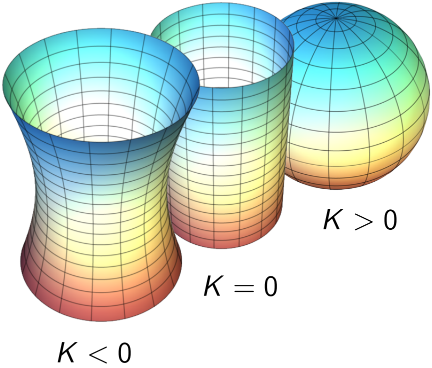
Alexandrov-Krümmung, Hadamard-Räume und der Satz von Cartan-Hadamard

Tim Baumann

Seminar Metrische Geometrie

27. Mai 2014

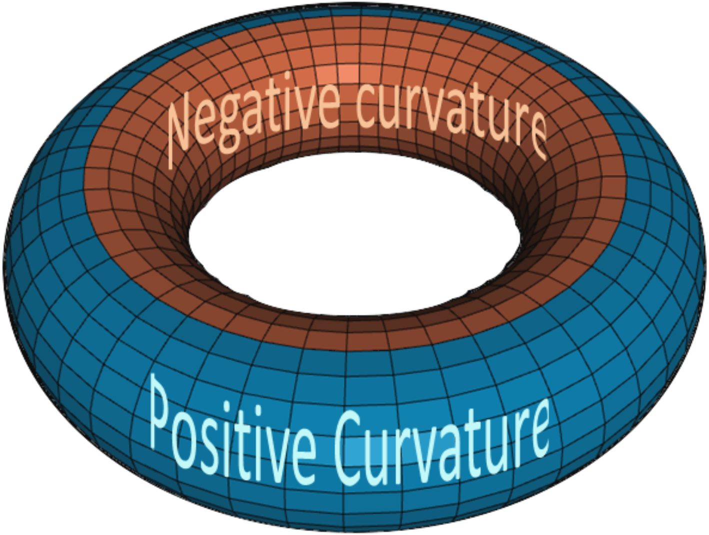
Krümmung in der Differentialgeometrie

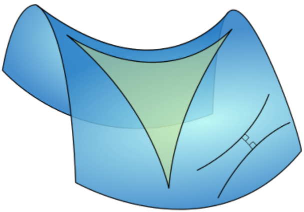


Für die Gaußkrümmung K im Punkt u gilt $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(W_u)$, wobei κ_1 und κ_2 die Hauptkrümmungen und

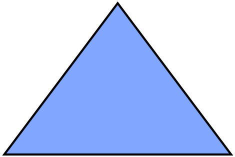
$$W_u := D_u\nu \circ (D_uX)^{-}1 : T_uX \to T_uX$$

die Weingartenabbildung in u bezeichnet.

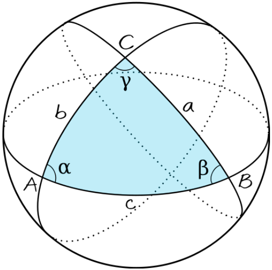

Negative curvature
Positive Curvature



$K < 0$



$K = 0$



$K > 0$

Für $K \in \mathbb{R}$ ist der Modellraum M_K^2 definiert durch

$$M_K^2 := \begin{cases} (S^2, \frac{1}{\sqrt{K}} d_{S_2}) & \text{für } K > 0, \\ (\mathbb{E}^2, d_{\mathbb{E}^2}) & \text{für } K = 0, \\ (\mathbb{H}^2, \frac{1}{\sqrt{-K}} d_{\mathbb{H}^2}) & \text{für } K < 0, \end{cases}$$

wobei $\mathbb{E}^2 = \mathbb{R}^2$ den gewöhnlichen euklidischen Raum und $\mathbb{H}^2$ den zweidimensionalen hyperbolischen Raum mit konstanter Krümmung -1 bezeichnet.
Dabei sind d_{S^2} und $d_{\mathbb{H}^2}$ die induzierten intrinsichen Normen.
Im Fall $K \neq 0$ bezeichnet $\frac{1}{\sqrt{|K|}} d$ die skalierte Metrik

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{|K|}} d(x, y).$$

Sei $K \in \mathbb{R}$ und (X, d) ein Längenraum.

Definition

Ein Dreieck Δabc in X besteht aus drei Eckpunkten $a, b, c \in X$ und verbindenden kürzesten Wegen $\sigma_{ab}, \sigma_{bc}, \sigma_{ac} : [0, 1] \to X$.

Sei $K \in \mathbb{R}$ und (X, d) ein Längenraum.

Definition

Ein Dreieck Δabc in X besteht aus drei Eckpunkten $a, b, c \in X$ und verbindenden kürzesten Wegen $\sigma_{ab}, \sigma_{bc}, \sigma_{ac} : [0, 1] \to X$.

Definition

Ein Vergleichsdreieck $\Delta\overline{abc}$ von Δabc in M_K^2 besteht aus drei Punkten $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in M_K^2$ und verbindenden kürzesten Wegen $\sigma_{\overline{ab}}, \sigma_{\overline{bc}}, \sigma_{\overline{ca}} : [0, 1] \to M_K^2$, sodass gilt:

$$d_{M_K^2}(\overline{a}, \overline{b}) = d(a, b), \quad d_{M_K^2}(\overline{b}, \overline{c}) = d(b, c), \quad d_{M_K^2}(\overline{c}, \overline{a}) = d(c, a)$$

Sei $K \in \mathbb{R}$ und (X, d) ein Längenraum.

Definition

Ein Dreieck Δabc in X besteht aus drei Eckpunkten $a, b, c \in X$ und verbindenden kürzesten Wegen $\sigma_{ab}, \sigma_{bc}, \sigma_{ac} : [0,1] \to X$.

Definition

Ein Vergleichsdreieck $\Delta\overline{abc}$ von Δabc in M_K^2 besteht aus drei Punkten $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in M_K^2$ und verbindenden kürzesten Wegen $\sigma_{\overline{ab}}, \sigma_{\overline{bc}}, \sigma_{\overline{ca}} : [0,1] \to M_K^2$, sodass gilt:

$$d_{M_K^2}(\overline{a}, \overline{b}) = d(a,b), \quad d_{M_K^2}(\overline{b}, \overline{c}) = d(b,c), \quad d_{M_K^2}(\overline{c}, \overline{a}) = d(c,a)$$

Definition

Ein Vergleichspunkt von $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ in einem Vergleichsdreieck $\Delta\overline{abc}$ ist ein Punkt $\overline{d} \in \mathrm{Bild}(\sigma_{\overline{ac}})$ mit $d(a,d) = d_{M_K^2}(\overline{a}, \overline{d})$.

Sei $K \in \mathbb{R}$ und (X, d) ein Längenraum.

Definition

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt CAT(K)-Gebiet, falls gilt:

- Für alle $x, y \in U$ gibt es eine Geodäte $\sigma_{xy} : [0, 1] \to U$ der Länge $d(x, y)$.
- Alle Dreiecke Δabc mit Eckpunkten und Seiten in U erfüllen die CAT(K)-Vergleichseigenschaft:
  Für alle $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit Vergleichspunkt $\overline{d}$ in $\Delta\overline{abc}$ gilt
  $$d(b, d) \leq d_{M_K^2}(\overline{b}, \overline{d}).$$
  und analog für $d' \in \sigma_{ab}$, $d'' \in \sigma_{bc}$.

Sei $K \in \mathbb{R}$ und (X, d) ein Längenraum.

Definition

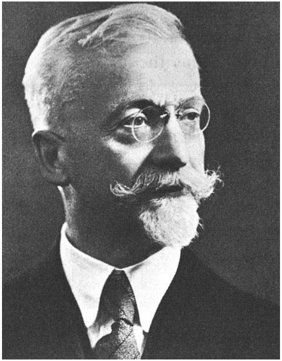
Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt CAT(K)-Gebiet, falls gilt:

- Für alle $x, y \in U$ gibt es eine Geodäte $\sigma_{xy} : [0, 1] \to U$ der Länge $d(x, y)$.
- Alle Dreiecke Δabc mit Eckpunkten und Seiten in U erfüllen die CAT(K)-Vergleichseigenschaft:
  Für alle $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit Vergleichspunkt $\overline{d}$ in $\Delta\overline{abc}$ gilt
  $$d(b, d) \leq d_{M_K^2}(\overline{b}, \overline{d}).$$
  und analog für $d' \in \sigma_{ab}$, $d'' \in \sigma_{bc}$.

Definition

Der Längenraum X heißt CAT(K)-Raum, falls X eine Überdeckung mit offenen CAT(K)-Gebieten besitzt.
Man sagt auch, der Raum habe Alexandrov-Krümmung $\leq K$.

Warum der Name CAT(K)?



Élie Cartan
(1869-1951)

Alexander D. Alexandrov
(1912-1999)

Victor A. Toponogov
(1930-2004)

Bemerkung (BBI, Exercise 4.1.11)

Es reicht aus, in der Definition die Ungleichung

$$d(b,d) \le d_{M_K^2}(\overline{b},\overline{d})$$

nur für Mittelpunkte d der Seite σ_{ac}, also $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit $d(a,d) = d(d,c) = \frac{1}{2}d(a,c)$, zu fordern.

Bemerkung (BBI, Exercise 4.1.11)

Es reicht aus, in der Definition die Ungleichung

$$d(b,d) \leq d_{M_K^2}(\overline{b},\overline{d})$$

nur für Mittelpunkte d der Seite σ_{ac}, also $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit $d(a,d) = d(d,c) = \frac{1}{2}d(a,c)$, zu fordern.

Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ ist ein CAT(0)-Raum.

Bemerkung (BBI, Exercise 4.1.11)

Es reicht aus, in der Definition die Ungleichung

$$d(b,d) \leq d_{M_K^2}(\overline{b}, \overline{d})$$

nur für Mittelpunkte d der Seite σ_{ac}, also $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit $d(a,d) = d(d,c) = \frac{1}{2}d(a,c)$, zu fordern.

Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ ist ein CAT(0)-Raum.
- $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$ ist ein CAT(0)-Raum.

Bemerkung (BBI, Exercise 4.1.11)

Es reicht aus, in der Definition die Ungleichung

$$d(b,d) \leq d_{M_K^2}(\overline{b},\overline{d})$$

nur für Mittelpunkte d der Seite σ_{ac}, also $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit $d(a,d) = d(d,c) = \frac{1}{2}d(a,c)$, zu fordern.

Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ ist ein CAT(0)-Raum.
- $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$ ist ein CAT(0)-Raum.
- Klebe drei Kopien des Strahls $[0,\infty)$ am Punkt 0 zusammen. Dieser Raum hat nichtpositive Krümmung.

Bemerkung (BBI, Exercise 4.1.11)

Es reicht aus, in der Definition die Ungleichung

$$d(b,d) \leq d_{M_K^2}(\overline{b}, \overline{d})$$

nur für Mittelpunkte d der Seite σ_{ac}, also $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit $d(a,d) = d(d,c) = \frac{1}{2} d(a,c)$, zu fordern.

Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ ist ein CAT(0)-Raum.
- $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$ ist ein CAT(0)-Raum.
- Klebe drei Kopien des Strahls $[0, \infty)$ am Punkt 0 zusammen. Dieser Raum hat nichtpositive Krümmung.

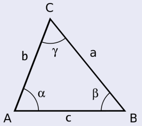
Satz (Ballmann, 3.7)

Sei X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist die Alexandrov-Krümmung von X höchstens K genau dann, wenn die Schnittkrümmung von X nach oben durch K beschränkt ist.

Satz (Kosinussatz)

In jedem wie rechts beschrifteten Dreieck gilt

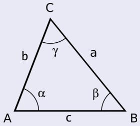
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Satz (Kosinussatz)

In jedem wie rechts beschrifteten Dreieck gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Definition

Für drei Punkte x, y, z aus einem metrischen Raum (X, d) heißt

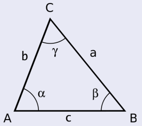
$$\tilde{\measuredangle} xyz := \arccos \frac{d(y,x)^2 + d(y,z)^2 - d(x,z)^2}{2 \cdot d(y,x) \cdot d(y,z)}$$

Vergleichswinkel.

Satz (Kosinussatz)

In jedem wie rechts beschrifteten Dreieck gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Definition

Für drei Punkte x, y, z aus einem metrischen Raum (X, d) heißt

$$\widetilde{\measuredangle} xyz := \arccos \frac{d(y,x)^2 + d(y,z)^2 - d(x,z)^2}{2 \cdot d(y,x) \cdot d(y,z)}$$

Vergleichswinkel.

Definition

Sei (X, d) ein Längenraum, $p \in X$ und $\alpha, \beta : [0, \epsilon) \to X$ zwei Geodäten mit $\alpha(0) = \beta(0) = p$. Falls der Limes existiert, so heißt

$$\measuredangle(\alpha, \beta) = \lim_{s,t \to 0} \widetilde{\measuredangle}(\alpha(s), p, \beta(t))$$

Winkel zwischen α und β.

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet.

Proposition (BBI, 4.3.5)

Seien $\alpha, \beta : [0, \epsilon] \to U$ kürzeste Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = p$. Dann ist die Abbildung

$$\Theta : [0, \epsilon] \times [0, \epsilon] \to [0, \pi]\,, \quad (s, t) \mapsto \widetilde{\measuredangle}(\alpha(s), p, \beta(t))$$

monoton steigend in beiden Argumenten.

Sei (X,d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet.

Proposition (BBI, 4.3.5)

Seien $\alpha, \beta : [0,\epsilon] \to U$ kürzeste Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = p$.
Dann ist die Abbildung

$$\Theta : [0,\epsilon] \times [0,\epsilon] \to [0,\pi]\,, \quad (s,t) \mapsto \widetilde{\measuredangle}(\alpha(s), p, \beta(t))$$

monoton steigend in beiden Argumenten.

Korollar (BBI, 4.3.2)

Sei Δabc ein Dreieck in U. Dann sind die Winkel

$$\alpha := \measuredangle(\sigma_{ab}, \sigma_{ac}), \quad \beta := \measuredangle(\sigma_{ba}, \sigma_{bc}), \quad \gamma := \measuredangle(\sigma_{ca}, \sigma_{cb}),$$

wohldefiniert und es gilt $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$.

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet.

Proposition (BBI, 4.3.5)

Seien $\alpha, \beta : [0, \epsilon] \to U$ kürzeste Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = p$. Dann ist die Abbildung

$$\Theta : [0, \epsilon] \times [0, \epsilon] \to [0, \pi], \quad (s, t) \mapsto \tilde{\measuredangle}(\alpha(s), p, \beta(t))$$

monoton steigend in beiden Argumenten.

Korollar (BBI, 4.3.2)

Sei Δabc ein Dreieck in U. Dann sind die Winkel

$$\alpha := \measuredangle(\sigma_{ab}, \sigma_{ac}), \quad \beta := \measuredangle(\sigma_{ba}, \sigma_{bc}), \quad \gamma := \measuredangle(\sigma_{ca}, \sigma_{cb}),$$

wohldefiniert und es gilt $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$.

Bemerkung

Die Behauptung des Korollars ist äquivalent zur CAT(0)-Vergleichseigenschaft, kann also auch als zur Definition von CAT(0)-Gebieten verwendet werden.

Proposition (BBI, 9.1.17)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U = B_r(x_0) \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet. Dann gilt:

1. Für alle $a, b \in U$ gibt es einen eindeutigen kürzesten Weg, der a und b verbindet, und dieser ist in U enthalten.
2. Seien σ_{ab} und σ_{bc} zwei kürzeste Wege in U, die in b enden bzw. starten. Falls $\measuredangle abc = \pi$, dann ist auch $\sigma_{ab} * \sigma_{bc}$ ein kürzester Weg.
3. Jede Geodäte in U ist ein kürzester Weg.

Lemma (BBI, 9.2.3)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet und $\alpha, \beta : I \to U$ zwei durch dasselbe Intervall I parametrisierte und mit jeweils konstanter Geschwindigkeit durchlaufene Geodäten in U. Dann ist die Distanzfunktion

$$\delta : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$$

konvex.

Lemma (Alexandrov's Lemma)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{E}^2$, sodass a und c auf verschiedenen Halbebenen bezüglich der Verbindungsstrecke $[bd]$ liegen. Seien $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{E}^2$ mit

$$d(a, b) = d(\tilde{a}, \tilde{b}), \quad d(b, c) = d(\tilde{b}, \tilde{c}), \quad d(a, d) + d(d, c) = d(\tilde{a}, \tilde{c}).$$

Sei $\tilde{d} \in [\tilde{a}, \tilde{c}]$ mit $d(\tilde{a}, \tilde{d}) = d(a, d)$. Dann gilt:

- $\measuredangle adb + \measuredangle bdc < \pi$ genau dann, wenn $d(\tilde{b}, \tilde{d}) < d(d, b)$. Dann gilt auch $\measuredangle \tilde{b}\tilde{a}\tilde{d} < \measuredangle bad$ und $\measuredangle \tilde{b}\tilde{c}\tilde{d} < \measuredangle bcd$.

Lemma (Alexandrov's Lemma)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{E}^2$, sodass a und c auf verschiedenen Halbebenen bezüglich der Verbindungsstrecke $[bd]$ liegen. Seien $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{E}^2$ mit

$$d(a,b) = d(\tilde{a},\tilde{b}), \quad d(b,c) = d(\tilde{b},\tilde{c}), \quad d(a,d)+d(d,c) = d(\tilde{a},\tilde{c}).$$

Sei $\tilde{d} \in [\tilde{a},\tilde{c}]$ mit $d(\tilde{a},\tilde{d}) = d(a,d)$. Dann gilt:

- $\measuredangle adb + \measuredangle bdc < \pi$ genau dann, wenn $d(\tilde{b},\tilde{d}) < d(d,b)$. Dann gilt auch $\measuredangle \tilde{b}\tilde{a}\tilde{d} < \measuredangle bad$ und $\measuredangle \tilde{b}\tilde{c}\tilde{d} < \measuredangle bcd$.
- $\measuredangle adb + \measuredangle bdc > \pi$ genau dann, wenn $d(\tilde{b},\tilde{d}) > d(d,b)$. Dann gilt auch $\measuredangle \tilde{b}\tilde{a}\tilde{d} > \measuredangle bad$ und $\measuredangle \tilde{b}\tilde{c}\tilde{d} > \measuredangle bcd$.

Lemma (Alexandrov's Lemma)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{E}^2$, sodass a und c auf verschiedenen Halbebenen bezüglich der Verbindungsstrecke $[bd]$ liegen. Seien $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{E}^2$ mit

$$d(a,b) = d(\tilde{a},\tilde{b}), \quad d(b,c) = d(\tilde{b},\tilde{c}), \quad d(a,d)+d(d,c) = d(\tilde{a},\tilde{c}).$$

Sei $\tilde{d} \in [\tilde{a},\tilde{c}]$ mit $d(\tilde{a},\tilde{d}) = d(a,d)$. Dann gilt:

- $\measuredangle adb + \measuredangle bdc < \pi$ genau dann, wenn $d(\tilde{b},\tilde{d}) < d(d,b)$. Dann gilt auch $\measuredangle \tilde{b}\tilde{a}\tilde{d} < \measuredangle bad$ und $\measuredangle \tilde{b}\tilde{c}\tilde{d} < \measuredangle bcd$.
- $\measuredangle adb + \measuredangle bdc > \pi$ genau dann, wenn $d(\tilde{b},\tilde{d}) > d(d,b)$. Dann gilt auch $\measuredangle \tilde{b}\tilde{a}\tilde{d} > \measuredangle bad$ und $\measuredangle \tilde{b}\tilde{c}\tilde{d} > \measuredangle bcd$.

Lemma

Sei (X,d) ein Längenraum, Δabc ein Dreieck in X und $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$. Wenn die Teildreiecke Δabd und Δcbd die CAT(0)-Vergleichseigenschaft erfüllen, dann auch Δabc.

Definition

Sei X ein topologischer Raum, $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ stetige Kurven mit $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $q = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Eine Homotopie der Wege γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte ist eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

mit

- $H(-,0) = \gamma_1$,
- $H(-,1) = \gamma_2$,
- $H(0,t) = p$ für alle $t \in [0,1]$,
- $H(1,t) = q$ für alle $t \in [0,1]$.

Definition

Sei X ein topologischer Raum, $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ stetige Kurven mit $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $q = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Eine Homotopie der Wege γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte ist eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

mit

- $H(-,0) = \gamma_1$,
- $H(-,1) = \gamma_2$,
- $H(0,t) = p$ für alle $t \in [0,1]$,
- $H(1,t) = q$ für alle $t \in [0,1]$.

Definition

Ein topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend, falls

- er wegzusammenhängend ist und
- jeder geschlossene Weg $\gamma : [0,1] \to X$ (d. h. $\gamma(0) = \gamma(1) =: p$) homotop relativ der Endpunkte zum konstanten Weg $t \mapsto p$ ist.