



Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une sous-tribu de \mathcal{F} notée \mathcal{G} et $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ une filtration sur Ω .

Dans tout ce qui suit, $(B_t, t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel. On note (\mathcal{F}_t) sa filtration naturelle. On rappelle que B et $(B_t^2 - t, t \geq 0)$ sont des martingales.

Exercice 1:

1. Calculer pour tout couple (s, t) les quantités $\mathbb{E}(B_s B_t^2)$, $\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s)$ et $\mathbb{E}(B_t | B_s)$.
2. Déterminer la loi de $B_t + B_s$.

Exercice 2:

Parmi les processus suivants, quels sont ceux qui sont des martingales. (On pourra utiliser, sans démonstration, que $\mathbb{E}[\int_0^t B_u du | \mathcal{F}_s] = \int_0^t \mathbb{E}[B_u | \mathcal{F}_s] du$.)

1. $M_t = B_t^3 - 3 \int_0^t B_s ds$.
2. $M_t = B_t^3 - 3tB_t$.
3. $M_t = tB_t - \int_0^t B_s ds$.
4. $M_t = \sin(B_t) - \int_0^t B_s (\cos s) ds$.
5. $M_t = \sin(B_t) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(B_s) ds$.
6. $M_t = t^2 B_t - 2 \int_0^t B_s ds$.

Exercice 3:

$$dX_t = -aX_t dt + e^{bt} dB_t.$$

1. Trouver la solution de l'équation.
2. Calculer $\mathbb{E}(X_t)$.
3. Calculer $\text{Var}(X_t)$.

Exercice 4:

Soit $Y_t = tB_t$.

1. Calculer dY_t .

2. Calculer l'espérance de Y_t .

3. Calculer $\mathbb{E}(Y_t Y_s)$.

Exercice 5:

Soit la variable aléatoire $X_t = \int_0^t (\sin s) dB_s$.

1. Montrer que X_t est définie.

2. Montrer que X est un processus gaussien. Calculer son espérance et la covariance $\mathbb{E}(X_s X_t)$.

3. Calculer $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$.

4. Montrer que

$$X_t = (\sin t) B_t - \int_0^t (\cos s) B_s ds.$$

Exercice 6:

Écrire les processus suivants comme des processus d'Itô en précisant leur drift et le coefficient de diffusion :

1. $X_t = B_t^2$.

2. $X_t = t + e^{B_t}$.

3. $X_t = B_t^3 - 3t B_t$.

4. $X_t = 1 + 2t + e^{B_t}$.

5. $X_t = (B_t + t) \exp(-B_t - \frac{1}{2}t)$.

6. $X_t = \exp(\frac{t}{2}) \sin(B_t)$.

Exercice 7:

Soit $Y_t = tX_1(t)X_2(t)$ où :

- $dX_1(t) = f(t) dt + \sigma_1(t) dB_t$,
- $dX_2(t) = \sigma_2(t) dB_t$.

Calculer dY_t .