Varianten des Theorems von Kirchberger

Tim Baumann

TopMath-Frühlingsschule in Oberschönenfeld

4. März 2014

Theorem (Kirchberger)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann sind P und Q genau dann durch eine Hyperebene trennbar, wenn für jede Menge $T \subset \mathrm{E}^n$ mit maximal $n+2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Hyperebene trennbar sind.

Theorem (Kirchberger)

*Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann sind P und Q genau dann durch eine Hyperebene trennbar, wenn für jede Menge $T \subset \mathrm{E}^n$ mit maximal $n+2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Hyperebene trennbar sind.*

Übersicht

Definition

Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

Definition

Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n.
Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:

$$\forall\, a \in A \,:\, \|p - a\| < \alpha$$

und

$$\forall\, b \in B \,:\, \|p - a\| > \alpha$$

Definition

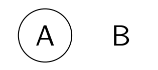
Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n.
Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:



$$\forall\, a \in A \;:\; \|p - a\| < \alpha$$

und

$$\forall\, b \in B \;:\; \|p - a\| > \alpha$$

Definition

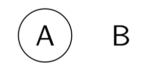
Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

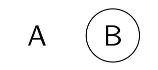
Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n.
Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:



$$\forall\, a \in A \,:\, \|p - a\| < \alpha$$
und
$$\forall\, b \in B \,:\, \|p - a\| > \alpha$$

oder



$$\forall\, a \in A \,:\, \|p - a\| > \alpha$$
und
$$\forall\, b \in B \,:\, \|p - a\| < \alpha$$

Theorem (Kirchberger)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann sind P und Q genau dann durch eine Hyperebene streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset \mathrm{E}^n$ mit maximal $n+2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Hyperebene streng trennbar sind.

Theorem (Kirchberger')

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset \mathrm{E}^n$ mit maximal $n+2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

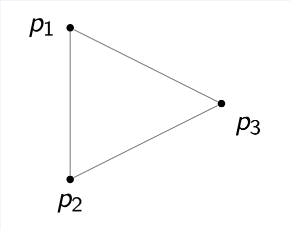
Theorem (Kirchberger')

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von $\mathbb{E}^n$. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset \mathbb{E}^n$ mit maximal $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

Theorem (Kirchberger')

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von $\mathbb{E}^n$. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset \mathbb{E}^n$ mit maximal $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

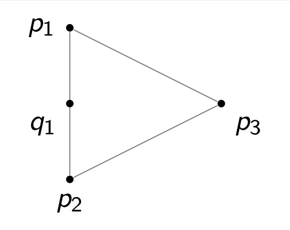
Beispiel im $\mathbb{E}^2$



Theorem (Kirchberger')

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von $\mathbb{E}^n$. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset \mathbb{E}^n$ mit maximal $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

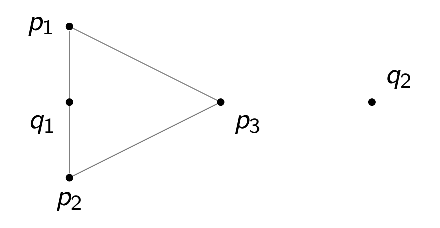
Beispiel im $\mathbb{E}^2$



Theorem (Kirchberger')

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von $\mathbb{E}^n$. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset \mathbb{E}^n$ mit maximal $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

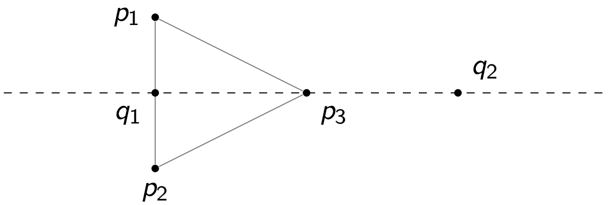
Beispiel im $\mathbb{E}^2$



Theorem (Kirchberger')

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von $\mathbb{E}^n$. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset \mathbb{E}^n$ mit maximal $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

Beispiel im $\mathbb{E}^2$



TODO

TODO