

Pizzaseminar zu erzeugenden Funktionen

3. Übungsblatt

Aufgabe 1: Symmetrische multivariate erzeugende Funktionen

a) Verallgemeinerung der Wegezählaufgabe von Jessi.

Sei $w(n_1, \dots, n_d)$ die Anzahl der Wege vom Nullpunkt zum Punkt $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$. Ein Weg ist dabei eine Folge von zulässigen Schritten, wobei ein zulässiger Schritt jede Koordinate entweder um 0 oder um 1 erhöht. Finde die erzeugende Funktion

$$W(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n_1, \dots, n_d} w(n_1, \dots, n_d) x_1^{n_1} \dots x_d^{n_d}.$$

b) Erzeugende Funktion des Minimums. Verifiziere:

$$\sum_{n_1, \dots, n_k \geq 1} \min\{n_1, n_2, \dots, n_k\} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_k^{n_k} = \frac{t_1 t_2 \dots t_k}{(1-t_1)(1-t_2) \dots (1-t_k)(1-t_1 t_2 \dots t_k)}$$

Aufgabe 2: Umrechnungen von Basen der symmetrischen Polynome. Bezeichne \mathbf{e}_n und \mathbf{m}_n die elementar- und die monomial symmetrischen Funktionen. Zeige, daß in der Basisdarstellung durch \mathbf{m}_λ der Koeffizient von $\mathbf{m}_{(n,n)}$ in $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)^k$ gleich $\binom{k}{n} \binom{k-n}{n}$ ist.

Aufgabe 3: Formel von Molien für die äußere Algebra. Sei G eine endliche Gruppe, die auf einem \mathbb{C} -Vektorraum V wirkt und damit eine Wirkung auf $\Lambda^m V$ induziert. Zeige:

$$\sum_{m \geq 0} \dim \left((\Lambda^m V)^G \right) t^m = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \det(I + gt)$$

Aufgabe 4: Symmetrisches Produkt der affinen Ebene. Auf dem Polynomring in vier Variablen $\mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2]$ wirkt die symmetrische Gruppe in zwei Elementen durch Vertauschen der Indizes. Berechne die Hilbert–Poincaré–Reihe mithilfe der Formel von Molien.

Aufgabe 5: Anwendungen des Pólyatheorems.

- Gegeben seien ein im Raum bewegliches Quadrat und ein Farbkasten mit k Farben. Wie viele Möglichkeiten gibt es (bis auf Isomorphie), die Ecken des Quadrats zu färben?
- Wie viele Möglichkeiten sind es, wenn man das Quadrat durch ein regelmäßiges Tetraeder ersetzt?
- Wie viele Möglichkeiten sind es, wenn man verlangt, daß die Farbe Schwarz genau ein Mal verwendet werden muß?