

Geometrische Morphismen; Eigenschaften von Topoi und Konstruktionen mit Topoi

Tim Baumann

13. April 2017

1 Geometrische Morphismen

Definition. Ein *geometrischer Morphismus* $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ zwischen Topoi ist ein Paar

$$\mathcal{E} \begin{array}{c} \xleftarrow{f^*} \\ \perp \\ \xrightarrow{f_*} \end{array} \mathcal{D}$$

von adjungierten Funktoren, wobei f^* linksexakt ist, d. h. f^* bewahrt endliche Limiten. Dabei heißt f^* *Urbildfunktor* und f_* *Direktes-Bild-Funktor*.

Erinnerung. Außerdem bewahrt f_* Limiten und f^* Kolimiten, denn:

$$\text{Left-Adjoint Preserve Colimits (LAPC), \quad Right-Adjoint Preserve Limits (RAPL)}$$

Bemerkung. Aus dem Yoneda-Lemma folgt: Bei einer Adjunktion $F \dashv G$ ist F eindeutig (bis auf Isomorphie) durch G bestimmt (und umgekehrt). Die Daten eines geometrischen Morphismus sind also schon allein durch f^* oder f_* gegeben.

Definition. Ein *Punkt* eines Topos \mathcal{E} ist ein geometrischer Morphismus $\mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{E}$.

Bemerkung. Diese Definition ergibt Sinn, da für $\mathcal{E} = \mathbf{Sh}(X)$ geometrische Morphismen $\mathbf{Set} = \mathbf{Sh}(\{\heartsuit\}) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$ in 1-zu-1-Korrespondenz zu stetigen Abbildungen $\{\heartsuit\} \rightarrow X$, also Punkten von X , stehen.

TODO: warum sind Punkte interessant?

Beispiel. Sei \mathcal{E} ein kovollständiger Topos (z. B. ein Grothendiecktopos). Dann hat der *Globale-Schnitte-Funktor*

$$\Gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad E \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, E)$$

einen Linksadjungierten, nämlich

$$\Delta : \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{E}, \quad S \mapsto \coprod_{s \in S} 1.$$

Für diesen gelten

$$\begin{aligned} \Delta(\{\heartsuit\}) &= \coprod_{s \in \{\heartsuit\}} 1 \cong 1 \\ \Delta(S \times T) &= \coprod_{(s,t) \in S \times T} 1 \cong \left(\coprod_{s \in S} 1 \right) \times \left(\coprod_{t \in T} 1 \right) = \Delta(S) \times \Delta(T) \end{aligned}$$

Außerdem kann man zeigen, dass Δ auch Differenzkerne und somit alle endlichen Limiten erhält. Folglich ist

$$\mathcal{E} \begin{array}{c} \xleftarrow{\Delta} \\ \perp \\ \xrightarrow{\Gamma} \end{array} \mathbf{Set}$$

ein geometrischer Morphismus.

Es gibt auch keinen anderen geometrischen Morphismus $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$, denn für jeden solchen Morphismus und jedes Objekt $E \in \mathcal{E}$ gilt:

$$f_* E \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, f_* E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(f^* 1, E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, E) \cong \Gamma(E).$$

2 Stetige Abbildungen induzieren geometrische Morphismen

TODO

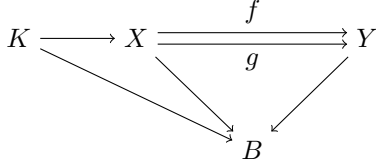
3 Scheibenkategorien von Topoi sind Topoi

Satz. Sei \mathcal{E} ein Topos, $B \in \text{Ob}(\mathcal{E})$. Dann ist auch die Scheibenkategorie \mathcal{E}/B ein Topos.

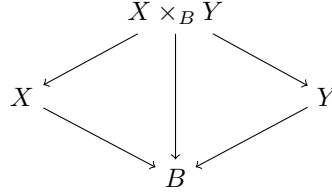
Beweis. Wir müssen die Toposaxiome nachrechnen:

- ① \mathcal{E}/B ist endlich vollständig:

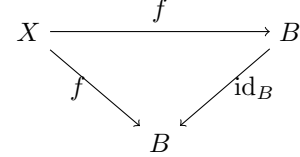
Der Differenzkern berechnet sich wie in \mathcal{E} :



Binäre Produkte in \mathcal{E}/B sind Pullbacks in \mathcal{E} :



Das terminale Objekt in \mathcal{E}/B ist der Morphismus $\text{id}_B : B \rightarrow B$:



- ② \mathcal{E}/B besitzt einen Unterobjektklassifizierer:

Sei $U : \mathcal{E}/B \rightarrow \mathcal{E}$ der offensichtliche Vergissfunktor. Dieser Funktor ist linksadjungiert zum Funktor $(- \times B) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/B$, denn es gilt

$$\text{Hom}_{\mathcal{E}}(X, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X \xrightarrow{f} B, Y \times B \xrightarrow{\pi_2} B)$$

natürlich in $(X \xrightarrow{f} B) \in \text{Ob}(\mathcal{E}/B)$ und $Y \in \text{Ob}(\mathcal{E})$. Da ein Morphismus f in \mathcal{E}/B genau dann ein Monomorphismus ist, wenn $U(f)$ ein solcher ist, gilt:

$$\text{Sub}_{\mathcal{E}/B}(A \xrightarrow{f} B) \cong \text{Sub}_{\mathcal{E}}(A) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega_{\mathcal{E}}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}/B}(A \xrightarrow{f} B, \Omega_{\mathcal{E}} \times B \xrightarrow{\pi_2} B)$$

Nach Proposition I.3.1 in SiGaL ist folglich $\Omega_{\mathcal{E}/B} = \Omega_{\mathcal{E}} \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ der Unterobjektklassifizierer in \mathcal{E}/B . Der universelle Monomorphismus $\text{true} : 1 \rightarrow \Omega$ ist die Komposition

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\cong} & 1 \times B & \xrightarrow{\text{true}_{\mathcal{E}} \times \text{id}_B} & \Omega \times B \\ & \searrow \text{id}_B & \downarrow \pi_2 & \swarrow \pi_2 & \\ & & B & & \end{array}$$

- ③ \mathcal{E}/B ist kartesisch abgeschlossen:

TODO: gibt es hierfür eine schöne Konstruktion mithilfe der internen Sprache? Die Konstruktion in SiGaL ist zu kompliziert und nimmt außerdem $Z = \Omega$ an. Vergleich mit Set: Dort gilt $Z^Y = \prod_{b \in B} Z_b^{Y_b}$.

□

TODO: Evtl. erwähnen wie Kolimiten berechnet werden

Definition. Sei $k : B \rightarrow A$ ein Morphismus in \mathcal{E} . Dann erhalten wir einen Funktor

$$\Sigma_k : \mathcal{E}/B \rightarrow \mathcal{E}/A, \quad (X \xrightarrow{p_X} B) \mapsto (k \circ p_X : X \xrightarrow{p_X} B \xrightarrow{k} A)$$

durch Komponieren mit k und einen *Basiswechselfunktor*

$$k^* : \mathcal{E}/A \rightarrow \mathcal{E}/B, \quad (X \xrightarrow{p_X} A) \mapsto (B \times_A X \xrightarrow{\pi_B} B)$$

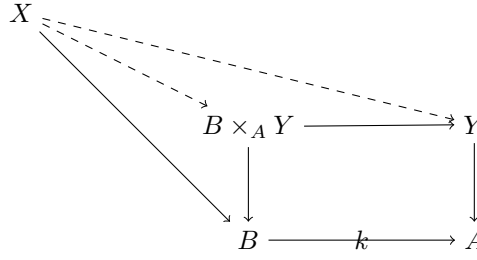
durch Pullback entlang k .

Lemma. $\Sigma_k \dashv k^*$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/A}(\Sigma_k(X \rightarrow B), Y \rightarrow A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X \rightarrow B, k^*(Y \rightarrow A)).$$

Betrachte das Diagramm



Elemente der linken Hom-Menge sind Morphismen $X \rightarrow Y$, die das äußere Viereck kommutieren lassen; Elemente der rechten Hom-Menge sind Morphismen $X \rightarrow B \times_A Y$, die das linke Dreieck kommutieren lassen. Zwischen solchen Elementen besteht eine 1-zu-1-Korrespondenz, gegeben durch die universelle Eigenschaft des Pullbacks $B \times_A Y$. \square

Lemma. k^* besitzt auch einen Rechtsadjungierten $\Pi_k : \mathcal{E}/B \rightarrow \mathcal{E}/A$.

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $A \cong 1$ und somit $\mathcal{E}/A \cong \mathcal{E}$. (Ansonsten verwende $\mathcal{E}' := \mathcal{E}/A$ und $B' := (B \xrightarrow{k} A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}')$ anstelle von \mathcal{E} bzw. B . Beachte, dass $\mathcal{E}'/B' \simeq \mathcal{E}/B$.)

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(k^*(X), Y \xrightarrow{h} B) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X \times B \xrightarrow{\pi_B} B, Y \xrightarrow{h} B) \\ &\cong \{t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X \times B, Y) \mid h \circ t = \pi_B\} \\ &\cong \{t' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, Y^B) \mid h^B \circ t' = j \circ !\} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \{g : Y^B \mid h \circ g = \mathrm{id}_B\}) \end{aligned}$$

wobei $j : 1 \rightarrow B^B$ die Curryfizierung von id_B und $! : X \rightarrow 1$ ist. Wir definieren somit Π_k durch

$$\Pi_k(k : Y \rightarrow B) := \{g : Y^B \mid h \circ g = \mathrm{id}_B\}. \quad \square$$

Korollar. $\mathcal{E}/B \xleftarrow[\Sigma_k]{k^*} \mathcal{E}/A$ ist ein geometrischer Morphismus.

Dieser ist *wesentlich*, d. h. k^* besitzt auch einen Linksadjungierten.

4 Lawvere-Tierney-Topologien und Garbifizierung

Definition. Eine *Lawvere-Tierney-Topologie* auf einem Topos \mathcal{E} ist ein Morphismus $j : \Omega \rightarrow \Omega$, für den gilt:

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } j \circ \mathrm{true} = \mathrm{true} & \text{(b) } j \circ j = j & \text{(c) } j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j) \\ \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\mathrm{true}} & \Omega \\ & \searrow \mathrm{true} & \downarrow j \\ & & \Omega \end{array} & \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega \\ & \searrow j & \downarrow j \\ & & \Omega \end{array} & \begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \\ j \times j \downarrow & & \downarrow j \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array} \end{array}$$

Interpretation. j ist ein idempotenter, mit \wedge und true verträglicher modaler Operator

Zum Beispiel: Sei φ eine Aussage. Die anschauliche Bedeutung von $\Box\varphi$ ist „ φ gilt immer“. Dann sollten intuitiv auch folgende Regeln gelten:

$$\Box \top = \top, \quad \Box \Box \varphi \iff \Box \varphi \quad \text{ sowie } \quad (\Box \varphi) \wedge (\Box \psi) \iff \Box(\varphi \wedge \psi)$$

Solch ein Operator \Box sollte also eine Lawvere-Tierney-Topologie stiften. Im Gegensatz dazu stiftet der Operator \Diamond mit der Interpretation „ $\Diamond\varphi$ gilt, falls φ möglich ist“, denn aus $\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$ folgt i. A. nicht $\Diamond(\varphi \wedge \psi)$.

Definition. Für ein Unterobjekt $A \hookrightarrow E$ ist $\overline{A} \hookrightarrow E$ dasjenige Unterobjekt mit

$$\chi_{\overline{A}} = j \circ \chi_A : E \rightarrow \Omega.$$

Lemma. • $A \subseteq \overline{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
• $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$ (Natürlichkeit)

Definition. Sei j eine Lawvere-Tierney-Topologie auf \mathcal{E} .

- Ein Unterobjekt $A \hookrightarrow E$ heißt *dicht*, falls $\overline{A} = E$.
- Eine j -Garbe ist ein Objekt $F \in \text{Ob}(\mathcal{E})$, für das gilt:
Für alle dichten Unterobjekte $A \xrightarrow{m} E$ ist $m^* : \text{Hom}(E, F) \rightarrow \text{Hom}(A, F)$ ein Isomorphismus.
- $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$ ist die volle Unterkategorie der j -Garben von \mathcal{E} .

Satz. $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$ ist ein Topos.

Beweisskizze. Zeige:

- Die Unterkategorie $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$ ist abgeschlossen unter der Bildung von Limiten und Exponentialobjekten.
- Sei Ω_j der Differenzkern

$$\Omega_j \longrightarrow \Omega \xrightleftharpoons[\text{id}]{j} \Omega$$

Nenne ein Subobjekt $A \hookrightarrow F$ *abgeschlossen*, falls $\overline{A} = A$. Für eine j -Garbe F zeige dann, dass

$$\text{Sub}_{\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})}(F) = \{A \in \text{Sub}_{\mathcal{E}}(F) \mid A \text{ abgeschlossen}\} \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}}(F, \Omega_j)$$

und dass Ω_j eine F -Garbe ist. Somit ist Ω_j der Unterobjektklassifizierer von $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$. □

Sei $i : \mathbf{Sh}_j(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ der Einbettungsfunktor.

Satz/Definition. • i hat einen Linksadjungierten, die j -Garbifizierung $\mathbf{a} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$.
• \mathbf{a} ist linksexakt.

Korollar/Definition. $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E}) \xleftarrow[\mathbf{a}]{\perp} \mathcal{E} \xrightarrow{i}$ ist ein geometrischer Morphismus.

Dieser ist eine *geometrische Einbettung*, d. h. der Direktes-Bild-Funktor i ist volltreu. Dies macht $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$ zu einem *Untertopos* von \mathcal{E} .

Bemerkung. Bis auf Kategorienäquivalenz ist jede geometrische Einbettung von dieser Form.

Beispiel. \mathbf{FinSet} ist kein Untertopos von \mathbf{Set} vermöge der Inklusion $i : \mathbf{FinSet} \rightarrow \mathbf{Set}$, denn es gibt keine endliche Menge X mit

$$\text{Hom}_{\mathbf{FinSet}}(X, \{\heartsuit, \diamondsuit\}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathbb{N}, i(\{\heartsuit, \diamondsuit\})).$$

Somit besitzt i keinen Linksadjungierten.

Satz. Sei \mathcal{C} eine kleine Kategorie und $\mathcal{E} := [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$. Dann gibt es eine 1-zu-1-Korrespondenz

$$\begin{aligned} \{ \text{Grothendieck-Topologien auf } \mathcal{C} \} &\leftrightarrow \{ \text{Lawvere-Tierney-Topologien auf } \mathcal{E} \} \\ J &\mapsto j_J := ((j_J)_C : S \mapsto \{g \mid \text{codom}(g) = C, S \text{ überdeckt } g\})_{C \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \\ J_j &:= j^*(1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega) \leftarrow j \end{aligned}$$

(Erinnerung: $\Omega \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ ist die Prägarbe mit $\Omega(C) := \{ \text{Siebe auf } C \}$.)

Satz. Desweiteren gilt für eine Prägarbe $P \in \text{Ob}(\mathcal{E})$:

$$P \text{ ist } j\text{-Garbe} \iff P \text{ ist Garbe bzgl. } J_j, \text{ also } P \in \text{Ob}(\mathbf{Sh}(\mathcal{E}, J_j)).$$

Korollar. Die Garbifizierungen einer Prägarbe bzgl. der Lawvere-Tierney-Topologie j oder der zugehörigen Grothendieck-Topologie J_j sind isomorph.

5 Weitere Quellen für geometrische Morphismen

Satz. Sei $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann gibt es einen geometrischen Morphismus

$$[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}] \xleftarrow[\phi_*]{\phi^*} [\mathcal{D}^{\text{op}}, \mathbf{Set}] \text{ mit } \phi^*(P) := (\mathcal{C}^{\text{op}} \xrightarrow{\phi^{\text{op}}} \mathcal{D}^{\text{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set}). \text{ Dieser ist wesentlich.}$$