Varianten des Theorems von Kirchberger

Tim Baumann

TopMath-Frühlingsschule in Oberschönenfeld

4. März 2014

Theorem (Kirchberger)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann sind P und Q genau dann durch eine Hyperebene trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n+2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Hyperebene trennbar sind.

Theorem (Kirchberger)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann sind P und Q genau dann durch eine Hyperebene trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n+2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Hyperebene trennbar sind.

Übersicht

Definition

Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

Definition

Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n.
Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:

$$\forall\, a \in A \;:\; \|p - a\| < \alpha$$

und

$$\forall\, b \in B \;:\; \|p - a\| > \alpha$$

Definition

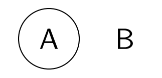
Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n.
Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:



$$\forall\, a \in A \,:\, \|p - a\| < \alpha$$

und

$$\forall\, b \in B \,:\, \|p - a\| > \alpha$$

Definition

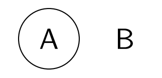
Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n.
Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:

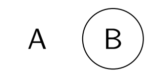


$$\forall\, a \in A \,:\, \|p - a\| < \alpha$$

und

$$\forall\, b \in B \,:\, \|p - a\| > \alpha$$

oder



$$\forall\, a \in A \,:\, \|p - a\| > \alpha$$

und

$$\forall\, b \in B \,:\, \|p - a\| < \alpha$$

Theorem (Kirchberger)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann sind P und Q genau dann durch eine Hyperebene streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n + 2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Hyperebene streng trennbar sind.

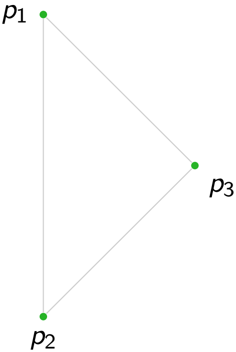
Theorem (Kirchberger', 8.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n+2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

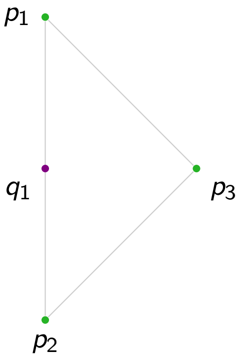
Theorem (Kirchberger', 8.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

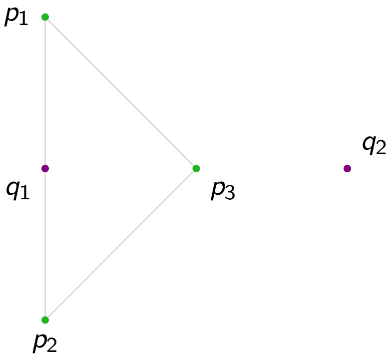
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



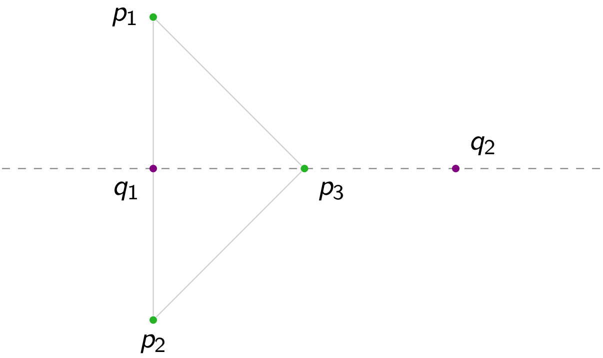
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



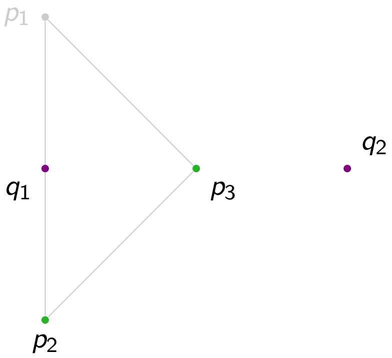
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



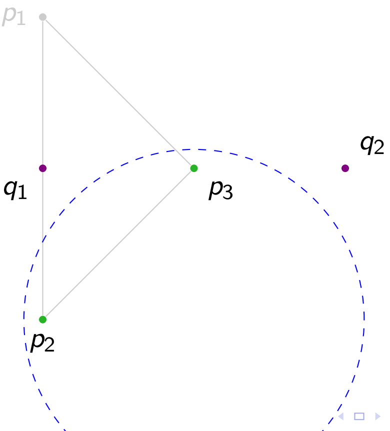
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



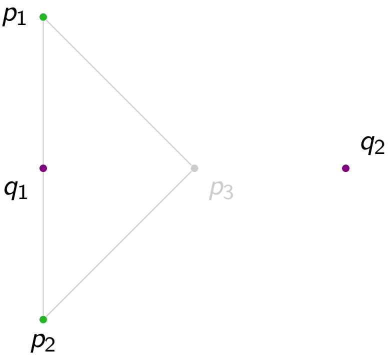
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



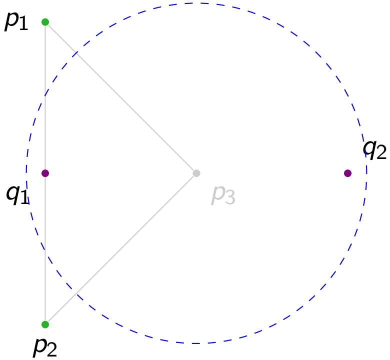
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



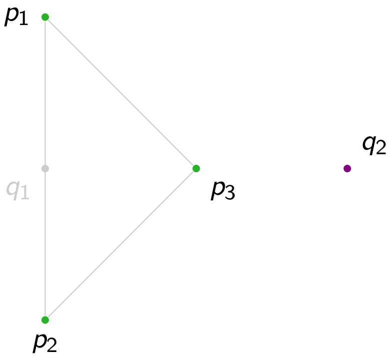
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



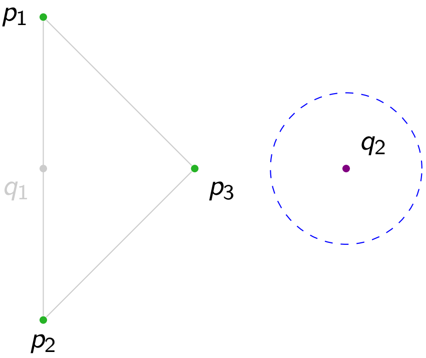
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



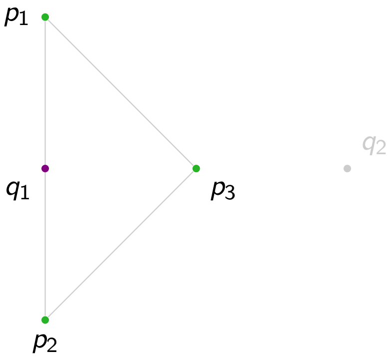
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



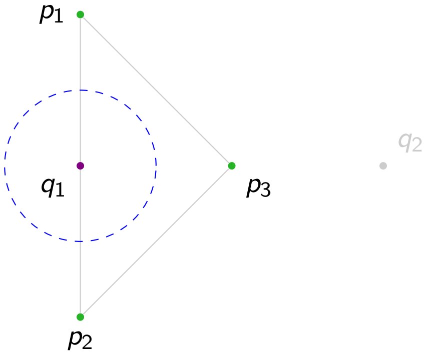
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



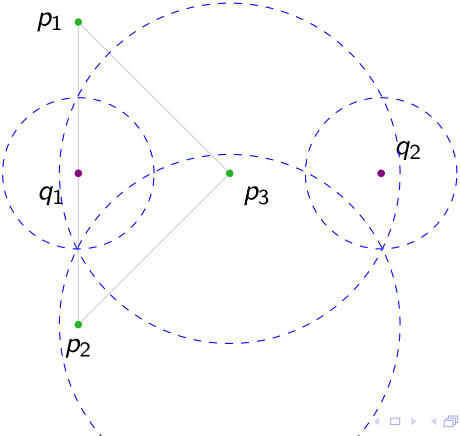
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



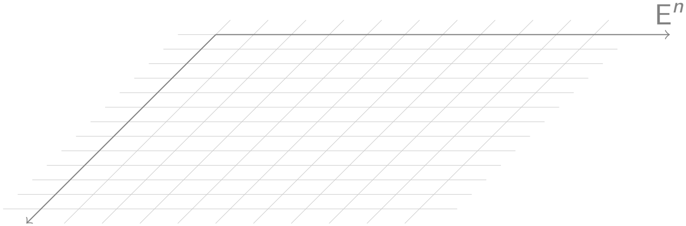
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



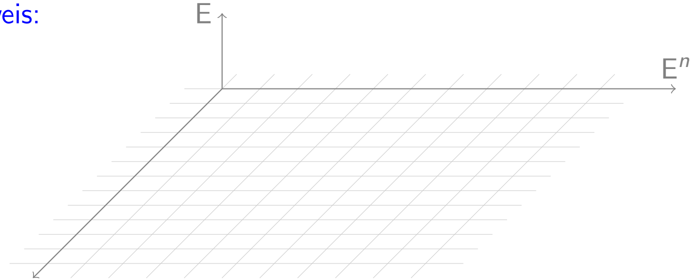
Theorem (Kirchberger', 8.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n + 3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

Beweis:

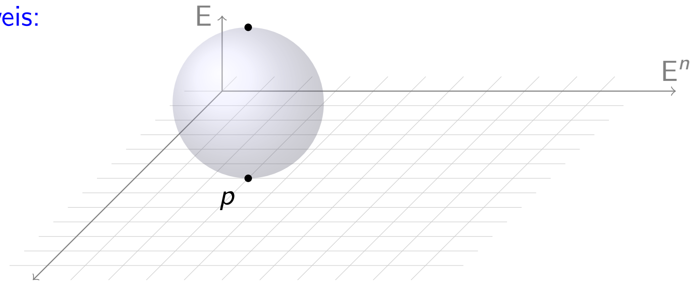


Beweis:



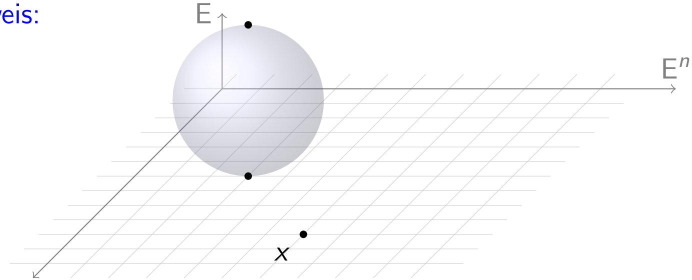
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.

Beweis:



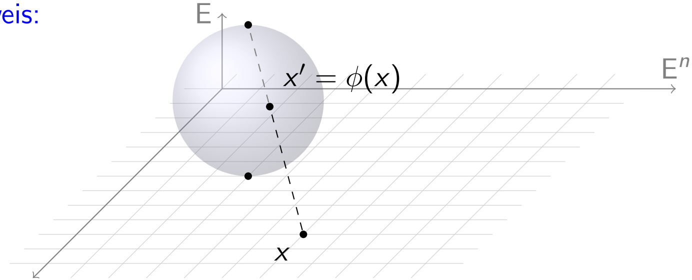
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.

Beweis:



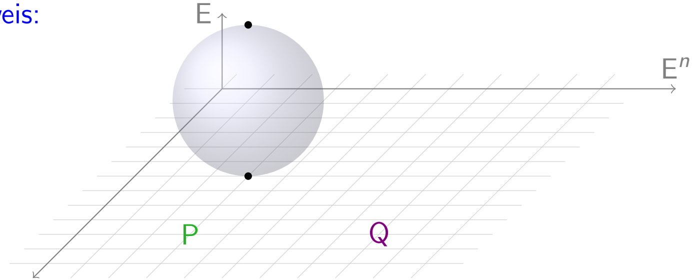
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
3. Betrachte die stereographische Projektion $\phi : \mathrm{E}^n \to S$.

Beweis:



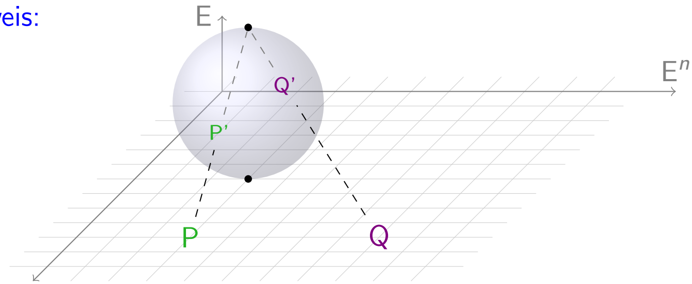
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in E^n$ und $S \subset E^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
3. Betrachte die stereographische Projektion $\phi : E^n \to S$.

Beweis:



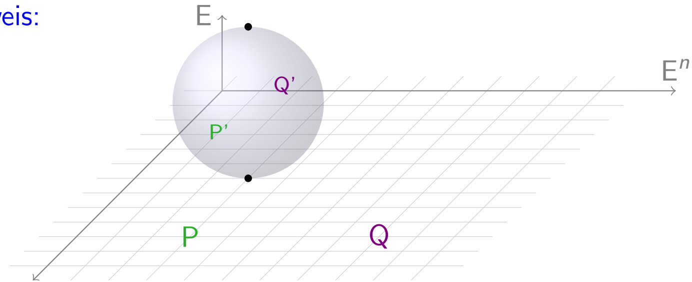
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
3. Betrachte die stereographische Projektion $\phi : \mathrm{E}^n \to S$.
4. Seien P, $Q \subset \mathrm{E}^n$ nichtleer und kompakt sodass für jede Menge $T \subset \mathrm{E}^n$ mit höchstens $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

Beweis:



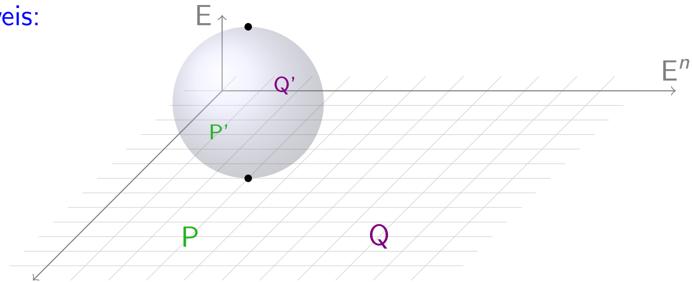
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in E^n$ und $S \subset E^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
3. Betrachte die stereographische Projektion $\phi : E^n \to S$.
4. Seien $P, Q \subset E^n$ nichtleer und kompakt sodass für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.
5. Seien P' und Q' die (kompakten) Bilder von P bzw. Q unter ϕ.

Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

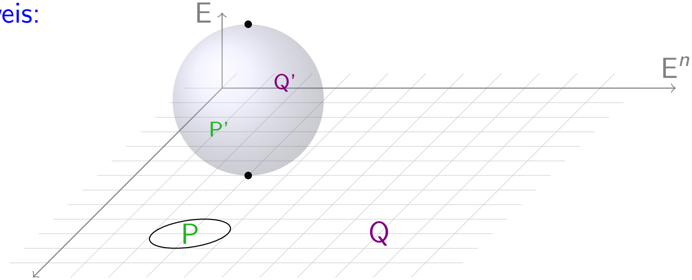
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

6. Sei $T \subset S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.

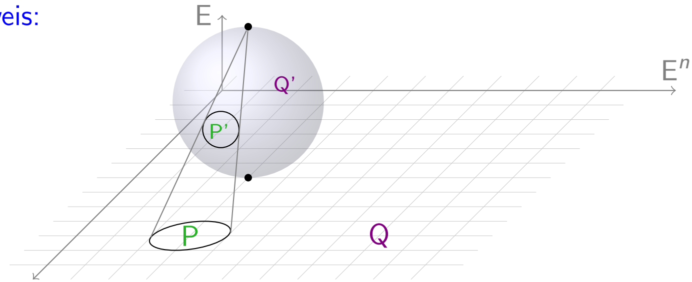
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

6. Sei $T \subset S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
7. Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.

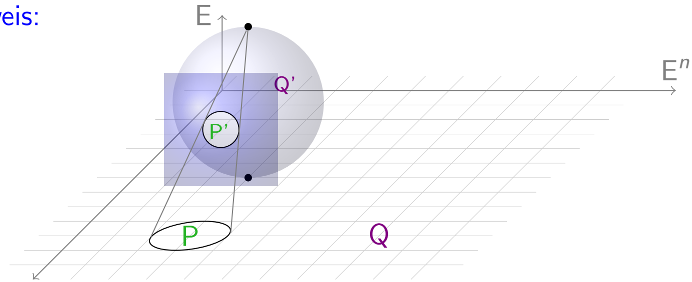
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

6. Sei $T \subset S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
7. Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.
8. Die stereogr. Projektion der Sphäre ist ein Kreis auf S (Kreistreue).

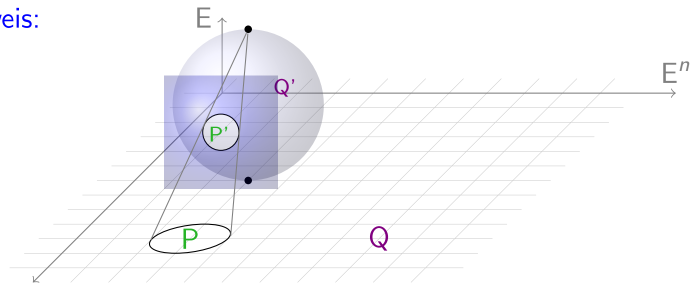
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

6. Sei $T \subset S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
7. Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.
8. Die stereogr. Projektion der Sphäre ist ein Kreis auf S (Kreistreue).
9. Der Kreis auf S ist der Schnitt von S mit einer Hyperebene H.

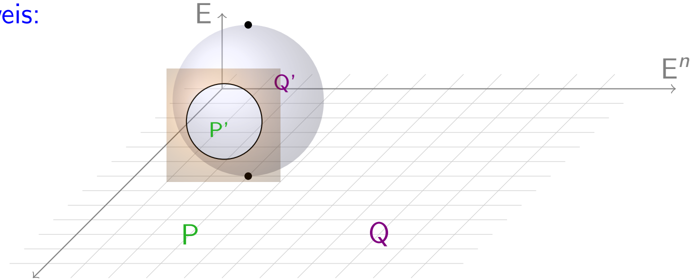
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

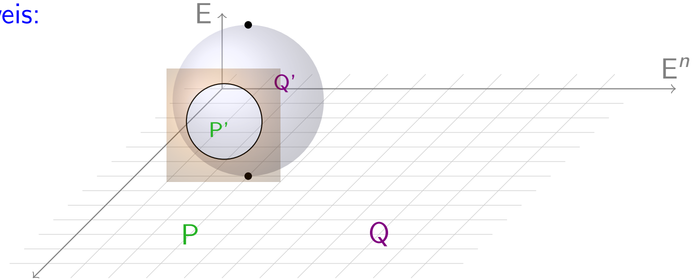
6. Sei $T \subset S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
7. Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.
8. Die stereogr. Projektion der Sphäre ist ein Kreis auf S (Kreistreue).
9. Der Kreis auf S ist der Schnitt von S mit einer Hyperebene H.
10. Da H dann $T \cap P'$ und $T \cap Q'$ streng trennt, folgt die Behauptung nach dem Satz von Kirchberger.

Beweis:



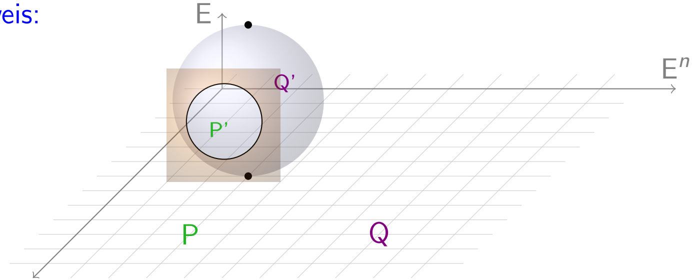
11. Sei $\alpha \in \mathrm{E}^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.

Beweis:



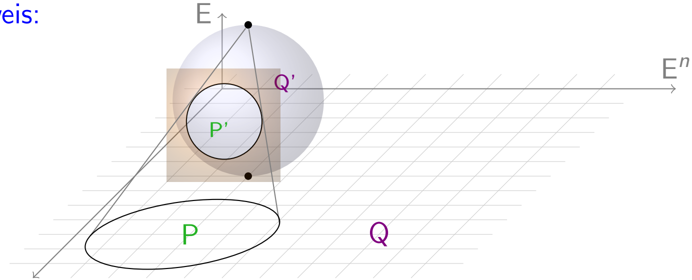
11. Sei $\alpha \in \mathrm{E}^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.
12. Da P' und Q' kompakt sind, gibt es $\epsilon > 0$ mit $\langle \alpha, p \rangle \leq b - \epsilon$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle \geq b + \epsilon$ für alle $q \in Q'$.

Beweis:



11. Sei $\alpha \in \mathrm{E}^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.
12. Da P' und Q' kompakt sind, gibt es $\epsilon > 0$ mit $\langle \alpha, p \rangle \leq b - \epsilon$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle \geq b + \epsilon$ für alle $q \in Q'$.
13. Somit können wir annehmen, dass H_0 den Nordpol der Sphäre S nicht schneidet.

Beweis:



11. Sei $\alpha \in \mathrm{E}^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.
12. Da P' und Q' kompakt sind, gibt es $\epsilon > 0$ mit $\langle \alpha, p \rangle \leq b - \epsilon$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle \geq b + \epsilon$ für alle $q \in Q'$.
13. Somit können wir annehmen, dass H_0 den Nordpol der Sphäre S nicht schneidet.
14. Der Schnitt $H_0 \cap S$ ist ein Kreis und $\phi^{-1}(H_0 \cap S)$ trennt P und Q. $\square$

Übersicht

Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

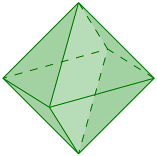
von A und F erzeugter *k-Zylinder*.

Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.

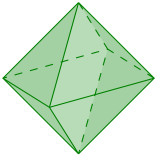


Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.



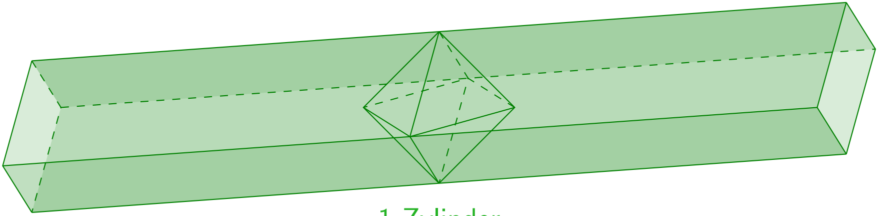
0-Zylinder

Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.



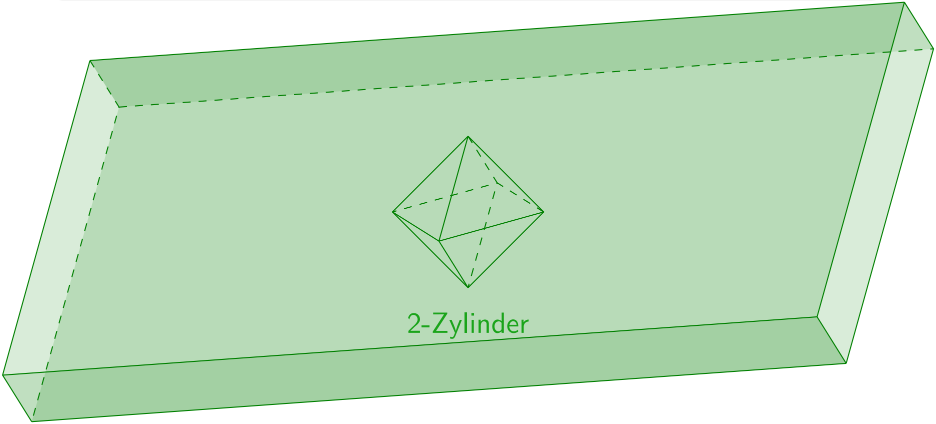
1-Zylinder

Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.

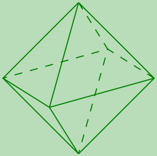


Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.



3-Zylinder

Kirchberger-Theorem für Zylinder?

Theorem (???)

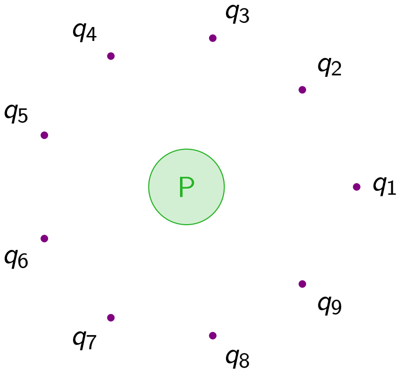
Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann gibt es einen k-Zylinder $Z = (\mathrm{conv} P) + F$ mit $Z \cap Q = \emptyset$ genau dann, wenn es für alle Teilmengen $T \subset P \cup Q$ mit höchstens $f(n, k)$ Punkten einen k-Zylinder $Z_T = \mathrm{conv}(T \cap P) + F_T$ mit $Z_T \cap (T \cap Q) = \emptyset$ gibt.

Kirchberger-Theorem für Zylinder?

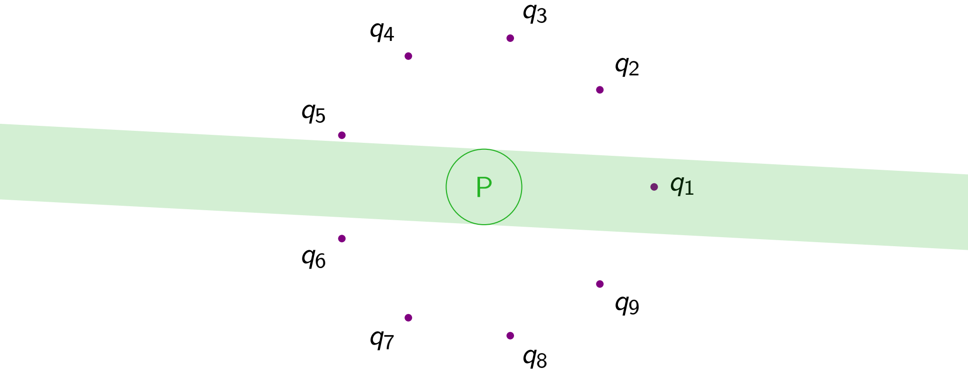
Theorem (???)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann gibt es einen k-Zylinder $Z = (\operatorname{conv} P) + F$ mit $Z \cap Q = \emptyset$ genau dann, wenn es für alle Teilmengen $T \subset P \cup Q$ mit höchstens $f(n,k)$ Punkten einen k-Zylinder $Z_T = \operatorname{conv}(T \cap P) + F_T$ mit $Z_T \cap (T \cap Q) = \emptyset$ gibt.

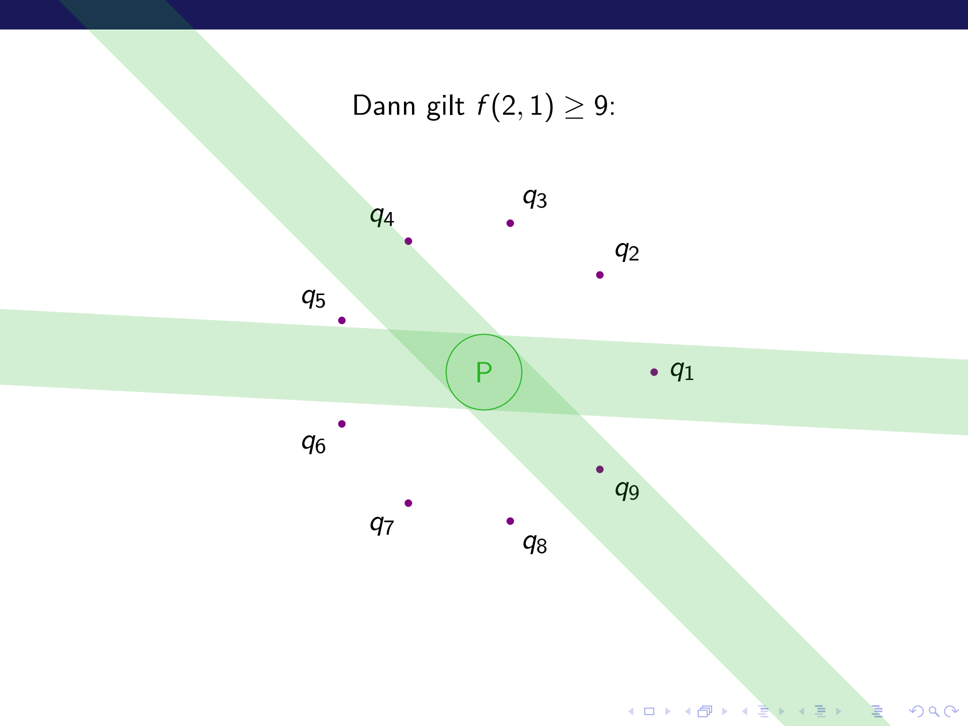
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



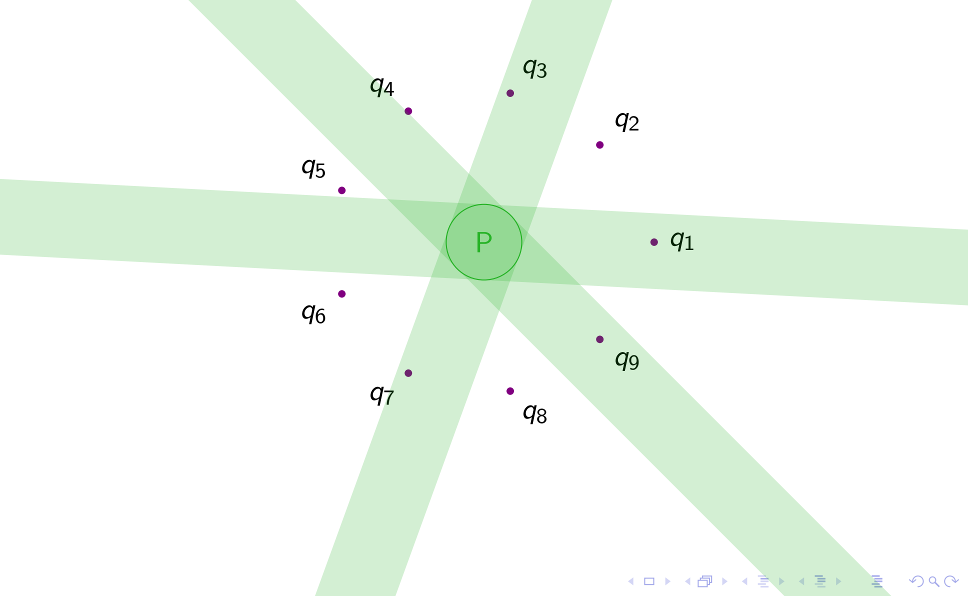
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



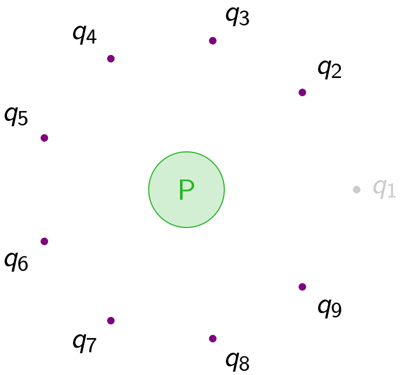
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



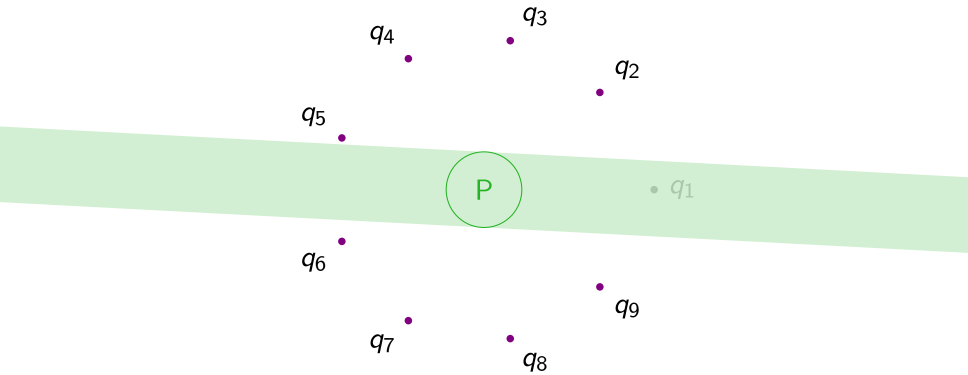
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



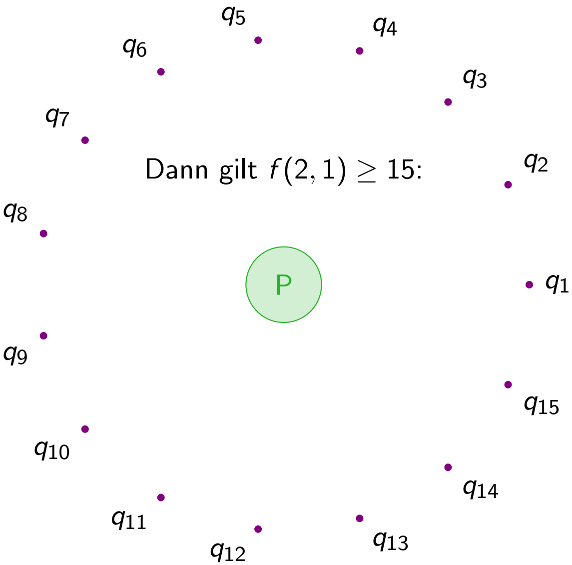
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



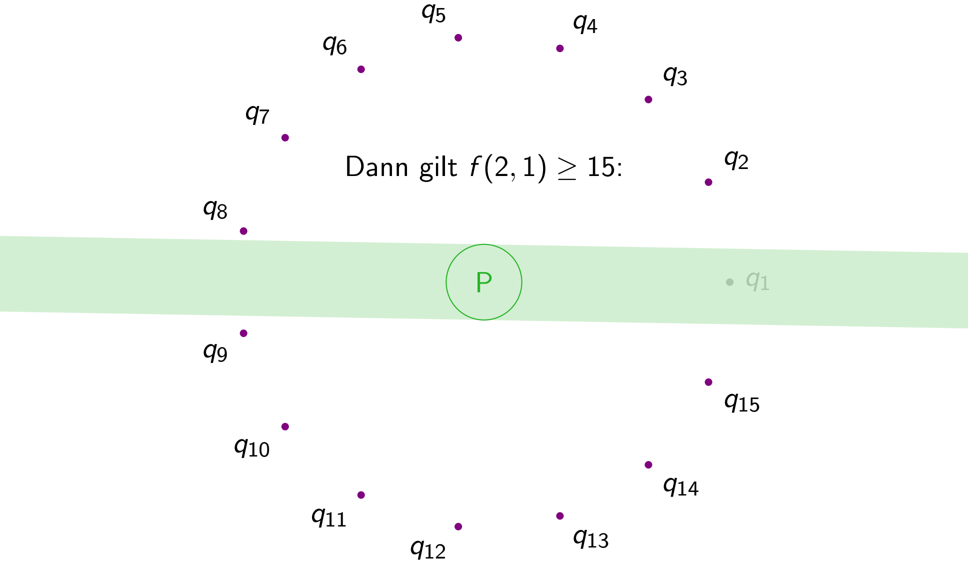
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



Dann gilt $f(2,1) \geq 15$:



Dann gilt $f(2,1) \geq 15$:



Kirchberger-Theorem für Zylinder? So nicht!

Theorem (???)

*Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann gibt es einen k-Zylinder $Z = (\operatorname{conv} P) + F$ mit $Z \cap Q = \emptyset$ genau dann, wenn es für alle Teilmengen T von $P \cup Q$ mit höchstens $f(n,k)$ Punkten einen k-Zylinder $Z_T = \operatorname{conv}(T \cap P) + F_T$ mit $Z_T \cap (T \cap Q) = \emptyset$ gibt.*

Theorem (9.5)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Angenommen, für $1 \leq k \leq n$ kann jede Teilmenge von Q mit höchstens k Punkten streng von P mit einer Hyperebene getrennt werden. Dann gibt es zu jedem k-Zylinder $Z_1 = (\operatorname{conv} P) + F_1$ einen $(k-1)$-Zylinder $Z_2 = (\operatorname{conv} P) + F_2$ mit $Z_2 \subset Z_1$ und $Z_2 \cap Q = \emptyset$.

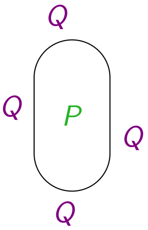
Beispiel

Seien $P, Q \subset \mathrm{E}^3$ kompakt.

Beispiel

Seien $P, Q \subset \mathrm{E}^3$ kompakt.

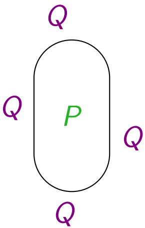
- Wenn jeder Punkt aus Q mit einer Hyperebene streng von P getrennt werden kann, dann liegt Q außerhalb von $\mathrm{conv} P$.

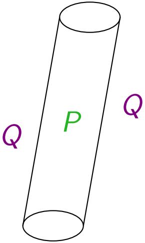


Beispiel

Seien $P, Q \subset \mathrm{E}^3$ kompakt.

- Wenn jeder Punkt aus Q mit einer Hyperebene streng von P getrennt werden kann, dann liegt Q außerhalb von $\operatorname{conv} P$.
- Wenn je zwei Punkte aus Q mit einer Hyperebene streng von P getrennt werden können, dann gibt es einen 1-Zylinder, der P beinhaltet und disjunkt von Q ist.

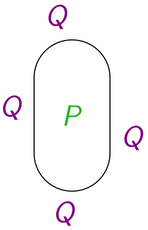


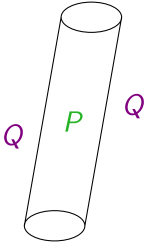


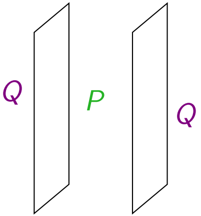
Beispiel

Seien $P, Q \subset \mathrm{E}^3$ kompakt.

- Wenn jeder Punkt aus Q mit einer Hyperebene streng von P getrennt werden kann, dann liegt Q außerhalb von $\operatorname{conv} P$.
- Wenn je zwei Punkte aus Q mit einer Hyperebene streng von P getrennt werden können, dann gibt es einen 1-Zylinder, der P beinhaltet und disjunkt von Q ist.
- Wenn je drei Punkte aus Q mit einer Hyperebene streng von P getrennt werden können, dann gibt es zwei parallele Hypereben, sodass P zwichen ihnen und Q außerhalb liegt.





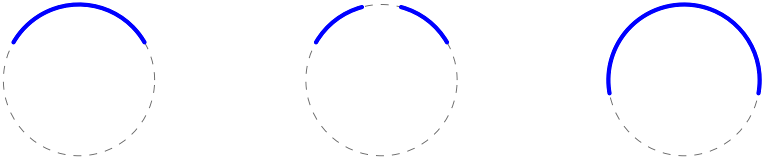


Definition

Eine Teilmenge $K \subset S_\alpha(p)$ heißt *stark konvex*, wenn K keine antipodalen (gegenüberliegenden) Punkte enthält und zu jedem Paar von Punkten auch den kleineren Bogen des Großkreises zwischen diesen Punkten enthält.

Definition

Eine Teilmenge $K \subset S_\alpha(p)$ heißt *stark konvex*, wenn K keine antipodalen (gegenüberliegenden) Punkte enthält und zu jedem Paar von Punkten auch den kleineren Bogen des Großkreises zwischen diesen Punkten enthält.



Beispiel

Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Lemma (9.4)

Sei $S = S_1(0)$ *die Einheitssphäre um den Nullpunkt im* E^n *und* $F = \{A_i \mid i \in I\}$ *eine Familie von kompakten, stark konvexen Teilmengen von* S*. Angenommen, je* n *(oder weniger) Elemente von* F *haben einen Punkt gemeinsam. Dann gibt es ein Paar von antipodalen Punkten* $\{p, -p\}$*, sodass* $\{p, -p\} \cap A_i \neq \emptyset$ *für alle* $i \in I$*.*

Beweis von Lemma 9.4.

1. Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\text{conv}A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.

Theorem (Horn, 6.8)

Sei $F = \{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von kompakten, konvexen Teilmengen von E^n mit mindestens n Elementen. Angenommen, jede Unterfamilie mit k Elementen besitzt einen gemeinsamen Punkt, wobei $1 \leq k \leq n$. Dann gibt es für jeden $(n-k)$-dimensionalen Unterraum F_1 einen $(n-k+1)$-dimensionalen Unterraum F_2, sodass $F_2 \supset F_1$ und $F_2 \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis von Lemma 9.4.

1. Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\mathrm{conv} A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.

Theorem (Horn, 6.8)

Sei $F = \{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von kompakten, konvexen Teilmengen von E^n mit mindestens n Elementen. Angenommen, jede Unterfamilie mit k Elementen besitzt einen gemeinsamen Punkt, wobei $1 \leq k \leq n$. Dann gibt es für jeden $(n-k)$-dimensionalen Unterraum F_1 einen $(n-k+1)$-dimensionalen Unterraum F_2, sodass $F_2 \supset F_1$ und $F_2 \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis von Lemma 9.4.

1. Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\operatorname{conv} A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.
2. Aus dem Lemma von Horn folgt mit $k=n$, $F_1=\{0\}$, dass ein 1-dimensionaler Unterraum L mit $L \cap \operatorname{conv} A_i \neq \emptyset$ existiert.

Theorem (Horn, 6.8)

Sei $F = \{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von kompakten, konvexen Teilmengen von E^n mit mindestens n Elementen. Angenommen, jede Unterfamilie mit k Elementen besitzt einen gemeinsamen Punkt, wobei $1 \leq k \leq n$. Dann gibt es für jeden $(n-k)$-dimensionalen Unterraum F_1 einen $(n-k+1)$-dimensionalen Unterraum F_2, sodass $F_2 \supset F_1$ und $F_2 \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis von Lemma 9.4.

1. Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\mathrm{conv} A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.
2. Aus dem Lemma von Horn folgt mit $k{=}n$, $F_1{=}\{0\}$, dass ein 1-dimensionaler Unterraum L mit $L \cap \mathrm{conv} A_i \neq \emptyset$ existiert.
3. Da A_i stark konvex ist, gilt auch $L \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Theorem (Horn, 6.8)

Sei $F = \{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von kompakten, konvexen Teilmengen von E^n mit mindestens n Elementen. Angenommen, jede Unterfamilie mit k Elementen besitzt einen gemeinsamen Punkt, wobei $1 \leq k \leq n$. Dann gibt es für jeden $(n-k)$-dimensionalen Unterraum F_1 einen $(n-k+1)$-dimensionalen Unterraum F_2, sodass $F_2 \supset F_1$ und $F_2 \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis von Lemma 9.4.

1. Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\mathrm{conv} A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.
2. Aus dem Lemma von Horn folgt mit $k=n$, $F_1=\{0\}$, dass ein 1-dimensionaler Unterraum L mit $L \cap \mathrm{conv} A_i \neq \emptyset$ existiert.
3. Da A_i stark konvex ist, gilt auch $L \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.
4. Mit $\{p, -p\} := L \cap S$ folgt die Aussage. $\square$

Beweis von Theorem 9.5.

Sei $\delta := \inf\{\mathrm{dist}(\mathrm{conv}\, T, \mathrm{conv}\, P) \mid T$ ist Teilmenge von Q mit höchstens k Punkten $\}$.

Behauptung: $\delta > 0$

Beweis von Theorem 9.5.

Sei $\delta := \inf\{\mathrm{dist}(\mathrm{conv}\, T, \mathrm{conv}\, P) \mid T$ ist Teilmenge von Q mit höchstens k Punkten $\}$.

Behauptung: $\delta > 0$

1. Sei R die Menge aller $x \in \mathrm{E}^n$, die Konvexkombination von höchstens k Punkten aus Q sind. Die Menge R ist kompakt, da sie Bild von

$$Q^k \times M^k \to \mathrm{E}^n, \qquad (q_1, ..., q_k, \lambda_1, ..., \lambda_k) \mapsto \lambda_1 q_1 + ... + \lambda_k q_k,$$
$$\text{mit } M^k := \{(\lambda_1, ..., \lambda_k) \in [0,1]^k \mid \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1\},$$

   einer stetigen Abbildung mit kompakter Definitionsmenge, ist.

Beweis von Theorem 9.5.

Sei $\delta := \inf\{\operatorname{dist}(\operatorname{conv} T, \operatorname{conv} P) \mid T$ ist Teilmenge von Q mit höchstens k Punkten $\}$.

Behauptung: $\delta > 0$

1. Sei R die Menge aller $x \in \mathrm{E}^n$, die Konvexkombination von höchstens k Punkten aus Q sind. Die Menge R ist kompakt, da sie Bild von

$$Q^k \times M^k \to \mathrm{E}^n, \qquad (q_1, \ldots, q_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto \lambda_1 q_1 + \ldots + \lambda_k q_k,$$

$$\text{mit } M^k := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in [0,1]^k \mid \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1\},$$

   einer stetigen Abbildung mit kompakter Definitionsmenge, ist.
2. Angenommen, $\operatorname{dist}(R, \operatorname{conv} P) = 0$. Dann gibt es $r = \lambda_1 q_1 + \ldots + \lambda_k q_k \in R$ mit $\operatorname{dist}(r, \operatorname{conv} P) = 0$, also $r \in \operatorname{conv} P$.

Beweis von Theorem 9.5.

Sei $\delta := \inf\{\text{dist}(\text{conv}\, T, \text{conv}\, P) \mid T$ ist Teilmenge von Q mit höchstens k Punkten $\}$.

Behauptung: $\delta > 0$

1. Sei R die Menge aller $x \in \mathrm{E}^n$, die Konvexkombination von höchstens k Punkten aus Q sind. Die Menge R ist kompakt, da sie Bild von

$$Q^k \times M^k \to \mathrm{E}^n, \qquad (q_1, \dots, q_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_k q_k,$$
$$\text{mit } M^k := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in [0,1]^k \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1\},$$

   einer stetigen Abbildung mit kompakter Definitionsmenge, ist.
2. Angenommen, $\text{dist}(R, \text{conv}\, P) = 0$. Dann gibt es $r = \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_k q_k \in R$ mit $\text{dist}(r, \text{conv}\, P) = 0$, also $r \in \text{conv}\, P$.
3. Dann können aber $q_1, \dots, q_k$ nicht mit einer Hyperebene stark von $\text{conv}\, P$ getrennt werden. Widerspruch.

Beweis von Theorem 9.5.

Sei $\delta := \inf\{\text{dist}(\text{conv}\,T, \text{conv}\,P) \mid T$ ist Teilmenge von Q mit höchstens k Punkten $\}$.

Behauptung: $\delta > 0$

1. Sei R die Menge aller $x \in \mathrm{E}^n$, die Konvexkombination von höchstens k Punkten aus Q sind. Die Menge R ist kompakt, da sie Bild von

$$Q^k \times M^k \to \mathrm{E}^n, \qquad (q_1, ..., q_k, \lambda_1, ..., \lambda_k) \mapsto \lambda_1 q_1 + ... + \lambda_k q_k,$$
$$\text{mit } M^k := \{(\lambda_1, ..., \lambda_k) \in [0,1]^k \mid \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1\},$$

   einer stetigen Abbildung mit kompakter Definitionsmenge, ist.
2. Angenommen, $\text{dist}(R, \text{conv}\,P) = 0$. Dann gibt es $r = \lambda_1 q_1 + ... + \lambda_k q_k \in R$ mit $\text{dist}(r, \text{conv}\,P) = 0$, also $r \in \text{conv}\,P$.
3. Dann können aber $q_1, ..., q_k$ nicht mit einer Hyperebene stark von $\text{conv}\,P$ getrennt werden. Widerspruch.
4. Für alle Mengen T wie oben gilt dann $\text{conv}\,T \subset R$ und somit $\text{dist}(\text{conv}\,T, \text{conv}\,P) \geq \text{dist}(R, \text{conv}\,P)$.

Beweis von Theorem 9.5.

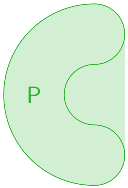
Sei $\delta := \inf\{\mathrm{dist}(\mathrm{conv}\, T, \mathrm{conv}\, P) \mid T$ ist Teilmenge von Q mit höchstens k Punkten $\}$.

Behauptung: $\delta > 0$

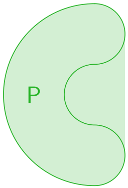
1. Sei R die Menge aller $x \in \mathrm{E}^n$, die Konvexkombination von höchstens k Punkten aus Q sind. Die Menge R ist kompakt, da sie Bild von

$$Q^k \times M^k \to \mathrm{E}^n, \qquad (q_1, \ldots, q_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto \lambda_1 q_1 + \ldots + \lambda_k q_k,$$
$$\text{mit } M^k := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in [0,1]^k \mid \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1\},$$

   einer stetigen Abbildung mit kompakter Definitionsmenge, ist.
2. Angenommen, $\mathrm{dist}(R, \mathrm{conv}\, P) = 0$. Dann gibt es $r = \lambda_1 q_1 + \ldots + \lambda_k q_k \in R$ mit $\mathrm{dist}(r, \mathrm{conv}\, P) = 0$, also $r \in \mathrm{conv}\, P$.
3. Dann können aber $q_1, \ldots, q_k$ nicht mit einer Hyperebene stark von $\mathrm{conv}\, P$ getrennt werden. Widerspruch.
4. Für alle Mengen T wie oben gilt dann $\mathrm{conv}\, T \subset R$ und somit $\mathrm{dist}(\mathrm{conv}\, T, \mathrm{conv}\, P) \geq \mathrm{dist}(R, \mathrm{conv}\, P)$.
5. Durch Übergang zum Infimum folgt $\delta \geq \mathrm{dist}(R, \mathrm{conv}\, P) > 0$.

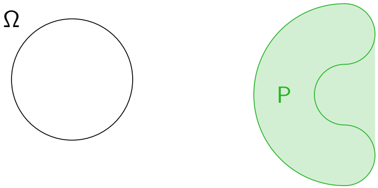


Beweis von Theorem 9.5.



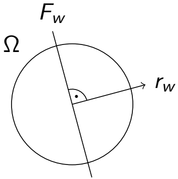
Beweis von Theorem 9.5.

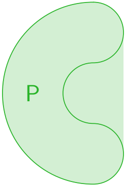
1. Sei $Z_1 = (\mathrm{conv} P) + F_1$ ein k-Zylinder. Annahme: $Z_1 \cap Q \neq \emptyset$.



Beweis von Theorem 9.5.

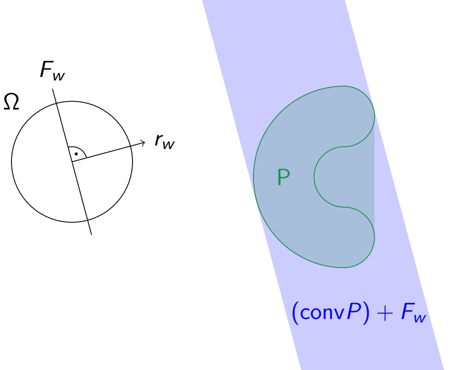
1. Sei $Z_1 = (\operatorname{conv} P) + F_1$ ein k-Zylinder. Annahme: $Z_1 \cap Q \neq \emptyset$.
2. Setze $\Omega := S_1(0) \cap F = \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$.





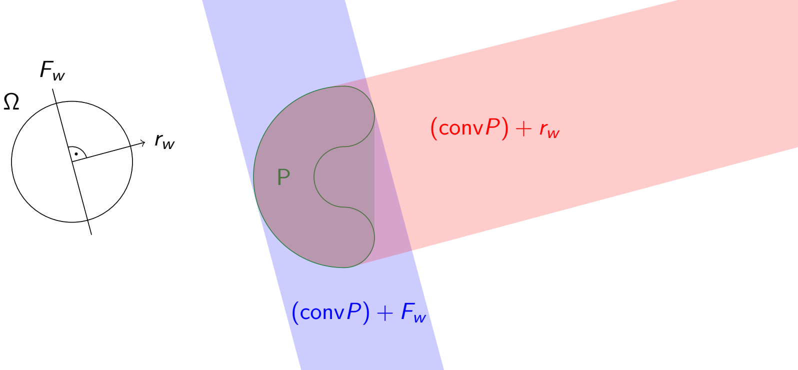
Beweis von Theorem 9.5.

1. Sei $Z_1 = (\operatorname{conv} P) + F_1$ ein k-Zylinder. Annahme: $Z_1 \cap Q \neq \emptyset$.
2. Setze $\Omega := S_1(0) \cap F = \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$.
3. Für $w \in \Omega$ sei F_w das orthogonale Komplement zu $\operatorname{span}\{w\}$ in F_1, also $F_1 = \operatorname{span}\{w\} \perp F_w$ und $r_w := \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot w$ der Strahl durch w.



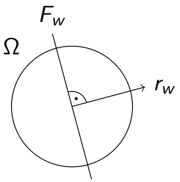
Beweis von Theorem 9.5.

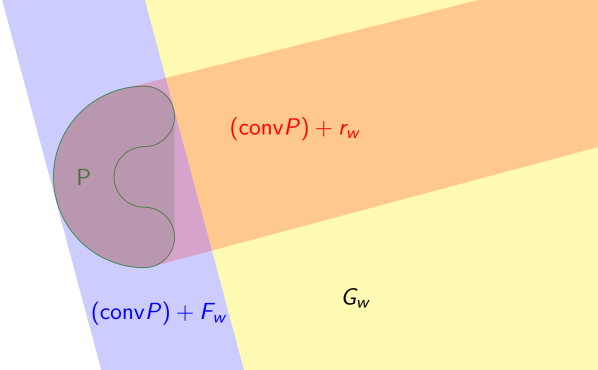
1. Sei $Z_1 = (\mathrm{conv} P) + F_1$ ein k-Zylinder. Annahme: $Z_1 \cap Q \neq \emptyset$.
2. Setze $\Omega := S_1(0) \cap F = \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$.
3. Für $w \in \Omega$ sei F_w das orthogonale Komplement zu $\mathrm{span}\{w\}$ in F_1, also $F_1 = \mathrm{span}\{w\} \perp F_w$ und $r_w := \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot w$ der Strahl durch w.
4. Für $w \in \Omega$ sei G_w diejenige Komponente von $Z_1 \setminus ((\mathrm{conv} P) + F_w)$, die $(\mathrm{conv} P) + r_w$ schneidet.



Beweis von Theorem 9.5.

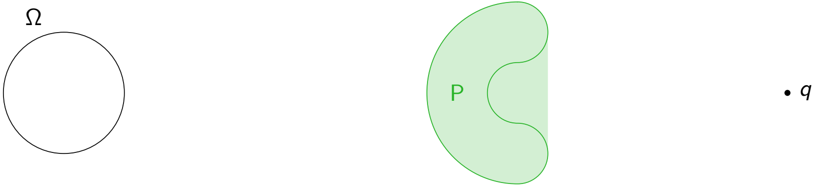
1. Sei $Z_1 = (\operatorname{conv} P) + F_1$ ein k-Zylinder. Annahme: $Z_1 \cap Q \neq \emptyset$.
2. Setze $\Omega := S_1(0) \cap F = \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$.
3. Für $w \in \Omega$ sei F_w das orthogonale Komplement zu $\operatorname{span}\{w\}$ in F_1, also $F_1 = \operatorname{span}\{w\} \perp F_w$ und $r_w := \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot w$ der Strahl durch w.
4. Für $w \in \Omega$ sei G_w diejenige Komponente von $Z_1 \setminus ((\operatorname{conv} P) + F_w)$, die $(\operatorname{conv} P) + r_w$ schneidet.





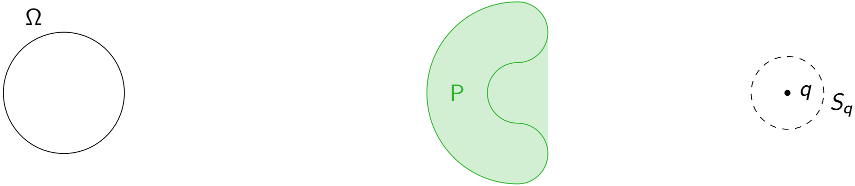
Beweis von Theorem 9.5.

1. Sei $Z_1 = (\text{conv}P) + F_1$ ein k-Zylinder. Annahme: $Z_1 \cap Q \neq \emptyset$.
2. Setze $\Omega := S_1(0) \cap F = \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$.
3. Für $w \in \Omega$ sei F_w das orthogonale Komplement zu $\text{span}\{w\}$ in F_1, also $F_1 = \text{span}\{w\} \perp F_w$ und $r_w := \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot w$ der Strahl durch w.
4. Für $w \in \Omega$ sei G_w diejenige Komponente von $Z_1 \setminus ((\text{conv}P) + F_w)$, die $(\text{conv}P) + r_w$ schneidet.



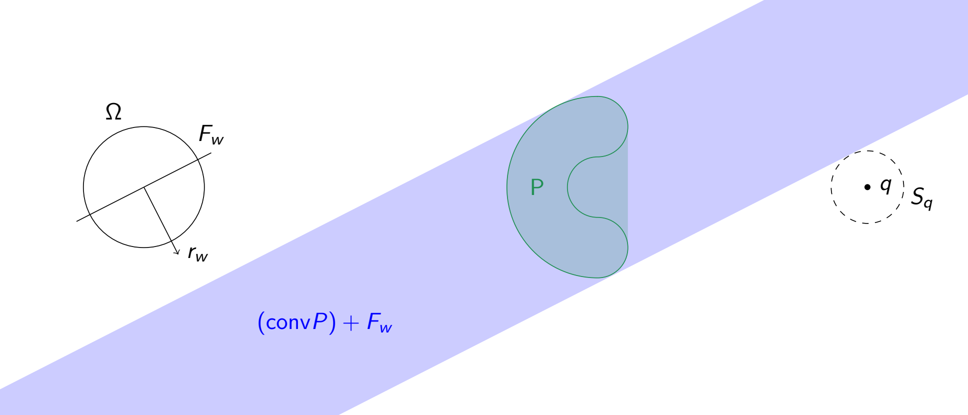
Beweis von Theorem 9.5.

6. Für $q \in Q \cap Z_1$ setze



Beweis von Theorem 9.5.

6. Für $q \in Q \cap Z_1$ setze
$$S_q := B_{\delta/2}(q) \cap Z_1 = \{x \in Z_1 \mid \|x - q\| < \delta/2\}$$

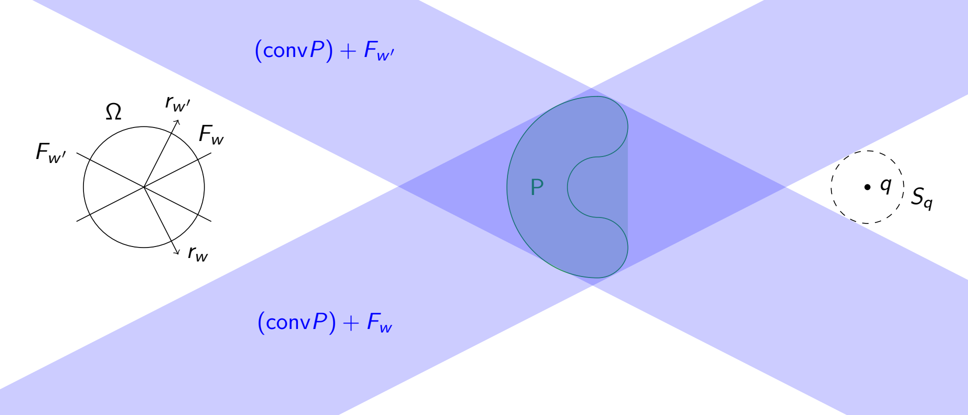


Beweis von Theorem 9.5.

6. Für $q \in Q \cap Z_1$ setze

$$S_q := B_{\delta/2}(q) \cap Z_1 = \{x \in Z_1 \mid \|x - q\| < \delta/2\}$$

$$A_q := \{w \in \Omega \mid S_q \subset G_w\}$$

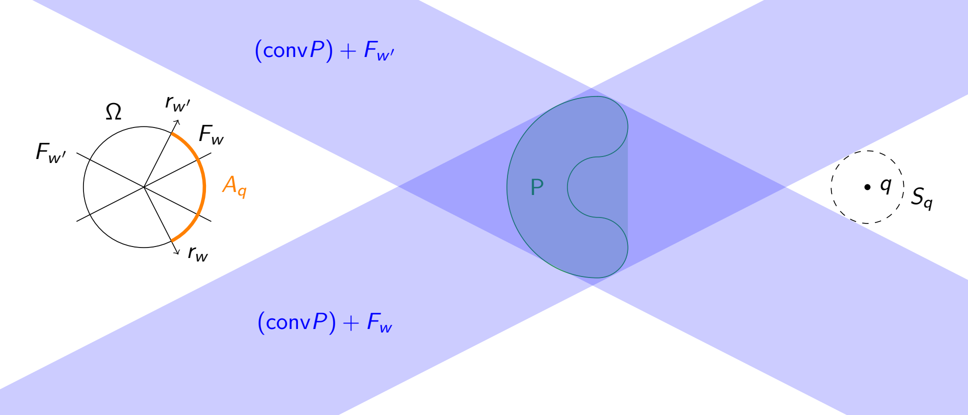


Beweis von Theorem 9.5.

6. Für $q \in Q \cap Z_1$ setze

$$S_q := B_{\delta/2}(q) \cap Z_1 = \{x \in Z_1 \mid \|x - q\| < \delta/2\}$$

$$A_q := \{w \in \Omega \mid S_q \subset G_w\}$$

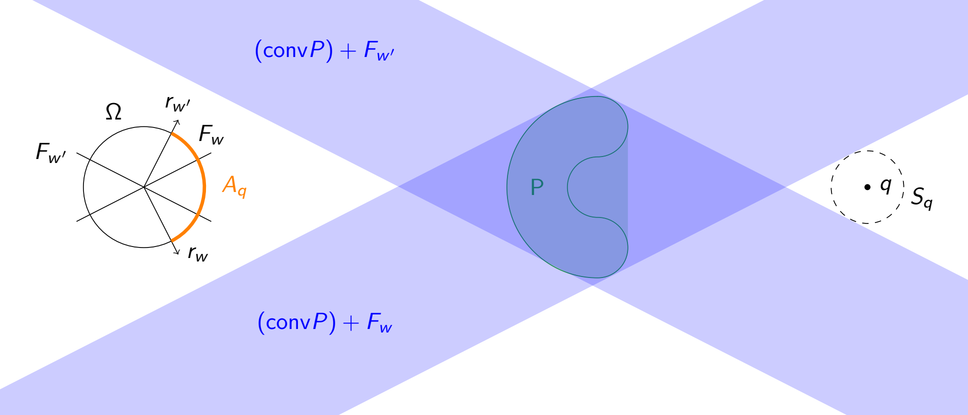


Beweis von Theorem 9.5.

6. Für $q \in Q \cap Z_1$ setze

$$S_q := B_{\delta/2}(q) \cap Z_1 = \{x \in Z_1 \mid \|x - q\| < \delta/2\}$$

$$A_q := \{w \in \Omega \mid S_q \subset G_w\}$$



Beweis von Theorem 9.5.

6. Für $q \in Q \cap Z_1$ setze

   $$S_q := B_{\delta/2}(q) \cap Z_1 = \{x \in Z_1 \mid \|x - q\| < \delta/2\}$$

   $$A_q := \{w \in \Omega \mid S_q \subset G_w\}$$

7. Man kann zeigen: Für alle $q \in Q \cap Z_1$ ist A_q kompakt und stark konvex.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \ldots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$.
Dann gilt $\bigcap_{i=1}^{m} A_{q_i} \neq \emptyset$.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \dots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$. Dann gilt $\bigcap_{i=1}^{m} A_{q_i} \neq \emptyset$.

1. Es gilt $\operatorname{dist}(\operatorname{conv}\{q_1, \dots, q_m\}, \operatorname{conv} P) \geq \delta$.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \ldots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$.
Dann gilt $\bigcap_{i=1}^{m} A_{q_i} \neq \emptyset$.

1. Es gilt $\operatorname{dist}(\operatorname{conv}\{q_1, \ldots, q_m\}, \operatorname{conv} P) \geq \delta$.
2. Es folgt $\operatorname{dist}(\operatorname{conv}(S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m}), \operatorname{conv} P) > \delta/2$.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \ldots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$. Dann gilt $\bigcap_{i=1}^{m} A_{q_i} \neq \emptyset$.

1. Es gilt $\operatorname{dist}(\operatorname{conv}\{q_1, \ldots, q_m\}, \operatorname{conv} P) \geq \delta$.
2. Es folgt $\operatorname{dist}(\operatorname{conv}(S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m}), \operatorname{conv} P) > \delta/2$.
3. Also gibt es eine Hyperebene H, die $S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m}$ und P streng trennt. Sei H' der zu H parallele $(n-1)$-dimensionale Unterraum.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \ldots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$. Dann gilt $\bigcap_{i=1}^{m} A_{q_i} \neq \emptyset$.

1. Es gilt $\mathrm{dist}(\mathrm{conv}\{q_1, \ldots, q_m\}, \mathrm{conv} P) \geq \delta$.
2. Es folgt $\mathrm{dist}(\mathrm{conv}(S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m}), \mathrm{conv} P) > \delta/2$.
3. Also gibt es eine Hyperebene H, die $S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m}$ und P streng trennt. Sei H' der zu H parallele $(n-1)$-dimensionale Unterraum.
4. Es gilt $F \not\subset H'$, da sonst $Z_1 \cap Q = \emptyset$.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \ldots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$.
Dann gilt $\bigcap_{i=1}^{m} A_{q_i} \neq \emptyset$.

1. Es gilt $\mathrm{dist}(\mathrm{conv}\{q_1, \ldots, q_m\}, \mathrm{conv}P) \geq \delta$.
2. Es folgt $\mathrm{dist}(\mathrm{conv}(S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m}), \mathrm{conv}P) > \delta/2$.
3. Also gibt es eine Hyperebene H, die $S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m}$ und P streng trennt. Sei H' der zu H parallele $(n-1)$-dimensionale Unterraum.
4. Es gilt $F \not\subset H'$, da sonst $Z_1 \cap Q = \emptyset$.
5. Somit ist $G := H' \cap F$ ein $(k-1)$-dimensionaler Unterraum.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \dots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$.
Dann gilt $\bigcap_{i=1}^{m} A_{q_i} \neq \emptyset$.

1. Es gilt $\text{dist}(\text{conv}\{q_1, \dots, q_m\}, \text{conv}P) \geq \delta$.
2. Es folgt $\text{dist}(\text{conv}(S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}), \text{conv}P) > \delta/2$.
3. Also gibt es eine Hyperebene H, die $S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}$ und P streng trennt. Sei H' der zu H parallele $(n-1)$-dimensionale Unterraum.
4. Es gilt $F \not\subset H'$, da sonst $Z_1 \cap Q = \emptyset$.
5. Somit ist $G := H' \cap F$ ein $(k-1)$-dimensionaler Unterraum.
6. Dann liegt $S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}$ in einer der beiden Komponenten von $Z_1 \setminus ((\text{conv}P) + G)$.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \ldots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$. Dann gilt $\bigcap_{i=1}^{m} A_{q_i} \neq \emptyset$.

1. Es gilt $\operatorname{dist}(\operatorname{conv}\{q_1, \ldots, q_m\}, \operatorname{conv} P) \geq \delta$.
2. Es folgt $\operatorname{dist}(\operatorname{conv}(S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m}), \operatorname{conv} P) > \delta/2$.
3. Also gibt es eine Hyperebene H, die $S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m}$ und P streng trennt. Sei H' der zu H parallele $(n-1)$-dimensionale Unterraum.
4. Es gilt $F \not\subset H'$, da sonst $Z_1 \cap Q = \emptyset$.
5. Somit ist $G := H' \cap F$ ein $(k-1)$-dimensionaler Unterraum.
6. Dann liegt $S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m}$ in einer der beiden Komponenten von $Z_1 \setminus ((\operatorname{conv} P) + G)$.
7. Wähle $w \in \Omega$, sodass $w \perp G$ und $S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m} \subset G_w$.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \ldots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$. Dann gilt $\bigcap_{i=1}^{m} A_{q_i} \neq \emptyset$.

1. Es gilt $\operatorname{dist}(\operatorname{conv}\{q_1, \ldots, q_m\}, \operatorname{conv} P) \geq \delta$.
2. Es folgt $\operatorname{dist}(\operatorname{conv}(S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m}), \operatorname{conv} P) > \delta/2$.
3. Also gibt es eine Hyperebene H, die $S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m}$ und P streng trennt. Sei H' der zu H parallele $(n-1)$-dimensionale Unterraum.
4. Es gilt $F \not\subset H'$, da sonst $Z_1 \cap Q = \emptyset$.
5. Somit ist $G := H' \cap F$ ein $(k-1)$-dimensionaler Unterraum.
6. Dann liegt $S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m}$ in einer der beiden Komponenten von $Z_1 \setminus ((\operatorname{conv} P) + G)$.
7. Wähle $w \in \Omega$, sodass $w \perp G$ und $S_{q_1} \cup \ldots \cup S_{q_m} \subset G_w$.
8. Folglich gilt $w \in \bigcap_{i=1}^{m} A_{q_i}$.

Beweis von Theorem 9.5.

Wir haben gesehen, dass $\{A_q \mid q \in Q \cap Z_1\}$ eine Familie kompakter, stark konvexer Mengen ist. Zusammen mit vorheriger Behauptung folgt aus Lemma 9.4:

Beweis von Theorem 9.5.

Wir haben gesehen, dass $\{A_q \mid q \in Q \cap Z_1\}$ eine Familie kompakter, stark konvexer Mengen ist. Zusammen mit vorheriger Behauptung folgt aus Lemma 9.4:

Es gibt ein Paar von antipodalen Punkten $\{y, -y\}$ in Ω, sodass $\forall\, q \in Z_1 \cap Q \,:\, A_q \cap \{p, -p\} \neq \emptyset$.

Beweis von Theorem 9.5.

Wir haben gesehen, dass $\{A_q \mid q \in Q \cap Z_1\}$ eine Familie kompakter, stark konvexer Mengen ist. Zusammen mit vorheriger Behauptung folgt aus Lemma 9.4:

Es gibt ein Paar von antipodalen Punkten $\{y, -y\}$ in Ω, sodass $\forall\, q \in Z_1 \cap Q \,:\, A_q \cap \{p, -p\} \neq \emptyset$. Somit hat der $(k-1)$-Zylinder $Z_2 := (\operatorname{conv} P) + F_y \subset Z_1$ leeren Schnitt mit Q. $\square$

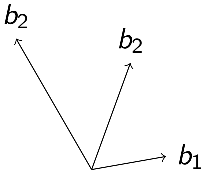
Übersicht

Definition

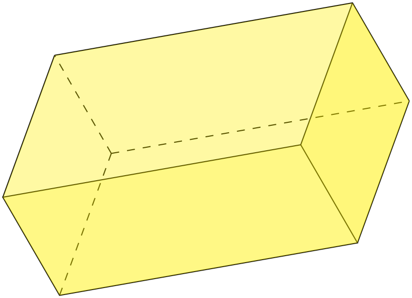
Sei $\beta = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n. Sei H_i für $i = 1, ..., n$ die Hyperebene $\mathrm{span}(b_1, ..., \widehat{b_i}, ..., b_n)$. Eine β-*Box* ist ein Parallelotop, in dem jede Seite parallel zu einer Hyperebene H_i ist.

Definition

Sei $\beta = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n. Sei H_i für $i = 1, ..., n$ die Hyperebene $\mathrm{span}(b_1, ..., \widehat{b_i}, ..., b_n)$. Eine β-*Box* ist ein Parallelotop, in dem jede Seite parallel zu einer Hyperebene H_i ist.



$\beta = \{b_1, b_2, b_3\}$



Eine β-Box

Die Koordinatenfunktionen dieser Basis sind

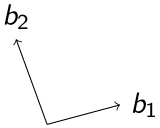
$$\pi_i : \mathsf{E}^n \to \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j \mapsto \lambda_i \qquad \text{für } i = 1, ..., n.$$

Dann ist eine β-Box gegeben durch reelle Zahlen $m_1, ..., m_n$ und $M_1, ..., M_n$ mit $m_i \leq M_i$ für $i = 1, ..., n$ und besteht aus allen $x \in \mathsf{E}^n$, die folgendes lineare Ungleichungssystem erfüllen:

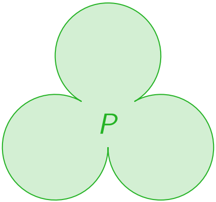
$$\begin{aligned} m_1 \leq & \pi_1(x) \leq M_1 \\ m_2 \leq & \pi_2(x) \leq M_2 \\ & \vdots \\ m_n \leq & \pi_n(x) \leq M_n \end{aligned}$$

Sei $P \subset \mathrm{E}^n$ nichtleer und kompakt. Dann existiert eine eindeutige minimale β-Box B_P, die P enthält. Diese ist gegeben durch

$$m_i := \inf_{p \in P} \pi_i(p) \quad \text{und} \quad M_i := \sup_{p \in P} \pi_i(p) \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$



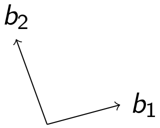
$\beta = \{b_1, b_2\}$



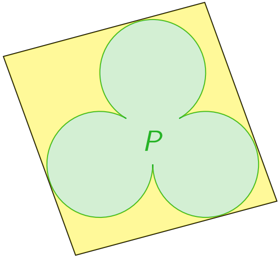
minimale β-Box um P

Sei $P \subset \mathrm{E}^n$ nichtleer und kompakt. Dann existiert eine eindeutige minimale β-Box B_P, die P enthält. Diese ist gegeben durch

$$m_i := \inf_{p \in P} \pi_i(p) \quad \text{und} \quad M_i := \sup_{p \in P} \pi_i(p) \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$



$\beta = \{b_1, b_2\}$



minimale β-Box um P

Theorem (10.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n $(n \geq 2)$. Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

(a) *Es gibt eine β-Box B, sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.*

(b) *Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β-Box B_S, sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.*

(c) *Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β-Box B_T, die T enthält, disjunkt von Q, also $B_T \cap Q = \emptyset$.*

Theorem (10.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n $(n \geq 2)$. Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

(a) *Es gibt eine β-Box B, sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.*

(b) *Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β-Box B_S, sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.*

(c) *Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β-Box B_T, die T enthält, disjunkt von Q, also $B_T \cap Q = \emptyset$.*

Beweis.

$(a) \Rightarrow (b)$ Klar.

Theorem (10.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n $(n \geq 2)$. Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

(a) *Es gibt eine β-Box B, sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.*

(b) *Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β-Box B_S, sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.*

(c) *Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β-Box B_T, die T enthält, disjunkt von Q, also $B_T \cap Q = \emptyset$.*

Beweis.

$(a) \Rightarrow (b)$ Klar.
$(b) \Rightarrow (c)$ Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β-Box, die T enthält.

Theorem (10.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n $(n \geq 2)$. Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

(a) *Es gibt eine β-Box B, sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.*

(b) *Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β-Box B_S, sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.*

(c) *Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β-Box B_T, die T enthält, disjunkt von Q, also $B_T \cap Q = \emptyset$.*

Beweis.

$(a) \Rightarrow (b)$ Klar.
$(b) \Rightarrow (c)$ Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β-Box, die T enthält. Sei $q \in Q$ beliebig.

Theorem (10.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n $(n \geq 2)$. Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

(a) *Es gibt eine β-Box B, sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.*

(b) *Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β-Box B_S, sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.*

(c) *Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β-Box B_T, die T enthält, disjunkt von Q, also $B_T \cap Q = \emptyset$.*

Beweis.

$(a) \Rightarrow (b)$ Klar.
$(b) \Rightarrow (c)$ Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β-Box, die T enthält. Sei $q \in Q$ beliebig. Dann ist die Menge $S_q := T \cup \{q\}$ eine Teilmenge von $P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten.

Theorem (10.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n $(n \geq 2)$. Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

(a) *Es gibt eine β-Box B, sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.*

(b) *Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β-Box B_S, sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.*

(c) *Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β-Box B_T, die T enthält, disjunkt von Q, also $B_T \cap Q = \emptyset$.*

Beweis.

$(a) \Rightarrow (b)$ Klar.
$(b) \Rightarrow (c)$ Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β-Box, die T enthält. Sei $q \in Q$ beliebig. Dann ist die Menge $S_q := T \cup \{q\}$ eine Teilmenge von $P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten. Sei B_{S_q} die β-Box aus (b).

Theorem (10.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n $(n \geq 2)$. Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

(a) *Es gibt eine β-Box B, sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.*

(b) *Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β-Box B_S, sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.*

(c) *Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β-Box B_T, die T enthält, disjunkt von Q, also $B_T \cap Q = \emptyset$.*

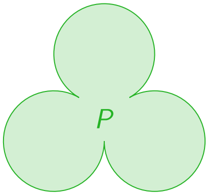
Beweis.

$(a) \Rightarrow (b)$ Klar.
$(b) \Rightarrow (c)$ Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β-Box, die T enthält. Sei $q \in Q$ beliebig. Dann ist die Menge $S_q := T \cup \{q\}$ eine Teilmenge von $P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten. Sei B_{S_q} die β-Box aus (b). Dann gilt: $T \subset P \cap S_q \subset B_{S_q}$, also $B_T \subset B_{S_q}$, und $B_T \cap \{q\} \subset B_{S_q} \cap (S_q \cap Q) = \emptyset$.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsanfang $(n = 2)$:

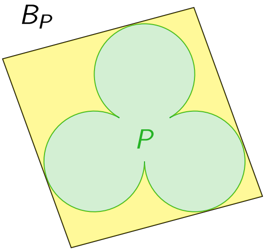


Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsanfang $(n = 2)$:

Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält.

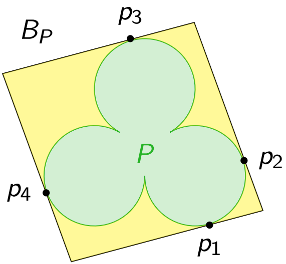


Beweis.

(c) $\Rightarrow$ (a) Durch Induktion über n.

Induktionsanfang ($n = 2$):

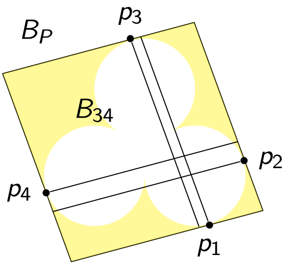
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4.



Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

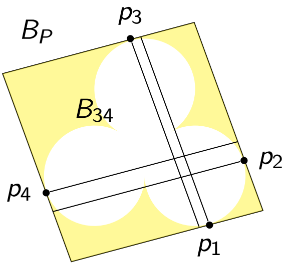
Induktionsanfang $(n = 2)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4. Für jedes Paar von Punkten p_i und p_j mit $i \neq j$ sei B_{ij} die minimale β-Box, die p_i und p_j enthält.



Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

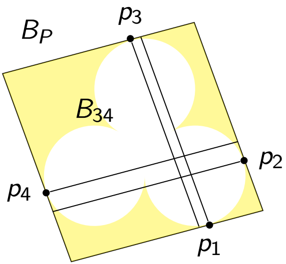
Induktionsanfang $(n = 2)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4. Für jedes Paar von Punkten p_i und p_j mit $i \neq j$ sei B_{ij} die minimale β-Box, die p_i und p_j enthält. Es gilt $B_P = \bigcup_{i \neq j} B_{ij}$.



Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

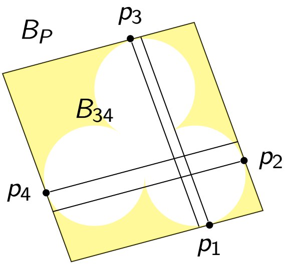
Induktionsanfang $(n = 2)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4. Für jedes Paar von Punkten p_i und p_j mit $i \neq j$ sei B_{ij} die minimale β-Box, die p_i und p_j enthält. Es gilt $B_P = \bigcup_{i \neq j} B_{ij}$. Angenommen, (a) ist falsch, also $q \in Q \cap B_P = Q \cap (\bigcup_{i \neq j} B_{ij})$.



Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsanfang $(n = 2)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4. Für jedes Paar von Punkten p_i und p_j mit $i \neq j$ sei B_{ij} die minimale β-Box, die p_i und p_j enthält. Es gilt $B_P = \bigcup_{i \neq j} B_{ij}$. Angenommen, (a) ist falsch, also $q \in Q \cap B_P = Q \cap (\bigcup_{i \neq j} B_{ij})$. Dann gibt es $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit $i \neq j$ und $q \in B_{ij}$.



Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:

Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : \mathrm{E}^{n+1} \to E^n$ durch $f(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : \mathrm{E}^{n+1} \to E^n$ durch $f(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β'-Box, die $f(P)$ enthält.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : \mathrm{E}^{n+1} \to E^n$ durch $f(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β'-Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(B_P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n{-}1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β'-Box um T' enthalten ist.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : \mathrm{E}^{n+1} \to E^n$ durch $f(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β'-Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(B_P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n{-}1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β'-Box um T' enthalten ist. Sei $T \subset P$ mit maximal $n{-}1$ Punkten und $f(T) = T'$.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : \mathrm{E}^{n+1} \to E^n$ durch $f(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β'-Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(B_P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n{-}1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β'-Box um T' enthalten ist. Sei $T \subset P$ mit maximal $n{-}1$ Punkten und $f(T) = T'$. Es gilt

$$\inf_{x \in T} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T} \pi_i(x) \qquad \text{für } i \in \{1, ..., n\}.$$

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : \mathrm{E}^{n+1} \to E^n$ durch $f(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β'-Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(B_P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n{-}1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β'-Box um T' enthalten ist. Sei $T \subset P$ mit maximal $n{-}1$ Punkten und $f(T) = T'$. Es gilt

$$\inf_{x \in T} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T} \pi_i(x) \qquad \text{für } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Angenommen, obige Ungleichung gilt auch für $i = n{+}1$. Dann sind wir fertig.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : \mathrm{E}^{n+1} \to E^n$ durch $f(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β'-Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(B_P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n{-}1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β'-Box um T' enthalten ist. Sei $T \subset P$ mit maximal $n{-}1$ Punkten und $f(T) = T'$. Es gilt

$$\inf_{x \in T} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T} \pi_i(x) \qquad \text{für } i \in \{1, ..., n\}.$$

Angenommen, obige Ungleichung gilt auch für $i = n{+}1$. Dann sind wir fertig. Andernfalls gilt

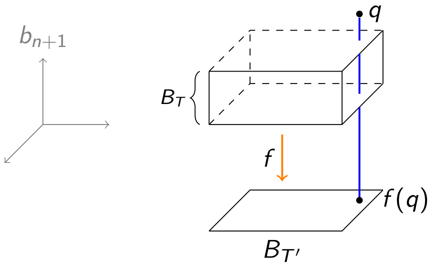
$$\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x) \quad \text{oder} \quad \pi_{n+1}(q) < \inf_{x \in T} \pi_{n+1}(x).$$

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt (Fortsetzung):

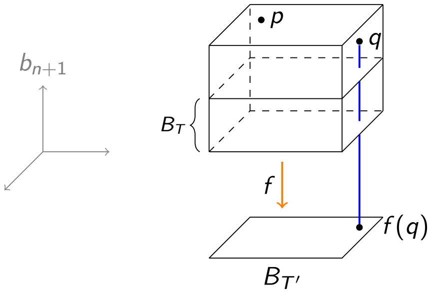
Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$.



Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

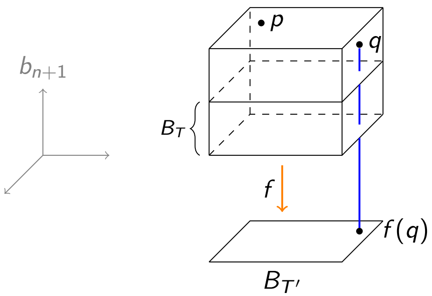
Induktionsschritt (Fortsetzung):
Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$. Da P kompakt ist, gibt es $p \in P$ mit $\pi_{n+1}(p) = \sup_{x \in P} \pi_{n+1}(x)$.



Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt (Fortsetzung):
Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$. Da P kompakt ist, gibt es $p \in P$ mit $\pi_{n+1}(p) = \sup_{x \in P} \pi_{n+1}(x)$. Aus $q \in B_P$ folgt $\pi_{n+1}(q) \leq \pi_{n+1}(p)$.

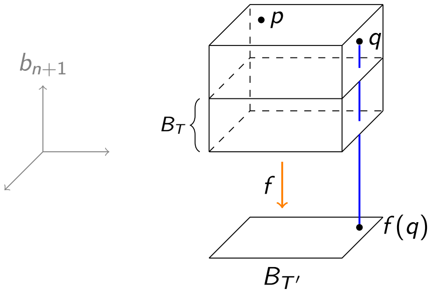


Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt (Fortsetzung):
Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x\in T} \pi_{n+1}(x)$. Da P kompakt ist, gibt es $p \in P$ mit $\pi_{n+1}(p) = \sup_{x\in P} \pi_{n+1}(x)$. Aus $q \in B_P$ folgt $\pi_{n+1}(q) \leq \pi_{n+1}(p)$. Somit gilt für $i \in \{1, ..., n, n+1\}$:

$$\inf_{x\in T\cup\{p\}} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x\in T\cup\{p\}} \pi_i(x)$$



Beweis.

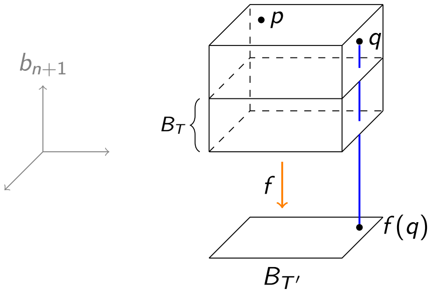
$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt (Fortsetzung):

Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x\in T} \pi_{n+1}(x)$. Da P kompakt ist, gibt es $p \in P$ mit $\pi_{n+1}(p) = \sup_{x\in P} \pi_{n+1}(x)$. Aus $q \in B_P$ folgt $\pi_{n+1}(q) \leq \pi_{n+1}(p)$. Somit gilt für $i \in \{1, ..., n, n+1\}$:

$$\inf_{x\in T\cup\{p\}} \pi_i(x) \;\leq\; \pi_i(q) \;\leq\; \sup_{x\in T\cup\{p\}} \pi_i(x)$$

Widerspruch zu (c).



Beweis.

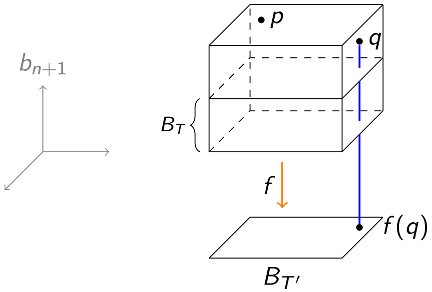
$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt (Fortsetzung):

Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$. Da P kompakt ist, gibt es $p \in P$ mit $\pi_{n+1}(p) = \sup_{x \in P} \pi_{n+1}(x)$. Aus $q \in B_P$ folgt $\pi_{n+1}(q) \leq \pi_{n+1}(p)$. Somit gilt für $i \in \{1, \ldots, n, n+1\}$:

$$\inf_{x \in T \cup \{p\}} \pi_i(x) \quad \leq \quad \pi_i(q) \quad \leq \quad \sup_{x \in T \cup \{p\}} \pi_i(x)$$

Widerspruch zu (c). Der andere Fall folgt analog. $\square$



Korollar (10.3)

Sei $P \subset \mathrm{E}^n$ $(n \geq 2)$ nichtleer und kompakt.
Angenommen, $q \in \mathrm{E}^n$ erfüllt das System von Ungleichungen

$$\inf_{x \in P} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in P} \pi_i(x) \quad \text{für } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dann gibt es eine Menge $T \subset P$ mit höchstens n Punkten und

$$\inf_{x \in T} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T} \pi_i(x) \quad \text{für } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Theorem (Carathéodory, 2.23)

TODO: Noch zu ergänzen!

Theorem (Carathéodory, Umformulierung)

Sei $P \subset E^n$ $(n \geq 2)$ nichtleer und kompakt und sei $q \in E^n$. Angenommen, für jede Menge $T \subset P$ mit höchstens $n+1$ Punkten gibt es eine Hyperebene, die T und $\{q\}$ streng trennt. Dann ist q nicht in der konvexen Hülle von P enthalten.

Korollar (10.4)

Sei $P \subset \mathrm{E}^n$ ($n \geq 2$) nichtleer und kompakt und sei $q \in \mathrm{E}^n$. Sei $\beta = \{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n und H_i der von $\beta \setminus \{b_i\}$ aufgespannte Unterraum für $i \in \{1, ..., n\}$. Angenommen, für jede Menge $T \subset P$ mit höchstens n Punkten gibt es eine Hyperebene, die parallel zu einem der H_i ist und T und $\{q\}$ streng trennt. Dann ist P nicht in der konvexen Hülle von P enthalten.

Korollar (10.4)

Sei $P \subset \mathrm{E}^n$ $(n \geq 2)$ nichtleer und kompakt und sei $q \in \mathrm{E}^n$.
Sei $\beta = \{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n und H_i der von $\beta \setminus \{b_i\}$ aufgespannte Unterraum für $i \in \{1, ..., n\}$. Angenommen, für jede Menge $T \subset P$ mit höchstens n Punkten gibt es eine Hyperebene, die parallel zu einem der H_i ist und T und $\{q\}$ streng trennt. Dann ist P nicht in der konvexen Hülle von P enthalten.

Beweis.

Wegen Satz 10.4 gibt es eine β-Box B_P, die P enthält und disjunkt zu $\{q\}$ ist.

Korollar (10.4)

Sei $P \subset \mathrm{E}^n$ $(n \geq 2)$ nichtleer und kompakt und sei $q \in \mathrm{E}^n$.
Sei $\beta = \{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n und H_i der von $\beta \setminus \{b_i\}$ aufgespannte Unterraum für $i \in \{1, ..., n\}$. Angenommen, für jede Menge $T \subset P$ mit höchstens n Punkten gibt es eine Hyperebene, die parallel zu einem der H_i ist und T und $\{q\}$ streng trennt. Dann ist P nicht in der konvexen Hülle von P enthalten.

Beweis.

Wegen Satz 10.4 gibt es eine β-Box B_P, die P enthält und disjunkt zu $\{q\}$ ist. Es folgt $\{q\} \cap \mathrm{conv}P \subset \{q\} \cap B_P = \emptyset$, also $q \notin \mathrm{conv}P$. $\square$

Danke für die Aufmerksamkeit!