Alexandrov-Krümmung, Hadamard-Räume und der Satz von Cartan-Hadamard

Tim Baumann

Seminar Metrische Geometrie

17. Juni 2014

Lemma (BH, II.4.3)

Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0)-Raum und $c : [0,1] \to X$ eine Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(1)$. Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{2\epsilon}(c(t))}$ für alle $t \in [0,1]$ ein CAT(0)-Gebiet ist. Dann gilt:

1. Seien $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ linear parametrisierte Geodäten mit
$$d(\alpha(t), c(t)) < \epsilon \quad \text{und} \quad d(\beta(t), c(t)) < \epsilon \quad \forall t \in [0,1].$$
Dann ist die Abstandsfunktion $\delta(t) := d(\alpha(t), \beta(t))$ konvex.
2. Für alle $\overline{x} \in B_\epsilon(x)$ und $\overline{y} \in B_\epsilon(y)$ gibt es genau eine Geodäte $\overline{c} : [0,1] \to X$ von $\overline{x}$ nach $\overline{y}$, sodass
$$t \mapsto d(c(t), \overline{c}(t))$$
konvex ist.
3. Außerdem gilt: $L(\overline{c}) \leq d(x, \overline{x}) + L(c) + d(\overline{y}, y)$

Bemerkung

Solch ein $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von $c([0,1])$.

Lemma (BH, II.4.3)

Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0)-Raum und $c : [0, 1] \to X$ eine Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(1)$. Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{2\epsilon}(c(t))}$ für alle $t \in [0, 1]$ ein CAT(0)-Gebiet ist. Dann gilt:

1. Seien $\alpha, \beta : [0, 1] \to X$ linear parametrisierte Geodäten mit
$$d(\alpha(t), c(t)) < \epsilon \quad \text{und} \quad d(\beta(t), c(t)) < \epsilon \quad \forall t \in [0, 1].$$
Dann ist die Abstandsfunktion $\delta(t) := d(\alpha(t), \beta(t))$ konvex.
2. Für alle $\overline{x} \in B_\epsilon(x)$ und $\overline{y} \in B_\epsilon(y)$ gibt es genau eine Geodäte $\overline{c} : [0, 1] \to X$ von $\overline{x}$ nach $\overline{y}$, sodass
$$t \mapsto d(c(t), \overline{c}(t))$$
konvex ist.
3. Außerdem gilt: $L(\overline{c}) \leq d(x, \overline{x}) + L(c) + d(\overline{y}, y)$

Bemerkung

Solch ein $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von $c([0, 1])$.

Definition

Sei X ein metrischer Raum und $p \in X$. Dann wird

$$\tilde{X}_p := \{\text{Geodäten } \gamma : [0,1] \to X \text{ mit } \gamma(0) = p \\ \text{und } \gamma \text{ linear parametrisiert}\}$$

Raum der Geodäten mit Startpunkt p genannt. Mit der Metrik

$$d(\alpha, \beta) := \max_{t \in [0,1]} |\alpha(t) - \beta(t)|$$

wird $(\tilde{X}_p, d)$ zu einem metrischen Raum.
Der Punkt $\tilde{p} \in \tilde{X}_p$ sei die konstante Geodäte $t \mapsto p$.

Definition

Die Exponentialabbildung ist die Abbildung

$$\exp_p : \tilde{X}_p \to X, \quad \gamma \mapsto \gamma(1),$$

welche jede Geodäte auf ihren Endpunkt abbildet.

Definition

Sei X ein metrischer Raum und $p \in X$. Dann wird

$$\tilde{X}_p := \{\text{Geodäten } \gamma : [0,1] \to X \text{ mit } \gamma(0) = p \\ \text{und } \gamma \text{ linear parametrisiert}\}$$

Raum der Geodäten mit Startpunkt p genannt. Mit der Metrik

$$d(\alpha, \beta) := \max_{t \in [0,1]} |\alpha(t) - \beta(t)|$$

wird $(\tilde{X}_p, d)$ zu einem metrischen Raum.
Der Punkt $\tilde{p} \in \tilde{X}_p$ sei die konstante Geodäte $t \mapsto p$.

Definition

Die Exponentialabbildung ist die Abbildung

$$\exp_p : \tilde{X}_p \to X, \quad \gamma \mapsto \gamma(1),$$

welche jede Geodäte auf ihren Endpunkt abbildet.

Lemma (BH, II.4.6)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann ist auch $\tilde{X}_p$ vollständig.

Lemma (BH, II.4.5)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann gilt:

1. $\tilde{X}_p$ ist zusammenziehbar.
2. Für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}_p$ existiert ein $r > 0$, sodass $\exp_p(B_r(\tilde{x})) = B_r(\exp_p(\tilde{x}))$ und
$$\exp_p|_{B_r(\tilde{x})} : B_r(\tilde{x}) \to B_r(\exp_p(\tilde{x}))$$
eine Isometrie ist. Insbesondere ist $\exp_p : \tilde{X}_p \to X$ ist eine lokale Isometrie.

Korollar

$\tilde{X}_p$ ist einfach zusammenhängend.

Lemma (BH, II.4.6)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann ist auch $\tilde{X}_p$ vollständig.

Lemma (BH, II.4.5)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann gilt:

1. $\tilde{X}_p$ ist zusammenziehbar.
2. Für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}_p$ existiert ein $r > 0$, sodass $\exp_p(B_r(\tilde{x})) = B_r(\exp_p(\tilde{x}))$ und
$$\exp_p|_{B_r(\tilde{x})} : B_r(\tilde{x}) \to B_r(\exp_p(\tilde{x}))$$
eine Isometrie ist. Insbesondere ist $\exp_p : \tilde{X}_p \to X$ ist eine lokale Isometrie.

Korollar

$\tilde{X}_p$ ist einfach zusammenhängend.

Lemma (BH, II.4.6)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann ist auch $\tilde{X}_p$ vollständig.

Lemma (BH, II.4.5)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann gilt:

1. $\tilde{X}_p$ ist zusammenziehbar.
2. Für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}_p$ existiert ein $r > 0$, sodass $\exp_p(B_r(\tilde{x})) = B_r(\exp_p(\tilde{x}))$ und
$$\exp_p|_{B_r(\tilde{x})} : B_r(\tilde{x}) \to B_r(\exp_p(\tilde{x}))$$
eine Isometrie ist. Insbesondere ist $\exp_p : \tilde{X}_p \to X$ ist eine lokale Isometrie.

Korollar

$\tilde{X}_p$ ist einfach zusammenhängend.

Definition

Seien X, Y topologische Räume und $p : X \to Y$ stetig. Eine Teilmenge $U \subset Y$ wird von p gleichmäßig überlagert, falls es einen diskreten topologischen Raum D und einen Homöomorphismus $\phi : p^{-1}(U) \to U \times D$ gibt, sodass kommutiert:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times D \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Die Abbildung p ist eine Überlagerung, falls jeder Punkt in y eine gleichmäßig überlagerte Umgebung besitzt.

Beispiel

Jeder Homöomorphismus ist auch eine Überlagerung.

Definition

Seien X, Y topologische Räume und $p : X \to Y$ stetig. Eine Teilmenge $U \subset Y$ wird von p gleichmäßig überlagert, falls es einen diskreten topologischen Raum D und einen Homöomorphismus $\phi : p^{-1}(U) \to U \times D$ gibt, sodass kommutiert:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times D \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Die Abbildung p ist eine Überlagerung, falls jeder Punkt in y eine gleichmäßig überlagerte Umgebung besitzt.

Beispiel

Jeder Homöomorphismus ist auch eine Überlagerung.

Überlagerungsabbildungen $p : \tilde{X} \to X$ besitzen folgende wichtige Hochhebungseigenschaften:

Lemma (Hochheben von Wegen)

Sei $\gamma : [0,1] \to X$ ein stetiger Weg und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = \gamma(0)$. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$ mit

$$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0 \quad \text{und} \quad p \circ \tilde{\gamma} = \gamma.$$

Lemma (Hochheben von Weghomotopien)

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ zwei stetige Wege mit $x_0 := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ zusammen mit einer Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ zwischen γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte. Sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$ und $\tilde{\gamma_1}, \tilde{\gamma_2} : [0,1] \to \tilde{X}$ die Hochhebungen von γ_1 bzw. γ_2 wie in obigem Lemma. Dann gibt es genau eine Homotopie

$$\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$$

von $\tilde{\gamma_1}$ und $\tilde{\gamma_2}$ relativ der Endpunkte.

Überlagerungsabbildungen $p : \tilde{X} \to X$ besitzen folgende wichtige Hochhebungseigenschaften:

Lemma (Hochheben von Wegen)

Sei $\gamma : [0,1] \to X$ ein stetiger Weg und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = \gamma(0)$. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$ mit

$$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0 \quad \text{und} \quad p \circ \tilde{\gamma} = \gamma.$$

Lemma (Hochheben von Weghomotopien)

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ zwei stetige Wege mit $x_0 := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ zusammen mit einer Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ zwischen γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte. Sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$ und $\tilde{\gamma_1}, \tilde{\gamma_2} : [0,1] \to \tilde{X}$ die Hochhebungen von γ_1 bzw. γ_2 wie in obigem Lemma. Dann gibt es genau eine Homotopie

$$\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$$

von $\tilde{\gamma_1}$ und $\tilde{\gamma_2}$ relativ der Endpunkte.

Lemma (BH, I.3.28.)

Sei X ein wegzusammenhängender metrischer Raum, $\tilde{X}$ ein vollständiger metrischer Raum und $p : \tilde{X} \to X$ ein lokaler Homöomorphismus. Angenommen,

- $L(\tilde{\alpha}) \leq L(p \circ \tilde{\alpha})$ für alle Wege $\alpha : [0, 1] \to \tilde{X}$
- für alle $x \in X$ gibt es ein $r > 0$, sodass jedes $y \in B_r(x)$ mit x durch eine eindeutige linear parametrisierte Geodäte $\gamma_y : [0, 1] \to B_r(x)$ verbunden ist und γ_y stetig von y abhängt.

Dann ist p eine Überlagerung.

Folgerung

Sei X ein Hadamard-Raum (vollständig, einfach zshgd, CAT(0)) und $p \in X$. Dann ist $\exp_p : \tilde{X}_p \to X$ eine Überlagerung.

Definition

Ein vollständiger, einfach zusammenhängender Längenraum mit Alexandrov-Krümmung ≤ 0 heißt Hadamard-Raum.

Lemma

Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerungsabbildung, $\tilde{X} \neq \emptyset$, X einfach zusammenhängend und $\tilde{X}$ wegzusammenhängend. Dann ist p ein Homöomorphismus.

Folgerung

$exp_p : \tilde{X}_p \to X$ ist ein Homöomorphismus, wenn X ein Hadamard-Raum ist.

Satz (Cartan-Hadamard)

1. Für alle Paare p, q von Punkte in einem Hadamard-Raum gibt es genau eine verbindende Geodäte σ_{pq}.
2. All diese Geodäten sind kürzeste Wege.

Definition

Ein vollständiger, einfach zusammenhängender Längenraum mit Alexandrov-Krümmung ≤ 0 heißt Hadamard-Raum.

Lemma

Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerungsabbildung, $\tilde{X} \neq \emptyset$, X einfach zusammenhängend und $\tilde{X}$ wegzusammenhängend. Dann ist p ein Homöomorphismus.

Folgerung

$exp_p : \tilde{X}_p \to X$ ist ein Homöomorphismus, wenn X ein Hadamard-Raum ist.

Satz (Cartan-Hadamard)

1. Für alle Paare p, q von Punkte in einem Hadamard-Raum gibt es genau eine verbindende Geodäte σ_{pq}.
2. All diese Geodäten sind kürzeste Wege.

Satz

Sei X ein Hadamard-Raum. Dann gilt für alle $x, y, z \in X$ mit verbindenden Kürzesten $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$: Die Winkelsumme des Dreiecks $\Delta(x, y, z)$ ist $\leq \pi$.

Bemerkung

Dies ist äquivalent dazu, dass das Dreieck die Vergleichseigenschaft erfüllt. Somit sind in Hadamard-Räumen Dreiecke beliebiger Größe „dünn“.

Beweis

„Alexandrovs Flickwerk“