1 Anwendungen der internen Sprache von Topoi in algebraischer Geometrie

Ein **Topos** ist eine Kategorie, die gewisse kategorielle Eigenschaften mit der Kategorie der Mengen teilt; das archetypische Beispiel ist die Kategorie der Mengen,und das wichtigste Beispiel für die Ziele dieser Notizen ist die Kategorie aller mengenwertigen Garben auf einem topologischen Raum.

Alle Toposse $\mathcal{E}$ unterstützen eine **interne Sprache**. Mit diesem Hilfsmittel kann man **vorgeben**, dass die Objekte von $\mathcal{E}$ alltägliche Mengen und dass die Morphismen gewöhliche Abbildungen zwischen diesen Mengen sind - auch, wenn sie das tatsächlich nicht sind . Sei etwa α : X $\to$ Y ein Morphismus in $\mathcal{E}$. Von der **internen Sicht** sieht dieser wie eine Abbildung zwischen Mengen aus, weswegen wir die Bedingung formulieren könnnen, dass diese surjektiv ist; wir schreiben das als:

$$\mathcal{E} \models \forall y\!:\!Y.\ \exists x\!:\!X.\ \alpha(x) = y.$$

Die Doppelpunkte statt der sonst üblichen Elementzeichen erinnern uns daran, dass dieser Ausdruck nicht wörtlich genommen werden soll-X und Y sind OBJEKTE von $\mathcal{E}$ und daher nicht notwendigerweise Mengen. Die Definition der internen Sprache ist so gemacht , dass die Bedeutung dieser internen Aussage einfach die ist, dass α ein Epimorphismus ist. Analog ist die Übersetzung der internen Aussage "α ist eine injektive Abbildung" die, dass α ein Monomorphismus ist.