Vektorbündel auf affinen Schemata

Lemma. *Sei A ein lokaler Ring. Sei $\mathfrak{a}$ ein endlich erzeugtes idempotentes Ideal in A. Dann ist $\mathfrak{a} = (0)$ oder $\mathfrak{a} = (1)$.*

Beweis. Wir können $\mathfrak{a}$ als endlich erzeugten A-Modul ansehen. Dann gibt es nach dem Lemma von Nakayama ein Element $x \in A$ mit $x \equiv 1$ modulo $\mathfrak{a}$ und $x\mathfrak{a} = 0$. Da A lokal ist, ist x invertierbar oder $1 - x$ invertierbar. Im ersten Fall ist $\mathfrak{a} = (0)$, im zweiten $\mathfrak{a} = (1)$. □

Lemma. *Sei A ein lokaler Ring. Sei P eine idempotente Matrix über A. Dann ist P äquivalent zu einer Diagonalmatrix mit Einträgen 1 und 0.*

Beweis. Da P idempotent ist, sind auch die Ideale $(\Lambda^i P)$ der i-Minoren idempotent:

$$(\Lambda^i P) = (\Lambda^i(P \circ P)) = (\Lambda^i P \circ \Lambda^i P) \subseteq (\Lambda^i P) \cdot (\Lambda^i P) \subseteq (\Lambda^i P).$$

Nach dem vorherigen Lemma sind sie daher jeweils Null oder Eins. Da sie eine absteigende Kette bilden, gibt es somit eine Zahl r, sodass $(\Lambda^r P) = (1)$ und $(\Lambda^{r+1} P) = (0)$. Also sind alle $(r+1)$-Minoren von P Null, und es gibt – da A lokal ist – mindestens einen invertierbaren r-Minor. Somit lässt sich P durch Zeilen- und Spaltentransformationen auf eine Diagonalmatrix der gewünschten Art bringen. □

Bemerkung. Man kann sogar zeigen, dass P *ähnlich* zu einer Diagonalmatrix dieser Art ist. Denn mit dem Lemma ist klar, dass Bild und Kern von P frei von endlichem Rang sind. Kombiniert man Basen von Bild und Kern, so erhält man eine Basis des vollen Spaltenraums, bezüglich der die entsprechend transformierte Matrix eine Diagonalmatrix der gewünschten Art ist.

Proposition. *Sei M ein Modul über einem Ring A. Genau dann ist M endlich erzeugt und projektiv, wenn es eine Zerlegung $1 = \sum_i f_i \in A$ gibt, sodass die lokalisierten Moduln $M[f_i^{-1}]$ jeweils freie Moduln endlichen Rangs sind.*

Beweis. Sei M endlich erzeugt und projektiv. Dann gibt es eine lineare Surjektion $p : A^n \to M$ mit Schnitt $s : M \to A^n$. Die Komposition $P := s \circ p$ ist idempotent und M ist isomorph zu $A^n / \ker(P)$. Interpretiert man das vorherige Lemma im kleinen Zariski-Topos über $\operatorname{Spec} A$, sieht man, dass eine Zerlegung der Eins existiert, sodass P über den lokalisierten Ringen jeweils äquivalent zu einer Diagonalmatrix mit Einträgen 1 und 0 ist. Da Lokalisieren exakt ist, ist somit $A^n / \ker(P)$ lokal frei von endlichem Rang.

Sei umgekehrt ein Modul M gegeben, der lokal frei von endlichem Rang ist. Dann ist M insbesondere lokal endlich erzeugt und somit auch global endlich erzeugt. Sei $A^n \to M$ eine lineare Surjektion. Ihr Kern ist lokal endlich erzeugt, da Lokalisieren exakt ist und M lokal endlich präsentiert ist. Damit ist ihr Kern auch global endlich erzeugt; folglich ist M endlich präsentiert.

Um nun die Projektivität von M nachzuweisen, sei eine lineare Surjektion $X \to Y$ gegeben. Es ist zu zeigen, dass die induzierte Abbildung $\operatorname{Hom}_A(M, X) \to \operatorname{Hom}_A(M, Y)$ ebenfalls surjektiv ist. Da M lokal projektiv ist und $\operatorname{Hom}_A(M, \cdot)$ aufgrund der endlichen Präsentation von M mit Lokalisieren vertauscht, ist diese Abbildung lokal surjektiv und somit surjektiv. □

Korollar. *Sei M ein Modul über einem Ring A. Die induzierte quasikohärente Modulgarbe $M^\sim$ auf $\operatorname{Spec} A$ ist genau dann ein Vektorbündel, wenn M endlich erzeugt und projektiv ist.*