# Spiel und Spaß mit der internen Welt des kleinen Zariski-Topos

13. Dezember 2013

| | | |
|---|---|---|
| $R \models x = y : \mathcal{O}$ | $:\Longleftrightarrow$ | Für die gegebenen Elemente $x, y \in R$ gilt $x = y$. |
| $R \models \top$ | $:\Longleftrightarrow$ | $1 = 1 \in R$. (Das ist stets erfüllt.) |
| $R \models \bot$ | $:\Longleftrightarrow$ | $1 = 0 \in R$. (Das ist genau in Nullringen erfüllt.) |
| $R \models \phi \wedge \psi$ | $:\Longleftrightarrow$ | $R \models \phi$ und $R \models \psi$. |
| $R \models \phi \vee \psi$ | $:\Longleftrightarrow$ | ~~$R \models \phi$ oder $R \models \psi$.~~ |
| $R \models \phi \vee \psi$ | $:\Longleftrightarrow$ | Es gibt eine Zerlegung $\sum_i s_i = 1 \in R$ sodass für alle $i$ jeweils $R[s_i^{-1}] \models \phi$ oder $R[s_i^{-1}] \models \psi$. |
| $R \models \phi \Rightarrow \psi$ | $:\Longleftrightarrow$ | Für jedes $s \in R$ gilt: Aus $R[s^{-1}] \models \phi$ folgt $R[s^{-1}] \models \psi$. |
| $R \models \forall x : \mathcal{O}.\ \phi$ | $:\Longleftrightarrow$ | Für jedes $s \in R$ und jedes $x \in R[s^{-1}]$ gilt: $R[s^{-1}] \models \phi(x)$. |
| $R \models \exists x : \mathcal{O}.\ \phi$ | $:\Longleftrightarrow$ | Es gibt eine Zerlegung $\sum_i s_i = 1 \in R$ und Elemente $x_i \in R[s_i^{-1}]$ sodass für alle $i$: $R[s_i^{-1}] \models \phi(x_i)$. |

Die Kripke-Joyal-Semantik des kleinen Zariski-Topos.

## Inhaltsverzeichnis

# 1. Vorbereitungen

## 1.1. Etwas formale Logik

Im Folgenden wollen wir über mathematische Aussagen sprechen, in denen

$$= \quad \top \quad \bot \quad \wedge \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \forall \quad \exists$$

die einzigen vorkommenden logischen Symbole sind. Dabei steht „$\bot$“ für eine ausgezeichnete falsche und „$\top$“ für eine ausgezeichnete Aussage. Negation ist ebenfalls wichtig, muss aber nicht als primitiv angenommen werden, da man sie über die Beziehung

$$\neg\phi \quad :\equiv \quad (\phi \Rightarrow \bot)$$

durch $\Rightarrow$ und $\bot$ ausdrücken kann. Wir schreiben die universelle und existenzielle Quantifikation nicht mit dem Elementsymbol, sondern dem in der Typtheorie üblichen Doppelpunkt:

$$\forall x\,{:}\,X.\ \phi(x).$$

Gelegentlich werden wir die Abhängigkeit von $\phi(x)$ von $x$ in der Notation unterdrücken und kurz nur „$\phi$“ schreiben. Ferner verwenden wir den Quantor der eindeutigen Existenz, formal definiert als

$$\exists! x\,{:}\,X.\ \phi(x) \quad :\equiv \quad \big(\exists x\,{:}\,X.\ \phi(x)\big) \ \wedge\ \big(\forall x\,{:}\,X.\ \forall x'\,{:}\,X.\ (\phi(x) \wedge \phi(x') \Rightarrow x = x')\big).$$

## 1.2. Geometrische Vorstellung von Ringen

Zu einem kommutativen Ring $R$ können wir uns einen geometrischen Raum $\operatorname{Spec} R$ vorstellen, und zwar auf solche Art und Weise, dass ein Ringelement $s \in R$ einer „guten“ Funktion auf $\operatorname{Spec} R$ entspricht. Den Ort, wo diese Funktion nicht verschwindet, wollen wir mit „$D(s)$“ bezeichnen. Dieser Ort ist stets eine offene Menge.

**Beispiel 1.1.** Den Ring $K[X,Y]$ stellen wir uns geometrisch als $K^2$ vor. Zum Element $s := 2X + 3Y$ gehört dann die Funktion $(x,y) \mapsto 2x + 3y$. Die Menge $D(s)$ ist das Komplement einer schrägen Gerade in $K^2$.

In diesem Bild können wir uns eine Zerlegung $1 = \sum_i s_i \in R$ der Eins als eine Überdeckung $\bigcup_i D(s_i)$ von $\operatorname{Spec} R$ vorstellen: Da die Einsfunktion nirgendwo Null ist, können an keinem Punkt alle $s_i$ zugleich verschwinden.

# 2. Die Kripke-Joyal-Semantik des kleinen Zariski-Topos

Zu jedem kommutativen Ring $R$ gehört ein alternatives Mathematik-Universum, der *kleine Zariski-Topos zu $R$*. Uns fehlen kategorientheoretische Konzepte, um dieses Universum explizit anzugeben (obwohl das nicht intrinsisch schwer ist). Wir können aber beschreiben, was es bedeuten soll, dass *eine Aussage $\phi$ in dem kleinen Zariski-Topos zu $R$ gilt*, in Formeln ausgedrückt als

$$R \models \phi.$$

**Definition 2.1.** Die Bedeutung von Aussagen der internen Sprache des Zariski-Topos soll durch Rekursion über den Aussageaufbau durch die auf der ersten Seite angegebenen Übersetzungsregeln festgelegt sein.

Auf den ersten Blick erscheinen diese Regeln völlig willkürlich. Tatsächlich aber sind sie fein aufeinander abgestimmt, schon kleine Änderungen führen dazu, dass das gesamte System zusammenbricht. In diesem Rahmen wollen wir sie schlichtweg als gegeben hinnehmen, man gewöhnt sich schnell an sie.

In dem kleinen Zariski-Topos zu $R$ gibt es ein Abbild des Rings $R$, das wir „$\mathcal{O}$“ schreiben. (Diese Bezeichnung hat nichts mit Ganzheitsringen zu tun.)

# 3. Erste Gehversuche in der internen Welt

## 3.1. Interne Kommutativität

Mit den Übersetzungsregeln an der Hand können wir beginnen, die interne Welt zu erkunden. Folgende Beobachtung macht den Anfang:

**Proposition 3.1.** *Der Ring $\mathcal{O}$ des kleinen Zariski-Topos zu $R$ ist wieder kommutativ – das heißt:*

$$R \models \forall x, y : \mathcal{O}.\ xy = yx.$$

*Beweis.* Die Doppelquantifikation in der Behauptung ist eine Kurzschreibweise für

$$R \models \forall x : \mathcal{O}.\ \forall y : \mathcal{O}.\ xy = yx.$$

Gemäß den Regeln bedeutet das:

> Für alle $s \in R$ und alle $x \in R[s^{-1}]$ gilt:
>
> > Für alle $t \in R$ und alle $y \in R[s^{-1}][t^{-1}]$ gilt:
> >
> > > In $R[s^{-1}][t^{-1}]$ gilt $xy = yx$.

Das erscheint vielleicht etwas verklausuliert, ist aber auch offensichtlich wahr. □

## 3.2. Interne Invertierbarkeit

Das folgende Lemma ist ähnlich. Es besagt, dass es keinen Unterschied zwischen Invertierbarkeit aus interner und externer (also üblicher) Sicht gibt.

**Proposition 3.2.** *Genau dann ist ein Ringelement $f \in R$ invertierbar, wenn es als Element von $\mathcal{O}$ invertierbar ist, wenn also*

$$R \models \exists g : \mathcal{O}.\ fg = 1.$$

*Beweis.* Die Übersetzung der internen Aussage lautet:

> Es gibt eine Zerlegung $1 = \sum_i s_i \in R$, sodass für jeden Index $i$ ein Element $g_i \in R[s_i^{-1}]$ mit $fg_i = 1$ in $R[s_i^{-1}]$ existiert.

Damit ist es nur noch eine Übungsaufgabe in elementarer Ringtheorie, die behauptete Äquivalenz nachzuweisen. □

## 3.3. Interne Lokalität

Diese beiden Propositionen waren noch nicht besonders beeindruckend. Die folgende Proposition ist dagegen beim ersten Kontakt völlig verblüffend und illustriert gut den kuriosen Charakter der internen Welt. Dazu erinnern wir an das Konzept des lokalen Rings:

**Definition 3.3.** Ein Ring heißt genau dann *lokal*, wenn, wann immer eine Summe von Ringelementen invertierbar ist, schon mindestens ein Summand invertierbar ist.

**Beispiel 3.4.** Die vertrauten Ringe $\mathbb{Z}$ und $K[X, Y]$ sind nicht lokal. Oft erhält man lokale Ringe durch geeignete Lokalisierung: Jeder Körper ist lokal, die Lokalisierung $\mathbb{Z}_{(p)}$ nach einem Primideal $(p)$ ist lokal, der Ring $K[X, Y]_{(X-a,Y-b)} = \{f/g \mid f, g \in K[X, Y], g(a, b) \neq 0\}$ der in beliebig kleinen Umgebungen von $(a, b) \in K^2$ definierten rationalen Funktionen ist lokal.

*Bemerkung* 3.5. Die Namensgebung erklärt sich durch folgende Beobachtung: Ein lokaler Ring $R$ ist ein solcher, sodass jede offene Überdeckung von $\operatorname{Spec} R$ schon eine einelementige Teilüberdeckung besitzt.

**Proposition 3.6.** *Unabhängig davon, ob $R$ lokal ist oder nicht, ist der Ring $\mathcal{O}$ der internen Zariski-Welt lokal.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass

$$R \models \forall x, y : \mathcal{O}.\ \ulcorner x + y \text{ inv.}\urcorner \implies \ulcorner x \text{ inv.}\urcorner \vee \ulcorner y \text{ inv.}\urcorner.$$

Die Häkchen sollen andeuten, dass der entsprechende Teil nur umgangssprachlich vorliegt und daher vom Leser formalisiert werden muss. Unter Verwendung der vorhergehenden Proposition weisen und die Übersetzungsregeln also an, folgende Behauptung zu zeigen:

> Für alle $s \in R$ und $x \in R[s^{-1}]$ gilt:
>
> > Für alle $t \in R[s^{-1}]$ und $y \in R[s^{-1}][t^{-1}]$ gilt:
> >
> > > Für alle $u \in R$ gilt: Falls $x + y$ in $R[s^{-1}][t^{-1}][u^{-1}] =: R'$ invertierbar ist, so gibt es eine Zerlegung der Eins von $R'$, $1 = v_1 + \cdots + v_n \in R'$, sodass in den weiter lokalisierten Ringen $R'[v_i^{-1}]$ jeweils $x$ oder $y$ invertierbar ist.

Der Nachweis dieser Behauptung ist eine Übungsaufgabe. □

Mit der internen Welt des kleinen Zariski-Topos kann man also jeden beliebigen Ring als einen lokalen Ring auffassen.

# 4. Vereinfachungsregeln

In den bisherigen Beispielen waren die übersetzten Aussagen recht verschachtelt. Bevor wir fortfahren, wollen wir daher Vereinfachungsregeln festhalten, die den praktischen Umgang mit internen Aussagen angenehmer gestalten.

**Lemma 4.1.** *Für folgende Quantorenfiguren kann man die Regeln vereinfachen:*

$$\begin{array}{lcl}
R \models \forall x : \mathcal{O}.\ \forall y : \mathcal{O}.\ \phi & :\Longleftrightarrow & \textit{Für alle } s \in R \textit{ und } x, y \in R[s^{-1}] \textit{ gilt } R[s^{-1}] \models \phi(x, y). \\
R \models \forall x : \mathcal{O}.\ \phi \Rightarrow \psi & :\Longleftrightarrow & \textit{Für alle } s \in R \textit{ und } x \in R[s^{-1}] \textit{ gilt:} \\
 & & \qquad \textit{Aus } R[s^{-1}] \models \phi(x) \textit{ folgt } R[s^{-1}] \models \psi(x). \\
R \models \exists x : \mathcal{O}.\ \exists y : \mathcal{O}.\ \phi & :\Longleftrightarrow & \textit{Es gibt eine Zerlegung } 1 = \sum_i s_i \in R \textit{ und} \\
 & & \qquad \textit{für jeden Index } i \textit{ Elemente } x_i, y_i \in R[s_i^{-1}] \\
 & & \qquad \textit{mit } R[s_i^{-1}] \models \phi(x_i, y_i). \\
R \models \exists! x : \mathcal{O}.\ \phi & :\Longleftrightarrow & \textit{Für alle } s \in R \textit{ existiert genau ein } x \in R[s^{-1}] \textit{ mit} \\
 & & \qquad R[s^{-1}] \models \phi(x). \\
R \models \forall x : \mathcal{O}.\ \exists! y : \mathcal{O}.\ \phi & :\Longleftrightarrow & \textit{Für alle } s \in R \textit{ und } x \in R[s^{-1}] \textit{ existiert} \\
 & & \qquad \textit{genau ein } y \in R[s^{-1}] \textit{ mit } R[s^{-1}] \models \phi(x, y).
\end{array}$$

*Beweis.* Sobald man die internen Aussagen übersetzt hat, muss man nur ein paar allgemeine Fakten über die Lokalisierung von Ringen nachweisen. Das ist nicht schwer, aber auch nicht besonders erhellend. □

# 5. Fundamentale Eigenschaften der internen Sprache

## 5.1. Lokalität der internen Sprache

In einem gewissen Sinn gilt $R \models \phi$ genau dann, wenn $\phi$ auf ganz $\operatorname{Spec} R$ gilt. Dagegen bedeutet $R[s^{-1}] \models \phi$ nur, dass $\phi$ auf $D(s)$ gilt.

Die interne Welt des kleinen Zariski-Topos zu $R$ fasst nun gewissermaßen die *lokalen Aspekte* von $R$ – solche, die genau dann ganz $\operatorname{Spec} R$ betreffen, wenn sie auf den einzelnen Überdeckungsmengen einer offenen Überdeckung gelten. Die folgende Proposition macht dieses Motto präzise:

**Proposition 5.1.** *Sei $1 = \sum_i s_i \in R$ eine Zerlegung der Eins und $\phi$ eine Aussage. Dann gilt genau dann $R \models \phi$, wenn für alle $i$ jeweils $R[s_i^{-1}] \models \phi$ gilt.*

*Beweis.* Induktion über den Aufbau von $\phi$. □

Eine Aussage $\phi$ muss also nicht unbedingt im Wortlaut erfüllt sein, um in der internen Welt des kleinen Zariski-Topos zu gelten. Es genügt, dass es eine Zerlegung der Eins gibt, sodass sie in den jeweils lokalisierten Ringen gilt. Die technische Verwaltung der Zerlegungen übernimmt dabei der Übersetzungsapparat; mit der internen Welt ist es also möglich, *lokal* mit Ringen zu arbeiten, ohne manuell Zerlegungen einführen und mitschleppen zu müssen.

**Beispiel 5.2.** Sei $R$ ein Prüferscher Bereich. Dann ist ein endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a}$ zwar nicht unbedingt ein Hauptideal, aber *lokal* ein Hauptideal – in dem Sinn, dass es eine Zerlegung $1 = \sum_i s_i$ der Eins gibt, sodass die erweiterten Ideale $\mathfrak{a}[s_i^{-1}]$ jeweils in $R[s_i^{-1}]$ Hauptideale sind. Der Ring $\mathcal{O}$ der internen Welt spiegelt diese Eigenschaft viel einfacher wieder: Er ist *bézoutsch* – jedes endlich erzeugte Ideal ist selbst schon ein Hauptideal.

## 5.2. Verträglichkeit mit konstruktiver Logik

Bisher haben wir die interne Welt des kleinen Zariski-Topos allein dadurch erkundet, indem wir mit den Kripke-Joyal-Regeln die Rückübersetzung in unsere gewohnte mathematische Sprache vorgenommen haben. Wenn das unsere einzige Interaktionsmöglichkeit mit der internen Welt wäre, wäre das ganze Thema aber nicht besonders spannend. Tatsächlich aber können wir in der internen Welt auch *mathematisch argumentieren* – fast genau so, wie wir es gewohnt sind.

**Proposition 5.3.** *Wenn $R \models \phi$ gilt und konstruktiv aus $\phi$ eine weitere Aussage $\psi$ folgt, so gilt auch $R \models \psi$.*

*Beweis.* Wir müssen uns zunächst überlegen, aus welchen grundlegenden Argumentationsschritten Beweise aufgebaut sind. Dann müssen wir von jedem solchen Baustein nachweisen, dass er in der internen Welt ebenfalls erfüllt ist. Etwa gibt es das logische Prinzip

*Wenn $\phi \wedge \psi$ gilt, so gilt auch $\phi$.*

Dieses ist in der internen Sprache ebenfalls erfüllt, denn aus $R \models \phi \wedge \psi$ folgt nach den Übersetzungsregeln sofort $R \models \phi$.

Die Hauptschwierigkeit eines präzisen Beweises der Proposition liegt darin, eine übersichtliche Liste von Kernbeweisschritten derart zusammenzustellen, dass jede denkbare Argumentation so formalisiert werden kann, dass sie nur diese Bausteine verwendet. Danach ist es nur noch ein einfacher Induktionsbeweis über den Aufbau formal niedergeschriebener konstruktiver Beweise. □

**Beispiel 5.4.** Man kann konstruktiv zeigen, dass jede Matrix über einem lokalen Ring, die einen Rang besitzt, mittels Ähnlichkeitstransformationen auf eine Diagonalgestalt gebracht werden kann. Daraus folgt *ohne weiteres Zutun* sofort, dass man jede Matrix (die einen Rang besitzt) über einem *beliebigen* Ring lokal auf eine Diagonalgestalt bringen kann – in dem Sinn, dass es eine Zerlegung der Eins gibt, sodass in den lokalisierten Ringen die Matrix jeweils ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist: Denn nach Proposition 3.6 ist der Ring $\mathcal{O}$ der internen Welt ja stets lokal.

*Bemerkung* 5.5. Ein direkter Beweis der Behauptung über die Diagonalisierbarkeit über beliebigen Ringen ist natürlich ebenfalls möglich. Er erfordert jedoch die Einführung, Verwaltung und Kombination mehrerer Zerlegungen der Eins. Diese technischen Schritte fallen bei Arbeit in der internen Welt ersatzlos weg. Um Zerlegungen der Eins muss man sich nur ein einziges Mal kümmern, nämlich im Beweis der allgemeinen Proposition 5.3.

# 6. Der nichtklassische Charakter der internen Welt

Proposition 5.3 erlaubt es, über den Ring $\mathcal{O}$ der internen Welt wie üblich mathematisch zu argumentieren – solange man dabei nur konstruktive Logik verwendet, also sich *nicht* auf die sonst üblichen Axiome

- *Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten:* $\phi \vee \neg\phi$,
- *Prinzip der Doppelnegationselimination:* $\neg\neg\phi \Rightarrow \phi$ und
- das *Auswahlaxiom*

beruft. Das ist anfangs ungewohnt, bedeutet in Anwendungen der Mathematik aber oftmals keine große Einschränkung.

Die Beschränkung auf konstruktive Logik ist dabei keine Frage der Einstellung – die interne Welt erfüllt nun mal nicht die genannten klassischen Axiome. Das wollen wir in diesem Abschnitt einsehen.

**Lemma 6.1.** *Sei $f \in R$. Genau dann ist $f$ in der internen Welt nicht invertierbar, wenn $f$ im gewöhnlichen Sinn nilpotent ist.*

*Beweis.* Die Aussage $R \models \neg(\ulcorner f \text{ inv.} \urcorner)$ lautet ausgeschrieben

$$R \models \Big(\exists g : \mathcal{O}.\ fg = 1\Big) \Rightarrow \bot$$

und unter Zuhilfenahme der Vereinfachungsregeln aus Lemma 4.1 und Lemma 3.2 übersetzt wie folgt:

> Für alle $s \in R$ gilt:
>
> > Sollte $f$ in $R[s^{-1}]$ invertierbar sein, so gilt $1 = 0$ in $R[s^{-1}]$ (das ist gleichbedeutend damit, dass $s$ nilpotent ist).

Durch die Spezialisierung $s := f$ erhalten wir daher sofort die Hinrichtung. Wenn umgekehrt $f$ nilpotent ist, enthalten die lokalisierten Ringe $R[s^{-1}]$ ein invertierbares und trotzdem nilpotentes Element. Das geht nur, wenn sie Nullringe sind. □

**Proposition 6.2.** *In der internen Welt des kleinen Zariski-Topos eines Rings gilt im Allgemeinen* nicht*, dass jedes Element invertierbar oder nicht invertierbar ist.*

*Beweis.* Ein Gegenbeispiel liefert der Ring $R := \mathbb{Z}$ mit dem Element $f := 2$. Denn

$$R \models \ulcorner f \text{ inv.} \urcorner \vee \neg(\ulcorner f \text{ inv.} \urcorner)$$

bedeutet, dass es eine Zerlegung $1 = s_1 + \cdots + s_n$ der Eins von $\mathbb{Z}$ gibt, sodass in den lokalisierten Ringen $\mathbb{Z}[s_i^{-1}]$ die Zahl 2 jeweils invertierbar oder nilpotent ist. Eine der Zahlen $s_i$ muss ungerade sein. In den Nennern der Elemente des zugehörigen lokalisierten Rings $\mathbb{Z}[s_i^{-1}]$ dürfen also gewisse ungerade Zahlen stehen (Potenzen von $s_i$). Daher ist die Zahl 2 dort weiterhin nicht invertierbar. Sie ist aber auch nicht nilpotent. □

# 7. Ausblick

*Auszuformulieren:*

- Diskussion anderer Objekte als $\mathcal{O}$, insbesondere Objekte wie $\mathcal{O}[X]$ und $\mathcal{O}^{n \times m}$, die mühelos auch emuliert werden können
- „Kann man mit der Topossprache Aussagen beweisen, die man ohne sie nicht beweisen könnte?“
- Geometrische Formeln, halmweise Charakterisierung

- Explizite Beschreibung des kleinen Zariski-Topos
- Anwendung auf Modulgarben über Schemata und Vektorbündel über Mannigfaltigkeiten
- Diskussion des großen Zariski-Topos
- Literaturverweise: Moerdijk, Johnstohne, Mulvey, Richman, Coquand/Lombardi/Roy, Kock (universal projective geometry), Pizzaseminar
- geometrische Morphismen/Ringhomos
- universelle Eigenschaft des kleinen Zariski-Topos
- BHK-Interpretation konstruktiver Logik

# A. Aufgaben

**Aufgabe 1.** *Nichttrivialität des internen Rings*

Sei $R$ ein beliebiger kommutativer Ring. Zeige, dass $\mathcal{O}$ stets ein nichttrivialer Ring ist, zeige also:

$$R \models \neg(1 = 0).$$

**Aufgabe 2.** *Der kleine Zariski-Topos des Nullrings*

Zeige, dass im kleinen Zariski-Topos des Nullrings jede beliebige Aussage gilt. Zeige also, dass wenn $R$ ein Ring mit $1 = 0 \in R$ und $\phi$ eine beliebige Aussage ist, $R \models \phi$ gilt.

*Tipp:* Man kann eine sehr einfache Zerlegung der Eins hinschreiben.

**Aufgabe 3.** *Körpereigenschaften des internen Rings*

Ein Ring heißt genau dann *reduziert*, wenn, wann immer ein Element nilpotent ist, dieses schon gleich Null ist. Sei $R$ ein beliebiger kommutativer Ring.

a) Zeige, dass der interne Ring $\mathcal{O}$ in folgendem Sinn beinahe ein Körper ist:

$$R \models \forall x : \mathcal{O}.\ \neg(\ulcorner x \text{ inv.}\urcorner) \Rightarrow \ulcorner x \text{ nilpotent}\urcorner.$$

b) Zeige, dass $R$ genau dann reduziert ist, wenn $\mathcal{O}$ reduziert ist.

c) Sei $R$ reduziert. Zeige, dass dann $\mathcal{O}$ ein Körper in folgendem Sinn ist:

$$R \models \forall x : \mathcal{O}.\ \neg(\ulcorner x \text{ inv.}\urcorner) \Rightarrow x = 0.$$

d) Zeige, dass die Umkehrung der Aussage in c) ebenfalls gilt.

**Aufgabe 4.** *Diskretheit des internen Rings*

Ein Ring heißt genau dann *diskret*, wenn jedes Element Null ist oder nicht Null ist. Natürlich ist jeder Ring der gewöhnlichen mathematischen Welt diskret.

Ein Ringelement $f$ heißt genau dann *pseudoregulär*, wenn, wann immer ein Produkt von $f$ mit einem weiteren Ringelement $g$ Null ist, $g$ nilpotent ist.

a) Sei $f$ ein Element eines kommutativen Rings $R$. Zeige, dass $f$ genau dann in der internen Welt nicht Null ist (also $R \models \neg(f = 0)$ gilt), wenn $f$ im gewöhnlichen Sinn pseudoregulär ist.

b) Zeige, dass der interne Ring $\mathcal{O}$ im Allgemeinen nicht diskret ist.

**Aufgabe 5.** *Eine geometrische Körperbedingung*

Ein *diskreter Körper* ist ein kommutativer Ring, sodass jedes Element entweder Null oder invertierbar ist. Das besondere an dieser Körperbedingung ist, dass sie eine geometrische Formel ist.

a) Rechtfertige die Namensgebung, indem du zeigst, dass diskrete Körper stets diskret im Sinn der vorherigen Aufgabe sind.

b) Zeige, dass der interne Ring $\mathcal{O}$ des kleinen Zariski-Topos zu einem beliebigen Ring im Allgemeinen *kein* diskreter Körper ist.

**Aufgabe 6.** *Prüfersche Bereiche aus interner Sicht*

Beweise die Behauptung über die interne Welt in Beispiel 5.2.

**Aufgabe 7.** *Kerne von Matrizen*

a) Sei $M \in R^{n \times m}$ eine Matrix über einem lokalen Ring $R$, die als lineare Abbildung $R^m \to R^n$ surjektiv ist, sodass es also zu jedem $y \in R^n$ ein $x \in R^m$ mit $Mx = y$ gibt.

   Zeige, dass $M$ ähnlich zu einer (rechteckigen) Diagonalmatrix mit genau $n$ Einsern auf der Hauptdiagonale ist. Folgere, dass der Kern von $M$ eine Basis aus $(m - n)$ Vektoren besitzt. (Man sagt auch: Der Kern von $M$ ist *frei vom Rang* $(m - n)$.)

b) Überlege, wie folgende Aussage sinnvoll zu interpretieren ist, und erkläre, wieso aus einer konstruktiven Behandlung von Teilaufgabe a) sofort ihre Gültigkeit folgt: Der Kern einer $(n \times m)$-Matrix über einem beliebigen kommutativen Ring, die als lineare Abbildung surjektiv ist, ist *lokal frei* vom Rang $(m - n)$.