Der Endlichkeitssatz von Serre über die Homotopiegruppen der Sphären

Tim Baumann

Universität Augsburg

4. Februar 2016

Sei X ein wegzusammenhängender topol. Raum mit Basispunkt x_0.

Def. Die *i-te Homotopiegruppe* von X ist

$$\pi_i(X) := [(S^i, *), (X, x_0)] = \frac{\{\text{ basispunkterh. stetige Abb. } S^i \to X \text{ }\}}{\text{basispunkterh. Homotopie}}.$$

Sei X ein wegzusammenhängender topol. Raum mit Basispunkt x_0.

Def. Die *i-te Homotopiegruppe* von X ist

$$\pi_i(X) := [(S^i, *), (X, x_0)] = \frac{\{\text{ basispunkterh. stetige Abb. } S^i \to X \text{ }\}}{\text{basispunkterh. Homotopie}}.$$

Ziel. $\pi_i(S^n)$ studieren

Sei X ein wegzusammenhängender topol. Raum mit Basispunkt x_0.

Def. Die i-te Homotopiegruppe von X ist

$$\pi_i(X) := [(S^i, *), (X, x_0)] = \frac{\{\text{ basispunkterh. stetige Abb. } S^i \to X \text{ }\}}{\text{basispunkterh. Homotopie}}.$$

Ziel. $\pi_i(S^n)$ studieren

Methode. Verwende den Hurewicz-Homomorphismus

$$h_i : \pi_i(X) \to H_i(X), \quad [f : S^i \to X] \mapsto f_*(\alpha),$$

wobei $\alpha \in H_i(S^i)$ ein fester Erzeuger ist, und

Satz (Hurewicz-Thm). Sei $n \geq 2$.
Angenommen, $\pi_i(X) = 0$ für $i < n$.
Dann gilt $\widetilde{H}_i(X) = 0$ für $i < n$
und $h_n : \pi_n(X) \to H_n(X)$ ist ein Isomorphismus.

Sei X ein wegzusammenhängender topol. Raum mit Basispunkt x_0.

Def. Die i-te Homotopiegruppe von X ist

$$\pi_i(X) := [(S^i, *), (X, x_0)] = \frac{\{\text{ basispunkterh. stetige Abb. } S^i \to X \text{ }\}}{\text{basispunkterh. Homotopie}}.$$

Ziel. $\pi_i(S^n)$ studieren

Methode. Verwende den Hurewicz-Homomorphismus

$$h_i : \pi_i(X) \to H_i(X), \quad [f : S^i \to X] \mapsto f_*(\alpha),$$

wobei $\alpha \in H_i(S^i)$ ein fester Erzeuger ist, und

Satz (Hurewicz-Thm). Sei $n \geq 2$.
Angenommen, $\pi_i(X) = 0$ für $i < n$.
Dann gilt $\widetilde{H}_i(X) = 0$ für $i < n$
und $h_n : \pi_n(X) \to H_n(X)$ ist ein Isomorphismus.

Kor. $\pi_i(S^n) = 0$ für $i < n$, $\quad \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ für $n \geq 2$.

Satz (Jean-Pierre Serre, 1951).
Die Gruppen $\pi_i(S^n)$, $i > n$, sind endlich bis auf die Gruppen $\pi_{2n-1}(S^n)$ für $n \geq 2$ gerade, welche isomorph zur direkten Summe von $\mathbb{Z}$ und einer endlichen Gruppe sind.

Satz (Jean-Pierre Serre, 1951).
Die Gruppen $\pi_i(S^n)$, $i > n$, sind endlich bis auf die Gruppen $\pi_{2n-1}(S^n)$ für $n \geq 2$ gerade, welche isomorph zur direkten Summe von $\mathbb{Z}$ und einer endlichen Gruppe sind.

Bsp. Die Hopf-Faserung $\eta : S^3 \to S^2$ ist ein Element der Ordnung unendlich in $\pi_3(S^2)$.

Erste Verallgemeinerung: Serre-Klassen

Def. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von abelschen Gruppen heißt Serre-Klasse, falls

(I) Für jede kurze exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ von abelschen Gruppen gilt:

$$B \in \mathcal{C} \iff A, C \in \mathcal{C}.$$

(II) Für $A, B \in \mathcal{C}$ sind auch $A \otimes B \in \mathcal{C}$ und $\mathrm{Tor}(A, B) \in \mathcal{C}$.

Axiom.

(III) Es sei $G \in \mathcal{C}$. Dann ist $\widetilde{H}_i(K(G, n)) \in \mathcal{C}$ für alle $n \geq 1$, $i \geq 0$.

Erste Verallgemeinerung: Serre-Klassen

Def. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von abelschen Gruppen heißt Serre-Klasse, falls

(I) Für jede kurze exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ von abelschen Gruppen gilt:

$$B \in \mathcal{C} \iff A, C \in \mathcal{C}.$$

(II) Für $A, B \in \mathcal{C}$ sind auch $A \otimes B \in \mathcal{C}$ und $\mathrm{Tor}(A, B) \in \mathcal{C}$.

Axiom.

(III) Es sei $G \in \mathcal{C}$. Dann ist $\widetilde{H}_i(K(G, n)) \in \mathcal{C}$ für alle $n \geq 1$, $i \geq 0$.

Lem/Bspe. Folgendes sind Serre-Klassen, die Axiom (III) erfüllen:

a) $\mathcal{T}_P := \left\{ \begin{array}{l} \text{endl. ab. Gruppen, deren Ordnung ein Produkt} \\ \text{von Primzahlen in } P \subseteq \mathbb{P} \text{ ist} \end{array} \right\}$,

b) $\mathcal{F} := \mathcal{T}_{\mathbb{P}} = \{\text{endliche abelsche Gruppen}\}$

c) $\mathcal{FG} := \{\text{endlich erzeugte abelsche Gruppen}\}$

Erste Verallgemeinerung: Serre-Klassen

Satz (Hurewicz-mod-$\mathcal{C}$-Thm). Es sei $n \geq 2$.
Es sei $\mathcal{C}$ eine Serre-Klasse, die (III) erfüllt.
Es sei X ein einfach zusammenhängender topologischer Raum.

Angenommen,	$\pi_i(X) \in \mathcal{C}$ für $i < n$.
Dann gilt	$\widetilde{H}_i(X) \in \mathcal{C}$ für $i < n$
und	$h_n : \pi_n(X) \to H_n(X)$ ist ein Isomor. modulo $\mathcal{C}$,
	d. h. $\ker(h_n) \in \mathcal{C}$ und $\operatorname{coker}(h_n) \in \mathcal{C}$.

Erste Verallgemeinerung: Serre-Klassen

Satz (Hurewicz-mod-$\mathcal{C}$-Thm). Es sei $n \geq 2$.
Es sei $\mathcal{C}$ eine Serre-Klasse, die (III) erfüllt.
Es sei X ein einfach zusammenhängender topologischer Raum.

Angenommen,	$\pi_i(X) \in \mathcal{C}$ für $i < n$.
Dann gilt	$\widetilde{H}_i(X) \in \mathcal{C}$ für $i < n$
und	$h_n : \pi_n(X) \to H_n(X)$ ist ein Isomor. modulo $\mathcal{C}$,
	d. h. $\ker(h_n) \in \mathcal{C}$ und $\operatorname{coker}(h_n) \in \mathcal{C}$.

Kor. Sei $n \geq 2$. Dann sind die Homotopiegruppen $\pi_i(S^n)$, $i \geq 1$ endlich erzeugt.

Zweite Verallgemeinerung: Relativität

Satz (relatives Hurewicz-mod-$\mathcal{C}$-Thm). Es sei $n \geq 2$.
Es sei $\mathcal{C}$ eine Serre-Klasse, die (III) erfüllt.
Es sei (X, A) ein einfach zusammenhängendes Raumpaar mit
$A \neq \emptyset$ und A einfach zusammenhängend.

Angenommen,	$\pi_i(X, A) \in \mathcal{C}$ für $i < n$.
Dann gilt	$H_i(X, A) \in \mathcal{C}$ für $i < n$
und	$h_n : \pi_n(X, A) \to H_n(X, A)$ ist ein Isomor. modulo $\mathcal{C}$.

Zweite Verallgemeinerung: Relativität

Satz (relatives Hurewicz-mod-$\mathcal{C}$-Thm). Es sei $n \geq 2$.
Es sei $\mathcal{C}$ eine Serre-Klasse, die (III) erfüllt.
Es sei (X, A) ein einfach zusammenhängendes Raumpaar mit $A \neq \emptyset$ und A einfach zusammenhängend.

Angenommen,	$\pi_i(X, A) \in \mathcal{C}$	für $i < n$.
Dann gilt	$H_i(X, A) \in \mathcal{C}$	für $i < n$
und	$h_n : \pi_n(X, A) \to H_n(X, A)$ ist ein Isomor. modulo $\mathcal{C}$.	

Kor. Es sei $f : A \to B$ stetig, A und B nichtleer und einfach zusammenhängend. Dann sind äquivalent:

a) $f_* : \pi_i(A) \to \pi_i(B)$ ist ein Isomorphismus mod $\mathcal{C}$ für $i < n$
und ein Epimorphismus mod $\mathcal{C}$ für $i = n$.

b) $f_* : H_i(A) \to H_i(B)$ ist ein Isomorphismus mod $\mathcal{C}$ für $i < n$
und ein Epimorphismus mod $\mathcal{C}$ für $i = n$.