Gibbs-Sampling mit Metropolis-Hastings-Schritt für Threshold-VAR-Modelle und stochastische Volatilitätsmodelle

Tim Baumann

timbaumann.info/gibbs-her

29. April 2016

Das Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \ \ \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_1 & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \ \ \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_2 & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

$$Y_t, v_t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^N, \ \ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}, \ \ \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}, \ \ Y^* \in \mathbb{R}$$

Dabei wird die Threshold-Komponente j von Y und die Verzögerung d vom Anwender gewählt.

Das Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)}\quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \;\; \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_1 & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \;\; \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_2 & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

$$\text{wobei } S_t := Y_{j,t-d} \;\; (\textit{Threshold-Variable})$$

$$Y_t, v_t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^N, \;\; \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}, \;\; \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}, \;\; Y^* \in \mathbb{R}$$

Dabei wird die Threshold-Komponente j von Y und die Verzögerung d vom Anwender gewählt.

Beispiel

Makroökonomische Modellierung, wobei vermutet wird, dass die Stärke wirtschaftlicher Zusammenhänge (z. B. Multiplikator für Staatsausgaben) in Wirtschaftkrisen unterschiedlich groß ist wie in wirtschaftlich normalen oder guten Zeiten.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \ \ \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_1 & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \ \ \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_2 & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t \coloneqq Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$(\text{TVAR}) \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \;\; \text{Var}(v_t) = \Omega_1 & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \;\; \text{Var}(v_t) = \Omega_2 & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

Prior-Verteilung

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \;\; \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_1 & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \;\; \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_2 & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

$$\text{wobei } S_t := Y_{j,t-d} \;\; (\textit{Threshold-Variable})$$

Prior-Verteilung

- Für den Threshold: $p(Y^*) \sim \mathcal{N}(\overline{Y}^*, \sigma_{Y^*})$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$(\text{TVAR}) \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \ \ \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_1 & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \ \ \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_2 & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

$$\text{wobei } S_t := Y_{j,t-d} \ \ (\textit{Threshold-Variable})$$

Prior-Verteilung

- Für den Threshold: $p(Y^*) \sim \mathcal{N}(\overline{Y}^*, \sigma_{Y^*})$
- Für die VAR-Parameter $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^{(1+NP)\cdot N}$ und $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ verwenden wir die Normal-Inverse-Wishart-Verteilung mit Dummy-Observations $X_{D,i} \in \mathbb{R}^{k_i\times(1+NP)}$, $Y_{D,i} \in \mathbb{R}^{k_i\times N}$ $(i = 1, 2)$:

$$p(b_i|\Omega_i) \sim \mathcal{N}(\mathrm{vec}(B_{D,i}), \Omega_i \otimes (X_{D,i}^T X_{D,i})^{-1}),$$
$$p(\Omega_i) \sim \mathcal{IW}(S_{D,i}, \mathit{TODO}: T_{D,i} - ???)$$

$$\text{wobei} \quad \begin{aligned} B_{D,i} &:= (X_{D,i}^T X_{D,i})^{-1}(X_{D,i} Y_{D,i}) \in \mathbb{R}^{(1+NP)\times N} \\ S_{D,i} &:= (Y_{D,i} - X_{D,i} B_{D,i})^T (Y_{D,i} - X_{D,i} B_{D,i}) \in \mathbb{R}^{N\times N} \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*
(z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*
(z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung

$$\begin{aligned} p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t}) &\sim \mathcal{N}(\mathrm{vec}(B_i^*), \Omega_i \otimes ((X_i^*)^T X_i^*)^{-1}), \\ p(\Omega_i, Y_{i,t}) &\sim \mathcal{IW}(S_i^*, TODO: T_i^* - ???) \end{aligned}$$

$$\text{wobei} \quad \begin{aligned} B_i^* &:= ((X_i^*)^T X_i^*)^{-1}(X_i^* Y_i^*) \\ S_i^* &:= (Y_i^* - X_i^* B_i^*)^T (Y_i^* - X_i^* B_i^*) \\ Y_i^* &:= [Y_{i,t}, Y_{D,i}] \\ X_i^* &:= [X_{i,t}, X_{D,i}] \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung

$$\begin{aligned} p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t}) &\sim \mathcal{N}(\text{vec}(B_i^*), \Omega_i \otimes ((X_i^*)^T X_i^*)^{-1}), \\ p(\Omega_i, Y_{i,t}) &\sim \mathcal{IW}(S_i^*, TODO: T_i^* - ???) \end{aligned}$$

$$\text{wobei} \quad \begin{aligned} B_i^* &:= ((X_i^*)^T X_i^*)^{-1}(X_i^* Y_i^*) \\ S_i^* &:= (Y_i^* - X_i^* B_i^*)^T (Y_i^* - X_i^* B_i^*) \\ Y_i^* &:= [Y_{i,t}, Y_{D,i}] \\ X_i^* &:= [X_{i,t}, X_{D,i}] \end{aligned}$$

2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\mathrm{new}} := Y^*_{\mathrm{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\text{new}} := Y^*_{\text{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\mathrm{new}} := Y^*_{\mathrm{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} = \frac{p(Y^*_{\mathrm{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\mathrm{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\text{new}} := Y^*_{\text{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} = \frac{p(Y^*_{\text{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\text{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}$$
$$= \frac{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{new}}) \cdot p(Y^*_{\text{new}})}{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{old}}) \cdot p(Y^*_{\text{old}})}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\mathrm{new}} := Y^*_{\mathrm{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$\begin{aligned} r &= \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} = \frac{p(Y^*_{\mathrm{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\mathrm{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)} \\ &= \frac{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\mathrm{new}}) \cdot p(Y^*_{\mathrm{new}})}{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\mathrm{old}}) \cdot p(Y^*_{\mathrm{old}})} \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\mathrm{new}} := Y^*_{\mathrm{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} = \frac{p(Y^*_{\mathrm{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\mathrm{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}$$

$$= \frac{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\mathrm{new}}) \cdot p(Y^*_{\mathrm{new}})}{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\mathrm{old}}) \cdot p(Y^*_{\mathrm{old}})}$$

$$p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*) = p(Y_{1,t} \mid b_1, \Omega_1, Y^*) \cdot p(Y_{2,t} \mid b_2, \Omega_2, Y^*)$$

$$\log p(Y_{i,t} \mid b_i, \Omega_i, Y^*) = \frac{T}{2} \log|\Omega_i^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (Y_{i,t} - X_{i,t}\tilde{b}_i)^T \Omega_i^{-1} (Y_{i,t} - X_{i,t}\tilde{b}_i)$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\text{new}} := Y^*_{\text{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$\begin{aligned} r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} &= \frac{p(Y^*_{\text{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\text{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)} \\ &= \frac{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{new}}) \cdot p(Y^*_{\text{new}})}{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{old}}) \cdot p(Y^*_{\text{old}})} \end{aligned}$$

$$p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*) = p(Y_{1,t} \mid b_1, \Omega_1, Y^*) \cdot p(Y_{2,t} \mid b_2, \Omega_2, Y^*)$$

$$\log p(Y_{i,t} \mid b_i, \Omega_i, Y^*) = \frac{T}{2} \log|\Omega_i^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (Y_{i,t} - X_{i,t}\tilde{b}_i)^T \Omega_i^{-1} (Y_{i,t} - X_{i,t}\tilde{b}_i)$$

   - Ziehe $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Behalte Y^*_{new}, falls $u < \alpha$, ansonsten verwerfe Y^*_{new}.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

   $$Y^*_{\text{new}} := Y^*_{\text{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

   $$r = \frac{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{new}}) \cdot p(Y^*_{\text{new}})}{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{old}}) \cdot p(Y^*_{\text{old}})}$$

   $$p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*) = p(Y_{1,t} \mid b_1, \Omega_1, Y^*) \cdot p(Y_{2,t} \mid b_2, \Omega_2, Y^*)$$

   $$\log p(Y_{i,t} \mid b_i, \Omega_i, Y^*) = \frac{T}{2} \log|\Omega_i^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (Y_{i,t} - X_{i,t}\tilde{b}_i)^T \Omega_i^{-1} (Y_{i,t} - X_{i,t}\tilde{b}_i)$$

   - Ziehe $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Behalte Y^*_{new}, falls $u < \alpha$, ansonsten verwerfe Y^*_{new}.

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi)$

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi)$

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Kandidatenverteilung

$$q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^G)$$

Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^G)}{\pi(\Phi^G)/q(\Phi^G \mid \Phi^{G+1})}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und man behält Φ^{G+1}, falls $u < \alpha$. Ansonsten verwirft man Φ^{G+1}. TODO: Sprache mit verwerfen ein wenig anpassen.

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi) \propto f(\Phi) \cdot g(\Phi)$
(wobei f eine wohlbekannte Wahrscheinlichkeitsdichte ist)

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Kandidatenverteilung

$$q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^G)$$

Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^G)}{\pi(\Phi^G)/q(\Phi^G \mid \Phi^{G+1})}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0,1)$ und man behält Φ^{G+1}, falls $u < \alpha$. Ansonsten verwirft man Φ^{G+1}. TODO: Sprache mit verwerfen ein wenig anpassen.

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi) \propto f(\Phi) \cdot g(\Phi)$
(wobei f eine wohlbekannte Wahrscheinlichkeitsdichte ist)

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Kandidatenverteilung

$$q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^G) := f(\Phi^{G+1}) \qquad \text{(unabhängig von } \Phi^G\text{!)}$$

Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^G)}{\pi(\Phi^G)/q(\Phi^G \mid \Phi^{G+1})}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0,1)$ und man behält Φ^{G+1}, falls $u < \alpha$. Ansonsten verwirft man Φ^{G+1}. TODO: Sprache mit verwerfen ein wenig anpassen.

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi) \propto f(\Phi) \cdot g(\Phi)$
(wobei f eine wohlbekannte Wahrscheinlichkeitsdichte ist)

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Kandidatenverteilung

$$q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^G) := f(\Phi^{G+1}) \qquad \text{(unabhängig von } \Phi^G\text{!)}$$

Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^G)}{\pi(\Phi^G)/q(\Phi^G \mid \Phi^{G+1})} = \frac{f(\Phi^{G+1}) \cdot g(\Phi^{G+1})/f(\Phi^{G+1})}{f(\Phi^G) \cdot g(\Phi^G)/f(\Phi^G)}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0,1)$ und man behält Φ^{G+1}, falls $u < \alpha$. Ansonsten verwirft man Φ^{G+1}. TODO: Sprache mit verwerfen ein wenig anpassen.

Metropolis-Hastings mit unabhängiger Kandidatenvert.

Ziel: Ziehen von Zahlen gemäß einer Dichte $\pi(\Phi) \propto f(\Phi) \cdot g(\Phi)$
(wobei f eine wohlbekannte Wahrscheinlichkeitsdichte ist)

Erinnerung: Beim Metropolis-Hastings-Algorithmus zieht man zunächst einen Kandidaten gemäß der Kandidatenverteilung

$$q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^G) := f(\Phi^{G+1}) \qquad \text{(unabhängig von } \Phi^G\text{!)}$$

Dann berechnet man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{\pi(\Phi^{G+1})/q(\Phi^{G+1} \mid \Phi^G)}{\pi(\Phi^G)/q(\Phi^G \mid \Phi^{G+1})} = \frac{f(\Phi^{G+1}) \cdot g(\Phi^{G+1})/f(\Phi^{G+1})}{f(\Phi^G) \cdot g(\Phi^G)/f(\Phi^G)} = \frac{g(\Phi^{G+1})}{g(\Phi^G)}$$

Zuletzt zieht man $u \sim \mathcal{U}(0,1)$ und man behält Φ^{G+1}, falls $u < \alpha$. Ansonsten verwirft man Φ^{G+1}. TODO: Sprache mit verwerfen ein wenig anpassen.

Das stochastische Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1,\dots,T & &(\textit{Beobachtungsgl.}) \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & t &= 1,\dots,T & &(\textit{Zustandsgl.}) \end{aligned}$$

Das stochastische Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1, \ldots, T & &(\textit{Beobachtungsgl.}) \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & t &= 1, \ldots, T & &(\textit{Zustandsgl.}) \end{aligned}$$

Beispiel

TODO: Aktien? Graphik?

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$f(h_t \,|\, h_{-t}, \vec{y}, g) = f(h_t \,|\, h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), & t &= 1, \ldots, T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), & t &= 1, \ldots, T
\end{aligned}
$$

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$
\begin{aligned}
f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\
&\propto f(y_t \mid h_t, g) \cdot f(h_{t+1} \mid h_t, g) \cdot f(h_t \mid h_{t-1}, g)
\end{aligned}
$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1,\dots,T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1,\dots,T \end{aligned}$$

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\ &\propto f(y_t \mid h_t, g) \cdot f(h_{t+1} \mid h_t, g) \cdot f(h_t \mid h_{t-1}, g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y_t \mid h_t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(\frac{-y_t^2}{2h_t}\right) && \text{(Normalverteilung)} \\ f(h_{t+1} \mid h_t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h_{t+1}} \exp\left(\frac{-(\ln h_{t+1} - \ln h_t)^2}{2g}\right) && \text{(Log. Normalvert.)} \\ f(h_t \mid h_{t-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h_t} \exp\left(\frac{-(\ln h_t - \ln h_{t-1})^2}{2g}\right) && \text{(Log. Normalvert.)} \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T
\end{aligned}
$$

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$
\begin{aligned}
f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\
&\propto f(y_t \mid h_t, g) \cdot f(h_{t+1} \mid h_t, g) \cdot f(h_t \mid h_{t-1}, g) \\
&\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t}\right) \\
&\quad \text{mit } \mu_t := \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t := \frac{1}{2} g
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(y_t \mid h_t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(\frac{-y_t^2}{2h_t}\right) && \text{(Normalverteilung)} \\
f(h_{t+1} \mid h_t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h_{t+1}} \exp\left(\frac{-(\ln h_{t+1} - \ln h_t)^2}{2g}\right) && \text{(Log. Normalvert.)} \\
f(h_t \mid h_{t-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h_t} \exp\left(\frac{-(\ln h_t - \ln h_{t-1})^2}{2g}\right) && \text{(Log. Normalvert.)}
\end{aligned}
$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\ &\propto f(y_t \mid h_t, g) \cdot f(h_{t+1} \mid h_t, g) \cdot f(h_t \mid h_{t-1}, g) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t}\right) \\ &\quad \text{mit } \mu_t := \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t := \frac{1}{2} g \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\ &\propto f(y_t \mid h_t, g) \cdot f(h_{t+1} \mid h_t, g) \cdot f(h_t \mid h_{t-1}, g) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t}\right) \\ &\quad \text{mit } \mu_t := \tfrac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t := \tfrac{1}{2} g \end{aligned}$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$.

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \dots, T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \dots, T
\end{aligned}
$$

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$
\begin{aligned}
f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\
&\propto f(y_t \mid h_t, g) \cdot f(h_{t+1} \mid h_t, g) \cdot f(h_t \mid h_{t-1}, g) \\
&\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t}\right) \\
& \text{mit } \mu_t := \tfrac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t := \tfrac{1}{2} g
\end{aligned}
$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für den Posterior gilt:

$$
\begin{aligned}
f(h_0 \mid h_1, g) &\propto f(h_0) \cdot f(h_1 \mid h_0, g) \\
&\propto \frac{1}{\sqrt{\overline{\sigma}^2}} \exp\left(\frac{-(h_0 - \overline{\mu})^2}{2\overline{\sigma}^2}\right) \cdot \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_1 - \ln h_0)^2}{2g}\right)
\end{aligned}
$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t \sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T
\end{aligned}
$$

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$
\begin{aligned}
f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) &= f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t, g) \\
&\propto f(y_t \mid h_t, g) \cdot f(h_{t+1} \mid h_t, g) \cdot f(h_t \mid h_{t-1}, g) \\
&\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t}\right) \\
&\quad \text{mit } \mu_t := \tfrac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t := \tfrac{1}{2} g
\end{aligned}
$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für den Posterior gilt:

$$
\begin{aligned}
f(h_0 \mid h_1, g) &\propto f(h_0) \cdot f(h_1 \mid h_0, g) \\
&\propto \frac{1}{\sqrt{\overline{\sigma}^2}} \exp\left(\frac{-(h_0 - \overline{\mu})^2}{2\overline{\sigma}^2}\right) \cdot \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_1 - \ln h_0)^2}{2g}\right) \\
&\propto \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0}\right) \\
&\quad \text{mit } \sigma_0 := \frac{\overline{\sigma} g}{\overline{\sigma} + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}} + \frac{\ln h_1}{g}\right)
\end{aligned}
$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) \propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t}\right)$$

$$\text{mit } \mu_t := \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t := \frac{1}{2} g$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für den Posterior gilt:

$$f(h_0 \mid h_1, g) \propto \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0}\right)$$

$$\text{mit } \sigma_0 := \frac{\overline{\sigma} g}{\overline{\sigma} + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, && \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, && v_t \sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) \propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t}\right)$$
$$\text{mit } \mu_t := \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t := \frac{1}{2}g$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für den Posterior gilt:

$$f(h_0 \mid h_1, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0}\right)$$
$$\text{mit } \sigma_0 := \frac{\overline{\sigma} g}{\overline{\sigma} + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) \propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t}\right)$$

$$\text{mit } \mu_t := \tfrac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t := \tfrac{1}{2} g$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für den Posterior gilt:

$$f(h_0 \mid h_1, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0}\right)$$

$$\text{mit } \sigma_0 := \frac{\overline{\sigma} g}{\overline{\sigma} + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

Für die letzte Volatilitätsvariable h_T gilt

$$f(h_T \mid h_{-T}, \vec{y}, g) = f(h_T, h_{T-1}, y_T, g)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) \propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t}\right)$$
$$\text{mit } \mu_t := \tfrac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t := \tfrac{1}{2} g$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für den Posterior gilt:

$$f(h_0 \mid h_1, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0}\right)$$
$$\text{mit } \sigma_0 := \frac{\overline{\sigma} g}{\overline{\sigma} + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

Für die letzte Volatilitätsvariable h_T gilt

$$\begin{aligned} f(h_T \mid h_{-T}, \vec{y}, g) &= f(h_T, h_{T-1}, y_T, g) \\ &\propto f(y_T \mid h_t) \cdot f(h_T \mid h_{T-1}) \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) \propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t}\right)$$
$$\text{mit } \mu_t := \frac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t := \frac{1}{2} g$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für den Posterior gilt:

$$f(h_0 \mid h_1, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0}\right)$$
$$\text{mit } \sigma_0 := \frac{\overline{\sigma} g}{\overline{\sigma} + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

Für die letzte Volatilitätsvariable h_T gilt

$$\begin{aligned} f(h_T \mid h_{-T}, \vec{y}, g) &= f(h_T, h_{T-1}, y_T, g) \\ &\propto f(y_T \mid h_t) \cdot f(h_T \mid h_{T-1}) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{h_T}} \exp\left(-\frac{y_T^2}{2h_T}\right) \cdot \frac{1}{h_T} \exp\left(\frac{-(\ln h_T - \mu_T)^2}{2\sigma_T}\right) \\ &\text{mit } \mu_T := \ln h_{T-1}, \quad \sigma_T := g \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \quad t = 1, \ldots, T \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g), \quad t = 1, \ldots, T
\end{aligned}
$$

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$
f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}, g) \;\propto\; \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \cdot \frac{1}{h_t} \exp\left(-\frac{(\ln h_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t}\right)
$$
$$
\text{mit } \mu_t := \tfrac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_t := \tfrac{1}{2} g
$$

Wir erfinden eine weitere Volatilitätsvariable h_0 hinzu. Diese habe die Prior-Verteilung $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$. Für den Posterior gilt:

$$
f(h_0 \mid h_1, g) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0}\right)
$$
$$
\text{mit } \sigma_0 := \frac{\overline{\sigma} g}{\overline{\sigma} + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}} + \frac{\ln h_1}{g}\right)
$$

Für die letzte Volatilitätsvariable h_T gilt

$$
f(h_T \mid h_{-T}, \vec{y}, g) \;\propto\; \frac{1}{\sqrt{h_T}} \exp\left(-\frac{y_T^2}{2h_T}\right) \cdot \frac{1}{h_T} \exp\left(\frac{-(\ln h_T - \mu_T)^2}{2\sigma_T}\right)
$$
$$
\text{mit } \mu_T := \ln h_{T-1}, \quad \sigma_T := g
$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$ und g

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$
B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$ und g
C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$
B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$ und g
C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
   1. Führe einen Metropolis-Hastings-Schritt für $h_0, \ldots, h_T$ aus:

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$ und g

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Führe einen Metropolis-Hastings-Schritt für $h_0, \ldots, h_T$ aus:
   - Ziehe h_0 neu aus aus der logarithmischen Normalverteilung

$$f(h_0 \mid h_1, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0}\right), \quad \sigma_0 := \frac{\overline{\sigma} g}{\overline{\sigma} + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$ und g

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Führe einen Metropolis-Hastings-Schritt für $h_0, \ldots, h_T$ aus:
   - Ziehe h_0 neu aus aus der logarithmischen Normalverteilung

$$f(h_0 \mid h_1, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0}\right), \quad \sigma_0 := \frac{\overline{\sigma} g}{\overline{\sigma} + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

   - Für $t = 1, \ldots, T$ ziehe einen Kandidaten $h_{t,\mathrm{new}}$ gemäß der log. NV

$$q(h_{t,\mathrm{new}}) = \frac{1}{h_{t,\mathrm{new}}} \exp\left(\frac{-(\ln h_{t,\mathrm{new}} - \mu_t)^2}{2\sigma_t}\right)$$

   mit μ_t und σ_t wie auf der letzten Folie.
   Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r := \frac{h_{t,\mathrm{new}}^{-0,5} \exp\left(-y_t^2/2h_{t,\mathrm{new}}\right)}{h_{t,\mathrm{old}}^{-0,5} \exp\left(-y_t^2/2h_{t,\mathrm{old}}\right)}$$

   Ziehe $u \sim \mathcal{U}(0,1)$. Behalte $h_{t,\mathrm{new}}$, falls $u < \alpha$, ansonsten verwerfe $h_{t,\mathrm{new}}$.

Bayessche Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

A. Setze die Parameter der Prior-Vert. $h_0 \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ sowie $g \sim \mathcal{IG}(\frac{g_0}{2}, \frac{\nu_0}{2})$

B. Initialisierung: Wähle Startwerte für $h_0, \ldots, h_T$ und g

C. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Führe einen Metropolis-Hastings-Schritt für $h_0, \ldots, h_T$ aus:
   - Ziehe h_0 neu aus aus der logarithmischen Normalverteilung

     $$f(h_0 \mid h_1, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h_0} \exp\left(\frac{-(\ln h_0 - \mu_0)^2}{2\sigma_0}\right), \quad \sigma_0 := \frac{\overline{\sigma} g}{\overline{\sigma} + g}, \quad \mu_0 := \sigma_0 \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\sigma}} + \frac{\ln h_1}{g}\right)$$

   - Für $t = 1, \ldots, T$ ziehe einen Kandidaten $h_{t,\mathrm{new}}$ gemäß der log. NV

     $$q(h_{t,\mathrm{new}}) = \frac{1}{h_{t,\mathrm{new}}} \exp\left(\frac{-(\ln h_{t,\mathrm{new}} - \mu_t)^2}{2\sigma_t}\right)$$

     mit μ_t und σ_t wie auf der letzten Folie.
     Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

     $$r := \frac{h_{t,\mathrm{new}}^{-0{,}5} \exp\left(-y_t^2/2h_{t,\mathrm{new}}\right)}{h_{t,\mathrm{old}}^{-0{,}5} \exp\left(-y_t^2/2h_{t,\mathrm{old}}\right)}$$

     Ziehe $u \sim \mathcal{U}(0,1)$. Behalte $h_{t,\mathrm{new}}$, falls $u < \alpha$, ansonsten verwerfe $h_{t,\mathrm{new}}$.
2. Sample g gegeben $h_0, \ldots, h_T$: Ziehe ein neues g aus der Posterior-Verteilung $\mathcal{IG}(\frac{g}{2}, \frac{\nu}{2})$ mit $g := g_0 + \sum_{t=1}^T v_t = g_0 + \sum_{t=1}^T \ln h_t - \ln h_{t-1}$ und $\nu := \nu_0 + T$.

Erweiterte Version des stochastischen Volatilitätsmodells

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + b_t y_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h_t}, \; \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad t = 1, \dots, T \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, \qquad\qquad v_t \sim \mathcal{N}(0,g), \qquad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

Für die Regressions-Koeffizienten $B_t = \{c_t, b_t\}$ gelte dabei

$$B_t = B_{t-1} + e_t, \quad e_t \sim \mathcal{N}(0,Q), \;\; Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

TODO: Motivation

Bayessche Inferenz im erw. stoch. Volatilitätsmodell

A. Initialisierung: Wähle Startwerte für TODO: ???
B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte
   1. Sample $h_0, \ldots, h_T$ gegeben g und $B_1, \ldots B_T$: Für $t = 1, \ldots, T-1$ führe einen MH-Schritt für h_t aus