University
Mohammed VI
Polytechnic

Université Mohammed VI Polytechnique

Education Fellow – UM6P

Rapport du projet interne

Introduction aux Calculs Stochastiques Appliqués à la Finance

Réalisé par :

IBNJAA Said

Sous l'encadrement de :

Mr. Laurent DECREUSEFOND

Année académique : 2023-2024

Remerciements

Tout d'abord, je remercie chaleureusement M. Laurent DECREUSEFOND pour son soutien inestimable, ses conseils avisés et son encadrement bienveillant tout au long de ce projet. Son expertise et sa disponibilité ont été des atouts précieux dans la réussite de ce travail.

Je souhaite particulièrement remercier M. Nicolas CHEIMANOFF pour la confiance qu'il m'a accordée en m'intégrant au Programme Education Fellow, ainsi que M. Pierre Vincent KOSELEFF, M. Said LADJAL et M. Laurent DUMAS pour leur expertise et leur soutien durant mon année scolaire en agrégation.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers mes amis, collègues et camarades du Programme Education Fellow pour leur soutien moral, leurs encouragements et les discussions enrichissantes que nous avons eues ensemble.

Un grand merci à ma famille pour leur amour inconditionnel, leur soutien constant et leur patience. Leur encouragement et leur confiance en moi ont été des sources de motivation essentielles tout au long de mon parcours académique.

Enfin, je tiens à adresser mes sincères remerciements à l'Université Mohammed VI Polytechnique pour cette opportunité, ainsi qu'au corps administratif de l'EMINES , pour leur contribution essentielle au bon déroulement de cette année d'étude.

Résumé

Chapitre 1 : Fondamentaux et Principes de Base

Ce chapitre établit les bases essentielles de la théorie des probabilités, indispensables pour comprendre les processus stochastiques en finance. Il initie par la définition des concepts de tribus (σ-algèbres), de filtrations, et de processus stochastiques adaptés à ces filtrations. Un accent particulier est mis sur l'espérance conditionnelle, permettant le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire vis-à-vis d'une sous-tribu spécifique. Le chapitre clôt avec une introduction aux martingales, un concept clé en finance.

Chapitre 2 : Mouvement Brownien et Calcul d'Itô

Le chapitre aborde le Mouvement Brownien, un élément central de la théorie des probabilités et de la finance quantitative,. L'intégrale stochastique, tirant sa base de ce processus, est utilisée pour développer le calcul d'Itô, une méthode essentielle pour la différentiation des fonctions de processus stochastiques. Ce modèle est fondamental pour simuler l'évolution des prix des actifs financiers et d'autres phénomènes aléatoires.

Chapitre 3 : Applications en Finance

Ce chapitre se concentre sur les principales applications en finance quantitative, mettant en lumière le modèle de Black-Scholes pour l'évaluation des options financières et la modélisation des prix des actions. puis introduction aux options européennes et examine en détail la tarification d'une option call européenne.

Chapitre 4 : Techniques d'Évaluation

Ce chapitre est dédié aux méthodes d'évaluation qui sont cruciales pour une compréhension approfondie des concepts étudiés. Organisé autour de deux Travaux Pratiques (TP), un Travaux Dirigés (TD), et un Devoir Libre sur le Processus d'Ornstein-Uhlenbeck et le Modèle de Vasicek, Les TP se concentrent sur la simulation des trajectoires du Mouvement Brownien et la modélisation des prix futurs d'une action via le modèle de Black-Scholes, tandis que le Devoir Libre permettent aux étudiants de mettre en œuvre et de calibrer ces modèles sur des données réelles, renforçant ainsi leur compréhension et leur capacité à utiliser les modèles stochastiques en finance quantitative.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Pour comprendre et modéliser les dynamiques financières, les outils mathématiques traditionnels ne suffisent pas toujours. C'est là qu'interviennent les calculs stochastiques, qui permettent de modéliser les processus aléatoires et de décrire les évolutions futures des prix des actifs financiers.

Le mouvement brownien, est l'un des concepts clés de ce domaine. Il sert de fondement pour de nombreux modèles financiers, y compris le célèbre modèle de Black-Scholes utilisé pour le pricing des options. Le calcul d'Itô, qui étend le calcul différentiel aux processus stochastiques, est un outil essentiel pour travailler avec ces modèles.

Dans ce cours, nous commencerons par revoir les concepts fondamentaux des tribus, des filtrations et des processus stochastiques. Nous approfondirons ensuite notre compréhension du mouvement brownien et du calcul d'Itô, avant de passer à leurs applications pratiques en finance, notamment à travers le modèle de Black-Scholes et la tarification des options européennes.

Les modalités d'évaluation incluront des travaux dirigés (TD) pour approfondir les théories, des travaux pratiques (TP) pour appliquer ces concepts en finance quantitative, et un Devoir Libre sur le Processus d'Ornstein-Uhlenbeck et le Modèle de Vasicek. Ce devoir combinera analyse théorique et mise en pratique à travers la calibration de modèles sur des données réelles, enrichissant ainsi la compréhension et les compétences pratiques des étudiants.

Ce cours est conçu pour fournir une introduction aux calculs stochastiques appliqués à la finance, en combinant rigueur mathématique et applications pratiques. Que vous soyez un étudiant en finance, un analyste quantitatif ou un professionnel de la finance, ce cours vous apportera les connaissances nécessaires pour comprendre et utiliser les modèles stochastiques dans vos travaux et recherches.

Chapitre 1

Généralités et rappels

Ce chapitre présente les concepts fondamentaux de la théorie des probabilités nécessaires à la compréhension des processus stochastiques utilisés en finance. Il débute par la définition des tribus, ou σ-algèbres, qui forment la base des espaces mesurables et permettent de structurer l'information aléatoire. Nous introduisons ensuite les notions de tribus engendrées par des ensembles ou des variables aléatoires, ainsi que les filtrations, qui représentent l'évolution de l'information au fil du temps. Les processus stochastiques, définis comme des familles de variables aléatoires indexées par le temps, sont également abordés, avec un focus sur les processus adaptés aux filtrations.

Ensuite, nous discutons de l'espérance conditionnelle, un concept clé permettant de calculer l'espérance d'une variable aléatoire en tenant compte d'une sous-tribu. Ce chapitre se termine par une introduction aux martingales, des processus stochastiques jouant un rôle crucial en finance pour modéliser des jeux équitables et l'absence d'opportunités d'arbitrage.

Objectif du chapitre : Le but de ce chapitre est de fournir les bases théoriques nécessaires pour aborder les modèles financiers basés sur des processus stochastiques, en s'assurant que les lecteurs comprennent bien les concepts de tribus, de filtrations, d'espérances conditionnelles et de martingales.

1.1 Tribus , Filtration et Processus stochastique

Définition 1.1.1. *Une tribu (ou σ-algèbre en anglais) est une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω telle que :*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. *Si* $A \in \mathcal{F}$, *alors* $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$,
3. *Si* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, *alors* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Remarques :

1. Comme conséquence des propriétés 2 et 3, la tribu $\mathcal{F}$ est aussi stable par intersection dénombrable, c'est-à-dire que si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, alors $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
2. L'intersection de deux tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sur le même espace Ω est encore une tribu, mais la réunion de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ n'est pas nécessairement une tribu.
3. Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé un espace mesurable.

Définition 1.1.2. ***Tribu engendrée par une partie*** *A : notée $\sigma(A)$, est la plus petite tribu sur Ω qui contient A.*
Tribu engendrée par une variable aléatoire *X : notée $\sigma(X)$, est la tribu la plus petite sur Ω qui rend X mesurable. Autrement dit, c'est la tribu $\sigma(\{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.*
Tribu engendrée par une famille de variables aléatoires *$\{X_t\}_{t \leq T}$: notée $\sigma(X_t : t \leq T)$, est la plus petite tribu contenant les ensembles $\{X_t^{-1}(A)\}$ pour tout $t \in [0, T]$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On la note $\sigma(X_t, t \leq T)$..*

Remarques :

1. $\sigma(\mathcal{A})$ est l'intersection de toutes les tribus sur Ω qui contiennent $\mathcal{A}$
2. Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, alors la tribu $\sigma(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$ est égale à $\mathcal{A}$

Définition 1.1.3. *Une **filtration** est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.*

Remarques : On parle d'hypothèses habituelles si :

— les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$,

— la filtration est continue à droite au sens où $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

Définition 1.1.4. *On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace $(E, \mathcal{E})$ muni d'une tribu $\mathcal{E}$, une famille $(X_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.*

*Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit **adapté** par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$ si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.*

Remarques :

— Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La filtration naturelle associée à $(X_t)_{t\geq 0}$ est la filtration $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ définie par :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t),$$

où $\sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$ est la tribu engendrée par les variables aléatoires $\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$. Autrement dit, $\mathcal{F}_t^X$ représente l'ensemble de toutes les informations disponibles jusqu'au temps t.

— Tout espace de probabilité muni d'une filtration est dit espace filtré. On note $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. .

Exemples en Finance

Filtration dans la Modélisation des Marchés

Exemple 1.1.5. *Une filtration $\mathcal{F}_t$ représente toute l'information disponible jusqu'à la date t dans un marché financier. Elle peut inclure :*

— *Les prix des actifs,*

— *Les taux d'intérêt...*

Processus de Wiener (Brownien)

Exemple 1.1.6. *Le processus de Wiener B_t (ou processus Brownien) est utilisé pour modéliser le mouvement des prix des actifs financiers (Chapitre 2)*

Modèles à Temps Continu

Exemple 1.1.7. *Les modèles à temps continu en finance, comme le modèle de Black-Scholes pour les options, utilisent des processus stochastiques tels que le processus de Wiener pour décrire l'évolution des prix des actifs sous-jacents.*

1.2 Rappels sur espérance conditionnelle

Dans cette partie, nous explorons les propriétés de l'espérance conditionnelle qui seront utilisées pour les calculs dans les chapitres suivants. L'espérance conditionnelle joue un rôle crucial en statistiques et en probabilités, en permettant de calculer l'espérance d'une variable aléatoire sous certaines informations additionnelles fournies par une sous-tribu.

Soit X une variable aléatoire (intégrable) définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Propriété 1.2.1. *Les propriétés suivantes sont très utiles dans le calcul stochastique et l'analyse des processus aléatoires :*

— *Si X est G-mesurable, $\mathbb{E}(X \mid G) = X$.*

— *Si Y est G-mesurable, $\mathbb{E}(XY \mid G) = Y \cdot \mathbb{E}(X \mid G)$.*

— *Si X est indépendante de G, $\mathbb{E}(X \mid G) = \mathbb{E}(X)$.*

— *Si G et H sont deux tribus telles que $H \subset G$,*
alors $\mathbb{E}(X \mid H) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid H) \mid G] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid G) \mid H]$. On note souvent $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid H) \mid G] = \mathbb{E}(X \mid H \mid G)$.

1.3 Rappels sur les martingales

Les martingales sont des processus stochastiques qui jouent un rôle central en théorie des probabilités et en finance quantitative. En termes simples, une martingale est un modèle mathématique d'un jeu équitable, où la valeur espérée future d'une variable aléatoire, compte tenu de l'information actuelle, est égale à sa valeur actuelle.

En finance, les martingales sont utilisées pour modéliser des prix d'actifs financiers sous certaines hypothèses de marché. Par exemple, sous l'hypothèse de l'absence d'opportunités d'arbitrage (absence de gains sans risque), le prix actualisé des actifs financiers suit une martingale. Cela signifie que le prix actuel d'un actif est la meilleure estimation de son prix futur, corrigé par un facteur d'actualisation. En finance quantitative, le concept de martingale est crucial dans la modélisation et la valorisation des options et des autres dérivés financiers. Sous une mesure de probabilité dite *risque neutre*, les prix des actifs, actualisés par le taux sans risque, forment une martingale. Ce cadre théorique permet de dériver des formules de prix d'options, comme la célèbre formule de Black-Scholes, et d'autres résultats fondamentaux en théorie des marchés financiers.

Ainsi, les martingales fournissent une base mathématique solide pour comprendre et analyser les dynamiques des prix des actifs dans des marchés financiers efficients et sans arbitrage.

Martingales à temps discret

Définition 1.3.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration. Un processus stochastique $(X_n)_{n\geq 0}$ est une* ***martingale à temps discret*** *par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ s'il vérifie les conditions suivantes :*

— ***Adaptation*** *: Pour tout $n \geq 0$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.*

— ***Intégrabilité*** *: Pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$.*

— ***Propriété de martingale*** *: Pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$ presque sûrement.*

Exemple 1.3.2. ***Marche aléatoire symétrique :***

Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire symétrique définie par $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, où $(Z_i)_{i\geq 1}$ sont des variables aléatoires i.i.d. prenant les valeurs ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Alors $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

En effet :

Adaptation : *$S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable car il dépend seulement des variables $Z_1, \ldots, Z_n$.*

Intégrabilité : *Puisque Z_i prend les valeurs ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$, nous avons $\mathbb{E}[|Z_i|] = 1$. Ainsi,*

$$\mathbb{E}[|S_n|] = \mathbb{E}[|\sum_{i=1}^n Z_i|] \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|Z_i|] = n < \infty.$$

Donc, S_n est intégrable.

Propriété de martingale : *Pour montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, nous devons vérifier que $\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = S_n$.*

Calculons $\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$:

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} Z_i.$$

Par propriété d'espérance conditionnelle, nous avons :

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \sum_{i=1}^n Z_i + \mathbb{E}[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n].$$

Comme Z_{n+1} est indépendant de $\mathcal{F}_n$, $\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Z_{n+1}] = 0$ (car $\mathbb{E}[Z_i] = 0$ pour tout i). Ainsi,

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \sum_{i=1}^n Z_i = S_n.$$

Par conséquent, $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Martingales à temps continu

Définition 1.3.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est une **martingale à temps continu** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ s'il vérifie les conditions suivantes :*

- ***Adaptation** : Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*
- ***Intégrabilité** : Pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$.*
- ***Propriété de martingale** : Pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$ presque sûrement.*

Surmartingales et Sous-martingales

Définition 1.3.4. *Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est une **surmartingale** (resp. **sous-martingale**) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ s'il vérifie les conditions suivantes :*

- ***Adaptation** : Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*
- ***Intégrabilité** : Pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$.*
- ***Propriété de surmartingale** : Pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$ (resp. **Propriété de sous-martingale** : $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$) presque sûrement.*

Exemple 1.3.5. *Considérons une variable aléatoire X à valeurs réelles telle que $X \in L^1$. Posons pour tout $t \geq 0$,*

$$M_t = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t].$$

Alors le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

En effet :

1. ***Adaptation :** $M_t = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable*
2. ***Intégrabilité :** Puisque $X \in L^1$, nous avons $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Par les propriétés de l'espérance conditionnelle,*

$$\mathbb{E}[|M_t|] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]|] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[|X|] < \infty.$$

Donc, M_t est intégrable pour tout $t \geq 0$.

3. ***Propriété de martingale :*** *Pour montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, nous devons vérifier que $\mathbb{E}[M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t] = M_t$ pour tout $0 \leq s$.*

   Calculons $\mathbb{E}[M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t]$:

   $$Ona : M_{t+s} = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{t+s}].$$

   $$\mathbb{E}[M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{t+s}] \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] = M_t.$$

   Ainsi, $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

Remarque :

Si $(X_t, t \leq T)$ est une martingale, alors sa valeur à un instant donné t est égale à l'espérance conditionnelle de sa valeur terminale X_T étant donné l'information disponible à l'instant t, soit $\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_t)$. Cette caractéristique est particulièrement utile dans divers domaines de la finance.

Chapitre 2

Mouvement Brownien et le calcul d'Itô

Le Mouvement Brownien, ou mouvement brownien standard, est l'un des concepts fondamentaux en théorie des probabilités et en finance quantitative. Il est caractérisé par sa propriété de continuité presque sûre, ses accroissements gaussiens et son comportement martingal. Ce processus stochastique, noté B_t pour $t \geq 0$, démarre à zéro et ses accroissements sont indépendants, suivant une distribution normale avec une variance proportionnelle à la différence de temps. Ces caractéristiques en font un outil puissant pour modéliser des phénomènes aléatoires continus.

L'intégrale stochastique généralise l'intégration par rapport à un mouvement brownien. Le calcul d'Itô, développé sur cette base, offre une méthode précise pour différentier des fonctions de processus stochastiques. Ce cadre est largement utilisé en finance pour modéliser l'évolution des prix d'actifs financiers et d'autres phénomènes aléatoires.

L'objectif de ce chapitre est de comprendre les propriétés fondamentales du mouvement brownien et leur impact sur la modélisation stochastique, de maîtriser les concepts clés de l'intégrale stochastique et du calcul d'Itô, et d'appliquer le calcul d'Itô pour résoudre des problèmes pratiques en finance et en théorie des probabilités.

2.1 Le mouvement brownien

Définition 2.1.1. *Un processus* $\{Z_t, t \geq 0\}$ *à valeurs réelles est un processus à accroissements indépendants* ***(PAI)*** *par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si, pour tout* $0 \leq s < t$*, les accroissements* $Z_t - Z_s$ *sont indépendants de l'information contenue dans* $\mathcal{F}_s$*.*

Exemple 2.1.2. *Supposons que* Z *soit un processus avec des accroissements indépendants par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*. Si* $Z_t \in L^1$ *pour tout* $t \geq 0$*, alors* $X_t = Z_t - \mathbb{E}[Z_t]$ *est une martingale.* ***En effet :***

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[Z_t - \mathbb{E}[Z_t] \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(Z_t - Z_s + Z_s - \mathbb{E}[Z_t]) \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(Z_t - Z_s) \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[(Z_s - \mathbb{E}[Z_t]) \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(Z_t - Z_s) \mid \mathcal{F}_s] + (Z_s - \mathbb{E}[Z_t]) \\
&= \mathbb{E}[Z_t - Z_s] + Z_s - \mathbb{E}[Z_t] \\
&= \mathbb{E}[Z_t] - \mathbb{E}[Z_s] + Z_s - \mathbb{E}[Z_t] \\
&= X_s.
\end{aligned}$$

alors X_t *est une martingale.*

Définition 2.1.3. *Un processus stochastique* $(B_t)_{t\geq 0}$ *défini sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est un mouvement brownien standard si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $B_0 = 0$ *presque sûrement.*

2. Accroissements indépendants : Pour tous $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$*, les accroissements* $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *sont indépendants.*

3. Accroissements gaussiens : Pour $0 \leq s < t$*, l'accroissement* $B_t - B_s$ *suit une loi normale* $\mathcal{N}(0, t-s)$*. Autrement dit,* $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$*.*

4. Continuité : Les trajectoires de B_t *sont presque sûrement continues.*

Remarque :

si B_t est un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien standard, alors $B_t - B_0 = B_t$ suit $\mathcal{N}(0,t)$. De plus, pour tout $t > s$, on a B_{t-s} a la même loi que $B_t - B_s$ qui est $\mathcal{N}(0, t-s)$.

Le processus $X_t = a + B_t$ est un Brownien issu de a. On dit que X est un Brownien généralisé ou un mouvement brownien (MB) de drift μ si $X_t = x + \mu t + \sigma B_t$ où B est un mouvement brownien. La variable X_t est une variable gaussienne d'espérance $x + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$.

Propriété 2.1.4. *Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard :*

1. *B_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*
2. *$B_t^2 - t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*
3. *$\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*
4. *B_t est un processus gaussien, sa loi est caractérisée par son espérance nulle et sa covariance $Cov(B_t, B_s) = s \wedge t$.*

Preuve :

1.

$$\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_s + (B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s]$$
$$\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s] = B_s + \mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] \quad (\text{car } B_s \text{ est } \mathcal{F}_s\text{-mesurable})$$
$$\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0 \quad (\text{car } B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s))$$
$$\mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] = 0 \quad (\text{car } B_t - B_s \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_s)$$
$$\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s] = B_s$$

Donc, B_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

2. Soit $t > s$. On a :

$$B_t^2 - B_s^2 = (B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s).$$

comme B_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable, on obtient :

$$\mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] + 2B_s\mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s].$$

(comme $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$) et est indépendant de $\mathcal{F}_s$, on a :

$$\mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] = 0,$$

et donc

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathrm{Var}(B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s) = t - s.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2 \mid \mathcal{F}_s] = t - s + 2B_s \cdot 0 = t - s.$$

En conclusion,

$$\mathbb{E}[B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2 + B_s^2 - t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2 \mid \mathcal{F}_s] + B_s^2 - t = B_s^2 - s.$$

Ainsi, $B_t^2 - t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

Lemme : Soit $x \in \mathbb{R}$ et Z une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors,

$$\mathbb{E}[\exp(xZ)] = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

3. Soit $t > s$. On a $H_t = \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t$. Comme $H_t = \sigma(B_t - B_s) + \sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t$, où B_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable et $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$, alors :

$$\mathbb{E}[\exp(H_t) \mid \mathcal{F}_s] = \exp(\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t) \cdot \mathbb{E}[\exp(\sigma(B_t - B_s))].$$

Comme $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, d'après le lemme, on a :

$$\mathbb{E}[\exp(\sigma(B_t - B_s))] = \exp\left(\frac{\sigma^2(t-s)}{2}\right).$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[\exp(H_t) \mid \mathcal{F}_s] = \exp(\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t + \frac{\sigma^2(t-s)}{2}).$$

Simplifiant, on obtient :

$$\mathbb{E}[\exp(H_t) \mid \mathcal{F}_s] = \exp(\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}s).$$

Donc, $\exp(H_t)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

4. Pour montrer que B_t est un processus gaussien :

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels. On a :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i B_{t_i} = \sum_{i=0}^{n} b_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}),$$

   où $a_i = b_i - b_{i+1}$ pour $i \leq n-1$ et $a_n = b_n$. Chaque $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$ et est indépendant des autres.

   Ainsi, $\sum_{i=0}^{n} a_i B_{t_i}$ est une variable gaussienne, donc B_t est un processus gaussien.

   Maintenant, pour la covariance, pour $t \geq s$, sachant que $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, on calcule la covariance entre B_t et B_s :

$$\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \mathbb{E}[B_t B_s].$$

   Utilisant les propriétés de la covariance pour les variables gaussiennes :

$$\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \mathbb{E}[(B_t - \mathbb{E}[B_t])(B_s - \mathbb{E}[B_s])].$$

   Comme B_t et B_s sont centrés, cela simplifie à :

$$\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \mathbb{E}[B_t B_s].$$

   En développant $B_t B_s$, on obtient :

$$\mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s) B_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s) B_s] + \mathbb{E}[B_s^2].$$

   Comme $B_t - B_s$ est indépendant de B_s et suit une loi $\mathcal{N}(0, t-s)$, on a $\mathbb{E}[(B_t - B_s) B_s] = 0$ et $\mathbb{E}[B_s^2] = s$.

   Donc,

$$\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = s.$$

   En conclusion, B_t est un processus gaussien avec une espérance nulle et une covariance $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \min(t, s)$.

2.2 intégrale stochastique et le calcul d'Itô

Pour l'intégrale stochastique, je ne vais pas entrer dans les détails de sa construction à partir des processus élémentaires, mais je vais directement présenter les conditions qui donnent un sens à cette intégrale. C'est le point de départ pour utiliser le calcul d'Itô, qui est l'outil essentiel pour manipuler les intégrales stochastiques en finance et en théorie des processus stochastiques.

Le calcul d'Itô offre une méthode rigoureuse pour différentier des fonctions qui dépendent de mouvements browniens. Il prend en compte à la fois le terme de dérive et le terme de diffusion, essentiels pour modéliser le comportement stochastique des systèmes dynamiques, notamment dans les modèles financiers et d'autres applications où les mouvements browniens sont centraux.

Théorème 2.2.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace filtré,* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$*, et* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus adapté à* $(\mathcal{F}_t)$*. L'intégrale stochastique* $\left(\int_0^t H_s\, dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est définie dès que* $\int_0^T H_s^2\, ds < +\infty$ *presque sûrement. De plus, le processus* $\left(\int_0^t H_s\, dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est une martingale si* $\mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right] < +\infty$*. Dans ce cas, nous avons l'égalité suivante :*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s\, dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right].$$

Définition 2.2.2. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ *un espace filtré, et* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien standard. On appelle processus d'Itô un processus* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $t \leq T$*, presque sûrement,*

$$X_t = \xi + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dB_s,$$

où :

— ξ *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable,*

— $(K_s)_{0\leq s\leq t}$ *et* $(H_s)_{0\leq s\leq t}$ *sont des processus* $\mathcal{F}_t$*-adaptés,*

— $\int_0^T |K_s|\, ds < +\infty$ *presque sûrement,*

— $\mathbb{E}\left[\int_0^T |H_s|^2\, ds\right] < +\infty$.

Cette formulation décrit un processus d'Itô comme une combinaison d'une partie déterministe $\xi + \int_0^t K_s\, ds$ et d'une partie stochastique $\int_0^t H_s\, dB_s$, contrôlée par un mouvement brownien,

Remarque :

On utilise souvent la forme différentielle suivante pour décrire un processus d'Itô :

$$dX_t = K_t\, dt + H_t\, dB_t, \quad X_0 = \xi$$

Ici, le coefficient K_t représente le drift ou la dérive, et H_t est le coefficient de diffusion.

L'écriture $dX_t = K_t\, dt + H_t\, dB_t$ est unique sous réserve que les processus K et H vérifient les conditions d'intégrabilité.

On peut définir un processus d'Itô si $\int_0^t H_s^2\, ds < \infty$ presque sûrement, mais on perd la propriété de martingale pour l'intégrale stochastique.

Théorème 2.2.3. *Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dB_s,$$

et f une fonction deux fois continûment différentiable, alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d < X, X >_s,$$

où, par définition :

$$< X, X >_t = \int_0^t H_s^2\, ds,$$

et :

$$\int_0^t f'(X_s)\, dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s\, ds + \int_0^t f'(X_s) H_s\, dB_s.$$

De même, si $(t, x) \mapsto f(t, x)$ est une fonction deux fois différentiable par rapport à x et une fois différentiable par rapport à t, avec des dérivées continues *en (t, x) , alors on a :*

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\, d < X, X >_t .$$

Exemple 2.2.4. *calcule de $\int_0^t B_s\, dB_s$, où B_s est un mouvement brownien standard, On va utiliser la formule d'Itô pour la fonction $f(t, x) = x^2$. $dB_s = 0\, dt + 1\, dB_s$, ce qui donne $K_s = 0$ et $H_s = 1$. Selon la formule d'Itô pour $f(t, x) = x^2$, nous avons :*

$$d(B_t^2) = 2B_t\, dB_t + dt.$$

$$B_t^2 - 0 = \int_0^t 2B_s\, dB_s + \int_0^t ds.$$

En isolant $\int_0^t B_s\, dB_s$, nous obtenons :

$$\int_0^t B_s\, dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

Donc, $\int_0^t B_s\, dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$.

Propriété 2.2.5. *Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô définis par :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dB_s$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s\, ds + \int_0^t H'_s\, dB_s.$$

Alors, le produit $X_t Y_t$ est donné par :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s + \langle X, Y \rangle_t,$$

avec la convention :

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s\, ds.$$

Preuve :

Soit X_t un processus d'Itô défini par

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \, ds + \int_0^t H_s \, dB_s.$$

En appliquant la formule d'Itô avec la fonction $f(t, x) = x^2$, on obtient :

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s \, dX_s + \int_0^t H_s^2 \, ds.$$

Pour X_t, Y_t, et $X_t + Y_t$, on a respectivement :

$$(X_t + Y_t)^2 = (X_0 + Y_0)^2 + 2 \int_0^t (X_s + Y_s) \, d(X_s + Y_s) + \int_0^t (H_s + H_s')^2 \, ds,$$

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s \, dX_s + \int_0^t H_s^2 \, ds,$$

$$Y_t^2 = Y_0^2 + 2 \int_0^t Y_s \, dY_s + \int_0^t (H_s')^2 \, ds.$$

En faisant la différence entre $(X_t + Y_t)^2$ et $X_t^2 + Y_t^2$, on trouve que

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \, dY_s + \int_0^t Y_s \, dX_s + \int_0^t H_s H_s' \, ds.$$

Chapitre 3

Applications en Finance

Ce chapitre explore les applications clés de la finance quantitative, en mettant l'accent sur le modèle de Black-Scholes, largement utilisé pour modéliser les prix des actions et évaluer les options financières. Ce modèle constitue un outil essentiel dans la gestion moderne des risques et l'évaluation des actifs financiers.

Nous débutons par l'introduction de concepts fondamentaux en finance, tels que les options et le payoff des options, en mettant particulièrement l'accent sur les options européennes. Ensuite, nous explorons en détail le pricing d'un call européen, démontrant comment ce modèle permet d'estimer le prix d'achat d'un actif sous-jacent à une date future spécifiée.

En finance quantitative, les applications des modèles stochastiques vont bien au-delà de la simple évaluation des options. Par exemple, des modèles comme Vasicek et Cox-Ingersoll-Ross (CIR) sont utilisés pour modéliser les taux d'intérêt, jouant un rôle crucial dans la prédiction et la gestion des mouvements des taux d'intérêt à court et à long terme.

L'objectif principal de ce chapitre est de fournir une compréhension approfondie des modèles stochastiques appliqués en finance, en mettant en lumière leur utilisation pratique pour l'évaluation des actifs financiers, l'initiation au pricing des options.

3.1 Modèle de Black-Scholes

Soit une action sur le marché dont l'évolution du cours suit le modèle de Black-Scholes. Le prix de l'action à l'instant t, noté S_t, évolue selon l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t\mu\, dt + S_t\sigma\, dB_t$$

Explication des Termes

— $\mathbf{S_t}$: Le prix de l'action à l'instant t.

— μ : Le taux de croissance instantané (ou rendement attendu) de l'action. C'est un paramètre déterministe représentant le taux moyen de variation du prix de l'action.

— σ : La volatilité de l'action. C'est un paramètre déterministe qui mesure l'amplitude des fluctuations du prix de l'action. Plus σ est élevé, plus le prix de l'action est volatile.

Théorème 3.1.1. *Si S_t suit le modèle de Black-Scholes, alors*

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right)$$

où S_0 est le prix initial de l'action, et B_t est un mouvement brownien standard. La loi de S_t est log-normale.

Preuve :

On va applique Le lemme d'Itô sur la fonction $f(t,x) = \ln(x)$

On a les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = -\frac{1}{x^2}$$

Ainsi, comme S_t suit :

$$dS_t = S_t\mu \, dt + S_t\sigma \, dB_t$$

Nous obtenons :

$$df(t, S_t) = \frac{1}{S_t} (S_t\mu \, dt + S_t\sigma \, dB_t) - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}(S_t\sigma)^2 dt$$

Donc :

$$df(t, S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB_t$$

En intégrant de 0 à t, alors :

$$\ln(S_t) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t$$

Alors :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right)$$

Ainsi, S_t, selon le modèle de Black-Scholes, suit exactement cette forme exponentielle. Cela signifie que le prix S_t suit une distribution log-normale.

3.2 Pricing d'un Call Européen

Notion en finance

Une option : est un contrat financier donnant à son détenteur le droit (mais non l'obligation) d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif sous-jacent à un prix prédéterminé (strike price) à une date future spécifiée (date d'expiration), moyennant le paiement d'une prime.

Un call européen : est une option d'achat qui donne à son détenteur le droit d'acheter un actif sous-jacent à un prix fixé (strike price) à la date d'expiration de l'option.

Le **payoff** d'une option est le montant ou à la valeur que l'acheteur de l'option reçoit à l'expiration. Le payoff d'un call européen à l'expiration T est $\max(S_T - K, 0)$, où :

— S_T est le prix de l'actif sous-jacent à la date T.

— K est le strike price de l'option.

Cadre d'étude

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace filtré, $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, et $S_t = \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$ le prix d'une action qui est une martingale d'après la propriété 2.1.4. Soit f une fonction telle que $f(x) = \max(x-K, 0)$, où K est le strike price. Le payoff de l'option est $f(S_T)$ où T est la maturité de notre option.

La valeur de l'option à l'instant t est donc donnée par :

$$C_t = \mathbb{E}\left[\exp\left(-r(T-t)\right) f(S_T) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Interprétation :

— $C_t = C(t, S_t)$ représente le prix de l'option à l'instant t, calculé comme l'espérance actualisée du payoff futur $f(S_T)$.

— $\exp(-r(T-t))$ est le facteur d'actualisation, où r est le taux d'intérêt sans risque.

Le pricing de l'option consiste à déterminer la valeur initiale C_0,

Théorème 3.2.1. *Sous les mêmes notations précédentes, on a $C(t, S_t)$, qui représente le prix de notre option à l'instant t, donné par :*

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

avec $N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$, $\theta = T - t$, et

$$d_1 = \frac{\log(S_t/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta}$$

Preuve :

Avec les notations précédentes, on a :

$$
\begin{aligned}
C_t &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-r(T-t)\right) f(S_T) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-r(T-t)\right) f\left(S_t \exp\left(r(T-t) + \sigma(B_T - B_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right)\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-r(T-t)\right) f\left(S_t \exp\left(r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma(B_T - B_t)\right)\right)\right] \\
&\quad \text{(car } S_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable et } B_T - B_t \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_t) \\
&= \exp\left(-r\cdot\theta\right) \int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_t \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})\theta + \sigma y\sqrt{\theta}\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\, dy \\
&\quad \text{(car } B_T - B_t \sim N(0, T-t) \text{ et } \theta = T-t) \\
&= \exp\left(-r\cdot\theta\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_t \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})\theta + \sigma y\sqrt{\theta}\right) - K\right)^+ \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\, dy \\
&= \mathbb{E}\left[\left(S_t e^{\sigma\sqrt{\theta}Z - \frac{\sigma^2}{2}\theta} - Ke^{-r\theta}\right)^+\right] \text{ (avec } Z \sim N(0,1)) \\
&= \mathbb{E}\left[\left(S_t e^{\sigma\sqrt{\theta}Z - \frac{\sigma^2}{2}\theta} - Ke^{-r\theta}\right) I\{Z \geq -d_2\}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{d_2} \left(S_t e^{\sigma\sqrt{\theta}y - \frac{\sigma^2}{2}\theta} - Ke^{-r\theta}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy
\end{aligned}
$$

nous allons développer cette intégrale en deux intégrales et utiliser le changement de variable $x = y + \sigma\sqrt{\theta}$. On obtient le résultat demandé :

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Chapitre 4

Modalités d'évaluation

Ce chapitre explore des méthodes d'évaluation visant à assurer une bonne compréhension des concepts étudiés. Il est structuré en deux Travaux Pratiques (TP) et un Travaux Dirigés (TD) pour approfondir les concepts théoriques précédemment abordés,et un Devoir Libre.

Le premier TP a pour objectif la simulation des trajectoires d'un Mouvement Brownien (MB) en utilisant différentes méthodes. à l'aide de la bibliothèque `numpy`. Ensuite, nous implémentons la méthode de Box-Muller pour comparer les résultats avec ceux de NumPy. Enfin, en utilisant les propriétés des incréments, nous créons plusieurs trajectoires de MB pour en étudier les comportements.

Le deuxième TP se concentre sur la simulation des prix futurs d'une action en utilisant le modèle de Black-Scholes, discrétisé pour une application pratique. Nous importons les données historiques d'une action depuis Yahoo Finance, calculons la volatilité et les rendements, puis appliquons le modèle discrétisé pour estimer les prix théoriques sur une période donnée.

Le TD propose des exercices complémentaires pour renforcer les concepts théoriques fondamentaux. tandis que le Devoir Libre engage les étudiants dans l'analyse et la calibration du modèle de Vasicek, utilisant des données réelles de taux d'intérêt pour tester leur compréhension et leur capacité à appliquer les modèles stochastiques en finance.

Les objectifs principaux de ce chapitre sont de familiariser les étudiants avec l'application pratique des modèles stochastiques en finance quantitative, ainsi que de les initier à l'utilisation des données réelles et des bases de données en Python.

4.1 TP 1 Simulation des Trajectoires d’un Mouvement Brownien (MB)

Lemme de Box-Muller Si U_1 et U_2 sont des variables uniformes indépendantes sur $[0, 1]$, alors

$$Z_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2)$$

et

$$Z_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2)$$

sont des variables gaussiennes indépendantes et centrées réduites.

Pour simuler un mouvement brownien, nous utilisons les propriétés des incréments indépendants et distribués normalement. On a B_t comme suit :

$$B_t = B_{\Delta t} + (B_{2\Delta t} - B_{\Delta t}) + (B_{3\Delta t} - B_{2\Delta t}) + \ldots + (B_t - B_{t-\Delta t})$$

Cela signifie que B_t est la somme des incréments aléatoires $(B_{k\Delta t} - B_{(k-1)\Delta t})$, où chaque incrément suit une distribution normale $\mathcal{N}(0, \Delta t)$.

Question 1

Utilisez la fonction de la bibliothèque `numpy` : `np.random.normal(0, 1, n)` pour générer n échantillons de variables gaussiennes centrées réduites.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = 1  # Temps total
n = 1000  # Nombre d’incr ments
dt = T / n  # Pas de temps
M = 3  # Nombre de trajectoires
gaussian_samples = np.random.normal(0, 1, n)
```

Question 2

Implémentez la méthode de Box-Muller en Python.

```
def box_muller(n):
    u1 = np.random.rand(n)
    u2 = np.random.rand(n)
    z0 = np.sqrt(-2 * np.log(u1)) * np.cos(2 * np.pi * u2)
    return z0
box_muller_samples = box_muller(n)
```

Question 3

Comparer les résultats obtenus avec la méthode de NumPy et celle de Box-Muller.

```
plt.hist(gaussian_samples, bins=30, alpha=0.5)
plt.title('Echantillons gaussiens generer par NumPy ')
plt.show()
plt.hist(box_muller_samples, bins=30, alpha=0.5)
plt.title('Echantillons gaussiens generer par Box-Muller')
plt.show()
plt.legend()
```

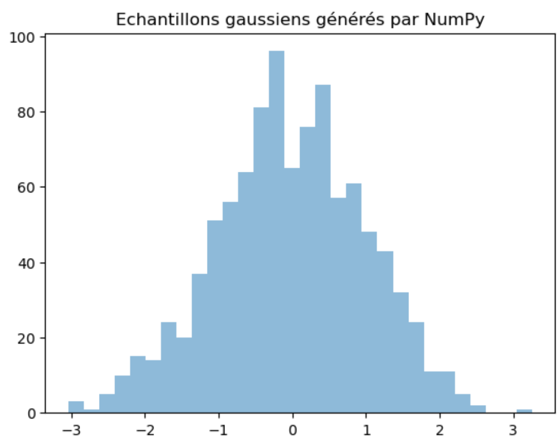

FIGURE 4.1 – Échantillons gaussiens générés par Numpy

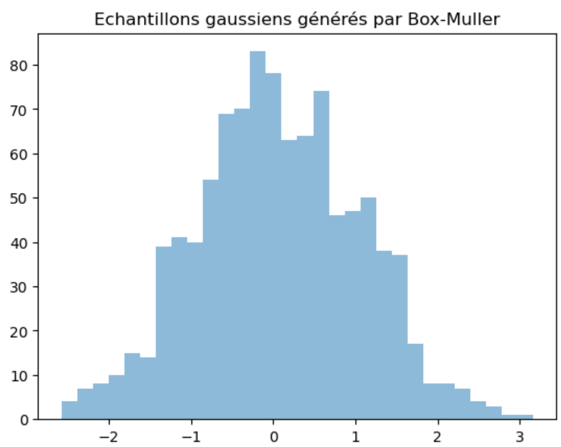

FIGURE 4.2 – Échantillons gaussiens générés par la méthode de Box-Muller

Question 4

Utilisez les propriétés des incréments pour générer M trajectoires d'un mouvement brownien.

```python
def generate_brownian_paths(M, n, dt):
    paths = np.zeros((M, n + 1))
    for i in range(M):
        increments = np.random.normal(0, np.sqrt(dt), n)
        paths[i, 1:] = np.cumsum(increments)
    return paths

brownian_paths = generate_brownian_paths(M, n, dt)

for i in range(M):
    plt.plot(np.linspace(0, T, n + 1), brownian_paths[i])
plt.title('Trajectoires du mouvement brownien')
plt.xlabel('Temps')
plt.ylabel('B(t)')
plt.grid(True)
plt.show()
```

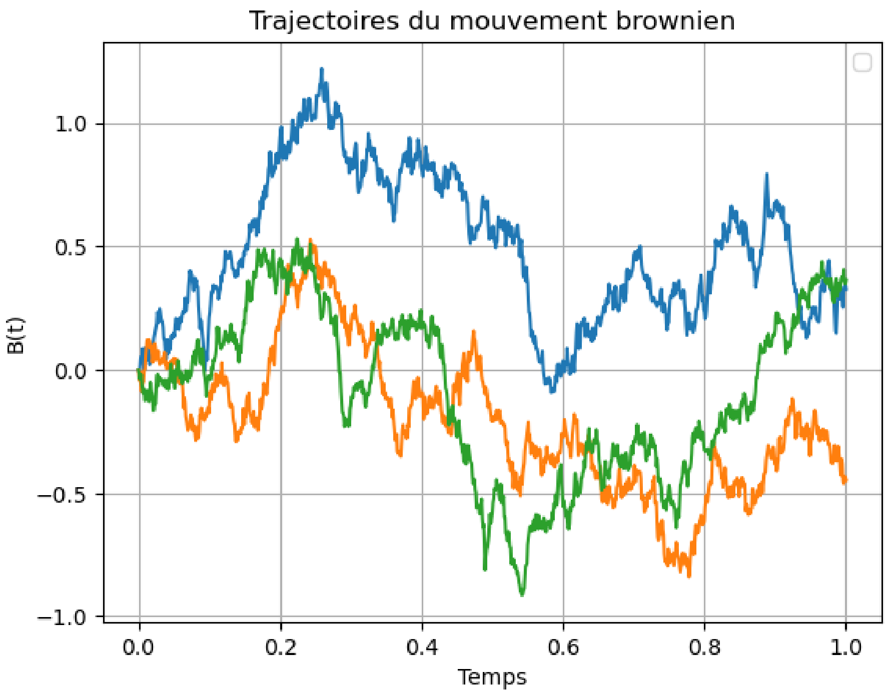

FIGURE 4.3 – Trajectoires du mouvement brownien

4.2 TP 2 Simulation des Prix Futurs d'une Action

Pour simuler les prix futurs de l'action S_t en utilisant le modèle de Black-Scholes, nous pouvons discrétiser l'équation continue en utilisant la méthode suivante :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \cdot \epsilon_t\right)$$

où :

— Δt est le pas de temps (en années).

— ϵ_t est un terme aléatoire tiré d'une distribution normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. **Importer les données d'une action** :
   — Allez sur le site Yahoo Finance.
   — Sélectionnez `Markets` → `Stocks Most Active` → `Historical Data`.
   — Téléchargez l'historique d'une action donnée sur une période de 1 annee.

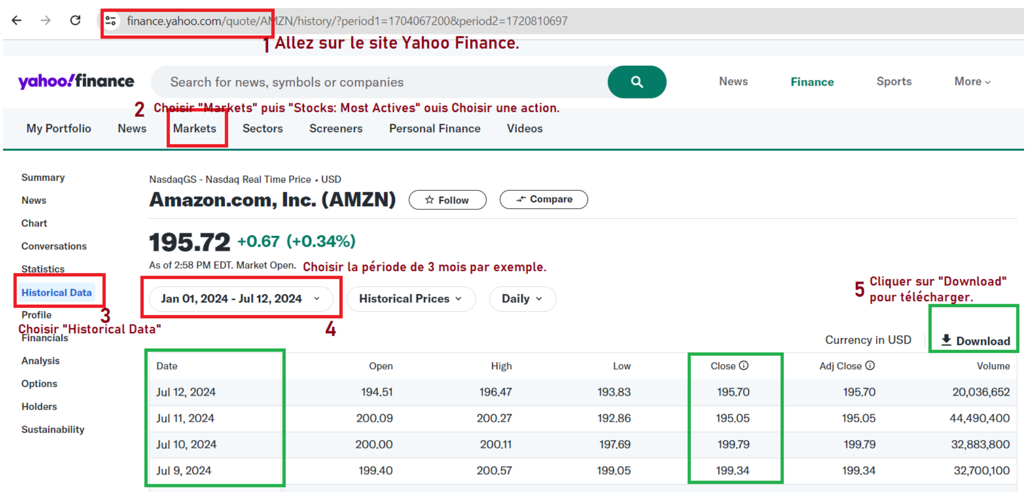

FIGURE 4.4 – Comment télécharger les données à partir de Yahoo Finance

```python
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

chemin_fichier = r"C:\Users\PC\Desktop\mes lecons\Epreuve
    interne\mon rapport\AMZN (1).csv"
donnees = pd.read_csv(chemin_fichier)
donnees['Date'] = pd.to_datetime(donnees['Date'])
donnees['Adj Close'] = pd.to_numeric(donnees['Adj Close'])
```

2. **Calculer la volatilité et le rendement** :
   — À partir des prix de clôture (`Close`), calculez les rendements journaliers.
   — Déterminez la volatilité annualisée .

```
donnees['Rendements'] = donnees['Adj Close'].pct_change()
volatilite_annuelle = donnees['Rendements'].std() * np.sqrt(252)
```

3. **Déterminer S_0 et utiliser le modèle discrétisé** :
   — S_0 est le prix de clôture initial (le premier jour de la période).
   — Utilisez le modèle discrétisé pour déterminer les prix théoriques sur toute la période de 1 annee.

```
S0 = donnees['Adj Close'].iloc[0]
n_jours = donnees.shape[0]
delta_t = 1 / 252
taux_sans_risque = 0.05
sigma = volatilite_annuelle
epsilon_t = np.random.normal(0, 1, n_jours)
prix_black_scholes = [S0]

for i in range(1, n_jours):
    prix_precedent = prix_black_scholes[-1]
    derive = (taux_sans_risque - 0.5 * sigma**2) * delta_t
    choc = sigma * np.sqrt(delta_t) * epsilon_t[i]
    nouveau_prix = prix_precedent * np.exp(derive + choc)
    prix_black_scholes.append(nouveau_prix)

donnees['Prix Black-Scholes'] = prix_black_scholes
```

4. **Tracer les prix théoriques et réels** :
   — Tracez les prix de clôture réels (`Close`) et les prix théoriques calculés avec le modèle de Black-Scholes discrétisé.
   — Comparez les deux courbes.

```
plt.plot(donnees['Date'], donnees['Adj Close'], label='Prix R els (Adj Close)')
plt.plot(donnees['Date'], donnees['Prix Black-Scholes'], label='Prix Th oriques Black-Scholes', linestyle='--', color='green')
```

```
plt.title('Comparaison des Prix Reels et Theoriques de action
    Amazon')
plt.xlabel('Date')
plt.ylabel('Prix (USD)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

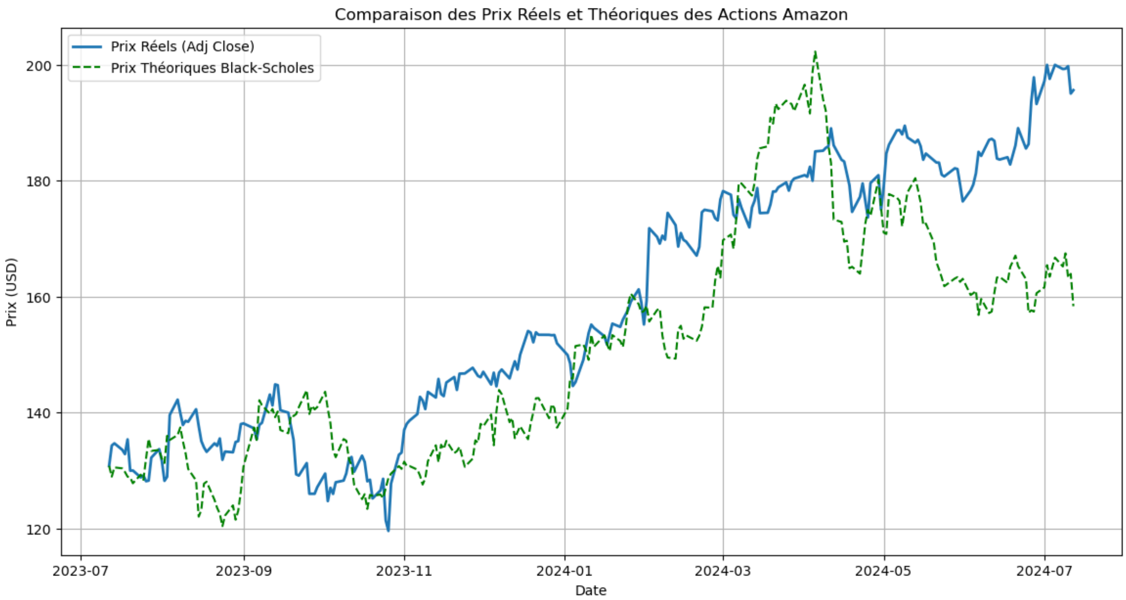

FIGURE 4.5 – Comparaison des Prix Réels et Théoriques de l'Action Amazon

4.3 Devoir Libre : Processus d'Ornstein-Uhlenbeck et Modèle de Vasicek

Introduction

Dans ce devoir, nous allons explorer deux processus stochastiques importants : le processus d'Ornstein-Uhlenbeck et le modèle de Vasicek. Nous commencerons par examiner le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, en trouvant sa formule explicite, son espérance et sa variance. Ensuite, nous étudierons le modèle de Vasicek, en discutant de ses dynamiques et en calculant les mêmes caractéristiques. Enfin, nous effectuerons une calibration pratique du modèle de Vasicek en utilisant des données réelles de taux d'intérêt.

Partie 1 : Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Soit le processus X_t défini par :

$$dX_t = -cX_t\,dt + \sigma\,dW_t$$

avec $X_0 = x$.

1. Soit $Y_t = X_t \exp(ct)$. Calculer dY_t.
2. En déduire que :
$$X_t = xe^{-ct} + \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs}\,dW_s$$
3. Montrer que $\int_0^t e^{cs}\,dW_s$ est une martingale, puis en déduire que $\mathbb{E}(X_t) = xe^{-ct}$.
4. Montrer que :
$$\mathrm{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{2c}\left(1 - e^{-2ct}\right)$$

Partie 2 : Modèle de Vasicek

Dans ce modèle, on suppose que le processus $r(t)$ vérifie :

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t$$

1. On pose $X_t = r(t) - b$. Calculer dX_t.

2. En déduire que :

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b\left(1 - e^{-at}\right) + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}\, dW_s$$

3. Montrer que :

$$\mathbb{E}(r(t)) = r(0)e^{-at} + b\left(1 - e^{-at}\right)$$

4. Montrer que :

$$\operatorname{Var}(r(t)) = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)$$

Partie 3 : Applications Pratiques du Modèle de Vasicek

1. Montrer que :

$$r_s = r_t e^{-a(s-t)} + b\left(1 - e^{-a(s-t)}\right) + \sigma e^{-as}\int_t^s e^{au}\, dW_u$$

2. En déduire que :

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b\left(1 - e^{-a}\right) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}}\epsilon$$

   où ϵ est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

3. Montrer que :

$$r_t = b(1 - e^{-a}) + e^{-a}r_{t-1} + \epsilon_t$$

   avec $\epsilon_t \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a})\right)$.

4. Télécharger les données des taux moyen pondéré depuis ce site. Utiliser Python pour déduire les paramètres a, b et σ du modèle de Vasicek.

4.4 TD

Conclusion

En conclusion, ce cours sur les calculs stochastiques appliqués à la finance a été conçu pour fournir aux étudiants une compréhension approfondie des modèles et des techniques essentiels dans le domaine de la finance quantitative. À travers l'étude du mouvement brownien, du calcul d'Itô et du modèle de Black-Scholes, nous avons exploré les fondements théoriques et les applications pratiques qui sous-tendent la modélisation des prix d'actifs financiers et l'évaluation des options.

Chaque chapitre, depuis les concepts fondamentaux des processus stochastiques jusqu'aux applications avancées en finance, a été structuré pour offrir une progression logique et rigoureuse. Les travaux pratiques et dirigés ont joué un rôle crucial en permettant aux étudiants de mettre en œuvre ces concepts à travers des simulations réalistes et des analyses de données financières réelles.

À la fin de ce cours, les étudiants auront acquis les compétences nécessaires pour :

— Comprendre les bases théoriques des processus stochastiques et leur application en finance.

— Utiliser le mouvement brownien et le calcul d'Itô .

— Appliquer le modèle de Black-Scholes pour évaluer et gérer le risque financier.

— Manipuler et analyser des données financières à l'aide d'outils informatiques comme Python.

En combinant la rigueur mathématique avec des applications pratiques concrètes, ce cours vise à préparer les étudiants à aborder de manière critique et innovante les défis complexes de la finance moderne. Que ce soit pour poursuivre des études avancées en finance quantitative, travailler comme analyste ou développeur dans l'industrie financière, ou même mener des recherches académiques, ce cours leur fournira une base solide et adaptable pour leur future carrière.

Bibliographie

[1] Damien Lamberton, Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.*

[2] Sabin Lessard. *Processus stochastiques : Cours et exercices corrigés.*

[3] Yassine EL QALLI. *Notes de cours Calcul stochastique.*

[4] Monique Jeanblanc. *Cours de Calcul stochastique.*