Taylor ve Maclaurin Seri Açılımları :

#Purpose

Bir fonksiyon eğer sonsuz defa türevlenebiliyorsa fonksiyonu bir seri haline getirme işine yarar.

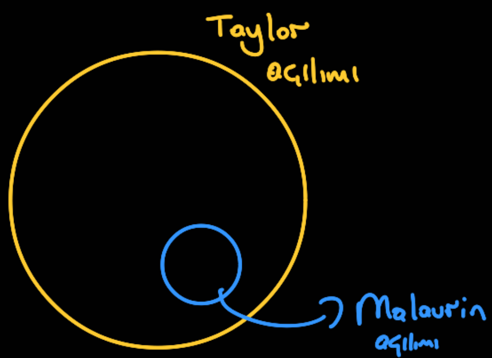
: Kullanılabilme Şartı :

! $f(x) \Rightarrow$ Sonsuz defa türevlenebilir olmalı .

↳ #forexample :

$$f(x) = e^{2x} \longrightarrow f'(x) = 2e^{2x}$$
$$f''(x) = 4e^{2x}$$
$$\vdots$$

Seri haline getirilebilir. ✓



$f(x)$ in $x = x_0$ noktasındaki seri açılımına TAYLOR,

$f(x)$ in $x = 0$ " " " Maclaurin açılıdır.

Gelelim Nasıl uygulandığına?

A) TAYLOR AÇILIMI

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{1. Terim}} + \underbrace{\frac{f'(x_0).(x-x_0)^1}{1!}}_{\text{2. Terim}} + \underbrace{\frac{f''(x_0).(x-x_0)^2}{2!}}_{\text{3. Terim}}$$

$$+ \underbrace{\frac{f'''(x_0).(x-x_0)^3}{3!}}_{\text{4. Terim}} + \cdots\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}$$

Seri şeklinde ifade edilişi

B) Maclaurine Açılımı:

Yukarıdaki muhabbetle aynı. Sadece $x_0 = 0$ olacak.

$$f(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0).x^2}{2!} + \frac{f'''(0).x^3}{3!} + \cdots\cdots$$

Soru: $f(x) = e^x$'in $x = 1$ noktasında taylor açılımının ilk dört terimini yazınız.

1. Terim: $f(1) = e$

2. Terim: $f'(1).(x-1) = e(x-1)$

3. Terim: $f''(1).(x-1)^2 = \dfrac{e(x-1)^2}{2}$

4. Terim: $\dfrac{f'''(1).(x-1)^3}{3!} = \dfrac{e(x-1)^3}{6}$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$f'''(x) = e^x$

$$f(x) \cong e + e.(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{6} + \cdots\cdots$$

Soru: $f(x) = \cos x$ fonk.nun maclurin açılımının sıfırdan farklı ilk 3 terimini bulunuz.

↳ Taylor açılımının $x=0$ yapılmasıdır.

1\. Terim : $f(0) = 1$ ✓

2\. Terim : $f'(0).(x-0) = 0.x = 0$ X

3\. Terim : $\dfrac{f''(0).(x-0)^2}{2!} = \dfrac{-1.x^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2}$ ✓

$f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x$

4\. Terim : $\dfrac{f'''(0).(x-0)^3}{3!} = \dfrac{0.x^3}{6} = 0$ X

5\. Terim : $\dfrac{f^{(4)}(0).(x-0)^4}{4!} = \dfrac{1.x^4}{24} = \dfrac{x^4}{24}$

↳ $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \cdots$

#bytheway

Eğer sorularda

3.Derece Taylor Polinomu derse ⟹ x^3 lüye kadar açılım yapılacak.

4\. " " " " ⟹ x^4 " " "

Taylor ve Maclaurin Serilerini Bulma

Taylor Serisi :

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n} = f(x_0)+f'(x_0).(x-x_0)$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}.(x-x_0)^2+\ldots$$

Maclaurin Serisi :

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n} = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}.x^2+\ldots$$

Örn: $f(x)=e^x$ fonk.nun $x=4$ noktasında taylor serisini bulunuz.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(4)}{n!}.(x-4)^n}$$

$f(x)=e^x$
$f'(x)=e^x$
$\vdots$
$f^{(n)}(x)=e^x \longrightarrow f^n(4)=e^4$

$$\boxed{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^4.(x-4)^n}{n!}}$$

Eğer soruda "2. dereceden taylor polinomunu yazın" derse bu şu demek dur. $n=2$'e kadar açılım yap.

$$\boxed{e^x=P_2(x)=e^4+e^4.(x-4)+\frac{e^4.(x-4)^2}{2}}$$

ör: $f(x) = \frac{1}{x}$ in $x=2$ noktasındaki taylor serisini bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2).(x-2)^n}{n!}$$

$(n=0)$ $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$(n=1)$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2} = \boxed{-}x^{-2}$

$(n=2)$ $f''(x) = -x^{-2} = \boxed{2}x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$(n=3)$ $f'''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow \boxed{-6}x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$

$$\frac{f^{(n)}(2).(x-2)}{n!}$$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = n!.(-1)^n.x^{-n-1}} \quad (n=n)$$

$$\boxed{\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.2^{-n-1}.(x-2)^n}$$

Soru: $f(x) = e^{2x}$ in maclourin serisi nedir?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n$$

$f(x) = e^{2x}$ $(n=0)$

$f'(x) = 2e^{2x}$ $(n=1)$

$f''(x) = 4e^{2x}$ $(n=2)$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = 2^n.e^{2x}$ $(n=n)$

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n.x^n}{n!}$$

$\dfrac{1}{1-x}$ ifadesinin Maclaurin Serisi ve Yerine Koyma Metodu.

#eltekrarvahsen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$\Rightarrow$ #bunubil

$\boxed{\text{Yakınsaklık aralığı } -1<x<1}$

Yerine Koyma Metodu

Soru: $\dfrac{1}{1+x}$ in maclaurin serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

Yakınsaklık aralığı:

$$-1 < -x < 1$$

Soru: $\dfrac{1}{2x-3}$ ün maclaurin serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\frac{1}{1-?} \qquad \frac{1}{1-(-2x+4)} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-2x+4)^n}$$

$$-1 < -2x+4 < 1$$

$$-5 < -2x < -3$$

$$\boxed{\frac{5}{2} > x > \frac{3}{2}}$$

e^x ifadesinin Maclaurin Serisi ve Yerine Koyma Metodu.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

$$\boxed{e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

#bunubil

Yakınsaklık aralığı

$-\infty < x < \infty$

Yerine Koyma Metodu

e^{x^2} maclaurin serisi = ? $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

e^{2x-1} maclaurin serisi = ? $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n!}$

$x^3 \cdot e^{4x}$ maclaurin serisi = ? $x^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^3 \cdot (4x)^n}{n!}$

Soru: $\int e^{x^3} dx$ integralini maclaurin serisinin ilk 2 terimini kullanarak hesaplayınız.

$$e^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!} = 1 + x^3 + \dots$$

$$\int 1 + x^3 \, dx = \boxed{x + \frac{x^4}{4} + c}$$

Sinx fonk.nun

Maclaurin Serisi ve Yerine Koyma Metodu.

$$\sin x = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Yakınsaklık aralığı

$$-\infty < x < \infty$$

Yerine Koyma Metodu

① $\sin 3x$ maclaurin serisi $= ?$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cdots$

② $\sin(x^2)$ 〃 〃 $= ?$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x)^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} = \cdots$

③ $x^2 \cdot \sin 5x$ 〃 〃 $= ?$ $\displaystyle x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(5x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^2 \cdot (5x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Cosx fonk. nun Maclaurin Serisi ve Yerine Koyma Metodu.

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Yakınsaklık aralığı

$-\infty < x < \infty$

Yerine Koyma Metodu

① $f(x) = \cos 3x$ fonk. nun 6. derece maclaurin seri açılımını bulunuz.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = \boxed{1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{81x^4}{24} - \frac{729x^6}{720}}$$

② $f(x) = \cos(x^3)$ fonk. nun maclaurin serisini, yak. aralığı ve yarıçapını bulunuz.

$$\cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{3(2n)}}{2n!}$$

Y.A $= (-\infty, \infty)$

Y. yarıçapı $= \infty$

ln(1+x) fonk.nun Maclourin Serisi ve Yerine Koyma Metodu.

$$\ln(1+x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots$$

$-1 < x \leq 1 \Rightarrow$ yakınsaklık aralığı

$R = 1 \Rightarrow$ Y. yarıçapı

Ör: $f(x) = \ln(1+2x)$ fonk.nun maclourin serisini ve bu serinin Y.A, Y.R

$$\boxed{\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(2^n \cdot x^n)}{n}} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots$$

$-1 < 2x \leq 1 = YA$

$$\boxed{-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} = YA} \qquad \boxed{R = \frac{1}{2}}$$

Ör: $f(x) = \ln(10-x)$ fonk.nun maclourin serisini ve bu serinin YA, YR

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1, \quad R = 1$$

$$\ln(10-x) = \ln\left(10 \cdot \left(1 - \frac{x}{10}\right)\right) = \ln 10 + \ln\left(1 - \frac{x}{10}\right)$$

$$= \ln 10 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\left(-\frac{x}{10}\right)^n}{n}$$

$$= \ln 10 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \cdot \frac{x^n}{10^n \cdot n} = \ln 10 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{10^n \cdot n}$$

Ör: $f(x)=x^2 . \ln(1+4x)$ - - - -

$\ln(1+x) = \cdot \cdot \cdot -$

$$\ln(1+4x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{4^n \cdot x^n}{n}$$

$$x^2 . \ln(1+4x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{4^n \cdot x^{n+2}}{n}$$

$$-1 < 4x \le 1$$

$$-\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{4} \Rightarrow R=\frac{1}{4} \ //$$

Arctanx fonk. nun Maclourin Serisi ve Yerinekoyma Metodu.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!} \Rightarrow \boxed{\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1}} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots$$

$$Y.A = -1 \leq x \leq 1 \,, \; R = 1$$

Ör: $f(x) = \arctan(x^3)$ fonk. nun maclourin serisini ve bu serinin yakınsaklık aralığını. . .

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arctan(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{6n+3}}{2n+1} \,// \Rightarrow -1 \leq x^3 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \,// \quad \boxed{R = 1} \,//$$

Ör: $f(x) = x^2 \cdot \arctan(4x)$ . . . .

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arctan(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$x^2 \cdot \arctan(4x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^{2n+1} \cdot x^{2n+3}}{2n+1}$$

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4} \quad R = \frac{1}{4} \,//$$

Taylor ve Maclaurin Serileri Yardımıyla Limit Hesaplama

① $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ② $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ③ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

④ $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, ⑤ $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$ ⑥ $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Soru: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ limitinin sonucunu taylor ve maclaurin serilerini kullanarak bulunuz.

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \frac{0}{0}$ //

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$ //

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots - \cancel{1}}{x} = \lim_{x\to 0} x\left(1 + \frac{x}{2} + x\right.$$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\sin x}$ limitinin sonucunu taylor serileri yardımıyla bulunuz.

$\frac{1-\cos 0}{\sin 0} = \frac{0}{0}$ //

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!} = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3} + x^4 + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

lets put them to the question

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\cdots\right)}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\left(2x + \frac{2}{3}x^3 + \cdots\right)}{\cancel{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots\right)}$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{2x^2 + x^8}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$e^{(-x^2)}$$

$$e^{-x^2} = \frac{(-x^2)^n}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}$$

$$\frac{\cancel{1} - (\cancel{1} + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} \mp \frac{x^8}{24})}{2x^2 + x^8}$$

$$\frac{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{24}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + x^6\right)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^4}{6}} + \cancel{\frac{x^6}{24}}}{2 + \cancel{x^6}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Örn: $\dfrac{2\ln(1-x)+2\sin x+x^2}{x^2}$ limitinin so.... taylor.... bul.

$$\sin x=\sum_{n=0}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}$$

$$2\ln(1-(-x))=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(-x)^n}{n}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$$

$$2\sin(x)=2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

$$\frac{2\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)+2\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)+x^2}{x^2}$$

$$\frac{2\cancel{x^2}\left(-\cancel{\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}-\cancel{\frac{x}{3}}^{0}-\cancel{\frac{x^2}{4}}^{0}\right)+2\cancel{x^2}\left(\cancel{\frac{1}{x}}-\cancel{\frac{x}{6}}^{0}+\cancel{\frac{x^3}{120}}^{0}\right)+\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}$$

$$\frac{-1+0+1}{1}=0$$

Örn: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2 e^x}{\cos x - 1}$ limiti.... - maclourin

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - 1 \cdot \frac{x^2}{2} + 1 \cdot \frac{x^4}{24}$$

$$\lim_{x\to 0} = \frac{3x^2\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cancel{1}} = \frac{3\cancel{x^2}\left(1 + \overset{0}{\cancel{x}} + \overset{0}{\cancel{\frac{x^2}{2}}}\right)}{\cancel{x^2}\left(\cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{x^2}{24}}\right)}$$

$$\frac{3}{-\frac{1}{2}} = -6$$

Taylor ve Maclaurin Serileri Yardımıyla İntegral Hesaplama

Taylor Serisi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n}{n!}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!}$$

1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$
2. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
3. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
4. $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$
5. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{x^n}{n}$
6. $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Ör: $\int_0^2 e^{-x^2}dx$ integralini 2. derece maclaurin polinomu yardımıyla yaklaşık olarak hesaplayınız.

x^2'li

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{n!} = 1-x^2+\frac{x^4}{2}\ldots$$

$$\int_0^2 1-x^2dx = x-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \left(2-\frac{8}{3}\right)-0=\boxed{-\frac{2}{3}}$$

Ör: $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}dx$ integralinin sinx in maclaurin seri açılımın sıfırdan farklı ilk 3 terimi için sonucu nedir?

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

$$= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} = x\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)$$

$$\int_1^2 \left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)dx$$

$$x-\frac{x^3}{18}+\frac{x^5}{60}\Big|_1^2 = 0.66$$

= maclaurin

$f(x) = x\sin(x^2)$ fonksiyonunun $\boxed{a=0 \text{ noktasındaki Taylor serisinin}}$ sıfırdan farklı ilk üç terimini kullanarak $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{5!}$$

$$f(x) = x^3 - \frac{x^7}{6} + \frac{x^{11}}{5!}$$

$$\int_{-1}^{0} \left(x^3 - \frac{x^7}{6} + \frac{x^{11}}{120}\right) dx$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^8}{48} + \frac{x^{12}}{12.120}$$

$$0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{48} + \frac{1}{12.120}\right)$$

$$= \frac{-358 + 30 - 1}{1440}$$

$$= \frac{-329}{1440}$$

! Örnek soru 5'i de incele.

! Ayrıca örnek soru 4'ü de izle!

! → Örnek soru 2 adlı videonun b) şıkkındaki sorusunu incelemeyi ve izlemeyi ve çözmeyi unutma!

16:34 23 Nisan Pzr · %44

45/50

Maclaurin Serileri Yardımıyla Serilerde Toplam Bulma

Serilerde Toplam Bulma
- Geometrik seri $\Rightarrow |r|<1 \Rightarrow$ Toplam $= \dfrac{a_1}{1-r}$
- Teleskopik seri $\Rightarrow S_n$ bulunup $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n =$ toplam
- Maclaurin serileri Yardımıyla Toplam Bulma.

① $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

② $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

③ $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

④ $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

⑤ $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{x^n}{n}$

⑥ $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Bunlar oynanarak (türevi, integrali vs. alınarak) verilen serinin toplamı bulunur.

Taylor v...

Ör: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}}$ toplamını bulunuz. $(-1 \le x \le 1)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}} = 4$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{d}{dx} \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

$-(1-x)^{-2} \cdot -1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ $\quad x=\frac{1}{2}$

Ör: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n \cdot 5^n}$ toplamını bulunuz.

$(-1)^{2n+1} = -1$

$\ln\left(\frac{3}{5}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} (-1)^n 2^n}{n \cdot 5^n} = -\ln\left(\frac{3}{5}\right)$

Ör: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{1}{2n+1}$ toplamını bulunuz.

$\arctan 1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{1^{2n+1}}{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

$\dfrac{\pi}{4} = \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 5^n}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

$(n+1) \cdot (-1)^n$

Ses 1

Maclaurin Serileri Yardımıyla Serilerin Toplamını Bulma

Örnek Soru-1

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ serisinin toplamını bulunuz.

1) Geometrik ?
2) Teles ?
3) ma

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow -1 < x < 1$$

yakınsak

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

#bytheway

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{9}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$$

$$= \frac{9}{4} //$$

Maclaurin Serileri Yardımıyla Serilerin Toplamını Bulma

Örnek Soru-2

Aşağıdaki serilerin toplamını bulunuz.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1).2^n}$ $\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \longrightarrow$ X, X, X

$$\int \frac{1}{1-x}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx \rightarrow x, x, \checkmark$$

$$\frac{\ln|1-x|}{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \ln\left|\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\underbrace{2^{n+1}}_{2^n.2}}$$

$$\ln 2 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1).2^n}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.3^n}$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}.(-1)^n}{n.3^n} \Rightarrow \ln\frac{2}{3} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.3^n}$$

Ses2

Kendisi ✗

Türevleri ✗

integre ✗

1) e^x

2) $\frac{1}{1-x}$

3) $\sin x$

4) $\cos x$

5) $\ln(1+x)$

6) $\arctan$

! $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$ serisinin toplamını bulunuz.

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Rightarrow$ Kullanılacak maclourin serisi $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $x=1$

$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Rightarrow e = 1+1+\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$k=0,1$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} = \boxed{e-2}$ //

! The thing is that

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} = a_1 + a_2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_n}$$

Yerine Koyma Metodu ve Türev Yardımıyla Maclaurin Serisi Bulma Örnek Soru-1

türevi

$\frac{1}{(1-x)^2}$ fonksiyonunun maclaurin serisini, $\frac{1}{1-x}$ in maclaurin serisinden yararlanarak bulunuz.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}n.x^{n-1}}$$

$$(1-x)^{-1}=-1(1-x)^{-2}.-1=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$\frac{1}{(1-x)^3}$ fonk.nun maclaurin serisini, $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ kuvvet serisinden yararlanarak bulunuz.

$$\frac{1}{(1-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}n.x^{n-1}$$

$$\left((1-x)^{-1}\right)'=-1.(1-x)^{-2}.-1=(1-x)^{-2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$-2(1-x)^{-3}.-1=\frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}n.x^{n-1}$$

$$\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n)\,x^{n-2}$$

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2-n}{2}\right).x^{n-2}$$

Kendisi	Türevi	integrali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = ?$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x = \underline{n \cdot x^{n-1}}$$