de-Rham-Kohomologie: ein erster Einblick

für den JGW-Kurs *Wie ward Licht?*

9. August 2016

Kohomologietheorien gehören zu den wichtigsten Werkzeugen der reinen Mathematik. Sie kommen in verschiedenen Ausprägungen in vielen Gebieten der Mathematik vor, unter anderem in der algebraischen Topologie, der Differentialgeometrie, der algebraischen Geometrie, der Funktionentheorie und der homologischen Algebra. Wenn man möchte, kommt man mit Kohomologietheorien üblicherweise ab dem vierten oder fünften Studiensemester in Berührung; wenn man sich aber eher für angewandte Mathematik interessiert, kann man sie auch umgehen.

Die hauptsächlich in Differentialgeometrie verwendete Variante von Kohomologie heißt *de-Rham-Kohomologie*. Deren Grundlagen sollen hier dargelegt werden.

1 Erinnerung an Differentialformen

Der „magische d-Operator“ macht aus einer k-Form eine $(k+1)$-Form. An wichtigen Rechenregeln muss man sich nur die vier folgenden merken:

a) Ist f eine Funktion (also eine 0-Form), so gilt

$$df = d(f) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Wenn f nicht nur von x, y und z, sondern noch von weiteren Variablen abhängt, so muss die Summe entsprechend ergänzt werden.

b) Für alle Differentialformen ω gilt $d(d(\omega)) = 0$. Kürzer, aber etwas verwirrend, schreibt man auch: „$d^2 = 0$“.

c) Der d-Operator ist additiv, es gilt also $d(\omega + \tau) = d(\omega) + d(\tau)$.

d) Der d-Operator erfüllt die „graduierte Produktregel“: Ist ω eine k-Form und τ eine ℓ-Form, so gilt

$$d(\omega \wedge \tau) = d(\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d(\tau).$$

Aufgabe 1. *Angst vor d?*

Vollziehe folgende Beispiele nach.

a) $d(x^2 - yz) = 2x\,dx - z\,dy - y\,dz$

b) $d(e^x + \sin(z^2)) = e^x\,dx + 2z\cos(z^2)\,dz$

c) $d(x \wedge dy) = dx \wedge dy$

d) $d(f(x)\,dy) = f'(x)\,dx \wedge dy$

Aufgabe 2. *Trivialität höherer Differentialformen*

Mache dir klar: Wenn als einzige Variable x vorkommen darf, so ist die „Nullform“ die einzige 2-Form.

Etwas präziser ausgedrückt: Alle k-Formen auf $\mathbb{R}^1$ mit $k \geq 2$ sind Null.

2 Geschlossene und exakte Differentialformen

Eine Differentialform ω heißt genau dann *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$. Eine Differentialform ω heißt genau dann *exakt*, wenn es eine weitere Differentialform α mit $d\alpha = \omega$ gibt. Jede exakte Differentialform ist auch geschlossen, aber es gibt geschlossene Differentialformen, die nicht exakt sind. Wir werden sehen, dass de-Rham-Kohomologie gerade die Größe dieses Defekts misst.

Aufgabe 3. *Beispiele und Nichtbeispiele für geschlossene Differentialformen*

Zeige, dass die folgenden Differentialformen jeweils geschlossen sind:

a) dx

b) $\sin(x)\,dx$

c) 47 (konstante Funktion, also eine 0-Form)

d) $x^2 e^{yz}\,dx \wedge dy \wedge dz$

Zeige, dass die folgenden Differentialformen jeweils nicht geschlossen sind:

e) $\sin(x)$ (eine 0-Form)

f) $-y\,dx + x\,dy$

Aufgabe 4. *Aus Exaktheit folgt Geschlossenheit*

Zeige, dass jede exakte Differentialform ω auch geschlossen ist.

Aufgabe 5. *Wegunabhängigkeit bei geschlossenen Differentialformen*

Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Kurven mit gleichem Start- und Endpunkt (zum Beispiel in der Ebene). Sei ω eine geschlossene 1-Form. Zeige, dass $\int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega$.

Tipp. Die Differenz aus linker und rechter Seite lässt sich ebenfalls als Integral schreiben, wobei der Integrationsweg der Rand eines zweidimensionalen Gebiets ist. Verstehe diese kryptische Bemerkung und verwende dann den Satz von Stokes.

3 Die Kohomologie des $\mathbb{R}^1$

Die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}^1$ ist „kohomologisch trivial": Jede geschlossene 1-Form ω auf $\mathbb{R}^1$ ist exakt. (Ebenfalls sind alle geschlossenen 2-, 3- und auch alle höheren Formen exakt. Das ist aber keine interessante Aussage – wieso?)

Das ist etwas Besonderes. Für kompliziertere geometrische Objekte als $\mathbb{R}^1$ – insbesondere solche, die Löcher enthalten, wie etwa die zweidimensionale Ebene mit entferntem Ursprung – stimmt die Aussage nämlich nicht.

Aufgabe 6. *Exaktheit aller* 1*-Formen auf* $\mathbb{R}^1$

Sei $\omega = f(x)\,dx$ eine beliebige 1-Form auf $\mathbb{R}^1$. Da die einzige 2-Form auf $\mathbb{R}^1$ die Nullform ist, ist $d\omega = 0$. Wir definieren

$$g(x) := \int_0^x f(t)\,dt.$$

Zeige: $\omega = dg$.

4 Die Kohomologie des $\mathbb{R}^2$

Auch die Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ ist kohomologisch trivial. Das ist Gegenstand der folgenden zwei Aufgaben.

Aufgabe 7. *Exaktheit aller geschlossenen* 2*-Formen auf* $\mathbb{R}^2$

Sei $\omega = f(x,y)\,dx \wedge dy$ eine beliebige 2-Form auf $\mathbb{R}^2$.

a) Zeige: Die Form ω ist automatisch geschlossen.

b) Wir definieren die 1-Form

$$\alpha := \left(\int_0^x f(t,y)\,dt \right) dy.$$

Zeige: $\omega = d\alpha$.

Aufgabe 8. *Exaktheit aller geschlossenen* 1*-Formen auf* $\mathbb{R}^2$

Sei $\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ eine beliebige 1-Form auf $\mathbb{R}^2$.

a) Zeige: Genau dann ist ω geschlossen, wenn $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

b) Wir definieren

$$h(x,y) := \int_0^x f(t,y)\,dt + \int_0^y g(x,t)\,dt.$$

Zeige: $\omega = dh$.

5 Die Kohomologie des $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Unser erstes Beispiel für eine geometrische Figur, die nicht kohomologisch trivial ist, ist die „gelochte Ebene“: die Zahlenebene $\mathbb{R}^2$, aus der der Ursprung entfernt wurde. Auf dieser gibt es Differentialformen, welche zwar geschlossen, aber nicht exakt sind.

Aufgabe 9. *Eine nicht-exakte Differentialform*

Wir betrachten die Differentialform

$$\omega := \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Beim Punkt $(0|0)$ ist ω nicht definiert, daher ist ω nur eine Differentialform auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und nicht eine auf ganz $\mathbb{R}^2$.

a) Zeige: Die Form ω ist geschlossen.

b) Berechne das Integral von ω über den Einheitskreis. (Zur Kontrolle: Das Ergebnis ist 2π.)

c) Zeige: Die Form ω ist nicht exakt. (Nutze den Satz von Stokes und die vorherige Teilaufgabe.)

Damit eine 1-Form auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ exakt ist, genügt es nicht, dass sie lediglich geschlossen ist. Stattdessen muss auch noch ihr Integral über die Einheitskreislinie verschwinden (Null sein). Man sagt auch: *Eine Basis der ersten Homologie von* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *besteht aus dem Einheitskreis.*

Aufgabe 10. *Eine nicht-exakte Differentialform*

Sei ω eine geschlossene 1-Form auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, für die das Integral über die Einheitskreislinie verschwindet. Wir definieren die Funktion

$$h(x, y) := \int_\Gamma \omega,$$

wobei Γ *irgendeine* Kurve von $(1|0)$ nach $(x|y)$ ist, welche nicht den Ursprung passiert.

a) Zeige: Die Definition von $h(x, y)$ ist unabhängig von der Wahl der Kurve Γ. Andere Kurven mit selben Start- und Endpunkt führen also zum gleichen Integralwert. (Verwende dazu die Geschlossenheit von ω und den Satz von Stokes.)

b) Weise die Exaktheit von ω nach, indem du beweist, dass $\omega = dh$.

6 Weitere Beispiele für triviale und nichttriviale Kohomologie

Versuche, geometrische Intuition für die folgenden Behauptungen zu gewinnen und sie vielleicht sogar zu beweisen.

a) Eine 1-Form auf dem gelochten dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist schon exakt, wenn sie nur geschlossen ist.

b) Eine 2-Form auf dem gelochten dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist genau dann exakt, wenn sie geschlossen ist und wenn ihr Integral über die Einheitskugeloberfläche verschwindet.

c) Eine 1-Form auf der zweifach gelochten Ebene (also der Zahlenebene, aus der zwei Punkte entfernt wurden) ist genau dann exakt, wenn sie geschlossen ist und wenn die Integrale über kleine Kreise um die beiden Löcher verschwinden.

d) Wir entfernen aus dem dreidimensionalen Raum die z-Achse sowie den in der x-y-Ebene liegenden Kreis mit Mittelpunkt $(0|0|0)$ und Radius 2. Eine 1-Form auf diesem Gebilde ist genau dann exakt, wenn sie geschlossen ist und wenn ihre Integrale über die folgenden beiden Kurven verschwinden: der Einheitskreis in der x-y-Ebene und der in der x-z-Ebene liegende Kreis mit Mittelpunkt $(2|0|0)$ und Radius 1.

e) Eine 2-Form auf demselben Gebilde ist genau dann exakt, wenn sie geschlossen ist und wenn ihr Integral über die Oberfläche eines bestimmten Torus (welchen?) verschwindet.