Projet pédagogique interne
Introduction aux Calculs Stochastiques Appliqués à la Finance

IBNJAA Said

Université Mohammed VI Polytechnique, Benguerir

Encadré par : Monsieur Laurent Decreusefond

Membres du jury :
Monsieur Nicolas CHEIMANOFF
Monsieur Mohammed El Rhabi
Monsieur Mohamed El Machkouri

July 22, 2024

Déroulement et Public cible

Public cible : Étudiants de 2ème année cycle ingénieur en Finance Quantitative / Généraliste.
Cours :50% - 10h

- **Chapitre 1 :** Fondamentaux et Principes de Base - 3h
- **Chapitre 2 :** Mouvement Brownien et Calcul d'Itô - 4h
- **Chapitre 3 :** Applications en Finance - 3h

TP/TD/DL : 50% - 10h

- **TD :** 4h
  - TD1 : Prérequis et rappels
  - TD2 : Mouvement brownien et calcul d'Itô
- **TP :** 4h
  - TP1 : Simulation des Trajectoires d'un Mouvement Brownien (MB)
  - TP2 : Simulation des Prix Futurs d'une Action
- **DL - Projet :** 2h
  - Processus d'Ornstein-Uhlenbeck et Modèle de Vasicek

Objectifs du Chapitre

Chapitre 1 : Fondamentaux et Principes de Base

- Maîtriser les concepts de tribus, filtrations, espérances conditionnelles et martingales.

Chapitre 2 : Mouvement Brownien et Calcul d'Itô

- Comprendre l'intégrale stochastique et le calcul d'Itô.

Chapitre 3 : Applications en Finance

- Appliquer le calcul d'Itô à des problèmes financiers.
- Découvrir le pricing des options.

Modalités d'évaluation

Travaux Dirigés (TD) :
Les TD permettent de valider les compétences liées à la partie théorique du cours.
Travaux Pratiques (TP) :
Les TP permettent de familiariser les étudiants avec l'utilisation des données financières et de valider les compétences de progammation.
Devoir Libre (DL - Projet) :
Le DL permet de valider les compétences théoriques et pratiques en modélisation et analyse financière.
Examen Final :
L'examen final est composé de deux parties :

- **Partie 1 :** QCM (10 points)
- **Partie 2 :** Problème (10 points)

Répartition des notes :

- Participation en classe et exercices de TD : 10%
- Projet (Devoir Libre) : 30%
- Examen Final : 60%

Plateformes d'enseignement à distance et leurs fonctionnalités

Microsoft Teams

- Partage d'écran
- Réunions en ligne
- Collaboration en temps réel

Google Colab

- Travail collectif des TP
- Codage en ligne
- Partage de notebooks

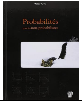
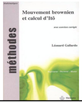
Mon Site Web

- Cours / TD / TP /BD
- Calendrier
- Forum de discussion
- Réservation de séances
- Remise des projets

Prérequis du cours

1. Variables aléatoires
2. Lois de probabilité
3. Indépendance et conditionnement
4. Espérance conditionnelle
5. Concepts de base sur les martingales
6. Dérivées et intégrales, techniques de base
7. Programmation Python

Références Bibliographiques

Photo	Auteur	Titre	Contenu	Utilité
	Walter Appel	Probabilités pour les non-probabilistes	Introduction aux probabilités	Prérequis
	Damien Lamberton & Bernard Lapeyre	Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance	Cours détaillé, problèmes et exercices non corrigés	Cours et exercices
	Léonard Gallardo	Mouvement brownien et calcul d'Itô	Cours et exercices corrigés	Cours et exercices

Motivation et Introduction

Les calculs stochastiques ?

- Modélisation les phénomènes aléatoires.
- Modélisation des Marchés Financiers
- Prévision des Prix
- Gestion des Risques
- Optimisation de Portefeuille

Figure: Évolution de l'indice $CAC40$

Tribu

Définition

Une tribu (ou σ-algèbre) est une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω telle que:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. Si $A \in \mathcal{F}$, alors $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$,
3. Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Remarques:

- En raison des propriétés 2 et 3, $\mathcal{F}$ est stable par intersections dénombrables.
- Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé un espace mesurable.

Exercice d'entraînement TD-1

Exercice 1 -TD 1

Tribu Engendrée

Definition

Tribu engendrée par une partie A:
notée $\sigma(A)$, est la plus petite tribu sur Ω qui contient A.
Tribu engendrée par une variable aléatoire X:
notée $\sigma(X)$, est la tribu la plus petite sur Ω qui rend X mesurable. Autrement dit, c'est la tribu $\sigma(\{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.
Tribu engendrée par une famille de variables aléatoires $\{X_t\}_{t \leq T}$:
notée $\sigma(X_t : t \leq T)$, est la plus petite tribu contenant les ensembles $\{X_t^{-1}(A)\}$ pour tout $t \in [0, T]$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On la note également $\sigma(X_t, t \leq T)$.

Filtration

Definition

Une **filtration** est une famille croissante de sous-tribus $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$ pour $t \leq s$.

Importance en finance :

- Représente l'information disponible jusqu'à la date t.
- Cruciale pour l'analyse de marché et les stratégies d'investissement.
- Inclut les données sur les prix, les taux....

Processus Stochastique

Definition

On appelle **processus stochastique à temps continu** et à valeurs dans un espace $(E, \mathcal{E})$ muni d'une tribu $\mathcal{E}$, une famille $(X_t)_{t \geq 0}$ de variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.
Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit **adapté** par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$ si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.

Remarques:

- La **filtration naturelle** associée à $(X_t)_{t \geq 0}$ est la filtration $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ définie par :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t),$$

- L'ensemble $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé **espace filtré**.

Rappel sur l'espérance conditionnelle

Propriété

Soit X une variable aléatoire (intégrable) définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

- Si X est G-mesurable, $\mathbb{E}(X \mid G) = X$.
- Si Y est G-mesurable et X intégrable, $\mathbb{E}(XY \mid G) = Y \cdot \mathbb{E}(X \mid G)$.
- Si X est indépendante de G, $\mathbb{E}(X \mid G) = \mathbb{E}(X)$.
- Si G et H sont deux tribus telles que $H \subset G$, alorsc: $\mathbb{E}(X \mid H) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid H) \mid G] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid G) \mid H]$.

Exercices d'entraînement TD-1

Exercices 2, 3, 4

Exercice :
Soit X, Y deux variables aléatoires telles que la variable aléatoire $X - Y$ est indépendante de G, d'espérance m et de variance σ^2. On suppose que Y est G-mesurable.

- Calculer $\mathbb{E}(X - Y \mid G)$.
- En déduire $\mathbb{E}(X \mid G)$.
- Calculer $\mathbb{E}((X - Y)^2 \mid G)$.
- En déduire $\mathbb{E}(X^2 \mid G)$.

Solution:

- Sous les hypothèses de l'exercice, $\mathbb{E}(X - Y \mid G) = \mathbb{E}(X \mid G) - Y$ car Y est G-mesurable et $\mathbb{E}(X - Y \mid G) = \mathbb{E}(X - Y) = m$ par indépendance. D'où $\mathbb{E}(X \mid G) = m + Y$.
- De la même façon, $\mathbb{E}((X - Y)^2 \mid G) = \mathbb{E}(X^2 \mid G) - 2Y\mathbb{E}(X \mid G) + Y^2$ d'où $\mathbb{E}(X^2 \mid G) = \sigma^2 + (Y + m)^2$.

Rappel sur les Martingales

Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit **martingale, surmartingale ou sous-martingale** par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ s'il vérifie les conditions suivantes :

- **Adaptation** : Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
- **Intégrabilité** : Pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$.
- **Propriété Martingale** : Pour tout $s \leq t$,
  - Martingale : $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$ presque sûrement.
  - Surmartingale : $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$ presque sûrement.
  - Sous-martingale : $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$ presque sûrement.

Martingale et Finance

Interprétation en Finance:

- **Jeu équitable** : En finance, une martingale représente une situation de jeu équitable où l'espérance des gains futurs, basée sur les informations actuelles, est simplement la position actuelle.
- **Prédiction des prix** : La meilleure prédiction du prix futur d'un actif, connaissant les informations disponibles aujourd'hui, est son prix actuel.

Exercices d'entraînement (TD-1)

Exercices 5, 6, 7,8

Mouvement Brownien

Définition

Un processus stochastique $(B_t)_{t\geq 0}$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un mouvement brownien standard si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $B_0 = 0$ presque sûrement.
2. Accroissements indépendants : Pour tous $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, les accroissements $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendants.
3. Accroissements gaussiens : Pour $0 \leq s < t$, l'accroissement $B_t - B_s$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, t-s)$, c'est-à-dire $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.
4. Continuité : Les trajectoires de B_t sont presque sûrement continues.

Remarque: On a : $B_t - B_0 = B_t$ suit $\mathcal{N}(0, t)$. De plus, pour tout $t > s$, on a que B_{t-s} a la même loi que $B_t - B_s$ qui est $\mathcal{N}(0, t-s)$.

Propriété

Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard :

1. B_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale.
2. $B_t^2 - t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.
3. $\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.
4. B_t est un processus gaussien, son espérance est nulle et sa covariance $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = s \wedge t$.

Exercice d'entraînement (TD-2)

Exercice 1

Exercice :
Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel avec sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$.

1. Calculer pour tout couple (s, t) $\mathbb{E}(B_s B_t^2)$.
2. Déterminer la loi de $B_t + B_s$.

Solution :

1. On a $\mathbb{E}(B_s B_t^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(B_s B_t^2 | \mathcal{F}_s))$. Comme B_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable, si $t > s$, alors $\mathbb{E}(B_s B_t^2) = \mathbb{E}(B_s \mathbb{E}(B_t^2 | \mathcal{F}_s))$. Puisque $B_t^2 - t$ est une martingale, $\mathbb{E}(B_t^2 | \mathcal{F}_s) = B_s^2 - s + t$. Utilisant que B_t est centré et $\mathbb{E}(B_t^3) = 0$, on obtient $\mathbb{E}(B_s B_t^2) = \mathbb{E}(B_s(B_s^2 - s + t)) = \mathbb{E}(B_s^3) = 0$. Si $s > t$, alors $\mathbb{E}(B_s B_t^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(B_s B_t^2 | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(B_t^2 \mathbb{E}(B_s | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(B_t^3) = 0$.
2. La variable $B_t + B_s$ est gaussienne (car B est un processus gaussien) et centrée. $B_t + B_s$ peut être écrite comme une somme de variables aléatoires gaussiennes indépendantes: $B_t - B_s + 2B_s$. On en déduit que sa variance est $t + 3s$.

Intégrale Stochastique

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace filtré, $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, et $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)$. L'intégrale stochastique $\left(\int_0^t H_s\, dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est définie dès que $\int_0^T H_s^2\, ds < +\infty$ presque sûrement. De plus, le processus $\left(\int_0^t H_s\, dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale si $\mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right] < +\infty$. Dans ce cas, nous avons l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s\, dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right].$$

Exercice d'entraînement (TD-2)

Exercice 2

Exercice
Soit $M_t = B_t^3 - 3\int_0^t B_s\, ds$. Montrez que M_t est une martingale. Vous pouvez utiliser la propriété suivante :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t B_u\, du \middle| \mathcal{F}_s\right] = \int_0^t \mathbb{E}[B_u|\mathcal{F}_s]\, du.$$

Solution
Le processus M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. De plus, M_t est intégrable car :

$$\mathbb{E}(|B_t^3|) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{3}{2}}$$

et

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t B_s\, ds\right| \leq \int_0^t \mathbb{E}(|B_s|)\, ds = \int_0^t \sqrt{\frac{2s}{\pi}}\, ds < \infty.$$

En utilisant le fait que, pour $t > s$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_t^3|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)^3|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}((B_t - B_s)^3) + 3B_s\mathbb{E}((B_t - B_s)^2) + 3B_s^2\mathbb{E}(B_t - B_s) + B_s^3 \\
&= 3B_s(t-s) + B_s^3.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^t B_u\,du \middle| \mathcal{F}_s\right) &= \int_0^t \mathbb{E}[B_u|\mathcal{F}_s]\,du \\ &= \int_0^s \mathbb{E}[B_u|\mathcal{F}_s]\,du + \int_s^t \mathbb{E}[B_u|\mathcal{F}_s]\,du \\ &= \int_0^s B_u\,du + B_s(t-s).\end{aligned}$$

En combinant ces résultats, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}\left(B_t^3 - 3\int_0^t B_s\,ds \middle| \mathcal{F}_s\right) \\ &= \mathbb{E}(B_t^3|\mathcal{F}_s) - 3\mathbb{E}\left(\int_0^t B_s\,ds \middle| \mathcal{F}_s\right) \\ &= 3B_s(t-s) + B_s^3 - 3\left(\int_0^s B_u\,du + B_s(t-s)\right) \\ &= B_s^3 - 3\int_0^s B_u\,du = M_s.\end{aligned}$$

Processus d'Itô

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ un espace filtré, et $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. On appelle processus d'Itô un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \leq T$, presque sûrement,

$$X_t = \xi + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dB_s,$$

où :

- ξ est $\mathcal{F}_0$-mesurable,
- $(K_s)_{0\leq s\leq t}$ et $(H_s)_{0\leq s\leq t}$ sont des processus $\mathcal{F}_t$-adaptés,
- $\int_0^T |K_s|\, ds < +\infty$ presque sûrement,
- $\mathbb{E}\left[\int_0^T |H_s|^2\, ds\right] < +\infty$.

Cette formulation décrit un processus d'Itô comme une combinaison d'une partie déterministe $\xi + \int_0^t K_s\, ds$ et d'une partie stochastique $\int_0^t H_s\, dB_s$, contrôlée par un mouvement brownien.

Remarques:

- On utilise souvent la forme différentielle suivante pour décrire un processus d'Itô :

$$dX_t = K_t\, dt + H_t\, dB_t, \quad X_0 = \xi$$

- Ici, le coefficient K_t représente le drift ou la dérive, et H_t est le coefficient de diffusion.
- L'écriture $dX_t = K_t\, dt + H_t\, dB_t$ est unique sous réserve que les processus K et H vérifient les conditions d'intégrabilité.
- On peut définir un processus d'Itô si $\int_0^t H_s^2\, ds < \infty$ presque sûrement, mais on perd la propriété de martingale pour l'intégrale stochastique.

Théorème

Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dB_s,$$

et f une fonction deux fois continûment différentiable, alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d < X, X >_s,$$

où, par définition :

$$< X, X >_t = \int_0^t H_s^2\, ds,$$

et :

$$\int_0^t f'(X_s)\, dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s\, ds + \int_0^t f'(X_s) H_s\, dB_s.$$

Théorème(Suite)

De même, si $(t,x) \mapsto f(t,x)$ est une fonction deux fois différentiable par rapport à x et une fois différentiable par rapport à t, avec des dérivées continues en (t,x), alors on a :

$$df(t,X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t + \frac{\partial^2 f}{2\partial x^2}(t,X_t)\,d < X,X >_t .$$

Exercices d'entraînement (TD-2)

Exercices 3, 5, 6

Exercice: Calculez $\int_0^t B_s\, dB_s$, où B_s est un mouvement brownien standard.
Solution: On va utiliser la formule d'Itô pour la fonction $f(t,x) = x^2$. Pour le mouvement brownien standard, nous avons $dB_s = 0\, dt + 1\, dB_s$, ce qui donne $K_s = 0$ et $H_s = 1$.
Selon la formule d'Itô pour $f(t,x) = x^2$, nous avons :

$$d(B_t^2) = 2B_t\, dB_t + dt.$$

En intégrant cette équation de 0 à t, nous obtenons :

$$B_t^2 - B_0^2 = \int_0^t 2B_s\, dB_s + \int_0^t ds.$$

En isolant $\int_0^t B_s\, dB_s$, nous obtenons :

$$\int_0^t B_s\, dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

Donc,

$$\int_0^t B_s\, dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

Propriété

Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô définis par :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dB_s, \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s'\, ds + \int_0^t H_s'\, dB_s.$$

Alors, le produit $X_t Y_t$ est donné par :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s + \langle X, Y \rangle_t,$$

avec la convention :

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H_s'\, ds.$$

Propriété

Soit X et Y deux processus d'Itô, et leur crochet $\langle X, Y\rangle$, on a donc :

1. $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est bilinéaire symétrique.
2. $\langle X, \int_0^t G_s\, ds\rangle = 0$.
3. $\left\langle \int_0^{\cdot} H_s\, dB_s, \int_0^{\cdot} H'_s\, dB'_s \right\rangle_t = 0$ si B et B' sont indépendants.
4. $\left\langle \int_0^{\cdot} H_s\, dB_s, \int_0^{\cdot} G_s\, dB_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s G_s\, ds$.

Exercices d'entraînement (TD-2)

Exercices 4, 7

Modèle de Black-Scholes

Soit une action sur le marché dont l'évolution du cours suit le modèle de Black-Scholes. Le prix de l'action à l'instant t, noté S_t, évolue selon l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t \mu \, dt + S_t \sigma \, dB_t$$

Explication des Termes

- $\mathbf{S_t}$: Le prix de l'action à l'instant t.
- μ : Le taux de croissance instantané (ou rendement attendu) de l'action. C'est un paramètre déterministe représentant le taux moyen de variation du prix de l'action.
- σ : La volatilité de l'action. C'est un paramètre déterministe qui mesure l'amplitude des fluctuations du prix de l'action. Plus σ est élevé, plus le prix de l'action est volatile.

Théorème

Si S_t suit le modèle de Black-Scholes, alors

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

où S_0 est le prix initial de l'action, et B_t est un mouvement brownien standard. La loi de S_t est log-normale.

Pricing des options

Une option : est un contrat financier qui donne à son détenteur le droit (mais non l'obligation) d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif sous-jacent à un prix prédéterminé (strike price) à une date future spécifiée (date d'expiration), moyennant le paiement d'une prime.

Un call européen : est une option d'achat qui donne à son détenteur le droit d'acheter un actif sous-jacent à un prix fixé (strike price) à la date d'expiration de l'option.

Le **payoff** d'une option est le montant ou la valeur que l'acheteur de l'option reçoit à l'expiration. Le payoff d'un call européen à l'expiration T est donné par $\max(S_T - K, 0)$, où :

- S_T est le prix de l'actif sous-jacent à la date T.
- K est le strike price de l'option.

Exemple de Call Européen :
Soient A et B deux sociétés. La société A souhaite acheter un produit X de la société B dans 6 mois. Le prix actuel de ce produit X est de 100$ (S_0). La société A propose de l'acheter pour 110$ dans 6 mois.
Le problème est que le prix réel du produit X peut diminuer ou augmenter dans 6 mois. Si le prix diminue, il n'est pas avantageux pour la société A de l'acheter à 110$.
Pour gérer ce risque, la société A peut se tourner vers la chambre de compensation pour acheter une option d'achat (call option). Cette option d'achat donne à la société A le droit d'acheter le produit X à 110$ dans 6 mois, quelle que soit l'évolution du prix du marché.
Explication :
L'option d'achat : La société A achète une option d'achat de la chambre de compensation. Cette option permet à A d'acheter le produit X à 110$ dans 6 mois.
Scénarios possibles :

- Si dans 6 mois, le prix du produit X est supérieur à 110$ (par exemple, 120$), la société A exerce son option et achète le produit X à 110$. La chambre de compensation subit le risque de devoir fournir le produit à un prix inférieur à celui du marché.
- Si dans 6 mois, le prix du produit X est inférieur à 110$ (par exemple, 90$), la société A n'exerce pas son option. Elle achète directement le produit X sur le marché à 90$ et ne subit pas de perte. La prime payée pour l'option est perdue, mais c'est le coût pour éviter un risque plus important.

Payoff de l'option :
Le payoff d'un call européen à l'expiration T est donné par $\max(S_T - K, 0)$, où :

- S_T est le prix du produit X à la date T (dans 6 mois).
- K est le strike price de l'option, ici 110\$.

Conclusion :
L'achat de cette option permet à la société A de se protéger contre l'augmentation du prix du produit X au-delà de 110\$. La chambre de compensation prend le risque de fluctuation du prix, mais elle reçoit une prime pour ce service.

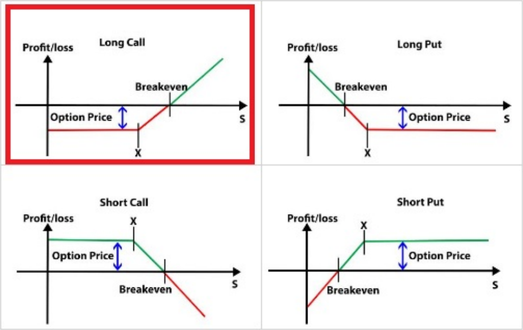


Figure: Payoff des options

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace filtré, $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, et le prix d'une action A :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right)$$

La valeur de l'option à l'instant t est donc donnée par : $C_t = \mathbb{E}\left[\exp\left(-r(T-t)\right) f(S_T) \mid \mathcal{F}_t\right]$ où $f(x) = \max(x - K, 0)$.
Nous avons $C(t, S_t)$, qui représente le prix de notre option à l'instant t, donné par :

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

avec $N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$, $\theta = T - t$, et $d_1 = \frac{\log(S_t/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}$, $\quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta}$.

Remarque:
Le prix d'une option de vente s'obtient avec la formule put-call qui est :

$$C(t, S_t) + Ke^{-r(T-t)} = P(t, S_t) + S_t$$

Voici donc le prix d'une option put :

$$P(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

TP 1 : Simulation des Trajectoires d'un Mouvement Brownien (MB)

Objectifs :

- Comprendre et utiliser le lemme de Box-Muller pour générer des variables gaussiennes centrées réduites.
- Simuler des trajectoires d'un mouvement brownien en utilisant les propriétés des incréments indépendants et distribués normalement.
- Comparer les méthodes de génération de variables gaussiennes centrées réduites.

Algorithme de Box-Muller et Simulation d'un Mouvement Brownien

Algorithme de Box-Muller

Si U_1 et U_2 sont des variables uniformes indépendantes sur $[0, 1]$, alors

$$Z_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2)$$

et

$$Z_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2)$$

sont des variables gaussiennes indépendantes et centrées réduites.

Pour simuler un mouvement brownien, nous utilisons les propriétés des incréments indépendants et distribués normalement. On a B_t comme suit :

$$B_t = B_{\Delta t} + (B_{2\Delta t} - B_{\Delta t}) + (B_{3\Delta t} - B_{2\Delta t}) + \ldots + (B_t - B_{t-\Delta t})$$

Cela signifie que B_t est la somme des incréments aléatoires $(B_{k\Delta t} - B_{(k-1)\Delta t})$, où chaque incrément suit une distribution normale $\mathcal{N}(0, \Delta t)$.

Questions du TP

Questions :

- Utilisez la fonction de la bibliothèque `numpy` : `np.random.normal(0, 1, n)` pour générer n échantillons de variables gaussiennes centrées réduites.
- Implémentez la méthode de Box-Muller en Python.
- Comparez les résultats obtenus avec la méthode de NumPy et celle de Box-Muller.
- Utilisez les propriétés des incréments pour générer M trajectoires d'un mouvement brownien.

Comparaison des Échantillons et Trajectoires du Mouvement Brownien

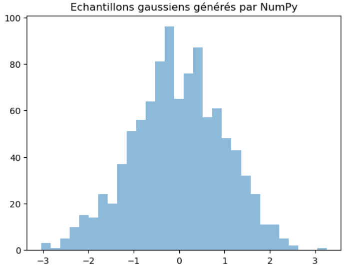


Figure: Histogramme des échantillons gaussiens générés par NumPy

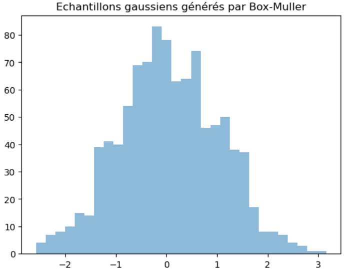


Figure: Histogramme des échantillons gaussiens générés par Box-Muller

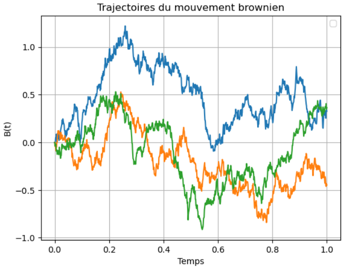


Figure: Trajectoires du mouvement brownien

TP 2 : Simulation des Prix Futurs d'une Action

Objectifs :

- Importer et traiter les données historiques d'une action.
- Calculer la volatilité et le rendement à partir des données.
- Utiliser le modèle de Black-Scholes pour simuler les prix futurs de l'action.
- Comparer les prix théoriques et réels de l'action.

Pour simuler les prix futurs de l'action S_t en utilisant le modèle de Black-Scholes, nous pouvons discrétiser l'équation continue en utilisant la méthode suivante :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \cdot \epsilon_t \right)$$

où :

- Δt est le pas de temps .
- ϵ_t est un terme aléatoire tiré d'une distribution normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Questions :

1. **Importer les données d'une action** :
   - Allez sur le site Yahoo Finance.
   - Sélectionnez `Markets` → `Stocks Most Active` → `Historical Data`.
   - Téléchargez l'historique d'une action donnée sur une période de 1 an.
2. **Calculer la volatilité et le rendement** :
   - À partir des prix de clôture (`Close`), calculez les rendements journaliers.
   - Déterminez la volatilité annualisée.
3. **Déterminer S_0 et utiliser le modèle discrétisé** :
   - S_0 est le prix de clôture initial (le premier jour de la période).
   - Utilisez le modèle discrétisé pour déterminer les prix théoriques sur toute la période de 1 an.
4. **Tracer les prix théoriques et réels** :
   - Tracez les prix de clôture réels (`Close`) et les prix théoriques calculés avec le modèle de Black-Scholes discrétisé.
   - Comparez les deux courbes.

Comment télécharger les données à partir de Yahoo Finance

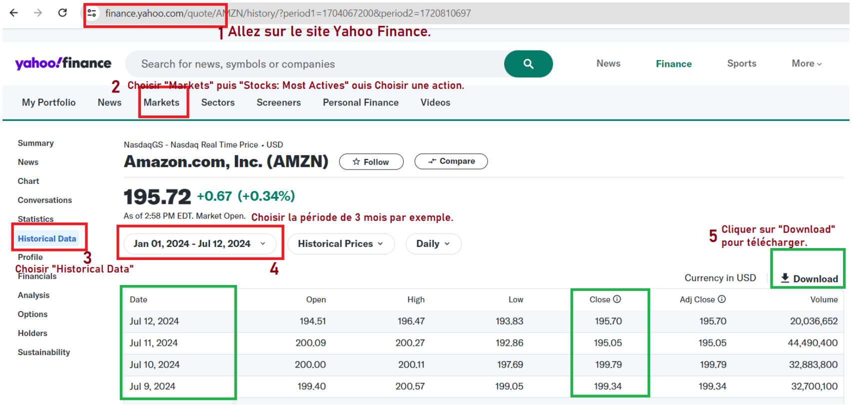


Figure: Comment télécharger les données à partir de Yahoo Finance

Comparaison des Prix Réels et Théoriques de l'Action Amazon

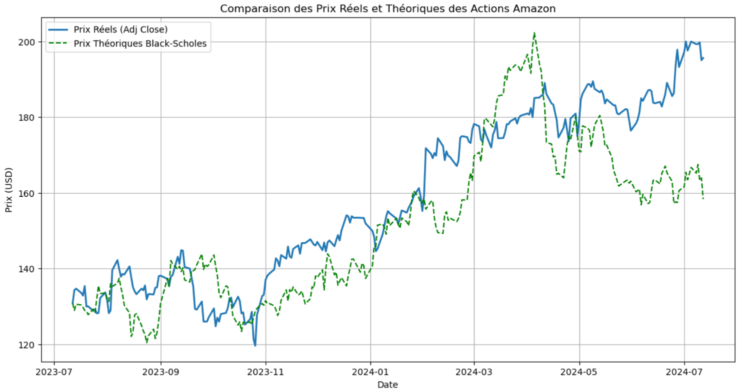


Figure: Comparaison des Prix Réels et Théoriques de l'Action Amazon

Limites de la Modélisation Stochastique

Le calcul stochastique est crucial pour la modélisation financière, mais il ne suffit pas à capturer toute la complexité des marchés réels. En effet, les modèles stochastiques ne peuvent intégrer certains facteurs importants tels que :

- Les événements politiques
- Les erreurs techniques ou défaillances des systèmes.
- Les comportements psychologiques des investisseurs.

Ces éléments peuvent fortement influencer les prix des actifs, rendant les modèles purement stochastiques incomplets pour une modélisation précise des marchés financiers.

Le 19 juillet 2024, une panne informatique mondiale

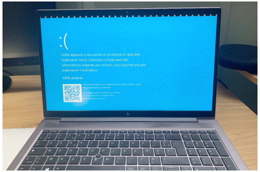


Figure: Panne informatique

Figure: Impact de la panne

Le 19 juillet 2024, une panne informatique mondiale

Figure: Impact de la panne

Références

- Damien Lamberton, Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*.
- Sabin Lessard. *Processus stochastiques: Cours et exercices corrigés*.
- Yassine EL QALLI. *Notes de cours Calcul stochastique*.
- Monique Jeanblanc. *Cours et TD de Calcul stochastique*.

Introduction aux Calculs Stochastiques Appliqués à la Finance

IBNJAA Said

Université Mohammed VI Polytechnique, Benguerir

July 22, 2024