Varianten des Theorems von Kirchberger

Tim Baumann

TopMath-Frühlingsschule in Oberschönenfeld

4. März 2014

Theorem (Kirchberger)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann sind P und Q genau dann durch eine Hyperebene trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit maximal $n + 2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Hyperebene trennbar sind.

Theorem (Kirchberger)

*Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann sind P und Q genau dann durch eine Hyperebene trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit maximal $n+2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Hyperebene trennbar sind.*

Übersicht

Definition

Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

Definition

Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n.
Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:

$$\forall\, a \in A : \|p - a\| < \alpha$$

und

$$\forall\, b \in B : \|p - a\| > \alpha$$

Definition

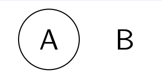
Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n.
Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:



$$\forall\, a \in A \ : \ \|p - a\| < \alpha$$

und

$$\forall\, b \in B \ : \ \|p - a\| > \alpha$$

Definition

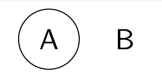
Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

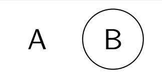
$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n.
Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:





$$\forall\, a \in A \,:\, \|p - a\| < \alpha$$
und
$$\forall\, b \in B \,:\, \|p - a\| > \alpha$$

oder

$$\forall\, a \in A \,:\, \|p - a\| > \alpha$$
und
$$\forall\, b \in B \,:\, \|p - a\| < \alpha$$

Theorem (Kirchberger)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann sind P und Q genau dann durch eine Hyperebene streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit maximal $n+2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Hyperebene streng trennbar sind.

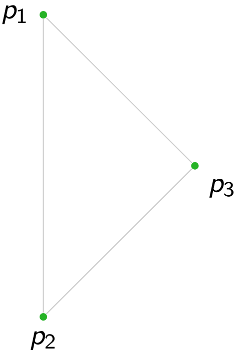
Theorem (Kirchberger')

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit maximal $n+2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

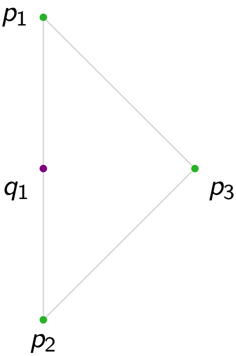
Theorem (Kirchberger')

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit maximal $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

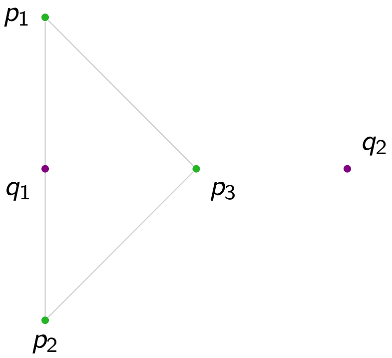
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



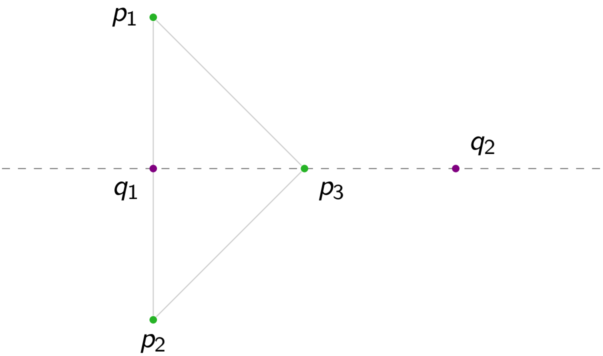
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



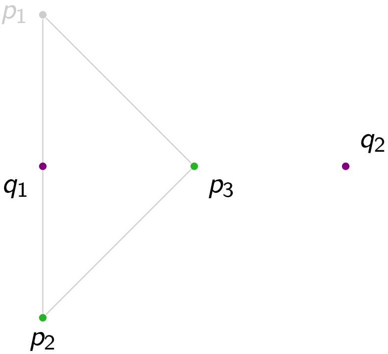
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



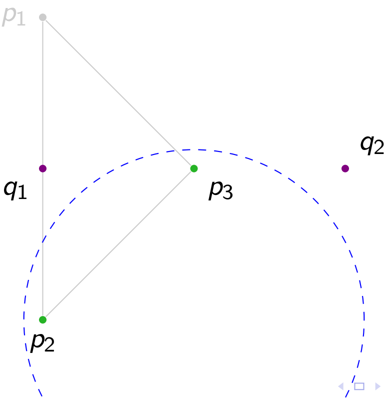
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



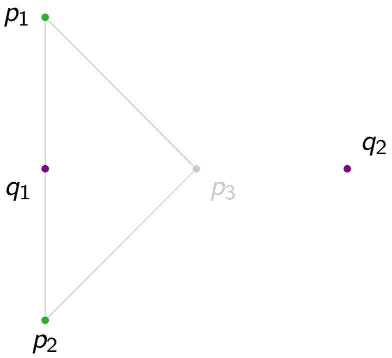
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



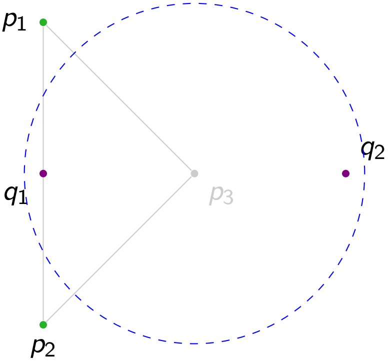
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



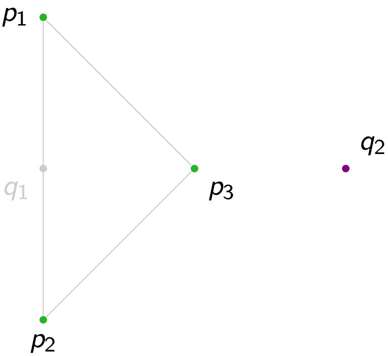
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



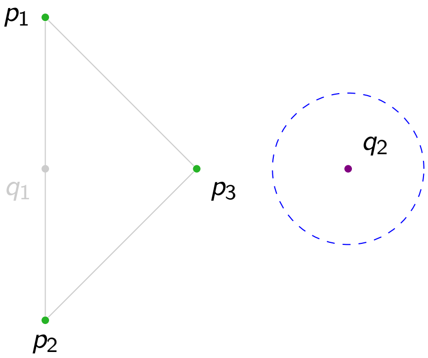
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



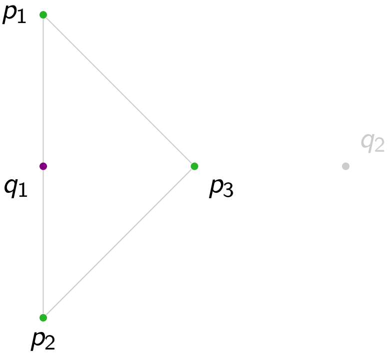
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



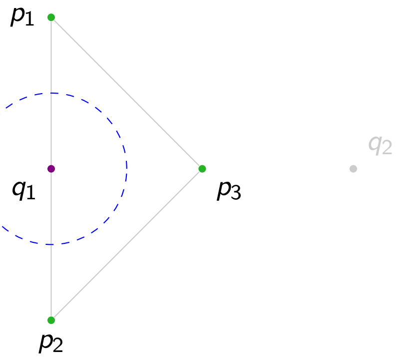
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



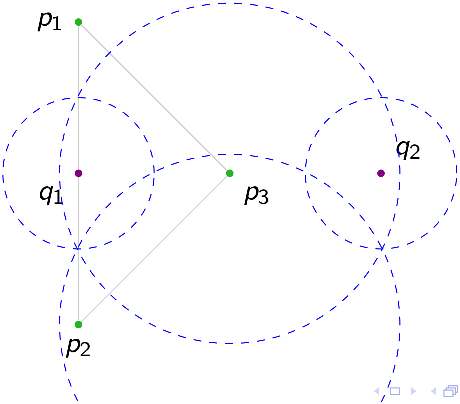
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:

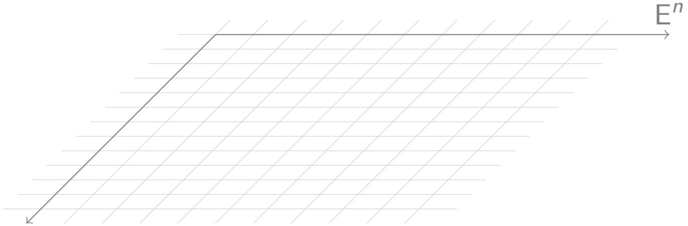


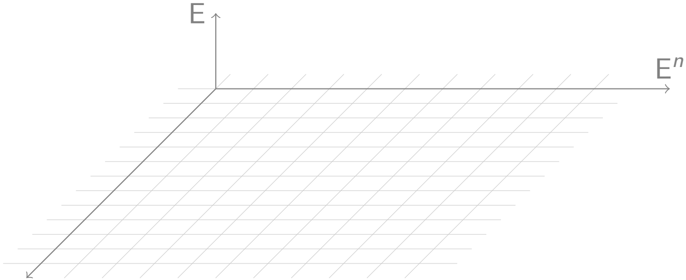
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



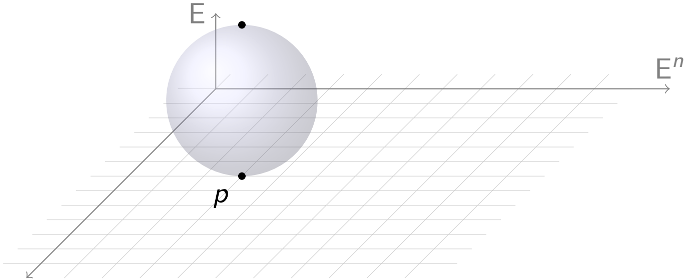
Theorem (Kirchberger')

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit maximal $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

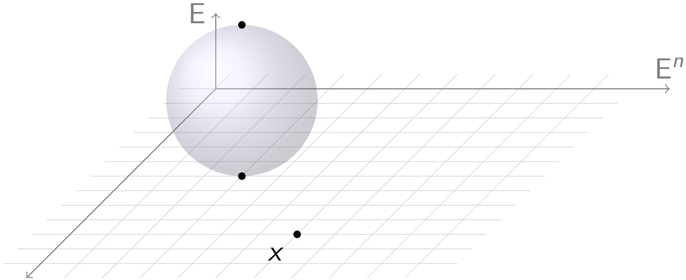

E^n



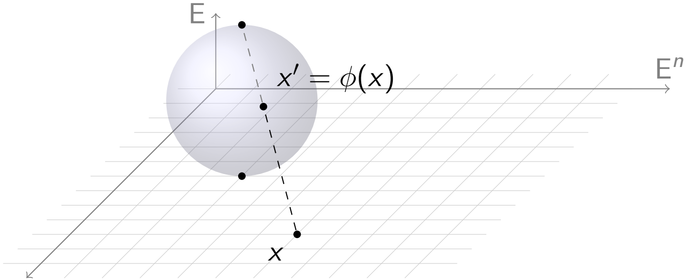
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.



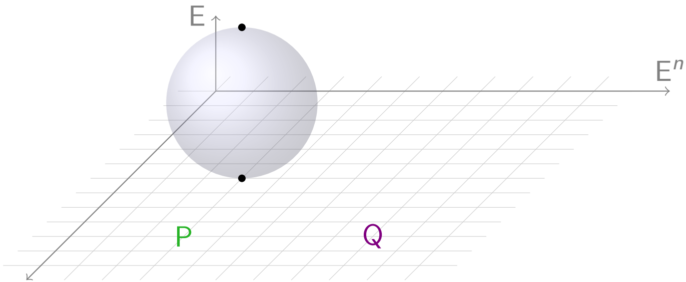
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.



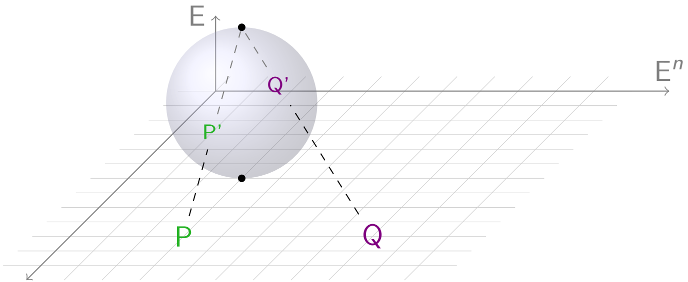
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in E^n$ und $S \subset E^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
3. Betrachte die stereographische Projektion $\phi : E^n \to S$.



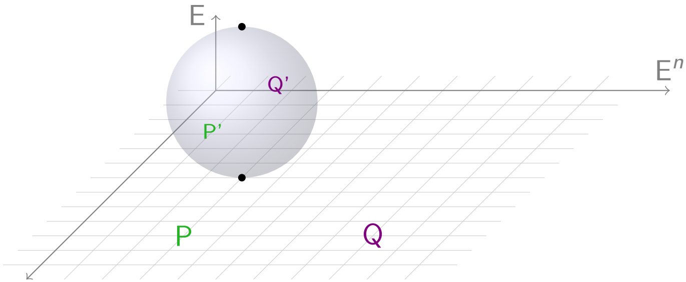
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
3. Betrachte die stereographische Projektion $\phi : \mathrm{E}^n \to S$.



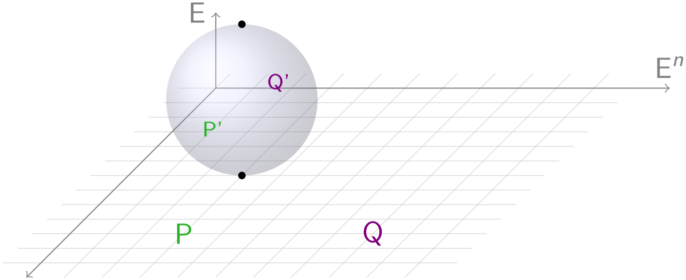
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
3. Betrachte die stereographische Projektion $\phi : \mathrm{E}^n \to S$.
4. Seien P, $Q \subset \mathrm{E}^n$ nichtleer und kompakt sodass für jede Menge $T \subset \mathrm{E}^n$ mit maximal $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.



1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in E^n$ und $S \subset E^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
3. Betrachte die stereographische Projektion $\phi : E^n \to S$.
4. Seien $P, Q \subset E^n$ nichtleer und kompakt sodass für jede Menge $T \subset E^n$ mit maximal $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.
5. Seien P' und Q' die (kompakten) Bilder von P bzw. Q unter ϕ.

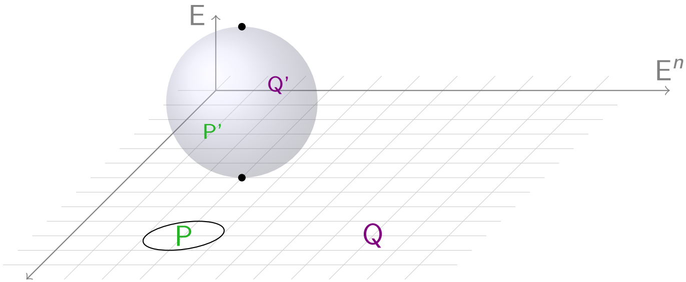


Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.



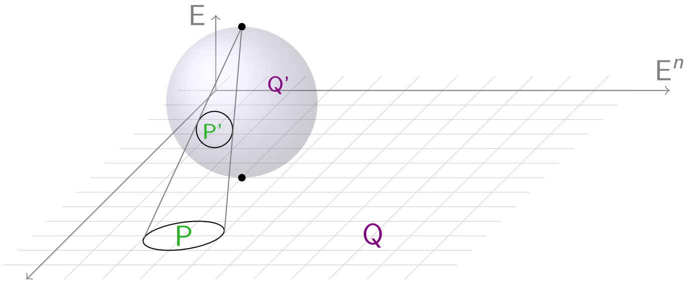
Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

6. Sei $T \subset S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.



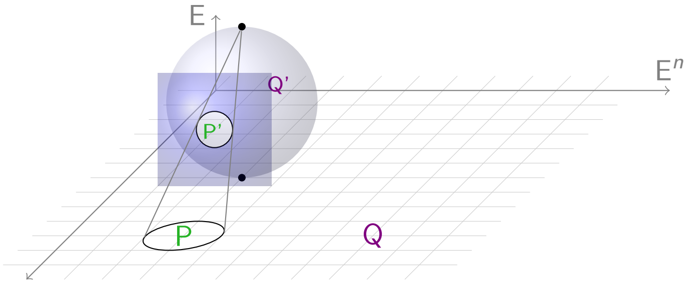
Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

6. Sei $T \subset S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
7. Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.



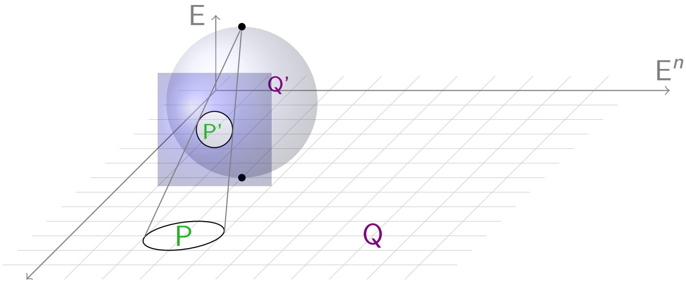
Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset E^{n+1}$ streng getrennt werden.

6. Sei $T \subset S \subset E^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
7. Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.
8. Die stereogr. Projektion der Sphäre ist ein Kreis auf S (Kreistreue).



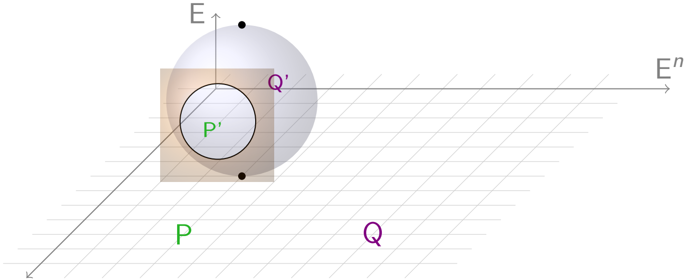
Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset E^{n+1}$ streng getrennt werden.

6. Sei $T \subset S \subset E^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
7. Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.
8. Die stereogr. Projektion der Sphäre ist ein Kreis auf S (Kreistreue).
9. Der Kreis auf S ist der Schnitt von S mit einer Hyperebene H.

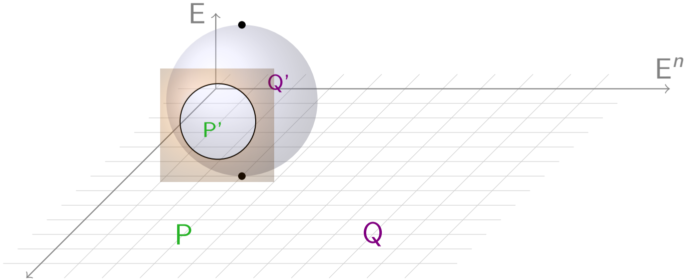


Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

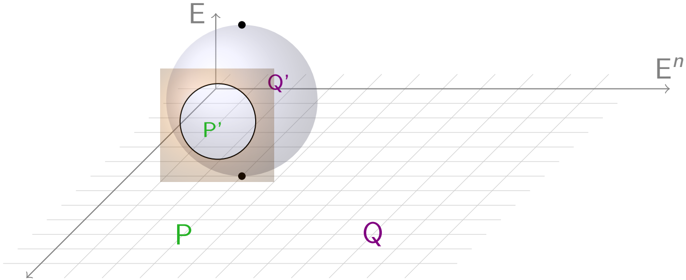
6. Sei $T \subset S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
7. Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.
8. Die stereogr. Projektion der Sphäre ist ein Kreis auf S (Kreistreue).
9. Der Kreis auf S ist der Schnitt von S mit einer Hyperebene H.
10. Da H dann $T \cap P'$ und $T \cap Q'$ streng trennt, folgt die Behauptung nach dem Satz von Kirchberger.



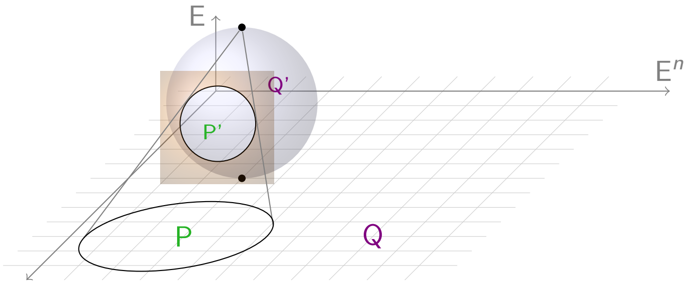
11. Sei $\alpha \in \mathsf{E}^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.



11. Sei $\alpha \in \mathrm{E}^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.
12. Da P' und Q' kompakt sind, gibt es $\epsilon > 0$ mit $\langle \alpha, p \rangle \leq b - \epsilon$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle \geq b + \epsilon$ für alle $q \in Q'$.



11. Sei $\alpha \in \mathrm{E}^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.
12. Da P' und Q' kompakt sind, gibt es $\epsilon > 0$ mit $\langle \alpha, p \rangle \leq b - \epsilon$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle \geq b + \epsilon$ für alle $q \in Q'$.
13. Somit können wir annehmen, dass H_0 den Nordpol der Sphäre S nicht schneidet.



11. Sei $\alpha \in \mathrm{E}^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.
12. Da P' und Q' kompakt sind, gibt es $\epsilon > 0$ mit $\langle \alpha, p \rangle \leq b - \epsilon$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle \geq b + \epsilon$ für alle $q \in Q'$.
13. Somit können wir annehmen, dass H_0 den Nordpol der Sphäre S nicht schneidet.
14. Der Schnitt $H_0 \cap S$ ist ein Kreis und $\phi^{-1}(H_0 \cap S)$ trennt P und Q.

Übersicht

Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

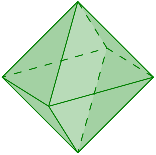
von A und F erzeugter *k-Zylinder*.

Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.

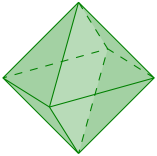


Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.



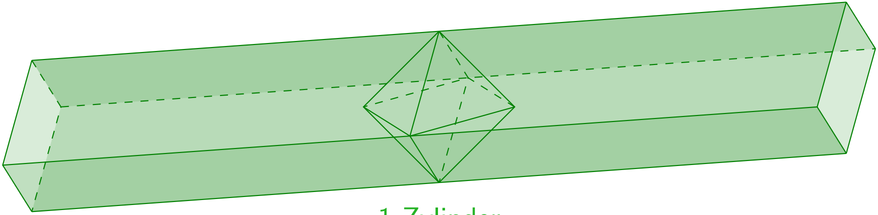
0-Zylinder

Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.



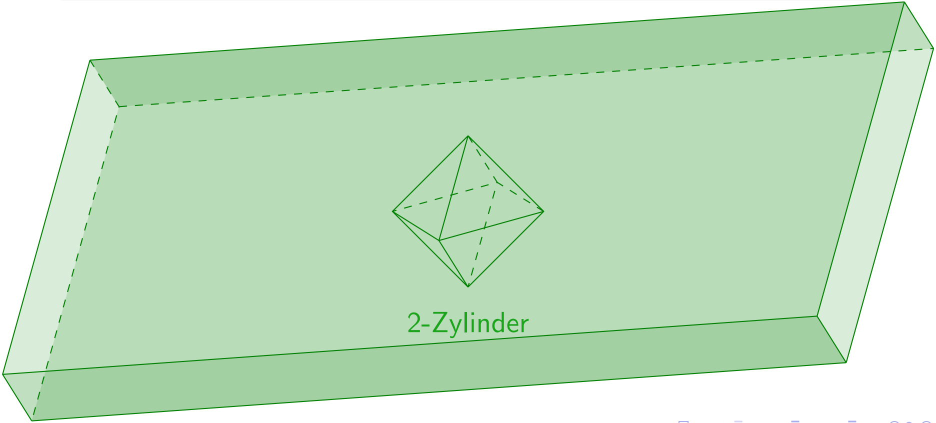
1-Zylinder

Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.

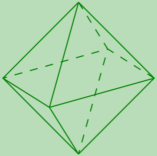


Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.



3-Zylinder

Kirchberger-Theorem für Zylinder?

Theorem (???)

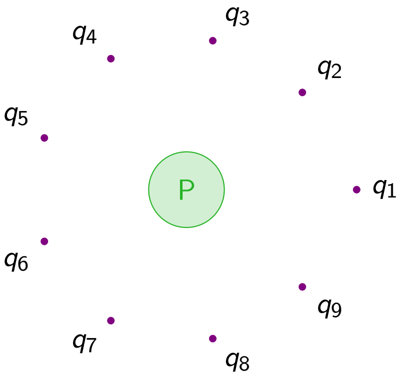
Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann gibt es einen k-Zylinder $Z = (\text{conv } P) + F$ mit $Z \cap Q = \emptyset$ genau dann, wenn es für alle Teilmengen $T \subset P \cup Q$ mit maximal $f(n,k)$ Punkten einen k-Zylinder $Z_T = \text{conv}(T \cap P) + F_T$ mit $Z_T \cap (T \cap Q) = \emptyset$ gibt.

Kirchberger-Theorem für Zylinder?

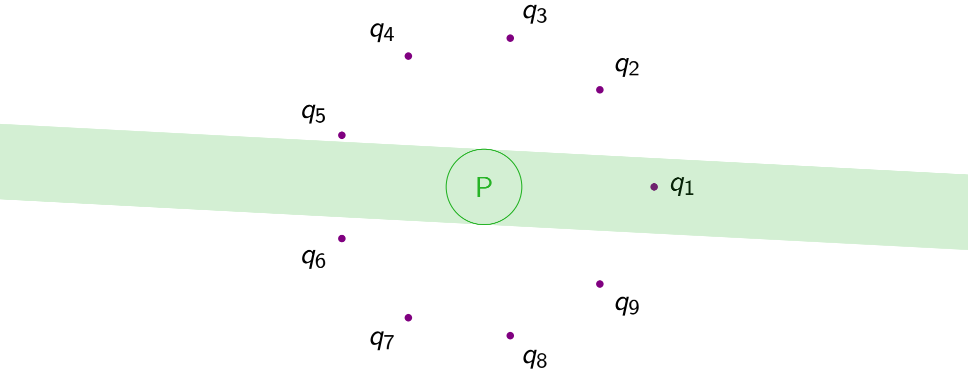
Theorem (???)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann gibt es einen k-Zylinder $Z = (\mathrm{conv}\, P) + F$ mit $Z \cap Q = \emptyset$ genau dann, wenn es für alle Teilmengen $T \subset P \cup Q$ mit maximal $f(n,k)$ Punkten einen k-Zylinder $Z_T = \mathrm{conv}(T \cap P) + F_T$ mit $Z_T \cap (T \cap Q) = \emptyset$ gibt.

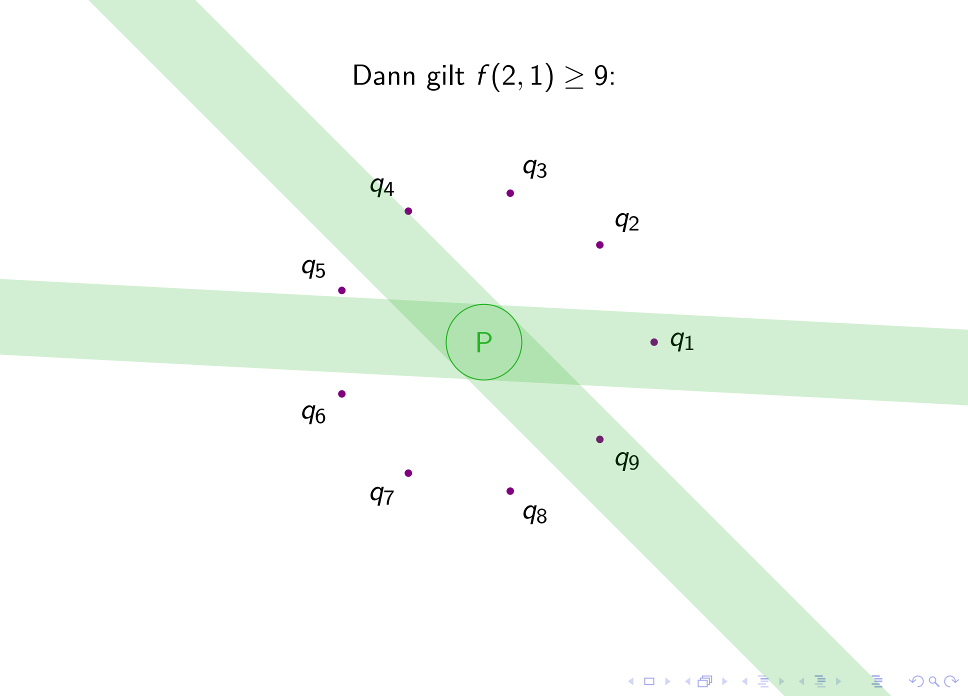
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



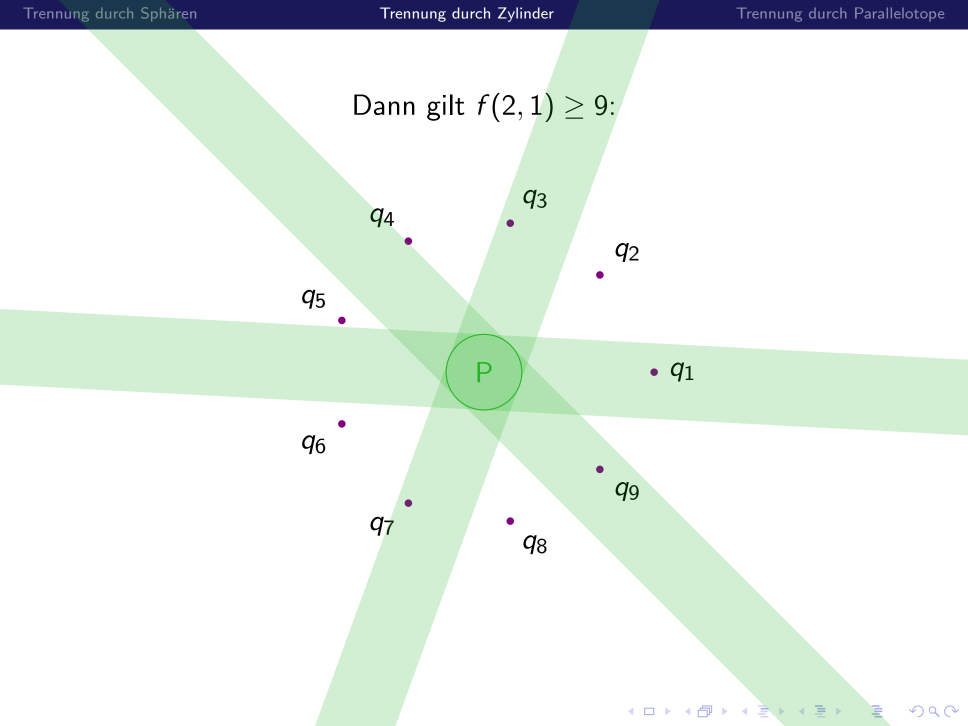
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



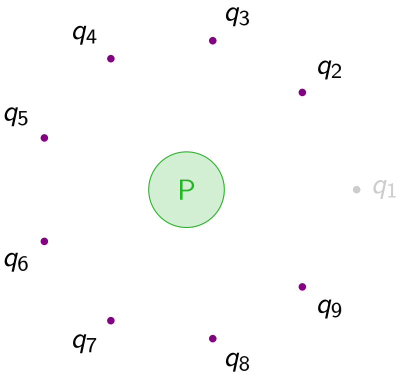
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



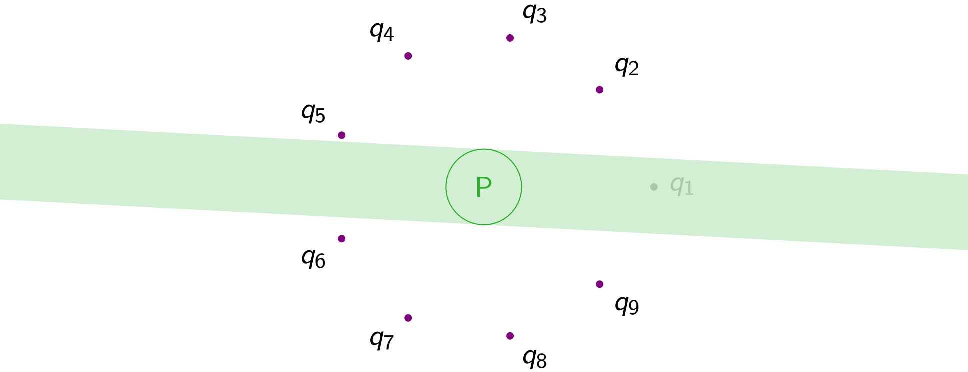
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



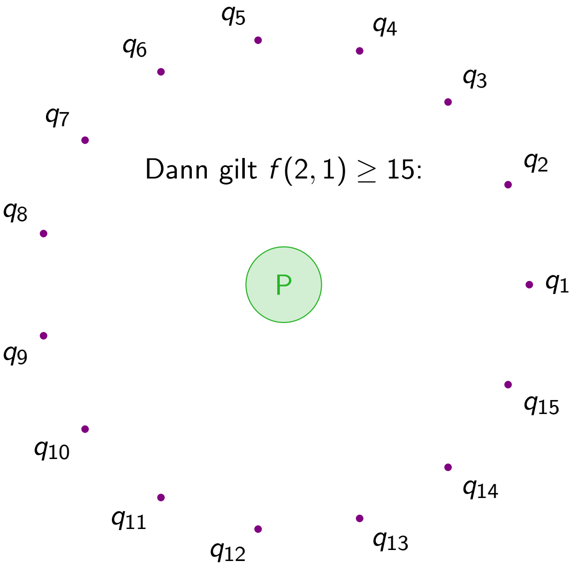
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



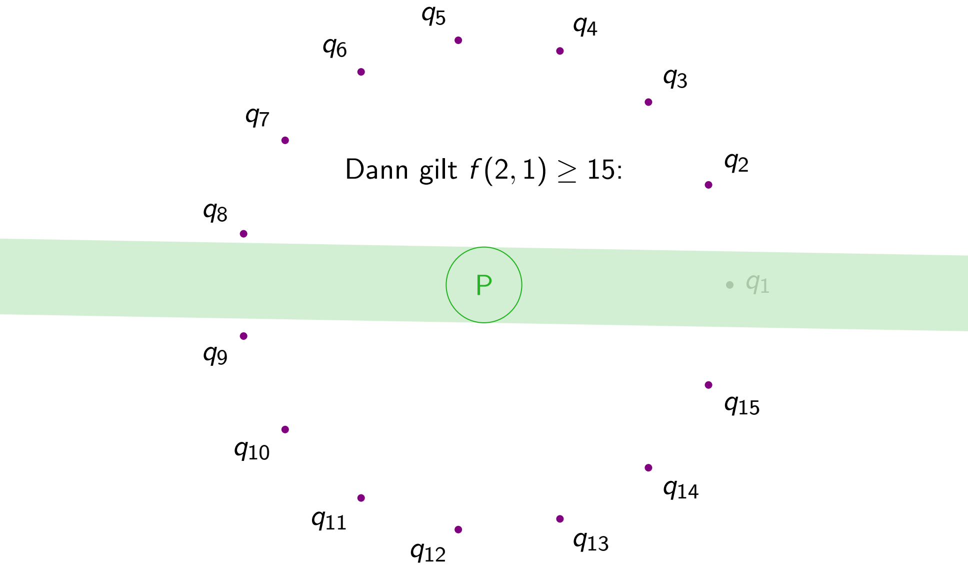
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



Dann gilt $f(2,1) \geq 15$:



Dann gilt $f(2,1) \geq 15$:



Kirchberger-Theorem für Zylinder? So nicht!

Theorem (???)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann gibt es einen k-Zylinder $Z = (\operatorname{conv} P) + F$ mit $Z \cap Q = \emptyset$ genau dann, wenn es für alle Teilmengen T von $P \cup Q$ mit maximal $f(n,k)$ Punkten einen k-Zylinder $Z_T = \operatorname{conv}(T \cap P) + F_T$ mit $Z_T \cap (T \cap Q) = \emptyset$ gibt.

Definition

Eine Teilmenge $K \subset S_\alpha(p)$ heißt *stark konvex*, wenn K keine antipodalen (gegenüberliegenden) Punkte enthält und zu jedem Paar von Punkten auch den kleineren Bogen des Großkreises zwischen diesen Punkten enthält.

Übersicht

TODO