Geometrische Morphismen; Eigenschaften von Topoi und Konstruktionen mit Topoi

Tim Baumann

13. April 2017

1 Geometrische Morphismen

Definition. Ein *geometrischer Morphismus* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ zwischen Topoi ist ein Paar

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, shift right, "f_*"'] & \mathcal{D} \arrow[l, shift right, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

von adjungierten Funktoren, wobei f^* linksexakt ist, d. h. f^* bewahrt endliche Limiten.
Dabei heißt f^* *Urbildfunktor* und f_* *Direktes-Bild-Funktor*.

Erinnerung. Außerdem bewahrt f_* Limiten und f^* Kolimiten, denn:

Left-Adjoints Preserve Colimits (LAPC), *Right-Adjoints Preserve Limits (RAPL)*

Bemerkung. Aus dem Yoneda-Lemma folgt: Bei einer Adjunktion $F \dashv G$ ist F eindeutig (bis auf Isomorphie) durch G bestimmt (und umgekehrt). Die Daten eines geometrischen Morphismus sind also schon allein durch f^* oder f_* gegeben.

Definition. Ein *Punkt* eines Topos $\mathcal{E}$ ist ein geometrischer Morphismus $\mathbf{Set} \to \mathcal{E}$.

Bemerkung. Diese Definition ergibt Sinn, da für $\mathcal{E} = \mathbf{Sh}(X)$ geometrische Morphismen $\mathbf{Set} = \mathbf{Sh}(\{\heartsuit\}) \to \mathbf{Sh}(X)$ in 1-zu-1-Korrespondenz zu stetigen Abbildungen $\{\heartsuit\} \to X$, also Punkten von X, stehen.
TODO: warum sind Punkte interessant?

Beispiel. Sei $\mathcal{E}$ ein kovollständiger Topos (z. B. ein Grothendiecktopos). Dann hat der *Globale-Schnitte-Funktor*

$$\Gamma : \mathcal{E} \to \mathbf{Set}, \quad E \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, E)$$

einen Linksadjungierten, nämlich

$$\Delta : \mathbf{Set} \to \mathcal{E}, \quad S \mapsto \coprod_{s \in S} 1.$$

Für diesen gelten

$$\Delta(\{\heartsuit\}) = \coprod_{s \in \{\heartsuit\}} 1 \cong 1$$
$$\Delta(S \times T) = \coprod_{(s,t) \in S \times T} 1 \cong \left(\coprod_{s \in S} 1 \right) \times \left(\coprod_{t \in T} 1 \right) = \Delta(S) \times \Delta(T)$$

Außerdem kann man zeigen, dass Δ auch Differenzkerne und somit alle endlichen Limiten erhält. Folglich ist

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, shift right, "\Gamma"'] & \mathbf{Set} \arrow[l, shift right, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

ein geometrischer Morphismus.
Es gibt auch keinen anderen geometrischen Morphismus $f : \mathcal{E} \to \mathbf{Set}$, denn für jeden solchen Morphismus und jedes Objekt $E \in \mathcal{E}$ gilt:

$$f_* E \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, f_* E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(f^* 1, E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, E) \cong \Gamma(E).$$

2 Stetige Abbildungen induzieren geometrische Morphismen

TODO

3 Scheibenkategorien von Topoi sind Topoi

Satz. Sei $\mathcal{E}$ ein Topos, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$. Dann ist auch die Scheibenkategorie $\mathcal{E}/B$ ein Topos.

Beweis. Wir müssen die Toposaxiome nachrechnen:

① $\mathcal{E}/B$ ist endlich vollständig:

Der Differenzkern berechnet sich wie in $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[drr] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\ & & B \end{tikzcd}$$

Binäre Produkte in $\mathcal{E}/B$ sind Pullbacks in $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} & X \times_B Y \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Das terminale Objekt in $\mathcal{E}/B$ ist der Morphismus $\mathrm{id}_B : B \to B$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "\mathrm{id}_B"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

② $\mathcal{E}/B$ besitzt einen Unterobjektklassifizierer:

Sei $U : \mathcal{E}/B- > \mathcal{E}$ der offensichtliche Vergissfunktor. Dieser Funktor ist linksadjungiert zum Funktor $(- \times B) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/B$, denn es gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, Y)\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X \xrightarrow{f} B, Y \times B \xrightarrow{\pi_2} B)$$

natürlich in $(X \xrightarrow{f} B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}/B)$ und $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$. Da ein Morphismus f in $\mathcal{E}/B$ genau dann ein Monomorphismus ist, wenn $U(f)$ ein solcher ist, gilt:

$$\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}/B}(A \xrightarrow{f} B) \cong \mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega_{\mathcal{E}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(A \xrightarrow{f} B, \Omega_{\mathcal{E}} \times B \xrightarrow{\pi_2} B)$$

Nach Proposition I.3.1 in SiGaL ist folglich $\Omega_{\mathcal{E}/B} = \Omega_{\mathcal{E}} \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ der Unterobjektklassifizierer in $\mathcal{E}/B$. Der universelle Monomorphismus $\mathrm{true} : 1 \to \Omega$ ist die Komposition

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_B"'] & 1 \times B \arrow[r, "\mathrm{true}_{\mathcal{E}} \times \mathrm{id}_B"] \arrow[d, "\pi_2"] & \Omega \times B \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

③ $\mathcal{E}/B$ ist kartesisch abgeschlossen:

TODO: gibt es hierfür eine schöne Konstruktion mithilfe der internen Sprache? Die Konstruktion in SiGaL ist zu kompliziert und nimmt außerdem $Z = \Omega$ an. Vergleich mit Set: Dort gilt $Z^Y = \amalg_{b \in B} Z_b^{Y_b}$.

□

TODO: Evtl. erwähnen wie Kolimiten berechnet werden

Definition. Sei $k : B \to A$ ein Morphismus in $\mathcal{E}$. Dann erhalten wir einen Funktor

$$\Sigma_k : \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/A, \quad (X \xrightarrow{p_X} B) \mapsto (k \circ p_X : X \xrightarrow{p_X} B \xrightarrow{k} A)$$

durch Komponieren mit k und einen *Basiswechselfunktor*

$$k^* : \mathcal{E}/A \to \mathcal{E}/B, \quad (X \xrightarrow{p_X} A) \mapsto (B \times_A X \xrightarrow{\pi_B} B)$$

durch Pullback entlang k.

Lemma. $\Sigma_k \dashv k^*$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/A}(\Sigma_k(X \to B), Y \to A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X \to B, k^*(Y \to A)).$$

Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, dashed] \arrow[ddr] & & \\
& B \times_A Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
& B \arrow[r, "k"] & A
\end{tikzcd}$$

Elemente der linken Hom-Menge sind Morphismen $X \to Y$, die das äußere Viereck kommutieren lassen; Elemente der rechten Hom-Menge sind Morphismen $X \to B \times_A Y$, die das linke Dreieck kommutieren lassen. Zwischen solchen Elementen besteht eine 1-zu-1-Korrespondenz, gegeben durch die universelle Eigenschaft des Pullbacks $B \times_A Y$. □

Lemma. k^* besitzt auch einen Rechtsadjungierten $\Pi_k : \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/A$.

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $A \cong 1$ und somit $\mathcal{E}/A \cong \mathcal{E}$. (Ansonsten verwende $\mathcal{E}' := \mathcal{E}/A$ und $B' := (B \xrightarrow{k} A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}')$ anstelle von $\mathcal{E}$ bzw. B. Beachte, dass $\mathcal{E}'/B' \simeq \mathcal{E}/B$.)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(k^*(X), Y \xrightarrow{h} B) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X \times B \xrightarrow{\pi_B} B, Y \xrightarrow{h} B) \\
&\cong \{t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X \times B, Y) \,|\, h \circ t = \pi_B\} \\
&\cong \{t' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, Y^B) \,|\, h^B \circ t' = j \circ !\} \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \{g : Y^B \,|\, h \circ g = \mathrm{id}_B\})
\end{aligned}$$

wobei $j : 1 \to B^B$ die Curryfizierung von id_B und $! : X \to 1$ ist. Wir definieren somit Π_k durch

$$\Pi_k(k : Y \to B) := \{g : Y^B \,|\, h \circ g = \mathrm{id}_B\}.$$

□

Korollar. $\mathcal{E}/B \underset{\Sigma_k}{\overset{k^*}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{E}/A$ ist ein geometrischer Morphismus.

Dieser ist *wesentlich*, d. h. k^* besitzt auch einen Linksadjungierten.

4 Lawvere-Tierney-Topologien und Garbifizierung

Definition. Eine *Lawvere-Tierney-Topologie* auf einem Topos $\mathcal{E}$ ist ein Morphismus $j : \Omega \to \Omega$, für den gilt:

(a) $j \circ \mathrm{true} = \mathrm{true}$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\mathrm{true}"] \arrow[dr, "\mathrm{true}"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}$$

(b) $j \circ j = j$

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}$$

(b) $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$

$$\begin{tikzcd}
\Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "j \times j"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
\Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Interpretation. j ist ein idempotenter, mit $\wedge$ und true verträglicher modaler Operator
Zum Beispiel: Sei φ eine Aussage. Die anschauliche Bedeutung von $\Box\varphi$ ist „φ gilt immer“. Dann sollten intuitiv auch folgende Regeln gelten:

$$\Box\top = \top, \qquad \Box\Box\varphi \iff \Box\varphi \qquad \text{sowie} \qquad (\Box\varphi) \wedge (\Box\psi) \iff \Box(\varphi \wedge \psi)$$

Solch ein Operator $\Box$ sollte also eine Lawvere-Tierney-Topologie stiften. Im Gegensatz dazu stiftet der Operator $\Diamond$ mit der Interpretation „$\Diamond\varphi$ gilt, falls φ möglich ist“, denn aus $\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$ folgt i. A. nicht $\Diamond(\varphi \wedge \psi)$.

Definition. Für ein Unterobjekt $A \hookrightarrow E$ ist $\overline{A} \hookrightarrow E$ dasjenige Unterobjekt mit

$$\chi_{\overline{A}} = j \circ \chi_A : E \to \Omega.$$

Lemma.
- $A \subseteq \overline{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$ (Natürlichkeit)

Definition. Sei j eine Lawvere-Tierney-Topologie auf $\mathcal{E}$.

- Ein Unterobjekt $A \hookrightarrow E$ heißt *dicht*, falls $\overline{A} = E$.
- Eine j-*Garbe* ist ein Objekt $F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$, für das gilt:
  Für alle dichten Unterobjekte $A \overset{m}{\hookrightarrow} E$ ist $m^* : \mathrm{Hom}(E, F) \to \mathrm{Hom}(A, F)$ ein Isomorphismus.
- $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$ ist die volle Unterkategorie der j-Garben von $\mathcal{E}$.

Satz. $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$ ist ein Topos.

Beweisskizze. Zeige:

- Die Unterkategorie $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$ ist abgeschlossen unter der Bildung von Limiten und Exponentialobjekten.
- Sei Ω_j der Differenzkern

  $$\Omega_j \longrightarrow \Omega \underset{\mathrm{id}}{\overset{j}{\rightrightarrows}} \Omega$$

  Nenne ein Subobjekt $A \hookrightarrow F$ *abgeschlossen*, falls $\overline{A} = A$. Für eine j-Garbe F zeige dann, dass

  $$\mathrm{Sub}_{\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})}(F) = \{A \in \mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(F) \mid A \text{ abgeschlossen}\} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(F, \Omega_j)$$

  und dass Ω_j eine F-Garbe ist. Somit ist Ω_j der Unterobjektklassifizierer von $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$. □

Sei $i : \mathbf{Sh}_j(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ der Einbettungsfunktor.

Satz/Definition.
- i hat einen Linksadjungierten, die j-*Garbifizierung* $\mathbf{a} : \mathcal{E} \to \mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$.
- $\mathbf{a}$ ist linksexakt.

Korollar/Definition. $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E}) \underset{i}{\overset{\mathbf{a}}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{E}$ ist ein geometrischer Morphismus.

Dieser ist eine *geometrische Einbettung*, d. h. der Direktes-Bild-Funktor i ist volltreu. Dies macht $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$ zu einem *Untertopos* von $\mathcal{E}$.

Bemerkung. Bis auf Kategorienäquivalenz ist jede geometrische Einbettung von dieser Form.

Beispiel. **FinSet** ist kein Untertopos von **Set** vermöge der Inklusion $i : \mathbf{FinSet} \to \mathbf{Set}$, denn es gibt keine endliche Menge X mit

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{FinSet}}(X, \{\heartsuit, \diamondsuit\}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathbb{N}, i(\{\heartsuit, \diamondsuit\})).$$

Somit besitzt i keinen Linksadjungierten.

Satz. Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie und $\mathcal{E} := [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$. Dann gibt es eine 1-zu-1-Korrespondenz

$$\begin{array}{rcl} \{\text{ Grothendieck-Topologien auf } \mathcal{C} \text{ }\} & \leftrightarrow & \{\text{ Lawvere-Tierney-Topologien auf } \mathcal{E} \text{ }\} \\ J & \mapsto & j_J := ((j_J)_C : S \mapsto \{g \mid \mathrm{codom}(g) = C,\ S \text{ überdeckt } g\})_{C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ J_j := j^*(1 \overset{\mathrm{true}}{\hookrightarrow} \Omega) & \leftarrow\!\shortmid & j \end{array}$$

(Erinnerung: $\Omega \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ ist die Prägarbe mit $\Omega(C) := \{$ Siebe auf C $\}$.)

Satz. Desweiteren gilt für eine Prägarbe $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$:

$$P \text{ ist } j\text{-Garbe} \iff P \text{ ist Garbe bzgl. } J_j, \text{ also } P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sh}(\mathcal{E}, J_j)).$$

Korollar. Die Garbifizierungen einer Prägarbe bzgl. der Lawvere-Tierney-Topologie j oder der zugehörigen Grothendieck-Topologie J_j sind isomorph.

5 Weitere Quellen für geometrische Morphismen

Satz. Sei $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann gibt es einen geometrischen Morphismus

$[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \underset{\phi_*}{\overset{\phi^*}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} [\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ mit $\phi^*(P) := (\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\phi^{\mathrm{op}}} \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set})$. Dieser ist wesentlich.