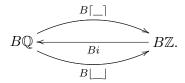
## Pizzaseminar zur Kategorientheorie

# 7. Übungsblatt

#### Aufgabe 1. Auf- und Abrundung

Wir betrachten die drei monotonen Abbildungen

und ihre gemäß Aufgabe 2 von Übungsblatt 3 induzierten Funktoren



a) Mache dir klar, dass für alle  $x \in \mathbb{Q}$  und  $y \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$\lceil x \rceil \le y \iff x \le i(y).$$

Welche analoge Beziehung gilt zwischen i und  $\lfloor \underline{\ } \rfloor$ ?

b) Zeige:  $B[\_] \dashv Bi \dashv B|\_|$ .

### Aufgabe 2. Freie Monoide

Ein Monoid besteht aus einer Menge M, einer assoziativen zweistelligen Verknüpfung  $\circ$  und einem neutralen Element e; Monoiden darf es also anders als Gruppen an Inversen fehlen. Monoidhomomorphismen müssen die Verknüpfung und das neutrale Element bewahren.

- a) Sei X eine Menge. Ein Wort über X ist eine endliche Folge von Elementen aus X. Wir haben keine Angst vor dem leeren Wort. Wie wird die Menge F(X) der Wörter über X zu einem Monoid?
- b) Ergänze die Konstruktion aus a) zu einem Funktor der Kategorie der Mengen in die Kategorie der Monoide.
- c) Zeige, dass der so gebastelte Funktor linksadjungiert zum Vergissfunktor ist.

#### Aufgabe 3. Freie Körper?

Ein Körperhomomorphismus muss Addition und Multiplikation sowie Null- und Einselement bewahren.

- a) Zeige: Die Kategorie der Körper besitzt kein initiales Objekt.
- b) Folgere: Der Vergissfunktor von der Kategorie der Körper in die Kategorie der Mengen besitzt keinen Linksadjungierten. Freie Körper gibt es also nicht.