TODO: Der Random-Walk Metropolis-Hastings-Algorithmus für Threshold-VAR-Modelle

Tim Baumann

29. April 2016

1. Der Random-Walk Metropolis-Hastings-Algorithmus für Threshold-VAR-Modelle

2. Stoch. Volatilitätsmodell

Das Threshold-VAR-Modell

$$
\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \;\; \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_1 & \text{wenn } S_t \le Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \;\; \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_2 & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}
$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

$$
Y_t, v_t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^N, \;\; \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}, \;\; \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}, \;\; Y^* \in \mathbb{R}
$$

Dabei wird die Threshold-Komponente j von Y und die Verzögerung d vom Anwender gewählt.

Das Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \;\; \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_1 & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \;\; \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_2 & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

$$Y_t, v_t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^N, \;\; \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}, \;\; \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}, \;\; Y^* \in \mathbb{R}$$

Dabei wird die Threshold-Komponente j von Y und die Verzögerung d vom Anwender gewählt.

Beispiel

Makroökonomische Modellierung, wobei vermutet wird, dass die Stärke wirtschaftlicher Zusammenhänge (z. B. Multiplikator für Staatsausgaben) in Wirtschaftkrisen unterschiedlich groß ist wie in wirtschaftlich normalen oder guten Zeiten.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \;\; \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_1 & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \;\; \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_2 & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \;\; \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_1 & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \;\; \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_2 & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

Prior-Verteilung

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \ \ \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_1 & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \ \ \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_2 & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

$$\text{wobei } S_t := Y_{j,t-d} \ \ (\textit{Threshold-Variable})$$

Prior-Verteilung

- Für den Threshold: $p(Y^*) \sim \mathcal{N}(\overline{Y}^*, \sigma_{Y^*})$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

$$\text{(TVAR)} \quad \begin{cases} Y_t = c_1 + \sum_{j=1}^{P} \beta_1 Y_{t-j} + v_t, \ \ \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_1 & \text{wenn } S_t \leq Y^* \\ Y_t = c_2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_2 Y_{t-j} + v_t, \ \ \mathrm{Var}(v_t) = \Omega_2 & \text{wenn } S_t > Y^* \end{cases}$$

wobei $S_t := Y_{j,t-d}$ (*Threshold-Variable*)

Prior-Verteilung

- Für den Threshold: $p(Y^*) \sim \mathcal{N}(\overline{Y}^*, \sigma_{Y^*})$
- Für die VAR-Parameter $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^{(1+NP)\cdot N}$ und $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ verwenden wir die Normal-Inverse-Wishart-Verteilung mit Dummy-Observations $X_{D,i} \in \mathbb{R}^{k_i \times (1+NP)}$, $Y_{D,i} \in \mathbb{R}^{k_i \times N}$ $(i = 1, 2)$:

$$p(b_i|\Omega_i) \sim \mathcal{N}(\mathrm{vec}(B_{D,i}), \Omega_i \otimes (X_{D,i}^T X_{D,i})^{-1}),$$
$$p(\Omega_i) \sim \mathcal{IW}(S_{D,i}, \mathit{TODO}: T_{D,i} - ???)$$

wobei

$$B_{D,i} := (X_{D,i}^T X_{D,i})^{-1}(X_{D,i} Y_{D,i}) \in \mathbb{R}^{(1+NP)\times N}$$
$$S_{D,i} := (Y_{D,i} - X_{D,i} B_{D,i})^T (Y_{D,i} - X_{D,i} B_{D,i}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

   1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
      - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
      - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung

$$\begin{aligned} p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t}) &\sim \mathcal{N}(\mathrm{vec}(B_i^*), \Omega_i \otimes ((X_i^*)^T X_i^*)^{-1}), \\ p(\Omega_i, Y_{i,t}) &\sim \mathcal{IW}(S_i^*, TODO: T_i^* - ???) \end{aligned}$$

$$\text{wobei} \quad \begin{aligned} B_i^* &:= ((X_i^*)^T X_i^*)^{-1}(X_i^* Y_i^*) \\ S_i^* &:= (Y_i^* - X_i^* B_i^*)^T (Y_i^* - X_i^* B_i^*) \\ Y_i^* &:= [Y_{i,t}, Y_{D,i}] \\ X_i^* &:= [X_{i,t}, X_{D,i}] \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung

$$\begin{aligned} p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t}) &\sim \mathcal{N}(\mathrm{vec}(B_i^*), \Omega_i \otimes ((X_i^*)^T X_i^*)^{-1}), \\ p(\Omega_i, Y_{i,t}) &\sim \mathcal{IW}(S_i^*, TODO : T_i^* - ???) \end{aligned}$$

$$\text{wobei} \quad \begin{aligned} B_i^* &:= ((X_i^*)^T X_i^*)^{-1}(X_i^* Y_i^*) \\ S_i^* &:= (Y_i^* - X_i^* B_i^*)^T (Y_i^* - X_i^* B_i^*) \\ Y_i^* &:= [Y_{i,t}, Y_{D,i}] \\ X_i^* &:= [X_{i,t}, X_{D,i}] \end{aligned}$$

2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\mathrm{new}} := Y^*_{\mathrm{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\text{new}} := Y^*_{\text{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\mathrm{new}} := Y^*_{\mathrm{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} = \frac{p(Y^*_{\mathrm{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\mathrm{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^* (z. B. den Durschnitt oder den Median der Werte S_t)

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Beobachtung: Ist Y^* bekannt, so zerfällt das Modell in zwei einfache VAR-Modelle, eines für das Regime $S_t \leq Y^*$, eines für $S_t > Y^*$.
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\mathrm{new}} := Y^*_{\mathrm{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$\begin{aligned} r &= \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} = \frac{p(Y^*_{\mathrm{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\mathrm{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)} \\ &= \frac{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\mathrm{new}}) \cdot p(Y^*_{\mathrm{new}})}{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\mathrm{old}}) \cdot p(Y^*_{\mathrm{old}})} \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\text{new}} := Y^*_{\text{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$\begin{aligned} r &= \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} = \frac{p(Y^*_{\text{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\text{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)} \\ &= \frac{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{new}}) \cdot p(Y^*_{\text{new}})}{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{old}}) \cdot p(Y^*_{\text{old}})} \end{aligned}$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:
   $$Y^*_{\text{new}} := Y^*_{\text{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$
   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit
   $$r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} = \frac{p(Y^*_{\text{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\text{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}$$
   $$= \frac{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{new}}) \cdot p(Y^*_{\text{new}})}{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{old}}) \cdot p(Y^*_{\text{old}})}$$

$$p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*) = p(Y_{1,t} \mid b_1, \Omega_1, Y^*) \cdot p(Y_{2,t} \mid b_2, \Omega_2, Y^*)$$

$$\log p(Y_{i,t} \mid b_i, \Omega_i, Y^*) = \frac{T}{2} \log|\Omega_i^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (Y_{i,t} - X_{i,t}\tilde{b}_i)^T \Omega_i^{-1} (Y_{i,t} - X_{i,t}\tilde{b}_i)$$

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
   - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
   - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
   - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\text{new}} := Y^*_{\text{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

   - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r = \frac{\pi(\phi^{G+1})}{\pi(\phi^G)} \cdot \frac{q(\phi^G \mid \phi^{G+1})}{q(\phi^{G+1} \mid \phi^G)} = \frac{p(Y^*_{\text{new}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}{p(Y^*_{\text{old}} \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y_t)}$$
$$= \frac{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{new}}) \cdot p(Y^*_{\text{new}})}{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\text{old}}) \cdot p(Y^*_{\text{old}})}$$

$$p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*) = p(Y_{1,t} \mid b_1, \Omega_1, Y^*) \cdot p(Y_{2,t} \mid b_2, \Omega_2, Y^*)$$

$$\log p(Y_{i,t} \mid b_i, \Omega_i, Y^*) = \frac{T}{2} \log|\Omega_i^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (Y_{i,t} - X_{i,t} \tilde{b}_i)^T \Omega_i^{-1} (Y_{i,t} - X_{i,t} \tilde{b}_i)$$

   - Ziehe $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Behalte Y^*_{new}, falls $u < \alpha$, ansonsten verwerfe Y^*_{new}.

Bayessche Inferenz im Threshold-VAR-Modell

A. Initialisierung: Wähle einen Startwert für den Treshold Y^*

B. Gibbs-Sampling: Wiederhole die Schritte

1. Sample die VAR-Parameter gegeben dem Threshold Y^*:
    - Seien $Y_{1,t}$, $X_{1,t}$ die zum Regime $S_t \leq Y^*$ und $Y_{2,t}$, $X_{2,t}$ die zum Regime $S_t > Y^*$ zugehörigen Daten.
    - Ziehe $b_1, b_2, \Omega_1, \Omega_2$ aus der Posterior-Verteilung $p(b_i|\Omega_i, Y_{i,t})$, $p(\Omega_i, Y_{i,t})$.
2. Führe einen Random-Walk-Metropolis-Hastings-Schritt für Y^* aus:
    - Generiere einen Kandidaten Y^*_{new} durch einen Random-Walk-Schritt:

$$Y^*_{\mathrm{new}} := Y^*_{\mathrm{old}} + e, \quad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

    - Berechne die Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit $\alpha = \min(1, r)$ mit

$$r = \frac{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\mathrm{new}}) \cdot p(Y^*_{\mathrm{new}})}{p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*_{\mathrm{old}}) \cdot p(Y^*_{\mathrm{old}})}$$

$$p(Y_t \mid b_1, \Omega_1, b_2, \Omega_2, Y^*) = p(Y_{1,t} \mid b_1, \Omega_1, Y^*) \cdot p(Y_{2,t} \mid b_2, \Omega_2, Y^*)$$

$$\log p(Y_{i,t} \mid b_i, \Omega_i, Y^*) = \frac{T}{2} \log|\Omega_i^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (Y_{i,t} - X_{i,t}\tilde{b}_i)^T \Omega_i^{-1} (Y_{i,t} - X_{i,t}\tilde{b}_i)$$

    - Ziehe $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Behalte Y^*_{new}, falls $u < \alpha$, ansonsten verwerfe Y^*_{new}.

Das stochastische Volatilitätsmodell

$$
\begin{aligned}
y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1) & &\text{(Beobachtungsgleichung)} \\
\ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g) & &\text{(Zustandsgleichung)}
\end{aligned}
$$

Das stochastische Volatilitätsmodell

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t \sqrt{h_t}, & \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1) & &\text{(Beobachtungsgleichung)} \\ \ln h_t &= \ln h_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0,g) & &\text{(Zustandsgleichung)} \end{aligned}$$

Beispiel

TODO: Aktien? Graphik?

Bayesische Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}) = f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t)$$

Bayesische Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}) &= f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t) \\ &\propto f(y_t \mid h_t) \cdot f(h_{t+1} \mid h_t) \cdot f(h_t \mid h_{t-1}) \end{aligned}$$

Bayesische Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}) &= f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t) \\ &\propto f(y_t \mid h_t) \cdot f(h_{t+1} \mid h_t) \cdot f(h_t \mid h_{t-1}) \end{aligned}$$

Nebenrechnung

$$f(y_t \mid h_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(\frac{y_t^2}{2h_t}\right)$$

$$f(h_{t+1} \mid h_t) \propto \frac{1}{h_t} \quad \exp\left(\frac{(\ln h_{t+1} - \ln h_t)^2}{2g}\right)$$

$$f(h_t \mid h_{t-1}) \propto \frac{1}{h_{t-1}} \exp\left(\frac{(\ln h_t - \ln h_{t-1})^2}{2g}\right)$$

Bayesische Inferenz im stochastischen Volatilitätsmodell

Vorüberlegung: Für alle Zeitpunkte t, außer Start- und Endzeitpunkt, gilt:

$$\begin{aligned} f(h_t \mid h_{-t}, \vec{y}) &= f(h_t \mid h_{t-1}, h_{t+1}, y_t) \\ &\propto f(y_t \mid h_t) \cdot f(h_{t+1} \mid h_t) \cdot f(h_t \mid h_{t-1}) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(\frac{y_t^2}{2h_t}\right) \frac{1}{h_t} \exp\left(\frac{(\ln h_t - \mu)^2}{2\sigma_h}\right) \\ &\text{mit } \mu := \tfrac{1}{2}(\ln h_{t+1} + \ln h_{t-1}), \quad \sigma_h := \tfrac{1}{2} g \end{aligned}$$

Nebenrechnung

$$f(y_t \mid h_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(\frac{y_t^2}{2h_t}\right)$$

$$f(h_{t+1} \mid h_t) \propto \frac{1}{h_t} \quad \exp\left(\frac{(\ln h_{t+1} - \ln h_t)^2}{2g}\right)$$

$$f(h_t \mid h_{t-1}) \propto \frac{1}{h_{t-1}} \exp\left(\frac{(\ln h_t - \ln h_{t-1})^2}{2g}\right)$$