Alexandrov-Krümmung, Hadamard-Räume und der Satz von Cartan-Hadamard

Tim Baumann

Seminar Metrische Geometrie

3. Juni 2014

Wiederholung

Sei (X, d) ein Längenraum.

Definition

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt CAT(0)-Gebiet, falls gilt:

- Für alle $x, y \in U$ gibt es eine Geodäte $\sigma_{xy} : [0,1] \to U$ der Länge $d(x,y)$.
- Alle Dreiecke Δabc mit Eckpunkten und Seiten in U erfüllen die CAT(0)-Vergleichseigenschaft:
  Für alle $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit Vergleichspunkt $\overline{d}$ in $\Delta\overline{abc}$ gilt
  $$d(b,d) \leq d_{\mathbb{E}^2}(\overline{b}, \overline{d}).$$
  und analog für $d' \in \sigma_{ab}$, $d'' \in \sigma_{bc}$.

Definition

Der Längenraum X heißt CAT(0)-Raum, falls X eine Überdeckung mit offenen CAT(0)-Gebieten besitzt.
Man sagt auch, der Raum habe Alexandrov-Krümmung ≤ 0.

Wiederholung

Sei (X, d) ein Längenraum.

Definition

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt CAT(0)-Gebiet, falls gilt:

- Für alle $x, y \in U$ gibt es eine Geodäte $\sigma_{xy} : [0,1] \to U$ der Länge $d(x, y)$.
- Alle Dreiecke Δabc mit Eckpunkten und Seiten in U erfüllen die CAT(0)-Vergleichseigenschaft:
  Für alle $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit Vergleichspunkt $\overline{d}$ in $\Delta\overline{abc}$ gilt
  $$d(b, d) \leq d_{\mathbb{E}^2}(\overline{b}, \overline{d}).$$
  und analog für $d' \in \sigma_{ab}$, $d'' \in \sigma_{bc}$.

Definition

Der Längenraum X heißt CAT(0)-Raum, falls X eine Überdeckung mit offenen CAT(0)-Gebieten besitzt.
Man sagt auch, der Raum habe Alexandrov-Krümmung ≤ 0.

Proposition (BBI, 9.1.17)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet. Dann gilt:

1. Seien σ_{ab} und σ_{bc} zwei kürzeste Wege in U, die in b enden bzw. starten. Falls $\measuredangle abc = \pi$, dann ist auch $\sigma_{ab} * \sigma_{bc}$ ein kürzester Weg.
2. Jede Geodäte in U ist ein kürzester Weg.

Definition

Sei (X, d) ein Längenraum. Eine Geodäte $\gamma : [a, b] \to X$ heißt linear parametrisiert, wenn für alle $a \leq s < t \leq b$ gilt:

$$\frac{L(\gamma|_{[s,t]})}{\gamma} = \frac{t - s}{b - a}$$

Lemma (BBI, 9.2.3)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet und $\alpha, \beta : I \to U$ zwei durch dasselbe Intervall I und linear parametrisierte Geodäten in U. Dann ist die Distanzfunktion

$$\delta : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$$

konvex.

Korollar (Eindeutigkeit)

Sei oben $I = [t_1, t_2]$ und $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$, $\alpha(t_2) = \beta(t_2)$. Dann gilt $\alpha \equiv \beta$ auf ganz I.

Definition

Sei (X, d) ein Längenraum. Eine Geodäte $\gamma : [a, b] \to X$ heißt linear parametrisiert, wenn für alle $a \leq s < t \leq b$ gilt:

$$\frac{L(\gamma|_{[s,t]})}{\gamma} = \frac{t-s}{b-a}$$

Lemma (BBI, 9.2.3)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet und $\alpha, \beta : I \to U$ zwei durch dasselbe Intervall I und linear parametrisierte Geodäten in U. Dann ist die Distanzfunktion

$$\delta : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$$

konvex.

Korollar (Eindeutigkeit)

Sei oben $I = [t_1, t_2]$ und $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$, $\alpha(t_2) = \beta(t_2)$. Dann gilt $\alpha \equiv \beta$ auf ganz I.

Definition

Sei (X, d) ein Längenraum. Eine Geodäte $\gamma : [a, b] \to X$ heißt linear parametrisiert, wenn für alle $a \leq s < t \leq b$ gilt:

$$\frac{L(\gamma|_{[s,t]})}{\gamma} = \frac{t - s}{b - a}$$

Lemma (BBI, 9.2.3)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet und $\alpha, \beta : I \to U$ zwei durch dasselbe Intervall I und linear parametrisierte Geodäten in U. Dann ist die Distanzfunktion

$$\delta : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$$

konvex.

Korollar (Eindeutigkeit)

Sei oben $I = [t_1, t_2]$ und $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$, $\alpha(t_2) = \beta(t_2)$. Dann gilt $\alpha \equiv \beta$ auf ganz I.

Definition

Sei X ein topologischer Raum, $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ stetige Wege mit $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $q = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Eine Homotopie der Wege γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte ist eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

mit

- $H(-,0) = \gamma_1$,
- $H(-,1) = \gamma_2$,
- $H(0,t) = p$ für alle $t \in [0,1]$,
- $H(1,t) = q$ für alle $t \in [0,1]$.

Definition

Ein topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend, falls

- er wegzusammenhängend ist und
- jeder geschlossene Weg $\gamma : [0,1] \to X$ (d. h. $\gamma(0) = \gamma(1)$) homotop relativ der Endpunkte zum konstanten Weg $t \mapsto \gamma(0)$ ist.

Definition

Sei X ein topologischer Raum, $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ stetige Wege mit $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $q = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Eine Homotopie der Wege γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte ist eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

mit

- $H(-,0) = \gamma_1$,
- $H(-,1) = \gamma_2$,
- $H(0,t) = p$ für alle $t \in [0,1]$,
- $H(1,t) = q$ für alle $t \in [0,1]$.

Definition

Ein topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend, falls

- er wegzusammenhängend ist und
- jeder geschlossene Weg $\gamma : [0,1] \to X$ (d. h. $\gamma(0) = \gamma(1)$) homotop relativ der Endpunkte zum konstanten Weg $t \mapsto \gamma(0)$ ist.

Definition

Ein vollständiger, einfach zusammenhängender Längenraum mit Alexandrov-Krümmung ≤ 0 heißt Hadamard-Raum.

Satz (Cartan-Hadamard)

1. Für alle Paare p, q von Punkte in einem Hadamard-Raum gibt es genau eine verbindende Geodäte σ_{pq}.
2. All diese Geodäten sind kürzeste Wege.

Lemma (Konvergenz von linear param. Geodäten)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $(\gamma_n : [0,1] \to X)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bestehend linear parametrisierten Geodäten bzgl. der Maximumsmetrik

$$d(\alpha, \beta) \coloneqq \max_{t\in[0,1]} d(\alpha(t), \beta(t)).$$

Dann ist die Grenzfunktion

$$\gamma : [0,1] \to X, \quad t \mapsto \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t)$$

eine linear parametrisierte Geodäte.

Lemma (BH, II.4.3)

Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0)-Raum und $c : [0, 1] \to X$ eine Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(1)$. Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{2\epsilon}(c(t))}$ für alle $t \in [0, 1]$ eine CAT(0)-Umgebung ist. Dann gilt:

1. Seien $\alpha, \beta : [0, 1] \to X$ linear parametrisierte Geodäten mit
$$d(\alpha(t), c(t)) < \epsilon \quad \text{und} \quad d(\beta(t), c(t)) < \epsilon \quad \forall t \in [0, 1].$$
Dann ist die Abstandsfunktion $\delta(t) := d(\alpha(t), \beta(t))$ konvex.
2. Für alle $\overline{x} \in B_\epsilon(x)$ und $\overline{y} \in B_\epsilon(y)$ gibt es genau eine Geodäte $\overline{c} : [0, 1] \to X$ von $\overline{x}$ nach $\overline{y}$, sodass
$$t \mapsto d(c(t), \overline{c}(t))$$
konvex ist.
3. Außerdem gilt: $L(\overline{c}) \leq d(x, \overline{x}) + L(c) + d(\overline{y}, y)$

Bemerkung

Solch ein $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von $c([0, 1])$.

Lemma (BH, II.4.3)

Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0)-Raum und $c : [0,1] \to X$ eine Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(1)$. Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{2\epsilon}(c(t))}$ für alle $t \in [0,1]$ eine CAT(0)-Umgebung ist. Dann gilt:

1. Seien $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ linear parametrisierte Geodäten mit
$$d(\alpha(t), c(t)) < \epsilon \quad \text{und} \quad d(\beta(t), c(t)) < \epsilon \quad \forall t \in [0,1].$$
Dann ist die Abstandsfunktion $\delta(t) := d(\alpha(t), \beta(t))$ konvex.
2. Für alle $\overline{x} \in B_\epsilon(x)$ und $\overline{y} \in B_\epsilon(y)$ gibt es genau eine Geodäte $\overline{c} : [0,1] \to X$ von $\overline{x}$ nach $\overline{y}$, sodass
$$t \mapsto d(c(t), \overline{c}(t))$$
konvex ist.
3. Außerdem gilt: $L(\overline{c}) \leq d(x, \overline{x}) + L(c) + d(\overline{y}, y)$

Bemerkung

Solch ein $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von $c([0,1])$.

Lemma (BH, II.4.3)

Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0)-Raum und $c : [0,1] \to X$ eine Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(1)$. Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{2\epsilon}(c(t))}$ für alle $t \in [0,1]$ eine CAT(0)-Umgebung ist. Dann gilt:

1. Seien $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ linear parametrisierte Geodäten mit
$$d(\alpha(t), c(t)) < \epsilon \quad \text{und} \quad d(\beta(t), c(t)) < \epsilon \quad \forall t \in [0,1].$$
Dann ist die Abstandsfunktion $\delta(t) := d(\alpha(t), \beta(t))$ konvex.
2. Für alle $\overline{x} \in B_\epsilon(x)$ und $\overline{y} \in B_\epsilon(y)$ gibt es genau eine Geodäte $\overline{c} : [0,1] \to X$ von $\overline{x}$ nach $\overline{y}$, sodass
$$t \mapsto d(c(t), \overline{c}(t))$$
konvex ist.
3. Außerdem gilt: $L(\overline{c}) \leq d(x, \overline{x}) + L(c) + d(\overline{y}, y)$

Bemerkung

Solch ein $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von $c([0,1])$.

Lemma (BH, II.4.3)

Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0)-Raum und $c : [0,1] \to X$ eine Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(1)$. Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{2\epsilon}(c(t))}$ für alle $t \in [0,1]$ eine CAT(0)-Umgebung ist. Dann gilt:

1. Seien $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ linear parametrisierte Geodäten mit
$$d(\alpha(t), c(t)) < \epsilon \quad \text{und} \quad d(\beta(t), c(t)) < \epsilon \quad \forall t \in [0,1].$$
Dann ist die Abstandsfunktion $\delta(t) := d(\alpha(t), \beta(t))$ konvex.
2. Für alle $\overline{x} \in B_\epsilon(x)$ und $\overline{y} \in B_\epsilon(y)$ gibt es genau eine Geodäte $\overline{c} : [0,1] \to X$ von $\overline{x}$ nach $\overline{y}$, sodass
$$t \mapsto d(c(t), \overline{c}(t))$$
konvex ist.
3. Außerdem gilt: $L(\overline{c}) \leq d(x, \overline{x}) + L(c) + d(\overline{y}, y)$

Bemerkung

Solch ein $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von $c([0,1])$.

Definition

Sei X ein metrischer Raum und $p \in X$. Dann wird

$$\tilde{X}_p := \{\text{Geodäten } \gamma : [0,1] \to X \text{ mit } \gamma(0) = p \\ \text{und } \gamma \text{ linear parametrisiert}\}$$

Raum der Geodäten mit Startpunkt p genannt. Mit der Metrik

$$d(\alpha, \beta) := \max_{t \in [0,1]} |\alpha(t) - \beta(t)|$$

wird $(\tilde{X}_p, d)$ zu einem metrischen Raum.
Der Punkt $\tilde{p} \in \tilde{X}_p$ sei die konstante Geodäte $t \mapsto p$.

Definition

Die Exponentialabbildung ist die Abbildung

$$\exp_p : \tilde{X}_p \to X, \quad \gamma \mapsto \gamma(1),$$

welche jede Geodäte auf ihren Endpunkt abbildet.

Definition

Sei X ein metrischer Raum und $p \in X$. Dann wird

$$\tilde{X}_p := \{\text{Geodäten } \gamma : [0,1] \to X \text{ mit } \gamma(0) = p \\ \text{und } \gamma \text{ linear parametrisiert}\}$$

Raum der Geodäten mit Startpunkt p genannt. Mit der Metrik

$$d(\alpha, \beta) := \max_{t \in [0,1]} |\alpha(t) - \beta(t)|$$

wird $(\tilde{X}_p, d)$ zu einem metrischen Raum.
Der Punkt $\tilde{p} \in \tilde{X}_p$ sei die konstante Geodäte $t \mapsto p$.

Definition

Die Exponentialabbildung ist die Abbildung

$$\exp_p : \tilde{X}_p \to X, \quad \gamma \mapsto \gamma(1),$$

welche jede Geodäte auf ihren Endpunkt abbildet.

Lemma (BH, II.4.6)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann ist auch $\tilde{X}_p$ vollständig.

Lemma (BH, II.4.5)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann gilt:

1. $\tilde{X}_p$ ist zusammenziehbar.
2. $\exp_p : \tilde{X}_p \to X$ ist eine lokale Isometrie, d. h. für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}_p$ existiert ein $r > 0$, sodass $\exp_p(B_r(\tilde{x})) \subseteq B_r(\exp_p(\tilde{x}))$ und
$$\exp_p|_{B_r(\tilde{x})} : B_r(\tilde{x}) \to B_r(\exp_p(\tilde{x}))$$
eine Isometrie ist.

Korollar

$\tilde{X}_p$ ist einfach zusammenhängend.

Lemma (BH, II.4.6)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann ist auch $\tilde{X}_p$ vollständig.

Lemma (BH, II.4.5)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann gilt:

1. $\tilde{X}_p$ ist zusammenziehbar.
2. $\exp_p : \tilde{X}_p \to X$ ist eine lokale Isometrie, d. h. für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}_p$ existiert ein $r > 0$, sodass $\exp_p(B_r(\tilde{x})) \subseteq B_r(\exp_p(\tilde{x}))$ und
$$\exp_p|_{B_r(\tilde{x})} : B_r(\tilde{x}) \to B_r(\exp_p(\tilde{x}))$$
eine Isometrie ist.

Korollar

$\tilde{X}_p$ ist einfach zusammenhängend.

Lemma (BH, II.4.6)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann ist auch $\tilde{X}_p$ vollständig.

Lemma (BH, II.4.5)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann gilt:

1. $\tilde{X}_p$ ist zusammenziehbar.
2. $\exp_p : \tilde{X}_p \to X$ ist eine lokale Isometrie, d. h. für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}_p$ existiert ein $r > 0$, sodass $\exp_p(B_r(\tilde{x})) \subseteq B_r(\exp_p(\tilde{x}))$ und
$$\exp_p|_{B_r(\tilde{x})} : B_r(\tilde{x}) \to B_r(\exp_p(\tilde{x}))$$
eine Isometrie ist.

Korollar

$\tilde{X}_p$ ist einfach zusammenhängend.

Definition

Eine Überlagerung eines topologischen Raumes X ist ein Tupel $(\tilde{X}, \pi)$ bestehend aus einem topolischen Raum $\tilde{X}$ und einer surjektiven Überlagerungsabbildung $\pi : \tilde{X} \to X$, für die gilt: Für alle $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U_x \subseteq X$, sodass

$$\pi^{-1}(U_x) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

für disjunkte offene Mengen $(V_i)_{i \in I}$, für die jeweils gilt:

$$\pi|_{V_i} : V_i \to U$$

ist ein Homöomorphismus.

Beispiel

Jeder Homöomorphismus ist auch eine Überlagerung.

Definition

Eine Überlagerung eines topologischen Raumes X ist ein Tupel $(\tilde{X}, \pi)$ bestehend aus einem topolischen Raum $\tilde{X}$ und einer surjektiven Überlagerungsabbildung $\pi : \tilde{X} \to X$, für die gilt: Für alle $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U_x \subseteq X$, sodass

$$\pi^{-1}(U_x) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

für disjunkte offene Mengen $(V_i)_{i \in I}$, für die jeweils gilt:

$$\pi|_{V_i} : V_i \to U$$

ist ein Homöomorphismus.

Beispiel

Jeder Homöomorphismus ist auch eine Überlagerung.

Überlagerungsabbildungen $\pi : \tilde{X} \to X$ besitzen folgende Hochhebungseigenschaften:

Lemma (Hochheben von Wegen)

Sei $\gamma : [0,1] \to X$ ein stetiger Weg und $z \in \tilde{X}$ mit $\pi(z) = \gamma(0)$. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$ mit

$$\tilde{\gamma}(0) = z \quad \text{und} \quad p \circ \tilde{\gamma} = \gamma.$$

Lemma (Hochheben von Weghomotopien)

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ zwei stetige Wege mit $p := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ zusammen mit einer Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ zwischen γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte. Sei $z \in \tilde{X}$ mit $\pi(z) = p$ und $\tilde{\gamma_1}, \tilde{\gamma_2} : [0,1] \to \tilde{X}$ die Hochhebungen von γ_1 bzw. γ_2 wie in obigem Lemma. Dann gibt es genau eine Homotopie

$$\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$$

von $\tilde{\gamma_1}$ und $\tilde{\gamma_2}$ relativ der Endpunkte.

Überlagerungsabbildungen $\pi : \tilde{X} \to X$ besitzen folgende Hochhebungseigenschaften:

Lemma (Hochheben von Wegen)

Sei $\gamma : [0,1] \to X$ ein stetiger Weg und $z \in \tilde{X}$ mit $\pi(z) = \gamma(0)$. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$ mit

$$\tilde{\gamma}(0) = z \quad \text{und} \quad p \circ \tilde{\gamma} = \gamma.$$

Lemma (Hochheben von Weghomotopien)

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ zwei stetige Wege mit $p := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ zusammen mit einer Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ zwischen γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte. Sei $z \in \tilde{X}$ mit $\pi(z) = p$ und $\tilde{\gamma_1}, \tilde{\gamma_2} : [0,1] \to \tilde{X}$ die Hochhebungen von γ_1 bzw. γ_2 wie in obigem Lemma. Dann gibt es genau eine Homotopie

$$\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$$

von $\tilde{\gamma_1}$ und $\tilde{\gamma_2}$ relativ der Endpunkte.

Definition

Ein lokaler Homöomorphismus ist eine stetige Abbildung $f : Y \to Z$ zwischen topologischen Räumen, für die gilt: Für alle $y \in Y$ eine Umgebung $U_y \subseteq Y$ von y existiert, sodass $f(U_y)$ offen und

$$f|_{U_y} : U_y \to f(U_y)$$

ein Homöomorphismus ist.

Bemerkung

- Jeder lokale Isomorphismus ist ein lokaler Homöomorphismus.
- Jede Überlagerungsabbildung $p : \tilde{X} \to X$ ist ein lokaler Homöomorphismus, aber nicht jeder lokale Homöomorphismus ist eine Überlagerungsabbildung.

Definition

Ein lokaler Homöomorphismus ist eine stetige Abbildung $f : Y \to Z$ zwischen topologischen Räumen, für die gilt: Für alle $y \in Y$ eine Umgebung $U_y \subseteq Y$ von y existiert, sodass $f(U_y)$ offen und

$$f|_{U_y} : U_y \to f(U_y)$$

ein Homöomorphismus ist.

Bemerkung

- Jeder lokale Isomorphismus ist ein lokaler Homöomorphismus.
- Jede Überlagerungsabbildung $p : \tilde{X} \to X$ ist ein lokaler Homöomorphismus, aber nicht jeder lokale Homöomorphismus ist eine Überlagerungsabbildung.

Lemma (BH, I.3.28.)

Sei X ein zusammenhängender metrischer Raum, $\tilde{X}$ ein vollständiger metrischer Raum und $\pi : \tilde{X} \to X$ ein lokaler Homöomorphismus. Angenommen,

- $L(\tilde{\alpha}) \leq L(\pi \circ \tilde{\alpha})$ für alle Wege $\alpha : [0,1] \to \tilde{X}$
- für alle $x \in X$ gibt es ein $r > 0$, sodass jedes $y \in B_r(x)$ mit x durch eine eindeuitge linear parametrisierte Geodäte $\gamma_y : [0,1] \to B_r(x)$ verbunden ist und γ_y stetig von y abhängt.

Dann ist π eine Überlagerung.

Folgerung

Sei X ein Hadamard-Raum (vollständig, einfach zshgd, CAT(0)) und $p \in X$. Dann ist $\exp_p : \tilde{X}_p \to X$ eine Überlagerung.

Definition

Ein vollständiger, einfach zusammenhängender Längenraum mit Alexandrov-Krümmung ≤ 0 (kurz: ein CAT(0)-Raum) heißt Hadamard-Raum.

Satz (Cartan-Hadamard)

1. Für alle Paare p, q von Punkte in einem Hadamard-Raum gibt es genau eine verbindende Geodäte σ_{pq}.
2. All diese Geodäten sind kürzeste Wege.

Lemma

Sei $\pi : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerungsabbildung, $\tilde{X} \neq \emptyset$, X einfach zusammenhängend und $\tilde{X}$ wegzusammenhängend. Dann ist π ein Homöomorphismus.

Satz

Sei X ein Hadamard-Raum. Dann gilt für alle $x, y, z \in X$ mit verbindenden Kürzesten $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$: Die Winkelsumme des Dreiecks $\Delta(x, y, z)$ ist $\leq \pi$.

Bemerkung

Dies ist äquivalent dazu, dass das Dreieck die Vergleichseigenschaft erfüllt. Somit sind in Hadamard-Räumen Dreiecke beliebiger Größe „dünn“.

Beweis

„Alexandrovs Flickwerk“