Varianten des Theorems von Kirchberger

Tim Baumann

TopMath-Frühlingsschule in Oberschönenfeld

4. März 2014

Theorem (Kirchberger)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann sind P und Q genau dann durch eine Hyperebene trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit maximal $n + 2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Hyperebene trennbar sind.

Theorem (Kirchberger)

*Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann sind P und Q genau dann durch eine Hyperebene trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit maximal $n + 2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Hyperebene trennbar sind.*

Übersicht

Definition

Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

Definition

Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n.
Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:

$$\forall\, a \in A \;:\; \|p - a\| < \alpha$$

und

$$\forall\, b \in B \;:\; \|p - a\| > \alpha$$

Definition

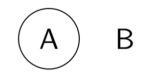
Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n.
Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:



$$\forall\, a \in A \,:\, \|p - a\| < \alpha$$

und

$$\forall\, b \in B \,:\, \|p - a\| > \alpha$$

Definition

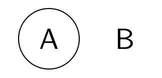
Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $\alpha > 0$. Dann heißt

$$S_\alpha(p) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - p\| = \alpha\}$$

Sphäre mit Radius α um den Punkt p.

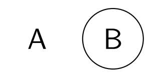
Definition

Seien A und B Teilmengen von E^n.
Die Sphäre $S_\alpha(p)$ *trennt* A und B *streng*, wenn gilt:



$$\forall\, a \in A \; : \; \|p - a\| < \alpha$$
und
$$\forall\, b \in B \; : \; \|p - a\| > \alpha$$

oder



$$\forall\, a \in A \; : \; \|p - a\| > \alpha$$
und
$$\forall\, b \in B \; : \; \|p - a\| < \alpha$$

Theorem (Kirchberger)

*Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann sind P und Q genau dann durch eine Hyperebene streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit maximal $n+2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Hyperebene streng trennbar sind.*

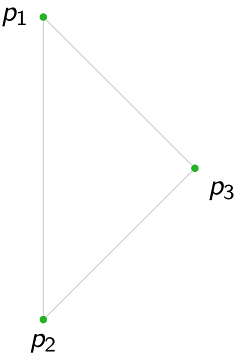
Theorem (Kirchberger')

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit maximal $n+2$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

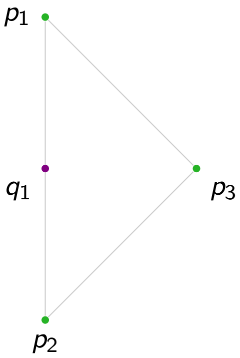
Theorem (Kirchberger')

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit maximal $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

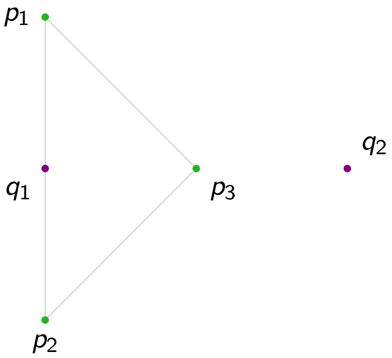
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



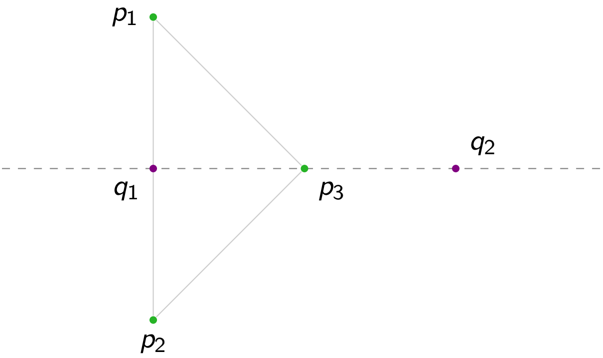
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



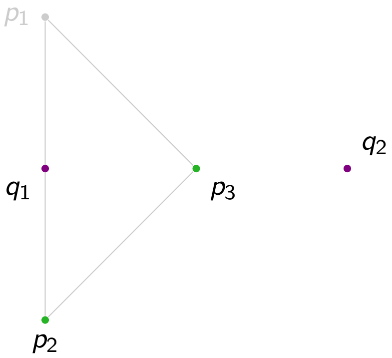
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



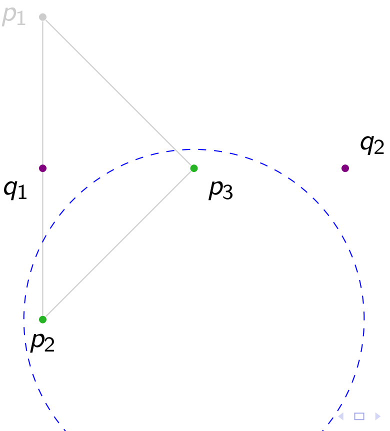
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



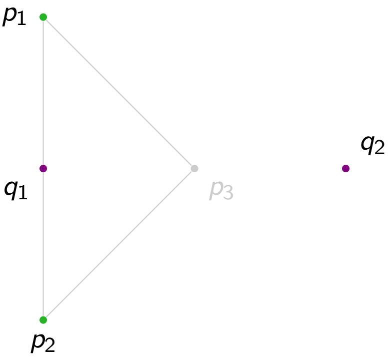
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



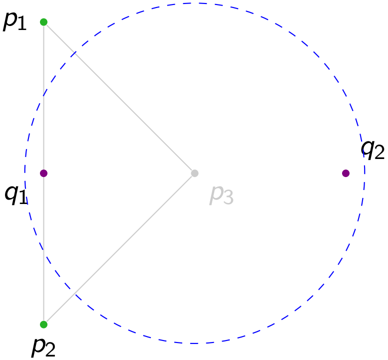
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



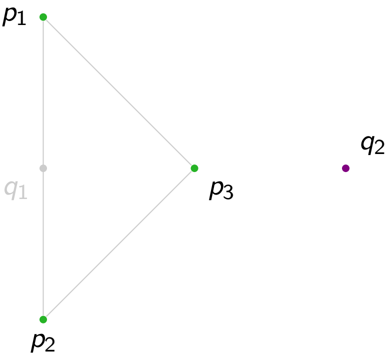
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



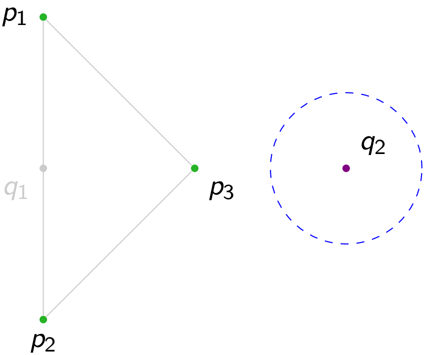
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



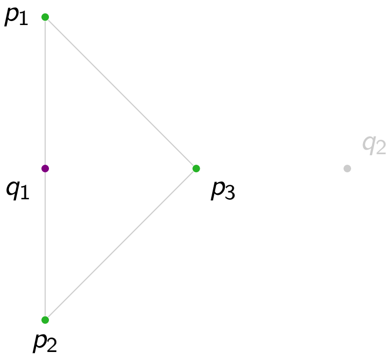
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n + 2 = 4$ Punkten aus $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ und $Q = \{q_1, q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



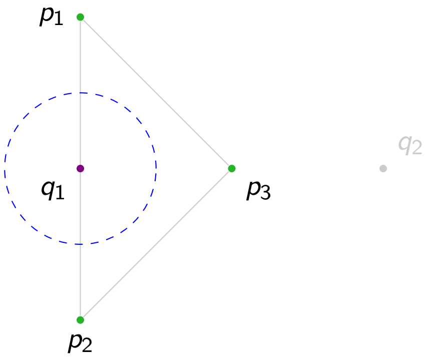
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



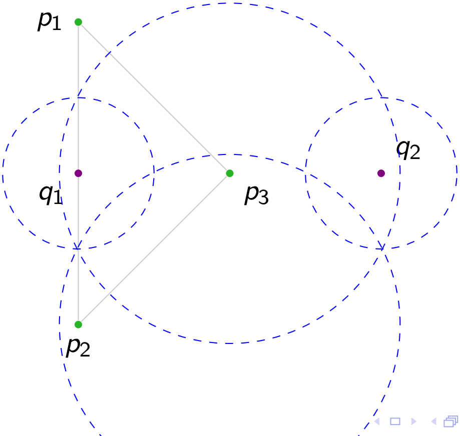
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



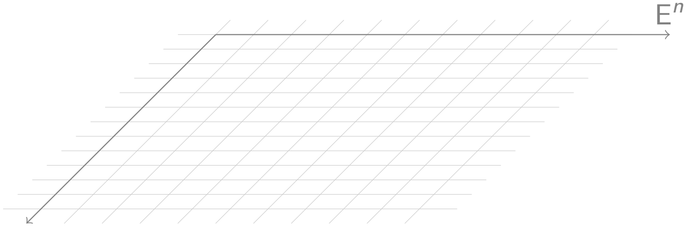
Folgendes Beispiel im E^2 zeigt, dass die Trennbarkeit von $n+2=4$ Punkten aus $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ und $Q=\{q_1,q_2\}$ mit Sphären nicht ausreicht, um Trennbarkeit von P und Q zu folgern:



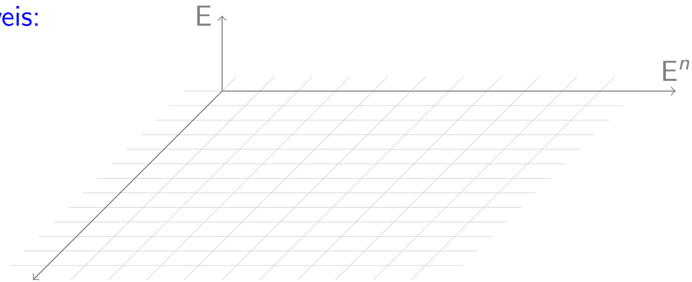
Theorem (Kirchberger', 8.2)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Dann sind P und Q genau dann durch eine Sphäre streng trennbar, wenn für jede Menge $T \subset E^n$ mit maximal $n + 3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

Beweis:

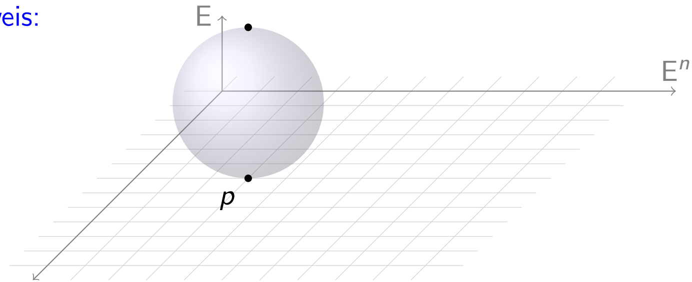


Beweis:



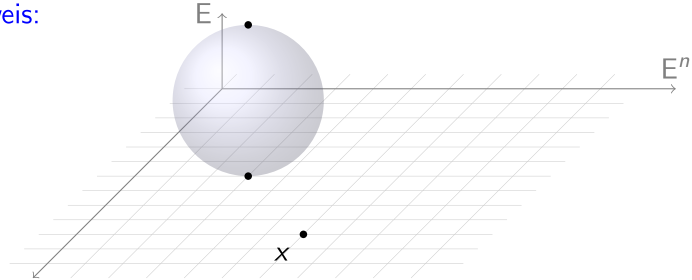
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.

Beweis:



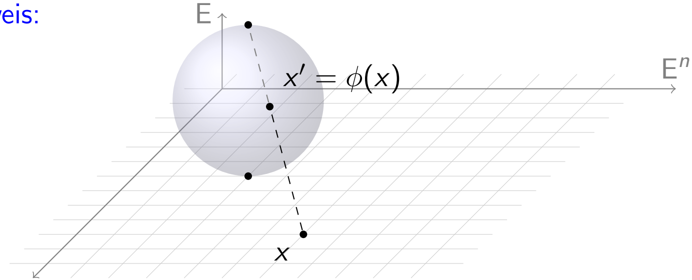
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.

Beweis:



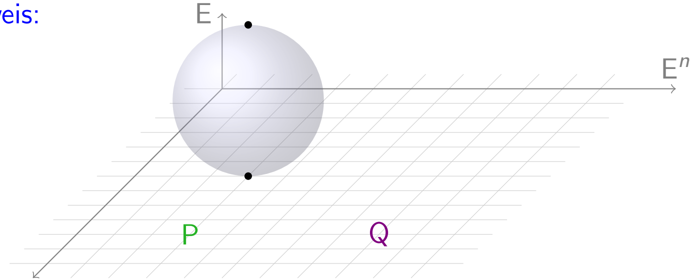
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
3. Betrachte die stereographische Projektion $\phi : \mathrm{E}^n \to S$.

Beweis:



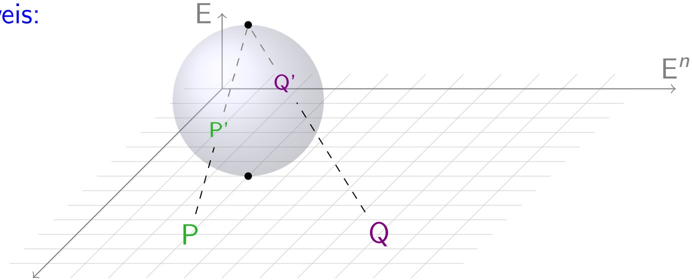
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in E^n$ und $S \subset E^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
3. Betrachte die stereographische Projektion $\phi : E^n \to S$.

Beweis:



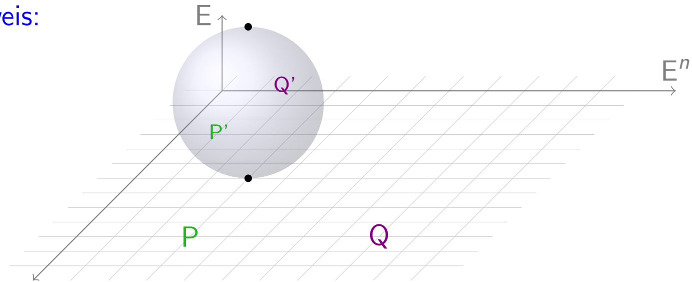
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in \mathrm{E}^n$ und $S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
3. Betrachte die stereographische Projektion $\phi : \mathrm{E}^n \to S$.
4. Seien $P, Q \subset \mathrm{E}^n$ nichtleer und kompakt sodass für jede Menge $T \subset \mathrm{E}^n$ mit maximal $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.

Beweis:



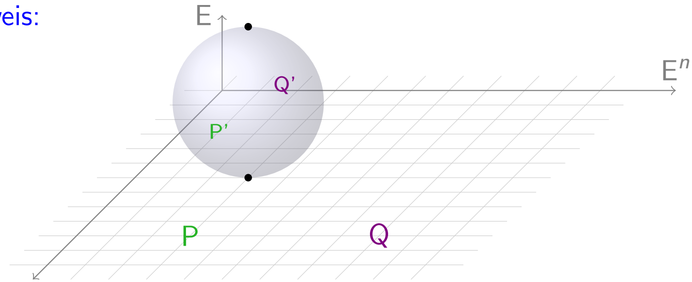
1. Bette E^n wie üblich in den E^{n+1} ein.
2. Sei $p \in E^n$ und $S \subset E^{n+1}$ eine Sphäre, die in p tangential zu E^n ist.
3. Betrachte die stereographische Projektion $\phi : E^n \to S$.
4. Seien $P, Q \subset E^n$ nichtleer und kompakt sodass für jede Menge $T \subset E^n$ mit maximal $n+3$ Punkten die Mengen $P \cap T$ und $Q \cap T$ durch eine Sphäre streng trennbar sind.
5. Seien P' und Q' die (kompakten) Bilder von P bzw. Q unter ϕ.

Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

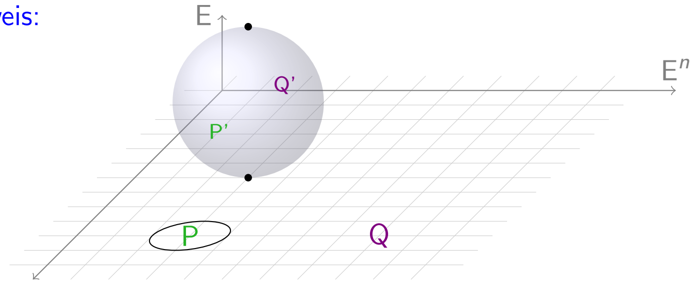
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

6. Sei $T \subset S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.

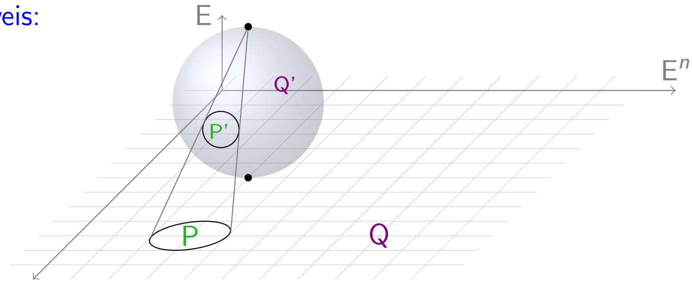
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

6. Sei $T \subset S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
7. Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.

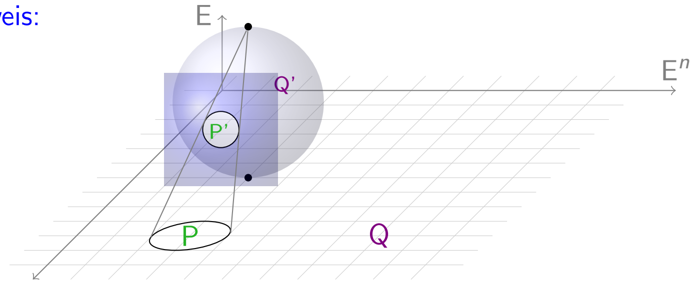
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

6. Sei $T \subset S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
7. Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.
8. Die stereogr. Projektion der Sphäre ist ein Kreis auf S (Kreistreue).

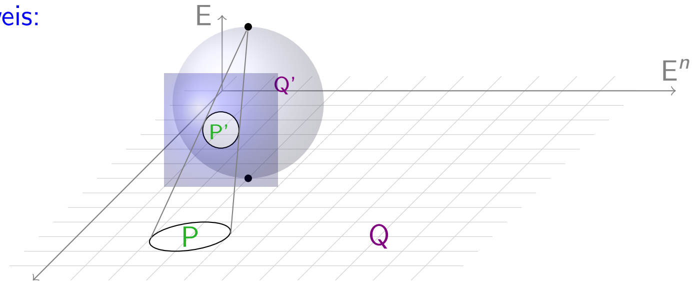
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

6. Sei $T \subset S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
7. Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.
8. Die stereogr. Projektion der Sphäre ist ein Kreis auf S (Kreistreue).
9. Der Kreis auf S ist der Schnitt von S mit einer Hyperebene H.

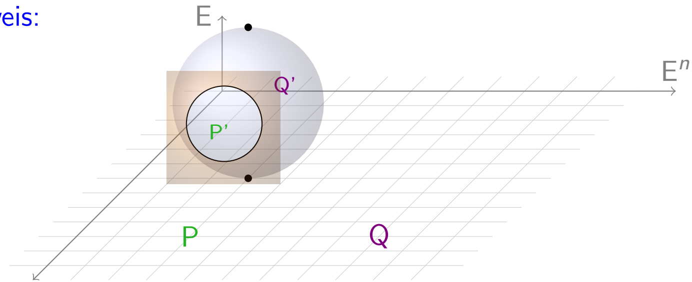
Beweis:



Behauptung: P' und Q' können durch eine Hyperebene $H_0 \subset \mathrm{E}^{n+1}$ streng getrennt werden.

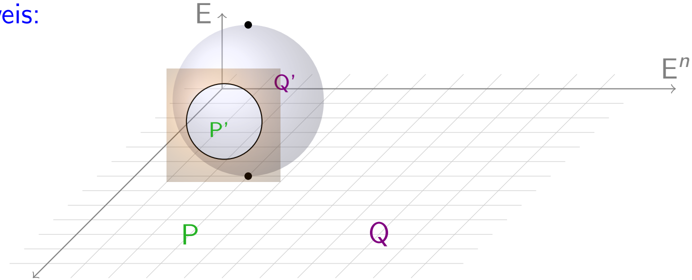
6. Sei $T \subset S \subset \mathrm{E}^{n+1}$ eine Menge mit höchstens $n+3$ Punkten.
7. Nach Voraussetzung werden die Urbilder $\phi^{-1}(T \cap P') = \phi^{-1}(T) \cap P$ und $\phi^{-1}(T \cap Q') = \phi^{-1}(T) \cap Q$ durch eine Sphäre streng getrennt.
8. Die stereogr. Projektion der Sphäre ist ein Kreis auf S (Kreistreue).
9. Der Kreis auf S ist der Schnitt von S mit einer Hyperebene H.
10. Da H dann $T \cap P'$ und $T \cap Q'$ streng trennt, folgt die Behauptung nach dem Satz von Kirchberger.

Beweis:



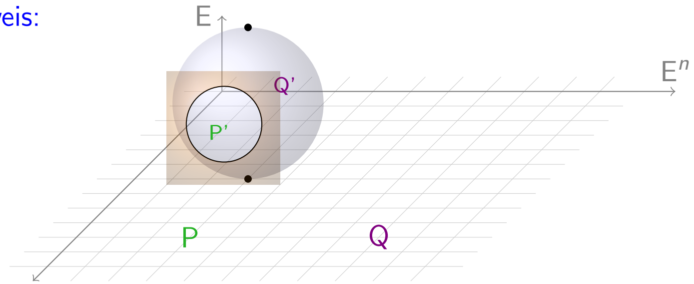
11. Sei $\alpha \in \mathrm{E}^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.

Beweis:



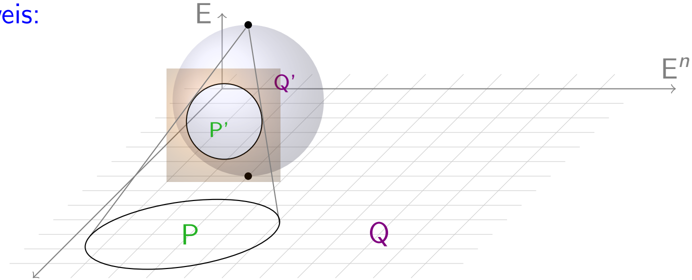
11. Sei $\alpha \in E^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.
12. Da P' und Q' kompakt sind, gibt es $\epsilon > 0$ mit $\langle \alpha, p \rangle \leq b - \epsilon$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle \geq b + \epsilon$ für alle $q \in Q'$.

Beweis:



11. Sei $\alpha \in \mathrm{E}^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.
12. Da P' und Q' kompakt sind, gibt es $\epsilon > 0$ mit $\langle \alpha, p \rangle \leq b - \epsilon$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle \geq b + \epsilon$ für alle $q \in Q'$.
13. Somit können wir annehmen, dass H_0 den Nordpol der Sphäre S nicht schneidet.

Beweis:



11. Sei $\alpha \in E^{n+1}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\langle \alpha, p \rangle < b$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle > b$ für alle $q \in Q'$.
12. Da P' und Q' kompakt sind, gibt es $\epsilon > 0$ mit $\langle \alpha, p \rangle \leq b - \epsilon$ für alle $p \in P'$ und $\langle \alpha, q \rangle \geq b + \epsilon$ für alle $q \in Q'$.
13. Somit können wir annehmen, dass H_0 den Nordpol der Sphäre S nicht schneidet.
14. Der Schnitt $H_0 \cap S$ ist ein Kreis und $\phi^{-1}(H_0 \cap S)$ trennt P und Q. $\square$

Übersicht

Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

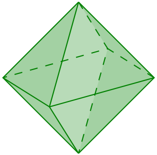
von A und F erzeugter *k-Zylinder*.

Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.

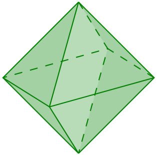


Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.



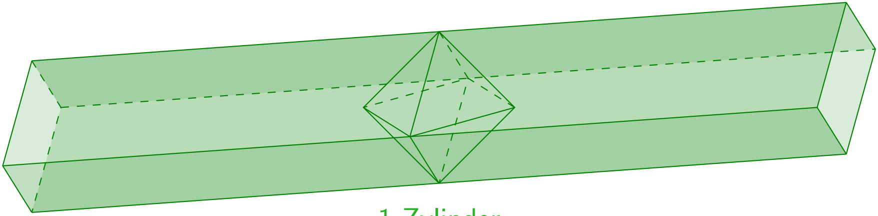
0-Zylinder

Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.



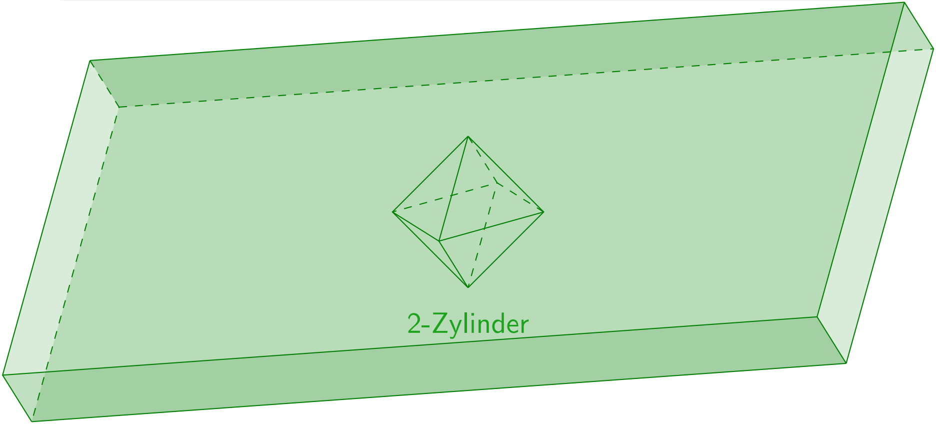
1-Zylinder

Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.

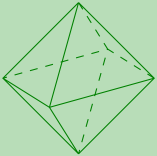


Definition

Sei $A \subset \mathrm{E}^n$ und $F \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann heißt

$$Z = A + F = \{a + f \mid a \in A, f \in F\}$$

von A und F erzeugter *k-Zylinder*.



3-Zylinder

Kirchberger-Theorem für Zylinder?

Theorem (???)

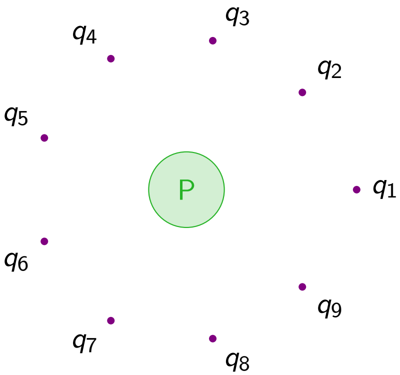
*Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann gibt es einen k-Zylinder $Z = (\operatorname{conv} P) + F$ mit $Z \cap Q = \emptyset$ genau dann, wenn es für alle Teilmengen $T \subset P \cup Q$ mit maximal $f(n,k)$ Punkten einen k-Zylinder $Z_T = \operatorname{conv}(T \cap P) + F_T$ mit $Z_T \cap (T \cap Q) = \emptyset$ gibt.*

Kirchberger-Theorem für Zylinder?

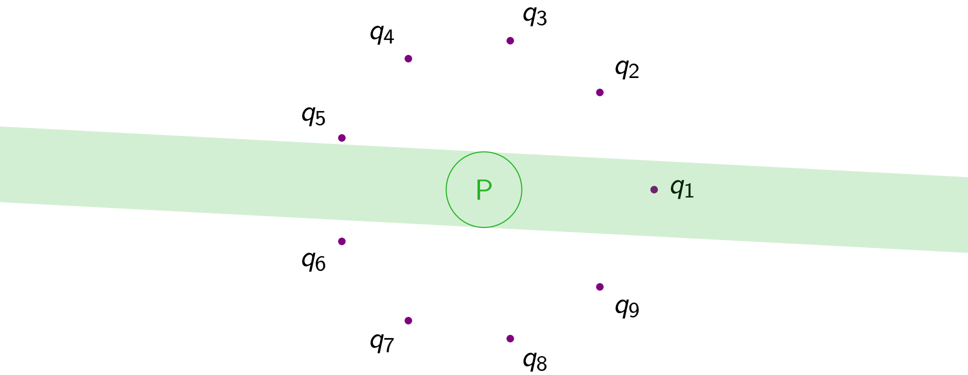
Theorem (???)

*Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann gibt es einen k-Zylinder $Z = (\operatorname{conv} P) + F$ mit $Z \cap Q = \emptyset$ genau dann, wenn es für alle Teilmengen $T \subset P \cup Q$ mit maximal $f(n,k)$ Punkten einen k-Zylinder $Z_T = \operatorname{conv}(T \cap P) + F_T$ mit $Z_T \cap (T \cap Q) = \emptyset$ gibt.*

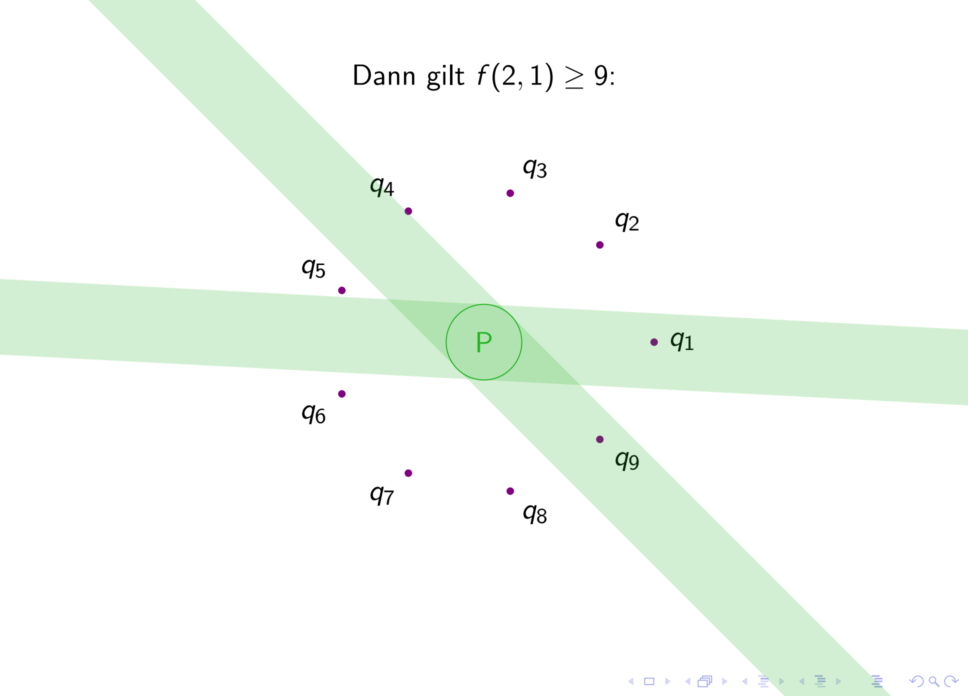
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



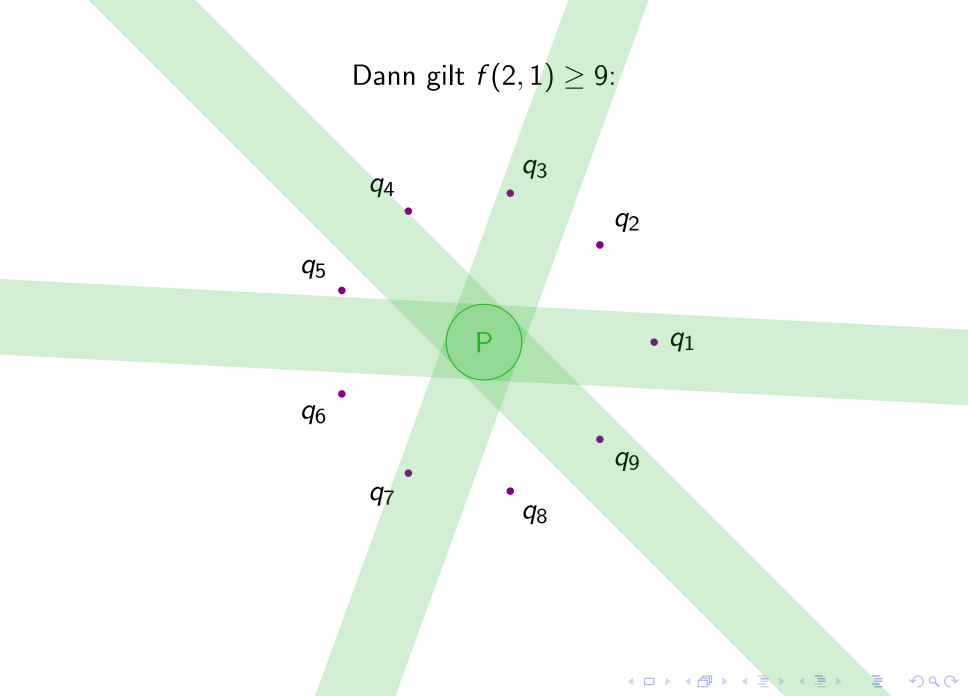
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



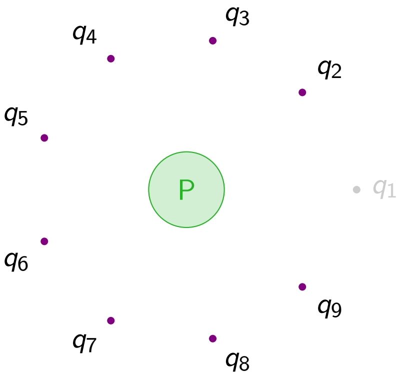
Dann gilt $f(2, 1) \geq 9$:



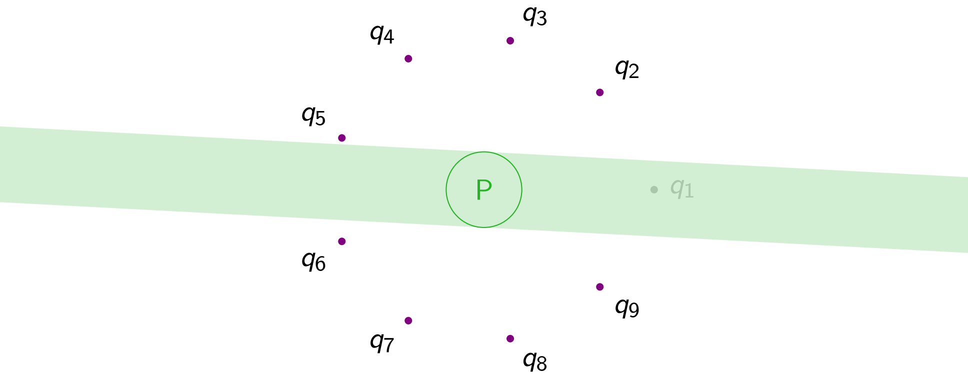
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



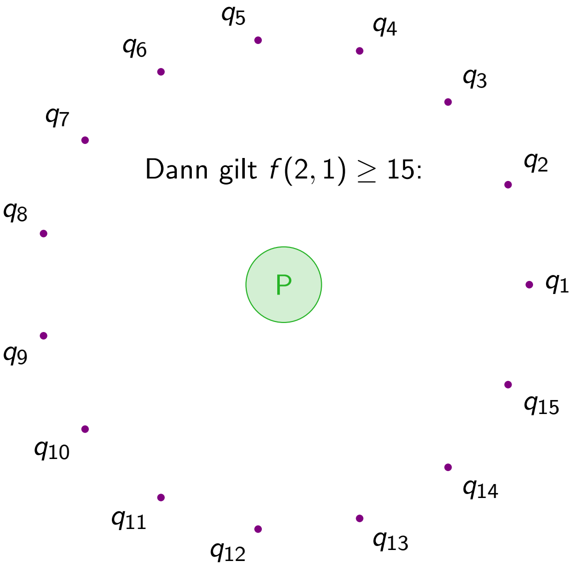
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



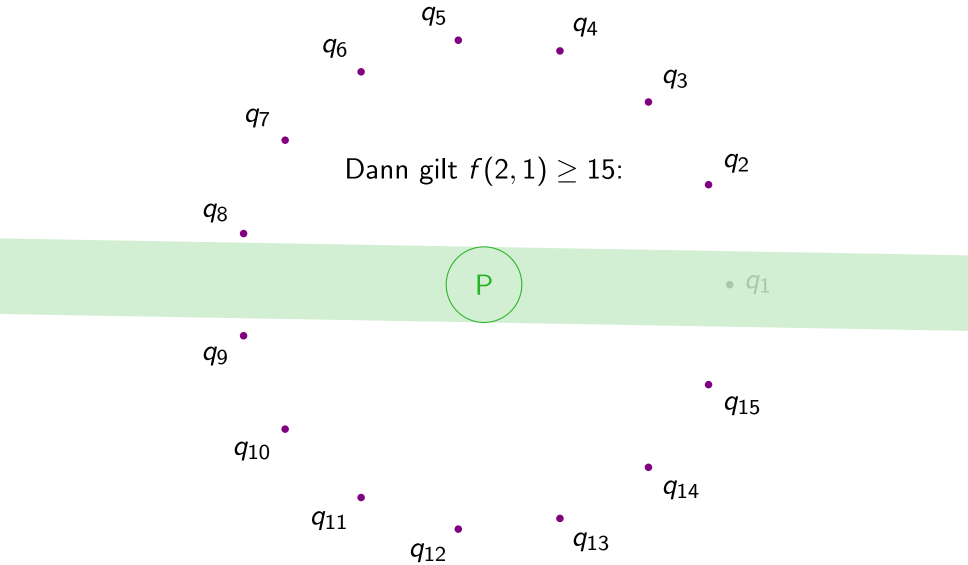
Dann gilt $f(2,1) \geq 9$:



Dann gilt $f(2,1) \geq 15$:



Dann gilt $f(2,1) \geq 15$:



Kirchberger-Theorem für Zylinder? So nicht!

Theorem (???)

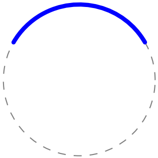
*Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n.
Dann gibt es einen k-Zylinder $Z = (\text{conv}\, P) + F$ mit $Z \cap Q = \emptyset$ genau dann, wenn es für alle Teilmengen T von $P \cup Q$ mit maximal $f(n, k)$ Punkten einen k-Zylinder $Z_T = \text{conv}(T \cap P) + F_T$ mit $Z_T \cap (T \cap Q) = \emptyset$ gibt.*

Definition

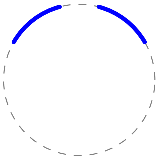
Eine Teilmenge $K \subset S_\alpha(p)$ heißt *stark konvex*, wenn K keine antipodalen (gegenüberliegenden) Punkte enthält und zu jedem Paar von Punkten auch den kleineren Bogen des Großkreises zwischen diesen Punkten enthält.

Definition

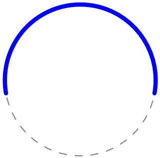
Eine Teilmenge $K \subset S_\alpha(p)$ heißt *stark konvex*, wenn K keine antipodalen (gegenüberliegenden) Punkte enthält und zu jedem Paar von Punkten auch den kleineren Bogen des Großkreises zwischen diesen Punkten enthält.



Beispiel



Gegenbeispiel



Gegenbeispiel

Lemma (9.4)

Sei $S = S_1(0)$ *die Einheitssphäre um den Nullpunkt im* E^n *und* $F = \{A_i \mid i \in I\}$ *eine Familie von kompakten, stark konvexen Teilmengen von* S. *Angenommen, je* n *(oder weniger) Elemente von* F *haben einen Punkt gemeinsam. Dann gibt es ein Paar von antipodalen Punkten* $\{p, -p\}$, *sodass* $\{p, -p\} \cap A_i \neq \emptyset$ *für alle* $i \in I$.

Beweis.

1. Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\text{conv}A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.

Theorem (Horn, 6.8)

Sei $F = \{A_i \mid i \in I\}$ *eine Familie von kompakten, konvexen Teilmengen von* E^n *mit mindestens* n *Elementen. Angenommen, jede Unterfamilie mit* k *Elementen besitzt einen gemeinsamen Punkt, wobei* $1 \leq k \leq n$*. Dann gibt es für jeden* $(n-k)$*-dimensionalen Unterraum* F_1 *einen* $(n-k+1)$*-dimensionalen Unterraum* F_2*, sodass* $F_2 \supset F_1$ *und* $F_2 \cap A_i \neq \emptyset$ *für alle* $i \in I$.

Beweis.

1. Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\mathrm{conv} A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.

Theorem (Horn, 6.8)

Sei $F = \{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von kompakten, konvexen Teilmengen von E^n mit mindestens n Elementen. Angenommen, jede Unterfamilie mit k Elementen besitzt einen gemeinsamen Punkt, wobei $1 \leq k \leq n$. Dann gibt es für jeden $(n-k)$-dimensionalen Unterraum F_1 einen $(n-k+1)$-dimensionalen Unterraum F_2, sodass $F_2 \supset F_1$ und $F_2 \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis.

1. Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\operatorname{conv} A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.
2. Aus dem Lemma von Horn folgt mit $k=n$, $F_1=\{0\}$, dass ein 1-dimensionaler Unterraum L mit $L \cap \operatorname{conv} A_i \neq \emptyset$ existiert.

Theorem (Horn, 6.8)

Sei $F = \{A_i \mid i \in I\}$ *eine Familie von kompakten, konvexen Teilmengen von* E^n *mit mindestens* n *Elementen. Angenommen, jede Unterfamilie mit* k *Elementen besitzt einen gemeinsamen Punkt, wobei* $1 \leq k \leq n$*. Dann gibt es für jeden* $(n-k)$*-dimensionalen Unterraum* F_1 *einen* $(n-k+1)$*-dimensionalen Unterraum* F_2*, sodass* $F_2 \supset F_1$ *und* $F_2 \cap A_i \neq \emptyset$ *für alle* $i \in I$*.*

Beweis.

1. Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\operatorname{conv} A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.
2. Aus dem Lemma von Horn folgt mit $k{=}n$, $F_1{=}\{0\}$, dass ein 1-dimensionaler Unterraum L mit $L \cap \operatorname{conv} A_i \neq \emptyset$ existiert.
3. Da A_i stark konvex ist, gilt auch $L \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Theorem (Horn, 6.8)

Sei $F = \{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von kompakten, konvexen Teilmengen von E^n mit mindestens n Elementen. Angenommen, jede Unterfamilie mit k Elementen besitzt einen gemeinsamen Punkt, wobei $1 \leq k \leq n$. Dann gibt es für jeden $(n{-}k)$-dimensionalen Unterraum F_1 einen $(n{-}k{+}1)$-dimensionalen Unterraum F_2, sodass $F_2 \supset F_1$ und $F_2 \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis.

1. Für alle $i \in I$ gilt: Da $A_i \subset S$ kompakt und stark konvex ist, ist $\operatorname{conv} A_i$ kompakt und enthält nicht den Nullpunkt.
2. Aus dem Lemma von Horn folgt mit $k{=}n$, $F_1{=}\{0\}$, dass ein 1-dimensionaler Unterraum L mit $L \cap \operatorname{conv} A_i \neq \emptyset$ existiert.
3. Da A_i stark konvex ist, gilt auch $L \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.
4. Mit $\{p, -p\} := L \cap S$ folgt die Aussage. $\square$

Theorem (9.5)

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n. Angenommen, für $1 \leq k \leq n$ kann jede Teilmenge von Q mit maximal k Punkten streng von P mit einer Hyperebene getrennt werden. Dann gibt es zu jedem k-Zylinder $Z_1 = (\operatorname{conv} P) + F_1$ einen $(k-1)$-Zylinder $Z_2 = (\operatorname{conv} P) + F_2$ mit $Z_2 \subset Z_1$ und $Z_2 \cap Q = \emptyset$.

$$\delta := \inf\{\mathrm{dist}(\mathrm{conv}\,T, \mathrm{conv}\,P) \mid T \text{ ist Teilmenge von } Q \text{ mit maximal } k \text{ Punkten }\}.$$

Behauptung: $\delta > 0$

Beweis: Sei R die Menge aller $x \in \mathrm{E}^n$, die Konvexkombination von maximal k Punkten aus Q sind.

Die Menge R ist kompakt, da sie Bild der stetigen Abbildung

$$Q^k \times M^k \to \mathrm{E}^n, \qquad (q_1, \ldots, q_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto \lambda_1 q_1 + \ldots + \lambda_k q_k,$$

$$\text{mit } M^k := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in [0,1]^k \mid \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1\}$$

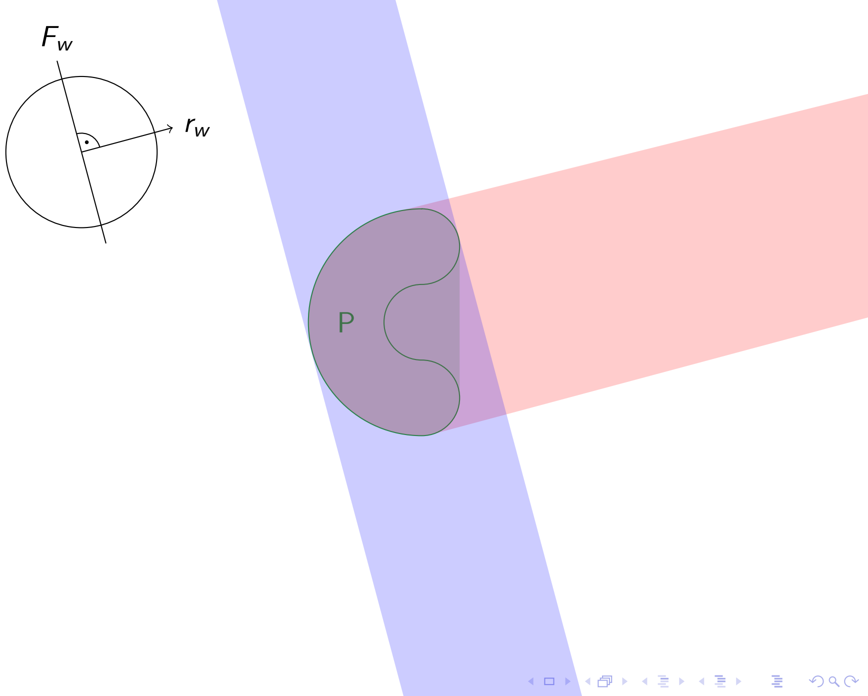
mit kompakter Definitionsmenge ist.

Angenommen, $\mathrm{dist}(R, \mathrm{conv}\,P) = 0$. Dann gibt es $r = \lambda_1 q_1 + \ldots + \lambda_k q_k \in R$ mit $\mathrm{dist}(r, \mathrm{conv}\,P) = 0$, also $r \in \mathrm{conv}\,P$.

Dann können aber $q_1, \ldots, q_k$ nicht mit einer Hyperebene stark von $\mathrm{conv}\,P$ getrennt werden. Widerspruch.

Für alle Mengen T wie oben gilt dann $\mathrm{conv}\,T \subset R$ und somit $\mathrm{dist}(\mathrm{conv}\,T, \mathrm{conv}\,P) \geq \mathrm{dist}(R, \mathrm{conv}\,P)$.

Durch Übergang zum Infimum folgt $\delta \geq \mathrm{dist}(R, \mathrm{conv}\,P) > 0$.


F_w
r_w
P

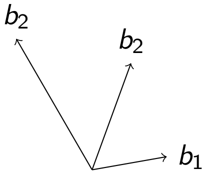
Übersicht

Definition

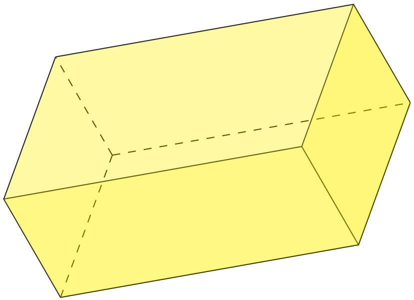
Sei $\beta = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n. Sei H_i für $i = 1, ..., n$ die Hyperebene $\mathrm{span}(b_1, ..., \widehat{b_i}, ..., b_n)$. Eine *$\beta$-Box* ist ein Parallelotop, in dem jede Seite parallel zu einer Hyperebene H_i ist.

Definition

Sei $\beta = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ eine Basis von E^n. Sei H_i für $i = 1, \ldots, n$ die Hyperebene $\mathrm{span}(b_1, \ldots, \widehat{b_i}, \ldots, b_n)$. Eine β-*Box* ist ein Parallelotop, in dem jede Seite parallel zu einer Hyperebene H_i ist.



$\beta = \{b_1, b_2, b_3\}$



Eine β-Box

Die Koordinatenfunktionen dieser Basis sind

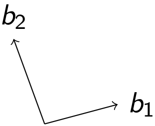
$$\pi_i : \mathsf{E}^n \to \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j \mapsto \lambda_i \qquad \text{für } i = 1, ..., n.$$

Dann ist eine β-Box gegeben durch reelle Zahlen $m_1, ..., m_n$ und $M_1, ..., M_n$ mit $m_i \leq M_i$ für $i = 1, ..., n$ und besteht aus allen $x \in \mathsf{E}^n$, die folgendes lineare Ungleichungssystem erfüllen:

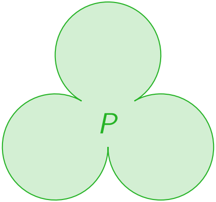
$$\begin{aligned} m_1 \leq &\pi_1(x) \leq M_1 \\ m_2 \leq &\pi_2(x) \leq M_2 \\ &\vdots \\ m_n \leq &\pi_n(x) \leq M_n \end{aligned}$$

Sei $P \subset \mathrm{E}^n$ nichtleer und kompakt. Dann existiert eine eindeutige minimale β-Box B_P, die P enthält. Diese ist gegeben durch

$$m_i := \inf_{p \in P} \pi_i(p) \quad \text{und} \quad M_i := \sup_{p \in P} \pi_i(p) \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$



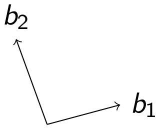
$\beta = \{b_1, b_2\}$



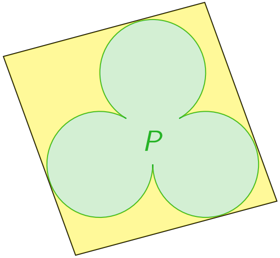
minimale β-Box um P

Sei $P \subset \mathrm{E}^n$ nichtleer und kompakt. Dann existiert eine eindeutige minimale β-Box B_P, die P enthält. Diese ist gegeben durch

$$m_i := \inf_{p \in P} \pi_i(p) \quad \text{und} \quad M_i := \sup_{p \in P} \pi_i(p) \qquad \text{für } i = 1, \dots, n.$$



$\beta = \{b_1, b_2\}$



minimale β-Box um P

Theorem

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n $(n \geq 2)$. Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

(a) *Es gibt eine β-Box B, sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.*

(b) *Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β-Box B_S, sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.*

(c) *Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β-Box B_T, die T enthält, disjunkt von Q, also $B_T \cap Q = \emptyset$.*

Theorem

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n $(n \geq 2)$. Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

(a) *Es gibt eine β-Box B, sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.*

(b) *Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β-Box B_S, sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.*

(c) *Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β-Box B_T, die T enthält, disjunkt von Q, also $B_T \cap Q = \emptyset$.*

Beweis.

$(a) \Rightarrow (b)$ Klar.

Theorem

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n $(n \geq 2)$. Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

(a) *Es gibt eine β-Box B, sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.*

(b) *Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β-Box B_S, sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.*

(c) *Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β-Box B_T, die T enthält, disjunkt von Q, also $B_T \cap Q = \emptyset$.*

Beweis.

$(a) \Rightarrow (b)$ Klar.
$(b) \Rightarrow (c)$ Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β-Box, die T enthält.

Theorem

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n $(n \geq 2)$. Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

(a) *Es gibt eine β-Box B, sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.*

(b) *Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β-Box B_S, sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.*

(c) *Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β-Box B_T, die T enthält, disjunkt von Q, also $B_T \cap Q = \emptyset$.*

Beweis.

$(a) \Rightarrow (b)$ Klar.
$(b) \Rightarrow (c)$ Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β-Box, die T enthält. Sei $q \in Q$ beliebig.

Theorem

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n $(n \geq 2)$. Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

(a) *Es gibt eine β-Box B, sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.*

(b) *Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β-Box B_S, sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.*

(c) *Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β-Box B_T, die T enthält, disjunkt von Q, also $B_T \cap Q = \emptyset$.*

Beweis.

$(a) \Rightarrow (b)$ Klar.
$(b) \Rightarrow (c)$ Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β-Box, die T enthält. Sei $q \in Q$ beliebig. Dann ist die Menge $S_q := T \cup \{q\}$ eine Teilmenge von $P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten.

Theorem

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n $(n \geq 2)$. Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

(a) *Es gibt eine β-Box B, sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.*

(b) *Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β-Box B_S, sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.*

(c) *Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β-Box B_T, die T enthält, disjunkt von Q, also $B_T \cap Q = \emptyset$.*

Beweis.

$(a) \Rightarrow (b)$ Klar.
$(b) \Rightarrow (c)$ Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β-Box, die T enthält. Sei $q \in Q$ beliebig. Dann ist die Menge $S_q := T \cup \{q\}$ eine Teilmenge von $P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten. Sei B_{S_q} die β-Box aus (b).

Theorem

Seien P und Q nichtleere, kompakte Teilmengen von E^n $(n \geq 2)$. Dann sind für eine Basis β von E^n äquivalent:

(a) *Es gibt eine β-Box B, sodass $P \subset B$ und $Q \cap B = \emptyset$.*

(b) *Für jede Teilmenge $S \subset P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten gibt es eine β-Box B_S, sodass $(P \cap S) \subset B_S$ und $(Q \cap S) \cap B_S = \emptyset$.*

(c) *Für jede Teilmenge $T \subset P$ mit maximal n Punkten ist die minimale β-Box B_T, die T enthält, disjunkt von Q, also $B_T \cap Q = \emptyset$.*

Beweis.

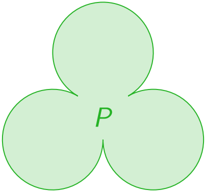
$(a) \Rightarrow (b)$ Klar.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sei $T \subset P$ eine Menge mit maximal n Punkten und B_T die minimale β-Box, die T enthält. Sei $q \in Q$ beliebig. Dann ist die Menge $S_q := T \cup \{q\}$ eine Teilmenge von $P \cup Q$ mit maximal $n+1$ Punkten. Sei B_{S_q} die β-Box aus (b). Dann gilt: $T \subset P \cap S_q \subset B_{S_q}$, also $B_T \subset B_{S_q}$, und $B_T \cap \{q\} \subset B_{S_q} \cap (S_q \cap Q) = \emptyset$.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsanfang $(n = 2)$:

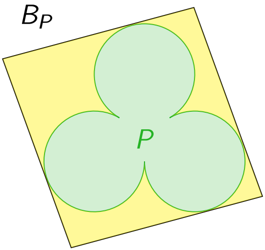


Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsanfang $(n = 2)$:

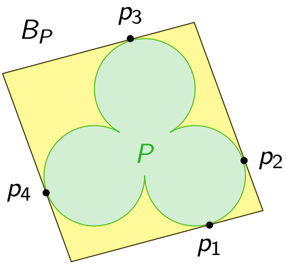
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält.



Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

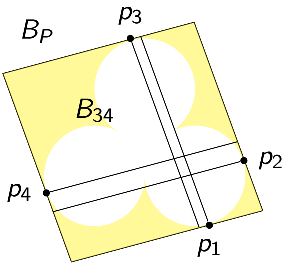
Induktionsanfang $(n = 2)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4.



Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

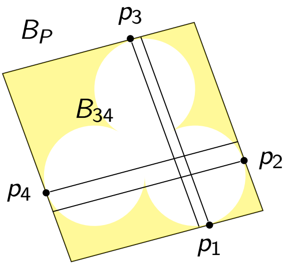
Induktionsanfang $(n = 2)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4. Für jedes Paar von Punkten p_i und p_j mit $i \neq j$ sei B_{ij} die minimale β-Box, die p_i und p_j enthält.



Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

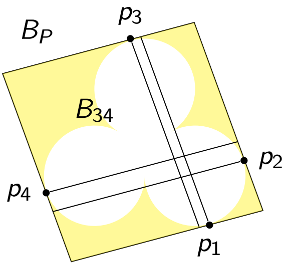
Induktionsanfang $(n = 2)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4. Für jedes Paar von Punkten p_i und p_j mit $i \neq j$ sei B_{ij} die minimale β-Box, die p_i und p_j enthält. Es gilt $B_P = \bigcup_{i \neq j} B_{ij}$.



Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

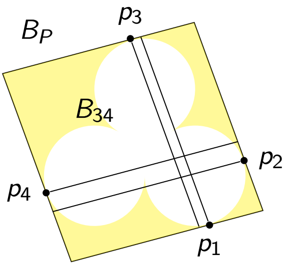
Induktionsanfang $(n = 2)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4. Für jedes Paar von Punkten p_i und p_j mit $i \neq j$ sei B_{ij} die minimale β-Box, die p_i und p_j enthält. Es gilt $B_P = \bigcup_{i \neq j} B_{ij}$. Angenommen, (a) ist falsch, also $q \in Q \cap B_P = Q \cap (\bigcup_{i \neq j} B_{ij})$.



Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsanfang $(n = 2)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Da P kompakt ist, können wir einen Punkt aus P auf jeder der vier Seiten des Parallelogramms B_P wählen. Nenne diese Punkte p_1, p_2, p_3, p_4. Für jedes Paar von Punkten p_i und p_j mit $i \neq j$ sei B_{ij} die minimale β-Box, die p_i und p_j enthält. Es gilt $B_P = \bigcup_{i \neq j} B_{ij}$. Angenommen, (a) ist falsch, also $q \in Q \cap B_P = Q \cap (\bigcup_{i \neq j} B_{ij})$. Dann gibt es $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit $i \neq j$ und $q \in B_{ij}$.



Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \rightarrow n+1)$:

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:

Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n+1)$:

Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : \mathrm{E}^{n+1} \to E^n$ durch

$$f(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n.$$

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : \mathrm{E}^{n+1} \to E^n$ durch

$$f(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n.$$

Dann ist $\beta' := \{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β'-Box, die $f(P)$ enthält.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : \mathrm{E}^{n+1} \to E^n$ durch

$f(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β'-Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n{-}1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β'-Box um T' enthalten ist.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : \mathrm{E}^{n+1} \to E^n$ durch

$f(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β'-Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n{-}1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β'-Box um T' enthalten ist. Sei $T \subset P$ mit maximal $n{-}1$ Punkten und $f(T) = T'$.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n+1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : \mathrm{E}^{n+1} \to E^n$ durch

$f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β'-Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n-1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β'-Box um T' enthalten ist. Sei $T \subset P$ mit maximal $n-1$ Punkten und $f(T) = T'$. Es gilt

$$\inf_{x \in T} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T} \pi_i(x) \qquad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n+1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : \mathrm{E}^{n+1} \to E^n$ durch

$f(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$. Dann ist $\beta' := \{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β'-Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n-1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β'-Box um T' enthalten ist. Sei $T \subset P$ mit maximal $n-1$ Punkten und $f(T) = T'$. Es gilt

$$\inf_{x \in T} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T} \pi_i(x) \qquad \text{für } i \in \{1, ..., n\}.$$

Angenommen, obige Ungleichung gilt auch für $i = n+1$. Dann sind wir fertig.

Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt $(n \to n{+}1)$:
Sei B_P die minimale β-Box, die P enthält. Angenommen, (a) gilt nicht, es gibt also $q \in B_P \cap Q$. Definiere $f : \mathrm{E}^{n+1} \to E^n$ durch

$$f(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_{n+1} b_n) = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n.$$

Dann ist $\beta' := \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von E^n und $f(B_P)$ die minimale β'-Box, die $f(P)$ enthält. Da $f(q) \in f(P)$, gibt es nach Induktionsannahme eine Teilmenge $T' \subset f(P)$ mit maximal $n{-}1$ Punkten, sodass $f(q)$ in der minimalen β'-Box um T' enthalten ist. Sei $T \subset P$ mit maximal $n{-}1$ Punkten und $f(T) = T'$. Es gilt

$$\inf_{x \in T} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T} \pi_i(x) \qquad \text{für } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Angenommen, obige Ungleichung gilt auch für $i = n{+}1$. Dann sind wir fertig. Andernfalls gilt

$$\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x) \quad \text{oder} \quad \pi_{n+1}(q) < \inf_{x \in T} \pi_{n+1}(x).$$

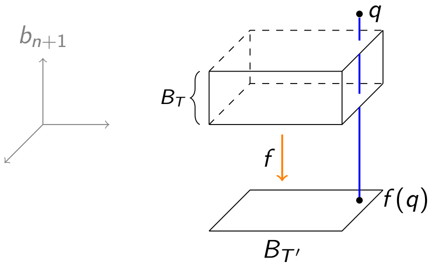
Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt (Fortsetzung):

Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$.

□



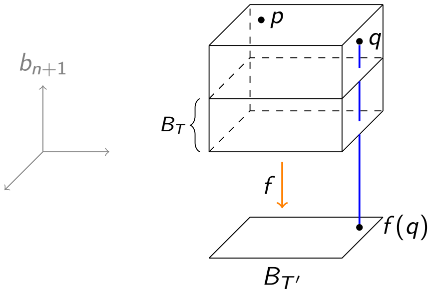
Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt (Fortsetzung):

Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$. Da P kompakt ist, gibt es $p \in P$ mit $\pi_{n+1}(p) = \sup_{x \in P} \pi_{n+1}(x)$.

□

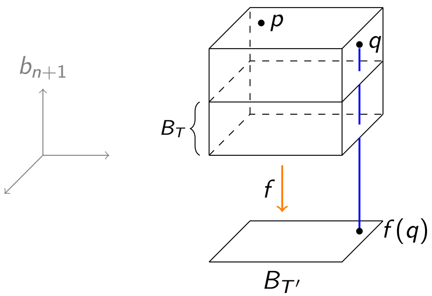


Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt (Fortsetzung):
Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$. Da P kompakt ist, gibt es $p \in P$ mit $\pi_{n+1}(p) = \sup_{x \in P} \pi_{n+1}(x)$. Aus $q \in B_P$ folgt $\pi_{n+1}(q) \leq \pi_{n+1}(p)$.

□



Beweis.

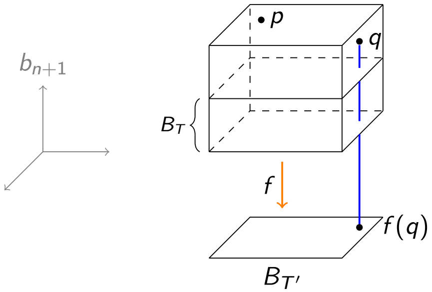
$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt (Fortsetzung):

Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$. Da P kompakt ist, gibt es $p \in P$ mit $\pi_{n+1}(p) = \sup_{x \in P} \pi_{n+1}(x)$. Aus $q \in B_P$ folgt $\pi_{n+1}(q) \le \pi_{n+1}(p)$. Somit gilt für $i \in \{1, \dots, n, n+1\}$:

$$\inf_{x \in T \cup \{p\}} \pi_i(x) \le \pi_i(q) \le \sup_{x \in T \cup \{p\}} \pi_i(x)$$

$\square$



Beweis.

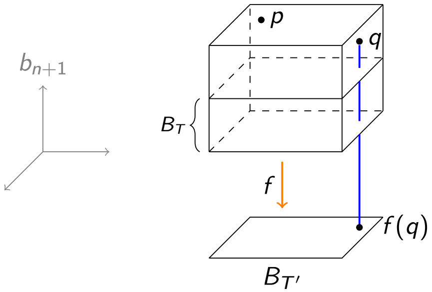
$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt (Fortsetzung):

Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$. Da P kompakt ist, gibt es $p \in P$ mit $\pi_{n+1}(p) = \sup_{x \in P} \pi_{n+1}(x)$. Aus $q \in B_P$ folgt $\pi_{n+1}(q) \leq \pi_{n+1}(p)$. Somit gilt für $i \in \{1, \ldots, n, n+1\}$:

$$\inf_{x \in T \cup \{p\}} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T \cup \{p\}} \pi_i(x)$$

Widerspruch zu (c). $\square$



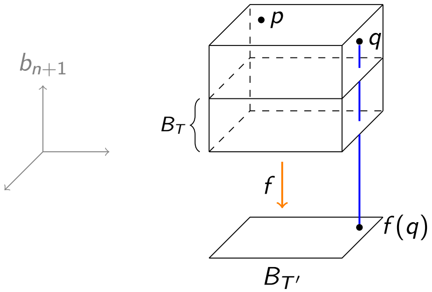
Beweis.

$(c) \Rightarrow (a)$ Durch Induktion über n.

Induktionsschritt (Fortsetzung):
Angenommen, es gilt $\pi_{n+1}(q) > \sup_{x \in T} \pi_{n+1}(x)$. Da P kompakt ist, gibt es $p \in P$ mit $\pi_{n+1}(p) = \sup_{x \in P} \pi_{n+1}(x)$. Aus $q \in B_P$ folgt $\pi_{n+1}(q) \leq \pi_{n+1}(p)$. Somit gilt für $i \in \{1, ..., n, n+1\}$:

$$\inf_{x \in T \cup \{p\}} \pi_i(x) \leq \pi_i(q) \leq \sup_{x \in T \cup \{p\}} \pi_i(x)$$

Widerspruch zu (c). Der andere Fall folgt analog. $\square$



Danke für die Aufmerksamkeit!