Geometrische Morphismen; Eigenschaften von Topoi und Konstruktionen mit Topoi

Tim Baumann

13. April 2017

1 Geometrische Morphismen

Definition. Ein geometrischer Morphismus $f: \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ zwischen Topoi ist ein Paar

$$\mathcal{E} \xrightarrow{f^*} \mathcal{D}$$

von adjungierten Funktoren, wobei f^* linksexakt ist, d. h. f^* bewahrt endliche Limiten. Dabei heißt f^* Urbildfunktor und f_* Direktes-Bild-Funktor.

Erinnerung. Außerdem bewahrt f_* Limiten und f^* Kolimiten, denn:

Left-Adjoints Preserve Colimits (LAPC), Right-Adjoints Preserve Limits (RAPL)

Lemma. Linksexakte Funktoren bewahren Monomorphismen.

Beweis. Dies folgt aus der Äquivalenz: $f:X\to Y$ ist genau dann ein Monomorphismus, falls folgendes Diagramm ein Pullback-Diagram ist:

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\operatorname{id}_X} & X \\
\operatorname{id}_X \downarrow & & \downarrow f \\
X & \xrightarrow{f} & X
\end{array}$$

Bemerkung. Aus dem Yoneda-Lemma folgt: Bei einer Adjunktion $F \dashv G$ ist F eindeutig (bis auf Isomorphie) durch G bestimmt (und umgekehrt). Die Daten eines geometrischen Morphismus sind also schon allein durch f^* oder f_* gegeben.

Bemerkung. Geometrische Morphismen lassen sich komponieren,

$$\mathcal{E} \xrightarrow{f^*}_{f_*} \mathcal{D} \xrightarrow{\underline{f}^*}_{g_*} \mathcal{F} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E} \xrightarrow{f^* \circ g^*}_{g_* \circ f_*} \mathcal{F},$$

da Paare adjungierter Funktoren komponieren und die Komposition $f^* \circ g^*$ linksexakter Funktoren wieder linksexakt ist. So erhalten wir eine Kategorie der Topoi. Diese wird sogar zu einer 2-Kategorie, wenn wir definieren:

Definition. Ein Morphismus zwischen geometrischen Morphismen $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ ist eine natürliche Transformation $\alpha : f^* \to g^*$.

Bemerkung. Es gibt eine natürliche Bijektion $Nat(f^*, g^*) \cong Nat(g_*, f_*)$.

Beispiel. Sei \mathcal{E} ein kovollständiger Topos (z. B. ein Grothendiecktopos). Dann hat der Globale-Schnitte-Funktor

$$\Gamma: \mathcal{E} \to \mathbf{Set}, \quad E \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, E)$$

einen Linksadjungierten, nämlich

$$\Delta: \mathbf{Set} \to \mathcal{E}, \quad S \mapsto \coprod_{s \in S} 1.$$

1

Für diesen gelten

$$\begin{split} &\Delta(\{\heartsuit\}) = \coprod_{s \in \{\heartsuit\}} 1 \cong 1 \qquad \text{und} \\ &\Delta(S \times T) = \coprod_{(s,t) \in S \times T} 1 \cong \left(\coprod_{s \in S} 1\right) \times \left(\coprod_{t \in T} 1\right) = \Delta(S) \times \Delta(T). \end{split}$$

Außerdem kann man zeigen, dass Δ auch Differenzkerne und somit alle endlichen Limiten erhält. Folglich ist

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{Set}$$

ein geometrischer Morphismus.

Es gibt auch keinen anderen geometrischen Morphismus $f: \mathcal{E} \to \mathbf{Set}$, denn für jeden solchen Morphismus und jedes Objekt $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ gilt:

$$f_*E \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, f_*E) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(f^*1, E) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(1, E) \cong \Gamma(E).$$

Definition. Ein geometrischer Morphismus $f = (f^* \dashv f_*)$ heißt

- (geom.) Einbettung, falls f_* volltreu ist und
- (geom.) Surjektion, falls f^* volltreu ist.

Bemerkung. Jeder geometrische Morphismus lässt sich (bis auf Kategorienäquivalenz) eindeutig zerlegen in eine Surjektion gefolgt von einer Einbettung.

Definition. Ein Untertopos von \mathcal{E} ist ein Topos \mathcal{D} zusammen mit einer geometrischen Einbettung $\mathcal{D} \to \mathcal{E}$.

Beispiel. FinSet ist kein Untertopos von **Set** vermöge der Inklusion $i: \mathbf{FinSet} \to \mathbf{Set}$, denn es gibt keine endliche Menge X mit

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{FinSet}}(X, \{\heartsuit, \diamondsuit\}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathbb{N}, i(\{\heartsuit, \diamondsuit\})),$$

da die rechte Hom-Menge unendlich und die linke Hom-Menge für alle $X \in \text{Ob}(\mathbf{FinSet})$ endlich ist. Somit besitzt i keinen Linksadjungierten.

2 Stetige Abbildungen induzieren geometrische Morphismen

Sei $f:X\to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen.

Dann erhalten wir den Direktes-Bild-Funktor

$$f_*: \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(Y), \quad \mathcal{F} \mapsto f_*(\mathcal{F})$$

mit $f_*(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ für alle $U \subseteq Y$.

Lemma. Sei $g: E \to Y$ ein étalér Raum. Dann ist $f^*(g): f^*(E) \to X$ wieder étale.

Definition. Der *Inverse-Bild-Funktor* ist die Komposition

$$f^* := \mathbf{Sh}(Y) \xrightarrow{\Lambda} \mathbf{\acute{E}t}(Y) \xrightarrow{f^*} \mathbf{\acute{E}t}(X) \xrightarrow{\Gamma} \mathbf{Sh}(X).$$

Lemma. $f^* \dashv f_*$

Lemma. $f^*: \mathbf{Sh}(Y) \to \mathbf{Sh}(X)$ ist linksexakt

Beweisskizze. Zurückziehen von étalén Räumen $f^*: \mathbf{\acute{E}t}(Y) \to \mathbf{\acute{E}t}(X)$ ist die Einschränkung vom Zurückziehen allgemeiner Bündel, $f^*: \mathbf{Bund}(Y) \to \mathbf{Bund}(X)$. Letzterer Funktor bewahrt kleine Limiten, da er rechtsadjungiert zu

$$f_*: \mathbf{Bund}(X) \to \mathbf{Bund}(Y), \quad (E \xrightarrow{p} X) \mapsto (E \xrightarrow{f \circ p} Y)$$

ist. Man zeigt nun, dass für jeden topologischen Raum Z die Unterkategorie $\mathbf{\acute{E}t}(Z)$ in $\mathbf{Bund}(Z)$ abgeschlossen unter der Bildung von endlichen Limiten ist.

Korollar. $\mathbf{Sh}(X) \xrightarrow{f^*} \mathbf{Sh}(Y)$ ist ein geometrischer Morphismus.

Proposition. Sei Y ein nüchterner topologischer Raum (z. B. ein Hausdorff-Raum in klassischer Metalogik). Dann gibt es eine 1-zu-1-Korrespondenz

$$\{ \text{ stetige Abbildungen } X \to Y \} \quad \leftrightarrow \quad \{ \text{ geometrische Morphismen } \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(Y) \}$$

$$f \quad \mapsto \quad (f^* \dashv f_*)$$

Beweisskizze. Da f^* linksexakt ist, bildet f^* Unterobjekte des terminalen Objektes auf Unterobjekte des terminalen Objekts ab. Da außerdem für jeden topol. Raum Z ein Isomorphismus $\operatorname{Sub}_{\operatorname{Sh}(Z)}(1) \cong \mathcal{O}(Z)$ (wobei $\mathcal{O}(Z)$ der Verband der offenen Teilmengen ist) existiert, erhalten wir eine Abbildung

$$f^*: \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$$
.

Wir definieren nun eine Abbildung $f: X \to Y$ durch

$$f(x) := y :\iff x \in f^*(V)$$
 für alle offenen Umgebungen V von y .

Definition. Ein Punkt eines Topos \mathcal{E} ist ein geometrischer Morphismus $\mathbf{Set} \to \mathcal{E}$.

Bemerkung. Diese Definition ergibt Sinn, da für nüchterne topologische Räume X geometrische Morphismen $\mathbf{Set} = \mathbf{Sh}(\{\emptyset\}) \to \mathbf{Sh}(X)$ in 1-zu-1-Korrespondenz zu stetigen Abbildungen $\{\emptyset\} \to X$, also zu Punkten von X, stehen.

3 Scheibenkategorien von Topoi sind Topoi

Satz ("Fundamentalsatz der Topostheorie").

Sei \mathcal{E} ein Topos, $B \in \text{Ob}(\mathcal{E})$. Dann ist auch die Scheibenkategorie \mathcal{E}/B ein Topos.

Bemerkung. Im Spezialfall $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ lässt sich der Satz wie folgt beweisen: Sei \mathcal{B} die diskrete Kategorie mit $Ob(\mathcal{B}) = B$. Dann gibt es eine Kategorienäquivalenz $Set/B \simeq [\mathcal{B}, Set] \simeq [\mathcal{B}^{op}, Set]$ gegeben durch

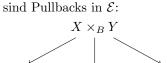
$$\mathbf{Set}/B \to [\mathcal{B}, \mathbf{Set}], \quad (X \xrightarrow{p} B) \mapsto (b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \mapsto p^{-1}(b)).$$

Beweisskizze. Wir müssen die Toposaxiome nachrechnen:

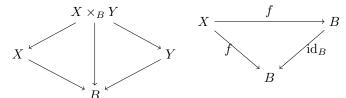
(1) \mathcal{E}/B ist endlich vollständig:

Der Differenzkern in \mathcal{E}/B

berechnet sich wie in \mathcal{E} : $K \xrightarrow{f} Y$ g g R



Binäre Produkte in \mathcal{E}/B Das terminale Objekt in \mathcal{E}/B ist der Morphismus $id_B : B \to B$:



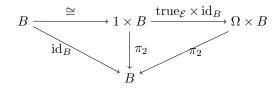
- (2) \mathcal{E}/B besitzt einen Unterobjektklassifizierer:
 - Sei $U:\mathcal{E}/B\to\mathcal{E}$ der offensichtliche Vergissfunktor. Dieser Funktor ist linksadjungiert zum Funktor $(-\times B): \mathcal{E} \to \mathcal{E}/B$, denn es gilt

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(X,Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X \xrightarrow{f} B, Y \times B \xrightarrow{\pi_2} B)$$

natürlich in $(X \xrightarrow{f} B) \in \text{Ob}(\mathcal{E}/B)$ und $Y \in \text{Ob}(\mathcal{E})$. Da ein Morphismus f in \mathcal{E}/B genau dann ein Monomorphismus ist, wenn U(f) ein solcher ist, gilt:

$$\operatorname{Sub}_{\mathcal{E}/B}(A \xrightarrow{f} B) \cong \operatorname{Sub}_{\mathcal{E}}(A) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega_{\mathcal{E}}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}/B}(A \xrightarrow{f} B, \Omega_{\mathcal{E}} \times B \xrightarrow{\pi_2} B)$$

Nach Proposition I.3.1 in SiGaL ist folglich $\Omega_{\mathcal{E}/B} = \Omega_{\mathcal{E}} \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ der Unterobjektklassifizierer in \mathcal{E}/B . Der universelle Monomorphismus true : $1 \to \Omega$ ist die Komposition



 \bigcirc \mathcal{E}/B ist kartesisch abgeschlossen:

Seien $(X \xrightarrow{p_X} B), (Y \xrightarrow{p_Y} B), (Z \xrightarrow{p_Z} B) \in \text{Ob}(\mathcal{E}/B)$ gegeben. Wir müssen ein Objekt $(W \xrightarrow{p_W} B)$ mit

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X \times_B Y, Z) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X, W)$$

finden. In Set können wir dieses Objekt wie folgt konstruieren:

$$W = \coprod_{b \in B} Z_b^{Y_b}$$
 wobei $Z_b := p_Z^{-1}(b), Y_b := p_Y^{-1}(b).$

Diese Definition können wir mit der internen Sprache von $\mathcal E$ imitieren:

$$W = \left\{ (b, G) \in B \times \mathcal{P}(Y \times Z) \middle| \begin{matrix} G \subseteq (p_Y \circ \pi_Y)^{-1}(b) \cap (p_Z \circ \pi_Z)^{-1}(b) \\ \land \forall y : Y \cdot p_Y(y) = b \Longrightarrow \exists! \ z : Z \cdot (y, z) \in G \end{matrix} \right\}$$

(Interpretation: Elemente von W sind Tupel (b,G) bestehend aus einem Index $b \in B$ und dem Graphen eines Morphismus $Y_b \to Z_b$ als Teilmenge von $Y \times Z$.)

Definition. Sei $k: B \to A$ ein Morphismus in \mathcal{E} . Dann erhalten wir einen Funktor

$$\Sigma_k : \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/A, \quad (X \xrightarrow{p_X} B) \mapsto (k \circ p_X : X \xrightarrow{p_X} B \xrightarrow{k} A)$$

durch Komponieren mit k und einen Basiswechselfunktor

$$k^*: \mathcal{E}/A \to \mathcal{E}/B, \quad (Y \xrightarrow{p_Y} A) \mapsto (B \times_A Y \xrightarrow{\pi_B} B)$$

durch Pullback entlang k.

Bemerkung. Im Spezialfall $\mathcal{E} = \mathbf{Set}, k : B \to 1$ ist k^* der Funktor, der eine Menge X auf die konstante Familie $(X)_{b \in B}$ von Mengen abbildet. Man kann $\Sigma_B := \Pi_k : [\mathcal{B}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Set}$ wie folgt konstruieren:

$$\Sigma_B((X_b)_{b\in B}) := \{ \text{ Tupel } (b,x) \text{ mit } b \in B \text{ und } x \in X_b \}$$

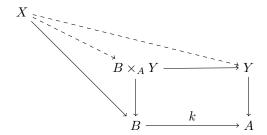
In Typtheorie heißt diese Konstruktion "abhängige Summe" (oder auch "Σ-Typ").

Lemma. $\Sigma_k \dashv k^*$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}/A}(\Sigma_k(X \to B), Y \to A) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X \to B, k^*(Y \to A)).$$

Betrachte das Diagramm



Elemente der linken Hom-Menge sind Morphismen $X \to Y$, die das äußere Viereck kommutieren lassen; Elemente der rechten Hom-Menge sind Morphismen $X \to B \times_A Y$, die das linke Dreieck kommutieren lassen. Zwischen solchen Elementen besteht eine 1-zu-1-Korrespondenz, gegeben durch die universelle Eigenschaft des Pullbacks $B \times_A Y$.

Lemma/Definition. k^* besitzt auch einen Rechtsadjungierten $\Pi_k : \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/A$.

Bemerkung. Im Spezialfall $\mathcal{E} = \mathbf{Set}, k : B \to 1 \text{ kann } \Pi_B := \Pi_k : [\mathcal{B}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Set}$ wie folgt konstruiert werden:

$$\Pi_B((X_b)_{b\in B}) := \{ \text{ Familien } (x_b \in X_b)_{b\in B} \}$$

In Typtheorie heißt diese Konstruktion "abhängiges Produkt" (oder auch "II-Typ").

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $A \cong 1$ und somit $\mathcal{E}/A \cong \mathcal{E}$. (Ansonsten verwende $\mathcal{E}' := \mathcal{E}/A$ und $B' := (B \xrightarrow{k} A) \in \text{Ob}(\mathcal{E}')$ anstelle von \mathcal{E} bzw. B. Beachte, dass $\mathcal{E}'/B' \simeq \mathcal{E}/B$.) Es gilt:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}/B}(k^*(X), Y \xrightarrow{h} B) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X \times B \xrightarrow{\pi_B} B, Y \xrightarrow{h} B)$$

$$\cong \{ t \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(X \times B, Y) \mid h \circ t = \pi_B \}$$

$$\cong \{ t' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(X, Y^B) \mid h^B \circ t' = j \circ ! \}$$

$$\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \{ g : Y^B \mid h \circ g = \operatorname{id}_B \})$$

wobei $j:1\to B^B$ die Curryfizierung von id_B und $!:X\to 1$ ist. Wir definieren somit Π_k durch

$$\Pi_k(k:Y\to B) := \{g:Y^B \mid h \circ g = \mathrm{id}_B\}.$$

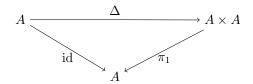
Korollar. $\mathcal{E}/B \xrightarrow{\stackrel{k^*}{-}} \mathcal{E}/A$ ist ein geometrischer Morphismus.

Dieser ist wesentlich, d. h. k^* besitzt auch einen Linksadjungierten.

Bemerkung. Allquantifikation über A lässt sich mit dem Scheibentopos \mathcal{E}/A verstehen:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{E} \models \forall \, x : A.\, \varphi(x) \\ \iff & 1 \models \forall \, x : A.\, \varphi(x) \\ \iff & \text{für alle } B \xrightarrow{p} 1, \, B \xrightarrow{x_0} A \text{ gilt } B \models \varphi(x_0) \\ \iff & A \models \varphi(\text{id}_A) \\ \iff & \mathcal{E}/A \models \varphi(\Delta), \end{array}$$

wobei Δ der Diagonalmorphismus in folgendem Diagramm ist:



Das verallgemeinerte Element id_A wird auch als generisches Element von A bezeichnet, da man alle weiteren Elemente aus ihm durch Präkomposition erhalten kann.

4 Modale Operatoren

Definition. Ein modaler Operator (oder Lawvere-Tierney-Topologie) auf einem Topos \mathcal{E} ist ein Morphismus $\Box: \Omega \to \Omega$, für den gilt:

(a)
$$\square \circ \text{true} = \text{true}$$
 (b) $\square \circ \square = \square$ (b) $\square \circ \wedge = \wedge \circ (\square \times \square)$

$$1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega \qquad \qquad \Omega \xrightarrow{\square} \Omega \qquad \qquad \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$$

$$\text{true} \qquad \square \qquad \square \qquad \square \qquad \square \qquad \square \qquad \square$$

$$\Omega \qquad \qquad \Omega \qquad \qquad \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$$

Interpretation. \square ist ein idempotenter, mit \wedge und true verträglicher modaler Operator. Zum Beispiel: Sei φ eine Aussage. Wir könnten die logische Aussage $\square \varphi$ wie folgt interpretieren:

ich weiß, dass φ / ich glaube, dass φ / lokal gilt φ

Dann sollten intuitiv auch folgende Regeln gelten:

$$\Box \top = \top, \qquad \Box \Box \varphi \iff \Box \varphi \qquad \text{sowie} \qquad (\Box \varphi) \wedge (\Box \psi) \iff \Box (\varphi \wedge \psi)$$

Diese obigen Interpretationen sollten sich also als modale Operatoren in passenden Topoi umsetzen lassen. Im Gegensatz dazu stiftet der modale Operator (im Sinne der Modallogik) \Diamond mit der Interpretation " $\Diamond \varphi$ gilt, falls φ möglich ist" keinen modalen Operator (im Sinne der Topostheorie), denn aus $(\Diamond \varphi) \land (\Diamond \psi)$ folgt i. A. nicht $\Diamond (\varphi \land \psi)$.

Definition. Für ein Unterobjekt $A \hookrightarrow E$ ist $\overline{A} \hookrightarrow E$ dasjenige Unterobjekt mit

$$\chi_{\overline{A}} = \square \circ \chi_A : E \to \Omega.$$

Lemma.

$$\bullet \ \ A \subseteq \overline{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

•
$$f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$$
 (Natürlichkeit)

Definition. Sei \square ein modaler Operator auf \mathcal{E} .

- Ein Unterobjekt $A \hookrightarrow E$ heißt dicht, falls $\overline{A} = E$.
- Eine \square -Garbe ist ein Objekt $F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$, für das gilt: Für alle dichten Unterobjekte $A \stackrel{m}{\hookrightarrow} E$ ist $\mathrm{Hom}(m,F) : \mathrm{Hom}(E,F) \to \mathrm{Hom}(A,F)$ ein Isomorphismus.
- $\mathbf{Sh}_{\square}(\mathcal{E})$ ist die volle Unterkategorie der \square -Garben von \mathcal{E} .

Satz. $\mathbf{Sh}_{\square}(\mathcal{E})$ ist ein Topos.

Beweisskizze. Zeige:

- Die Unterkategorie $\mathbf{Sh}_{\square}(\mathcal{E})$ ist abgeschlossen unter der Bildung von Limiten und Exponentialobjekten.
- $\bullet \ \, \mathrm{Sei} \ \Omega_{\square} \ \, \mathrm{der} \ \, \mathrm{Differenzkern}$

$$\Omega_{\square} \longrightarrow \Omega \xrightarrow{\square} \Omega$$

Nenne ein Subobjekt $A \hookrightarrow F$ abgeschlossen, falls $\overline{A} = A$. Für eine \square -Garbe F zeige dann, dass

$$\operatorname{Sub}_{\operatorname{\mathbf{Sh}}_{\square}(\mathcal{E})}(F) = \{ A \in \operatorname{Sub}_{\mathcal{E}}(F) \mid A \text{ abgeschlossen} \} \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(F, \Omega_{\square})$$

und dass Ω_{\square} eine F-Garbe ist. Somit ist Ω_{\square} der Unterobjektklassifizierer von $\mathbf{Sh}_{\square}(\mathcal{E})$.

Sei $i: \mathbf{Sh}_{\square}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ der Einbettungsfunktor.

Satz/Definition.

- i hat einen Linksadjungierten, die \square -Garbifizierung $\mathbf{a}: \mathcal{E} \to \mathbf{Sh}_{\square}(\mathcal{E})$.
 - a ist linksexakt.

Korollar. $\operatorname{Sh}_{\square}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\underline{\iota}} \mathcal{E}$ ist eine geometrische Einbettung.

Bemerkung. Bis auf Kategorienäquivalenz ist jede geometrische Einbettung von dieser Form.

Satz. Sei \mathcal{C} eine kleine Kategorie und $\mathcal{E} := [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$. Dann gibt es eine 1-zu-1-Korrespondenz

$$\{ \text{ Grothendieck-Topologien auf } \mathcal{C} \} \quad \leftrightarrow \quad \{ \text{ Lawvere-Tierney-Topologien auf } \mathcal{E} \}$$

$$J \quad \mapsto \quad \Box_J := (\Box_C : S \mapsto \{g \mid \operatorname{codom}(g) = C, \ S \text{ "berdeckt } g\})_{C \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})}$$

$$J_{\Box} := \Box^* (1 \stackrel{\operatorname{true}}{\longleftrightarrow} \Omega) \quad \leftrightarrow \quad \Box$$

(Erinnerung: $\Omega \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ ist die Prägarbe mit $\Omega(C) := \{ \text{ Siebe auf } C \}. \}$

Satz. Desweiteren gilt für eine Prägarbe $P \in Ob(\mathcal{E})$:

$$P$$
 ist \square -Garbe $\iff P$ ist Garbe bzgl. J_{\square} , also $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sh}(\mathcal{E}, J_{\square}))$.

Korollar. Die Garbifizierungen einer Prägarbe bzgl. dem modalen Operator \square oder der zugehörigen Grothendieck-Topologie J_{\square} sind isomorph.

Definition. Die \Box - \ddot{U} bersetzung ist rekursiv wie folgt definiert:

$$(f = g)^{\square} :\equiv \square (f = g)$$

$$(x \in A)^{\square} :\equiv \square (x \in A)$$

$$\top^{\square} :\equiv \square \top \quad (\Leftrightarrow \top)$$

$$\bot^{\square} :\equiv \square \bot$$

$$(\varphi \land \psi)^{\square} :\equiv \square (\varphi^{\square} \land \psi^{\square}) \qquad (\bigwedge_{i} \varphi_{i})^{\square} :\equiv \square (\bigwedge_{i} \varphi_{i}^{\square})$$

$$(\varphi \lor \psi)^{\square} :\equiv \square (\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}) \qquad (\bigvee_{i} \varphi_{i})^{\square} :\equiv \square (\bigvee_{i} \varphi_{i}^{\square})$$

$$(\varphi \Rightarrow \psi)^{\square} :\equiv \square (\varphi^{\square} \Rightarrow \psi^{\square})$$

$$(\forall x : X. \varphi)^{\square} :\equiv \square (\forall x : X. \varphi^{\square}) \qquad (\forall X. \varphi)^{\square} :\equiv \square (\exists X. \varphi^{\square})$$

$$(\exists x : X. \varphi)^{\square} :\equiv \square (\exists x : X. \varphi^{\square}) \qquad (\exists X. \varphi^{\square}) :\equiv \square (\exists X. \varphi^{\square})$$

Satz. Sei φ eine Formel in \mathcal{E} . Dann gilt

$$\mathcal{E} \models \varphi^{\square} \iff \mathbf{Sh}_{\square}(\mathcal{E}) \models \varphi,$$

wobei in φ auf der linken Seite alle Parameter nach $\mathbf{Sh}_{\square}(\mathcal{E})$ zurückgezogen wurden.

Beispiele. Sei ψ eine logische Aussage, also ein Subobjekt $\psi: J \to 1$.

- $\Box \varphi :\equiv (\psi \implies \varphi)$ (hiermit wird $\mathbf{Sh}_{\Box}(\mathcal{E})$ zu einem offenen Untertopos von \mathcal{E})
- $\Box \varphi :\equiv (\psi \vee \varphi)$ (hiermit wird $\mathbf{Sh}_{\Box}(\mathcal{E})$ zu einem abgeschlossenen Untertopos von \mathcal{E})
- $\Box \varphi :\equiv \neg \neg \varphi$ (Sh $\neg \neg (\mathcal{E})$ ist der größte Untertopos von \mathcal{E} , in dem klassische Logik gilt.)

Betrachte $\mathcal{E} = \mathbf{Sh}(X)$, den Topos der Garben auf einem topologischen Raum. Dann entsprechen Subobjekte $J \hookrightarrow 1$ genau den offenen Teilmengen $U \subseteq X$.

• Für $\Box \varphi :\equiv (U \implies \varphi)$ ist $\mathbf{Sh}_{\Box}(X) \equiv \mathbf{Sh}(U)$ und es gilt

$$\mathbf{Sh}(X) \models \varphi^{\square} \iff \mathbf{Sh}(U) \models \varphi.$$

• Für $A\subseteq X$ abgeschlossen sei $\Box \varphi :\equiv ((X\setminus A)\vee \varphi).$ Es gilt

$$\mathbf{Sh}(X) \models \varphi^{\square} \iff \mathbf{Sh}(A) \models \varphi.$$

5 Geometrische Morphismen und Logik

Definition. • Eine Formel heißt geometrisch, falls sie nur folgende Operatoren enthält:

$$\top$$
 \bot \land \lor \exists \bigvee

Es sind also \Rightarrow und \forall verboten. Freie Variablen dürfen in φ vorkommen.

• Eine geometrische Sequenz ist eine Sequenz der Form $\varphi \vdash \psi$, wobei φ und ψ geometrische Formeln sind.

Satz. Sei $f: \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ ein geometrischer Morphismus.

- Gilt $\varphi \vdash \psi$ in \mathcal{D} , so gilt $f^*(\varphi) \vdash f^*(\psi)$ in \mathcal{E} .
- Ist f eine Surjektion, so gilt auch die Umkehrung.

6 Weitere Quellen für geometrische Morphismen

Satz. Sei $\phi:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ ein Funktor. Dann gibt es einen geometrischen Morphismus

$$[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \xrightarrow{\phi} [\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \text{ mit } \phi^*(P) := (\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\phi^{\mathrm{op}}} \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set}). \text{ Dieser ist wesentlich.}$$