KUVVET SERİLERİ (Power Series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-3n} \text{ (seri)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2.3^n \text{ (seri)}$$

normal seri

So What is the Power Series?

Seri içine $(x-a)^n$ biçiminde x'e bağlı üslü bir ifadenin gelmesiyle kuvvet serileri oluşur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n.(x-1)^n \quad \text{(Kuvvet Serisi)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3n.x^n$$

! Bir seriyi açtığımızda sadece sayılar görürüz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Halbuki kuvvet serisinde ise bir fonksiyon ortaya çıkar.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n.x^n = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$$

#inotherwords

Kuvvet serisine baktığımızda x'e bağlı bir fonksiyon görmekteyiz.
Normal seriye " ise sadece sonuçlarında sayılar görmekteyiz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\cdot(x-2)^n = \frac{1}{2}(x-2)+\frac{2}{3}(x-2)^2+\dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n$$

Kuvvet serileri ile ilgili önümüzdeki cevaplarını arayacağımız sorular?

Kuvvet serilerini ne oluşturur?

☆☆☆

1) Bu seri x'in hangi değerleri için yakınsak, hangi değerleri için ıraksak olur?

Also

- yakınsaklık aralığı
- yakınsaklık yarıçapı
- yakınsaklık merkezi

Kavramlarını de alacağız.

2) fonk.ların Taylor ve Maclwin açılımlarını incelicez.

Taylor ve Macklwin açılımları, Kuvvet serilerinin çıkışına neden olurlar?

Kuvvet Serilerinin Yakınsaklık Aralığı ve Yarıçapı

(interval and radius of convergence)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$$

#questioningisthekeytoknowledge

x'in hangi değerleri için bu kuvvet serisi yakınsak olur.

Bu sorunun cevabını aşağıdaki örnek sorunun çözümü üzerinden ele alacağız.

Soru: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^n} \cdot (x+3)^n$ Kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yarıçapını bulunuz.

1. Adım Oran testi: Nedeni ise soruda çok sayıda üslü ifade bulunması.

$$\left\{ \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \text{yakınsak olur.} \right\}$$

#quickreminder

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\cancel{(-1)}^{n+1} \cdot (n+1)}{\cancel{4}^{n+1}\ 4} \cdot \cancel{(x+3)}^{n+1}\ (x+3)}{\frac{\cancel{(-1)}^{n} \cdot n}{\cancel{4}^{n}} \cdot \cancel{(x+3)}^{n}} \right| < 1$$

* mutlak değer nedeni ile yok oldular.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)\cdot(x+3)}{4}}{n} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\cdot(x+3)}{4n} \right| < 1$$

$\lim_{n\to\infty}$ $n\to\infty$ old. için x'li ifade sabit sayı kabul edilir.

$$\Rightarrow |x+3| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{4n}\right| < 1 \Rightarrow \frac{|x+3|}{4} < 1 \Rightarrow |x+3| < 4$$

$$\Rightarrow -4 < x+3 < 4 \Rightarrow \boxed{-7 < x < 1}$$

✓ * -7 ile 1 arası tüm x'ler için kuvvet serisi yakınsaktır.

? $\boxed{*}$ $\left.\begin{array}{l} x=-7 \\ x=1 \end{array}\right\}$ yakınsak mı?

* yakınsaklık yarı çapı $= \dfrac{1-(-7)}{2} = 4$

(−7 ile 1 arasındaki mesafe = çaptır bu mesafenin yarısı ise yarıçaptır.)

* Yakınsaklık merkezi $= \dfrac{-7+1}{2} = -3$

2. Step of the question

$x=-7$ değerini en baştaki kuvvet serisinde yerine koyacağız.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^n} \cdot (x+3)^n \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^n} (-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

Yakınsak mı?
Iraksak mı?

Bunu da önceden öğrendiğiniz test yöntemleri ile yapacağız.

- n. te
- p serisi
- geometrik
- integral
- kıyaslama
- oran
- kök
- alterne seri

by using n. term test

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$$

bu seri ıraksaktır. it means that $x=-7$ yakınsaklık aralığına dahil değildir.

ikinci sınıra gelirsek:

$$x=1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^n} \cdot 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \Rightarrow \text{Alterne seri}$$

* Mutlak yakınsak mı?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

n. terim testi

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$$

Iraksak $\Rightarrow$ Mutlak yakınsak değil

* Koşullu yakınsak mı?

alterne seri testi

1) her n için a_n pozitif olmalı ✓
2) her n için $a_n > a_{n+1}$ olmalı ✗

$$n < n+1$$

Koşullu yakınsak ta değil

Yani bu seri Iraksak

3. adım Yakınsaklık aralığı $\boxed{-7<x<1}$

Iraksak olunan aralık : $(-\infty,-7] \cup [1,\infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(2x+1)^n$$ $\Rightarrow$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yarıçapını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\overset{n+1\,.\,\cancel{n!}}{(n+1)!}\,\overset{2x+1}{\cancel{(2x+1)^{n+1}}}}{\cancel{n!}\,.\,\cancel{(2x+1)^n}}\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|(n+1).(2x+1)\right|<1 \longrightarrow |2x+1|\,\underbrace{\lim_{n\to\infty}|n+1|}_{\infty}<1$$

$$|2x+1|.\infty<1$$

$|2x+1|\geq 0$ $\longrightarrow$ Bu durum sadece $|2x+1|=0$ olursa gerçekleşir.

$2x+1=0$

$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow 0<1$

Yani x yalnızca $-\frac{1}{2}$ değerinde iken fonk. yakınsak olur.

So that yakınsaklık aralığı ve çapından söz edilemez.

Soru: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n^n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yarıçapını bulunuz.

1. adım

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-6)^{n+1}}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{(x-6)^n}{n^n}} \right| =$$

$$\cancel{(x-6)^n}\cdot(x-6)^1 \qquad (n+1)^n (n+1)^1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x-6}{(n+1)^n (n+1)} \cdot n^n \right|$$

$$|x-6| \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}_{0}$$

$$\underbrace{|x-6|}\cdot 0 < 1$$

$(-\infty, \infty)$

Tüm x Reel sayıları için kuvvet serisi yakınsak olur.

$R = \infty$

Soru: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x-8)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yarıçapını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\cancel{2^{n+1}} \cancel{(4x-8)^{n+1}}}{n+1}}{\frac{\cancel{2^n} \cancel{(4x-8)^n}}{n}} \right|$$

$$2 \qquad (4x-8)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2.(4x-8)}{n+1} \cdot n \right| = |4x-8| \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1}}_{2}$$

$$2\,|4x-8| < 1$$

$$|4x-8| < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < 4x-8 < \frac{1}{2}$$

$$\frac{15}{2} < 4x < \frac{17}{2}$$

$$\boxed{\frac{15}{8} < x < \frac{17}{8}}$$

$$R = \frac{\frac{17}{8} - \frac{15}{8}}{2} = \frac{1}{8} \;//$$

Uç noktalar yakınsaklık aralığına dahil mi?

$x = \frac{15}{8}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(4x-8)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}}_{\text{Alterne seri}}$$

1. adım mutlak yakınsak mı?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

p serisi
$p = 1 \leq 1$
ıraksak

Mutlak yakınsak değil.

2. adım
koşullu yakınsak mı? $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

alterne seri testi

1) her n için $\frac{1}{n}$ pozitif ✓

2) her n için $a_n > a_{n+1}$ $\quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ ✓

3) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓

Koşullu yakınsak → yani aralığa dahil

$$x = \frac{17}{8} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(4x-8)^n \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

p serisi testi

$p = 1 \leq 1$

ıraksak

So finally yakınsaklık aralığı

$$= \frac{15}{8} \leq x < \frac{17}{8} \;//$$