Universität Augsburg
13. August 2013

Pizzaseminar
1. Übungsblatt

Aufgabe 1. *Diskretheit der natürlichen Zahlen*

Zeige für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

$$n = 0 \quad \vee \quad \neg(n = 0).$$

Verwende dazu nur die fünf *Peano-Axiome*:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat eine Zahl $S(n)$ als Nachfolger.
3. Die Zahl 0 ist Nachfolger keiner Zahl.
4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
5. Enthält eine Teilmenge der natürlichen Zahlen die Zahl 0 und mit jeder Zahl auch ihren Nachfolger, so enthält sie schon alle natürlichen Zahlen.

Aufgabe 2. *Konstruktive Tautologien*

Zeige für beliebige Aussagen φ und ψ (bzw. $\psi(x)$):

a) $\varphi \Longrightarrow \neg\neg\varphi$

b) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

c) $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$

d) $\neg\neg\exists x \in A\colon \psi(x) \Longleftrightarrow \neg\forall x \in A\colon \neg\psi(x)$

Gilt ggf. auch die Rückrichtung? *Tipp:* Die Negation ist als $\neg\varphi :\equiv (\varphi \Rightarrow \bot)$ definiert. Wahrheitswertetafeln haben hier nichts zu suchen.

Aufgabe 3. *Doppelnegationselimination*

Zeige, dass folgende zwei Prinzipien äquivalent sind:

(LEM) Für alle Aussagen φ gilt: $\varphi \vee \neg\varphi$.

(DNE) Für alle Aussagen ψ gilt: $\neg\neg\psi \Rightarrow \psi$.

Tipp für (DNE) $\Rightarrow$ (LEM): Verwende die Voraussetzung *nicht* für $\psi := \varphi$.

Aufgabe 4. *Teilmengen von* $\{\star\}$

Klassisch gilt:

Jede Teilmenge von $X := \{\star\}$ ist gleich $\emptyset$ oder gleich X.

Konstruktiv lässt sich das nicht zeigen, die Potenzmenge von X hat (potenziell) viel mehr Struktur. Beweise das durch ein *brouwersches Gegenbeispiel*: Zeige, dass aus dieser Aussage das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten folgt.