

Alexandrov-Krümmung, Hadamard-Räume und der Satz von Cartan-Hadamard

Tim Baumann

Seminar Metrische Geometrie

3. Juni 2014



Sei (X, d) ein Längenraum.

Definition

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **CAT(0)-Gebiet**, falls gilt:

- Für alle $x, y \in U$ gibt es eine Geodäte $\sigma_{xy} : [0, 1] \rightarrow U$ der Länge $d(x, y)$.
- Alle Dreiecke Δabc mit Eckpunkten und Seiten in U erfüllen die CAT(0)-Vergleichseigenschaft:

Für alle $d \in \text{Bild}(\sigma_{ac})$ mit Vergleichspunkt \bar{d} in $\Delta \overline{abc}$ gilt

$$d(b, d) \leq d_{\mathbb{R}^2}(\bar{b}, \bar{d}).$$

und analog für $d' \in \sigma_{ab}$, $d'' \in \sigma_{bc}$.

Definition

Der Längenraum X heißt **CAT(0)-Raum**, falls X eine Überdeckung mit offenen CAT(0)-Gebieten besitzt.

Man sagt auch, der Raum habe **Alexandrov-Krümmung ≤ 0** .

Sei (X, d) ein Längenraum.

Definition

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **CAT(0)-Gebiet**, falls gilt:

- Für alle $x, y \in U$ gibt es eine Geodäte $\sigma_{xy} : [0, 1] \rightarrow U$ der Länge $d(x, y)$.
- Alle Dreiecke Δabc mit Eckpunkten und Seiten in U erfüllen die CAT(0)-Vergleichseigenschaft:

Für alle $d \in \text{Bild}(\sigma_{ac})$ mit Vergleichspunkt \bar{d} in $\Delta \overline{abc}$ gilt

$$d(b, d) \leq d_{\mathbb{R}^2}(\bar{b}, \bar{d}).$$

und analog für $d' \in \sigma_{ab}$, $d'' \in \sigma_{bc}$.

Definition

Der Längenraum X heißt **CAT(0)-Raum**, falls X eine Überdeckung mit offenen CAT(0)-Gebieten besitzt.

Man sagt auch, der Raum habe **Alexandrov-Krümmung ≤ 0** .

Definition

Sei (X, d) ein Längenraum. Eine Geodäte $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ heißt **linear parametrisiert**, wenn für alle $a \leq s < t \leq b$ gilt:

$$\frac{L(\gamma|_{[s,t]})}{\gamma} = \frac{t-s}{b-a}$$

Lemma (BBI, 9.2.3)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein $\text{CAT}(0)$ -Gebiet und $\alpha, \beta : I \rightarrow U$ zwei durch dasselbe Intervall I und linear parametrisierte Geodäten in U . Dann ist die Distanzfunktion

$$\delta : I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$$

konvex.

Korollar (Eindeutigkeit)

Sei oben $I = [t_1, t_2]$ und $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$, $\alpha(t_2) = \beta(t_2)$. Dann gilt $\alpha \equiv \beta$.

Definition

Sei (X, d) ein Längenraum. Eine Geodäte $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ heißt **linear parametrisiert**, wenn für alle $a \leq s < t \leq b$ gilt:

$$\frac{L(\gamma|_{[s,t]})}{\gamma} = \frac{t-s}{b-a}$$

Lemma (BBI, 9.2.3)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet und $\alpha, \beta : I \rightarrow U$ zwei durch dasselbe Intervall I und linear parametrisierte Geodäten in U . Dann ist die Distanzfunktion

$$\delta : I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$$

konvex.

Korollar (Eindeutigkeit)

Sei oben $I = [t_1, t_2]$ und $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$, $\alpha(t_2) = \beta(t_2)$. Dann gilt $\alpha \equiv \beta$.

Definition

Sei (X, d) ein Längenraum. Eine Geodäte $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ heißt **linear parametrisiert**, wenn für alle $a \leq s < t \leq b$ gilt:

$$\frac{L(\gamma|_{[s,t]})}{\gamma} = \frac{t-s}{b-a}$$

Lemma (BBI, 9.2.3)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet und $\alpha, \beta : I \rightarrow U$ zwei durch dasselbe Intervall I und linear parametrisierte Geodäten in U . Dann ist die Distanzfunktion

$$\delta : I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$$

konvex.

Korollar (Eindeutigkeit)

Sei oben $I = [t_1, t_2]$ und $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$, $\alpha(t_2) = \beta(t_2)$. Dann gilt $\alpha \equiv \beta$.

Lemma

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $(\gamma_n : [0, 1] \rightarrow X)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bestehend linear parametrisierten Geodäten bzgl. der Maximumsmetrik

$$d(\alpha, \beta) := \max_{t \in [0, 1]} d(\alpha(t), \beta(t)).$$

Dann ist die Grenzfunktion

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X, \quad t \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(t)$$

eine linear parametrisierte Geodäte.

Lemma (BH, 4.3)

Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0)-Raum und $c : [0, 1] \rightarrow X$ eine Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(1)$. Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{2\epsilon}(c(t))}$ für alle $t \in [0, 1]$ eine CAT(0)-Umgebung ist. Dann gilt:

- 1 Seien $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ linear parametrisierte Geodäten mit
 $d(\alpha(t), c(t)) < \epsilon$ und $d(\beta(t), c(t)) < \epsilon$ f. a. $t \in [0, 1]$.
Dann ist die Abstandsfunktion $\delta(t) := d(\alpha(t), \beta(t))$ konvex.
- 2 Für alle $\bar{x} \in B_\epsilon(x)$ und $\bar{y} \in B_\epsilon(y)$ gibt es genau eine Geodäte $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow X$ von \bar{x} nach \bar{y} , sodass

$$t \mapsto d(c(t), \bar{c}(t))$$

konvex ist.

- 3 Außerdem gilt: $L(\bar{c}) \leq d(x, \bar{x}) + L(c) + d(\bar{y}, y)$

Bemerkung

Solch ein $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von $c([0, 1])$.

Lemma (BH, 4.3)

Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0)-Raum und $c : [0, 1] \rightarrow X$ eine Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(1)$. Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{2\epsilon}(c(t))}$ für alle $t \in [0, 1]$ eine CAT(0)-Umgebung ist. Dann gilt:

- 1 Seien $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ linear parametrisierte Geodäten mit
 $d(\alpha(t), c(t)) < \epsilon$ und $d(\beta(t), c(t)) < \epsilon$ f. a. $t \in [0, 1]$.
Dann ist die Abstandsfunktion $\delta(t) := d(\alpha(t), \beta(t))$ konvex.
- 2 Für alle $\bar{x} \in B_\epsilon(x)$ und $\bar{y} \in B_\epsilon(y)$ gibt es genau eine Geodäte $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow X$ von \bar{x} nach \bar{y} , sodass

$$t \mapsto d(c(t), \bar{c}(t))$$

konvex ist.

- 3 Außerdem gilt: $L(\bar{c}) \leq d(x, \bar{x}) + L(c) + d(\bar{y}, y)$

Bemerkung

Solch ein $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von $c([0, 1])$.

Lemma (BH, 4.3)

Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0)-Raum und $c : [0, 1] \rightarrow X$ eine Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(1)$. Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{2\epsilon}(c(t))}$ für alle $t \in [0, 1]$ eine CAT(0)-Umgebung ist. Dann gilt:

- 1 Seien $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ linear parametrisierte Geodäten mit
 $d(\alpha(t), c(t)) < \epsilon$ und $d(\beta(t), c(t)) < \epsilon$ f. a. $t \in [0, 1]$.
Dann ist die Abstandsfunktion $\delta(t) := d(\alpha(t), \beta(t))$ konvex.
- 2 Für alle $\bar{x} \in B_\epsilon(x)$ und $\bar{y} \in B_\epsilon(y)$ gibt es genau eine Geodäte $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow X$ von \bar{x} nach \bar{y} , sodass

$$t \mapsto d(c(t), \bar{c}(t))$$

konvex ist.

- 3 Außerdem gilt: $L(\bar{c}) \leq d(x, \bar{x}) + L(c) + d(\bar{y}, y)$

Bemerkung

Solch ein $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von $c([0, 1])$.

Lemma (BH, 4.3)

Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0)-Raum und $c : [0, 1] \rightarrow X$ eine Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(1)$. Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{2\epsilon}(c(t))}$ für alle $t \in [0, 1]$ eine CAT(0)-Umgebung ist. Dann gilt:

- 1 Seien $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ linear parametrisierte Geodäten mit
 $d(\alpha(t), c(t)) < \epsilon$ und $d(\beta(t), c(t)) < \epsilon$ f. a. $t \in [0, 1]$.
Dann ist die Abstandsfunktion $\delta(t) := d(\alpha(t), \beta(t))$ konvex.
- 2 Für alle $\bar{x} \in B_\epsilon(x)$ und $\bar{y} \in B_\epsilon(y)$ gibt es genau eine Geodäte $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow X$ von \bar{x} nach \bar{y} , sodass

$$t \mapsto d(c(t), \bar{c}(t))$$

konvex ist.

- 3 Außerdem gilt: $L(\bar{c}) \leq d(x, \bar{x}) + L(c) + d(\bar{y}, y)$

Bemerkung

Solch ein $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von $c([0, 1])$.

Definition

Sei X ein topologischer Raum, $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ stetige Wege mit $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $q = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Eine **Homotopie** der Wege γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte ist eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

mit

- $H(-, 0) = \gamma_1$,
- $H(-, 1) = \gamma_2$,
- $H(0, t) = p$ für alle $t \in [0, 1]$,
- $H(1, t) = q$ für alle $t \in [0, 1]$.

Definition

Ein topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, falls

- er wegzusammenhängend ist und
- jeder geschlossene Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ (d. h. $\gamma(0) = \gamma(1)$) homotop relativ der Endpunkte zum konstanten Weg $t \mapsto \gamma(0)$ ist.

Definition

Sei X ein topologischer Raum, $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ stetige Wege mit $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $q = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Eine **Homotopie** der Wege γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte ist eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

mit

- $H(-, 0) = \gamma_1$,
- $H(-, 1) = \gamma_2$,
- $H(0, t) = p$ für alle $t \in [0, 1]$,
- $H(1, t) = q$ für alle $t \in [0, 1]$.

Definition

Ein topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, falls

- er wegzusammenhängend ist und
- jeder geschlossene Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ (d. h. $\gamma(0) = \gamma(1)$) homotop relativ der Endpunkte zum konstanten Weg $t \mapsto \gamma(0)$ ist.

Definition

Eine **Überlagerung** eines topologischen Raumes X ist ein Tupel (\tilde{X}, π) bestehend aus einem topologischen Raum \tilde{X} und einer surjektiven Überlagerungsabbildung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, für die gilt: Für alle $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U_x \subseteq X$, sodass

$$\pi^{-1}(U_x) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

für disjunkte offene Mengen $(V_i)_{i \in I}$, für die jeweils gilt:

$$\pi|_{V_i} : V_i \rightarrow U$$

ist ein Homöomorphismus.

Beispiel

Jeder Homöomorphismus ist auch eine Überlagerung.

Definition

Eine **Überlagerung** eines topologischen Raumes X ist ein Tupel (\tilde{X}, π) bestehend aus einem topologischen Raum \tilde{X} und einer surjektiven Überlagerungsabbildung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, für die gilt: Für alle $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U_x \subseteq X$, sodass

$$\pi^{-1}(U_x) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

für disjunkte offene Mengen $(V_i)_{i \in I}$, für die jeweils gilt:

$$\pi|_{V_i} : V_i \rightarrow U$$

ist ein Homöomorphismus.

Beispiel

Jeder Homöomorphismus ist auch eine Überlagerung.

Überlagerungsabbildungen $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ besitzen folgende Hochhebungseigenschaften:

Lemma (Hochheben von Wegen)

Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein stetiger Weg und $z \in \tilde{X}$ mit $\pi(z) = \gamma(0)$. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ mit

$$\tilde{\gamma}(0) = z \quad \text{und} \quad p \circ \tilde{\gamma} = \gamma.$$

Lemma (Hochheben von Weghomotopien)

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ zwei stetige Wege mit $p := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ zusammen mit einer Homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ zwischen γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte. Sei $z \in \tilde{X}$ mit $\pi(z) = p$ und $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ die Hochhebungen von γ_1 bzw. γ_2 wie in obigem Lemma. Dann gibt es genau eine Homotopie

$$\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$$

von $\tilde{\gamma}_1$ und $\tilde{\gamma}_2$ relativ der Endpunkte.

Überlagerungsabbildungen $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ besitzen folgende Hochhebungseigenschaften:

Lemma (Hochheben von Wegen)

Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein stetiger Weg und $z \in \tilde{X}$ mit $\pi(z) = \gamma(0)$. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ mit

$$\tilde{\gamma}(0) = z \quad \text{und} \quad p \circ \tilde{\gamma} = \gamma.$$

Lemma (Hochheben von Weghomotopien)

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ zwei stetige Wege mit $p := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ zusammen mit einer Homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ zwischen γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte. Sei $z \in \tilde{X}$ mit $\pi(z) = p$ und $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ die Hochhebungen von γ_1 bzw. γ_2 wie in obigem Lemma. Dann gibt es genau eine Homotopie

$$\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$$

von $\tilde{\gamma}_1$ und $\tilde{\gamma}_2$ relativ der Endpunkte.

Definition

Ein **lokaler Homöomorphismus** ist eine stetige Abbildung $f : Y \rightarrow Z$ zwischen topologischen Räumen, für die gilt:
Für alle $y \in Y$ eine Umgebung $U_y \subseteq Y$ von y existiert, sodass $f(U_y)$ offen und

$$f|_{U_y} : U_y \rightarrow f(U_y)$$

ein Homöomorphismus ist.

Bemerkung

Jeder Überlagerungsabbildung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ ist ein lokaler Homöomorphismus, aber nicht jeder lokale Homöomorphismus ist eine Überlagerungsabbildung.

Definition

Ein **lokaler Homöomorphismus** ist eine stetige Abbildung $f : Y \rightarrow Z$ zwischen topologischen Räumen, für die gilt:
Für alle $y \in Y$ eine Umgebung $U_y \subseteq Y$ von y existiert, sodass $f(U_y)$ offen und

$$f|_{U_y} : U_y \rightarrow f(U_y)$$

ein Homöomorphismus ist.

Bemerkung

Jeder Überlagerungsabbildung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ ist ein lokaler Homöomorphismus, aber nicht jeder lokale Homöomorphismus ist eine Überlagerungsabbildung.

Definition

Ein vollständiger, einfach zusammenhängender Längenraum mit Alexandrov-Krümmung ≤ 0 (kurz: ein CAT(0)-Raum) heißt **Hadamard-Raum**.

Definition

Sei X ein metrischer Raum und $p \in X$. Dann wird

$$\tilde{X}_p := \{\text{Geodäten } \gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ mit } \gamma(0) = p \\ \text{und } \gamma \text{ linear parametrisiert}\}$$

Raum der Geodäten mit Startpunkt p genannt. Mit der Metrik

$$d(\alpha, \beta) := \max_{t \in [0, 1]} |\alpha(t) - \beta(t)|$$

wird (\tilde{X}_p, d) zu einem metrischen Raum.

Der Punkt $\tilde{p} \in \tilde{X}_p$ sei die konstante Geodäte $t \mapsto p$.

Definition

Die Exponentialabbildung ist die Abbildung

$$\exp_p : \tilde{X}_p \rightarrow X, \quad \gamma \mapsto \gamma(1),$$

welche jede Geodäte auf ihren Endpunkt abbildet.

Definition

Sei X ein metrischer Raum und $p \in X$. Dann wird

$$\tilde{X}_p := \{\text{Geodäten } \gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ mit } \gamma(0) = p \\ \text{und } \gamma \text{ linear parametrisiert}\}$$

Raum der Geodäten mit Startpunkt p genannt. Mit der Metrik

$$d(\alpha, \beta) := \max_{t \in [0, 1]} |\alpha(t) - \beta(t)|$$

wird (\tilde{X}_p, d) zu einem metrischen Raum.

Der Punkt $\tilde{p} \in \tilde{X}_p$ sei die konstante Geodäte $t \mapsto p$.

Definition

Die **Exponentialabbildung** ist die Abbildung

$$\exp_p : \tilde{X}_p \rightarrow X, \quad \gamma \mapsto \gamma(1),$$

welche jede Geodäte auf ihren Endpunkt abbildet.

Lemma (BH, 4.5)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann gilt:

- 1 \tilde{X}_p ist zusammenziehbar.
- 2 \exp_p ist eine lokale Isometrie.
- 3 Für alle $c \in \tilde{X}_p$ gibt es genau eine Geodäte in \tilde{X}_p von \tilde{p} nach c .

Lemma (BH, 4.6)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann ist auch \tilde{X}_p vollständig.

