Geometrische Morphismen; Eigenschaften von Topoi und Konstruktionen mit Topoi

Tim Baumann

13. April 2017

1 Geometrische Morphismen

Definition. Ein *geometrischer Morphismus* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ zwischen Topoi ist ein Paar

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, shift right, "f_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift right, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

von adjungierten Funktoren, wobei f^* linksexakt ist, d. h. f^* bewahrt endliche Limiten.
Dabei heißt f^* *Urbildfunktor* und f_* *Direktes-Bild-Funktor*.

Erinnerung. Außerdem bewahrt f_* Limiten und f^* Kolimiten, denn:

Left-Adjoints Preserve Colimits (LAPC), *Right-Adjoints Preserve Limits (RAPL)*

Lemma. Linksexakte Funktoren bewahren Monomorphismen.

Beweis. Dies folgt aus der Äquivalenz: $f : X \to Y$ ist genau dann ein Monomorphismus, falls folgendes Diagramm ein Pullback-Diagram ist:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

□

Bemerkung. Aus dem Yoneda-Lemma folgt: Bei einer Adjunktion $F \dashv G$ ist F eindeutig (bis auf Isomorphie) durch G bestimmt (und umgekehrt). Die Daten eines geometrischen Morphismus sind also schon allein durch f^* oder f_* gegeben.

Bemerkung. Geometrische Morphismen lassen sich komponieren,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, shift right, "f_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift right, "f^*"'] \arrow[r, shift right, "g_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{F} \arrow[l, shift right, "g^*"'] \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, shift right, "g_* \circ f_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{F} \arrow[l, shift right, "f^* \circ g^*"'] \end{tikzcd},$$

da Paare adjungierter Funktoren komponieren und die Komposition $f^* \circ g^*$ linksexakter Funktoren wieder linksexakt ist. So erhalten wir eine Kategorie der Topoi. Diese wird sogar zu einer 2-Kategorie, wenn wir definieren:

Definition. Ein *Morphismus zwischen geometrischen Morphismen* $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ ist eine natürliche Transformation $\alpha : f^* \to g^*$.

Bemerkung. Es gibt eine natürliche Bijektion $\mathrm{Nat}(f^*, g^*) \cong \mathrm{Nat}(g_*, f_*)$.

Beispiel. Sei $\mathcal{E}$ ein kovollständiger Topos (z. B. ein Grothendiecktopos). Dann hat der *Globale-Schnitte-Funktor*

$$\Gamma : \mathcal{E} \to \mathbf{Set}, \quad E \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, E)$$

einen Linksadjungierten, nämlich

$$\Delta : \mathbf{Set} \to \mathcal{E}, \quad S \mapsto \coprod_{s \in S} 1.$$

Für diesen gelten

$$\Delta(\{\heartsuit\}) = \coprod_{s\in\{\heartsuit\}} 1 \cong 1 \qquad \text{und}$$

$$\Delta(S\times T) = \coprod_{(s,t)\in S\times T} 1 \;\cong \left(\coprod_{s\in S} 1\right) \times \left(\coprod_{t\in T} 1\right) = \Delta(S)\times\Delta(T).$$

Außerdem kann man zeigen, dass Δ auch Differenzkerne und somit alle endlichen Limiten erhält. Folglich ist

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, bend right, "\Gamma"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Set} \arrow[l, bend right, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

ein geometrischer Morphismus.
Es gibt auch keinen anderen geometrischen Morphismus $f : \mathcal{E} \to \mathbf{Set}$, denn für jeden solchen Morphismus und jedes Objekt $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ gilt:

$$f_*E \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, f_*E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(f^*1, E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, E) \cong \Gamma(E).$$

Definition. Ein geometrischer Morphismus $f = (f^* \dashv f_*)$ heißt

- *(geom.) Einbettung*, falls f_* volltreu ist und
- *(geom.) Surjektion*, falls f^* volltreu ist.

Bemerkung. Jeder geometrische Morphismus lässt sich (bis auf Kategorienäquivalenz) eindeutig zerlegen in eine Surjektion gefolgt von einer Einbettung.

Definition. Ein *Untertopos von* $\mathcal{E}$ ist ein Topos $\mathcal{D}$ zusammen mit einer geometrischen Einbettung $\mathcal{D} \to \mathcal{E}$.

Beispiel. **FinSet** ist kein Untertopos von **Set** vermöge der Inklusion $i : \mathbf{FinSet} \to \mathbf{Set}$, denn es gibt keine endliche Menge X mit

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{FinSet}}(X, \{\heartsuit, \diamondsuit\}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathbb{N}, i(\{\heartsuit, \diamondsuit\})),$$

da die rechte Hom-Menge unendlich und die linke Hom-Menge für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{FinSet})$ endlich ist. Somit besitzt i keinen Linksadjungierten.

2 Stetige Abbildungen induzieren geometrische Morphismen

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen.
Dann erhalten wir den *Direktes-Bild-Funktor*

$$f_* : \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(Y), \quad \mathcal{F} \mapsto f_*(\mathcal{F})$$

mit $f_*(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ für alle $U \subseteq Y$.

Lemma. Sei $g : E \to Y$ ein étalér Raum. Dann ist $f^*(g) : f^*(E) \to X$ wieder étale.

Definition. Der *Inverse-Bild-Funktor* ist die Komposition

$$f^* := \mathbf{Sh}(Y) \xrightarrow{\Lambda} \mathbf{\acute{E}t}(Y) \xrightarrow{f^*} \mathbf{\acute{E}t}(X) \xrightarrow{\Gamma} \mathbf{Sh}(X).$$

Lemma. $f^* \dashv f_*$

Lemma. $f^* : \mathbf{Sh}(Y) \to \mathbf{Sh}(X)$ ist linksexakt

Beweisskizze. Zurückziehen von étalen Räumen $f^* : \mathbf{\acute{E}t}(Y) \to \mathbf{\acute{E}t}(X)$ ist die Einschränkung vom Zurückziehen allgemeiner Bündel, $f^* : \mathbf{Bund}(Y) \to \mathbf{Bund}(X)$. Letzterer Funktor bewahrt kleine Limiten, da er rechtsadjungiert zu

$$f_* : \mathbf{Bund}(X) \to \mathbf{Bund}(Y), \quad (E \xrightarrow{p} X) \mapsto (E \xrightarrow{f\circ p} Y)$$

ist. Man zeigt nun, dass für jeden topologischen Raum Z die Unterkategorie $\mathbf{\acute{E}t}(Z)$ in $\mathbf{Bund}(Z)$ abgeschlossen unter der Bildung von endlichen Limiten ist. ☐

Korollar. $\begin{tikzcd} \mathbf{Sh}(X) \arrow[r, bend right, "f_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Sh}(Y) \arrow[l, bend right, "f^*"'] \end{tikzcd}$ ist ein geometrischer Morphismus.

Proposition. Sei Y ein nüchterner topologischer Raum (z. B. ein Hausdorff-Raum in klassischer Metalogik). Dann gibt es eine 1-zu-1-Korrespondenz

$$\begin{array}{rcl} \{ \text{ stetige Abbildungen } X \to Y \ \} & \leftrightarrow & \{ \text{ geometrische Morphismen } \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(Y) \ \} \\ f & \mapsto & (f^* \dashv f_*) \end{array}$$

Beweisskizze. Da f^* linksexakt ist, bildet f^* Unterobjekte des terminalen Objektes auf Unterobjekte des terminalen Objekts ab. Da außerdem für jeden topol. Raum Z ein Isomorphismus $\mathrm{Sub}_{\mathbf{Sh}(Z)}(1) \cong \mathcal{O}(Z)$ (wobei $\mathcal{O}(Z)$ der Verband der offenen Teilmengen ist) existiert, erhalten wir eine Abbildung

$$f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X).$$

Wir definieren nun eine Abbildung $f : X \to Y$ durch

$$f(x) := y \ :\Longleftrightarrow\ x \in f^*(V) \ \text{ für alle offenen Umgebungen } V \text{ von } y. \qquad \square$$

Definition. Ein *Punkt* eines Topos $\mathcal{E}$ ist ein geometrischer Morphismus $\mathbf{Set} \to \mathcal{E}$.

Bemerkung. Diese Definition ergibt Sinn, da für nüchterne topologische Räume X geometrische Morphismen $\mathbf{Set} = \mathbf{Sh}(\{\heartsuit\}) \to \mathbf{Sh}(X)$ in 1-zu-1-Korrespondenz zu stetigen Abbildungen $\{\heartsuit\} \to X$, also zu Punkten von X, stehen.

3 Scheibenkategorien von Topoi sind Topoi

Satz („Fundamentalsatz der Topostheorie").
Sei $\mathcal{E}$ ein Topos, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$. Dann ist auch die Scheibenkategorie $\mathcal{E}/B$ ein Topos.

Bemerkung. Im Spezialfall $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ lässt sich der Satz wie folgt beweisen: Sei $\mathcal{B}$ die diskrete Kategorie mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}) = B$. Dann gibt es eine Kategorienäquivalenz $\mathbf{Set}/B \simeq [\mathcal{B}, \mathbf{Set}] \simeq [\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ gegeben durch

$$\mathbf{Set}/B \to [\mathcal{B}, \mathbf{Set}], \quad (X \xrightarrow{p} B) \mapsto (b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \mapsto p^{-1}(b)).$$

Beweisskizze. Wir müssen die Toposaxiome nachrechnen:

1. $\mathcal{E}/B$ ist endlich vollständig:

Der Differenzkern in $\mathcal{E}/B$ berechnet sich wie in $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[drr] & X \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & & B & \end{tikzcd}$$

Binäre Produkte in $\mathcal{E}/B$ sind Pullbacks in $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} & X \times_B Y \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Das terminale Objekt in $\mathcal{E}/B$ ist der Morphismus $\mathrm{id}_B : B \to B$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "\mathrm{id}_B"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

2. $\mathcal{E}/B$ besitzt einen Unterobjektklassifizierer:

Sei $U : \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}$ der offensichtliche Vergissfunktor. Dieser Funktor ist linksadjungiert zum Funktor $(- \times B) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/B$, denn es gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X \xrightarrow{f} B, Y \times B \xrightarrow{\pi_2} B)$$

natürlich in $(X \xrightarrow{f} B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}/B)$ und $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$. Da ein Morphismus f in $\mathcal{E}/B$ genau dann ein Monomorphismus ist, wenn $U(f)$ ein solcher ist, gilt:

$$\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}/B}(A \xrightarrow{f} B) \cong \mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega_{\mathcal{E}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(A \xrightarrow{f} B, \Omega_{\mathcal{E}} \times B \xrightarrow{\pi_2} B)$$

Nach Proposition I.3.1 in SiGaL ist folglich $\Omega_{\mathcal{E}/B} = \Omega_{\mathcal{E}} \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ der Unterobjektklassifizierer in $\mathcal{E}/B$. Der universelle Monomorphismus $\mathrm{true} : 1 \to \Omega$ ist die Komposition

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_B"'] & 1 \times B \arrow[r, "\mathrm{true}_{\mathcal{E}} \times \mathrm{id}_B"] \arrow[d, "\pi_2"] & \Omega \times B \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

③ $\mathcal{E}/B$ ist kartesisch abgeschlossen:

Seien $(X \xrightarrow{p_X} B), (Y \xrightarrow{p_Y} B), (Z \xrightarrow{p_Z} B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}/B)$ gegeben. Wir müssen ein Objekt $(W \xrightarrow{p_W} B)$ mit

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X \times_B Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X, W)$$

finden. In **Set** können wir dieses Objekt wie folgt konstruieren:

$$W = \coprod_{b \in B} Z_b^{Y_b} \quad \text{wobei} \quad Z_b := p_Z^{-1}(b),\, Y_b := p_Y^{-1}(b).$$

Diese Definition können wir mit der internen Sprache von $\mathcal{E}$ imitieren:

$$W = \left\{ (b, G) \in B \times \mathcal{P}(Y \times Z) \;\middle|\; \begin{array}{l} G \subseteq (p_Y \circ \pi_Y)^{-1}(b) \cap (p_Z \circ \pi_Z)^{-1}(b) \\ \wedge\ \forall\, y : Y .\, p_Y(y) = b \implies \exists!\, z : Z .\, (y, z) \in G \end{array} \right\}$$

(Interpretation: Elemente von W sind Tupel (b, G) bestehend aus einem Index $b \in B$ und dem Graphen eines Morphismus $Y_b \to Z_b$ als Teilmenge von $Y \times Z$.) □

Definition. Sei $k : B \to A$ ein Morphismus in $\mathcal{E}$. Dann erhalten wir einen Funktor

$$\Sigma_k : \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/A, \quad (X \xrightarrow{p_X} B) \mapsto (k \circ p_X : X \xrightarrow{p_X} B \xrightarrow{k} A)$$

durch Komponieren mit k und einen *Basiswechselfunktor*

$$k^* : \mathcal{E}/A \to \mathcal{E}/B, \quad (Y \xrightarrow{p_Y} A) \mapsto (B \times_A Y \xrightarrow{\pi_B} B)$$

durch Pullback entlang k.

Bemerkung. Im Spezialfall $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$, $k : B \to 1$ ist k^* der Funktor, der eine Menge X auf die konstante Familie $(X)_{b \in B}$ von Mengen abbildet. Man kann $\Sigma_B := \Pi_k : [\mathcal{B}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Set}$ wie folgt konstruieren:

$$\Sigma_B((X_b)_{b \in B}) := \{ \text{ Tupel } (b, x) \text{ mit } b \in B \text{ und } x \in X_b \ \}$$

In Typtheorie heißt diese Konstruktion „abhängige Summe“ (oder auch „Σ-Typ“).

Lemma. $\Sigma_k \dashv k^*$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/A}(\Sigma_k(X \to B), Y \to A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X \to B, k^*(Y \to A)).$$

Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, dashed] \arrow[ddr] & & \\
& B \times_A Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
& B \arrow[r, "k"] & A
\end{tikzcd}$$

Elemente der linken Hom-Menge sind Morphismen $X \to Y$, die das äußere Viereck kommutieren lassen; Elemente der rechten Hom-Menge sind Morphismen $X \to B \times_A Y$, die das linke Dreieck kommutieren lassen. Zwischen solchen Elementen besteht eine 1-zu-1-Korrespondenz, gegeben durch die universelle Eigenschaft des Pullbacks $B \times_A Y$. □

Lemma/Definition. k^* besitzt auch einen Rechtsadjungierten $\Pi_k : \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/A$.

Bemerkung. Im Spezialfall $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$, $k : B \to 1$ kann $\Pi_B := \Pi_k : [\mathcal{B}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Set}$ wie folgt konstruiert werden:

$$\Pi_B((X_b)_{b \in B}) := \{ \text{ Familien } (x_b \in X_b)_{b \in B} \ \}$$

In Typtheorie heißt diese Konstruktion „abhängiges Produkt“ (oder auch „Π-Typ“).

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $A \cong 1$ und somit $\mathcal{E}/A \cong \mathcal{E}$. (Ansonsten verwende $\mathcal{E}' := \mathcal{E}/A$ und $B' := (B \xrightarrow{k} A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}')$ anstelle von $\mathcal{E}$ bzw. B. Beachte, dass $\mathcal{E}'/B' \simeq \mathcal{E}/B$.) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(k^*(X), Y \xrightarrow{h} B) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(X \times B \xrightarrow{\pi_B} B, Y \xrightarrow{h} B) \\
&\cong \{t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X \times B, Y) \mid h \circ t = \pi_B\} \\
&\cong \{t' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, Y^B) \mid h^B \circ t' = j \circ !\} \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \{g : Y^B \mid h \circ g = \mathrm{id}_B\})
\end{aligned}$$

wobei $j : 1 \to B^B$ die Curryfizierung von id_B und $! : X \to 1$ ist. Wir definieren somit Π_k durch

$$\Pi_k(k : Y \to B) := \{g : Y^B \mid h \circ g = \mathrm{id}_B\}. \qquad \square$$

Korollar. $\begin{tikzcd} \mathcal{E}/B \arrow[r, shift right, "\Sigma_k"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{E}/A \arrow[l, shift right, "k^*"'] \end{tikzcd}$ ist ein geometrischer Morphismus.
Dieser ist *wesentlich*, d. h. k^* besitzt auch einen Linksadjungierten.

Bemerkung. Allquantifikation über A lässt sich mit dem Scheibentopos $\mathcal{E}/A$ verstehen:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E} \models \forall x : A.\, \varphi(x) \\
\iff \quad & 1 \models \forall x : A.\, \varphi(x) \\
\iff \quad & \text{für alle } B \xrightarrow{p} 1,\ B \xrightarrow{x_0} A \text{ gilt } B \models \varphi(x_0) \\
\iff \quad & A \models \varphi(\mathrm{id}_A) \\
\iff \quad & \mathcal{E}/A \models \varphi(\Delta),
\end{aligned}$$

wobei Δ der Diagonalmorphismus in folgendem Diagramm ist:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & A \times A \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Das verallgemeinerte Element id_A wird auch als *generisches Element* von A bezeichnet, da man alle weiteren Elemente aus ihm durch Präkomposition erhalten kann.

4 Modale Operatoren

Definition. Ein *modaler Operator* (oder *Lawvere-Tierney-Topologie*) auf einem Topos $\mathcal{E}$ ist ein Morphismus $\square : \Omega \to \Omega$, für den gilt:

(a) $\square \circ \mathrm{true} = \mathrm{true}$
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\mathrm{true}"] \arrow[dr, "\mathrm{true}"'] & \Omega \arrow[d, "\square"] \\ & \Omega \end{tikzcd}$$

(b) $\square \circ \square = \square$
$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\square"] \arrow[dr, "\square"'] & \Omega \arrow[d, "\square"] \\ & \Omega \end{tikzcd}$$

(b) $\square \circ \wedge = \wedge \circ (\square \times \square)$
$$\begin{tikzcd} \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "\square \times \square"'] & \Omega \arrow[d, "\square"] \\ \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Interpretation. $\square$ ist ein idempotenter, mit $\wedge$ und true verträglicher modaler Operator.
Zum Beispiel: Sei φ eine Aussage. Wir könnten die logische Aussage $\square\varphi$ wie folgt interpretieren:

ich weiß, dass φ / ich glaube, dass φ / lokal gilt φ

Dann sollten intuitiv auch folgende Regeln gelten:

$$\square\top = \top, \qquad \square\square\varphi \iff \square\varphi \qquad \text{sowie} \qquad (\square\varphi) \wedge (\square\psi) \iff \square(\varphi \wedge \psi)$$

Diese obigen Interpretationen sollten sich also als modale Operatoren in passenden Topoi umsetzen lassen. Im Gegensatz dazu stiftet der modale Operator (im Sinne der Modallogik) $\Diamond$ mit der Interpretation „$\Diamond\varphi$ gilt, falls φ möglich ist“ keinen modalen Operator (im Sinne der Topostheorie), denn aus $(\Diamond\varphi) \wedge (\Diamond\psi)$ folgt i. A. nicht $\Diamond(\varphi \wedge \psi)$.

Definition. Für ein Unterobjekt $A \hookrightarrow E$ ist $\overline{A} \hookrightarrow E$ dasjenige Unterobjekt mit

$$\chi_{\overline{A}} = \Box \circ \chi_A : E \to \Omega.$$

Lemma.

- $A \subseteq \overline{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$ (Natürlichkeit)

Definition. Sei $\Box$ ein modaler Operator auf $\mathcal{E}$.

- Ein Unterobjekt $A \hookrightarrow E$ heißt *dicht*, falls $\overline{A} = E$.
- Eine $\Box$-*Garbe* ist ein Objekt $F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$, für das gilt:
  Für alle dichten Unterobjekte $A \overset{m}{\hookrightarrow} E$ ist $\mathrm{Hom}(m, F) : \mathrm{Hom}(E, F) \to \mathrm{Hom}(A, F)$ ein Isomorphismus.
- $\mathbf{Sh}_\Box(\mathcal{E})$ ist die volle Unterkategorie der $\Box$-Garben von $\mathcal{E}$.

Satz. $\mathbf{Sh}_\Box(\mathcal{E})$ ist ein Topos.

Beweisskizze. Zeige:

- Die Unterkategorie $\mathbf{Sh}_\Box(\mathcal{E})$ ist abgeschlossen unter der Bildung von Limiten und Exponentialobjekten.
- Sei $\Omega_\Box$ der Differenzkern

  $$\Omega_\Box \longrightarrow \Omega \underset{\mathrm{id}}{\overset{\Box}{\rightrightarrows}} \Omega$$

  Nenne ein Subobjekt $A \hookrightarrow F$ *abgeschlossen*, falls $\overline{A} = A$. Für eine $\Box$-Garbe F zeige dann, dass

  $$\mathrm{Sub}_{\mathbf{Sh}_\Box(\mathcal{E})}(F) = \{A \in \mathrm{Sub}_\mathcal{E}(F) \mid A \text{ abgeschlossen}\} \cong \mathrm{Hom}_\mathcal{E}(F, \Omega_\Box)$$

  und dass $\Omega_\Box$ eine F-Garbe ist. Somit ist $\Omega_\Box$ der Unterobjektklassifizierer von $\mathbf{Sh}_\Box(\mathcal{E})$. $\Box$

Sei $i : \mathbf{Sh}_\Box(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ der Einbettungsfunktor.

Satz/Definition.

- i hat einen Linksadjungierten, die $\Box$-*Garbifizierung* $\mathbf{a} : \mathcal{E} \to \mathbf{Sh}_\Box(\mathcal{E})$.
- $\mathbf{a}$ ist linksexakt.

Korollar. $\mathbf{Sh}_\Box(\mathcal{E}) \underset{i}{\overset{\mathbf{a}}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{E}$ ist eine geometrische Einbettung.

Bemerkung. Bis auf Kategorienäquivalenz ist jede geometrische Einbettung von dieser Form.

Satz. Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie und $\mathcal{E} := [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$. Dann gibt es eine 1-zu-1-Korrespondenz

$$\begin{array}{rcl} \{\text{ Grothendieck-Topologien auf } \mathcal{C} \text{ }\} & \leftrightarrow & \{\text{ Lawvere-Tierney-Topologien auf } \mathcal{E} \text{ }\} \\ J & \mapsto & \Box_J := (\Box_C : S \mapsto \{g \mid \mathrm{codom}(g) = C,\ S \text{ überdeckt } g\})_{C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ J_\Box := \Box^*(1 \xrightarrow{\mathrm{true}} \Omega) & \leftarrow\!\shortmid & \Box \end{array}$$

(Erinnerung: $\Omega \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ ist die Prägarbe mit $\Omega(C) := \{$ Siebe auf C $\}$.)

Satz. Desweiteren gilt für eine Prägarbe $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$:

$$P \text{ ist } \Box\text{-Garbe} \iff P \text{ ist Garbe bzgl. } J_\Box, \text{ also } P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sh}(\mathcal{E}, J_\Box)).$$

Korollar. Die Garbifizierungen einer Prägarbe bzgl. dem modalen Operator $\Box$ oder der zugehörigen Grothendieck-Topologie $J_\Box$ sind isomorph.

Definition. Die $\Box$-*Übersetzung* ist rekursiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} (f = g)^\Box &:\equiv \Box(f = g) \\ (x \in A)^\Box &:\equiv \Box(x \in A) \\ \top^\Box &:\equiv \Box\top \quad (\Leftrightarrow \top) \\ \bot^\Box &:\equiv \Box\bot \\ (\varphi \wedge \psi)^\Box &:\equiv \Box(\varphi^\Box \wedge \psi^\Box) & (\textstyle\bigwedge_i \varphi_i)^\Box &:\equiv \Box(\textstyle\bigwedge_i \varphi_i^\Box) \\ (\varphi \vee \psi)^\Box &:\equiv \Box(\varphi^\Box \vee \psi^\Box) & (\textstyle\bigvee_i \varphi_i)^\Box &:\equiv \Box(\textstyle\bigvee_i \varphi_i^\Box) \\ (\varphi \Rightarrow \psi)^\Box &:\equiv \Box(\varphi^\Box \Rightarrow \psi^\Box) \\ (\forall x : X.\ \varphi)^\Box &:\equiv \Box(\forall x : X.\ \varphi^\Box) & (\forall X.\ \varphi)^\Box &:\equiv \Box(\forall X.\ \varphi^\Box) \\ (\exists x : X.\ \varphi)^\Box &:\equiv \Box(\exists x : X.\ \varphi^\Box) & (\exists X.\ \varphi)^\Box &:\equiv \Box(\exists X.\ \varphi^\Box) \end{aligned}$$

Satz. Sei φ eine Formel in $\mathcal{E}$. Dann gilt

$$\mathcal{E} \models \varphi^{\Box} \iff \mathbf{Sh}_{\Box}(\mathcal{E}) \models \varphi,$$

wobei in φ auf der linken Seite alle Parameter nach $\mathbf{Sh}_{\Box}(\mathcal{E})$ zurückgezogen wurden.

Beispiele. Sei ψ eine logische Aussage, also ein Subobjekt $\psi : J \to 1$.

- $\Box\varphi :\equiv (\psi \implies \varphi)$ (hiermit wird $\mathbf{Sh}_{\Box}(\mathcal{E})$ zu einem *offenen Untertopos* von $\mathcal{E}$)
- $\Box\varphi :\equiv (\psi \vee \varphi)$ (hiermit wird $\mathbf{Sh}_{\Box}(\mathcal{E})$ zu einem *abgeschlossenen Untertopos* von $\mathcal{E}$)
- $\Box\varphi :\equiv \neg\neg\varphi$ ($\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{E})$ ist der größte Untertopos von $\mathcal{E}$, in dem klassische Logik gilt.)

Betrachte $\mathcal{E} = \mathbf{Sh}(X)$, den Topos der Garben auf einem topologischen Raum. Dann entsprechen Subobjekte $J \hookrightarrow 1$ genau den offenen Teilmengen $U \subseteq X$.

- Für $\Box\varphi :\equiv (U \implies \varphi)$ ist $\mathbf{Sh}_{\Box}(X) \equiv \mathbf{Sh}(U)$ und es gilt
$$\mathbf{Sh}(X) \models \varphi^{\Box} \iff \mathbf{Sh}(U) \models \varphi.$$
- Für $A \subseteq X$ abgeschlossen sei $\Box\varphi :\equiv ((X \setminus A) \vee \varphi)$. Es gilt
$$\mathbf{Sh}(X) \models \varphi^{\Box} \iff \mathbf{Sh}(A) \models \varphi.$$

5 Geometrische Morphismen und Logik

Definition.

- Eine Formel heißt *geometrisch*, falls sie nur folgende Operatoren enthält:
$$\top \quad \bot \quad \wedge \quad \vee \quad \exists \quad \bigvee$$
Es sind also $\Rightarrow$ und $\forall$ verboten. Freie Variablen dürfen in φ vorkommen.
- Eine *geometrische Sequenz* ist eine Sequenz der Form $\varphi \vdash \psi$, wobei φ und ψ geometrische Formeln sind.

Satz. Sei $f : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ ein geometrischer Morphismus.

- Gilt $\varphi \vdash \psi$ in $\mathcal{D}$, so gilt $f^*(\varphi) \vdash f^*(\psi)$ in $\mathcal{E}$.
- Ist f eine Surjektion, so gilt auch die Umkehrung.

6 Weitere Quellen für geometrische Morphismen

Satz. Sei $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann gibt es einen geometrischen Morphismus

$[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \underset{\phi_*}{\overset{\phi^*}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} [\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ mit $\phi^*(P) := (\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\phi^{\mathrm{op}}} \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set})$. Dieser ist wesentlich.