eigenschaften 0 und 1 folgt. Denn das fragliche Diagramm ist dann isomorph zu

$$\mathcal{F}(A) \to \prod_i \mathcal{F}(A)[f_i^{-1}] \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(A)[f_i^{-1}, f_j^{-1}],$$

und es ist eine elementare Beobachtung aus der linearen Algebra über Ringen, dass dieses ein Differenzkerndiagramm ist.

Als Zwischenfazit halten wir fest: Eine quasikohärente Modulgarbe $\mathcal{E}$ definiert ein kohärentes System von Moduln $(\underline{\mathcal{E}}(A))_{\operatorname{Spec} A \to X}$, also ein System, das Eigenschaft 1 hat. Umgekehrt kann man sich überlegen, dass jedes solche System auch eine quasikohärente Modulgarbe festlegt.

Die Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf X ist also äquivalent zur Kategorie der kohärenten Aff/X-indizierten Systeme von Moduln. Das kann einen an die Konstruktion von Limiten in der Kategorie der Mengen erhalten! Tatsächlich gilt

$$\mathrm{QCoh}(X) = \lim_{\operatorname{Spec} A \to X} \mathrm{Mod}(A).$$

Der Limes auf der rechten Seite muss in einem 2-kategoriellen Sinn verstanden werden; ein Objekt dieser Kategorie besteht aus

1. einer Familie von Moduln: für jeden Morphismus $\operatorname{Spec} A \to X$ einen A-Modul M_A, und

2. Isomorphismen: für jeden Morphismus $\operatorname{Spec} A \to X$ und jeden Morphismus $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ einen Isomorphismus $M_A \otimes_A B \to M_B$,

sodass diese bezüglich weiterer Morphismen $\operatorname{Spec} C \to \operatorname{Spec} B$ ein Kohärenzaxiom erfüllen.

Die rechte Seite kann man als Instanz der *Limesformel für Rechts-Kan-Erweiterungen* erkennen. Damit können wir also auch schreiben:

$$\mathrm{QCoh} = \mathrm{Ran}_{\mathrm{inkl}}(\mathrm{Mod}).$$

Der Funktor QCoh, der einem Schema seine Kategorie quasikohärenter Modulgarben zuordnet, ist also die Rechts-Kan-Erweiterung des Funktors $\mathrm{Mod} : \mathrm{Ring} \to \mathrm{Cat}$ (welcher einem Ring A die Kategorie der A-Moduln zuordnet) längs der Inklusion $\mathrm{inkl} : \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sch}^{\mathrm{op}}$; bedenke $\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} = \mathrm{Ring}$.

Man kann diese Geschichte auch noch anders erzählen. Angenommen, wir fangen gerade an, die Grundzüge der Schematheorie zu entwickeln. Als einleuchtendes Konzept für quasikohärente Modulgarben auf affinen Schemata $\operatorname{Spec} A$ fällt uns dann die Kategorie der gewöhnlichen A-Moduln ein. Auf diese Weise erhalten wir einen Funktor $\mathrm{Mod} : \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}$. Wenn es nun doch nur eine Möglichkeit gäbe, diesen Funktor längs der Inklusion $\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sch}^{\mathrm{op}}$ zu erweitern!

Beide der Ausdrücke für $\mathrm{QCoh}(X)$ lassen sich auf Objekte X verallgemeinern, die nicht Schemata im engeren Sinn sind: zum Beispiel Garben auf $\mathrm{Ring}^{\mathrm{op}}$, welche nicht unbedingt lokal affin sind, oder sogar Prägarben auf $\mathrm{Ring}^{\mathrm{op}}$. Die Limesformel ist auch eine zentrale Idee zur Definition der Kategorie der quasikohärenten Modulgarben auf einem Stack.

Wer mag, kann die Formel auch noch zu

$$\mathrm{QCoh}(X) = \int_A \mathrm{Mod}(A)^{\mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} A, X)} = \int_A [\underline{X}(A), \mathrm{Mod}(A)]$$

umschreiben. Damit endet dieser Ausflug in die 2-kategorielle Interpretation quasikohärenter Modulgarben.