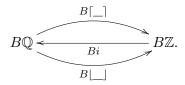
Pizzaseminar zur Kategorientheorie

7. Übungsblatt

Aufgabe 1. Auf- und Abrundung

Wir betrachten die drei monotonen Abbildungen

und ihre gemäß Aufgabe 2 von Übungsblatt 3 induzierten Funktoren



a) Mache dir klar, dass für alle $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\lceil x \rceil \le y \iff x \le i(y).$$

Welche analoge Beziehung gilt zwischen i und $\lfloor \underline{\ } \rfloor$?

b) Zeige:
$$B[_] \dashv Bi \dashv B[_]$$
.

Aufgabe 2. Freie Monoide

Ein Monoid besteht aus einer Menge M, einer assoziativen zweistelligen Verknüpfung \circ und einem neutralen Element e; Monoiden darf es also anders als Gruppen an Inversen fehlen. Monoidhomomorphismen müssen die Verknüpfung und das neutrale Element bewahren.

- a) Sei X eine Menge. Ein Wort über X ist eine endliche Folge von Elementen aus X. Wir haben keine Angst vor dem leeren Wort. Wie wird die Menge F(X) der Wörter über X zu einem Monoid?
- b) Ergänze die Konstruktion aus a) zu einem Funktor der Kategorie der Monoide in die Kategorie der Mengen.
- c) Zeige, dass der so gebastelte Funktor linksadjungiert zum Vergissfunktor ist.

Aufgabe 3. Freie Körper?

Ein Körperhomomorphismus muss Addition und Multiplikation sowie Null- und Einselement bewahren. (Tatsächlich implizieren die ersten beiden Forderungen schon die letzten beiden.)

- a) Zeige: Die Kategorie der Körper besitzt kein initiales Objekt.
- b) Folgere: Der Vergissfunktor von der Kategorie der Körper in die Kategorie der Mengen besitzt keinen Linksadjungierten. Freie Körper gibt es also nicht.