Gibbs-Sampling mit Metropolis-Hastings-Schritt für Threshold-VAR-Modelle und stochastische Volatilitätsmodelle

Tim Baumann

timbaumann.info/gibbs-her

29. April 2016

Das Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \;\; v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \;\; v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

$$\text{wobei } S_t := Y_{j,t-d} \;\; (\textit{Threshold-Variable})$$

$$Y_t, v_t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^N, \;\; \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}, \;\; \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}, \;\; Y^* \in \mathbb{R}$$

Dabei wird die Threshold-Komponente j von Y und die Verzögerung d vom Anwender gewählt.

Das Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)}\quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

$$Y_t, v_t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^N, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad Y^* \in \mathbb{R}$$

Dabei wird die Threshold-Komponente j von Y und die Verzögerung d vom Anwender gewählt.

Beispiel

Makroökonomische Modellierung, wobei vermutet wird, dass die Stärke wirtschaftlicher Zusammenhänge (z. B. Multiplikator für Staatsausgaben) in Wirtschaftkrisen unterschiedlich groß ist wie in wirtschaftlich normalen oder guten Zeiten.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \;\; v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \;\; v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \;\; v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \;\; v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

Prior-Verteilung

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

Prior-Verteilung

- Für den Threshold: $p(Y^*) \sim \mathcal{N}(\overline{Y}^*, \sigma_{Y^*})$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_1) & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

Prior-Verteilung

- Für den Threshold: $p(Y^*) \sim \mathcal{N}(\overline{Y}^*, \sigma_{Y^*})$
- Für die VAR-Parameter $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^{(1+NP)\cdot N}$ und $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ verwenden wir die Normal-Inverse-Wishart-Verteilung mit Dummy-Observations $X_{D,i} \in \mathbb{R}^{k_i\times(1+NP)}$, $Y_{D,i} \in \mathbb{R}^{k_i\times N}$ $(i = 1, 2)$:

$$p(b_i|\Omega_i) \sim \mathcal{N}(\text{vec}(B_{D,i}), \Omega_i \otimes (X_{D,i}^T X_{D,i})^{-1}),$$
$$p(\Omega_i) \sim \mathcal{IW}(S_{D,i}, T_{D,i})$$

wobei
$$B_{D,i} := (X_{D,i}^T X_{D,i})^{-1}(X_{D,i} Y_{D,i}) \in \mathbb{R}^{(1+NP)\times N}$$
$$S_{D,i} := (Y_{D,i} - X_{D,i} B_{D,i})^T (Y_{D,i} - X_{D,i} B_{D,i}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*
(z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*
(z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

   1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Conditional-Verteilung

$$\begin{aligned} p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t}) &\sim \mathcal{N}(\mathrm{vec}(B_i^*), \Omega_i \otimes ((X_i^*)^T X_i^*)^{-1}), \\ p(\Omega_i \mid b_i, Y_{i,t}) &\sim \mathcal{IW}(S_i^*, T_i^*) \end{aligned}$$

$$\text{wobei} \quad \begin{aligned} B_i^* &:= ((X_i^*)^T X_i^*)^{-1}(X_i^* Y_i^*) \\ S_i^* &:= (Y_i^* - X_i^* B_i^*)^T (Y_i^* - X_i^* B_i^*) \\ Y_i^* &:= [Y_{i,t}, Y_{D,i}] \quad \text{(echte + Dummy-Daten)} \\ X_i^* &:= [X_{i,t}, X_{D,i}] \quad \text{(echte + Dummy-Daten)} \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i \mid b_i, Y_{i,t})$.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i \mid b_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
    - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
    - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
    - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i \mid b_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
    - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\text{new}} := Y^*_{\text{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durchschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i \mid b_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\mathrm{new}} := Y^*_{\mathrm{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i \mid b_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\text{new}} := Y^*_{\text{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} = \frac{p(Y^*_{\text{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\text{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i \mid b_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\text{new}} := Y^*_{\text{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} = \frac{p(Y^*_{\text{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\text{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}$$

$$= \frac{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{new}}) \cdot p(Y^*_{\text{new}})}{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{old}}) \cdot p(Y^*_{\text{old}})}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i \mid b_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\text{new}} := Y^*_{\text{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$\begin{aligned} r &= \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} = \frac{p(Y^*_{\text{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\text{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)} \\ &= \frac{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{new}}) \cdot p(Y^*_{\text{new}})}{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{old}}) \cdot p(Y^*_{\text{old}})} \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i \mid b_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\text{new}} := Y^*_{\text{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} = \frac{p(Y^*_{\text{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\text{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}$$

$$= \frac{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{new}}) \cdot p(Y^*_{\text{new}})}{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{old}}) \cdot p(Y^*_{\text{old}})}$$

$$p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*) = p(Y_{1,t} \mid b_1, \Omega_1, Y^*) \cdot p(Y_{2,t} \mid b_2, \Omega_2, Y^*)$$

$$\log p(Y_{i,t} \mid b_i, \Omega_i, Y^*) = C - \frac{T}{2} \log|\Omega_i^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (Y_{i,t} - X_{i,t}\tilde{b}_i)^T \Omega_i^{-1} (Y_{i,t} - X_{i,t}\tilde{b}_i)$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \le Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Full-Cond.-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i \mid b_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\text{new}} := Y^*_{\text{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$\begin{aligned} r &= \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} = \frac{p(Y^*_{\text{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\text{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)} \\ &= \frac{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{new}}) \cdot p(Y^*_{\text{new}})}{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{old}}) \cdot p(Y^*_{\text{old}})} \end{aligned}$$

$$p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*) = p(Y_{1,t} \mid b_1, \Omega_1, Y^*) \cdot p(Y_{2,t} \mid b_2, \Omega_2, Y^*)$$

$$\log p(Y_{i,t} \mid b_i, \Omega_i, Y^*) = C - \frac{T}{2} \log|\Omega_i^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (Y_{i,t} - X_{i,t}\tilde{b}_i)^T \Omega_i^{-1} (Y_{i,t} - X_{i,t}\tilde{b}_i)$$

   - Ziehe $u \sim \mathcal{U}(0,1)$. Akzeptiere Y^*_{new}, falls $u < \alpha$, ansonsten behalte Y^*_{old}.

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi)$

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi)$

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Vorschlagsdichte

$$q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^{G})$$

Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^{G})}{\pi(\Phi^{G})/q(\Phi^{G} \mid \Phi^{G+1})}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0,1)$ und man akzeptiert Φ^{G+1}, falls $u < \alpha$. Ansonsten behält man Φ^{G}.

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi) \propto f(\Phi) \cdot g(\Phi)$
(wobei f eine wohlbekannte Wahrscheinlichkeitsdichte ist)

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Vorschlagsdichte

$$q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^{G})$$

Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^{G})}{\pi(\Phi^{G})/q(\Phi^{G} \mid \Phi^{G+1})}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0,1)$ und man akzeptiert Φ^{G+1}, falls $u < \alpha$.
Ansonsten behält man Φ^{G}.

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi) \propto f(\Phi) \cdot g(\Phi)$
(wobei f eine wohlbekannte Wahrscheinlichkeitsdichte ist)

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Vorschlagsdichte

$$q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^{G}) := f(\Phi^{G+1}) \qquad \text{(unabhängig von } \Phi^{G}\text{!)}$$

Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^{G})}{\pi(\Phi^{G})/q(\Phi^{G} \mid \Phi^{G+1})}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0,1)$ und man akzeptiert Φ^{G+1}, falls $u < \alpha$.
Ansonsten behält man Φ^{G}.

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi) \propto f(\Phi) \cdot g(\Phi)$
(wobei f eine wohlbekannte Wahrscheinlichkeitsdichte ist)

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Vorschlagsdichte

$$q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^G) := f(\Phi^{G+1}) \qquad \text{(unabhängig von } \Phi^G\text{!)}$$

Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^G)}{\pi(\Phi^G)/q(\Phi^G \mid \Phi^{G+1})} = \frac{f(\Phi^{G+1}) \cdot g(\Phi^{G+1})/f(\Phi^{G+1})}{f(\Phi^G) \cdot g(\Phi^G)/f(\Phi^G)}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0,1)$ und man akzeptiert Φ^{G+1}, falls $u < \alpha$.
Ansonsten behält man Φ^G.

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi) \propto f(\Phi) \cdot g(\Phi)$
(wobei f eine wohlbekannte Wahrscheinlichkeitsdichte ist)

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Vorschlagsdichte

$$q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^G) := f(\Phi^{G+1}) \qquad \text{(unabhängig von } \Phi^G\text{!)}$$

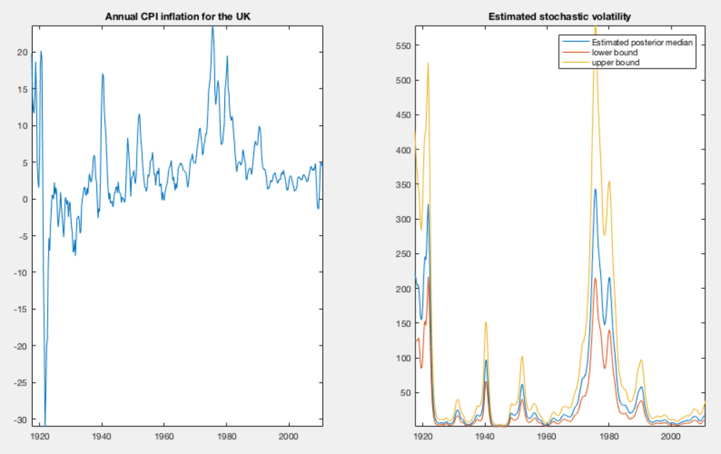
Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^G)}{\pi(\Phi^G)/q(\Phi^G \mid \Phi^{G+1})} = \frac{f(\Phi^{G+1}) \cdot g(\Phi^{G+1})/f(\Phi^{G+1})}{f(\Phi^G) \cdot g(\Phi^G)/f(\Phi^G)} = \frac{g(\Phi^{G+1})}{g(\Phi^G)}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0,1)$ und man akzeptiert Φ^{G+1}, falls $u < \alpha$.
Ansonsten behält man Φ^G.

Das stochastische Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1,\dots,T & &(\textit{Beobachtungsgl.})\\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & t &= 1,\dots,T & &(\textit{Zustandsgl.})
\end{aligned}
$$



Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1),\quad t = 1,\ldots,T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0,g),\quad t = 1,\ldots,T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$.

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) = f(h_0 \mid h_1, g)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1,\dots,T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & t &= 1,\dots,T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) &= f(h_0 \mid h_1, g) \\ &\propto f(h_0) \cdot f(h_1 \mid h_0, g) \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) &= f(h_0 \mid h_1, g) \\ &\propto f(h_0) \cdot f(h_1 \mid h_0, g) \end{aligned}$$

$$f(h_{s+1} \mid h_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \frac{1}{h_{s+1}} \exp\left(\frac{-(\ln h_{s+1} - \ln h_s)^2}{2g} \right) \qquad \text{(Log. Normalvert.)}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1,\ldots,T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & t &= 1,\ldots,T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) &= f(h_0 \mid h_1, g) \\ &\propto f(h_0) \cdot f(h_1 \mid h_0, g) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{\overline{\sigma}^2}} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \overline{\mu})^2}{2\overline{\sigma}^2}\right) \cdot \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_1 - \ln h_0)^2}{2g}\right) \end{aligned}$$

$$f(h_{s+1} \mid h_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \frac{1}{h_{s+1}} \exp\left(\frac{-(\ln h_{s+1} - \ln h_s)^2}{2g}\right) \qquad \text{(Log. Normalvert.)}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) &= f(h_0 \mid h_1, g) \\ &\propto f(h_0) \cdot f(h_1 \mid h_0, g) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{\overline{\sigma}^2}} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \overline{\mu})^2}{2\overline{\sigma}^2}\right) \cdot \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_1 - \ln h_0)^2}{2g}\right) \\ &\propto \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0}\right) \\ &\quad \text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma}^2 g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right) \end{aligned}$$

$$f(h_{s+1} \mid h_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \frac{1}{h_{s+1}} \exp\left(\frac{-(\ln h_{s+1} - \ln h_s)^2}{2g}\right) \qquad \text{(Log. Normalvert.)}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) &= f(h_0 \mid h_1, g) \\ &\propto f(h_0) \cdot f(h_1 \mid h_0, g) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{\overline{\sigma}^2}} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \overline{\mu})^2}{2\overline{\sigma}^2}\right) \cdot \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_1 - \ln h_0)^2}{2g}\right) \\ &\propto \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0}\right) \\ &\quad \text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma}^2 g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \;\; \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right) \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) \propto \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0} \right)$$

$$\text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma}^2 g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

$$\text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma}^2 g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$f(h_0 \,|\, h_{-0}, g, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} \right)$$

$$\text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma}^2 g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right)$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, , \dots T-1$ gilt:

$$f(h_t \,|\, h_{-t}, \vec{y}, g) = f(h_t \,|\, h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1,\dots,T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & t &= 1,\dots,T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

$$\text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma}^2 g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

Für die Zeitpunkte $t = 1,, \dots T-1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\ &\propto f(y_t \mid h_t, g) \cdot f(h_{t+1} \mid h_t, g) \cdot f(h_t \mid h_{t-1}, g) \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} \right)$$

$$\text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma}^2 g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g} \right)$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, , \dots T-1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\ &\propto f(y_t \mid h_t, g) \cdot f(h_{t+1} \mid h_t, g) \cdot f(h_t \mid h_{t-1}, g) \end{aligned}$$

$$f(y_t \mid h_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(\frac{-y_t^2}{2h_t} \right) \qquad \text{(Normalverteilung)}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$
$$\text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma}^2 g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, , \dots T-1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\ &\propto f(y_t \mid h_t, g) \cdot f(h_{t+1} \mid h_t, g) \cdot f(h_t \mid h_{t-1}, g) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \\ &\quad \text{mit } \mu_t := \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t^2 := \frac{1}{2} g \end{aligned}$$

$$f(y_t \mid h_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(\frac{-y_t^2}{2h_t}\right) \qquad \text{(Normalverteilung)}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, && \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1,\dots,T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, && v_t \sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1,\dots,T
\end{aligned}
$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$
f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)
$$

$$
\text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma}^2 g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)
$$

Für die Zeitpunkte $t = 1,,\dots T-1$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\
&\propto f(y_t \mid h_t, g) \cdot f(h_{t+1} \mid h_t, g) \cdot f(h_t \mid h_{t-1}, g) \\
&\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \\
&\ \text{mit } \mu_t := \tfrac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t^2 := \tfrac{1}{2} g
\end{aligned}
$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$f(h_0 \,|\, h_{-0}, g, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$
$$\text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma}^2 g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, , \dots T-1$ gilt:

$$f(h_t \,|\, h_{-t}, \vec{y}, g) \;\propto\; \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)$$
$$\text{mit } \mu_t := \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t^2 := \frac{1}{2} g$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

$$\text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma}^2 g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, , \ldots T-1$ gilt:

$$f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) \;\propto\; \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

$$\text{mit } \mu_t := \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t^2 := \frac{1}{2} g$$

Für die letzte Volatilitätsvariable h_T gilt

$$f(h_T \mid h_{-T}, \vec{y}, g) \;=\; f(h_T, h_{T-1}, y_T, g)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T
\end{aligned}
$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$
f(h_0 \,|\, h_{-0}, g, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)
$$

$$
\text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma}^2 g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)
$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, , \ldots T-1$ gilt:

$$
f(h_t \,|\, h_{-t}, \vec{y}, g) \;\propto\; \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)
$$

$$
\text{mit } \mu_t := \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t^2 := \frac{1}{2} g
$$

Für die letzte Volatilitätsvariable h_T gilt

$$
\begin{aligned}
f(h_T \,|\, h_{-T}, \vec{y}, g) &= f(h_T, h_{T-1}, y_T, g) \\
&\propto f(y_T \,|\, h_t) \cdot f(h_T \,|\, h_{T-1})
\end{aligned}
$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

$$\text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma}^2 g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, , \ldots T-1$ gilt:

$$f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) \propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

$$\text{mit } \mu_t := \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t^2 := \frac{1}{2} g$$

Für die letzte Volatilitätsvariable h_T gilt

$$\begin{aligned} f(h_T \mid h_{-T}, \vec{y}, g) &= f(h_T, h_{T-1}, y_T, g) \\ &\propto f(y_T \mid h_t) \cdot f(h_T \mid h_{T-1}) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{h_T}} \exp\left(-\frac{y_T^2}{2h_T}\right) \cdot \frac{1}{h_T} \exp\left(\frac{-(\ln h_T - \mu_T)^2}{2\sigma_T^2}\right) \\ &\quad \text{mit } \mu_T := \ln h_{T-1}, \quad \sigma_T^2 := g \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T
\end{aligned}
$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für die Full-Conditional-Verteilung gilt:

$$
f(h_0 \mid h_{-0}, g, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)
$$

$$
\text{mit } \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma}^2 g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)
$$

Für die Zeitpunkte $t = 1, , \ldots T-1$ gilt:

$$
f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) \propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)
$$

$$
\text{mit } \mu_t := \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t^2 := \frac{1}{2} g
$$

Für die letzte Volatilitätsvariable h_T gilt

$$
f(h_T \mid h_{-T}, \vec{y}, g) \propto \frac{1}{\sqrt{h_T}} \exp\left(-\frac{y_T^2}{2h_T}\right) \cdot \frac{1}{h_T} \exp\left(\frac{-(\ln h_T - \mu_T)^2}{2\sigma_T^2}\right)
$$

$$
\text{mit } \mu_T := \ln h_{T-1}, \quad \sigma_T^2 := g
$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$ und g

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$
B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$ und g
C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$ und g

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

   1. Führe einen Metropolis-Hastings-Schritt für $h_0, \ldots, h_T$ aus:

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$ und g

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

   1. Führe einen Metropolis-Hastings-Schritt für $h_0, \ldots, h_T$ aus:
      - Ziehe h_0 neu aus der logarithmischen Normalverteilung

$$f(h_0 \mid h_1, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right), \;\; \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma} g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \;\; \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$ und g

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Führe einen Metropolis-Hastings-Schritt für $h_0, \ldots, h_T$ aus:
   - Ziehe h_0 neu aus der logarithmischen Normalverteilung

     $$f(h_0 \mid h_1, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma} g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

   - Für $t = 1, \ldots, T$ ziehe einen Kandidaten $h_{t,\text{new}}$ gemäß der log. Normalverteilung

     $$q(h_{t,\text{new}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \frac{1}{h_{t,\text{new}}} \exp\left(\frac{-(\ln h_{t,\text{new}} - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

     mit μ_t und σ_t wie auf der letzten Folie.
     Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

     $$r := \frac{h_{t,\text{new}}^{-0,5} \exp\left(-y_t^2/2h_{t,\text{new}}\right)}{h_{t,\text{old}}^{-0,5} \exp\left(-y_t^2/2h_{t,\text{old}}\right)}$$

     Ziehe $u \sim \mathcal{U}(0,1)$. Akzeptiere $h_{t,\text{new}}$, falls $u < \alpha$, ansonsten behalte $h_{t,\text{old}}$.

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$ und g

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Führe einen Metropolis-Hastings-Schritt für $h_0, \ldots, h_T$ aus:
   - Ziehe h_0 neu aus der logarithmischen Normalverteilung

     $$f(h_0 \mid h_1, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad \sigma_0^2 := \frac{\overline{\sigma} g}{\overline{\sigma}^2 + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0^2 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}^2} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

   - Für $t = 1, \ldots, T$ ziehe einen Kandidaten $h_{t,\mathrm{new}}$ gemäß der log. Normalverteilung

     $$q(h_{t,\mathrm{new}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \frac{1}{h_{t,\mathrm{new}}} \exp\left(\frac{-(\ln h_{t,\mathrm{new}} - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

     mit μ_t und σ_t wie auf der letzten Folie.
     Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

     $$r := \frac{h_{t,\mathrm{new}}^{-0,5} \exp\left(-y_t^2/2h_{t,\mathrm{new}}\right)}{h_{t,\mathrm{old}}^{-0,5} \exp\left(-y_t^2/2h_{t,\mathrm{old}}\right)}$$

     Ziehe $u \sim \mathcal{U}(0,1)$. Akzeptiere $h_{t,\mathrm{new}}$, falls $u < \alpha$, ansonsten behalte $h_{t,\mathrm{old}}$.
2. Sample g geg. $h_0, \ldots, h_T$: Ziehe ein neues g aus der Full-Cond.-Verteilung $\mathcal{IG}(\frac{\tilde{g}}{2}, \frac{\tilde{\nu}}{2})$ mit $\tilde{g} := g_0 + \sum_{t=1}^T v_t = g_0 + \sum_{t=1}^T \ln h_t - \ln h_{t-1}$ und $\tilde{\nu} := \nu_0 + T$.

Erweiterte Version des stochastischen Volatilitätsmodells

$$
\begin{aligned}
y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1,\dots,T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & & \\
B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0,Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2\times 2}
\end{aligned}
$$

Dabei ist $B_t = \begin{pmatrix} c_t \\ b_t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ der Vektor der AR-Koeffizienten.

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1, \ldots, T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, g), & & \\
B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0, Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2\times 2}
\end{aligned}
$$

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1, \ldots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & & \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0,Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2\times 2} \end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}\left(\tfrac{g_0}{2}, \tfrac{\nu_0}{2}\right), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$$

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, && \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1), && t = 1, \ldots, T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, && v_t \sim \mathcal{N}(0,g), && \\
B_t &= B_{t-1} + e_t, && e_t \sim \mathcal{N}(0,Q), && Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}
\end{aligned}
$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}\left(\tfrac{g_0}{2}, \tfrac{\nu_0}{2}\right), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$, g, $B_1, \ldots, B_T$ und Q (benutze dazu Training-Daten)

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1,\ldots,T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & & \\
B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0,Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2\times 2}
\end{aligned}
$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}(\tfrac{g_0}{2}, \tfrac{\nu_0}{2}), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$, g, $B_1, \ldots, B_T$ und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1,\ldots,T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & & \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0,Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2\times 2} \end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}(\tfrac{g_0}{2}, \tfrac{\nu_0}{2}), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$, g, $B_1, \ldots, B_T$ und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

   1. Aktualisiere $h_0, \ldots, h_T$ gegeben g und $B_1, \ldots B_T$:

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1,\dots,T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & & \\
B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0,Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2\times 2}
\end{aligned}
$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}(\tfrac{g_0}{2}, \tfrac{\nu_0}{2}), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \dots, h_T$, g, $B_1, \dots, B_T$ und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Aktualisiere $h_0, \dots, h_T$ gegeben g und $B_1, \dots B_T$:
   - Ziehe h_0 neu (genau wie beim letzten Modell)

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1,\dots,T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & & \\
B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0,Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2\times 2}
\end{aligned}
$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}(\tfrac{g_0}{2}, \tfrac{\nu_0}{2}), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \dots, h_T$, g, $B_1, \dots, B_T$ und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Aktualisiere $h_0, \dots, h_T$ gegeben g und $B_1, \dots B_T$:
    - Ziehe h_0 neu (genau wie beim letzten Modell)
    - Für $t = 1, \dots, T$ führe einen MH-Schritt für h_t aus. Die Details sind wie beim letzten Schritt mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt $y_t - c_t - b_t y_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t)$ gilt (anstatt $y_t \sim \mathcal{N}(0, h_t)$).

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1,\ldots,T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & & \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0,Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2\times 2} \end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}(\tfrac{g_0}{2}, \tfrac{\nu_0}{2}), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$, g, $B_1, \ldots, B_T$ und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
   1. Aktualisiere $h_0, \ldots, h_T$ gegeben g und $B_1, \ldots B_T$:
      - Ziehe h_0 neu (genau wie beim letzten Modell)
      - Für $t = 1, \ldots, T$ führe einen MH-Schritt für h_t aus. Die Details sind wie beim letzten Schritt mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt $y_t - c_t - b_t y_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t)$ gilt (anstatt $y_t \sim \mathcal{N}(0, h_t)$).
   2. Ziehe g neu gegeben $h_0, \ldots, h_T$ (genau wie bisher)

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1,\ldots,T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & & \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0,Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2\times 2} \end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}(\tfrac{g_0}{2}, \tfrac{\nu_0}{2}), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$, g, $B_1, \ldots, B_T$ und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Aktualisiere $h_0, \ldots, h_T$ gegeben g und $B_1, \ldots B_T$:
   - Ziehe h_0 neu (genau wie beim letzten Modell)
   - Für $t = 1, \ldots, T$ führe einen MH-Schritt für h_t aus. Die Details sind wie beim letzten Schritt mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt $y_t - c_t - b_t y_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t)$ gilt (anstatt $y_t \sim \mathcal{N}(0, h_t)$).
2. Ziehe g neu gegeben $h_0, \ldots, h_T$ (genau wie bisher)
3. Aktualisiere $B_1, \ldots, B_T$ und Q gegeben $h_0, \ldots, h_T$ und g

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1,\dots,T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & & \\
B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0,Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2\times 2}
\end{aligned}
$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}(\tfrac{g_0}{2}, \tfrac{\nu_0}{2}), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \dots, h_T$, g, $B_1, \dots, B_T$ und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Aktualisiere $h_0, \dots, h_T$ gegeben g und $B_1, \dots B_T$:
   - Ziehe h_0 neu (genau wie beim letzten Modell)
   - Für $t = 1, \dots, T$ führe einen MH-Schritt für h_t aus. Die Details sind wie beim letzten Schritt mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt $y_t - c_t - b_t y_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t)$ gilt (anstatt $y_t \sim \mathcal{N}(0, h_t)$).
2. Ziehe g neu gegeben $h_0, \dots, h_T$ (genau wie bisher)
3. Aktualisiere $B_1, \dots, B_T$ und Q gegeben $h_0, \dots, h_T$ und g
   - Führe einen MH-Schritt für $B_1, \dots, B_T$ aus wie im letzten Vortrag (einziger Unterschied: Varianz hängt jetzt von t ab).

Bayessche Inferenz im erweiterten stoch. Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1,\ldots,T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & & \\ B_t &= B_{t-1} + e_t, & e_t &\sim \mathcal{N}(0,Q), & Q &\in \mathbb{R}^{2\times 2} \end{aligned}$$

A. Setze die Parameter der Prior-Verteilung:

$$g \sim \mathcal{IG}(\tfrac{g_0}{2}, \tfrac{\nu_0}{2}), \quad Q \sim \mathcal{IW}(Q_0, T_0), \quad h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$, g, $B_1, \ldots, B_T$ und Q (benutze dazu Training-Daten)

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
   1. Aktualisiere $h_0, \ldots, h_T$ gegeben g und $B_1, \ldots B_T$:
      - Ziehe h_0 neu (genau wie beim letzten Modell)
      - Für $t = 1, \ldots, T$ führe einen MH-Schritt für h_t aus. Die Details sind wie beim letzten Schritt mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt $y_t - c_t - b_t y_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t)$ gilt (anstatt $y_t \sim \mathcal{N}(0, h_t)$).
   2. Ziehe g neu gegeben $h_0, \ldots, h_T$ (genau wie bisher)
   3. Aktualisiere $B_1, \ldots, B_T$ und Q gegeben $h_0, \ldots, h_T$ und g
      - Führe einen MH-Schritt für $B_1, \ldots, B_T$ aus wie im letzten Vortrag (einziger Unterschied: Varianz hängt jetzt von t ab).
      - Ziehe ein neues Q aus seiner Full-Conditional-Verteilung $\mathcal{IW}(\tilde{S}, \tilde{T})$ mit $\tilde{S} = Q_0 + \sum_{t=1}^{T} (B_t - B_{t-1})^T (B_t - B_{t-1})$ und $\tilde{T} = T_0 + T$.