

Gibbs-Sampling mit Metropolis-Hastings-Schritt für Threshold-VAR-Modelle und stochastische Volatilitätsmodelle

Tim Baumann

timbaumann.info/gibbs-her

29. April 2016

- ① Das Threshold-VAR-Modell
Bayessche Inferenz (mit Random-Walk-MH)
- ② Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenverteilung
- ③ Das stochastische Volatilitätsmodell
Bayessche Inferenz (mit unabhängigem MH)
- ④ Erweiterte Version des stochastischen Volatilitätsmodells
Bayessche Inferenz (mit unabhängigem MH)

Das Threshold-VAR-Modell

$$(TVAR) \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^P \beta_1 Y_{t-j} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^P \beta_2 Y_{t-j} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_2) & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

$$Y_t, v_t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^N, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad Y^* \in \mathbb{R}$$

Dabei wird die Threshold-Komponente j von Y und die Verzögerung d vom Anwender gewählt.

Das Threshold-VAR-Modell

$$(TVAR) \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^P \beta_1 Y_{t-j} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^P \beta_2 Y_{t-j} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_2) & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

$$Y_t, v_t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^N, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad Y^* \in \mathbb{R}$$

Dabei wird die Threshold-Komponente j von Y und die Verzögerung d vom Anwender gewählt.

Beispiel

Makroökonomische Modellierung, wobei vermutet wird, dass die Stärke wirtschaftlicher Zusammenhänge (z. B. Multiplikator für Staatsausgaben) in Wirtschaftskrisen unterschiedlich groß ist wie in wirtschaftlich normalen oder guten Zeiten.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = \mathbf{c}_1 + \sum_{j=1}^P \beta_1 Y_{t-j} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = \mathbf{c}_2 + \sum_{j=1}^P \beta_2 Y_{t-j} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = \mathbf{c}_1 + \sum_{j=1}^P \beta_1 Y_{t-j} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = \mathbf{c}_2 + \sum_{j=1}^P \beta_2 Y_{t-j} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

Prior-Verteilung

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$\begin{aligned}
 \text{(TVAR)} \quad & \begin{cases} Y_t = \mathbf{c}_1 + \sum_{j=1}^P \beta_1 Y_{t-j} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = \mathbf{c}_2 + \sum_{j=1}^P \beta_2 Y_{t-j} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases} \\
 & \text{wobei } S_t := Y_{j,t-d} \text{ (Threshold-Variable)}
 \end{aligned}$$

Prior-Verteilung

- Für den Threshold: $p(Y^*) \sim \mathcal{N}(\bar{Y}^*, \sigma_{Y^*})$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$\begin{aligned}
 \text{(TVAR)} \quad & \begin{cases} Y_t = \mathbf{c}_1 + \sum_{j=1}^P \beta_1 Y_{t-j} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = \mathbf{c}_2 + \sum_{j=1}^P \beta_2 Y_{t-j} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases} \\
 & \text{wobei } S_t := Y_{j,t-d} \text{ (Threshold-Variable)}
 \end{aligned}$$

Prior-Verteilung

- Für den Threshold: $p(Y^*) \sim \mathcal{N}(\bar{Y}^*, \sigma_{Y^*})$
- Für die VAR-Parameter $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^{(1+NP) \cdot N}$ und $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ verwenden wir die Normal-Inverse-Wishart-Verteilung mit Dummy-Observations $X_{D,i} \in \mathbb{R}^{k_i \times (1+NP)}$, $Y_{D,i} \in \mathbb{R}^{k_i \times N}$ ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{b}_i | \Omega_i) &\sim \mathcal{N}(\text{vec}(B_{D,i}), \Omega_i \otimes (X_{D,i}^T X_{D,i})^{-1}), \\
 p(\Omega_i) &\sim \mathcal{IW}(S_{D,i}, T_{D,i})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{wobei} \quad B_{D,i} &:= (X_{D,i}^T X_{D,i})^{-1} (X_{D,i} Y_{D,i}) \in \mathbb{R}^{(1+NP) \times N} \\
 S_{D,i} &:= (Y_{D,i} - X_{D,i} B_{D,i})^T (Y_{D,i} - X_{D,i} B_{D,i}) \in \mathbb{R}^{N \times N}
 \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

- A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Threshold γ^*
(z. B. den Durchschnitt oder den Median der Werte S_t)

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

- A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*
(z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)
- B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

- A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Threshold Y^*
(z. B. den Durchschnitt oder den Median der Werte S_t)
- B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
 1. Sample die **VAR-Parameter** gegeben dem Threshold Y^* :

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

- A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Threshold Y^*
(z. B. den Durchschnitt oder den Median der Werte S_t)
- B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
 1. Sample die **VAR-Parameter** gegeben dem Threshold Y^* :
 - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

- A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Threshold Y^*
(z. B. den Durchschnitt oder den Median der Werte S_t)
- B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
1. Sample die **VAR-Parameter** gegeben dem Threshold Y^* :
 - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
 - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Threshold Y^*

(z. B. den Durchschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die **VAR-Parameter** gegeben dem Threshold Y^* :

- Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
- Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
- Ziehe b_1 , b_2 , Ω_1 , Ω_2 aus der Full-Conditional-Verteilung

$$\begin{aligned} p(b_i | \Omega_i, Y_{i,t}) &\sim \mathcal{N}(\text{vec}(B_i^*), \Omega_i \otimes ((X_i^*)^T X_i^*)^{-1}), \\ p(\Omega_i | b_i, Y_{i,t}) &\sim \mathcal{IW}(S_i^*, T_i^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } B_i^* &:= ((X_i^*)^T X_i^*)^{-1} (X_i^{*T} Y_i^*) \\ S_i^* &:= (Y_i^* - X_i^{*T} B_i^*)^T (Y_i^* - X_i^{*T} B_i^*) \\ Y_i^* &:= [Y_{i,t}, Y_{D,i}] \quad (\text{echte} + \text{Dummy-Daten}) \\ X_i^* &:= [X_{i,t}, X_{D,i}] \quad (\text{echte} + \text{Dummy-Daten}) \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

- A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Threshold Y^*
(z. B. den Durchschnitt oder den Median der Werte S_t)
- B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
1. Sample die **VAR-Parameter** gegeben dem Threshold Y^* :
 - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
 - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
 - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i | \Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i | b_i, Y_{i,t})$.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

- A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Threshold Y^*
(z. B. den Durchschnitt oder den Median der Werte S_t)
- B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
1. Sample die **VAR-Parameter** gegeben dem Threshold Y^* :
 - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
 - Seien $Y_{1,t}, X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}, X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
 - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i | \Omega_i, Y_{i,t}), p(\Omega_i | b_i, Y_{i,t})$.
 2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

- A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Threshold Y^*
(z. B. den Durchschnitt oder den Median der Werte S_t)
- B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
1. Sample die **VAR-Parameter** gegeben dem Threshold Y^* :
 - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
 - Seien $Y_{1,t}, X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}, X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
 - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i | \Omega_i, Y_{i,t}), p(\Omega_i | b_i, Y_{i,t})$.
 2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
 - Generiere einen Kandidaten Y_{new}^* durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y_{\text{new}}^* := Y_{\text{old}}^* + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

- A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Threshold Y^*
(z. B. den Durchschnitt oder den Median der Werte S_t)
- B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
1. Sample die **VAR-Parameter** gegeben dem Threshold Y^* :
 - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
 - Seien $Y_{1,t}, X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}, X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
 - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i | \Omega_i, Y_{i,t}), p(\Omega_i | b_i, Y_{i,t})$.
 2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
 - Generiere einen Kandidaten Y_{new}^* durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y_{\text{new}}^* := Y_{\text{old}}^* + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

- Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G | \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} | \phi^G)}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

- A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Threshold Y^*
(z. B. den Durchschnitt oder den Median der Werte S_t)
- B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
1. Sample die **VAR-Parameter** gegeben dem Threshold Y^* :
 - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
 - Seien $Y_{1,t}, X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}, X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
 - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i | \Omega_i, Y_{i,t}), p(\Omega_i | b_i, Y_{i,t})$.
 2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
 - Generiere einen Kandidaten Y_{new}^* durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y_{\text{new}}^* := Y_{\text{old}}^* + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

- Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G | \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} | \phi^G)} = \frac{p(Y_{\text{new}}^* | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y_{\text{old}}^* | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

- A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Threshold Y^*
(z. B. den Durchschnitt oder den Median der Werte S_t)
- B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
1. Sample die **VAR-Parameter** gegeben dem Threshold Y^* :
 - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
 - Seien $Y_{1,t}, X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}, X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
 - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i | \Omega_i, Y_{i,t}), p(\Omega_i | b_i, Y_{i,t})$.
 2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
 - Generiere einen Kandidaten Y_{new}^* durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y_{\text{new}}^* := Y_{\text{old}}^* + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

- Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$\begin{aligned} r &= \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G | \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} | \phi^G)} = \frac{p(Y_{\text{new}}^* | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y_{\text{old}}^* | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)} \\ &= \frac{p(Y_t | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_{\text{new}}^*) \cdot p(Y_{\text{new}}^*)}{p(Y_t | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_{\text{old}}^*) \cdot p(Y_{\text{old}}^*)} \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Threshold Y^*

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die **VAR-Parameter** gegeben dem Threshold Y^* :

- Seien $Y_{1,t}, X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}, X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
- Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i | \Omega_i, Y_{i,t}), p(\Omega_i | b_i, Y_{i,t})$.

2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:

- Generiere einen Kandidaten Y_{new}^* durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y_{\text{new}}^* := Y_{\text{old}}^* + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

- Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$\begin{aligned} r &= \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G | \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} | \phi^G)} = \frac{p(Y_{\text{new}}^* | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y_{\text{old}}^* | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)} \\ &= \frac{p(Y_t | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_{\text{new}}^*) \cdot p(Y_{\text{new}}^*)}{p(Y_t | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_{\text{old}}^*) \cdot p(Y_{\text{old}}^*)} \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Threshold Y^*

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die **VAR-Parameter** gegeben dem Threshold Y^* :

- Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
- Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i | \Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i | b_i, Y_{i,t})$.

2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:

- Generiere einen Kandidaten Y_{new}^* durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y_{\text{new}}^* := Y_{\text{old}}^* + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

- Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$\begin{aligned} r &= \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G | \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} | \phi^G)} = \frac{p(Y_{\text{new}}^* | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y_{\text{old}}^* | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)} \\ &= \frac{p(Y_t | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_{\text{new}}^*) \cdot p(Y_{\text{new}}^*)}{p(Y_t | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_{\text{old}}^*) \cdot p(Y_{\text{old}}^*)} \end{aligned}$$

$$p(Y_t | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*) = p(Y_{1,t} | b_1, \Omega_1, Y^*) \cdot p(Y_{2,t} | b_2, \Omega_2, Y^*)$$

$$\log p(Y_{i,t} | b_i, \Omega_i, Y^*) = C + \frac{T}{2} \log |\Omega_i^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (Y_{i,t} - X_{i,t} \tilde{b}_i)^T \Omega_i^{-1} (Y_{i,t} - X_{i,t} \tilde{b}_i)$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Threshold Y^*

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die **VAR-Parameter** gegeben dem Threshold Y^* :

- Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
- Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i | \Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i | b_i, Y_{i,t})$.

2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:

- Generiere einen Kandidaten Y_{new}^* durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y_{\text{new}}^* := Y_{\text{old}}^* + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

- Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$\begin{aligned} r &= \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G | \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} | \phi^G)} = \frac{p(Y_{\text{new}}^* | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y_{\text{old}}^* | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)} \\ &= \frac{p(Y_t | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_{\text{new}}^*) \cdot p(Y_{\text{new}}^*)}{p(Y_t | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_{\text{old}}^*) \cdot p(Y_{\text{old}}^*)} \end{aligned}$$

$$p(Y_t | b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*) = p(Y_{1,t} | b_1, \Omega_1, Y^*) \cdot p(Y_{2,t} | b_2, \Omega_2, Y^*)$$

$$\log p(Y_{i,t} | b_i, \Omega_i, Y^*) = C + \frac{T}{2} \log |\Omega_i^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (Y_{i,t} - X_{i,t} \tilde{b}_i)^T \Omega_i^{-1} (Y_{i,t} - X_{i,t} \tilde{b}_i)$$

- Ziehe $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Akzeptiere Y_{new}^* , falls $u < \alpha$, ansonsten behalte Y_{old}^* .

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi)$

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi)$

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Vorschlagsdichte

$$q(\Phi^{G+1} | \Phi^G)$$

Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} | \Phi^G)}{\pi(\Phi^G)/q(\Phi^G | \Phi^{G+1})}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und man akzeptiert Φ^{G+1} , falls $u < \alpha$.
Ansonsten behält man Φ^G .

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi) \propto f(\Phi) \cdot g(\Phi)$
(wobei f eine wohlbekannte Wahrscheinlichkeitsdichte ist)

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Vorschlagsdichte

$$q(\Phi^{G+1} | \Phi^G)$$

Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} | \Phi^G)}{\pi(\Phi^G)/q(\Phi^G | \Phi^{G+1})}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und man akzeptiert Φ^{G+1} , falls $u < \alpha$.
Ansonsten behält man Φ^G .

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi) \propto f(\Phi) \cdot g(\Phi)$
(wobei f eine wohlbekannte Wahrscheinlichkeitsdichte ist)

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Vorschlagsdichte

$$q(\Phi^{G+1} | \Phi^G) := f(\Phi^{G+1}) \quad (\text{unabhängig von } \Phi^G!)$$

Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} | \Phi^G)}{\pi(\Phi^G)/q(\Phi^G | \Phi^{G+1})}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und man akzeptiert Φ^{G+1} , falls $u < \alpha$.
Ansonsten behält man Φ^G .

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi) \propto f(\Phi) \cdot g(\Phi)$
(wobei f eine wohlbekannte Wahrscheinlichkeitsdichte ist)

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Vorschlagsdichte

$$q(\Phi^{G+1} | \Phi^G) := f(\Phi^{G+1}) \quad (\text{unabhängig von } \Phi^G!)$$

Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} | \Phi^G)}{\pi(\Phi^G)/q(\Phi^G | \Phi^{G+1})} = \frac{f(\Phi^{G+1}) \cdot g(\Phi^{G+1})/f(\Phi^{G+1})}{f(\Phi^G) \cdot g(\Phi^G)/f(\Phi^G)}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und man akzeptiert Φ^{G+1} , falls $u < \alpha$.
Ansonsten behält man Φ^G .

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi) \propto f(\Phi) \cdot g(\Phi)$
(wobei f eine wohlbekannte Wahrscheinlichkeitsdichte ist)

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Vorschlagsdichte

$$q(\Phi^{G+1} | \Phi^G) := f(\Phi^{G+1}) \quad (\text{unabhängig von } \Phi^G!)$$

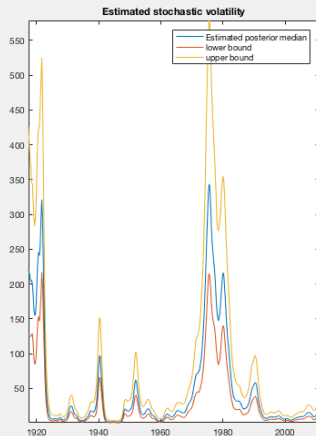
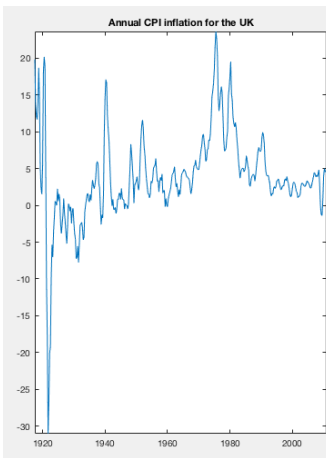
Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} | \Phi^G)}{\pi(\Phi^G)/q(\Phi^G | \Phi^{G+1})} = \frac{f(\Phi^{G+1}) \cdot g(\Phi^{G+1})/f(\Phi^{G+1})}{f(\Phi^G) \cdot g(\Phi^G)/f(\Phi^G)} = \frac{g(\Phi^{G+1})}{g(\Phi^G)}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und man akzeptiert Φ^{G+1} , falls $u < \alpha$.
Ansonsten behält man Φ^G .

Das stochastische Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), & t &= 1, \dots, T & \text{(Beobachtungsgl.)} \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), & t &= 1, \dots, T & \text{(Zustandsgl.)} \end{aligned}$$



Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$.

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned}y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T\end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) = f(h_0 \mid h_1, g)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned}y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T\end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned}f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) &= f(h_0 \mid h_1, g) \\ &\propto f(h_0) \cdot f(h_1 \mid h_0, g)\end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned}y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T\end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned}f(h_0 | h_{-0}, g, \vec{y}) &= f(h_0 | h_1, g) \\ &\propto f(h_0) \cdot f(h_1 | h_0, g)\end{aligned}$$

$$f(h_{s+1} | h_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \frac{1}{h_{s+1}} \exp\left(\frac{-(\ln h_{s+1} - \ln h_s)^2}{2g}\right) \quad (\text{Log. Normalvert.})$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 | h_{-0}, g, \vec{y}) &= f(h_0 | h_1, g) \\ &\propto f(h_0) \cdot f(h_1 | h_0, g) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \bar{\mu})^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) \cdot \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_1 - \ln h_0)^2}{2g}\right) \end{aligned}$$

$$f(h_{s+1} | h_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}g} \frac{1}{h_{s+1}} \exp\left(\frac{-(\ln h_{s+1} - \ln h_s)^2}{2g}\right) \quad (\text{Log. Normalvert.})$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 | h_{-0}, g, \vec{y}) &= f(h_0 | h_1, g) \\ &\propto f(h_0) \cdot f(h_1 | h_0, g) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{\bar{\sigma}^2}} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \bar{\mu})^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) \cdot \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_1 - \ln h_0)^2}{2g}\right) \\ &\propto \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ &\quad \text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\bar{\sigma}^2 g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right) \end{aligned}$$

$$f(h_{s+1} | h_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \frac{1}{h_{s+1}} \exp\left(\frac{-(\ln h_{s+1} - \ln h_s)^2}{2g}\right) \quad (\text{Log. Normalvert.})$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 | h_{-0}, g, \vec{y}) &= f(h_0 | h_1, g) \\ &\propto f(h_0) \cdot f(h_1 | h_0, g) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{\bar{\sigma}^2}} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \bar{\mu})^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) \cdot \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_1 - \ln h_0)^2}{2g}\right) \\ &\propto \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ &\quad \text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\bar{\sigma}^2 g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right) \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) &\propto \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0}\right) \\ \text{mit } \sigma_0^2 &:= \frac{\bar{\sigma}^2 g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right) \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned}y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T\end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned}f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ \text{mit } \sigma_0^2 &:= \frac{\bar{\sigma}^2 g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right)\end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 | h_{-0}, g, \vec{y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(-\frac{(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ \text{mit } \sigma_0^2 &:= \frac{\bar{\sigma}^2 g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right) \end{aligned}$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T-1$ gilt:

$$f(h_t | h_{-t}, \vec{y}, g) = f(h_t | h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 | h_{-0}, g, \vec{y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(-\frac{(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ \text{mit } \sigma_0^2 &:= \frac{\bar{\sigma}^2 g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right) \end{aligned}$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T-1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t | h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t | h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\ &\propto f(y_t | h_t, g) \cdot f(h_{t+1} | h_t, g) \cdot f(h_t | h_{t-1}, g) \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 | h_{-0}, g, \vec{y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ \text{mit } \sigma_0^2 &:= \frac{\bar{\sigma}^2 g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right) \end{aligned}$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T-1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t | h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t | h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\ &\propto f(y_t | h_t, g) \cdot f(h_{t+1} | h_t, g) \cdot f(h_t | h_{t-1}, g) \end{aligned}$$

$$f(y_t | h_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(\frac{-y_t^2}{2h_t}\right) \quad (\text{Normalverteilung})$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 | h_{-0}, g, \vec{y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(-\frac{(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ \text{mit } \sigma_0^2 &:= \frac{\bar{\sigma}^2 g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right) \end{aligned}$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T-1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t | h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t | h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\ &\propto f(y_t | h_t, g) \cdot f(h_{t+1} | h_t, g) \cdot f(h_t | h_{t-1}, g) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \\ \text{mit } \mu_t &:= \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t^2 := \frac{1}{2}g \end{aligned}$$

$$f(y_t | h_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \quad (\text{Normalverteilung})$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 | h_{-0}, g, \vec{y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(-\frac{(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ \text{mit } \sigma_0^2 &:= \frac{\bar{\sigma}^2 g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right) \end{aligned}$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T-1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t | h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t | h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\ &\propto f(y_t | h_t, g) \cdot f(h_{t+1} | h_t, g) \cdot f(h_t | h_{t-1}, g) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \\ \text{mit } \mu_t &:= \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t^2 := \frac{1}{2}g \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 | h_{-0}, g, \vec{y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(-\frac{(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ \text{mit } \sigma_0^2 &:= \frac{\bar{\sigma}^2 g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right) \end{aligned}$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T-1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t | h_{-t}, \vec{y}, g) &\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \\ \text{mit } \mu_t &:= \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t^2 := \frac{1}{2}g \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 | h_{-0}, g, \vec{y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(-\frac{(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ \text{mit } \sigma_0^2 &:= \frac{\bar{\sigma}^2 g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right) \end{aligned}$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T-1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t | h_{-t}, \vec{y}, g) &\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \\ \text{mit } \mu_t &:= \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t^2 := \frac{1}{2}g \end{aligned}$$

Für die letzte Volatilitätsvariable h_T gilt

$$f(h_T | h_{-T}, \vec{y}, g) = f(h_T, h_{T-1}, y_T, g)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 | h_{-0}, g, \vec{y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(-\frac{(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ \text{mit } \sigma_0^2 &:= \frac{\bar{\sigma}^2 g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right) \end{aligned}$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T-1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t | h_{-t}, \vec{y}, g) &\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \\ \text{mit } \mu_t &:= \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t^2 := \frac{1}{2}g \end{aligned}$$

Für die letzte Volatilitätsvariable h_T gilt

$$\begin{aligned} f(h_T | h_{-T}, \vec{y}, g) &= f(h_T, h_{T-1}, y_T, g) \\ &\propto f(y_T | h_T) \cdot f(h_T | h_{T-1}) \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 | h_{-0}, g, \vec{y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(-\frac{(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ \text{mit } \sigma_0^2 &:= \frac{\bar{\sigma}^2 g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right) \end{aligned}$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T-1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t | h_{-t}, \vec{y}, g) &\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \\ \text{mit } \mu_t &:= \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t^2 := \frac{1}{2}g \end{aligned}$$

Für die letzte Volatilitätsvariable h_T gilt

$$\begin{aligned} f(h_T | h_{-T}, \vec{y}, g) &= f(h_T, h_{T-1}, y_T, g) \\ &\propto f(y_T | h_T) \cdot f(h_T | h_{T-1}) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{h_T}} \exp\left(-\frac{y_T^2}{2h_T}\right) \cdot \frac{1}{h_T} \exp\left(-\frac{(\ln h_T - \mu_T)^2}{2\sigma_T^2}\right) \\ \text{mit } \mu_T &:= \ln h_{T-1}, \quad \sigma_T^2 := g \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 | h_{-0}, g, \vec{y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(-\frac{(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ \text{mit } \sigma_0^2 &:= \frac{\bar{\sigma}^2 g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right) \end{aligned}$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T-1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t | h_{-t}, \vec{y}, g) &\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \\ \text{mit } \mu_t &:= \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t^2 := \frac{1}{2}g \end{aligned}$$

Für die letzte Volatilitätsvariable h_T gilt

$$\begin{aligned} f(h_T | h_{-T}, \vec{y}, g) &\propto \frac{1}{\sqrt{h_T}} \exp\left(-\frac{y_T^2}{2h_T}\right) \cdot \frac{1}{h_T} \exp\left(-\frac{(\ln h_T - \mu_T)^2}{2\sigma_T^2}\right) \\ \text{mit } \mu_T &:= \ln h_{T-1}, \quad \sigma_T^2 := g \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

- A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$
- B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T und g

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

- A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$
- B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T und g
- C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

- A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$
- B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T und g
- C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
 1. Führe einen Metropolis-Hastings-Schritt für h_0, \dots, h_T aus:

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

- A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$
- B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T und g
- C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
1. Führe einen Metropolis-Hastings-Schritt für h_0, \dots, h_T aus:
 - Ziehe h_0 neu aus der logarithmischen Normalverteilung

$$f(h_0 | h_1, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(-\frac{(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad \sigma_0^2 := \frac{\bar{\sigma}g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

- A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$
- B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T und g
- C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
 1. Führe einen Metropolis-Hastings-Schritt für h_0, \dots, h_T aus:

- Ziehe h_0 neu aus der logarithmischen Normalverteilung

$$f(h_0 | h_1, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad \sigma_0^2 := \frac{\bar{\sigma}g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

- Für $t = 1, \dots, T$ ziehe einen Kandidaten $h_{t,\text{new}}$ gemäß der log. Normalverteilung

$$q(h_{t,\text{new}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \frac{1}{h_{t,\text{new}}} \exp\left(\frac{-(\ln h_{t,\text{new}} - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

mit μ_t und σ_t wie auf der letzten Folie.

Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{h_{t,\text{new}}^{-0,5} \exp(-y_t^2/2h_{t,\text{new}})}{h_{t,\text{old}}^{-0,5} \exp(-y_t^2/2h_{t,\text{old}})}$$

Ziehe $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Akzeptiere $h_{t,\text{new}}$, falls $u < \alpha$, ansonsten behalte $h_{t,\text{old}}$.

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T und g

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Führe einen Metropolis-Hastings-Schritt für h_0, \dots, h_T aus:

- Ziehe h_0 neu aus der logarithmischen Normalverteilung

$$f(h_0 | h_1, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad \sigma_0^2 := \frac{\bar{\sigma}g}{\bar{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

- Für $t = 1, \dots, T$ ziehe einen Kandidaten $h_{t,\text{new}}$ gemäß der log. Normalverteilung

$$q(h_{t,\text{new}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \frac{1}{h_{t,\text{new}}} \exp\left(\frac{-(\ln h_{t,\text{new}} - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

mit μ_t und σ_t wie auf der letzten Folie.

Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{h_{t,\text{new}}^{-0,5} \exp(-y_t^2/2h_{t,\text{new}})}{h_{t,\text{old}}^{-0,5} \exp(-y_t^2/2h_{t,\text{old}})}$$

Ziehe $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Akzeptiere $h_{t,\text{new}}$, falls $u < \alpha$, ansonsten behalte $h_{t,\text{old}}$.

2. Sample g geg. h_0, \dots, h_T : Ziehe ein neues g aus der Full-Cond.-Verteilung $\mathcal{IG}(\frac{\tilde{g}}{2}, \frac{\tilde{\nu}}{2})$ mit $\tilde{g} := g_0 + \sum_{t=1}^T v_t = g_0 + \sum_{t=1}^T \ln h_t - \ln h_{t-1}$ und $\tilde{\nu} := \nu_0 + T$.

Erweiterte Version des stochastischen Volatilitätsmodells

$$\begin{aligned}y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), & t &= 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0, Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2 \times 2}\end{aligned}$$

Dabei ist $B_t = \begin{pmatrix} c_t \\ b_t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ der Vektor der AR-Koeffizienten.

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned}y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), & t &= 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0, Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2 \times 2}\end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned}y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), & t &= 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0, Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2 \times 2}\end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}\left(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2}\right), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$$

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned}y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), & t &= 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0, Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2 \times 2}\end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2}), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T , g , B_1, \dots, B_T und Q (benutze dazu Training-Daten)

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned}y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), & t &= 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0, Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2 \times 2}\end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2}), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T , g , B_1, \dots, B_T und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned}
 y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), & t &= 1, \dots, T \\
 \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \\
 B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0, Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2 \times 2}
 \end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2}), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T , g , B_1, \dots, B_T und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Aktualisiere h_0, \dots, h_T gegeben g und B_1, \dots, B_T :

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned}y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), & t &= 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0, Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2 \times 2}\end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2}), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T , g , B_1, \dots, B_T und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Aktualisiere h_0, \dots, h_T gegeben g und B_1, \dots, B_T :

- Ziehe h_0 neu (genau wie beim letzten Modell)

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), & t &= 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0, Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}\left(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2}\right), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T , g , B_1, \dots, B_T und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Aktualisiere h_0, \dots, h_T gegeben g und B_1, \dots, B_T :

- Ziehe h_0 neu (genau wie beim letzten Modell)
- Für $t = 1, \dots, T$ führe einen MH-Schritt für h_t aus. Die Details sind wie beim letzten Schritt mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt $y_t - c_t - b_t y_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t)$ gilt (anstatt $y_t \sim \mathcal{N}(0, h_t)$).

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), & t &= 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0, Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}\left(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2}\right), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T , g , B_1, \dots, B_T und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Aktualisiere h_0, \dots, h_T gegeben g und B_1, \dots, B_T :

- Ziehe h_0 neu (genau wie beim letzten Modell)
- Für $t = 1, \dots, T$ führe einen MH-Schritt für h_t aus. Die Details sind wie beim letzten Schritt mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt $y_t - c_t - b_t y_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t)$ gilt (anstatt $y_t \sim \mathcal{N}(0, h_t)$).

2. Ziehe g neu gegeben h_0, \dots, h_T (genau wie bisher)

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), & t &= 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0, Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}\left(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2}\right), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T , g , B_1, \dots, B_T und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Aktualisiere h_0, \dots, h_T gegeben g und B_1, \dots, B_T :
 - Ziehe h_0 neu (genau wie beim letzten Modell)
 - Für $t = 1, \dots, T$ führe einen MH-Schritt für h_t aus. Die Details sind wie beim letzten Schritt mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt $y_t - c_t - b_t y_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t)$ gilt (anstatt $y_t \sim \mathcal{N}(0, h_t)$).
2. Ziehe g neu gegeben h_0, \dots, h_T (genau wie bisher)
3. Aktualisiere B_1, \dots, B_T und Q gegeben h_0, \dots, h_T und g

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), & t &= 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0, Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2}), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T , g , B_1, \dots, B_T und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Aktualisiere h_0, \dots, h_T gegeben g und B_1, \dots, B_T :

- Ziehe h_0 neu (genau wie beim letzten Modell)
- Für $t = 1, \dots, T$ führe einen MH-Schritt für h_t aus. Die Details sind wie beim letzten Schritt mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt $y_t - c_t - b_t y_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t)$ gilt (anstatt $y_t \sim \mathcal{N}(0, h_t)$).

2. Ziehe g neu gegeben h_0, \dots, h_T (genau wie bisher)

3. Aktualisiere B_1, \dots, B_T und Q gegeben h_0, \dots, h_T und g

- Führe einen MH-Schritt für B_1, \dots, B_T aus wie im letzten Vortrag (einziger Unterschied: Varianz hängt jetzt von t ab).

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1), & t &= 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0, Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2}), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für h_0, \dots, h_T , g , B_1, \dots, B_T und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Aktualisiere h_0, \dots, h_T gegeben g und B_1, \dots, B_T :

- Ziehe h_0 neu (genau wie beim letzten Modell)
- Für $t = 1, \dots, T$ führe einen MH-Schritt für h_t aus. Die Details sind wie beim letzten Schritt mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt $y_t - c_t - b_t y_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t)$ gilt (anstatt $y_t \sim \mathcal{N}(0, h_t)$).

2. Ziehe g neu gegeben h_0, \dots, h_T (genau wie bisher)

3. Aktualisiere B_1, \dots, B_T und Q gegeben h_0, \dots, h_T und g

- Führe einen MH-Schritt für B_1, \dots, B_T aus wie im letzten Vortrag (einziger Unterschied: Varianz hängt jetzt von t ab).
- Ziehe ein neues Q aus seiner Full-Conditional-Verteilung $\mathcal{IW}(\tilde{S}, \tilde{T})$ mit $\tilde{S} = Q_0 + \sum_{t=1}^T (B_t - B_{t-1})^T (B_t - B_{t-1})$ und $\tilde{T} = T_0 + T$.