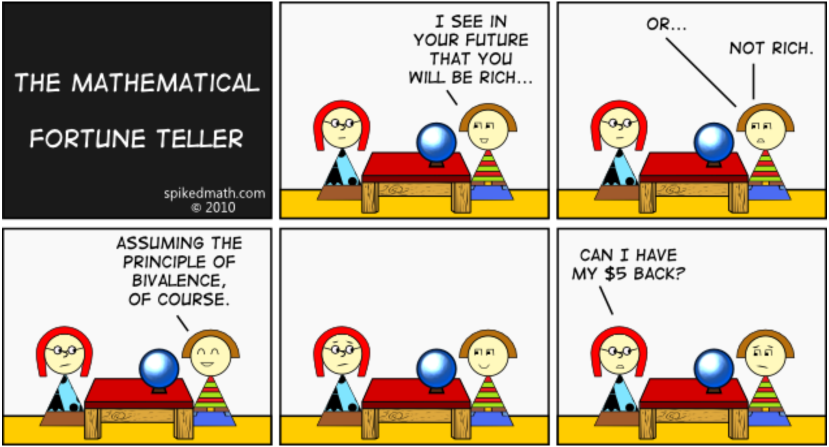

THE MATHEMATICAL FORTUNE TELLER
spikedmath.com
© 2010
I SEE IN YOUR FUTURE THAT YOU WILL BE RICH...
OR...
NOT RICH.
ASSUMING THE PRINCIPLE OF BIVALENCE, OF COURSE.
CAN I HAVE MY $5 BACK?

Intuitionistische Logik

Ingo Blechschmidt
mit Illustrationen von Carina Willbold

Sommerakademie in Neubeuern

7. August 2012

Gliederung

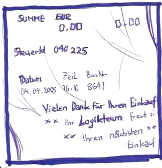
Informale Bedeutung logischer Formeln

kl.

$\bot$	Es stimmt eine Falschheit.
$A \wedge B$	A und B stimmen.
$A \vee B$	A oder B stimmt.
$A \Rightarrow B$	Sollte A stimmen, dann auch B.
$\forall x{:}X.\, A(x)$	Für alle $x : X$ stimmt jeweils $A(x)$.
$\exists x{:}X.\, A(x)$	Es gibt mindestens ein $x : X$, für das $A(x)$ stimmt.

int.

$\bot$	Wir haben Beleg für eine Falschheit.
$A \wedge B$	Wir haben Beleg für A und für B.
$A \vee B$	Wir haben Beleg für A oder für B.
$A \Rightarrow B$	Sollten wir Beleg für A haben, können wir (gleichmäßig) auch Beleg für B konstruieren.
$\forall x{:}X.\, A(x)$	Wir können (gleichmäßig) für alle $x : X$ Belege für $A(x)$ konstruieren.
$\exists x{:}X.\, A(x)$	Wir haben ein $x : X$ zusammen mit Beleg für $A(x)$.



Definition

- $\neg A \;:\equiv\; (A \Rightarrow \bot)$.
- Einen Beleg für $\bot$ gibt es nicht.

$$\text{kl.}\begin{cases} \neg A & A \text{ stimmt nicht.} \\ \neg\neg A & A \text{ stimmt.} \end{cases}$$

$$\text{int.}\begin{cases} \neg A & \text{Es kann keinen Beleg für } A \text{ geben.} \\ \neg\neg A & \text{Es kann keinen Beleg für } \neg A \text{ geben} \\ & \text{(gewissermaßen ist } A \text{ „potenziell wahr“).} \end{cases}$$

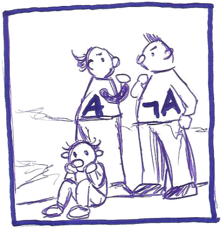
Das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten

Axiom (*LEM*, klassisch)

Für jede Aussage A kann man

$$A \vee \neg A$$

ableiten.



- Klassische Interpretation:
  Eine jede Aussage stimmt oder stimmt nicht.
- Intuitionistische Interpretation:
  Für jede Aussage haben wir jeweils Beleg für sie oder für ihre Negation.

- intuitionistische Logik := klassische Logik ohne LEM

- Die intuitionistische Interpretation von LEM ist offensichtlich falsch.
- Intuitionistische Logik ist abwärtskompatibel zu klassischer Logik: Alles, was intuitionistisch ableitbar ist, ist auch klassisch ableitbar. Insbesondere ist die Negation von LEM kein Axiom.
- Auch intuitionistisch gilt $\neg(A \wedge \neg A)$: Angenommen, wir hätten Beleg für $A \wedge \neg A$. Dann haben wir Beleg für A und können aus Belegen für A Belege für $\perp$ konstruieren. Also erhalten wir Beleg für $\perp$.

Proposition

Das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten (LEM),

$$A \lor \neg A$$

für alle Aussagen A, ist äquivalent zum Axiom der Doppelnegationselimination (DNE),

$$\neg\neg A \Rightarrow A$$

für alle Aussagen A.

Beweis.

Gelte LEM. Gelte $\neg\neg A$. Dann gilt nach LEM A oder $\neg A$. Letzteres kann nicht eintreten, also folgt A.
Gelte umgekehrt DNE. Dann genügt es, $\neg\neg(A \lor \neg A)$ zu zeigen. Angenommen $\neg(A \lor \neg A)$. Dann folgt $\neg A$ (wieso?) und analog $\neg\neg A$. Das ist ein Widerspruch. □

Irrational hoch irrational

Definition

Eine reelle Zahl heißt genau dann *irrational*, wenn sie nicht rational ist, d. h. wenn sie sich nicht als Bruch

$$\frac{a}{b}$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$ schreiben lässt.

Satz

Es gibt irrationale Zahlen x, y, sodass x^y rational ist.

Beweis (klassisch, mit LEM).

Es ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational oder irrational. Setze im ersten Fall

$$x := \sqrt{2}, \qquad y := \sqrt{2},$$

im zweiten

$$x := \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \qquad y := \sqrt{2}.$$

□

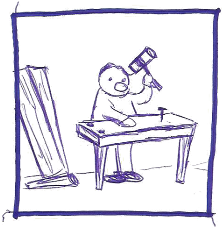
Beweis (intuitionistisch und klassisch zulässig).

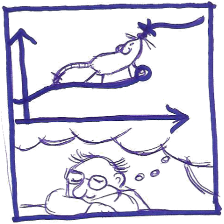
Setze $x := \sqrt{2}$, $y := \log_{\sqrt{2}} 3$. Dann $x^y = 3$. □


Intuitionistische Logik
macht Spaß
A
3

Anwendungen

- Mit intuitionistischer Logik kann man Belegbarkeitsfragen untersuchen.
- Aus intuitionistischen Beweisen kann man maschinell *Programme* extrahieren.
- Die *interne Sprache* von Topoi ist i. A. intuitionistisch.
- Intuitionistisch kann man *Traummathematik* studieren.





- Intuitionistische Logik formalisiert (eine Spielart der) konstruktiven Mathematik.

- Sehr viele Teilgebiete der Mathematik (auch analytische) lassen sich intuitionistisch behandeln. Dabei muss man manchmal Zusatzvoraussetzungen fordern, die klassisch stets erfüllt sind. Üblicherweise empfindet man das nicht als Nachteil, sondern als willkommenes Mittel, um abstrakte Konzepte und Zusammenhänge besser zu verstehen.

- Beispiele für Traumaxiome sind:

  - *Alle Funktionen sind stetig.*
  - *Es gibt nilquadratische Zahlen x (d. h. Zahlen mit $x^2 = 0$), die aber selbst nicht null sind.*

  Diese führen klassisch sofort zu einem Widerspruch, intuitionistisch aber nicht.

Leere und nichtleere Mengen

Sei X eine Menge.

Frage: Sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent?

1. X ist *nicht leer*, d. h. $X \neq \emptyset$.
2. X ist *bewohnt*, d. h. $\exists x \in X$.

Leere und nichtleere Mengen

Sei X eine Menge.

Frage: Sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent?

1. X ist *nicht leer*, d. h. $X \neq \emptyset$.
2. X ist *bewohnt*, d. h. $\exists x \in X$.

Aussage 2 ist stärker: Wir können explizit ein Element x der Menge angeben.

Proposition

Wenn für alle Mengen X aus Nichtleerheit schon Bewohntheit folgt, gilt DNE (und damit LEM).

Beweis.

Sei A eine Aussage und gelte $\neg\neg A$. Definiere $X := \{\star \mid A\}$. Dann gilt $X \neq \emptyset$, denn das ist gleichbedeutend mit $\neg\neg\exists x \in X$, also mit $\neg\neg A$. Nach Voraussetzung folgt damit $\exists x \in X$, also A. □

Teilmengen der Eins

Definition

Die *Menge der Wahrheitswerte* Ω ist die Menge aller Teilmengen der Menge

$$\mathbf{1} := \{\star\},$$

also

$$\Omega := \mathcal{P}(\mathbf{1}) = \{U \mid U \subseteq \mathbf{1}\}.$$

- *Frage:* Wie viele Elemente enthält Ω?

Teilmengen der Eins

Definition

Die *Menge der Wahrheitswerte* Ω ist die Menge aller Teilmengen der Menge

$$\mathbf{1} := \{\star\},$$

also

$$\Omega := \mathcal{P}(\mathbf{1}) = \{U \,|\, U \subseteq \mathbf{1}\}.$$

- *Frage:* Wie viele Elemente enthält Ω?
- Es gibt auch

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{entscheidbar}} &:= \{p \in \Omega \,|\, \star \in p \ \vee \ \star \notin p\},\\ \Omega_{\text{stabil}} &:= \{p \in \Omega \,|\, \neg\neg(\star \in p) \ \Rightarrow \ \star \in p\}.\end{aligned}$$

In welcher Beziehung stehen diese zu Ω?

- Klassisch gilt $\Omega = \{\emptyset, \{\star\}\}$, aber intuitionistisch kann man nur „$\supseteq$“ zeigen.
- Sind A und B Aussagen, hat man beispielsweise zumindest folgende Elemente von Ω (und noch viele weitere):

$$
\begin{tikzcd}
& \{\star\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{\star \mid A\} \arrow[dr, dash] & & \{\star \mid B\} \arrow[dl, dash] \\
& \{\star \mid A \wedge B\} \arrow[d, dash] & \\
& \emptyset &
\end{tikzcd}
$$

- Man kann aber nicht zeigen, dass diese Zwischenmengen ungleich $\{\star\}$ und ungleich $\emptyset$ sind (Abwärtskompatibilität zur klassischen Logik!).
- Es gilt $\Omega_{\text{entscheidbar}} = \{\emptyset, \{\star\}\}$ und $\Omega_{\text{entscheidbar}} \subseteq \Omega_{\text{stabil}} \subseteq \Omega$.
- Die Bezeichung *entscheidbar* hat eine anschauliche Interpretation in der Informatik: Entscheidbare Aussagen sind solche, für die wir einen Algorithmus angeben können, der (in endlicher Zeit) prüft, ob die Aussage gilt oder nicht.

Minima von Mengen natürlicher Zahlen

Klassisch gilt: Jede bewohnte Menge natürlicher Zahlen besitzt ein Minimum.

Frage: Stimmt das auch intuitionistisch?

Proposition

Wenn alle bewohnten Mengen natürlicher Zahlen ein Minimum besitzen, gilt LEM.

Beweis.

Sei A eine Aussage. Wir definieren die Menge

$$X := \{1\} \cup \{0 \mid A\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Dann ist X bewohnt (da $1 \in X$) und besitzt daher nach Voraussetzung ein Minimum $x \in \mathbb{N}$. Es ist $\mathbb{N}$ diskret, daher folgt $x = 0$ oder $x \neq 0$. Im ersten Fall folgt A, im zweiten $\neg A$. $\square$

Man kann mit einer Zusatzvoraussetzung das Prinzip retten: Alle bewohnten und herauslösbaren Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ (d. h. solche mit $\forall x \in \mathbb{N}.\ x \in X \vee x \notin X$) besitzen ein Minimum.

Endliche Mengen

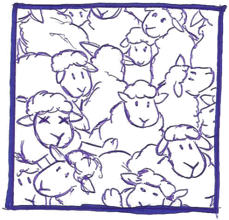
Definition

Sei X eine Menge. X heißt…

- …*endlich* $:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}.\ \exists f\colon [n] \to X.\ f$ bijektiv.
- …*endlich indiziert* $:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}.\ \exists f\colon [n] \to X.\ f$ surjektiv.

Dabei ist $[n] := \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Frage: Sind Teilmengen endlicher (endl. indizierter) Mengen wieder endlich (endl. indiziert)?



- Die Mengen $[n]$ für $n \in \mathbb{N}$ stellen wir uns als die Prototypen endlicher Mengen vor.
- Aus *endlich* folgt *endlich indiziert*. Die Umkehrung gilt für diskrete Mengen.
- Endlich indizierte Mengen sind entweder leer oder bewohnt. (Bei beliebigen Mengen kann man diese Disjunktion nicht zeigen.)
- Sollten Teilmengen endlich indizierter Mengen stets wieder endlich indiziert sein, gilt LEM. Um das zu zeigen, betrachtet man geeignete Teilmengen der endlich indizierten (sogar endlichen) Menge $\mathbf{1} = \{\star\}$.
- Es gibt noch weitere Endlichkeitsbegriffe, die für manche Anwendungen besser oder schlechter geeignet sind.

Unendlichkeit der Primzahlen

Satz (schwache Form)

Die Menge $\mathbb{P}$ *der Primzahlen,*

$$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\} \subseteq \mathbb{N},$$

ist nicht endlich.

Unendlichkeit der Primzahlen

Satz (schwache Form)

Die Menge $\mathbb{P}$ *der Primzahlen,*

$$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\} \subseteq \mathbb{N},$$

ist nicht endlich.

Satz (starke Form)

Sei S *eine endliche Menge von Primzahlen. Dann gibt es eine weitere Primzahl, die nicht in* S *enthalten ist.*

- Die schwache Formulierung hat wegen der negativen Behauptung keinen algorithmischen Inhalt.
- Aus einem intuitionistischen Beweis der starken Form kann man maschinell einen entsprechenden Algorithmus extrahieren.
- Euklids Beweis der starken Form ist kürzer und klarer als der der schwachen Form, und zeigt auch noch eine stärkere Aussage.
- Empirisches Faktum: Versucht man, klassische Theorien intuitionistisch zu entwickeln, stößt man auf einfachere und elegantere Konzepte und Beweise.

Übungsaufgabe in Linearer Algebra I

Proposition

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und sei

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad \mathcal{P}(Y) &\longrightarrow \mathcal{P}(X), \\ U &\longmapsto f^{-1}[U] := \{x \in X \,|\, f(x) \in U\} \end{aligned}$$

die zugehörige Urbildoperation. Dann ist f genau dann surjektiv, wenn φ injektiv ist.

Zum Knobeln: Auch für die Rückrichtung gibt es einen direkten Beweis.

Beweis (umständlich, nur klassisch zulässig).

Angenommen, f ist nicht surjektiv. Dann gibt es ein $y \in Y$, welches nicht im Bild von f liegt. Somit gilt $\varphi(\{y\}) = \emptyset = \varphi(\emptyset)$ im Widerspruch zur Injektivität von φ. □

Beweis (elegant).

Es gilt $\varphi(\operatorname{im} f) = X = \varphi(Y)$, also $\operatorname{im} f = Y$. □

Gentzens Kalkül natürlichen Schließens

- Strukturelle Regeln:

$$\frac{}{A \vdash_{\vec{x}} A} \qquad \frac{A \vdash_{\vec{x}} B}{A[\vec{s}/\vec{x}] \vdash_{\vec{y}} B[\vec{s}/\vec{x}]} \qquad \frac{A \vdash_{\vec{x}} B \qquad B \vdash_{\vec{x}} C}{A \vdash_{\vec{x}} C}$$

- Regeln für Konjunktion:

$$\frac{}{A \vdash_{\vec{x}} \top} \qquad \frac{}{A \wedge B \vdash_{\vec{x}} A} \qquad \frac{}{A \wedge B \vdash_{\vec{x}} B} \qquad \frac{A \vdash_{\vec{x}} B \qquad A \vdash_{\vec{x}} C}{A \vdash_{\vec{x}} B \wedge C}$$

- Regeln für Disjunktion:

$$\frac{}{\bot \vdash_{\vec{x}} A} \qquad \frac{}{A \vdash_{\vec{x}} A \vee B} \qquad \frac{}{B \vdash_{\vec{x}} A \vee B} \qquad \frac{A \vdash_{\vec{x}} C \qquad B \vdash_{\vec{x}} C}{A \vee B \vdash_{\vec{x}} C}$$

- Doppelregel für Implikation:

$$\frac{A \wedge B \vdash_{\vec{x}} C}{\overline{A \vdash_{\vec{x}} B \Rightarrow C}}$$

- Doppelregeln für Quantifikation:

$$\frac{A \vdash_{\vec{x},y} B}{\overline{\exists y.\, A \vdash_{\vec{x}} B}} \qquad \frac{A \vdash_{\vec{x},y} B}{\overline{A \vdash_{\vec{x}} \forall y.\, B}}$$

- Vorkommende Variablen sind in der Notation unterdrückt.
- Exemplarisch bedeutet die Regel für Implikation folgendes: Genau dann, wenn sich unter der Annahme $A \wedge B$ die Formel C herleiten lässt, lässt sich auch unter der Annahme von A die Formel $(B \Rightarrow C)$ herleiten.
- Unter der anfangs gegebenen informalen Bedeutung sind all diese Regeln plausibel.
- Die Regeln für Disjunktion und Konjunktion sind zueinander dual.
- Das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten sieht in der Regelschreibweise so aus:

$$\frac{}{\vdash_{\vec{x}} A \vee \neg A}$$

- Die Regel für den Existenzquantor muss auf solche Formeln B eingeschränkt werden, in denen die Variable y nicht vorkommt. Analog darf bei der Regel für den Allquantor in der Formel A kein y vorkommen.
- Die Regel für den Existenzquantor rechtfertigt folgendes informelles Beweisschema, um aus der Annahme $\exists y.\, A$ eine Formel B zu folgern:

  Gelte $\exists y.\, A$. Dann gibt es ein y mit A. … Also gilt B.
- Analog rechtfertigt die Regel für den Allquantor folgendes Vorgehen, um aus der Annahme A die Formel $\forall y.\ B$ abzuleiten:

  Gelte A. Sei y beliebig. … Also gilt B.

Definition

Eine *Heytingalgebra* H ist eine partiell geordnete Menge ($\leq$), in der

1. alle endlichen Infima ($\sqcap$) und Suprema ($\sqcup$) existieren,
2. zu je zwei Elementen $a, b \in H$ ein Element $(a \to b) \in H$ mit

$$x \sqcap a \leq b \quad \text{gdw.} \quad x \leq (a \to b)$$

für alle $x \in H$ existiert.

- Beispiele für Heytingalgebren: $\{0, {}^1\!/_2, 1\}$, $\mathcal{P}(\mathbf{1})$, $\mathcal{O}(X)$
- Wir stellen uns Elemente einer Heytingalgebra als (verallgemeinerte) Wahrheitswerte vor.

- Die definierende universelle Eigenschaft von $(\rightarrow)$ ist genau so gemacht, dass sie der Schlussregel für die Implikation im Gentzenkalkül entspricht.
- Für ein Element $a \in H$ ist $(a \rightarrow \bot)$ das sog. *Pseudokomplement* von a. Im Allgemeinen gilt natürlich nicht $a \sqcup (a \rightarrow \bot) = \top$.

Heytingmodelle I

Definition

Ein *Heytingmodell* besteht aus

1. einer Heytingalgebra H und
2. einer Zuordnung $[\![\cdot]\!]$ von Formeln zu Elementen aus H

sodass die Axiome

$$\begin{aligned}
[\![\top]\!] &= \text{größtes Element von } H \\
[\![\bot]\!] &= \text{kleinstes Element von } H \\
[\![A \wedge B]\!] &= [\![A]\!] \sqcap [\![B]\!] \\
[\![A \vee B]\!] &= [\![A]\!] \sqcup [\![B]\!] \\
[\![A \Rightarrow B]\!] &= [\![A]\!] \to [\![B]\!]
\end{aligned}$$

für alle Formeln A, B erfüllt sind.

Heytingmodelle II

Satz

1. *Heytingmodelle sind korrekt: Es gilt*

$$A \vdash B \quad \Rightarrow \quad [\![A]\!] \leq [\![B]\!]$$

   für alle Formeln A, B und Heytingmodelle $[\![\cdot]\!]$.

2. *Heytingmodelle sind auch vollständig: Gilt für gegebene Formeln A, B, dass*

$$[\![A]\!] \leq [\![B]\!]$$

   für alle Heytingmodelle $[\![\cdot]\!]$, so folgt $A \vdash B$.

Beweis.

1. Induktion über den Aufbau intuitionistischer Ableitungen im Gentzenkalkül.
2. Die *Lindenbaumalgebra*

   $$L := (\text{Menge aller Formeln})/(\text{ableitbare Äquivalenz})$$

   mit $[\![A]\!] := [A]$ (Äquivalenzklasse von A) ist ein spezielles Heytingmodell, in dem $[A] \leq [B]$ gleichbedeutend mit $A \vdash B$ ist. $\square$

Das Konzept des Heytingmodells lässt sich von propositionaler Logik auf Prädikatenlogik erster und höherer Ordnung verallgemeinern; dann benötigt man nicht nur eine Heytingalgebra, sondern für jeden Typ der Sprache jeweils eine. Diese Daten organisieren sich zu einem Topos.

Kripkemodelle

Definition

Ein *Kripkemodell* besteht aus

1. einer partiell geordneten Menge W von Welten und
2. einer Erfüllbarkeitsrelation $\models$

sodass folgende Axiome erfüllt sind:

1. Aus $w \leq u$ und $w \models A$ folgt $u \models A$.
2. $w \models \bot$ stimmt nicht.
3. $w \models A \wedge B$ gdw. $w \models A$ und $w \models B$.
4. $w \models A \vee B$ gdw. $w \models A$ oder $w \models B$.
5. $w \models A \Rightarrow B$ gdw. für alle u mit $w \leq u$:
   Aus $u \models A$ folgt $u \models B$.

- $w \models \neg A$ gdw. $\neg\exists v \geq w.\ v \models A$.
- $w \models \neg\neg A$ gdw. $\forall v \geq w.\ \neg\neg\exists u \geq v.\ u \models A$.

Doppelnegationsübersetzung I

Definition

- Eine Aussage A heißt genau dann *entscheidbar*, wenn

$$A \;\vee\; \neg A.$$

- Eine Aussage A heißt genau dann *stabil*, wenn

$$\neg\neg A \;\Rightarrow\; A.$$

Beispiele:

- „$n = m$“ ist für natürliche Zahlen n, m entscheidbar.
- Entscheidbare Aussagen sind auch stabil.
- Jede Aussage der Form $\neg\neg B$ ist stabil.

Beweis.

1. Das folgt mit Induktion.
2. Folgt wie beim Beweis LEM $\Rightarrow$ DNE.
3. Allgemein gilt $\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$: Denn angenommen A. Dann folgt $\neg\neg A$ (wieso?). Da aber $\neg\neg\neg A$, folgt $\perp$. $\square$

Doppelnegationsübersetzung II

Definition

Die Doppelnegationsübersetzung A° ist für Aussagen A wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned}
A^\circ &:= \neg\neg A \text{ für atomare Aussagen } A \\
(A \wedge B)^\circ &:= A^\circ \wedge B^\circ \\
(A \vee B)^\circ &:= \neg(\neg A^\circ \wedge \neg B^\circ) \\
(A \Rightarrow B)^\circ &:= A^\circ \Rightarrow B^\circ \\
(\forall x : X.\ A(x))^\circ &:= \forall x : X.\ A^\circ(x) \\
(\exists x : X.\ A(x))^\circ &:= \neg\forall x : X.\ \neg A^\circ(x)
\end{aligned}$$

Doppelnegationsübersetzung III

Satz

1. *Klassisch gilt $A \Leftrightarrow A^\circ$ für alle Aussagen A.*
2. *Intuitionistisch sind alle Aussagen der Form A° stabil.*
3. *Wenn für alle betrachteten atomaren Aussagen A gilt, dass aus der klassischen Ableitbarkeit von A die intuitionistische Ableitbarkeit von A° folgt, so gilt das auch für alle zusammengesetzten Aussagen.*

Korollar

Peanoarithmetik (d. h. das System der fünf Peanoaxiome in klassischer Logik) ist genau dann konsistent, wenn Heytingarithmetik (dieselben Axiome in intuitionistischer Logik) es ist.

Beweis des Satzes.

1. Klar (Induktion über den Formelaufbau).
2. Einfach (Induktion über den Formelaufbau).
3. Einfach (noethersche Induktion über den Aufbau klassischer Ableitungen im Gentzenkalkül unter Verwendung der gezeigten Stabilität). $\square$

Beweis des Korollars.

Zeigt Peanoarithmetik einen Widerspruch, so zeigt Heytingarithmetik $\perp^\circ$. Das ist äquivalent zu $\perp$. $\square$

Weitere wichtige Stichpunkte:

- *Satz von Barr:* Aussagen einer gewissen syntaktischen Form (sog. *geometrische Aussagen*, aber die Bezeichnung ist zunächst irreführend) lassen sich genau dann klassisch ableiten, wenn sie sich intuitionistisch ableiten lassen. Dieses Metatheorem kann man allerdings nur mit klassischer Logik zeigen.

- *Curry-Howard-Korrespondenz:* Logische Formeln entsprechen Typen, Beweise der Formeln Termen dieser Typen. Unter dieser Korrespondenz geht die Doppelnegationsübersetzung in die *Continuation Passing Transformation* (CPS) über.

- Eine Formalisierung konstruktiver Mengenlehre ist *Intuitionistic Zermelo Fraenkel* (IZF). In ihr ist das Auswahlaxiom nicht enthalten, da aus ihm der Satz vom ausgeschlossenen Dritten folgt (und da es unter den üblichen Interpretationen auch offensichtlich falsch ist).

Literaturhinweise

- Beispiele für konstruktive Mathematik:
  A. Bauer. Blog auf `http://math.andrej.com/`.
  M. Nieper-Wißkirchen. Lineare Algebra I und II. Vorlesungsskript, 2008.
  M. Nieper-Wißkirchen. Galoissche Theorie. Unveröffentlicht, 2012.
- Philosophische Einordnung:
  J. Moschovakis. *Intuitionistic Logic.* The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2010.
- Beispiel für Traummathematik:
  A. Kock. *Synthetic Differential Geometry.* Cambridge University Press, 2006.
- Einführungen in Topostheorie:
  T. Leinster. *An informal introduction to topos theory.* Publications of the nLab, 2011.
  S. Mac Lane, I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory.* Springer, 1992.
  P. Johnstone. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium.* Oxford University Press, 2002.