

## Pizzaseminar zu konstruktiver Mathematik

### 3. Übungsblatt

#### Aufgabe 1. Schranken für die Größe der $n$ -ten Primzahl

Folgender Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen wird Euklid zugeschrieben:

Angenommen,  $p_1, \dots, p_r$  seien alle Primzahlen. Wir setzen  $N := p_1 \cdots p_r + 1$ . Nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik lässt sich  $N$  in Primfaktoren zerlegen. Das ist ein Widerspruch, denn die  $p_i$  sind keine Teiler von  $N$ , andere Primzahlen gibt es aber nach Widerspruchsvoraussetzung nicht.

- a) Formuliere den Beweis so um, dass er konstruktiv folgende stärkere Aussage zeigt:  
*Seien  $p_1, \dots, p_r$  gegebene Primzahlen. Dann gibt es eine weitere Primzahl ungleich den  $p_i$ .*
- b) Sei nun  $p_1, p_2, \dots$  die aufsteigende Folge aller Primzahlen. Extrahiere aus deinem Beweis die Abschätzung

$$p_{n+1} \leq p_1 \cdots p_n + 1.$$

- c) Zeige folgende Schranke für die Größe der  $n$ -ten Primzahl:

$$p_n \leq 2^{2^{n-1}}.$$

- d) Tatsächlich ist diese Schranke sehr pessimistisch. Extrahiere aus Eulers Alternativbeweis der Unendlichkeit der Primzahlen eine bessere! (Details kommen noch!)