

Varianten des Theorems von Kirchberger

Tim Baumann

TopMath-Frühlingsschule in Oberschönenfeld

4. März 2014

Theorem (Kirchberger)

*Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n .
Dann sind P und Q genau dann durch eine Hyperebene streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n + 2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Hyperebene streng trennbar sind.*

Theorem (Kirchberger)

*Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n .
Dann sind P und Q genau dann durch eine **Hyperebene** streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n + 2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine **Hyperebene** streng trennbar sind.*

Übersicht

- 1 Trennung durch Sphären
- 2 Trennung durch Zylinder
- 3 Trennung durch Parallelotope

Definition

Sei $p \in E^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in E^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p .

Definition

Sei $p \in E^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in E^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p .

Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n .

Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:

$$\forall a \in A : \|p - a\| < \alpha$$

und

$$\forall b \in B : \|p - b\| > \alpha$$

Definition

Sei $p \in E^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in E^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p .

Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n .

Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:



$$\forall a \in A : \|p - a\| < \alpha$$

und

$$\forall b \in B : \|p - b\| > \alpha$$

Definition

Sei $p \in E^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in E^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p .

Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n .

Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:



$$\forall a \in A : \|p - a\| < \alpha$$

und

$$\forall b \in B : \|p - b\| > \alpha$$

oder



$$\forall a \in A : \|p - a\| > \alpha$$

und

$$\forall b \in B : \|p - b\| < \alpha$$

Theorem (Kirchberger)

*Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n .
Dann sind P und Q genau dann durch eine Hyperebene streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n + 2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Hyperebene streng trennbar sind.*

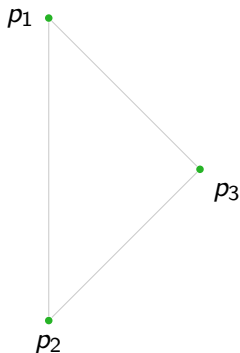
Theorem (Kirchberger', 8.2)

*Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n . Dann sind P und Q genau dann durch eine **Sphäre** streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n + 2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine **Sphäre** streng trennbar sind.*

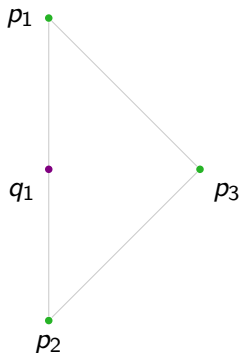
Theorem (Kirchberger', 8.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n . Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

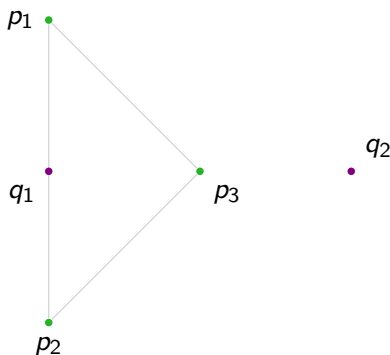
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



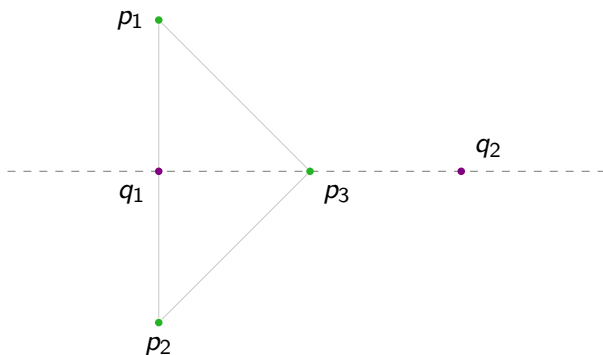
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



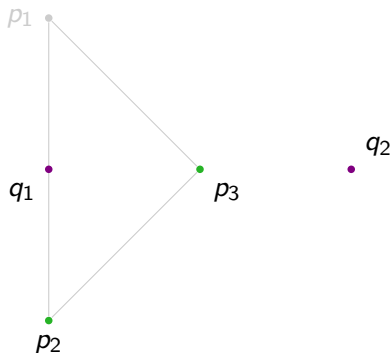
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



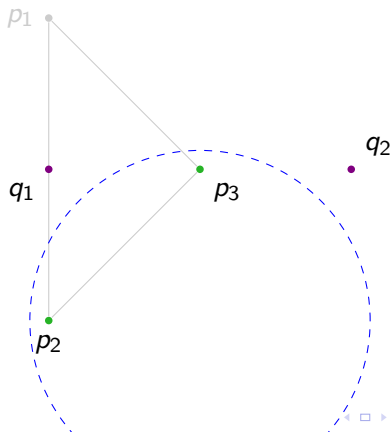
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



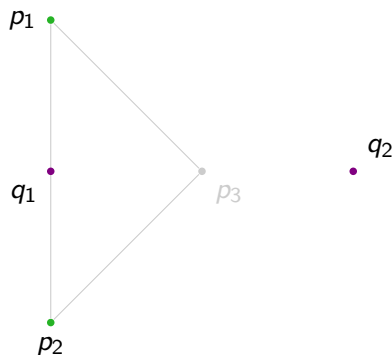
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



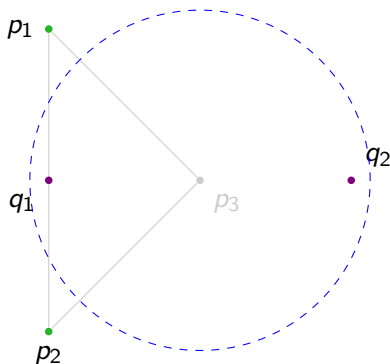
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



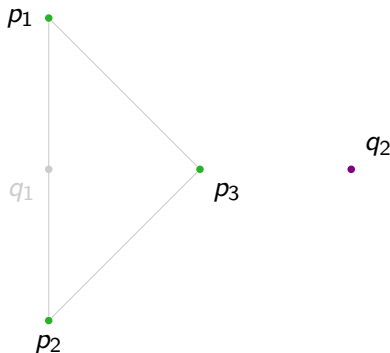
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



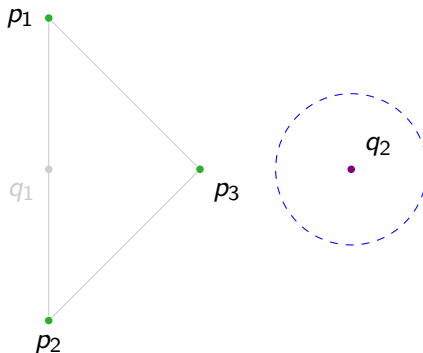
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



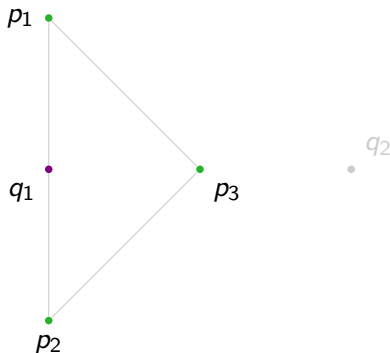
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



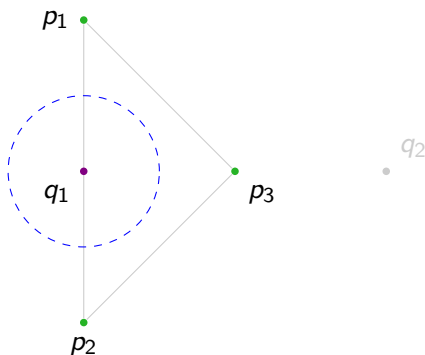
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



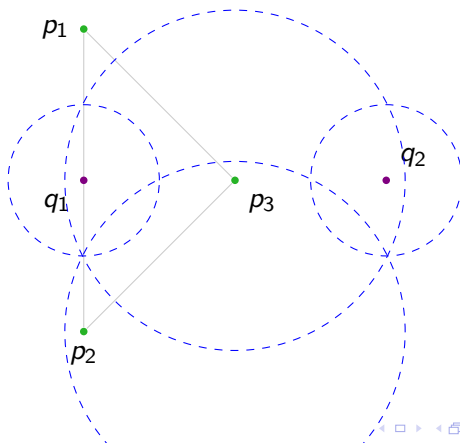
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



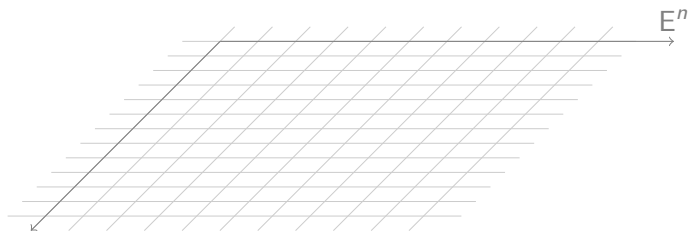
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



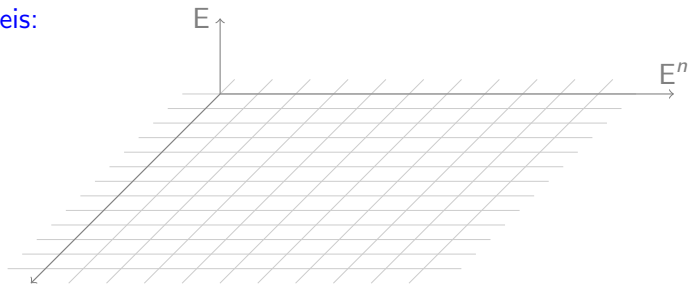
Theorem (Kirchberger', 8.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n . Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n + 3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

Beweis:

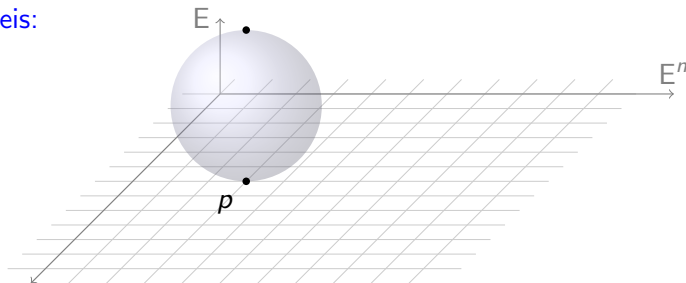


Beweis:



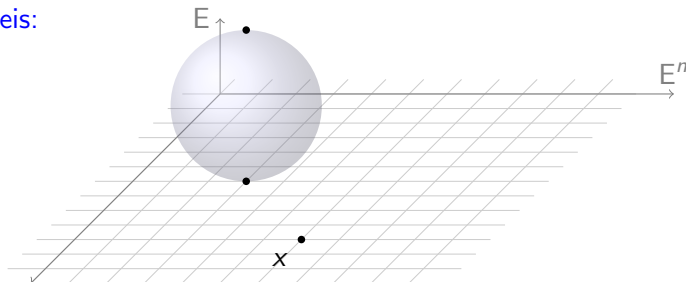
① Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.

Beweis:



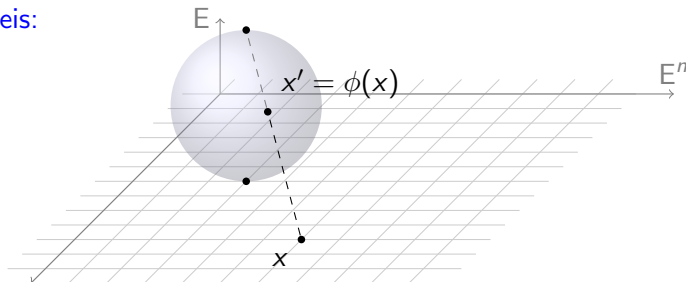
- ① Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
- ② Sei $p \in E^n$ und $S \subset E^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.

Beweis:



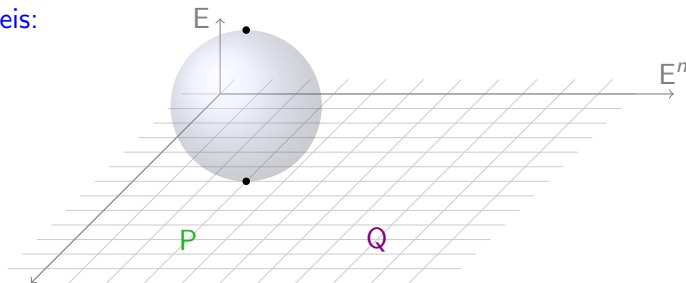
- ① Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
- ② Sei $p \in E^n$ und $S \subset E^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
- ③ Betrachte die stereographische Projektion $\phi : E^n \rightarrow S$.

Beweis:



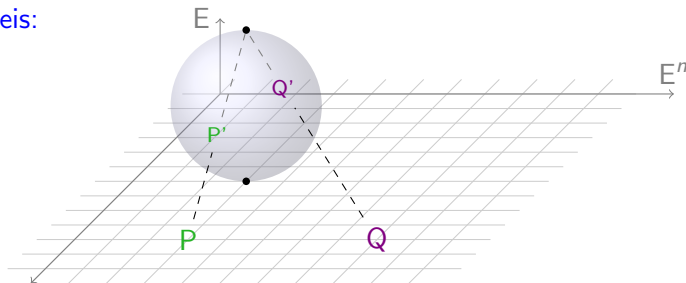
- ① Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
- ② Sei $p \in E^n$ und $S \subset E^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
- ③ Betrachte die stereographische Projektion $\phi : E^n \rightarrow S$.

Beweis:



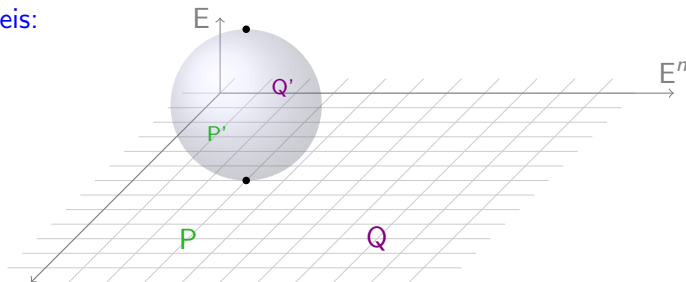
- ① Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
- ② Sei $p \in E^n$ und $S \subset E^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
- ③ Betrachte die stereographische Projektion $\phi : E^n \rightarrow S$.
- ④ Seien $P, Q \subset E^n$ nichtleer und kompakt sodass für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

Beweis:



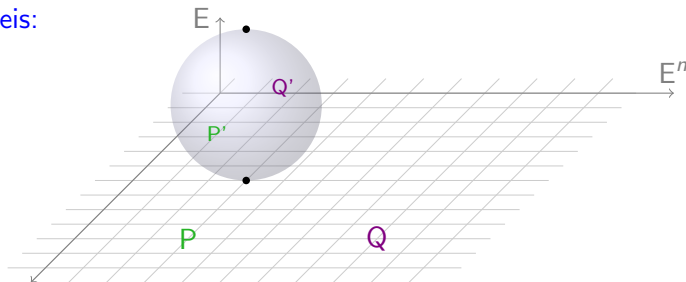
- ① Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
- ② Sei $p \in E^n$ und $S \subset E^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
- ③ Betrachte die stereographische Projektion $\phi : E^n \rightarrow S$.
- ④ Seien $P, Q \subset E^n$ nichtleer und kompakt sodass für jede Menge $T \subset E^n$ mit höchstens $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.
- ⑤ Seien $P' = \phi(P)$ und $Q' = \phi(Q)$ die (kompakten) Bilder von P bzw. Q unter ϕ .

Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset E^{n+1}$ streng getrennt werden.

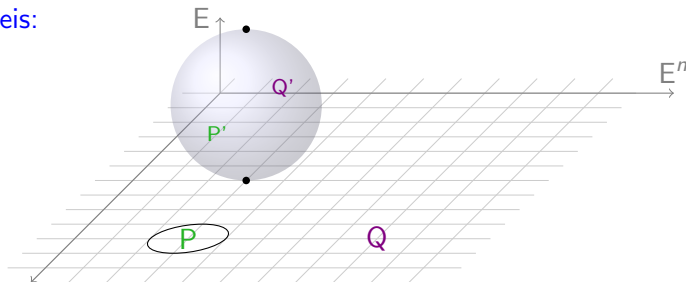
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset E^{n+1}$ streng getrennt werden.

- ⑥ Sei $T \subset S \subset E^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n + 3$ Punkten.

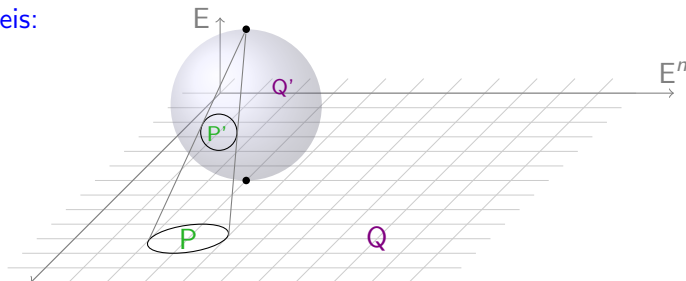
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset E^{n+1}$ streng getrennt werden.

- ⑥ Sei $T \subset S \subset E^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
- ⑦ Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.

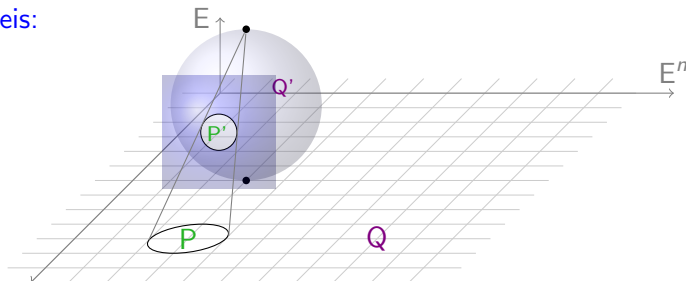
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset E^{n+1}$ streng getrennt werden.

- ⑥ Sei $T \subset S \subset E^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
- ⑦ Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.
- ⑧ Die stereogr. Projektion der Sphäre ist ein Kreis auf S (Kreistreue).

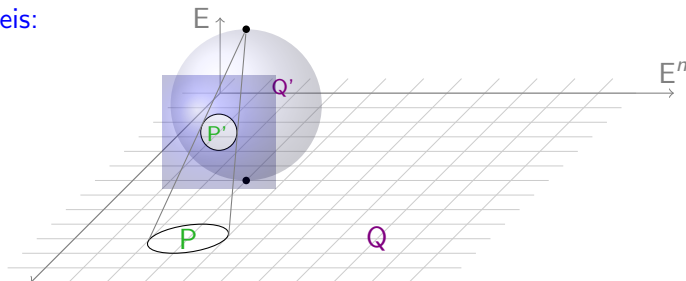
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset E^{n+1}$ streng getrennt werden.

- ⑥ Sei $T \subset S \subset E^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
- ⑦ Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.
- ⑧ Die stereogr. Projektion der Sphäre ist ein Kreis auf S (Kreistreue).
- ⑨ Der Kreis auf S ist der Schnitt von S mit einer Hyperebene H .

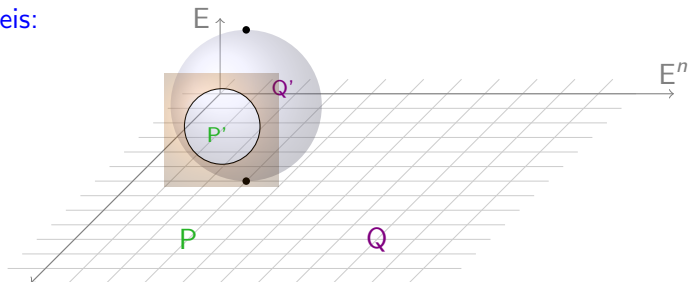
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset E^{n+1}$ streng getrennt werden.

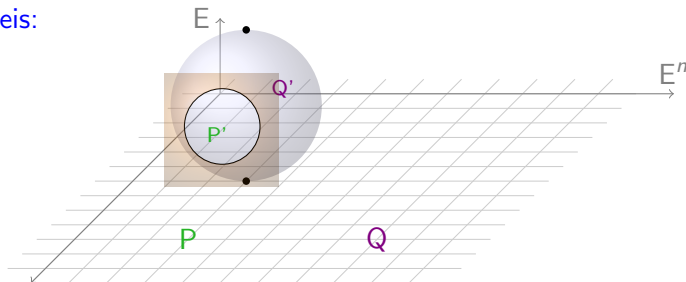
- 6 Sei $T \subset S \subset E^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
- 7 Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.
- 8 Die stereogr. Projektion der Sphäre ist ein Kreis auf S (Kreistreue).
- 9 Der Kreis auf S ist der Schnitt von S mit einer Hyperebene H .
- 10 Da H dann $T \cap P'$ und $T \cap Q'$ streng trennt, folgt die Behauptung nach dem Satz von Kirchberger.

Beweis:



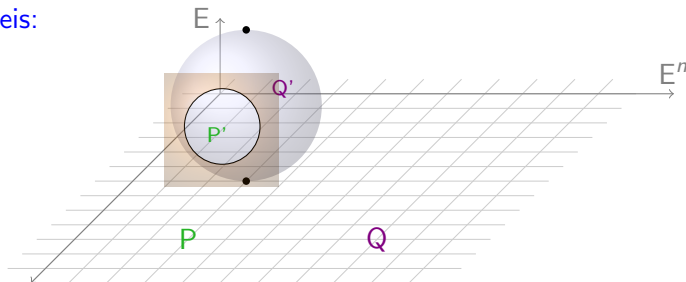
- 11 Sei $\alpha \in E^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.

Beweis:



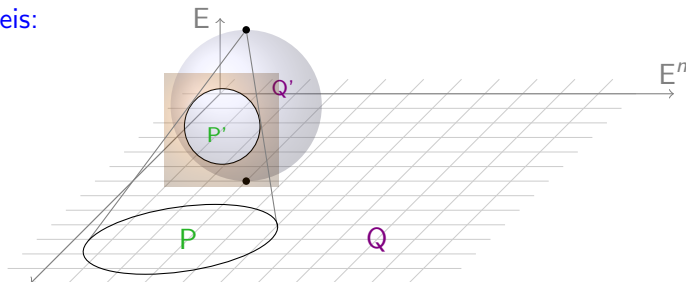
- 11 Sei $\alpha \in E^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.
- 12 Da P' und Q' kompakt sind, gibt es $\epsilon > 0$ mit $\langle \alpha, p \rangle \leq b - \epsilon$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle \geq b + \epsilon$ für alle $q \in Q'$.

Beweis:



- 11 Sei $\alpha \in E^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.
- 12 Da P' und Q' kompakt sind, gibt es $\epsilon > 0$ mit $\langle \alpha, p \rangle \leq b - \epsilon$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle \geq b + \epsilon$ für alle $q \in Q'$.
- 13 Somit können wir annehmen, dass H_0 den Nordpol der Sphäre S nicht schneidet.

Beweis:



- 11 Sei $\alpha \in E^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.
- 12 Da P' und Q' kompakt sind, gibt es $\epsilon > 0$ mit $\langle \alpha, p \rangle \leq b - \epsilon$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle \geq b + \epsilon$ für alle $q \in Q'$.
- 13 Somit können wir annehmen, dass H_0 den Nordpol der Sphäre S nicht schneidet.
- 14 Der Schnitt $H_0 \cap S$ ist ein Kreis und $\phi^{-1}(H_0 \cap S)$ trennt P und Q . \square

Übersicht

- 1 Trennung durch Sphären
- 2 Trennung durch Zylinder
- 3 Trennung durch Parallelotope

Definition

Sei $A \subset E^n$ und $F \subset E^n$ ein k -dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

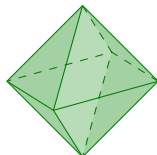
von A und F erzeugter k -Zylinder.

Definition

Sei $A \subset E^n$ und $F \subset E^n$ ein k -dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter k -Zylinder.

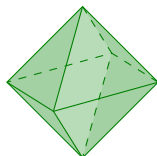


Definition

Sei $A \subset E^n$ und $F \subset E^n$ ein k -dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter k -Zylinder.



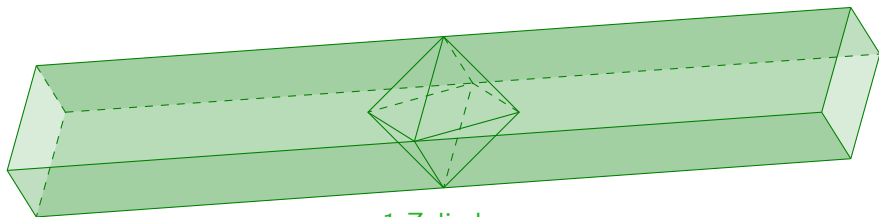
0-Zylinder

Definition

Sei $A \subset E^n$ und $F \subset E^n$ ein k -dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter k -Zylinder.



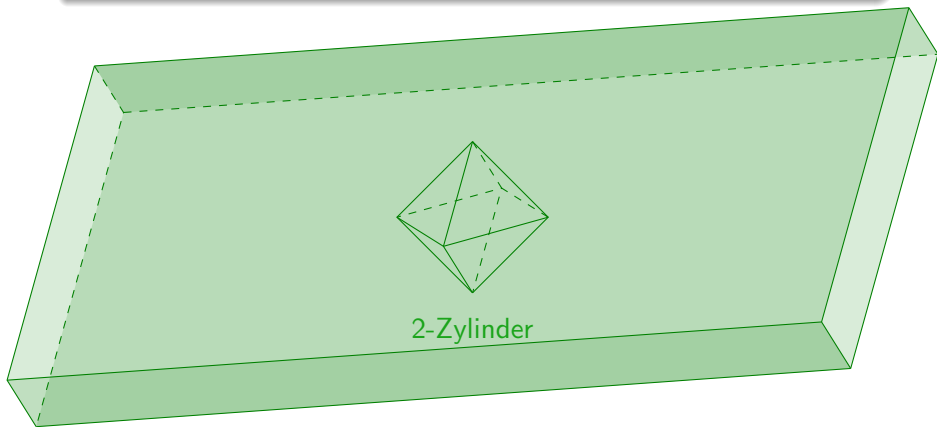
1-Zylinder

Definition

Sei $A \subset E^n$ und $F \subset E^n$ ein k -dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter k -Zylinder.

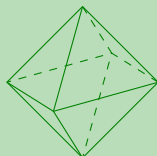


Definition

Sei $A \subset E^n$ und $F \subset E^n$ ein k -dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter k -Zylinder.



3-Zylinder

Kirchberger-Theorem für Zylinder?

Theorem (???)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n .

Dann gibt es einen k -Zylinder $Z = (\text{conv}P) + F$ mit $Z \cap Q = \emptyset$ genau dann, wenn es für alle Teilmengen $T \subset P \cup Q$ mit höchstens $f(n, k)$ Punkten einen k -Zylinder $Z_T = \text{conv}(T \cap P) + F_T$ mit $Z_T \cap (T \cap Q) = \emptyset$ gibt.

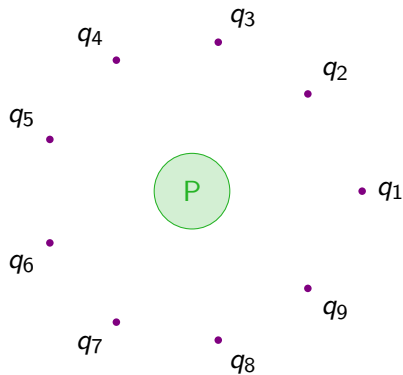
Kirchberger-Theorem für Zylinder?

Theorem (???)

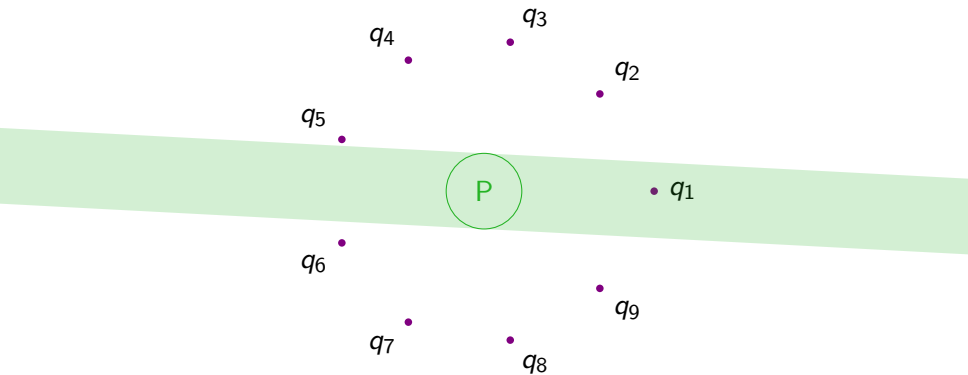
Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n .

Dann gibt es einen k -Zylinder $Z = (\text{conv}P) + F$ mit $Z \cap Q = \emptyset$ genau dann, wenn es für alle Teilmengen $T \subset P \cup Q$ mit höchstens $f(n, k)$ Punkten einen k -Zylinder $Z_T = \text{conv}(T \cap P) + F_T$ mit $Z_T \cap (T \cap Q) = \emptyset$ gibt.

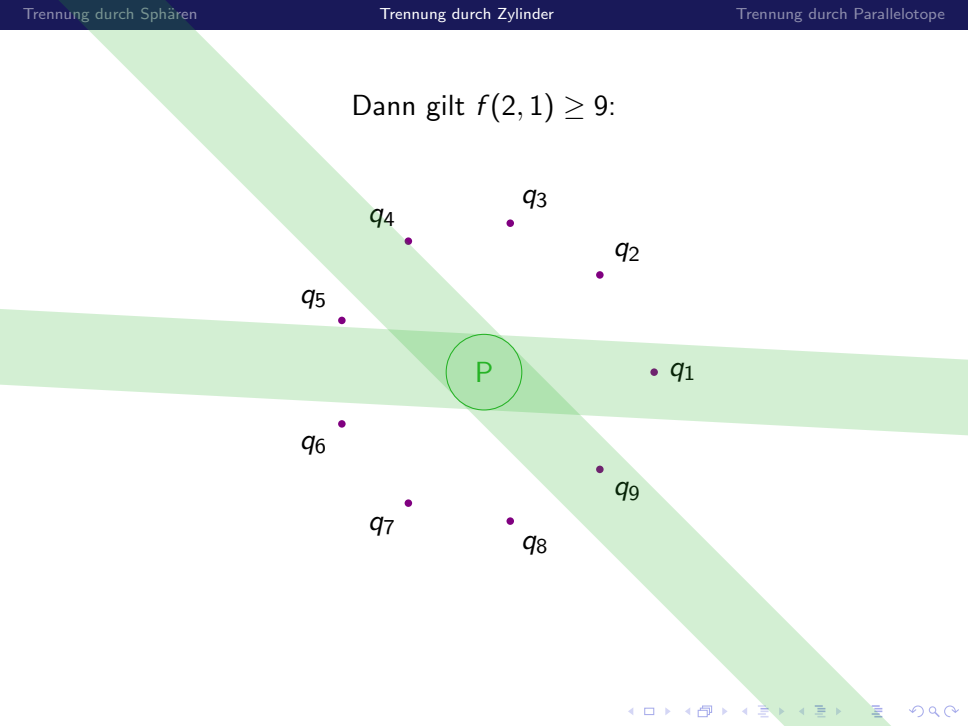
Dann gilt $f(2, 1) \geq 9$:



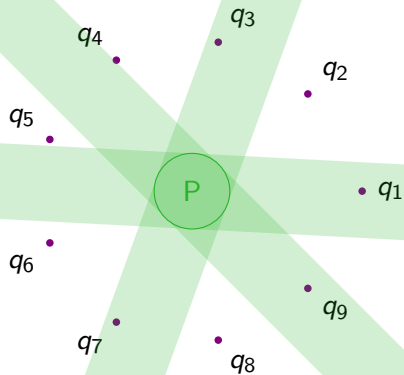
Dann gilt $f(2, 1) \geq 9$:



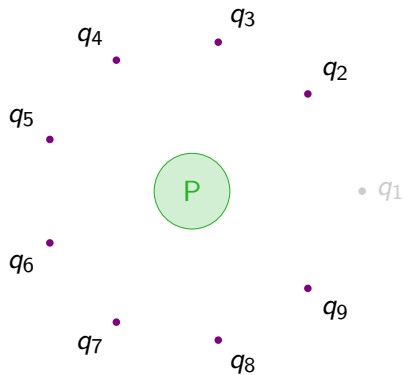
Dann gilt $f(2, 1) \geq 9$:



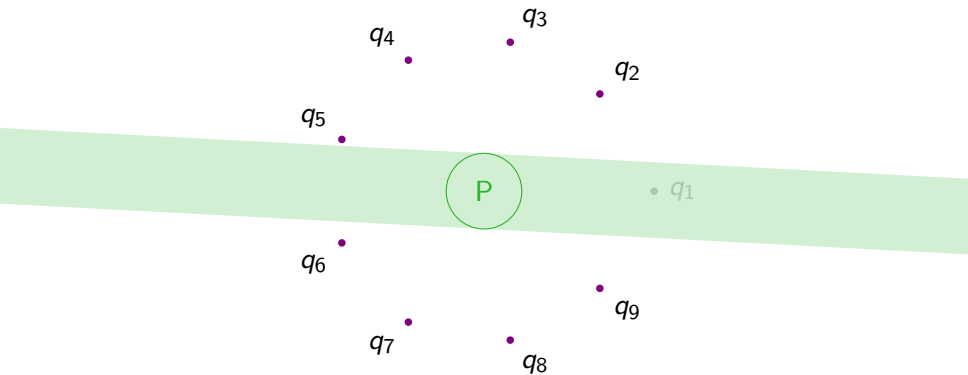
Dann gilt $f(2, 1) \geq 9$:

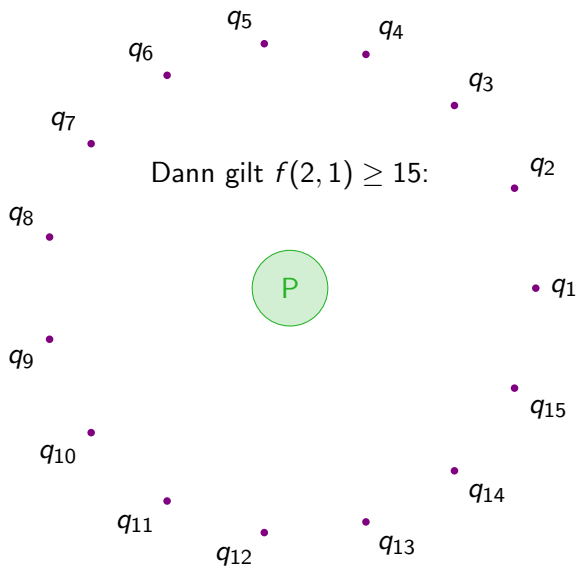


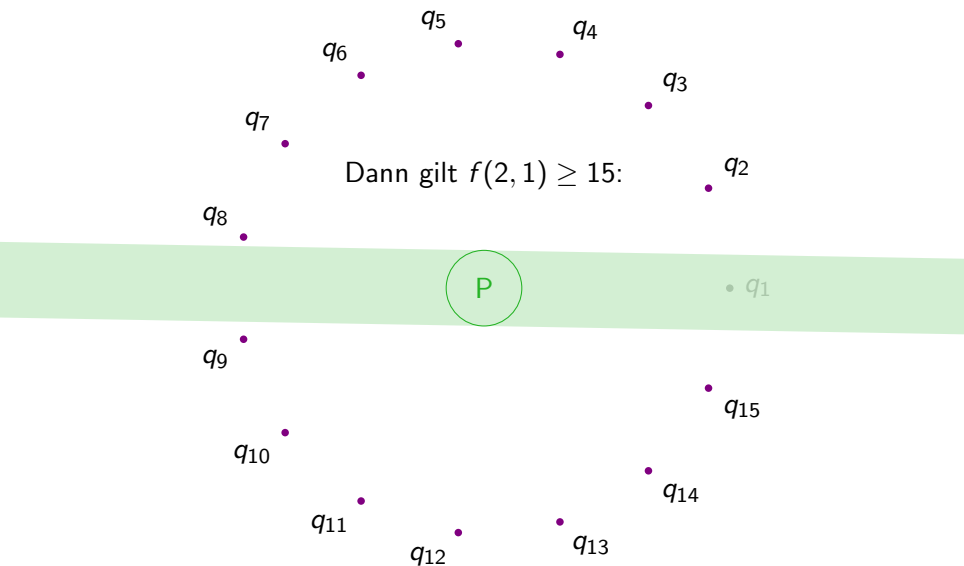
Dann gilt $f(2, 1) \geq 9$:



Dann gilt $f(2, 1) \geq 9$:







Kirchberger-Theorem für Zylinder? So nicht!

Theorem (???)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n .

Dann gibt es einen k -Zylinder $Z = (\text{conv}P) + F$ mit $Z \cap Q = \emptyset$

genau dann, wenn es für alle Teilmengen T von $P \cup Q$ mit

höchstens $f(n, k)$ Punkten einen k -Zylinder

$Z_T = \text{conv}(T \cap P) + F_T$ mit $Z_T \cap (T \cap Q) = \emptyset$ gibt.

Theorem (9.5)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n . Angenommen, für $1 \leq k \leq n$ kann jede Teilmenge von Q mit höchstens k Punkten streng von P mit einer Hyperebene getrennt werden. Dann gibt es zu jedem k -Zylinder $Z_1 = (\text{conv}P) + F_1$ einen $(k-1)$ -Zylinder $Z_2 = (\text{conv}P) + F_2$ mit $Z_2 \subset Z_1$ und $Z_2 \cap Q = \emptyset$.

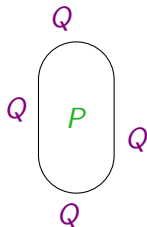
Beispiel

Seien $P, Q \subset E^3$ kompakt.

Beispiel

Seien $P, Q \subset E^3$ kompakt.

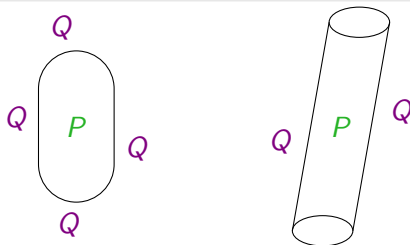
- Wenn jeder Punkt aus Q mit einer Hyperebene streng von P getrennt werden kann, dann liegt Q außerhalb von $\text{conv}P$.



Beispiel

Seien $P, Q \subset E^3$ kompakt.

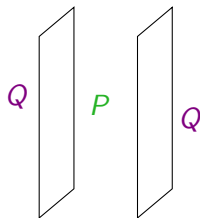
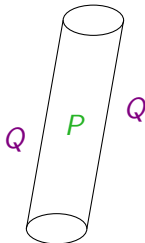
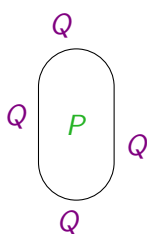
- Wenn jeder Punkt aus Q mit einer Hyperebene streng von P getrennt werden kann, dann liegt Q außerhalb von $\text{conv}P$.
- Wenn je zwei Punkte aus Q mit einer Hyperebene streng von P getrennt werden können, dann gibt es einen 1-Zylinder, der P beinhaltet und disjunkt von Q ist.



Beispiel

Seien $P, Q \subset E^3$ kompakt.

- Wenn jeder Punkt aus Q mit einer Hyperebene streng von P getrennt werden kann, dann liegt Q außerhalb von $\text{conv}P$.
- Wenn je zwei Punkte aus Q mit einer Hyperebene streng von P getrennt werden können, dann gibt es einen 1-Zylinder, der P beinhaltet und disjunkt von Q ist.
- Wenn je drei Punkte aus Q mit einer Hyperebene streng von P getrennt werden können, dann gibt es zwei parallele Hyperebenen, sodass P zwischen ihnen und Q außerhalb liegt.

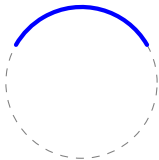


Definition

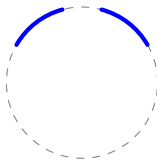
Eine Teilmenge $K \subset S_\alpha(p)$ heißt *stark konvex*, wenn K keine antipodalen (gegenüberliegenden) Punkte enthält und zu jedem Paar von Punkten auch den kleineren Bogen des Großkreises zwischen diesen Punkten enthält.

Definition

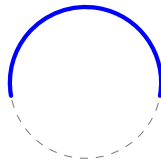
Eine Teilmenge $K \subset S_\alpha(p)$ heißt *stark konvex*, wenn K keine antipodalen (gegenüberliegenden) Punkte enthält und zu jedem Paar von Punkten auch den kleineren Bogen des Großkreises zwischen diesen Punkten enthält.



Beispiel



Gegenbeispiel



Gegenbeispiel

Lemma (9.4)

Sei $S = S_1(0)$ die Einheitssphäre um den Nullpunkt im E^n und $F = \{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von kompakten, stark konvexen Teilmengen von S . Angenommen, je n (oder weniger) Elemente von F haben einen Punkt gemeinsam. Dann gibt es ein Paar von antipodalen Punkten $\{p, -p\}$, sodass $\{p, -p\} \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis von Lemma 9.4.

- 1 Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\text{conv}A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.

Theorem (Horn, 6.8)

Sei $F = \{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von kompakten, konvexen Teilmengen von E^n mit mindestens n Elementen. Angenommen, jede Unterfamilie mit k Elementen besitzt einen gemeinsamen Punkt, wobei $1 \leq k \leq n$. Dann gibt es für jeden $(n-k)$ -dimensionalen Unterraum F_1 einen $(n-k+1)$ -dimensionalen Unterraum F_2 , sodass $F_2 \supset F_1$ und $F_2 \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis von Lemma 9.4.

- 1 Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\text{conv} A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.

Theorem (Horn, 6.8)

Sei $F = \{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von kompakten, konvexen Teilmengen von E^n mit mindestens n Elementen. Angenommen, jede Unterfamilie mit k Elementen besitzt einen gemeinsamen Punkt, wobei $1 \leq k \leq n$. Dann gibt es für jeden $(n-k)$ -dimensionalen Unterraum F_1 einen $(n-k+1)$ -dimensionalen Unterraum F_2 , sodass $F_2 \supset F_1$ und $F_2 \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis von Lemma 9.4.

- ❶ Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\text{conv}A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.
- ❷ Aus dem Lemma von Horn folgt mit $k=n$, $F_1=\{0\}$, dass ein 1-dimensionaler Unterraum L mit $L \cap \text{conv}A_i \neq \emptyset$ existiert.

Theorem (Horn, 6.8)

Sei $F = \{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von kompakten, konvexen Teilmengen von E^n mit mindestens n Elementen. Angenommen, jede Unterfamilie mit k Elementen besitzt einen gemeinsamen Punkt, wobei $1 \leq k \leq n$. Dann gibt es für jeden $(n-k)$ -dimensionalen Unterraum F_1 einen $(n-k+1)$ -dimensionalen Unterraum F_2 , sodass $F_2 \supset F_1$ und $F_2 \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis von Lemma 9.4.

- 1 Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\text{conv} A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.
- 2 Aus dem Lemma von Horn folgt mit $k=n$, $F_1=\{0\}$, dass ein 1-dimensionaler Unterraum L mit $L \cap \text{conv} A_i \neq \emptyset$ existiert.
- 3 Da A_i stark konvex ist, gilt auch $L \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Theorem (Horn, 6.8)

Sei $F = \{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von kompakten, konvexen Teilmengen von E^n mit mindestens n Elementen. Angenommen, jede Unterfamilie mit k Elementen besitzt einen gemeinsamen Punkt, wobei $1 \leq k \leq n$. Dann gibt es für jeden $(n-k)$ -dimensionalen Unterraum F_1 einen $(n-k+1)$ -dimensionalen Unterraum F_2 , sodass $F_2 \supset F_1$ und $F_2 \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis von Lemma 9.4.

- 1 Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\text{conv} A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.
- 2 Aus dem Lemma von Horn folgt mit $k=n$, $F_1=\{0\}$, dass ein 1-dimensionaler Unterraum L mit $L \cap \text{conv} A_i \neq \emptyset$ existiert.
- 3 Da A_i stark konvex ist, gilt auch $L \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.
- 4 Mit $\{p, -p\} := L \cap S$ folgt die Aussage. □

Beweis von Theorem 9.5.

Sei $\delta := \inf\{\text{dist}(\text{conv } T, \text{conv } P) \mid T \text{ ist Teilmenge von } Q \text{ mit höchstens } k \text{ Punkten}\}.$

Behauptung: $\delta > 0$

Beweis von Theorem 9.5.

Sei $\delta := \inf\{\text{dist}(\text{conv } T, \text{conv } P) \mid T \text{ ist Teilmenge von } Q \text{ mit höchstens } k \text{ Punkten}\}$.

Behauptung: $\delta > 0$

- ① Sei R die Menge aller $x \in E^n$, die Konvexkombination von höchstens k Punkten aus Q sind. Die Menge R ist kompakt, da sie Bild von

$$Q^k \times M^k \rightarrow E^n, \quad (q_1, \dots, q_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_k q_k,$$

mit $M^k := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in [0, 1]^k \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1\}$,

einer stetigen Abbildung mit kompakter Definitionsmenge, ist.

Beweis von Theorem 9.5.

Sei $\delta := \inf\{\text{dist}(\text{conv} T, \text{conv} P) \mid T \text{ ist Teilmenge von } Q \text{ mit höchstens } k \text{ Punkten}\}$.

Behauptung: $\delta > 0$

- ① Sei R die Menge aller $x \in E^n$, die Konvexkombination von höchstens k Punkten aus Q sind. Die Menge R ist kompakt, da sie Bild von

$$Q^k \times M^k \rightarrow E^n, \quad (q_1, \dots, q_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_k q_k, \\ \text{mit } M^k := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in [0, 1]^k \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1\},$$

einer stetigen Abbildung mit kompakter Definitionsmenge, ist.

- ② Angenommen, $\text{dist}(R, \text{conv} P) = 0$. Dann gibt es $r = \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_k q_k \in R$ mit $\text{dist}(r, \text{conv} P) = 0$, also $r \in \text{conv} P$.

Beweis von Theorem 9.5.

Sei $\delta := \inf\{\text{dist}(\text{conv} T, \text{conv} P) \mid T \text{ ist Teilmenge von } Q \text{ mit höchstens } k \text{ Punkten}\}$.

Behauptung: $\delta > 0$

- ① Sei R die Menge aller $x \in E^n$, die Konvexkombination von höchstens k Punkten aus Q sind. Die Menge R ist kompakt, da sie Bild von

$$Q^k \times M^k \rightarrow E^n, \quad (q_1, \dots, q_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_k q_k, \\ \text{mit } M^k := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in [0, 1]^k \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1\},$$

einer stetigen Abbildung mit kompakter Definitionsmenge, ist.

- ② Angenommen, $\text{dist}(R, \text{conv} P) = 0$. Dann gibt es $r = \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_k q_k \in R$ mit $\text{dist}(r, \text{conv} P) = 0$, also $r \in \text{conv} P$.
- ③ Dann können aber q_1, \dots, q_k nicht mit einer Hyperebene stark von $\text{conv} P$ getrennt werden. Widerspruch.

Beweis von Theorem 9.5.

Sei $\delta := \inf\{\text{dist}(\text{conv } T, \text{conv } P) \mid T \text{ ist Teilmenge von } Q \text{ mit höchstens } k \text{ Punkten}\}$.

Behauptung: $\delta > 0$

- ① Sei R die Menge aller $x \in E^n$, die Konvexkombination von höchstens k Punkten aus Q sind. Die Menge R ist kompakt, da sie Bild von

$$Q^k \times M^k \rightarrow E^n, \quad (q_1, \dots, q_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_k q_k, \\ \text{mit } M^k := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in [0, 1]^k \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1\},$$

einer stetigen Abbildung mit kompakter Definitionsmenge, ist.

- ② Angenommen, $\text{dist}(R, \text{conv } P) = 0$. Dann gibt es $r = \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_k q_k \in R$ mit $\text{dist}(r, \text{conv } P) = 0$, also $r \in \text{conv } P$.
- ③ Dann können aber q_1, \dots, q_k nicht mit einer Hyperebene stark von $\text{conv } P$ getrennt werden. Widerspruch.
- ④ Für alle Mengen T wie oben gilt dann $\text{conv } T \subset R$ und somit $\text{dist}(\text{conv } T, \text{conv } P) \geq \text{dist}(R, \text{conv } P)$.

Beweis von Theorem 9.5.

Sei $\delta := \inf\{\text{dist}(\text{conv} T, \text{conv} P) \mid T \text{ ist Teilmenge von } Q \text{ mit höchstens } k \text{ Punkten}\}$.

Behauptung: $\delta > 0$

- ① Sei R die Menge aller $x \in E^n$, die Konvexkombination von höchstens k Punkten aus Q sind. Die Menge R ist kompakt, da sie Bild von

$$Q^k \times M^k \rightarrow E^n, \quad (q_1, \dots, q_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_k q_k, \\ \text{mit } M^k := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in [0, 1]^k \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1\},$$

einer stetigen Abbildung mit kompakter Definitionsmenge, ist.

- ② Angenommen, $\text{dist}(R, \text{conv} P) = 0$. Dann gibt es $r = \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_k q_k \in R$ mit $\text{dist}(r, \text{conv} P) = 0$, also $r \in \text{conv} P$.
- ③ Dann können aber q_1, \dots, q_k nicht mit einer Hyperebene stark von $\text{conv} P$ getrennt werden. Widerspruch.
- ④ Für alle Mengen T wie oben gilt dann $\text{conv} T \subset R$ und somit $\text{dist}(\text{conv} T, \text{conv} P) \geq \text{dist}(R, \text{conv} P)$.
- ⑤ Durch Übergang zum Infimum folgt $\delta \geq \text{dist}(R, \text{conv} P) > 0$.

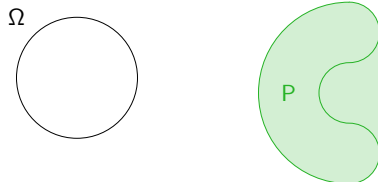


Beweis von Theorem 9.5.



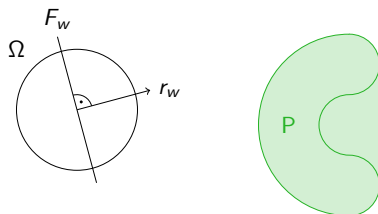
Beweis von Theorem 9.5.

- 1 Sei $Z_1 = (\text{conv}P) + F_1$ ein k -Zylinder. Annahme: $Z_1 \cap Q \neq \emptyset$.



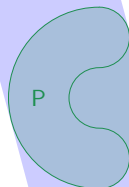
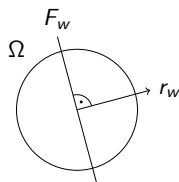
Beweis von Theorem 9.5.

- ① Sei $Z_1 = (\text{conv}P) + F_1$ ein k -Zylinder. Annahme: $Z_1 \cap Q \neq \emptyset$.
- ② Setze $\Omega := S_1(0) \cap F_1 = \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$.



Beweis von Theorem 9.5.

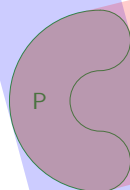
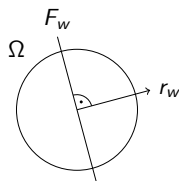
- 1 Sei $Z_1 = (\text{conv}P) + F_1$ ein k -Zylinder. Annahme: $Z_1 \cap Q \neq \emptyset$.
- 2 Setze $\Omega := S_1(0) \cap F_1 = \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$.
- 3 Für $w \in \Omega$ sei F_w das orthogonale Komplement zu $\text{span}\{w\}$ in F_1 , also $F_1 = \text{span}\{w\} \perp F_w$ und $r_w := \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot w$ der Strahl durch w .



$(\text{conv}P) + F_w$

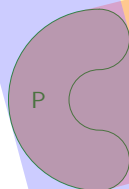
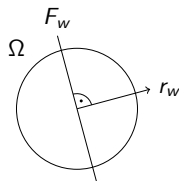
Beweis von Theorem 9.5.

- 1 Sei $Z_1 = (\text{conv}P) + F_1$ ein k -Zylinder. Annahme: $Z_1 \cap Q \neq \emptyset$.
- 2 Setze $\Omega := S_1(0) \cap F_1 = \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$.
- 3 Für $w \in \Omega$ sei F_w das orthogonale Komplement zu $\text{span}\{w\}$ in F_1 , also $F_1 = \text{span}\{w\} \perp F_w$ und $r_w := \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot w$ der Strahl durch w .
- 4 Für $w \in \Omega$ sei G_w diejenige Komponente von $Z_1 \setminus ((\text{conv}P) + F_w)$, die $(\text{conv}P) + r_w$ schneidet.


 $(\text{conv}P) + r_w$
 $(\text{conv}P) + F_w$

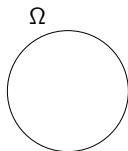
Beweis von Theorem 9.5.

- 1 Sei $Z_1 = (\text{conv}P) + F_1$ ein k -Zylinder. Annahme: $Z_1 \cap Q \neq \emptyset$.
- 2 Setze $\Omega := S_1(0) \cap F_1 = \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$.
- 3 Für $w \in \Omega$ sei F_w das orthogonale Komplement zu $\text{span}\{w\}$ in F_1 , also $F_1 = \text{span}\{w\} \perp F_w$ und $r_w := \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot w$ der Strahl durch w .
- 4 Für $w \in \Omega$ sei G_w diejenige Komponente von $Z_1 \setminus ((\text{conv}P) + F_w)$, die $(\text{conv}P) + r_w$ schneidet.


 $(\text{conv}P) + r_w$
 $(\text{conv}P) + F_w$
 G_w

Beweis von Theorem 9.5.

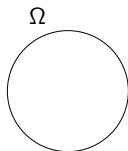
- 1 Sei $Z_1 = (\text{conv}P) + F_1$ ein k -Zylinder. Annahme: $Z_1 \cap Q \neq \emptyset$.
- 2 Setze $\Omega := S_1(0) \cap F_1 = \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$.
- 3 Für $w \in \Omega$ sei F_w das orthogonale Komplement zu $\text{span}\{w\}$ in F_1 , also $F_1 = \text{span}\{w\} \perp F_w$ und $r_w := \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot w$ der Strahl durch w .
- 4 Für $w \in \Omega$ sei G_w diejenige Komponente von $Z_1 \setminus ((\text{conv}P) + F_w)$, die $(\text{conv}P) + r_w$ schneidet.



• q

Beweis von Theorem 9.5.

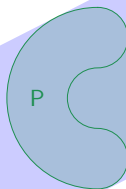
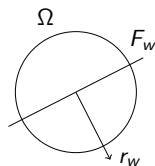
- 6 Für $q \in Q \cap Z_1$ setze



Beweis von Theorem 9.5.

- 6 Für $q \in Q \cap Z_1$ setze

$$S_q := B_{\delta/2}(q) \cap Z_1 = \{x \in Z_1 \mid \|x - q\| < \delta/2\}$$



$(\text{conv}P) + F_w$

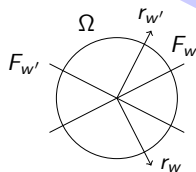
Beweis von Theorem 9.5.

6 Für $q \in Q \cap Z_1$ setze

$$S_q := B_{\delta/2}(q) \cap Z_1 = \{x \in Z_1 \mid \|x - q\| < \delta/2\}$$

$$A_q := \{w \in \Omega \mid S_q \subset G_w\}$$

$$(\text{conv}P) + F_{w'}$$



$$(\text{conv}P) + F_w$$



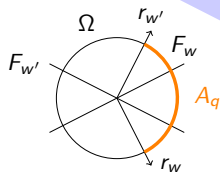
Beweis von Theorem 9.5.

6 Für $q \in Q \cap Z_1$ setze

$$S_q := B_{\delta/2}(q) \cap Z_1 = \{x \in Z_1 \mid \|x - q\| < \delta/2\}$$

$$A_q := \{w \in \Omega \mid S_q \subset G_w\}$$

$$(\text{conv}P) + F_{w'}$$



$$(\text{conv}P) + F_w$$



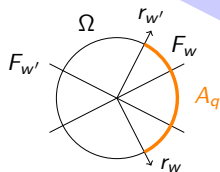
Beweis von Theorem 9.5.

6 Für $q \in Q \cap Z_1$ setze

$$S_q := B_{\delta/2}(q) \cap Z_1 = \{x \in Z_1 \mid \|x - q\| < \delta/2\}$$

$$A_q := \{w \in \Omega \mid S_q \subset G_w\}$$

$$(\text{conv}P) + F_{w'}$$



$$(\text{conv}P) + F_w$$



Beweis von Theorem 9.5.

- 6 Für $q \in Q \cap Z_1$ setze

$$S_q := B_{\delta/2}(q) \cap Z_1 = \{x \in Z_1 \mid \|x - q\| < \delta/2\}$$

$$A_q := \{w \in \Omega \mid S_q \subset G_w\}$$

- 7 Man kann zeigen: Für alle $q \in Q \cap Z_1$ ist A_q kompakt und stark konvex.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \dots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$.
Dann gilt $\bigcap_{i=1}^m A_{q_i} \neq \emptyset$.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \dots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$.
Dann gilt $\bigcap_{i=1}^m A_{q_i} \neq \emptyset$.

- 1 Es gilt $\text{dist}(\text{conv}\{q_1, \dots, q_m\}, \text{conv}P) \geq \delta$.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \dots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$.
Dann gilt $\bigcap_{i=1}^m A_{q_i} \neq \emptyset$.

- ① Es gilt $\text{dist}(\text{conv}\{q_1, \dots, q_m\}, \text{conv}P) \geq \delta$.
- ② Es folgt $\text{dist}(\text{conv}(S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}), \text{conv}P) > \delta/2$.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \dots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$.

Dann gilt $\bigcap_{i=1}^m A_{q_i} \neq \emptyset$.

- ① Es gilt $\text{dist}(\text{conv}\{q_1, \dots, q_m\}, \text{conv}P) \geq \delta$.
- ② Es folgt $\text{dist}(\text{conv}(S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}), \text{conv}P) > \delta/2$.
- ③ Also gibt es eine Hyperebene H , die $S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}$ und P streng trennt. Sei H' der zu H parallele $(n-1)$ -dimensionale Unterraum.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \dots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$.

Dann gilt $\bigcap_{i=1}^m A_{q_i} \neq \emptyset$.

- ① Es gilt $\text{dist}(\text{conv}\{q_1, \dots, q_m\}, \text{conv}P) \geq \delta$.
- ② Es folgt $\text{dist}(\text{conv}(S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}), \text{conv}P) > \delta/2$.
- ③ Also gibt es eine Hyperebene H , die $S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}$ und P streng trennt. Sei H' der zu H parallele $(n-1)$ -dimensionale Unterraum.
- ④ Es gilt $F \not\subset H'$, da sonst $Z_1 \cap Q = \emptyset$.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \dots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$.

Dann gilt $\bigcap_{i=1}^m A_{q_i} \neq \emptyset$.

- ① Es gilt $\text{dist}(\text{conv}\{q_1, \dots, q_m\}, \text{conv}P) \geq \delta$.
- ② Es folgt $\text{dist}(\text{conv}(S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}), \text{conv}P) > \delta/2$.
- ③ Also gibt es eine Hyperebene H , die $S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}$ und P streng trennt. Sei H' der zu H parallele $(n-1)$ -dimensionale Unterraum.
- ④ Es gilt $F \not\subset H'$, da sonst $Z_1 \cap Q = \emptyset$.
- ⑤ Somit ist $G := H' \cap F_1$ ein $(k-1)$ -dimensionaler Unterraum.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \dots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$.

Dann gilt $\bigcap_{i=1}^m A_{q_i} \neq \emptyset$.

- ① Es gilt $\text{dist}(\text{conv}\{q_1, \dots, q_m\}, \text{conv}P) \geq \delta$.
- ② Es folgt $\text{dist}(\text{conv}(S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}), \text{conv}P) > \delta/2$.
- ③ Also gibt es eine Hyperebene H , die $S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}$ und P streng trennt. Sei H' der zu H parallele $(n-1)$ -dimensionale Unterraum.
- ④ Es gilt $F \not\subset H'$, da sonst $Z_1 \cap Q = \emptyset$.
- ⑤ Somit ist $G := H' \cap F_1$ ein $(k-1)$ -dimensionaler Unterraum.
- ⑥ Dann liegt $S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}$ in einer der beiden Komponenten von $Z_1 \setminus ((\text{conv}P) + G)$.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \dots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$.

Dann gilt $\bigcap_{i=1}^m A_{q_i} \neq \emptyset$.

- ① Es gilt $\text{dist}(\text{conv}\{q_1, \dots, q_m\}, \text{conv}P) \geq \delta$.
- ② Es folgt $\text{dist}(\text{conv}(S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}), \text{conv}P) > \delta/2$.
- ③ Also gibt es eine Hyperebene H , die $S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}$ und P streng trennt. Sei H' der zu H parallele $(n-1)$ -dimensionale Unterraum.
- ④ Es gilt $F \not\subset H'$, da sonst $Z_1 \cap Q = \emptyset$.
- ⑤ Somit ist $G := H' \cap F_1$ ein $(k-1)$ -dimensionaler Unterraum.
- ⑥ Dann liegt $S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}$ in einer der beiden Komponenten von $Z_1 \setminus ((\text{conv}P) + G)$.
- ⑦ Wähle $w \in \Omega$, sodass $w \perp G$ und $S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m} \subset G_w$.

Beweis von Theorem 9.5.

Behauptung: Seien $q_1, \dots, q_m \in Q \cap Z_1$ mit $1 \leq m \leq k$.

Dann gilt $\bigcap_{i=1}^m A_{q_i} \neq \emptyset$.

- ① Es gilt $\text{dist}(\text{conv}\{q_1, \dots, q_m\}, \text{conv}P) \geq \delta$.
- ② Es folgt $\text{dist}(\text{conv}(S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}), \text{conv}P) > \delta/2$.
- ③ Also gibt es eine Hyperebene H , die $S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}$ und P streng trennt. Sei H' der zu H parallele $(n-1)$ -dimensionale Unterraum.
- ④ Es gilt $F \not\subset H'$, da sonst $Z_1 \cap Q = \emptyset$.
- ⑤ Somit ist $G := H' \cap F_1$ ein $(k-1)$ -dimensionaler Unterraum.
- ⑥ Dann liegt $S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m}$ in einer der beiden Komponenten von $Z_1 \setminus ((\text{conv}P) + G)$.
- ⑦ Wähle $w \in \Omega$, sodass $w \perp G$ und $S_{q_1} \cup \dots \cup S_{q_m} \subset G_w$.
- ⑧ Folglich gilt $w \in \bigcap_{i=1}^m A_{q_i}$.

Beweis von Theorem 9.5.

Wir haben gesehen, dass $\{A_q \mid q \in Q \cap Z_1\}$ eine Familie kompakter, stark konvexer Mengen ist. Zusammen mit vorheriger Behauptung folgt aus Lemma 9.4:

Beweis von Theorem 9.5.

Wir haben gesehen, dass $\{A_q \mid q \in Q \cap Z_1\}$ eine Familie kompakter, stark konvexer Mengen ist. Zusammen mit vorheriger Behauptung folgt aus Lemma 9.4:

Es gibt ein Paar von antipodalen Punkten $\{y, -y\}$ in Ω , sodass $\forall q \in Z_1 \cap Q : A_q \cap \{p, -p\} \neq \emptyset$.

Beweis von Theorem 9.5.

Wir haben gesehen, dass $\{A_q \mid q \in Q \cap Z_1\}$ eine Familie kompakter, stark konvexer Mengen ist. Zusammen mit vorheriger Behauptung folgt aus Lemma 9.4:

Es gibt ein Paar von antipodalen Punkten $\{y, -y\}$ in Ω , sodass $\forall q \in Z_1 \cap Q : A_q \cap \{p, -p\} \neq \emptyset$. Somit hat der $(k-1)$ -Zylinder $Z_2 := (\text{conv}P) + F_y \subset Z_1$ leeren Schnitt mit Q . □

Übersicht

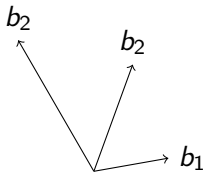
- 1 Trennung durch Sphären
- 2 Trennung durch Zylinder
- 3 Trennung durch Parallelotope**

Definition

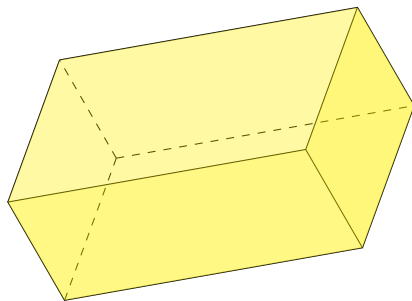
Sei $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ eine Basis von E^n . Sei H_i für $i = 1, \dots, n$ die Hyperebene $\text{span}(b_1, \dots, \widehat{b_i}, \dots, b_n)$. Eine β -Box ist ein Parallelotop, in dem jede Seite parallel zu einer Hyperebene H_i ist.

Definition

Sei $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ eine Basis von E^n . Sei H_i für $i = 1, \dots, n$ die Hyperebene $\text{span}(b_1, \dots, \widehat{b_i}, \dots, b_n)$. Eine β -Box ist ein Parallelotop, in dem jede Seite parallel zu einer Hyperebene H_i ist.



$$\beta = \{b_1, b_2, b_3\}$$



Eine β -Box

Die Koordinatenfunktionen dieser Basis sind

$$\pi_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j \mapsto \lambda_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Dann ist eine β -Box gegeben durch reelle Zahlen m_1, \dots, m_n und M_1, \dots, M_n mit $m_i \leq M_i$ für $i = 1, \dots, n$ und besteht aus allen $x \in E^n$, die folgendes lineare Ungleichungssystem erfüllen:

$$m_1 \leq \pi_1(x) \leq M_1$$

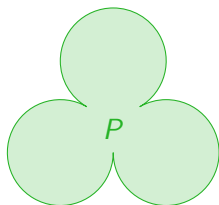
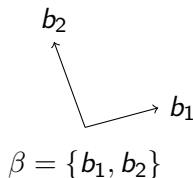
$$m_2 \leq \pi_2(x) \leq M_2$$

$$\vdots$$

$$m_n \leq \pi_n(x) \leq M_n$$

Sei $P \subset E^n$ nichtleer und kompakt. Dann existiert eine eindeutige minimale β -Box B_P , die P enthält. Diese ist gegeben durch

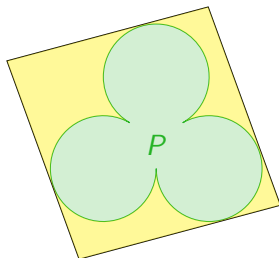
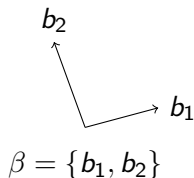
$$m_i := \inf_{p \in P} \pi_i(p) \quad \text{und} \quad M_i := \sup_{p \in P} \pi_i(p) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$



minimale β -Box um P

Sei $P \subset E^n$ nichtleer und kompakt. Dann existiert eine eindeutige minimale β -Box B_P , die P enthält. Diese ist gegeben durch

$$m_i := \inf_{p \in P} \pi_i(p) \quad \text{und} \quad M_i := \sup_{p \in P} \pi_i(p) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$



minimale β -Box um P

Theorem (10.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n ($n \geq 2$). Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

- (a) Es gibt eine β -Box B , sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.
- (b) Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β -Box B_S , sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.
- (c) Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β -Box B_T , die T enthält, disjunkt von Q , also $B_T \cap Q = \emptyset$.

Theorem (10.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n ($n \geq 2$). Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

- (a) Es gibt eine β -Box B , sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.
- (b) Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β -Box B_S , sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.
- (c) Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β -Box B_T , die T enthält, disjunkt von Q , also $B_T \cap Q = \emptyset$.

Beweis.

(a) \Rightarrow (b) Klar.

Theorem (10.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n ($n \geq 2$). Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

- (a) Es gibt eine β -Box B , sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.
- (b) Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β -Box B_S , sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.
- (c) Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β -Box B_T , die T enthält, disjunkt von Q , also $B_T \cap Q = \emptyset$.

Beweis.

(a) \Rightarrow (b) Klar.

(b) \Rightarrow (c) Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β -Box, die T enthält.

Theorem (10.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n ($n \geq 2$). Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

- (a) Es gibt eine β -Box B , sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.
- (b) Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β -Box B_S , sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.
- (c) Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β -Box B_T , die T enthält, disjunkt von Q , also $B_T \cap Q = \emptyset$.

Beweis.

(a) \Rightarrow (b) Klar.

(b) \Rightarrow (c) Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β -Box, die T enthält. Sei $q \in Q$ beliebig.

Theorem (10.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n ($n \geq 2$). Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

- (a) Es gibt eine β -Box B , sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.
- (b) Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β -Box B_S , sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.
- (c) Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β -Box B_T , die T enthält, disjunkt von Q , also $B_T \cap Q = \emptyset$.

Beweis.

(a) \Rightarrow (b) Klar.

(b) \Rightarrow (c) Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β -Box, die T enthält. Sei $q \in Q$ beliebig. Dann ist die Menge $S_q := T \cup \{q\}$ eine Teilmenge von $P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten.

Theorem (10.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n ($n \geq 2$). Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

- (a) Es gibt eine β -Box B , sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.
- (b) Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β -Box B_S , sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.
- (c) Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β -Box B_T , die T enthält, disjunkt von Q , also $B_T \cap Q = \emptyset$.

Beweis.

(a) \Rightarrow (b) Klar.

(b) \Rightarrow (c) Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β -Box, die T enthält. Sei $q \in Q$ beliebig. Dann ist die Menge $S_q := T \cup \{q\}$ eine Teilmenge von $P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten. Sei B_{S_q} die β -Box aus (b).

Theorem (10.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n ($n \geq 2$). Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

- (a) Es gibt eine β -Box B , sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.
- (b) Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β -Box B_S , sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.
- (c) Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β -Box B_T , die T enthält, disjunkt von Q , also $B_T \cap Q = \emptyset$.

Beweis.

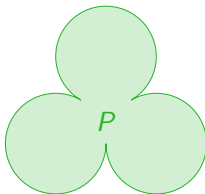
(a) \Rightarrow (b) Klar.

(b) \Rightarrow (c) Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β -Box, die T enthält. Sei $q \in Q$ beliebig. Dann ist die Menge $S_q := T \cup \{q\}$ eine Teilmenge von $P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten. Sei B_{S_q} die β -Box aus (b). Dann gilt: $T \subset P \cap S_q \subset B_{S_q}$, also $B_T \subset B_{S_q}$, und $B_T \cap \{q\} \subset B_{S_q} \cap (S_q \cap Q) = \emptyset$.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n .

Induktionsanfang ($n = 2$):

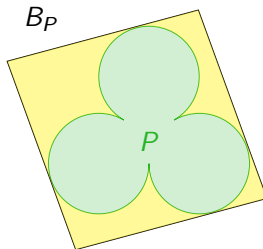


Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsanfang ($n = 2$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält.

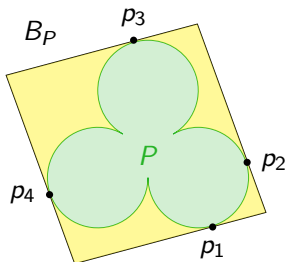


Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsanfang ($n = 2$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 .

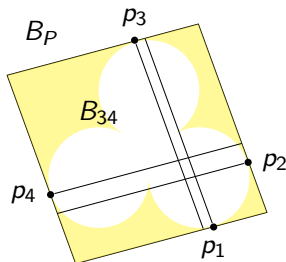


Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsanfang ($n = 2$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 . Für jedes Paar von Punkten p_i und p_j mit $i \neq j$ sei B_{ij} die minimale β -Box, die p_i und p_j enthält.

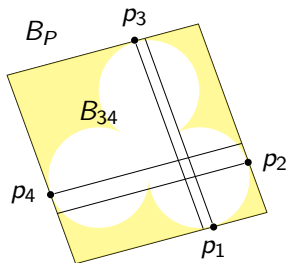


Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsanfang ($n = 2$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 . Für jedes Paar von Punkten p_i und p_j mit $i \neq j$ sei B_{ij} die minimale β -Box, die p_i und p_j enthält. Es gilt $B_P = \bigcup_{i \neq j} B_{ij}$.

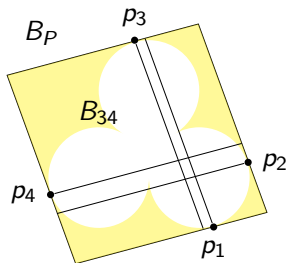


Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsanfang ($n = 2$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 . Für jedes Paar von Punkten p_i und p_j mit $i \neq j$ sei B_{ij} die minimale β -Box, die p_i und p_j enthält. Es gilt $B_P = \bigcup_{i \neq j} B_{ij}$. Angenommen, (a) ist falsch, also $q \in Q \cap B_P = Q \cap (\bigcup_{i \neq j} B_{ij})$.

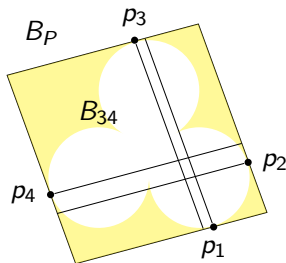


Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsanfang ($n = 2$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 . Für jedes Paar von Punkten p_i und p_j mit $i \neq j$ sei B_{ij} die minimale β -Box, die p_i und p_j enthält. Es gilt $B_P = \bigcup_{i \neq j} B_{ij}$. Angenommen, (a) ist falsch, also $q \in Q \cap B_P = Q \cap (\bigcup_{i \neq j} B_{ij})$. Dann gibt es $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit $i \neq j$ und $q \in B_{ij}$.



Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n .

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n .

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n .

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : E^{n+1} \rightarrow E^n$ durch $f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n .

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : E^{n+1} \rightarrow E^n$ durch $f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β' -Box, die $f(P)$ enthält.

Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : E^{n+1} \rightarrow E^n$ durch $f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β' -Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(B_P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n-1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β' -Box um T' enthalten ist.

Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : E^{n+1} \rightarrow E^n$ durch $f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β' -Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(B_P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n-1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β' -Box um T' enthalten ist. Sei $T \subset P$ mit maximal $n-1$ Punkten und $f(T) = T'$.

Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : E^{n+1} \rightarrow E^n$ durch $f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β' -Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(B_P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n-1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β' -Box um T' enthalten ist. Sei $T \subset P$ mit maximal $n-1$ Punkten und $f(T) = T'$. Es gilt

$$\inf_{x \in T} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T} \pi_i(x) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n .

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : E^{n+1} \rightarrow E^n$ durch $f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β' -Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(B_P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n-1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β' -Box um T' enthalten ist. Sei $T \subset P$ mit maximal $n-1$ Punkten und $f(T) = T'$. Es gilt

$$\inf_{x \in T} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T} \pi_i(x) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Angenommen, obige Ungleichung gilt auch für $i = n+1$. Dann sind wir fertig.

Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Sei B_P die minimale β -Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : E^{n+1} \rightarrow E^n$ durch $f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β' -Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(B_P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n-1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β' -Box um T' enthalten ist. Sei $T \subset P$ mit maximal $n-1$ Punkten und $f(T) = T'$. Es gilt

$$\inf_{x \in T} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T} \pi_i(x) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Angenommen, obige Ungleichung gilt auch für $i = n+1$. Dann sind wir fertig. Andernfalls gilt

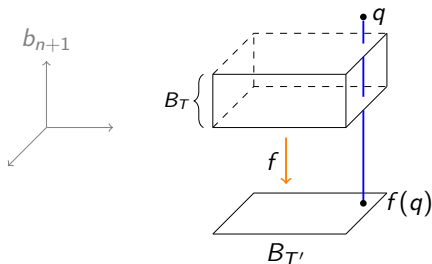
$$\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x) \quad \text{oder} \quad \pi_{n+1}(q) < \inf_{x \in T} \pi_{n+1}(x).$$

Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsschritt (Fortsetzung):

Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$.

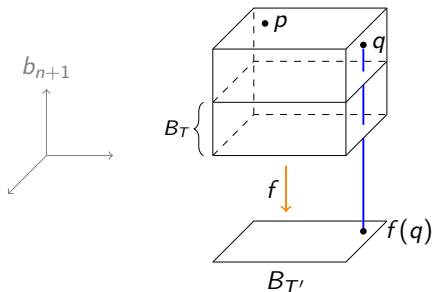


Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsschritt (Fortsetzung):

Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$. Da P kompakt ist, gibt es $p \in P$ mit $\pi_{n+1}(p) = \sup_{x \in P} \pi_{n+1}(x)$.

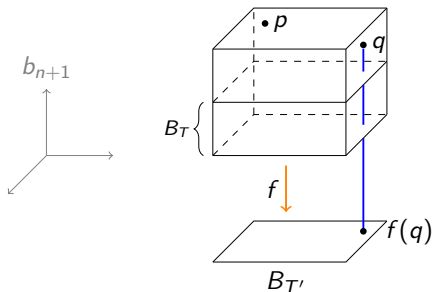


Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsschritt (Fortsetzung):

Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$. Da P kompakt ist, gibt es $p \in P$ mit $\pi_{n+1}(p) = \sup_{x \in P} \pi_{n+1}(x)$. Aus $q \in B_P$ folgt $\pi_{n+1}(q) \leq \pi_{n+1}(p)$.



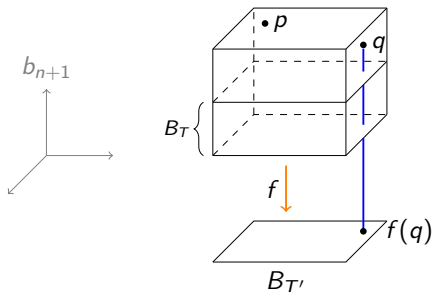
Beweis.

(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsschritt (Fortsetzung):

Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$. Da P kompakt ist, gibt es $p \in P$ mit $\pi_{n+1}(p) = \sup_{x \in P} \pi_{n+1}(x)$. Aus $q \in B_P$ folgt $\pi_{n+1}(q) \leq \pi_{n+1}(p)$. Somit gilt für $i \in \{1, \dots, n, n+1\}$:

$$\inf_{x \in T \cup \{p\}} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T \cup \{p\}} \pi_i(x)$$



Beweis.

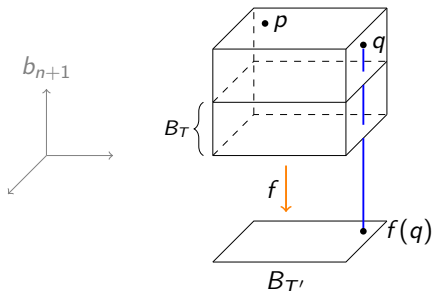
(c) \Rightarrow (a) Durch Induktion über n .

Induktionsschritt (Fortsetzung):

Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$. Da P kompakt ist, gibt es $p \in P$ mit $\pi_{n+1}(p) = \sup_{x \in P} \pi_{n+1}(x)$. Aus $q \in B_P$ folgt $\pi_{n+1}(q) \leq \pi_{n+1}(p)$. Somit gilt für $i \in \{1, \dots, n, n+1\}$:

$$\inf_{x \in T \cup \{p\}} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T \cup \{p\}} \pi_i(x)$$

Widerspruch zu (c).



Korollar (10.3)

Sei $P \subset E^n$ ($n \geq 2$) nichtleer und kompakt.

Angenommen, $q \in E^n$ erfüllt das System von Ungleichungen

$$\inf_{x \in P} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in P} \pi_i(x) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dann gibt es eine Menge $T \subset P$ mit höchstens n Punkten und

$$\inf_{x \in T} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T} \pi_i(x) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Theorem (Carathéodory, 2.23)

Sei $P \subset E^n$ nichtleer und sei $q \in E^n$.

Dann ist jeder Punkt $p \in P$ eine Konvexkombination von maximal $n+1$ Punkten aus P .

Theorem (Carathéodory, Umformulierung)

Sei $P \subset E^n$ nichtleer und sei $q \in E^n$.

Angenommen, für jede Menge $T \subset P$ mit höchstens $n+1$ Punkten gibt es eine Hyperebene, die T und $\{q\}$ streng trennt. Dann ist q nicht in der konvexen Hülle von P enthalten.

Korollar (10.4)

Sei $P \subset E^n$ ($n \geq 2$) nichtleer und kompakt und sei $q \in E^n$.

Sei $\beta = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von E^n und H_i der von $\beta \setminus \{b_i\}$ aufgespannte Unterraum für $i \in \{1, \dots, n\}$. Angenommen, für jede Menge $T \subset P$ mit höchstens n Punkten gibt es eine Hyperebene, die parallel zu einem der H_i ist und T und $\{q\}$ streng trennt. Dann ist P nicht in der konvexen Hülle von P enthalten.

Korollar (10.4)

Sei $P \subset E^n$ ($n \geq 2$) nichtleer und **kompakt** und sei $q \in E^n$.

Sei $\beta = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von E^n und H_i der von $\beta \setminus \{b_i\}$ aufgespannte Unterraum für $i \in \{1, \dots, n\}$. Angenommen, für jede Menge $T \subset P$ mit höchstens n Punkten gibt es eine Hyperebene, die **parallel** zu einem der H_i ist und T und $\{q\}$ streng trennt. Dann ist P nicht in der konvexen Hülle von P enthalten.

Korollar (10.4)

Sei $P \subset E^n$ ($n \geq 2$) nichtleer und **kompakt** und sei $q \in E^n$.
Sei $\beta = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von E^n und H_i der von $\beta \setminus \{b_i\}$ aufgespannte Unterraum für $i \in \{1, \dots, n\}$. Angenommen, für jede Menge $T \subset P$ mit höchstens n Punkten gibt es eine Hyperebene, die **parallel** zu einem der H_i ist und T und $\{q\}$ streng trennt. Dann ist P nicht in der konvexen Hülle von P enthalten.

Beweis.

Wegen Satz 10.4 gibt es eine β -Box B_P , die P enthält und disjunkt zu $\{q\}$ ist.

Korollar (10.4)

Sei $P \subset E^n$ ($n \geq 2$) nichtleer und **kompakt** und sei $q \in E^n$.
Sei $\beta = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von E^n und H_i der von $\beta \setminus \{b_i\}$ aufgespannte Unterraum für $i \in \{1, \dots, n\}$. Angenommen, für jede Menge $T \subset P$ mit höchstens n Punkten gibt es eine Hyperebene, die **parallel** zu einem der H_i ist und T und $\{q\}$ streng trennt. Dann ist P nicht in der konvexen Hülle von P enthalten.

Beweis.

Wegen Satz 10.4 gibt es eine β -Box B_P , die P enthält und disjunkt zu $\{q\}$ ist. Es folgt $\{q\} \cap \text{conv}P \subset \{q\} \cap B_P = \emptyset$, also $q \notin \text{conv}P$. □

Danke für die Aufmerksamkeit!