Der Vierfarbensatz

1852 Vermutung von Francis Guthrie:
4 Farben nötig, auf einer Karte alle Länder verschiedenfarbig anzumalen, sodass zwei benachbarte Länder verschieden eingefärbt sind.

1878 Publikation

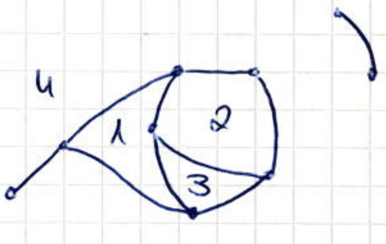
1879, '80 → Beweise

1890, '91 → Widerlegung beider Beweise

Definition: Eine Jordan-Kurve ist eine stetige, injektive Abbildung
$$c: [0,1] \to \mathbb{R}^2$$

Definition: Ein Graph ist eine endliche Menge von Jordan-Kurven, s.d. zwei Jordan-Kurven sich höchstens in ihren Endpunkten berühren.

Bsp.



9 Ecken (E)
10 Kanten (K)
4 Flächen (F)

Definition: Der Grad d(e) einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, die in dieser Ecke enden.

Vier-Farben-Satz:
In jedem Graphen können die Flächen mit 4 Farben so eingefärbt werden, dass keine benachbarten Flächen dieselbe Farbe erhalten.

Definition: Ein kleinster Verbrecher ist ein nicht-4-färbbarer Graph, so dass jeder Graph mit weniger Farben 4-färbbar ist.

Ziel: z.z.: Es gibt keinen!

Ausschließen: 2-Ecken, 1-Ecken, Brückenkanten

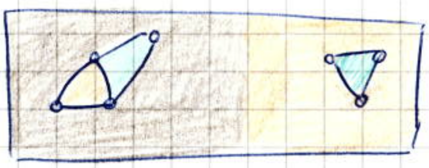
Satz: In einem kleinsten Verbrecher...

a) ... gibt es keine Flächen mit drei oder weniger Nachbarn.

A: Es gibt

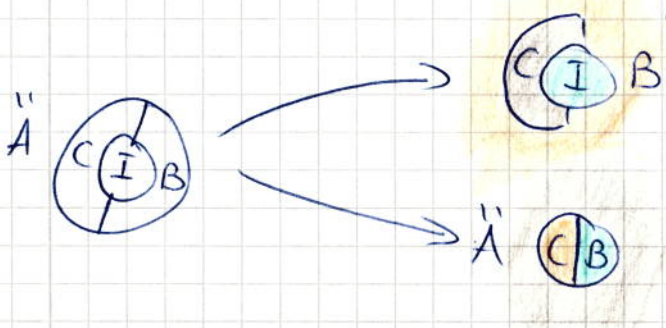
↯ kleinster Verbrecher

b) ... hängen alle Grenzen zusammen



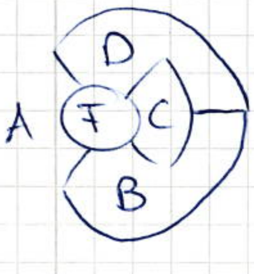
↯ kleinster Verbrecher

c) ... haben zwei Flächen höchstens eine gemeinsame Grenzlinie



d) ... hat jede Ecke den Grad 3.

Theorem: Wenn eine Fläche mehr als drei Nachbarflächen hat, so hat sie zwei Nachbarflächen, die nicht aneinandergrenzen.



(zurück zum Beweis) A:  ~> 

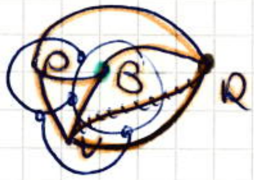
A,C grenzen nicht aneinander

e) ... hat jede Fläche mind. 5 Nachbarn

A: 

A,C nicht benachbart

Im <u>dualen Graphen</u> werden Flächen u. Ecken miteinander vertauscht.



Graph
dualer Graph

<u>Satz</u>: In einem zu einem kleinsten Verbrecher dualen Graphen ...

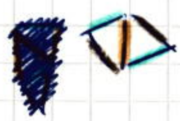
b) ... hängen alle Ecken zusammen

d) ... ist jede Fläche ein Dreieck 

e) ... hat jede Ecke mind. Grad 5

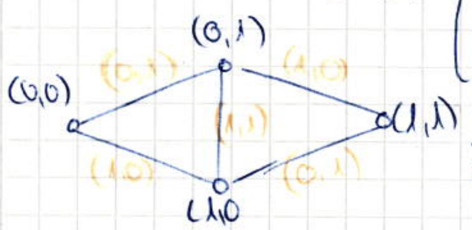
<u>~~Theorem~~ Prob.</u>: Ein zu einem kV dualer Graph ist der Graph mit der kleinsten Eckenanzahl, der nicht Ecken-4-färbbar ist.

<u>Theorem</u>: Ein Graph ist genau dann Ecken-4-färbbar, wenn er $\underbrace{\text{Kanten-3-färbbar}}$ ist.

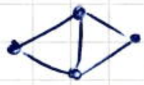
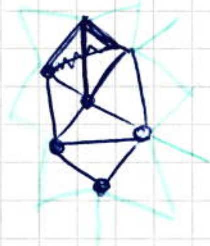


$$\begin{array}{ll} & \underline{\text{Farben}} \\ \text{Ecken} \left\{ \begin{array}{l} (0,0) \\ (1,0) \\ (0,1) \\ (1,1) \end{array} \right. & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Kanten} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Addition} \\ 0+0=0 \\ 0+1=1 \\ 1+0=1 \\ 1+1=0 \end{array}$$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$



Konfigurationen

sind Ausschnitte aus triangulierten Graphen.

Legende

Symbol	d(v)
●	5
·	6
○	7
□	8
▽	9