Universität Augsburg
3. April 2013

Pizzaseminar zur Kategorientheorie
6. Übungsblatt

Aufgabe 1. *Das Yoneda-Lemma*

Sei $\mathcal{C}$ eine lokal kleine Kategorie und $\widehat{\mathcal{C}} := \operatorname{Funct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$ ihre Prägarbenkategorie. Wir wollen in mehreren Schritten das *Yoneda-Lemma* beweisen, demnach wir eine in $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $F \in \operatorname{Ob}\widehat{\mathcal{C}}$ natürliche Bijektion

$$\operatorname{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X), F) \cong F(X) \tag{1}$$

haben. Mit $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X)$ ist der kontravariante Hom-Funktor zu X bezeichnet, den wir auch $\widehat{X}$ geschrieben haben.

a) Zeige, dass eine natürliche Transformation $\eta : \operatorname{Hom}(\_, X) \Rightarrow F$ durch ihren Wert $s := \eta_X(\mathrm{id}_X) \in F(X)$ bereits eindeutig festgelegt ist, und zwar über die Formel

$$\eta_Y(f) = F(f)(s) \tag{2}$$

für alle Objekte Y und Morphismen $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

b) Zeige, dass umgekehrt für beliebiges $s \in F(X)$ die Formel (2) eine natürliche Transformation $\eta : \operatorname{Hom}(\_, X) \Rightarrow F$ definiert.

c) Zeige mit a) und b), dass zumindest für festes $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $F \in \widehat{\mathcal{C}}$ eine Bijektion (1) existiert.

d) Linke und rechte Seite von (1) können als Auswertungen der Funktoren

$$\begin{aligned} L &: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathrm{Set}, \quad (X, F) \longmapsto \operatorname{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X), F) \\ R &: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathrm{Set}, \quad (X, F) \longmapsto F(X) \end{aligned}$$

an der Stelle (X, F) angesehen werden. Überlege, wie diese beiden Funktoren auf Morphismen wirken, und zeige, dass sie zueinander isomorph sind.

e) Du hast soeben das Yoneda-Lemma bewiesen. Herzlichen Glückwunsch!

Aufgabe 2. *Dichtheit der Yoneda-Einbettung*

Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann wird jedes Objekt $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ auf kanonische Art und Weise (welche?) zu einem Kokegel des Diagramms

$$F/Y \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}.$$

Der Funktor F heißt genau dann *dicht*, wenn diese Kokegel sogar Kolimiten sind. Die Kategorie F/Y ist dabei folgende *Kommakategorie*:

$$\text{Objekte: alle Morphismen } F(X) \xrightarrow{p} Y \text{ in } \mathcal{D},\ X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$$

$$\text{Morphismen: } \operatorname{Hom}(F(X) \xrightarrow{p} Y, F(\widetilde{X}) \xrightarrow{\tilde{p}} Y) :=$$

$$\left\{ X \xrightarrow{f} \widetilde{X} \;\middle|\; \begin{tikzcd} F(X) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "p"'] & & F(\widetilde{X}) \arrow[dl, "\tilde{p}"] \\ & Y & \end{tikzcd} \text{ kommutiert} \right\}$$

Zeige: Die Yoneda-Einbettung $\mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ ist dicht.