Mathématiques

méthodes

Mouvement brownien et calcul d'Itô

avec exercices corrigés

Léonard Gallardo

Ingéniorat - Doctorat - Master

Hermann

Mouvement brownien et calcul d'itô

cours et exercices corrigés

Mouvement brownien et calcul d'Itô

cours et exercices corrigés

Léonard Gallardo

Hermann éditeurs

www.edition-hermann.fr

Isbn 978 27056 6797 9

Remerciements

Mes amis Emmanuel Lesigne et Marc Yor m'ont été d'un grand soutien dans l'élaboration finale de ce texte. Le premier qui a eu la patience d'éplucher et de corriger le premier polycopié de ce cours à peine sorti de l'état d'ébauche et le second qui par ses nombreuses remarques et suggestions m'a permis d'améliorer, d'éclairer et de simplifier certains énoncés et démonstrations du manuscrit initial. Je les remercie de tout coeur pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Table des matières

Introduction

Ce texte reprend avec quelques compléments les notes d'un cours semestriel sur le mouvement brownien et le calcul d'Itô que j'ai donné en Master 2 entre 2004 et 2007 à l'Université de Tours. Il s'adresse à un large public souhaitant une initiation à l'outil moderne du calcul stochastique.

Les méthodes du calcul stochastique, maintenant utilisées avec succès dans des domaines aussi variés que la physique, l'économie, les assurances, la finance, etc..., prennent une place de plus en plus importante dans les cursus de mathématiques appliquées. On peut aborder leur étude, après une bonne initiation au calcul des probabilités, avec certains objectifs qui peuvent induire différentes stratégies pédagogiques :

Par exemple, dans la perspective de fournir des outils mathématiques à l'ingénieur, on peut présenter les résultats essentiels de manière relativement heuristique, en privilégiant l'acquisition de certaines techniques et en admettant les démonstrations les plus délicates. Une difficulté apparaît si on veut aller plus loin et étudier plus en détail les fondements mathématiques de ces méthodes. En effet le domaine du calcul stochastique a connu un tel développement dans les trente-cinq dernières années, que l'ensemble des résultats considérés maintenant comme classiques est considérable. J'ai pu constater combien ceci impressionne, déroute et fascine à la fois les débutants. Ainsi, pour aller assez vite vers les idées essentielles tout en essayant de ne pas trop sacrifier le contenu mathématique, j'ai choisi de ne présenter que ce qui m'est apparu comme vraiment incontournable pour une première approche du sujet.

D'abord, j'ai supposé connus les résultats essentiels d'un cours de probabilités basé sur la théorie de la mesure et incluant la notion d'espérance conditionnelle et celle de martingale à temps discret. Toutes ces matières sont maintenant enseignées dans les Master de mathématiques appliquées et dans certaines écoles d'ingénieur (voir par exemple les livres de M. Mazliak & al [39], de J.Y. Ouvrard [45] et de D. Revuz [50]). Néanmoins le lecteur qui n'aurait pas eu un accès à toutes ces notions, trouvera dans le premier chapitre une présentation rapide mais suffisante de ce qu'il convient de connaître sur l'espérance conditionnelle et les martingales.

A partir de là, j'ai privilégié l'étude des aspects les plus classiques du mouvement brownien et de l'intégrale d'Itô en détaillant leur construction. Mais je n'ai pas parlé d'intégrale par rapport à une martingale (continue) ce qui pourtant n'aurait pas été beaucoup plus difficile mais aurait nécessité d'introduire la notion délicate de crochet de deux martingales. De même je n'ai considéré que des processus d'Itô unidimensionnels et je n'ai présenté que les premiers aspects de la théorie des équations différentielles stochastiques et de leurs applications parmi lesquelles par exemple la fameuse méthode de Black-Scholes et Merton de calcul du prix d'une option européenne.

Il me semble donc important de préciser que ce cours n'est qu'une introduction aux idées de l'analyse stochastique. Il ne s'adresse pas aux lecteurs déjà familiarisés avec le sujet et qui ont plutôt intérêt à l'approfondir dans les grands traités de calcul stochastique mentionnés dans la bibliographie ([48], [51], [52]).

Afin de permettre un accès rapide aux sujets traités, chaque chapitre débute par un paragraphe introductif qui en présente les objectifs et le plan. Le lecteur peut ainsi décider de l'étudier en détail ou d'aller voir plus loin. Par exemple, voici comment aller rapidement aux équations différentielles stochastiques :

Après la définition de la notion de processus stochastique, on passe au chapitre 2 à l'étude du mouvement brownien comme processus à accroissements indépendants puis au moment où on développe l'aspect gaussien, on revient au chapitre 1 pour des précisions. On va alors directement au chapitre 4 où on peut, dans un premier temps, se contenter de l'aspect hilbertien de l'intégrale stochastique. En admettant les propriétés de martingale de l'intégrale stochastique, on peut alors aussitôt étudier la notion de différentielle stochastique, la formule d'Itô et le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS).

Pour approfondir et comprendre la nature de la solution d'une EDS, il faudra alors revenir au chapitre 3 pour étudier les processus de Markov et au chapitre 1 pour les martingales.

Par contre, si on veut privilégier l'aspect markovien du mouvement brownien, on peut commencer par les chapitres 2 et 3 et le cours peut être alors considéré comme une introduction aux processus de Markov à temps continu. De même le chapitre 1 peut-être vu comme un mini-cours sur les processus stochastiques incluant l'exemple des processus gaussiens et être intégré dans un cours de Master 1. Dans ce cas, certaines notions délicates comme la mesurabilité progressive des processus et qui ne servent qu'à partir du chapitre 4, peuvent être ignorées. Dans les mêmes conditions, le chapitre 2 peut aussi être recommandé aux candidats à l'Agrégation.

De manière générale, l'importance du chapitre 1 que nous avons souhaité court pour aller rapidement au coeur du sujet, ne doit pas être surestimée par le lecteur. On peut plutôt le considérer comme une référence car il n'est pas indispensable d'en maîtriser tous les aspects pour aborder valablement le sujet central du mouvement brownien et des équations différentielles stochastiques.

Dans tous les cas, je pense que des allers et retours sont indispensables pour assimiler complètement le cours. Ainsi les points techniquement les plus difficiles sont développés dans les annexes et on peut les éviter en première approche. Je suis personnellement partisan d'une telle méthode de travail «par approximations successives» car elle est voisine de la démarche du chercheur à laquelle la formation de Master 2 est justement censée initier.

Enfin, pour permettre au lecteur de tester sa compréhension du cours mais surtout pour affermir ses connaissances, tous les chapitres se terminent par des exercices de difficulté variée dont les plus difficiles sont marqués d'une étoile. Toutes les solutions sont détaillées à la fin du volume.

Chapitre 1

Introduction aux processus stochastiques

Un processus physique ou économique est traditionnellement décrit par une fonction $X : t \mapsto X(t)$ où la variable t qui représente le temps peut être discrète ou continue et $X(t)$ est la valeur numérique[1] mesurant l'état du processus à l'instant t. Si la valeur de X dépend aussi du "hasard", on dit que le processus est *stochastique*.

Depuis Kolmogorov, on modélise le hasard par un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Il est donc naturel d'essayer de décrire le processus stochastique X par une fonction de deux variables $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$, où la nouvelle variable ω représente le "hasard" et appartient à Ω. Mais la fonction X définie sur l'espace produit $T \times \Omega$ où T est l'ensemble des temps, doit vérifier certaines conditions. Par exemple il est raisonnable de supposer que pour tout instant t, l'application partielle $X_t : \omega \mapsto X(t, \omega)$ (état aléatoire du processus à l'instant fixé t) est une variable aléatoire[2] définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On peut donc voir le processus X comme la famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in T}$. Mais cette condition de mesurabilité individuelle de chaque X_t est insuffisante. En effet quand on observe un processus dans la pratique, on constate que pour chaque instant t fixé, seuls certains événements $A \in \mathcal{F}$ peuvent survenir dans l'intervalle de temps $[0, t]$. Ces événements

[1] ou plus généralement à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

[2] *i.e.* une application mesurable relativement aux tribus $\mathcal{F}$ sur Ω et à la tribu de Borel définie sur $\mathbb{R}^d$.

constituent une sous-tribu $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{F}$ appelée parfois *l'information disponible à l'instant* t. La famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est croissante et s'appelle une filtration. Comme X_t décrit l'état du processus à l'instant t, il convient donc de supposer que cette variable aléatoire est $\mathcal{F}_t$-mesurable. On est donc conduit à modéliser un processus stochastique comme on va le voir ci-dessous dans la définition 1.1.1. On notera à ce propos une dissymétrie entre le temps et le hasard : la variable ω est "globale" alors que t est une variable "locale". Tout se passe comme si le hasard ω se révélait petit à petit à travers les valeurs de $X_t(\omega)$ lorsque le temps t s'écoule, si bien qu'il faudrait attendre d'avoir la totalité des valeurs $(X_t(\omega))_{t\in T}$ pour connaître la valeur du processus.

On peut aussi voir le processus X "globalement" comme un élément aléatoire de l'ensemble $\mathbb{R}^T$ des applications de T dans $\mathbb{R}$ (resp. d'un sous-ensemble $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}^T$) "à la manière d'une variable aléatoire" $\omega \mapsto X(\omega)$ mais où $X(\omega) \in \mathbb{R}^T$ (resp. $X(\omega) \in \mathfrak{F}$) est la fonction $(X_t(\omega))_{t\in T}$; on parle alors de *fonction aléatoire*. Il convient alors de munir $\mathbb{R}^T$ (resp. $\mathfrak{F}$) d'une tribu convenable $\mathcal{B}$ pour préciser la condition de mesurabilité vérifiée par X. La loi de X est alors la mesure de probabilité μ_X sur $\mathcal{B}$ telle que $\mu_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$ si $B \in \mathcal{B}$. Ces deux façons de considérer un processus sont complémentaires comme nous le verrons dans la suite.

Le début du chapitre est consacré aux définitions générales, à un important critère de continuité des trajectoires d'un processus stochastique et au "grand théorème" de Kolmogorov. Ce résultat qui assure l'existence d'un processus associé à une famille cohérente de mesures de probabilité, est appliqué directement à l'exemple des processus gaussiens. On introduit ensuite la notion de temps d'arrêt, fondamentale dans l'étude des martingales dont nous présentons, sans démonstration, les principaux résultats.

Enfin, l'annexe qu'on peut ignorer en première lecture, contient des détails sur les tribus généralement associées aux processus stochastiques ainsi que des compléments sur les lois et l'indépendance des processus, auxquels il sera parfois utile de se reporter pour maîtriser les détails techniques de certaines démonstrations.

1.1 Généralités

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *: On appelle processus stochastique (resp. processus stochastique adapté), la donnée*

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t\in T}, \mathbb{P}), \tag{1.1}$$

$$(resp. \quad X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, (X_t)_{t\in T}, \mathbb{P})\ ), \tag{1.2}$$

où

i) Ω est un ensemble (univers des possibles).
ii) $\mathcal{F}$ est une tribu[3] *de parties de Ω.*
iii) $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
iv) T est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$ (qui représente le temps).
v) $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ une filtration indexée par T i.e. une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$.
vi) $(X_t)_{t\in T}$ une famille de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$, à valeurs dans un espace topologique E muni de sa tribu des boréliens $\mathcal{B}(E)$ (resp. qu'on suppose de plus adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ i.e. telle que pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$- mesurable).

Remarques :

1) Un processus stochastique modélise l'état d'un système aléatoire au cours du temps. L'espace E dans lequel les variables aléatoires X_t prennent leurs valeurs, est appelé *l'espace des états* du processus. La variable aléatoire X_t représente l'état du processus à l'instant t.

2) Dans la plupart des cas, l'espace des états $(E, \mathcal{B}(E))$ est l'espace numérique $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ de dimension d et l'ensemble des temps T est un intervalle $[0, a]$ ou $[0, +\infty[$. Dans ce cas le processus X est dit *à temps continu*. Lorsque T est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers, le processus est *à temps discret*.

3) La filtration d'un processus est un objet important qui contient l'essentiel des propriétés probabilistes du processus comme nous le verrons

[3] ou *sigma*-algèbre.

bientôt. L'exemple le plus simple est *la filtration naturelle* de la famille $(X_t)_{t\in T}$, où, pour tout $t \in T$, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \le t)$ est la tribu engendrée par les variables aléatoires X_s pour $s \le t$. On notera que la filtration naturelle d'une famille $(X_t)_{t\in T}$ de variables aléatoires, est la plus petite de toutes les filtrations par rapport auxquelles la famille $(X_t)_{t\in T}$ est adaptée. En effet une telle filtration contient toujours la filtration naturelle de $(X_t)_{t\in T}$ comme sous-filtration. Un processus X sans précision de filtration, est donc toujours adapté à sa filtration naturelle.

4) L'application $t \mapsto X_t(\omega)$ de T dans E est la trajectoire du processus correspondant à l'éventualité $\omega \in \Omega$. C'est un élément de E^T (ensemble des applications de T dans E). Soit $\Phi : \Omega \to E^T$, la correspondance $\omega \mapsto \{t \mapsto X_t(\omega)\}$. L'ensemble $\Phi(\Omega) \subset E^T$ est appelé *espace des trajectoires* du processus X. Souvent l'espace de base Ω est un sous-ensemble de E^T et on n'a pas besoin de cette application Φ. Dans ce cas, pour $t \in T$, la variable aléatoire X_t est l'application "t-ième" coordonnée i.e. $X_t(\omega) = \omega(t)$ (évaluation à l'instant t de la trajectoire ω).

5) On désignera souvent le processus X par $X = (X_t)_{t\in T}$ quand le reste de la donnée est fixé ou n'a pas besoin d'être précisé.

1.1.2 Lois de dimension finie d'un processus

Soit X un processus stochastique et $I = \{t_1, \dots, t_n\}$, une partie finie de T. Par commodité, on supposera que $t_1 < \cdots < t_n$ et on notera X_I le vecteur aléatoire de E^I donné par

$$X_I = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}).$$

On rappelle que *la loi du vecteur aléatoire* X_I est la mesure de probabilité μ_I sur l'espace de Borel[4] $(E^I, \mathcal{B}_{E^I})$, image de $\mathbb{P}$ par l'application $X_I : \Omega \to E^I$ i.e.

$$\mu_I(A) = \mathbb{P}(X_I \in A) \quad (\forall A \in \mathcal{B}_{E^I}). \tag{1.3}$$

En particulier si $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ est un "rectangle" avec $A_i \in \mathcal{B}_E$ $(i = 1, \dots, n)$, on a

$$\mu_I(A) = \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n).$$

[4] où $\mathcal{B}_{E^I}$ est la tribu de Borel de l'espace produit E^I i.e. $\mathcal{B}_{E^I} = \mathcal{B}_E \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_E$ (n fois).

Définition 1.1.2 : *On appelle lois de dimension finie du processus X, la famille $(\mu_I)_{I \in \mathcal{P}_f(T)}$ de toutes les lois de probabilité des vecteurs aléatoires X_I lorsque I décrit l'ensemble $\mathcal{P}_f(T)$ des parties finies de T.*

Remarque : Dans la pratique, on ne peut observer un processus que sur un nombre fini d'instants. On comprend donc facilement que les lois de dimension finie sont accessibles par exemple par des méthodes statistiques. Du point de vue mathématique, l'importance de ces lois sera précisée par la suite mais on peut déjà donner le résultat suivant :

Proposition 1.1.1 : *Soient $X_1 = (\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P}_1)$ et $X_2 = (\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P}_2)$ deux processus ne différant que par les probabilités. Si X_1 et X_2 ont les mêmes lois de dimension finie, alors $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ sur la tribu $\sigma(X_t, t \in T)$ engendrée par toutes les X_t, $t \in T$.*

Démonstration : Par définition $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ coïncident sur les événements de la forme $[X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n]$ où $t_i \in T$, $n \in \mathbb{N}$ et $A_i \in \mathcal{B}_E$. Ces événements forment un π-système $\mathcal{C}$ (i.e. une classe $\mathcal{C}$ d'ensembles, stable par intersections finies). D'après le théorème de prolongement de Carathéodory, $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ coïncident sur la σ-algèbre $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$, d'où le résultat. $\square$

1.1.3 Équivalence de deux processus stochastiques

On définit ici trois relations d'équivalence sur l'ensemble des processus stochastiques.
Soient $X = (\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ et $X' = (\Omega', \mathcal{F}', (X'_t)_{t \in T}, \mathbb{P}')$ deux processus stochastiques associés au même espace des temps T et ayant même espace des états $(E, \mathcal{B}_E)$.

Définition 1.1.3 :

i) On dit que les processus X et X' sont équivalents s'ils ont les mêmes lois de dimension finie.

ii) On dit que les processus X et X' sont une modification (ou une version) l'un de l'autre si les espaces sur lesquels ils sont définis sont les mêmes i.e. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ et si pour tout $t \in T$, $X_t = X'_t$ $\mathbb{P}$-presque sûrement. En particulier, ils sont alors équivalents.

iii) Les processus X et X' sont dits indiscernables si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ et si $\mathbb{P}(\forall t \in T, X_t = X'_t) = 1$. Dans ce cas ils sont aussi une modification l'un de l'autre.

Remarque : 1) On notera que la différence entre ii) et iii) tient à la place du $\mathbb{P}$-presque sûrement. Pour deux processus version l'un de l'autre, pour tout $t \in T$, il existe un sous-ensemble $\Omega_t \in \mathcal{F}$ dépendant de t, de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega_t$, on ait $X_t(\omega) = X'_t(\omega)$, alors que pour deux processus indiscernables, il existe un sous-ensemble $\widetilde{\Omega} \in \mathcal{F}$ indépendant de t et de probabilité 1 tel que pour tout $t \in T$ et tout $\omega \in \widetilde{\Omega}$, $X_t(\omega) = X'_t(\omega)$.

2) Deux processus qui sont une version l'un de l'autre ne sont pas forcément indiscernables. En effet soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ (la tribu de Borel de $[0,1]$), $\mathbb{P} = \lambda$ (la mesure de Lebesgue) et $T = [0,1]$. Considérons les processus définis par

$$X_t(\omega) = \mathbf{1}_{\{\omega\}}(t)$$

et

$$X'_t(\omega) = 0.$$

Les processus X et X' sont une modification l'un de l'autre mais ils ne sont pas indiscernables car $\{\omega \in \Omega, \forall t \in T, X_t(\omega) = X'_t(\omega)\} = \emptyset$.

1.1.4 Continuité et mesurabilité des processus

On suppose dans cette partie que le temps est continu i.e. $T = [0, a]$ ou $T = [0, \infty[$.

Définition 1.1.4 : *Un processus X est dit continu (resp. $\mathbb{P}$-p.s. continu) si pour tout $\omega \in \Omega$ (resp. pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$), la fonction $t \to X_t(\omega)$ de T dans E est continue.*

De manière analogue, on définit la notion de processus continu à droite (c.à d. en abrégé), resp. continu à gauche (c.à g.), resp. borné, resp. limité à droite (i.e. qui a une limite à droite en chaque point $t \in T$), resp. limité à gauche, etc... Une propriété très utile liée à la continuité est la suivante.

Proposition 1.1.2 : *Si deux processus continus X et Y sont une version l'un de l'autre, alors ils sont indiscernables.*

Démonstration : Pour tout $t \in [0,a]$, on a $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ donc

$$\mathbb{P}(\cap_{t\in[0,a]\cap\mathbb{Q}}[X_t = Y_t]) = 1.$$

Mais comme les trajectoires de X et Y sont continues, $\cap_{t\in[0,a]\cap\mathbb{Q}}[X_t = Y_t] = \cap_{t\in[0,a]}[X_t = Y_t]$, d'où le résultat. □

Définition 1.1.5 *:*
i) Le processus X est dit mesurable si l'application $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ est mesurable de $(T \times \Omega, \mathcal{B}_T \otimes \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{B}_E)$.
ii) On dit que X est progressivement mesurable par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ si pour tout $s \in T$, l'application $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ est mesurable de $([0,s] \times \Omega, \mathcal{B}_{[0,s]} \otimes \mathcal{F}_s)$ dans $(E, \mathcal{B}_E)$.

Remarque : Un processus progressivement mesurable est évidemment mesurable. D'autre part la condition de mesurabilité progressive implique l'adaptation du processus à la fitration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ mais un processus adapté n'est pas forcément progressivement mesurable comme le montre l'exemple suivant :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé (quelconque), $T = [0,1]$ et $f : T \to \mathbb{R}$ une fonction (déterministe) qu'on suppose non-borélienne[5]. Pour tout $t \in T$, posons

$$\forall\omega \in \Omega,\ X_t(\omega) = f(t).$$

i.e. la variable aléatoire X_t est constante en ω et vaut $f(t)$. Prenons pour filtration, la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ de la famille $(X_t)_{t\in T}$. Clairement, pour tout $t \in T$, $\mathcal{F}_t = \{\Omega, \emptyset\}$ est la tribu triviale et on vérifie aussitôt que le processus $(X_t)_{t\in T}$ n'est pas progressivement mesurable.

Nous verrons dans les prochains chapitres l'importance de la condition de mesurabilité progressive dès qu'on étudie les temps d'arrêt d'un processus. Mais en réalité, cette propriété est très généralement satisfaite par les processus que nous étudierons dans ce cours comme le montre le résultat suivant :

---

[5]De telles fonctions existent. Par exemple $f = \mathbf{1}_A$, où A est un ensemble non borélien (pour en exhiber, on a besoin de l'axiome du choix voir par exemple le livre de B. Gelbaum et J. Olmsted [23].)

Théorème 1.1.1 *: Si un processus adapté X est continu à droite*[6]*, il est progressivement mesurable.*

Démonstration : Fixons $s \in T$ et pour chaque entier $n > 0$, posons

$$X_u^{(n)} = \begin{cases} X_{(k+1)2^{-n}s} & si \quad u \in [k2^{-n}s, (k+1)2^{-n}s[\\ X_s & si \quad u = s \end{cases}$$

avec k entier entre 0 et 2^{n-1}.
Pour chaque $u \leq s$, la continuité à droite du processus X implique

$$\lim_{n \to \infty} X_u^{(n)} = X_u,$$

sur Ω. D'autre part, l'application $X^{(n)} : (u, \omega) \mapsto X_u^{(n)}(\omega)$ est $\mathcal{B}_{[0,s]} \otimes \mathcal{F}_s$ mesurable car pour tout $A \in \mathcal{B}_E$, on a

$$\begin{aligned} \{(u, \omega) \in [0, s] \times \Omega;\ X_u^{(n)}(\omega) \in A\} \\ = \bigcup_{k<2^n} \left[\frac{ks}{2^n}, \frac{(k+1)s}{2^n}\right[\times \left[X_{(k+1)2^{-n}s} \in A\right] \cup \\ \left(\{s\} \times \left[X_s \in A\}\right]\right) \in \mathcal{B}_{[0,s]} \otimes \mathcal{F}_s. \end{aligned}$$

L'application $(u, \omega) \mapsto X_u(\omega)$ est donc $\mathcal{B}_{[0,s]} \otimes \mathcal{F}_s$ mesurable comme limite simple des applications mesurables $(u, \omega) \mapsto X_u^{(n)}(\omega)$. □

On notera que dans le cas où T est discret, tout processus est progressivement mesurable.

1.1.5 Continuité des trajectoires, critère de Kolmogorov

Dans le cas où le processus X est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et que ses accroissements sur tout intervalle de temps $[s, t]$ avec $0 \leq s < t$, ont des moments contrôlés par une puissance de $t - s$, Kolmogorov a obtenu en 1937 un résultat remarquable sur la continuité des trajectoires de X :

[6]en abrégé processus **càd**

Théorème 1.1.2 : *Soient $T = [0, a]$ ou $[0, +\infty[$ et $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On suppose qu'il existe des constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $C > 0$ telles que*

$$(1.4) \qquad \forall s, t \in T, \quad \mathbb{E}\big(|X_t - X_s|^\beta\big) \leq C|t - s|^{1+\alpha}.$$

Alors il existe une version $\widetilde{X}$ de X, à trajectoires continues. De plus, sur tout compact $[0, a] \subset T$, les trajectoires de $\widetilde{X}$ sont höldériennes d'exposant γ pour tout $\gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ (i.e. pour tout $\omega \in \Omega$, il existe une constante $K_\omega > 0$ telle que pour tous $s, t \in [0, a]$, $|\widetilde{X}_t(\omega) - \widetilde{X}_s(\omega)| \leq K_\omega |t - s|^\gamma$).

Démonstration : Il suffit de prouver le résultat pour $T = [0, a]$ ($a > 0$). Considérons alors l'ensemble

$$D = \left\{ \frac{ka}{2^n} \; ; \; n \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^n \right\},$$

qui est clairement dense dans $[0, a]$. L'idée de la démonstration consiste à montrer qu'en dehors d'un ensemble négligeable de trajectoires ω, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est uniformément continue sur D. Elle se prolonge donc à $[0, a]$ en une application uniformément continue $t \mapsto \widetilde{X}_t$. On montrera enfin dans la dernière partie de la preuve que pour tout $t \in [0, a]$, on a $X_t = \widetilde{X}_t$ $\mathbb{P}$-p.s.

étape 1 : Fixons $\gamma \in]0, \frac{\alpha}{\beta}[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $t_k = \frac{ka}{2^n}$ ($k = 0, 1, \ldots, 2^n$) et considérons les événements

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{2^n - 1} \left[|X_{t_{k+1}} - X_{t_k}| > 2^{-n\gamma} \right].$$

D'après l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{k=0}^{2^n - 1} 2^{n\beta\gamma} \mathbb{E}(|X_{t_{k+1}} - X_{t_k}|^\beta)$$

et l'hypothèse (1.4) implique aussitôt que $\mathbb{P}(A_n) \leq C a^{1+\alpha} 2^{-n(\alpha - \beta\gamma)}$ donc la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ converge et d'après le lemme de Borel-Cantelli, l'événement $N = [A_n, \text{ infiniment souvent}]$[7] est de probabilité nulle ; autrement

[7] $[A_n, \text{ infiniment souvent}] := \limsup A_n = \cap_{n \geq 0} \cup_{k \geq n} A_k$.

dit $\mathbb{P}(N^c) = 1$. Considérons alors $\omega \in N^c$ (fixé). Il existe un entier $n(\omega)$ tel que pour tout $n \geq n(\omega)$, on ait $\omega \notin A_n$.
Soit alors $m > n(\omega)$ un entier qu'on considère comme fixé pour le moment et soit $t \in D$. Il existe un unique entier k tel que $t \in [\frac{ka}{2^m}, \frac{(k+1)a}{2^m}[$. Clairement, si $t > \frac{ka}{2^m}$, alors $t = a(\frac{k}{2^m} + \sum_{l=m+1}^{r} d_l 2^{-l})$ où $r > m$ est un entier et $d_l = 0$ ou 1. On a alors

$$|X_t(\omega) - X_{ka2^{-m}}(\omega)| = \sum_{j=m}^{r-1} |X_{u_j}(\omega) - X_{u_{j+1}}(\omega)|$$

où $u_j = a(\frac{k}{2^m} + \sum_{l=m+1}^{j} d_l 2^{-l})$. Or ou bien $u_j = u_{j+1}$ et alors $|X_{u_j}(\omega) - X_{u_{j+1}}(\omega)| = 0$ ou bien $u_{j+1} - u_j = a2^{-(j+1)}$ et dans ce cas $|X_{u_j}(\omega) - X_{u_{j+1}}(\omega)| \leq 2^{-(j+1)\gamma}$ puisque $\omega \notin A_{j+1}$. Ainsi :

$$\text{(1.5)} \quad |X_t(\omega) - X_{ka2^{-m}}(\omega)| \leq 2^{-(m+1)\gamma} + 2^{-(m+2)\gamma} + \cdots + 2^{-r\gamma} \leq \frac{2^{-\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} 2^{-m\gamma}.$$

Considérons maintenant $t, t' \in D$ tels que $|t - t'| \leq a2^{-m}$. En positionnant t et t' par rapport aux nombres $\frac{ak}{2^m}$ on voit qu'il y a deux cas possibles :

i) ou bien il existe $k \geq 1$ tel que $t \in [\frac{(k-1)a}{2^m}, \frac{ka}{2^m}[$ et $t' \in [\frac{ka}{2^m}, \frac{(k+1)a}{2^m}[$ et alors :

$$\begin{aligned}|X_t(\omega) - X_{t'}(\omega)| \leq |X_t(\omega) - X_{(k-1)a2^{-m}}(\omega)| + |X_{t'}(\omega) - X_{ka2^{-m}}(\omega)| \\ + |X_{(k-1)a2^{-m}}(\omega) - X_{ka2^{-m}}(\omega)|.\end{aligned}$$

Donc $|X_t(\omega) - X_{t'}(\omega)| \leq \left(1 + \frac{2^{-\gamma+1}}{1 - 2^{-\gamma}}\right) 2^{-m\gamma}$ d'après (1.5).

ii) ou bien il existe $k \geq 1$ tel que $t, t' \in [\frac{(k-1)a}{2^m}, \frac{ka}{2^m}[$ et dans ce cas, toujours d'après (1.5),

$$\begin{aligned}|X_t(\omega) - X_{t'}(\omega)| &\leq |X_t(\omega) - X_{ka2^{-m}}(\omega)| + |X_{t'}(\omega) - X_{ka2^{-m}}(\omega)| \\ &\leq \frac{2^{-\gamma+1}}{1 - 2^{-\gamma}} 2^{-m\gamma}.\end{aligned}$$

Dans tous les cas il existe une constante $c = 1 + \frac{2^{-\gamma+1}}{1-2^{-\gamma}}$ telle que pour tous $t, t' \in D$ avec $|t - t'| \leq a2^{-m}$, on ait

$$|X_t(\omega) - X_{t'}(\omega)| \leq c2^{-m\gamma}, \tag{1.6}$$

ce qui prouve l'uniforme continuité de $t \mapsto X_t(\omega)$. En fait on a plus comme on va le voir ci-dessous :

étape 2 (caractère höldérien de la trajectoire) : Si $t, t' \in D$ sont tels que $|t-t'| < a2^{-n(\omega)}$, il existe $m > n(\omega)$ tel que $a2^{-(m+1)} \leq |t-t'| \leq a2^{-m}$ et d'après (1.6), on a

$$|X_t(\omega) - X_{t'}(\omega)| \leq c2^{\gamma}|t - t'|^{\gamma}.$$

Si maintenant t et t' sont quelconques dans D, il suffit de les positionner par rapport aux nombres de la forme $ka2^{-n(\omega)}$ et d'additionner les accroissements de $X_t(\omega)$ sur les intervalles obtenus (qui sont en nombre inférieur à $2^{n(\omega)}$), pour obtenir

$$|X_t(\omega) - X_{t'}(\omega)| \leq c2^{\gamma+n(\omega)}|t - t'|^{\gamma}, \tag{1.7}$$

ce qui montre que la trajectoire est höldérienne d'ordre γ avec une constante de Hölder $K_\omega = c2^{\gamma+n(\omega)}$.
étape 3 : Pour tout $\omega \in N^c$ on note $t \mapsto \widetilde{X}_t(\omega)$ le prolongement (höldérien) à $[0, a]$ de $X_t(\omega)$ ($t \in D$). Il reste à montrer que pour tout $t \in [0, a]$, on a $\widetilde{X}_t = X_t$ $\mathbb{P}$-p.s.
Notons que par définition, on a $\widetilde{X}_t = X_t$ $\mathbb{P}$-p.s. si $t \in D$. Soit alors $t \in [0, a]$ et $(t_n) \in D$ une suite convergente vers t. Par l'hypothèse de Kolmogorov (1.4), on a $\lim X_{t_n} = X_t$ en probabilité donc on a aussi $\lim X_{t_n} = X_t$ $\mathbb{P}$-p.s. éventuellement pour une suite extraite. Mais on a aussi $\lim \widetilde{X}_{t_n} = \widetilde{X}_t$ $\mathbb{P}$-p.s. car les trajectoires de $\widetilde{X}$ sont continues. Par unicité de la limite, on a donc $\widetilde{X}_t = X_t$ $\mathbb{P}$-p.s. □

1.1.6 Construction d'un processus stochastique

Si I et J sont des parties finies de l'espace des temps T telles que $J \subset I$, on note $\Phi_{I,J} : E^I \to E^J$ la projection canonique définie par

$$\Phi_{I,J}((x_i)_{i\in I}) = (x_j)_{j\in J} \tag{1.8}$$

(par exemple si $I = \{1,2,3\}$ et $J = \{2,3\}$, $\Phi_{I,J}(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$). D'autre part, supposons donnée une famille de probabilités $(\mu_I)_{I \in P_f(T)}$ où I varie dans l'ensemble $P_f(T)$ des parties finies de T et où μ_I est une probabilité sur l'espace mesuré $(E^I, \mathcal{B}_{E^I})$. Pour tout $J \subset I$, on note $\Phi_{I,J}(\mu_I)$ la mesure image de μ_I sur E^J par la projection canonique. En termes probabilistes, on dit que $\Phi_{I,J}(\mu_I)$ est *la loi marginale* de μ_I sur E^J.

Définition 1.1.6 : *On dit que la famille de probabilités $(\mu_I)_{I \in P_f(T)}$ est cohérente si pour tous $J \subset I$ de $P_f(T)$, on a*

$$\Phi_{I,J}(\mu_I) = \mu_J\,. \tag{1.9}$$

L'exemple typique de famille cohérente est l'ensemble des lois de dimension finie d'un processus $X = (X_t)_{t \in T}$. En effet si $I = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ et μ_I est la loi du vecteur aléatoire $X_I = (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$, la condition (1.9) est trivialement vérifiée puisqu'elle exprime que μ_J est la loi marginale du vecteur X_I sur E^J. Réciproquement Kolmogorov a montré en 1933 que toute famille cohérente est de ce type. Ce résultat remarquable a fondé les bases de la théorie mathématique du calcul des probabilités.

Théorème 1.1.3 *(Grand théorème de Kolmogorov) : Soit E un espace topologique polonais*[8] *et $(\mu_I)_{I \in P_f(T)}$ une famille cohérente de probabilités sur les puissances cartésiennes de E.*
Alors il existe un processus $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ avec E pour espace des états et dont les μ_I sont les lois de dimension finie. Plus précisément, il est construit de la façon suivante :
i) $\Omega = E^T$,
ii) $X_t : \omega \mapsto X_t(\omega) = \omega(t)$ (l'application t-ième coordonnée),
iii) $\mathcal{F}_t$ la filtration naturelle de la famille $(X_t)_{t \in T}$,
iv) $\mathcal{F} = \mathcal{B}_E^{\otimes T}$ la tribu engendrée par toutes les X_t, $t \in T$.
De plus sur cet espace, la probabilité $\mathbb{P}$ est unique (voir la proposition 1.1.1). Le processus X ainsi construit s'appelle le processus canonique associé à la famille cohérente $(\mu_I)_{I \in P_f(T)}$.

Remarque : Lorsque $T = \mathbb{N}^*$, l'espace des trajectoires $\Omega = E^T$ est souvent noté E^∞, c'est l'espace des suites infinies $x = (x_1, x_2, \ldots) =$

[8] i.e. métrique, séparable et complet.

$(x_n)_{n\geq 1}$ et on note aussi $\mathcal{F}^\infty := \mathcal{B}_E^{\otimes T}$. On peut dans ce cas affaiblir les conditions de cohérence générales de (1.9). Pour cela désignons par $E^k := E^{[1,k]}$ ($k \in T$) et par $\Phi_k : E^{k+1} \to E^k$, la projection canonique

$$\Phi_k(x_1, \ldots, x_{k+1}) = (x_1, \ldots x_k).$$

Considérons alors pour tout $n \geq 1$, une mesure de probabilité μ_n sur $(E^n, \mathcal{B}_E^{\otimes n})$. On dit alors dans ce cas que la suite (μ_n) est cohérente (ou consistante) si pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Phi_n(\mu_{n+1}) = \mu_n. \tag{1.10}$$

Ceci équivaut à dire que pour tous $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}_E$,

$$\mu_{n+1}(A_1 \times, \ldots \times A_n \times E) = \mu_n(A_1 \times, \ldots \times A_n).$$

Le théorème de Kolmogorov prend alors la forme suivante :

Théorème 1.1.4 : *Soit (μ_n) une suite cohérente de probabilités au sens de (1.10). Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(E^\infty, \mathcal{F}^\infty)$ telle que pour tout $n \geq 1$, on ait :*

$$\pi_n(\mathbb{P}) = \mu_n, \tag{1.11}$$

où $\pi_n : E^\infty \to E^n$ est la projection canonique $\pi_n((x_k)_{k\geq 1}) = (x_1, \ldots, x_n)$. Ceci équivaut à dire que pour tout $A \in \mathcal{B}_E^{\otimes n}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\{(x_k)_{k\geq 1}; (x_1, \ldots, x_n) \in A\}\right) = \mu_n(A). \tag{1.12}$$

Pour le processus canonique $X = (E^\infty, \mathcal{F}^\infty, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, (X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \mathbb{P})$ où les X_n sont les applications coordonnées[9]*, μ_n est précisément la loi du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$.*

Remarque générale sur le théorème de Kolmogorov : La démonstration que nous donnons en annexe utilise le théorème d'extension des mesures de Carathéodory. Dans un premier temps on peut admettre ce résultat. D'autre part l'espace $(E^T, \mathcal{B}_E^{\otimes T})$ est en général beaucoup trop gros, la mesure $\mathbb{P}$

[9]définies ici pour tout $\omega = (x_k)_{k\geq 1} \in E^\infty$ par $X_n(\omega) = x_n$.

étant souvent portée par une partie "infime" de cet espace. C'est le cas par exemple pour le mouvement brownien qu'il suffit de considérer sur l'espace $C([0,+\infty[,\mathbb{R})$ des trajectoires continues comme nous le verrons au chapitre suivant.

Exemples d'applications du grand théorème de Kolmogorov

Dans les énoncés d'exercices l'une des phrases que l'on rencontre le plus couramment est la suivante : "Considérons une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ sur E ...". Une telle suite a bien une réalité mathématique grâce au théorème de Kolmogorov :

Proposition 1.1.3 *: Soit μ une probabilité sur $(E,\mathcal{B}_E)$. Il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace canonique $E^\infty = E^{\mathbb{N}^*}$ muni de la tribu produit $\mathcal{F}^\infty := \mathcal{B}_E^{\mathbb{N}^*}$ telle que le processus canonique associé : $X = (E^\infty, \mathcal{F}^\infty, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, (X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \mathbb{P})$ soit une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E et de même loi μ.*

Démonstration : Sur $(E^n, \mathcal{B}_E^{\otimes n})$ considérons μ_n la n-ième puissance tensorielle de la probabilité μ i.e. la mesure $\mu_n = \mu\otimes\cdots\otimes\mu$ (n fois). Alors il est clair que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est une suite cohérente (au sens de 1.10) de mesures de probabilité sur les puissances cartésiennes de E. D'après le théorème 1.1.4, le processus canonique est tel que la loi de $(X_1,\ldots,X_n)$ est la n-ième puissance tensorielle de μ, ce qui signifie que les X_i sont i.i.d. et de même loi μ. □

Avant de donner une autre application, on a besoin de la définition suivante

Définition 1.1.7 *: Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus à valeurs dans $E = \mathbb{R}^d$. On dit que*
1) X est à accroissements indépendants si pour toute suite finie d'instants $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, les variables aléatoires $X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.
2) X est à accroissements stationnaires si pour tous $s < t \in T$, la loi de la variable aléatoire $X_t - X_s$ ne dépend que de $t - s$.

Proposition 1.1.4 *: Soit $\lambda > 0$. Il existe un processus $N = (N_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, à accroissements indépendants et stationnaires tel que $N_0 = 0$ et pour tous $s < t$, $N_t - N_s$ est de loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$. Ce processus est appelé processus de Poisson de paramètre λ.*

Démonstration : Notons $\mathcal{P}(\alpha)$ la mesure de Poisson sur $\mathbb{R}$ de paramètre α. Pour toute partie finie $I = \{t_1, \ldots, t_n\}$ de $T = [0, +\infty[$, écrivons $N_{t_i} = N_i$ pour simplifier les notations. La loi du vecteur aléatoire $(N_1, N_2 - N_1, \ldots, N_n - N_{n-1})$ devrait être égale à $\mathcal{P}(\lambda t_1) \otimes \mathcal{P}(\lambda(t_2 - t_1)) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(\lambda(t_n - t_{n-1}))$. La loi μ_I du vecteur $(N_1, \ldots, N_n)$ aurait alors une fonction caractéristique

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu}_I(u_1, \ldots, u_n) &= \mathbb{E}(e^{iu_1 N_1} e^{iu_2 N_2} \cdots e^{iu_2 N_n}) \\
&= \mathbb{E}(e^{iu_1 N_1} e^{iu_2(N_2 - N_1 + N_1)} \cdots e^{iu_n(N_n - N_{n-1} + \cdots + N_2 - N_1 + N_1)}) \\
&= \mathbb{E}(e^{i(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) N_1} e^{i(u_2 + \cdots + u_n)(N_2 - N_1)} \cdots e^{iu_n(N_n - N_{n-1})}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\lambda(t_i - t_{i-1})(e^{i(u_i + \cdots + u_n)} - 1)\right), \qquad (1.13)
\end{aligned}
$$

(où $t_0 = 0$). Si $J \subset I$ et en utilisant les notations de (1.9), la fonction caractéristique de la loi marginale $\Phi_{I,J}(\mu_I)$ de μ_I sur $\mathbb{R}^J$ est la fonction obtenue à partir de l'expression de $\widehat{\mu_I}(u_1, \ldots, u_n)$ en remplaçant par 0 les variables u_i telles que $t_i \notin J$. L'expression obtenue coïncide avec $\hat{\mu}_J$ comme on peut le vérifier facilement de la manière suivante :
Si k est le plus grand entier tel que $u_k = 0$ dans (1.13), les termes correspondants à $i = k$ et $i = k + 1$ dans le produit se simplifient et donnent

$$\exp\left(\lambda(t_{k+1} - t_{k-1})(e^{i(u_{k+1} + \cdots + u_n)} - 1)\right).$$

On procède alors par récurrence descendante sur tous les entiers k tels que $u_k = 0$ pour constater que l'expression restante est égale à $\hat{\mu}_J$. La famille des lois μ_I est donc cohérente. Il suffit alors d'appliquer le théorème 1.1.3 pour voir que le processus canonique vérifie bien les conditions de la proposition. □

Remarque : Bien entendu le processus de Poisson peut-être construit de façon bien plus naturelle (voir par exemple [50] p.267 ou [51] p.471). Mis à part son aspect processus ponctuel (qui ne rentre pas dans le cadre de ce cours), signalons que la construction classique du processus de Poisson $N = (N_t)_{t \geq 0}$ est la suivante :

Soit $(\tau_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ et pour tout $n \geq 1$ soit $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$. Pour tout $t \geq 0$, on pose $N_0 = 0$ et si $t > 0$, $N_t = \max\{n;\ T_n \leq t\}$.

Autrement dit N part de zéro, reste égal à zéro jusqu'à l'instant T_1 où il passe à la valeur 1 et garde cette valeur jusqu'à l'instant T_2 où il passe à la valeur 2 et ainsi de suite. Les T_n sont les instants de saut de N. Les trajectoires de N sont donc croissantes, constantes par morceaux avec des sauts d'amplitude 1. Il est assez facile de montrer dans ces conditions que N_t est de loi $\mathcal{P}(\lambda t)$ mais la preuve du fait que N est à accroissements indépendants est assez délicate (voir [50] p.268).

1.2 Les processus gaussiens

1.2.1 Lois gaussiennes, rappels

Tous les résultats de ce paragraphe sont des rappels (voir [45] p. 241 ou [50] p. 85). Les vecteurs aléatoires que nous considérons sont supposés définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que nous ne mentionnerons plus dans la suite.
Soit $\xi = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire centré[10] de $\mathbb{R}^n$, appartenant à $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$[11] et soit $\Gamma = (\Gamma_{ij})$ $(1 \leq i, j \leq n)$ sa matrice des covariances[12].

Définition 1.2.1 *: Le vecteur ξ est gaussien si pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire réelle $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ est de loi normale.*

La loi d'un vecteur gaussien centré ne dépend que de sa matrice des covariances :

Proposition 1.2.1 *: Le vecteur aléatoire centré ξ de matrice des covariances Γ est gaussien si et seulement si sa fonction caractéristique $\phi_\xi(t) = \mathbb{E}(e^{i<\xi|t>})$ est de la forme :*

$$\phi_\xi(t) = e^{-\frac{1}{2}<t|\Gamma t>}. \quad (t \in \mathbb{R}^n), \tag{1.14}$$

où $< .|. >$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ et Γt est le vecteur transformé de t par la matrice Γ. On dit alors que ξ suit la loi $\mathcal{N}_n(0, \Gamma)$ (l'indice n indiquant que c'est une loi de Gauss dans $\mathbb{R}^n$).

---

[10] i.e. les X_i sont intégrables et $\mathbb{E}(X_1) = \cdots = \mathbb{E}(X_n) = 0$.
[11] i.e. pour tout $i = 1, \dots, n$, $\mathbb{E}(X_i^2) < +\infty$.
[12] i.e. $\Gamma_{ij} = \mathbb{E}(X_i X_j)$.

Plus généralement, un vecteur aléatoire Z de $\mathbb{R}^n$ suit la loi de Gauss $\mathcal{N}_n(m, \Gamma)$ de moyenne $m = (m_1, \ldots, m_n)$ et de matrice des covariances Γ, si le vecteur $Z - m$ suit la loi $\mathcal{N}_n(0, \Gamma)$. Sa fonction caractéristique est alors égale à :

$$\phi_Z(t) = e^{i<m|t>} e^{-\frac{1}{2}<t|\Gamma t>} \quad (t \in \mathbb{R}^n). \tag{1.15}$$

Une conséquence immédiate est que la somme $Z + Z'$ de deux vecteurs gaussiens indépendants de lois respectives $\mathcal{N}_n(m, \Gamma)$ et $\mathcal{N}_n(m', \Gamma')$ est un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(m + m', \Gamma + \Gamma')$.

Propriétés : Voici un résumé des résultats les plus utiles sur les lois de Gauss dans $\mathbb{R}^n$:

1) La matrice Γ des covariances d'un vecteur aléatoire (quelconque) est une matrice symétrique de type positif i.e. :

$$\begin{cases} i) \quad \Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq n). \\ ii) \quad < t|\Gamma t >= \sum_{1 \leq i,j \leq n} t_i t_j \Gamma_{ij} \geq 0 \quad (\forall t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

2) Etant donné une matrice Γ $n \times n$ symétrique et de type positif et un vecteur $m \in \mathbb{R}^n$, il existe une loi de Gauss (resp. un vecteur gaussien de loi) $\mathcal{N}_n(m, \Gamma)$.

3) Lorsque la matrice Γ est définie positive (i.e. $\forall t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $< t|\Gamma t >\neq 0$), elle est alors inversible et la loi gaussienne $\mathcal{N}_n(m, \Gamma)$ admet une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{det\Gamma}} \exp\left(-\frac{1}{2} < x - m|\Gamma^{-1}(x - m) >\right).$$

Lorsque Γ n'est pas inversible, la loi gaussienne $\mathcal{N}_n(m, \Gamma)$ est dite *dégénérée*, elle n'a pas de densité[13] mais sa fonction caractéristique est toujours de la forme (1.15). Ainsi dans des problèmes où interviennent des lois gaussiennes il est toujours préférable de faire intervenir les fonctions caractéristiques dans les calculs plutôt que les densités même lorsqu'elles existent.

4) Les composantes Z_i d'un vecteur gaussien $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ sont indépendantes si et seulement si elles sont non-corrélées, c'est à dire si sa matrice des covariances est diagonale.

[13] En fait une loi de Gauss dégénérée est toujours concentrée sur un sous-espace affine (strict) de $\mathbb{R}^n$, et sur ce sous-espace elle admet une densité de "type gaussien" par rapport à la mesure de Lebesgue de ce sous-espace.

5) Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire (identifiée à sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$). Le transformé $L(Z)$ d'un vecteur gaussien Z de loi $\mathcal{N}_n(m,\Gamma)$, est gaussien de loi $\mathcal{N}_p(L(m), L.\Gamma.{}^tL)$ (voir [12] p. 130). En particulier si $\Gamma = \sigma^2 I_n$ (i.e. si les composantes de Z sont indépendantes et de loi normale de même variance σ^2) et si L est une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^n$, alors $L(Z)$ a aussi la même matrice des covariances $\Gamma = \sigma^2 I_n$.

6) Toute limite en loi d'une suite de vecteurs gaussiens de $\mathbb{R}^n$ est une loi gaussienne. Plus précisément, pour que Z_k de loi $\mathcal{N}_n(m_k, \Gamma_k)$ converge en loi si $k \to +\infty$, il faut et il suffit qu'il existe un vecteur $m \in \mathbb{R}^n$ et une matrice Γ de type positif, tels que $m_k \to m$ et $\Gamma_k \to \Gamma$. La loi limite est $\mathcal{N}_n(m,\Gamma)$ (on convient que si $\Gamma = 0, \mathcal{N}_n(m, 0)$ est la mesure de Dirac δ_m). En particulier ce résultat s'applique à une suite de vecteurs gaussiens qui converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puisque la convergence L^2 implique la convergence en loi.

1.2.2 Processus gaussiens

Définition 1.2.2 : *Un processus aléatoire à valeurs dans $E = \mathbb{R}^d$ est dit gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes.*

Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus gaussien réel (i.e. $E = \mathbb{R}$)[14]. Pour tous $s, t \in T$, on pose

$$m(t) = \mathbb{E}(X_t) \tag{1.16}$$

$$\Gamma(s,t) = \mathbb{E}\left((X_t - m(t))(X_s - m(s))\right) \tag{1.17}$$

Définition 1.2.3 : *1) La fonction $m : T \to \mathbb{R}$ définie en (1.16) s'appelle la moyenne du processus X.*
2) La fonction $\Gamma : T \times T \to \mathbb{R}$ définie en (1.17) est appelée la covariance du processus gaussien X.

Remarque fondamentale : Pour toute partie finie $I = \{t_1, \ldots, t_n\}$ de l'espace des temps T, la matrice

$$\Gamma_I = \left(\Gamma(t_i, t_j)\right)_{1\le i,j\le n}$$

[14] l'espace des temps T est quelconque : discret ou continu.

est de type positif puisque c'est la matrice des covariances du vecteur gaussien $X_I = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.

Les deux fonctions m et Γ caractérisent entièrement la loi d'un processus gaussien comme le montre le résultat suivant :

Théorème 1.2.1 : *Soient $m : T \to \mathbb{R}$ et $\Gamma : T \times T \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que pour toute partie finie $I = \{t_1, \dots, t_n\}$ de T, la matrice $\Gamma_I = \big(\Gamma(t_i, t_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$ soit de type positif. Alors il existe un processus gaussien réel $X = (X_t)_{t \in T}$, unique à équivalence près, tel que pour toute partie finie $I = \{t_1, \dots, t_n\} \subset T$, le vecteur aléatoire $X_I = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ soit de loi $\mathcal{N}_n(m_I, \Gamma_I)$ avec $m_I = (m(t_1), \dots, m(t_n))$.*

Démonstration : Il suffit d'après le théorème de Kolmogorov de montrer que la famille des lois $\mu_I = \mathcal{N}_n(m_I, \Gamma_I)$ est cohérente. On va procéder comme dans la proposition 1.1.4. Soit $I = \{t_1, \dots, t_n\}$ une partie finie de T, soit $J \subset I$ et soient μ_I et μ_J les lois sur $\mathbb{R}^I$ et $\mathbb{R}^J$ correspondantes. Pour simplifier l'écriture, on considérera que $I = \{1, \dots, n\}$. La fonction caractéristique $\widehat{\mu_I}$ de la mesure μ_I est alors de la forme

$$\widehat{\mu_I}(u) = e^{i<m_I|u>} e^{-\frac{1}{2}<u|\Gamma_I u>}$$

où $u = (u_i)_{i \in I} = (u_1, \dots, u_n)$, $m_I = (m(i)_{i \in I}$ et $\Gamma_I = \big(\Gamma(l,k)\big)_{1 \leq l,k \leq n}$. Mais la fonction caractéristique de la loi marginale $\Phi_{I,J}(\mu_I)$ de μ_I sur $\mathbb{R}^J$ est la fonction φ donnée sur $\mathbb{R}^J$ par

$$\varphi((u_j)_{j \in J}) = \widehat{\mu_I}(\tilde{u}),$$

où $\tilde{u}_i = u_i$ si $i \in J$ et $\tilde{u}_i = 0$ si $i \notin J$. Ceci donne aussitôt :

$$\begin{aligned} \widehat{\mu_I}(\tilde{u}) &= e^{i<m_I|\tilde{u}>} e^{-\frac{1}{2}<\tilde{u}|\Gamma_I \tilde{u}>} \\ &= e^{i<m_I|v>} e^{-\frac{1}{2}<v|\Gamma_J v>}, \end{aligned}$$

où $v = (u_j)_{j \in J}$, $m_J = (m(j)_{j \in J}$ et $\Gamma_J = \big(\Gamma(l,k)\big)_{l,k \in J \times J}$, ce qui prouve aussitôt que $\varphi = \widehat{\mu_J}$. □

Exemples : 1) Soit $T = \mathbb{N}$ et $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables réelles i.i.d. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Il est immédiat de constater que X est un processus gaussien de moyenne $m(t) \equiv m$ et de fonction covariance :

$$\Gamma(s,t) = \begin{cases} 0 & si \quad s \neq t \\ \sigma^2 & si \quad s = t. \end{cases}$$

2) (processus totalisateur de variables normales i.i.d.) : On suppose $T = \mathbb{N}$ et soit $(\xi)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On considère le processus $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par $X_0 = 0$, $X_1 = \xi_1$ et

$$X_n = X_{n-1} + \xi_n \quad (n \geq 1).$$

Le processus X est gaussien réel. En effet pour tout entier $n \geq 1$, le vecteur aléatoire $X_{[1,n]} = (X_1, \ldots, X_n)$ est gaussien puisque toute combinaison linéaire $u_1 X_1 + \cdots + u_n X_n$ est égale à $(u_1 + \cdots + u_n)\xi_1 + (u_2 + \cdots + u_n)\xi_2 + \cdots + u_n \xi_n$ qui est une variable aléatoire normale comme combinaison linéaire de variables normales indépendantes. D'ailleurs la fonction caractéristique φ du vecteur $X_{[1,n]}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \mathbb{E}\left(e^{i<u|X_{[1,n]}>}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{i(u_1+\cdots+u_n)\xi_1} e^{i(u_2+\cdots+u_n)\xi_2} e^{iu_n\xi_n}\right) \\
&= e^{-\frac{1}{2}(u_1+\cdots+u_n)^2} e^{-\frac{1}{2}(u_2+\cdots+u_n)^2} \ldots e^{-\frac{1}{2}(u_n)^2} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=j}^{n} u_i)^2}.
\end{aligned}$$

On constate donc que $\varphi(u) = \exp(-\frac{1}{2}||Bu||^2)$ où $||.||$ est la norme euclidienne et Bu le transformé du vecteur u par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \\ . & . & . & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix}.$$

En écrivant $||Bu||^2 =< Bu|Bu >=< u|^t BBu >$, on voit donc que φ est la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}_n(0,\Gamma)$ avec

$$\Gamma =^t BB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & & 3 & 3 \\ . & . & . & & & . \\ 1 & 2 & 3 & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Cela montre que le processus X est gaussien centré (i.e. $m(t) \equiv 0$) de fonction de covariance donnée par

$$\Gamma(i,j) = \min(i,j) \quad (i,j \in \mathbb{N}).$$

Le mouvement brownien est une généralisation en temps continu de ce processus gaussien. Son étude fait l'objet du prochain chapitre.

3) (processus gaussiens élémentaires) : Soit $f : T \to \mathbb{R}$ une fonction déterministe[15] et V une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Pour tout $t \in T$, posons

$$X_t(\omega) = f(t)V(\omega). \tag{1.18}$$

Alors $X = (X_t)_{t \in T}$ est un processus gaussien. Plus généralement toute *superposition* de processus du type (1.18), est aussi gaussien. Plus précisément, si pour $1 \leq i \leq N$, $f_i : T \to \mathbb{R}$ sont des fonctions déterministes et V_i sont des variables aléatoires indépendantes de loi respectives $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, alors le processus

$$X_t(\omega) = \sum_{i=1}^{N} f_i(t)V_i(\omega). \tag{1.19}$$

est gaussien. En effet ses lois de dimension finie sont clairement gaussiennes, sa fonction moyenne $m(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i f_i(t)$ et sa fonction covariance est égale à

$$\Gamma(s,t) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 f_i(s) f_i(t) \quad (s,t \in T).$$

Dans la littérature les processus de la forme (1.19) sont appelés *processus gaussiens élémentaires*. Le problème de la décomposition d'un processus gaussien en somme d'un nombre fini ou plus généralement infini de processus gaussiens élémentaires est une question qui relève de la théorie spectrale.

[15] l'espace des temps T étant discret ou continu.

1.3 Notion de temps d'arrêt d'un processus

Définition 1.3.1 *: Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ une filtration et $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t\in T}\mathcal{F}_t)$ sa tribu terminale . Une variable aléatoire $\tau : \Omega \longrightarrow T \cup \{+\infty\}$ est appelée $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt si pour tout $t \in T$, on a $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$. On pose alors*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty \ ; \ \forall t \in T, A \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t\}.$$

On vérifie immédiatement que $\mathcal{F}_\tau$ est une tribu. C'est la tribu des événements antérieurs au temps τ .

Remarque : Si $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est la filtration naturelle d'un processus canonique défini sur $\Omega = E^T$, si τ est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt, le fait que $\omega \in [\tau \leq t]$ ne dépend que des coordonnées $\omega(s)$ pour $s \leq t$.

Proposition 1.3.1 *: Soient σ et τ deux $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt. Alors*
i) τ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_\tau$ mesurable.
ii) $\min(\sigma,\tau)$, $\max(\sigma,\tau)$ et $\sigma+\tau$ sont des $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt.
iii) si $\sigma \leq \tau$, on a $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

Démonstration : exercice.

Proposition 1.3.2 *: 1) Si X est un processus mesurable et σ une variable aléatoire[16] à valeurs dans T, alors $X_\sigma : \omega \longrightarrow X_{\sigma(\omega)}(\omega)$ est une variable aléatoire.*
2) Si τ est un temps d'arrêt pour la filtration d'un processus X progressivement mesurable, alors X_τ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

Démonstration : 1) X_σ est mesurable comme composée des applications mesurables $\omega \longrightarrow (\omega, \sigma(\omega))$ et $(\omega, t) \longrightarrow X_t(\omega)$.
2) Posons $\Omega_t = [\tau \leq t]$. Dans ce cas, X_τ est mesurable de $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ dans $(E, \mathcal{B}_E)$ comme composée des applications mesurables $\omega \longrightarrow (\omega, \tau(\omega))$ de $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ dans $(\Omega_t \times [0,t], \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,t]})$ et de $(\omega, t) \longrightarrow X_t(\omega)$ de $(\Omega_t \times [0,t], \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,t]})$ dans $(E, \mathcal{B}_E)$. Ainsi pour $A \in \mathcal{B}_E$, on a

$$[X_\tau \in A] \cap [\tau \leq t] = \{\omega \in \Omega_t \ ; \ X_\tau(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}_t,$$

et donc $[X_\tau \in A] \in \mathcal{F}_\tau$. □

[16] définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$.

Remarque : La notion de temps d'arrêt ne pose guère de problèmes pour les processus à temps discret. Par contre la notion est plus délicate pour le temps continu comme on va le voir ci-dessous.

Définition 1.3.2 *: Soit X un processus et A un sous-ensemble mesurable de l'espace des états E. Les variables aléatoires définies sur Ω par*

$$D_A(\omega) = \inf\{t \geq 0 \; ; \; X_t(\omega) \in A\}, \tag{1.20}$$

$$T_A(\omega) = \inf\{t > 0 \; ; \; X_t(\omega) \in A\}, \tag{1.21}$$

(avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$) sont respectivement le temps d'entrée dans A et le temps de retour dans A.

Remarque : En temps discret (i.e. $T = \mathbb{N}$), D_A et T_A sont des temps d'arrêt pour la filtration naturelle du processus X et ceci pour tout $A \in \mathcal{B}_E$. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[D_A = n] = \bigcap_{k=0}^{n-1}[X_k \in A^c] \cap [X_n \in A] \in \mathcal{F}_n$. Un argument analogue marche aussi pour T_A.

Proposition 1.3.3 *: On suppose $T = [0, a]$ ou $[0, +\infty[$ et que X est un processus continu à valeurs dans un espace métrique E. Si A est fermé alors D_A est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle de X.*

Démonstration : Notons d la métrique de E. Pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $s \longrightarrow d(X_s(\omega), A)$ est continue comme composée des applications continues $s \longrightarrow X_s(\omega)$ et $x \longrightarrow d(x, A)$. Ainsi pour tout $t \in T$, on a

$$\begin{aligned}
[D_A \leq t] &= \bigcup_{s \leq t}[X_s \in A] = \bigcup_{s \leq t}[d(X_s, A) = 0] \\
&= \left[\inf_{s \leq t} d(X_s, A) = 0\right] = \left[\inf_{s \leq t; s \in \mathbb{Q}} d(X_s, A) = 0\right] \\
&= \bigcap_{n > 0}\left(\bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t]}\left[d(X_s, A) \leq \frac{1}{n}\right]\right) \in \mathcal{F}_t \, . \qquad \square
\end{aligned}$$

Remarque : Parfois des variables aléatoires qui sont des temps d'arrêt en temps discret ne le sont en temps continu qu'avec des conditions restrictives et pour des filtrations plus grosses que la filtration naturelle du processus. Par exemple :

Proposition 1.3.4 : *On suppose $T = [0, a]$ ou $[0, +\infty[$ et que X est un processus adapté continu à droite et à valeurs dans un espace topologique E. Alors si A est ouvert, T_A est un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}_{t+} = \cap_{\epsilon>0}\mathcal{F}_{t+\epsilon}$. Ainsi T_A n'est un temps d'arrêt usuel pour tout ouvert A que si la filtration du processus X est continue à droite i.e. $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in T$.*

Démonstration : Montrons que pour tout $t \in T$, on a seulement $[T_A < t] \in \mathcal{F}_t$. Ceci montrera que $[T_A \leq t] = \cap_{\epsilon>0}[T_A \leq t + \epsilon] \in \mathcal{F}_{t+}$. On a en effet

$$[T_A < t] = \cup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t[}[X_s \in A],$$

car si $X_s(\omega) \in A$, la continuité à droite des trajectoires et le fait que A est ouvert impliquent qu'il existe $\epsilon > 0$, tel que $X_u(\omega) \in A$ pour tout $u \in [s, s + \epsilon[$. D'où le résultat. □

1.4 Martingales

La théorie des martingales occupe une place centrale dans l'étude des processus stochastiques. Mais pour que cette introduction au mouvement brownien reste de taille raisonnable, nous insisterons uniquement sur les aspects essentiels de la théorie dans le cas du temps continu. Les prérequis sur la notion d'espérance conditionnelle et les martingales à temps discret sont présentés sans démonstration mais de manière assez détaillée afin de faciliter la référence à certains résultats dont nous aurons besoin par la suite.

1.4.1 Rappels sur l'espérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{D}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. L'espérance conditionnelle est définie pour deux types de variables aléatoires : d'une part les variables aléatoires non-négatives (sans condition d'intégrabilité) et d'autre part les variables aléatoires intégrables.

A. Généralités : L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire Y positive (resp. dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) relativement à $\mathcal{D}$ est l'unique variable aléatoire[17] $\mathcal{D}$ mesurable positive (resp. dans L^1), notée $\mathbb{E}(Y|\mathcal{D})$, telle que

[17] "Unique variable aléatoire" est à prendre ici au sens de l'unicité modulo l'égalité $\mathbb{P}$-p.s.

pour tout $D \in \mathcal{D}$, on a

$$\int_D \mathbb{E}(Y|\mathcal{D})d\mathbb{P} = \int_D Y d\mathbb{P}. \tag{1.22}$$

Cette relation (1.22)s'appelle la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle. On notera que si $Y \geq 0$, $\mathbb{E}(Y|\mathcal{D}) \in L^1$ si et seulement si $Y \in L^1$.

Si $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors $\mathbb{E}(Y|\mathcal{D}) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est la projection orthogonale de Y sur le sous-espace fermé $L^2(\Omega, \mathcal{D}, \mathbb{P})$ de l'espace de Hilbert $L^2((\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de son produit scalaire usuel[18]. En particulier, on a $||\mathbb{E}(Y|\mathcal{D})||_2 \leq ||Y||_2$.

Remarque : Le cadre géométrique de l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nous permet de bien comprendre la nature de l'espérance conditionnelle : $\mathbb{E}(Y|\mathcal{D})$ est la variable aléatoire $\mathcal{D}$-mesurable la plus proche de Y étant donné l'information disponible $\mathcal{D}$. Même si Y n'est pas dans L^2, il peut être utile pour l'intuition de voir ainsi l'espérance conditionnelle.

B. Espérance conditionnelle par rapport à un vecteur aléatoire : Dans le cas où $\mathcal{D} = \sigma(X)$ est la tribu engendrée par un vecteur aléatoire X de $\mathbb{R}^d$, on note

$$\mathbb{E}(Y|\sigma(X)) = \mathbb{E}(Y|X) \tag{1.23}$$

et on l'appelle l'espérance conditionnelle de Y sachant X. Dans ce cas il existe toujours une fonction borélienne $\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathbb{E}(Y|X) = \phi(X) \quad p.s. \tag{1.24}$$

Cette fonction ϕ est souvent notée $\phi(x) = \mathbb{E}(Y|X = x)$ $(x \in \mathbb{R}^d)$.

C. Probabilité conditionnelle : Pour un événement $A \in \mathcal{F}$, la probabilité conditionnelle de A sachant $\mathcal{D}$ est la variable aléatoire

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{D}) = E(\mathbf{1}_A|\mathcal{D}). \tag{1.25}$$

---

[18] i.e. pour $Y, Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $< Y|Z >= \mathbb{E}(YZ)$ et $||Y||_2 = (\mathbb{E}(Y^2))^{1/2}$. En toute rigueur, $L^2(\Omega, \mathcal{D}, \mathbb{P})$ espace de classes d'équivalence de variables aléatoires pour l'égalité $\mathbb{P}$-p.s. relativement aux ensembles de mesure nulle de $\mathcal{D}$ n'est un vrai sous-espace de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que lorsque la tribu $\mathcal{D}$ est complète. Néanmoins, dans tous les cas $L^2(\Omega, \mathcal{D}, \mathbb{P})$ s'injecte isométriquement dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on convient d'identifier $L^2(\Omega, \mathcal{D}, \mathbb{P})$ à son image isométrique dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

D. Propriétés de l'espérance conditionnelle : Si Y, Y_1, Y_2 sont des variables aléatoires avec un moment d'ordre un et si a et b sont des constantes réelles, on a

1) $\mathbb{E}(aY_1 + bY_2|\mathcal{D}) = a\mathbb{E}(Y_1|\mathcal{D}) + b\mathbb{E}(Y_2|\mathcal{D})$ (linéarité).

2) $||\mathbb{E}(Y|\mathcal{D})||_1 \leq ||Y||_1$ (contraction).

3) $Y_1 \leq Y_2$ p.s.$\Rightarrow \mathbb{E}(Y_1|\mathcal{D}) \leq \mathbb{E}(Y_2|\mathcal{D})$ (croissance).

En particulier $Y \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}) \geq 0$ (positivité).

4) $\sigma(Y)$ et $\mathcal{D}$ indépendantes $\Rightarrow \mathbb{E}(Y|\mathcal{D}) = \mathbb{E}(Y)$ p.s.

5) Pour toute sous tribu $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$, $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y|\mathcal{D})|\mathcal{E}\right) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{E})$ p.s.(théorème des trois perpendiculaires).

6) Si $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires positives, on a $\mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} Y_n|\mathcal{D}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{D})$ (lemme de Fatou).

E. Calcul de l'espérance conditionnelle : Dans le cas général on utilise la propriété caractéristique (1.22) pour calculer la valeur de $\mathbb{E}(Y|\mathcal{D})$ mais il faut souvent avoir une idée a priori de cette valeur et on utilise (1.22) comme une vérification. Pour calculer des espérances conditionnelles de la forme (1.23), il convient de déterminer la fonction ϕ de (1.24). Pour cela, on cherche ϕ telle que pour tout borélien B de $\mathbb{R}^d$,

$$\int_B \phi(x)\mu_X(dx) = \int_{[X\in B]} Y d\mathbb{P},$$

où μ_X désigne la loi de X. Par exemple si X est une variable (ou vecteur) aléatoire discrète et x une valeur prise par X (avec probabilité non nulle), alors

$$\phi(x) = \int_\Omega Y d\mathbb{P}_{[X=x]},$$

où $\mathbb{P}_{[X=x]}$ est la probabilité conditionnelle usuelle relativement à l'événement $[X = x]$.

Dans le cas où le couple (X, Y) a une densité de probabilité $f(x, y)$, on a

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} y \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy,$$

où $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy$ est la densité de probabilité[19] de X.

[19]On notera que $f_X(x) \neq 0$ pour μ_X-presque tout x.

1.4.2 Rappels sur les martingales à temps discret

Pour les démonstrations de tous les résultats de ce paragraphe, on peut consulter le livre de J. Neveu [44].

A. Définitions :

Définition 1.4.1 : *Un processus adapté* $M = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, (M_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ *à valeurs réelles est une martingale (resp. sur-martingale, resp. sous-martingale) si pour tout* $t \in T$, $M_t \in L^1(\mathbb{P})$ *et si pour tout* $s < t$ *:*

$$\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \quad p.s.$$

(resp. $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$ *p.s, resp.* $M_s \leq \mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s)$ *p.s.).*

Remarque : Si M est une martingale (resp. une sur-martingale, resp. une sous-martingale), la fonction $t \mapsto \mathbb{E}(M_t)$ est constante (resp. décroissante, resp. croissante).

Remarque : Un processus adapté X peut être une martingale relativement à une autre filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$ par rapport à laquelle il est aussi adapté. On dira alors pour préciser que X est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$ ou plus brièvement une $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$-martingale. Notons qu'une martingale donnée M est toujours une martingale par rapport à sa filtration naturelle $(\sigma(M_s;\ s \leq t))_{t\in T}$(exercice facile).

Exemples : 1) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t\in T}\mathcal{F}_t)$ la tribu terminale. Si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et ayant un moment d'ordre un, alors le processus M $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$-adapté défini par

$$M_t = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t) \quad (t \in T), \tag{1.26}$$

est une martingale qu'on appelle *martingale régulière*.

2) Soit $T = \mathbb{N}$ et $\xi = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et ayant un moment d'ordre 1. Si les variables ξ_i sont centrées, la suite des sommes $M_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ est une martingale pour la filtration naturelle de la suite ξ (qui est aussi sa filtration propre).

B. Propriétés générales :

1) M est une sur-martingale si et seulement si $-M$ est une sous-martingale.

2) Toute combinaison linéaire de martingales est une martingale.

3) Toute combinaison linéaire à coefficients positifs de sur-martingales (resp. de sous-martingales) est une sur-martingale (resp. une sous-martingale).

4) Si M est une martingale (resp. une sous-martingale) et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction *convexe* (resp. *convexe croissante*), alors le processus $(\varphi(M_t))_{t\in T}$ est une sous-martingale. Par exemple si M est une martingale de carré intégrable, $|M|$ et M^2 sont des sous-martingales.

C. Théorème d'arrêt de Doob et inégalités maximales : Dans le reste de ce paragraphe, on suppose que le temps est discret i.e. $T = \mathbb{N}$ même si ce n'est pas explicitement rappelé dans chaque énoncé.

Théorème 1.4.1 *(Doob) : Soient $M = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (M_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ une martingale (resp. une sur-matingale) et τ_1, τ_2 deux temps d'arrêt (de la filtration de M) presque sûrement bornés et tels que $\tau_1 \leq \tau_2$ $\mathbb{P}$-p.s. Alors les variables aléatoires M_{τ_1} et M_{τ_2} appartiennent à L^1 et on a :*

$$(1.27)\qquad \mathbb{E}(M_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1} \quad p.s. \quad (\textit{resp. } \mathbb{E}(M_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) \leq M_{\tau_1} \quad p.s.)$$

Théorème 1.4.2 *(inégalités maximales) :*
1) Si $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sur-martingale, alors pour tout $\lambda > 0$, on a les deux inégalités

$$(1.28)\qquad \mathbb{P}\left(\sup_{1\leq i\leq k} M_i \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{E}(M_1) + \mathbb{E}(M_k^-)\right)$$

$$(1.29)\qquad \mathbb{P}\left(\inf_{1\leq i\leq k} M_i \leq -\lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{E}(|M_k|\right),$$

où $M_k^- = -\min(M_k, 0)$.
2) Si $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale (en particulier une martingale), en appliquant l'inégalité (1.29) à $(-M)$, on obtient pour tout $\lambda > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(1.30)\qquad \mathbb{P}\left(\sup_{1\leq i\leq k} M_i \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(|M_k|).$$

En particulier cette inégalité (1.30) s'applique aussi à $|M|$ si M est une martingale.

3) Si M est une martingale de carré intégrable, alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq i \leq k} |M_i| \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}(M_k^2). \tag{1.31}$$

Théorème 1.4.3 *(inégalité maximale L^p) : Soit $p > 1$ et M une martingale bornée dans L^p i.e. $\sup_{n \in \mathbb{N}} ||M_n||_p < +\infty$ (où $||M_n||_p = (\mathbb{E}(|M_n|^p))^{1/p}$). Alors la variable aléatoire $M^* = \sup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ est dans L^p et on a*

$$||M^*||_p \leq q \sup_{n \in \mathbb{N}} ||M_n||_p \tag{1.32}$$

où $q = \frac{p}{p-1}$ est l'exposant conjugué de p.

D. Convergence presque sûre des martingales : Pour simplifier la présentation nous regroupons plusieurs résultats en un seul théorème. On suppose toujours que $T = \mathbb{N}$.

Théorème 1.4.4 *(convergence p.s.) :*

1) Si M est une sur-martingale positive, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la limite $\lim_{n \to \infty} M_n(\omega) = M_\infty(\omega)$ existe et $M_\infty \in L^1$ (en particulier $M_\infty < +\infty$ p.s.).

2) Si $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et X est une variable aléatoire de L^1, la martingale régulière $M_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ converge presque sûrement et dans L^1 vers $M_\infty = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$, où $\mathcal{F}_\infty$ est la tribu terminale de la filtration.

3) Toute sous-martingale M bornée dans L^1 (i.e. telle qu'on ait : $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|M_n|) < +\infty$) converge presque sûrement vers une variable aléatoire de L^1.

E. Convergence des martingales dans L^1 et équi-intégrabilité :
La convergence dans L^1 est assez décevante car il se trouve qu'il n'y a qu'une classe de martingales que nous connaissons déjà très bien, qui peuvent converger dans L^1 : les martingales régulières.

Théorème 1.4.5 *: Pour une martingale $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1) M converge dans L^1.
2) M est équi-intégrable i.e.

$$\lim_{a\to+\infty}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\big(|M_n|\cdot\mathbf{1}_{[|M_n|>a]}\big)\right)=0 \tag{1.33}$$

3) M est une martingale régulière au sens de (1.26).

Pour les martingales régulières, on peut renforcer le théorème d'arrêt de Doob en supprimant la condition de bornitude des temps d'arrêt :

Théorème 1.4.6 *(théorème d'arrêt pour les martingales régulières) : Soit $M=(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale régulière. Pour tout temps d'arrêt τ, la variable aléatoire M_τ appartient à L^1 et pour tout couple de temps d'arrêt τ_1 et τ_2 tels que $\tau_1\le\tau_2$, l'égalité*

$$\mathbb{E}(M_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1})=M_{\tau_1}\quad p.s.,$$

est valable à condition si ω est tel que $\tau(\omega)=+\infty$, de poser $M_\tau(\omega)=M_\infty(\omega)$ où M_∞ désigne la limite de M à l'infini.

Corollaire 1.4.1 *: Si $M=(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale régulière et $\tau_1\le\tau_2\le\cdots\le\tau_n\le\cdots$ une suite croissante de temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_n)$ de M, alors le processus $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par*

$$X_n=M_{\tau_n},$$

est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_{\tau_n})$.

1.4.3 Martingales à temps continu

Lorsque le temps est continu i.e. $T=[0,a]$ ou $\mathbb{R}_+$, la théorie des martingales est plus délicate. Pour obtenir des résultats, il convient de supposer que les trajectoires des processus sont continues à droite (**càd** en abrégé). On peut alors généraliser les principaux théorèmes du paragraphe précédent. Nous nous contenterons ici de quelques indications. Pour des résultats plus complets, voir le livre de D. Revuz et M. Yor [51].

A. Inégalités maximales

Théorème 1.4.7 *:*
1) Si $M = (M_t)_{t\in T}$ est une sur-martingale **càd**, *alors pour tout $\xi > 0$ dans T, on a les deux inégalités*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,\xi]} M_t \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}(\mathbb{E}(M_0) + \mathbb{E}(M_\xi^-)) \tag{1.34}$$

$$\mathbb{P}\left(\inf_{t\in[0,\xi]} M_t \leq -\lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}(\mathbb{E}(|M_\xi|), \tag{1.35}$$

2) Si $M = (M_t)_{t\in T}$ est une sous-martingale **càd**, *alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $\xi > 0$ dans T, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,\xi]} M_t \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(|M_\xi|). \tag{1.36}$$

3) Si M est une martingale **càd** *de carré intégrable, alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $\xi > 0$ dans T, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,\xi]} |M_t| \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}(M_\xi^2). \tag{1.37}$$

Démonstration : Comme dans le cas discret, (1.36) et (1.37) découlent de (1.35). Montrons (1.34). Soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \xi$ une subdivision de $[0, \xi]$ par des rationnels dyadiques. Alors $(M_{t_k})_{0\leq k\leq n}$ est une sur-martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_{t_k})_{0\leq k\leq n}$[20]. Par l'inégalité maximale (1.28), on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1\leq i\leq n} M_{t_i} \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{E}(M_0) + \mathbb{E}(M_\xi^-)\right).$$

En faisant croître la subdivision $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ vers $\mathbb{Q} \cap [0, \xi]$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,\xi]} M_t \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{E}(M_0) + \mathbb{E}(M_\xi^-)\right).$$

[20] en fait on peut la prolonger en une vraie sur-martingale en posant $M_m = M_{t_n}$ pour tout $m \geq n$ et $\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_{t_n}$.

comme les trajectoires de M sont càd, on a $\sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,\xi]} M_t = \sup_{t\in[0,\xi]} M_t$, d'où le résultat. L'inégalité (1.35) se démontre de la même façon. □

B. Convergence des martingales : Les résultats de convergence peuvent se généraliser aussi aux martingales **càd** :

Théorème 1.4.8 : *Soit $M = (M_t)_{t\in T}$ une sur-martingale* **càd** *et soit aussi $[c,d[\subset T$ (avec éventuellement $d = +\infty$). On suppose que $M \geq 0$ sur $[c,d[$ (i.e. $\forall t \in [c,d[$, $\forall \omega \in \Omega$, $M_t(\omega) \geq 0$). Alors la limite $\lim_{t\to d^-} M_t$ existe $\mathbb{P}$-p.s.*

Théorème 1.4.9 : *Pour une martingale* **càd** *$M = (M_t)_{t\in T}$, on a les équivalences :*

1) M est équi-intégrable.

2) M est une martingale régulière.

3) M converge $\mathbb{P}$-p.s. et dans L^1.

C. Théorème d'arrêt de Doob : Le théorème d'arrêt de Doob se généralise aussi sous la forme suivante :

Théorème 1.4.10 : *Soit $M = (M_t)_{t\in T}$ une martingale* **càd**.

1) Si τ_1 et τ_2 sont deux temps d'arrêt tels que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq b$ où b est une constante, alors les variables aléatoires M_{τ_1} et M_{τ_2} appartiennent à L^1 et on a :

$$\mathbb{E}(M_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1} \quad p.s.$$

2) Si τ est un temps d'arrêt, le processus $(M_{t\wedge\tau})_{t\in T}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})_{t\in T}$.

3) Si M est uniformément intégrable, alors pour tout couple de temps d'arrêt tels que $\tau_1 \leq \tau_2$, on a

$$\mathbb{E}(M_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1} \quad p.s.$$

Démonstration : 1) Si τ est un temps d'arrêt qui prend un nombre fini de valeurs et qui est tel que $\tau \leq b$, le théorème d'arrêt 1.4.1 donne

$$\mathbb{E}(M_b|\mathcal{F}_\tau) = M_\tau \quad p.s. \tag{1.38}$$

Désignons par $\mathcal{T}_b$ la famille de tous les temps d'arrêt prenant un nombre fini de valeurs et qui sont bornés par b, alors la famille des variables aléatoires $\{M_\tau;\ \tau \in \mathcal{T}_b\}$ est équi-intégrable. En effet ceci résulte du lemme suivant :

Lemme 1.4.1 : *Pour tout $\tau \in \mathcal{T}_b$ et tout $c > 0$, on a*

$$\mathbb{E}\big(|M_\tau| \mathbf{1}_{[|M_\tau|>c]}\big) \leq \mathbb{E}\big(|M_b| \mathbf{1}_{[|M_b|>\sqrt{c}]}\big) + \frac{1}{\sqrt{c}} \mathbb{E}(|M_b|). \tag{1.39}$$

Démonstration du lemme : Ecrivons $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}$ pour simplifier l'écriture de l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_\tau$ et posons $A = [|M_\tau| > c]$. La relation 1.38 implique $|M_\tau| \leq \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}(|M_b|)$ et puisque $A \in \mathcal{F}_\tau$, on en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(|M_\tau| \mathbf{1}_A\big) &\leq \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_A \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}(|M_b|)\big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}(|M_b| \mathbf{1}_A)\big) = \mathbb{E}\big(|M_b| \mathbf{1}_A\big) \\
&\leq \mathbb{E}\big(|M_b| \mathbf{1}_{A \cap [|M_b|>\sqrt{c}]}\big) + \mathbb{E}\big(|M_b| \mathbf{1}_{A \cap [|M_b| \leq \sqrt{c}]}\big) \\
&\leq \mathbb{E}\big(|M_b| \mathbf{1}_{[|M_b|>\sqrt{c}]}\big) + \sqrt{c}\,\mathbb{P}(A) \\
&\leq \mathbb{E}\big(|M_b| \mathbf{1}_{[|M_b|>\sqrt{c}]}\big) + \sqrt{c} \frac{\mathbb{E}(|M_\tau|)}{c} \quad \text{(inégalité de Markov)}
\end{aligned}$$

D'où le résultat du lemme puisque $\mathbb{E}(|M_\tau|) \leq \mathbb{E}(|M_b|)$. □

suite de la démonstration : Soient maintenant $\tau_1 \leq \tau_2 \leq b$, des temps d'arrêt bornés par $b > 0$. Il existe[21] deux suites décroissantes $\tau_1^{(n)}$ et $\tau_2^{(n)}$ de temps d'arrêt appartenant à $\mathcal{T}_b$ avec $\tau_1^{(n)} \leq \tau_2^{(n)} \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tels que

$$\tau_1^{(n)} \searrow \tau_1 \quad \text{et} \quad \tau_2^{(n)} \searrow \tau_2 \quad \text{si} \quad n \to +\infty.$$

D'après le théorème d'arrêt pour les martingales à temps discret, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}\left(M_{\tau_2^{(n)}} | \mathcal{F}_{\tau_1^{(n)}}\right) = M_{\tau_1^{(n)}}. \tag{1.40}$$

En conditionnant les deux membres de (1.40) par rapport à $\mathcal{F}_{\tau_1}$ et en utilisant $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_1^{(n)}}$ (car $\tau_1 \leq \tau_1^{(n)}$) on obtient

$$\mathbb{E}(M_{\tau_2^{(n)}} | \mathcal{F}_{\tau_1}) = \mathbb{E}(M_{\tau_1^{(n)}} | \mathcal{F}_{\tau_1}). \tag{1.41}$$

Or, on a

$$\lim_{n\to\infty} M_{\tau_1^{(n)}} = M_{\tau_1} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} M_{\tau_2^{(n)}} = M_{\tau_2}, \tag{1.42}$$

[21] pour la justification de cette assertion voir l'exercice 3 à la fin du chapitre.

car les trajectoires de M sont **càd**. Mais les deux suites $(M_{\tau_1^{(n)}})_{n\geq 0}$ et $(M_{\tau_2^{(n)}})_{n\geq 0}$ sont équi-intégrables donc la convergence (1.42) a lieu aussi dans L^1. La continuité pour la norme L^1 de l'espérance conditionnelle, permet de déduire de (1.41) que

$$\mathbb{E}(M_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) = \mathbb{E}(M_{\tau_1}|\mathcal{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1}$$

D'où le premier résultat.
2) Soient $t_1 < t_2$. En appliquant le résultat du 1) aux deux temps d'arrêt $\tau_1 = t_1 \wedge \tau$ et $\tau_2 = t_2 \wedge \tau$ qui sont tels que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq t_2$, on a

$$\mathbb{E}(M_{t_2\wedge\tau}|\mathcal{F}_{t_1\wedge\tau}) = M_{t_1\wedge\tau},$$

ce qui démontre l'assertion.
3) Soient $\tau_1 \leq \tau_2$ des temps d'arrêt et soit M_∞ la limite dans L^1 de la martingale M lorsque t tend vers l'extrémité droite d de l'espace des temps T (cette limite existe car M est supposée équi-intégrable). Comme dans la démonstration du point 1), on considère des suites $\tau_1^{(n)}$ et $\tau_2^{(n)}$ de temps d'arrêt prenant un nombre dénombrable de valeurs, telles que $\tau_1^{(n)} \leq \tau_2^{(n)}$ et qui convergent en décroissant vers τ_1 et τ_2. Les relations (1.40), (1.41) et (1.42) sont encore valables dans ce cas et la démonstration se termine de la même façon car pour justifier que les suites $(M_{\tau_1^{(n)}})_{n\geq 0}$ et $(M_{\tau_2^{(n)}})_{n\geq 0}$ sont équi-intégrables, on utilise l'argument du lemme 1.4.1 avec M_∞ à la place de M_b et on remplace $\mathcal{T}_b$ par la famille de tous les temps d'arrêt prenant un nombre dénombrable de valeurs. □

1.5 Annexe

1.5.1 Tribus sur un espace de trajectoires

A) Tribu produit sur E^T

Soit T un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$ et E un espace topologique muni de sa tribu de Borel $\mathcal{B}_E$ (i.e. la tribu des parties de E engendrée par les ensembles ouverts). On considère $\Omega = E^T$ l'ensemble de toutes les applications $\omega : t \mapsto \omega(t)$ de T dans E. Pour $\omega \in \Omega$, on écrira aussi $\omega = (\omega(t))_{t\in T}$. Pour tout $t \in T$, on note X_t l'application *t-ième projection* de E^T dans E i.e.

l'application

$$\forall \omega \in E^T,\ X_t(\omega) = \omega(t) \tag{1.43}$$

parfois appelée *évaluation de la trajectoire* ω *à l'instant* t. On notera $\mathcal{P}_f(T)$ l'ensemble de toutes les parties finies de T.

Définition 1.5.1 : *On appelle cylindre toute partie de* $\Omega = E^T$ *de la forme*

$$\left\{\omega \in E^T; \omega(t_1) \in A_1, \ldots, \omega(t_n) \in A_n\right\}, \tag{1.44}$$

où $\{t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}_f(T)$ *et* $A_i \in \mathcal{B}_E$ *(*$i = 1, \ldots, n$*).*

Le cylindre (1.44), ensemble des trajectoires qui, aux instants fixés t_i passent dans les ensembles A_i ($i = 1, \ldots, n$), est représenté de manière plus probabiliste sous la forme :

$$[X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \ldots, X_{t_n} \in A_n] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_{t_i} \in A_i], \tag{1.45}$$

qu'on note parfois encore $[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A_1 \times \cdots \times A_n]$.

Définition 1.5.2 : *La tribu produit* $\mathcal{B}_E^{\otimes T}$ *est la tribu des parties de* Ω *engendrée par les cylindres*

Clairement $\mathcal{B}_E^{\otimes T}$ est aussi la tribu $\sigma(X_t, t \in T)$ engendrée[22] par toutes les applications coordonnées X_t ($t \in T$) définies en (1.43).

Remarque : Si on munit $\Omega = E^T$ de la topologie produit (encore appelée topologie de la convergence simple[23]), $\mathcal{B}_E^{\otimes T}$ est la tribu de Borel de E^T dans beaucoup de cas raisonnables :

Proposition 1.5.1 : *Si l'espace topologique* E *est à base dénombrable d'ouverts (par exemple polonais) et si* T *est fini ou dénombrable, alors* $\mathcal{B}_E^{\otimes T}$ *est la tribu de Borel de* E^T.

[22] i.e. la plus petite tribu sur Ω qui rend les applications X_t ($t \in T$) mesurables.

[23] i.e. la suite $\omega^{(n)}$ converge vers ω dans Ω si $\forall t \in T$, $\omega^{(n)}(t) \to \omega(t)$ dans E.

Démonstration : Notons $\mathcal{B}_{E^T}$ la tribu de Borel de E^T. Les cylindres de la forme (1.44) avec tous les A_i ouverts de E, constituent une base de la topologie de E^T pour laquelle toutes les applications coordonnées X_t sont continues. Ainsi, pour tout $t \in T$ et tout $A \in \mathcal{B}_E$, les images inverses $X_t^{-1}(A) = [X_t \in A]$ de A par X_t appartiennent à la tribu $\mathcal{B}_{E^T}$. Il résulte alors de (1.44) que tout cylindre de E^T appartient à la tribu $\mathcal{B}_{E^T}$. Donc $\mathcal{B}_E^{\otimes T} \subset \mathcal{B}_{E^T}$. Pour montrer l'inclusion inverse, considérons une famille dénombrable $(U^{(n)})$ d'ouverts qui constituent une base de la topologie de E. Comme T est dénombrable, les cylindres de la forme (1.44) (ou (1.45)) avec tous les A_i dans $\{U^{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$, forment clairement une base dénombrable de la topologie de E^T. Autrement dit tout ouvert de E^T est réunion dénombrable de cylindres ouverts donc appartient à la tribu produit $\mathcal{B}_E^{\otimes T}$. Donc $\mathcal{B}_{E^T} \subset \mathcal{B}_E^{\otimes T}$. □

Remarque : En fait comme le montre la première partie de la démonstration précédente, l'inclusion $\mathcal{B}_E^{\otimes T} \subset \mathcal{B}_{E^T}$ est toujours vraie pour T et E quelconques. En dehors des hypothèses de la proposition, l'inégalité peut être stricte (voir Bourbaki, Topologie).

B) Tribus boréliennes de $C([0, +\infty[, \mathbb{R}^d)$.

Dans cette partie , $T = [0, +\infty[$, $E = \mathbb{R}^d$ et on considère le sous-espace $\mathcal{C} := C(T, E)$ de E^T constitué des trajectoires continues. La topologie la plus usitée sur cet espace est celle de la convergence uniforme sur les compacts. Il est bien connu que cette topologie sur $\mathcal{C}$ est donnée par la métrique :

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{e_n(x,y)}{1 + e_n(x,y)} \quad (x, y \in \mathcal{C}),$$

où

$$e_n(x,y) = \sup_{t \in [0,n]} \|x(t) - y(t)\|, \tag{1.46}$$

et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. L'espace métrique $(\mathcal{C}, d)$ est alors un espace polonais et on notera $\mathcal{B}_1$ sa tribu de Borel. Mais il y a une autre topologie, moins fine, mais très utile pour les besoins de la théorie des processus, c'est la topologie engendrée par les ensembles de la forme

$$U_{t_i;O_i} = \{x \in \mathcal{C} \; ; \; x(t_1) \in O_1, \ldots, x(t_n) \in O_n\}, \tag{1.47}$$

(appelés cylindres ouverts) où $\{t_1, \ldots, t_n\}$ est une partie finie de T et les O_i sont des ouverts de E. Cette topologie est la trace sur $\dot{\mathcal{C}}$ de la topologie produit de E^T. Notons $\mathcal{B}_2$ la tribu borélienne de $\mathcal{C}$ pour cette deuxième topologie.
Le résultat suivant est bien connu mais sa démonstration n'est pas souvent donnée dans les manuels :

Théorème 1.5.1 *:* $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

Démonstration : Notons τ_1 (resp. τ_2) la topologie[24] de la convergence uniforme sur les compacts (resp. la topologie engendrée par les cylindres ouverts).
étape 1($\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$) : Soit $U_{t_i;O_i}$ un cylindre de la forme (1.47), soient aussi $x \in U_{t_i;O_i}$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$\forall i = 1, \ldots, n: \quad]x(t_i) - \epsilon, x(t_i) + \epsilon[\subset O_i.$$

Prenons $N = \max_{i=1,\ldots,n} t_i$.
Clairement $V_x = \{y \in \mathcal{C}\ ;\ e_N(x,y) < \epsilon\} \subset U_{t_i;O_i}$. D'autre part V_x est un ouvert de τ_1 puisque l'application $y \to e_N(x,y)$ est continue pour la distance d. Ceci montre que $U_{t_i;O_i} \in \tau_1$ donc $\tau_2 \subset \tau_1$, ce qui prouve que $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$.
étape 2($\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$) : La topologie τ_1 est une topologie uniformisable[25] associées à la famille d'écarts (ou semi-normes) e_n, ($n \in \mathbb{N}$) donnée par (1.46) et dont les ouverts élémentaires sont les intersections finies d'ensembles de la forme

$$V_{x,n,\epsilon} = \{x \in \mathcal{C}\ ;\ e_n(x,y) < \epsilon\},$$

où $x \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$. Or $V_{x,n,\epsilon} = \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,n]} A_r$ où

$$A_r = \{y \in \mathcal{C}\ ;\ |x(r) - y(r)| < \epsilon\} \in \tau_2;$$

i.e. $V_{x,n,\epsilon}$ est une intersection dénombrable d'ouverts de τ_2. Donc $V_{x,n,\epsilon} \in \mathcal{B}_2$, d'où $\tau_1 \subset \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$. $\square$

[24] i.e. la collection de tous les ouverts.
[25] cf. le livre de J. Dieudonné [17].

1.5.2 Démonstration du grand théorème de Kolmogorov

On utilisera le théorème d'extension de Carathéodory que nous rappelons sans démonstration (voir les livres de M. Métivier [40] ou de J. Neveu [43]) :

Théorème 1.5.2 : *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties d'un ensemble Ω et μ : $\mathcal{A} \to [0,1]$ une fonction vérifiant :*
1) $\mu(\emptyset)=0$,
2) $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (additivité),
3) pour toute suite $(A_n) \in \mathcal{A}$ et telle que $A_n \searrow \emptyset$, on a $\lim \mu(A_n) = 0$.
Alors μ se prolonge de manière unique en une mesure de probabilité sur la tribu $\sigma(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$.

La démonstration du grand théorème de Kolmogorov est basée sur un argument de compacité (extraction diagonal de sous-suite) qui permet de vérifier les hypothèses du théorème de Carathéodory.

démonstration du Théorème 1.1.3 : On utilise les notations du paragraphe 1.1.6. En particulier, pour tout $I = \{t_1, \ldots, t_n\} \in P_f(T)$, on note $X_I = (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. Mais attention ici car $\Omega = E^T$. Soit $\mathcal{F}_I = \sigma(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ la tribu sur Ω, engendrée par les applications coordonnées X_t pour $t \in I$. Notons que tout ensemble $A \in \mathcal{F}_I$ est de la forme

$$A = [X_I \in H] = \{\omega \in \Omega\ ;\ X_I(\omega) \in H\} \tag{1.48}$$

pour $H \in \mathcal{B}_{E^I}$ (la tribu de Borel de E^I). On a tout de suite besoin du :

Lemme 1.5.1 : *L'ensemble $\mathcal{A} = \bigcup_{I \in P_f(T)} \mathcal{F}_I$ est une algèbre. De plus la tribu $\sigma(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$ est égale à $\mathcal{B}_E^{\otimes T}$.*

Démonstration : Il est clair que $\Omega \in \mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire. Pour montrer que $\mathcal{A}$ est stable par réunion, considérons $A, B \in \mathcal{A}$. Il existe alors $I \in P_f(T)$ et $J \in P_f(T)$ tels que $A \in \mathcal{F}_I$ et $B \in \mathcal{F}_J$. Mais on a aussi $A, B \in \mathcal{F}_{I \cup J}$ donc $A \cup B \in \mathcal{F}_{I \cup J} \subset \mathcal{A}$, d'où le résultat. □

Procédons alors en plusieurs étapes :

étape 1 (définition de $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{A}$) : Pour $A \in \mathcal{F}_I$ de la forme :
$A = [X_I \in H]$ où $H \in \mathcal{B}_{E^I}$, on pose

$$\mathbb{P}(A) = \mu_I(H)\,. \tag{1.49}$$

Cette définition présente une petite difficulté car A appartient aussi à toutes les tribus $\mathcal{F}_{I'}$ avec $I \subset I' \in P_f(T)$. Il suffit de considérer le cas où $I' = I \cup \{t_{n+1}\}$ contient un point de plus que I. Alors avec $H' = H \times E$, $A = [(X_I, X_{t_{n+1}}) \in H \times E] = [X_{I'} \in H']$ est la représentation sous la forme (1.48) en tant qu'élément de $\mathcal{F}_{I'}$. Mais d'après la condition de cohérence μ_I est la marginale de $\mu_{I'}$ sur E^I et donc $\mu_{I'}(H') = \mu_I(H)$, ce qui justifie totalement la définition (1.49).

étape 2 ($\mathbb{P}$ additive sur $\mathcal{A}$) : Soient $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$. On a vu dans la preuve du lemme qu'il existe $I \in \mathcal{F}_I$ tel que $A, B \in \mathcal{F}_I$. D'après (1.48), il existe $H, H' \in \mathcal{B}_{E^I}$ tels que $A = [X_I \in H]$ et $B = [X_I \in H']$ et on peut choisir H et H' tels que $H \cap H' = \emptyset$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}([X_I \in H] \cup [X_I \in H']) \\
&= \mathbb{P}([X_I \in H \cup H']) \\
&= \mu_I(H \cup H') = \mu_I(H) + \mu_I(H') \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathbb{P}$ est une fonction additive sur $\mathcal{A}$.

étape 3 (continuité décroissante de $\mathbb{P}$) : Soit $(A_k) \in \mathcal{A}$ une suite décroissante vers $\emptyset$ (i.e. $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ et $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$). On va montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$. D'après (1.48), chaque A_n est de la forme

$$A_n = [X_{I_n} \in H_n], \tag{1.50}$$

où $I_n \in P_f(T)$ et $H_n \in \mathcal{B}_{E^{I_n}}$. Comme A_n peut aussi s'écrire sous la forme $[X_I \in H_I]$ pour toute $I \in P_f(T)$ telle que $I \supset I_n$ avec $H_I = H_n \times \prod_{t \in I \setminus I_n} E \in \mathcal{B}_{E^I}$, on peut donc sans perte de généralité supposer que la suite (I_n) est strictement croissante ($I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots$).
La suite $\mathbb{P}(A_n)$ décroît ; supposons par l'absurde qu'elle ne tend pas vers 0. Il existe alors $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(A_n) > \epsilon. \tag{1.51}$$

On va montrer que $\cap_n A_n \neq \emptyset$, ce qui sera contraire à l'hypothèse. Par définition de $\mathbb{P}$ et par (1.50) et (1.51), on a donc

$$\forall n \geq 1, \quad \mu_{I_n}(H_n) \geq \epsilon.$$

Comme l'espace E^{I_n} est polonais, μ_{I_n} est une mesure régulière. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe donc un compact $K_n \subset H_n$ tel que

$$\mu_n(H_n \setminus K_n) \leq \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Ainsi, en considérant $B_n = [X_{I_n} \in K_n]$, on a $B_n \in \mathcal{A}$, $B_n \subset A_n$ et

$$\mathbb{P}(A_n \setminus B_n) = \mathbb{P}\left([X_{I_n} \in H_n \setminus K_n]\right) \leq \frac{\epsilon}{2^{n+1}}. \tag{1.52}$$

En posant $C_n = \cap_{i=1}^n B_i \subset A_n$ et en sommant les inégalités (1.52), on a

$$\mathbb{P}(A_n \setminus C_n) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_n \setminus B_i) \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.53}$$

Il résulte alors de (1.51) et (1.53) qu'on a

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(C_n) \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

En particulier ceci montre que les C_n sont non vides. D'autre part ils forment une suite décroissante ($C_1 \supset C_2 \supset \cdots$) et sont tels que

$$\forall n \geq 1, \quad C_n \subset [X_{I_n} \in K_n].$$

On va montrer que $\cap_n C_n \neq \emptyset$, ce qui prouvera que $\cap_n A_n \neq \emptyset$. Soit ω^n un point arbitraire dans C_n. Notons que ce point appartient aussi à tous les C_m pour $m \leq n$ et qu'on a donc

$$\forall m \leq n, \quad X_{I_m}(\omega^n) \in K_m.$$

Comme K_1 est compact, il existe une suite $\phi_1(n)$ strictement croissante d'entiers telle que $X_{I_1}(\omega^{\phi_1(n)})$ converge (quand $n \to \infty$) vers un élément $x_1 \in K_1$. De la suite $\phi_1(n)$, on peut extraire une suite $\phi_2(n)$ telle que $X_{I_2}(\omega^{\phi_2(n)})$ converge vers un élément $x_2 \in K_2$. En utilisant la notation (1.8), il est clair que $\Phi_{I_2,I_1}(x_2) = x_1$ i.e la projection canonique de $x_2 \in E^{I_2}$ sur E^{I_1} est exactement x_1. En itérant, pour chaque entier p, on construit une suite d'entiers $\phi_p(n)$ extraite de la suite $\phi_{p-1}(n)$ et telle que

$$X_{I_p}(\omega^{\phi_p(n)}) \to x_p \in K_p \quad (n \to \infty)$$

et $\Phi_{I_p,I_{p-1}}(x_p) = x_{p-1}$. Pour la suite "diagonale" $\phi_n(n)$ extraite de toutes les suites précédentes, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad X_{I_p}(\omega^{\phi_n(n)}) \to x_p \in K_p \quad (n \to \infty).$$

Soit alors $x \in E^{\cup_p I_p}$ tel que sa projection (canonique) sur E^{I_p} soit égale à x_p. On peut trouver un élément $\omega \in \Omega = E^T$ tel que $(\omega(t))_{t \in \cup_p I_p} = x$ (il suffit de prendre $\omega(t)$ arbitraire pour les $t \notin \cup_p I_p$). Par construction on a donc $X_p(\omega) = x_p \in K_p$ pour tout entier p i.e. $\omega \in \cap_p B_p$ et chaque $B_p \subset A_p$ donc $\cap_p A_p \neq \emptyset$, ce qui est absurde.
Il reste à appliquer le théorème d'extension de Carathéodory et le Théorème 1.1.3 en résulte. $\square$

1.5.3 Considérations sur les lois, l'indépendance des processus, etc...

I) **Loi d'un processus**
Soit $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, (X_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ un processus à valeurs dans un espace polonais $(E, \mathcal{B}_E)$. Les lois de dimension finie μ_I ($I \in P_f(T)$) du processus X constituent une famille cohérente de probabilités sur les puissances cartésiennes de E qui détermine, comme on vient de le voir dans le paragraphe précédent, une mesure de probabilité μ sur l'espace canonique des trajectoires $(E^T, \mathcal{B}_E^{\otimes T})$. Cette probabilité s'appelle *la loi du processus* X.
Soit Φ l'application

$$\Phi : \omega \longmapsto \{t \mapsto X_t(\omega)\},$$

de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E^T, \mathcal{B}_E^{\otimes T})$ qui à $\omega \in \Omega$ associe la trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$. Cette application est mesurable. En effet l'image inverse par Φ de tout cylindre $C = \{x \in E^T; x_{t_1} \in A_1, \ldots, x_{t_n} \in A_n\}$ $(t_i \in T, A_i \in \mathcal{B}_E)$ de $\mathcal{B}_E^{\otimes T}$ est dans $\mathcal{F}$ puisque

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(C) &= \{\omega \in \Omega; (X_t(\omega))_{t\in T} \in C\}\\ &= \{\omega \in \Omega; X_{t_1}(\omega) \in A_1, \ldots, X_{t_n}(\omega) \in A_n\}\\ &= [X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n] \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Pour tout ensemble mesurable de trajectoires (parfois appelé de manière imagée "paquet de trajectoires") $B \in \mathcal{B}_E^{\otimes T}$, notons $[X \in B] := \Phi^{-1}(B)$. On a alors

$$\mu(B) = \mathbb{P}([X \in B])\,. \tag{1.54}$$

Ceci montre que la loi d'un processus est l'analogue de la loi d'un vecteur aléatoire de dimension finie.
Notons que si $T = [0, a]$ où $\mathbb{R}_+$ et $E = \mathbb{R}^d$ et si le processus X est continu, sa loi μ est une probabilité sur l'espace métrique $\mathcal{C} = C(T, \mathbb{R}^d)$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_1$ (voir le théorème 1.5.1).
On remarquera aussi que la loi d'un processus ne dépend que de la famille de variables aléatoires $(X_t)_{t\in T}$ et non de la filtration qui peut être plus grosse que la filtration naturelle du processus.

On peut comme dans le cas des variables aléatoires définir la notion de couple ou de n-uplet de processus. Par exemple si X et Y sont deux processus définis sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et ayant $(E^T, \mathcal{B}_E^{\otimes T})$ comme espace des trajectoires, le couple (X, Y) est le processus $(X, Y) = (X_t, Y_t)_{t\in T}$ avec l'espace produit $(E^T \times E^T, \mathcal{B}_E^{\otimes T} \otimes \mathcal{B}_E^{\otimes T})$ comme espace des trajectoires. La loi $\mu_{X,Y}$ du couple (X, Y) est alors la probabilité sur cet espace engendrée par la famille cohérente des lois de dimension finie de (X, Y). On peut alors définir, comme pour les couples de variables aléatoires, les lois marginales d'un couple de processus. Nous n'entrons pas dans les détails de ces questions strictement analogues au cas classique.

II) **Processus de même loi** :
Deux processus $X = (X_t)_{t\in T}$ et $Y = (Y_t)_{t\in T}$ définis sur le même espace probabilisé ou sur deux espaces probabilisés distincts et à valeurs dans le même espace polonais $(E, \mathcal{B}_E)$ sont donc de même loi si et seulement s'ils ont les mêmes lois de dimension finie[26]. On notera alors $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$ pour désigner l'égalité en loi des processus X et Y.

III) **Transformation d'un processus par fonctionnelle déterministe** :
On reprend les notations de la partie I) et du paragraphe 1.5.1. On considère soit des processus quelconques avec $(E^T, \mathcal{B}_E^{\otimes T})$ comme espace des trajectoires, soit des processus continus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et dans ce cas l'espace des trajectoires est $(\mathcal{C}, \mathcal{B}_1)$. On notera $(E^T, \mathcal{B}_E^{\otimes T})^n$ (resp. $(\mathcal{C}, \mathcal{B}_1)^n$) l'espace produit de n copies de l'espace des trajectoires.

[26] i.e.ils sont équivalents suivant la terminologie de la définition 1.1.3.

Définition 1.5.3 : *On appelle fonctionnelle déterministe toute application mesurable*

$$(1.55) \qquad \varphi : (E^T, \mathcal{B}_E^{\otimes T})^n \to (E^T, \mathcal{B}_E^{\otimes T}) \quad (\textit{resp. } (\mathcal{C}, \mathcal{B}_1)^n \to (\mathcal{C}, \mathcal{B}_1))$$

Il est évident que le transformé d'un n-uplet de processus par une fonctionnelle déterministe est encore un processus.
Exemple : Si l'espace des trajectoires est $(\mathcal{C}, \mathcal{B}_1)$ les applications

$$\phi : (x, y) \mapsto x + y \quad \text{et} \quad \varphi : (x, y) \mapsto x.y$$

de $(\mathcal{C}, \mathcal{B}_1)^2$ dans $(\mathcal{C}, \mathcal{B}_1)$ définies pour $x = (x_t)_{t \in T}$ et $y = (y_t)_{t \in T}$ par

$$(1.56) \qquad \phi(x, y) = (x_t + y_t)_{t \in T} \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = (x_t y_t)_{t \in T},$$

sont continues pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts donc sont mesurables. Ces applications sont aussi des fonctionnelles déterministes dans le cas où l'espace des trajectoires est $(E^T, \mathcal{B}_E^{\otimes T})$, si E est polonais et à condition que T soit fini ou dénombrable. En effet dans ce cas elles sont continues pour la topologie de la convergence simple et il suffit d'appliquer la proposition 1.5.1.
Le résultat suivant de conservation des lois par transformation déterministe, est valable pour des n-uplets de processus, nous l'énonçons seulement pour des couples pour plus de simplicité :

Proposition 1.5.2 : *Soient (X, Y) et (X', Y') deux couples de processus et φ une fonctionnelle déterministe comme donnée en (1.54) avec $n = 2$. Si $(X, Y) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X', Y')$, alors $\varphi(X, Y) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \varphi(X', Y')$.*

Démonstration : en utilisant (1.54) la preuve est formellement analogue au cas d'une transformation déterministe de couples de variables aléatoires. □

IV) **Processus indépendants** :

Définition 1.5.4 : *Deux processus X et Y définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont dits indépendants si les sous-tribus $\mathcal{F}_X = \sigma(X_t; t \in T)$ et $\mathcal{F}_Y = \sigma(Y_t; t \in T)$ engendrées*[27] *par les X_t, respectivement les Y_t, sont indépendantes relativement à $\mathbb{P}$.*

[27] on notera que $\mathcal{F}_X$ (resp.$\mathcal{F}_Y$) est la tribu terminale de la filtration naturelle de X (resp. de Y).

Le résultat suivant est facile à obtenir ; nous le donnons sans démonstration :

Proposition 1.5.3 *: Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) Les processus X et Y sont indépendants.
2) Pour toutes parties finies I et J de l'espace des temps T, les vecteurs aléatoires fini-dimensionnels X_I et Y_J sont indépendants.
3) La loi $\mu_{(X,Y)}$ du couple (X, Y) coïncide avec le produit tensoriel $\mu_X \otimes \mu_Y$ des lois respectives de X et Y.

1.5.4 Notes et exercices

Pour alléger les énoncés, les variables aléatoires et les processus considérés sont supposés définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que nous ne mentionnerons pas dans les énoncés. De même les processus sont supposés adaptés à une filtration que nous ne préciserons que s'il y a ambiguïté.

Exercice 1* : Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus à temps continu tel que les X_t $(t \geq 0)$ forment une famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
1) Vérifier qu'un tel processus existe et qu'il est gaussien.
2) Montrer que X n'est pas mesurable (*indication* : on pourra montrer à l'aide du théorème de Fubini que si X était mesurable, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, on aurait $\int_0^T X_t(\omega)dt = 0$ pour tout $T > 0$).
Remarque : Cet exercice m'a été proposé par Marc Yor qui nomme X "le monstre".

Exercice 2 : Soient $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $\mathcal{D}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Montrer que toute variable aléatoire X telle que :
$\mathbb{E}(|\phi(X)|) < +\infty$, on a :

$$\phi\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{D})\right) \leq \mathbb{E}\left(\phi(X)|\mathcal{D}\right) \quad \text{(inégalité de Jensen)}.$$

(*indication* : une fonction convexe est toujours l'enveloppe supérieure d'une famille dénombrable de fonctions affines)

Exercice 3 (discrétisation d'un temps d'arrêt) : Soit τ un temps d'arrêt d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ à temps continu $T = [0, a]$ où $[0, \infty[$. Démontrer qu'il existe une suite $(\tau_n)_{\in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêt discrets (i.e chaque τ_n ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs) et telle que $\tau_n \searrow \tau$ quand $n \to \infty$ (i.e $\forall n, \forall \omega \in \Omega, \tau_{n+1}(\omega) \leq \tau_n(\omega)$ et $\lim \tau_n(\omega) = \tau(\omega)$).

Exercice 4 : Démontrer que si τ et σ sont des temps d'arrêt d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, alors $\tau + \sigma$ est aussi un temps d'arrêt . On commencera par le cas plus facile où $T = \mathbb{N}$ puis on étudiera le cas du temps continu $T = [0, a]$ ou $[0, \infty[$ (*indication* : dans le cas continu, on pourra utiliser l'exercice 3).

Exercice 5 : Tous les processus de cet exercice sont à temps discret $T = \mathbb{N}$. Soient $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus prévisible (i.e. tel que $\forall n \geq 1,\ Y_n$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable) et soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale.
1) Si le processus Y est borné (i.e. toutes les variables Y_n sont bornées par une même constante $K > 0$), montrer que le processus $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $Z_0 = 0$ et

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k (X_k - X_{k-1}) \quad (n \geq 1),$$

est une martingale.
2) Montrer que le résultat de la question 1) subsiste si l'on suppose que les processus X et Y sont dans L^2 (i.e. $\forall n \geq 0$, $X_n \in L^2$ et $Y_n \in L^2$).

Exercice 6 : Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale à temps discret et τ un temps d'arrêt pour la filtration de X. On construit une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires en posant

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \tau(\omega) \geq n \\ 0 \text{ si } \tau(\omega) < n. \end{cases}$$

1) Montrer que Y_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.
2) Vérifier que pour tout $n \geq 1$,

$$X_{\tau \wedge n} = X_0 + Y_1(X_1 - X_0) + \cdots + Y_n(X_n - X_{n-1}),$$

et en déduire que le processus $(X_{\tau \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la même filtration que X. (On remarquera qu'en appliquant le théorème d'arrêt de Doob 1.4.1, on obtient seulement que $(X_{\tau \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_{\tau \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$).

Exercice 7 : Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale et τ un temps d'arrêt tel que $\tau < +\infty$ p.s. On suppose que $\mathbb{E}(|X_\tau|) < +\infty$.
1) Vérifier que $\mathbb{E}(X_\tau) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(X_k \mathbf{1}_{[\tau = k]}\right)$ et en déduire que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_\tau \mathbf{1}_{[\tau > n]}) = 0$.
2) On suppose que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{[\tau > n]}) = 0$, montrer alors que

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_1).$$

(*indication* : On pourra utiliser l'identité $X_\tau = X_{\tau\wedge n} + (X_\tau - X_n)\mathbf{1}_{[\tau>n]}$).

Exercice 8 : Soit $(Z_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}(Z_i = -1) = \frac{1}{2}$ et $a > 0$ est un entier fixé. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$ ($n \geq 1$) et on définit le temps d'arrêt

$$\tau = \min\{n : |S_n| = a\},$$

1) Démontrer que

$$\mathbb{P}(\tau > 2an) \leq \left(1 - \frac{1}{2^{2a}}\right)^n,$$

et en déduire que $\mathbb{E}(\tau) < +\infty$ (*indication* : on pourra remarquer que $\mathbb{E}(\tau) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{2a}(2an+1)\mathbb{P}(\tau = 2an+k)$).

2) En utilisant le fait que $X = (S_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale en déduire que $\mathbb{E}(\tau) = a^2$ (*indication* : utiliser l'exercice 7).

Notes : La modélisation moderne d'un processus stochastique comme l'axiomatisation du calcul des probabilités remonte à A. Kolmogorov et à son célèbre livre "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" [34], (voir [7] pour des détails) mais c'est le livre de J.L. Doob [18] qui popularise définitivement l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et qui donne un premier exposé systématique de la théorie des martingales. Notons à ce propos, comme le font remarquer M. Barbut, B. Locker et L. Mazliak [3] que P. Lévy, grandement à l'origine des martingales, "rejettera l'espace Ω et son appareillage, ce qui ne l'empêchera pas de parler de questions aussi profondes que celle de la séparabilité des processus ou de leurs modifications". La théorie de la mesure et de l'intégrale abstraite, sont dans le même temps introduites dans l'enseignement universitaire aux USA principalement grâce au livre de P. R. Halmos [25]. Plus tard dans les années 1960, les livres de J. Neveu [43] et [44] auront un retentissement similaire dans l'Université française.

Dans la période récente, les livres qui ont marqué le plus le développement spectaculaire de la théorie des processus sont ceux de Dellacherie et Meyer ([13], [14], [15], [16]), Revuz et Yor ([51]) et Rogers et Williams ([52]). Tous les résultats de notre cours sont développés, sous une forme la plupart du temps beaucoup plus générale, dans ces grands traités. Pour la matière de ce chapitre 1, la démonstration du critère de Kolmogorov de continuité des trajectoires (théorème 1.1.2) est, à des détails près, celle donnée par D. Revuz et M. Yor [51]. Pour la démonstration du théorème de Kolmogorov (théorème 1.1.3), j'ai utilisé une preuve de Métivier ([40]) avec une présentation de Breiman ([5]). Notons à ce propos que j'ai emprunté à Rényi [49] la dénomination "grand théorème de Kolmogorov" pour distinguer ce résultat (qui englobe aussi le théorème 1.1.4) des très nombreux autres résultats de Kolmogorov et qu'il n'y a pas dans mon esprit de "petit théorème de Kolmogorov" même si on pourrait penser au théorème 1.1.4 qui est une version du même résultat mieux adaptée au temps discret. Le fait que la loi d'un processus gaussien est entièrement déterminée par ses fonctions espérance et covariance, est un exemple fondamental d'application du grand théorème de Kolmogorov. Les processus gaussiens sont par ailleurs étudiés en détails dans la monographie de Neveu ([42]) que nous avons largement utilisée ainsi que l'autre livre de Neveu [44] d'où sont extraits tous nos résultats sur les martingales discrètes. Les résultats sur les tribus sur un espace de trajectoires qui figurent en annexe, sont des présentations personnelles de sujets épars dans la littérature (voir [40] et [13]).

Chapitre 2

Le mouvement brownien

En 1827, grâce aux progrès qui viennent d'être réalisés dans la fabrication des microscopes, le botaniste écossais R. Brown observe des minuscules particules de pollen qui placées dans l'eau, au lieu de tomber régulièrement, se trouvent animées d'un mouvement vif et parfaitement désordonné qui se prolonge indéfiniment dans les mêmes conditions quelle que soit la durée de l'observation. Il vient de faire l'une des découvertes les plus fructueuses de ces deux derniers siècles : elle va permettre de confirmer les intuitions des physiciens et des chimistes sur la structure atomique de la matière.

L'hypothèse que le déplacement de ces particules[1] est dû à d'incessants chocs aléatoires infinitésimaux avec les molécules du liquide va s'imposer petit à petit (voir l'article de M. Gouy [22] de 1886). La modélisation mathématique de ce phénomène difficile à comprendre va intervenir plus tard avec les remarquables travaux d'A. Einstein (1905) [19] et de M. Smoluchowski [53] qui le mettent en équation et lui donnent le nom de mouvement brownien. La vérification expérimentale de ce modèle par le physicien J. Perrin (prix Nobel 1926) va en particulier le conduire à une détermination précise du nombre d'Avogadro. Jusqu'à nos jours le mouvement brownien n'a pas cessé d'être une source d'inspiration pour de nombreux travaux théoriques ou appliqués (voir par exemple [26] et [27]).

[1]qui peuvent être du pollen ou des grains sphéroïdes de masse infinitésimale (i.e. très faible) de nature quelconque comme de la gomme-gutte ou du mastic, etc... : voir l'excellent livre de J. Perrin [46].

De manière complètement indépendante, le mathématicien français L. Bachelier, dans sa thèse [1] propose en 1900 le mouvement brownien comme modèle des fluctuations du cours des actions en bourse. Ce travail, longtemps ignoré, est considéré aujourd'hui comme fondateur des modèles probabilistes appliqués à la finance (voir [4]).

La théorie moderne du mouvement brownien date des années 1930. Initiée par N. Wiener, A. Kolmogorov et P. Lévy, on peut la trouver exposée en détails avec ses développements les plus récents dans le livre de D. Revuz et M. Yor [51] (voir aussi les articles didactiques [36] et [57]). Nous nous contenterons ici d'une présentation du mouvement brownien unidimensionnel et des propriétés essentielles de ses trajectoires (variation quadratique, non différentiabilité) qui permettent de comprendre la nature de l'intégrale stochastique du chapitre 4. L'étude de l'aspect markovien du mouvement brownien, sera abordée dans le chapitre 3.

2.1 Généralités

2.1.1 Les accroissements du mouvement brownien

Il y a plusieurs présentations possibles du mouvement brownien. Nous avons choisi de privilégier l'aspect processus à accroissements indépendants. On obtient aussitôt que le mouvement brownien est une martingale. Le caractère gaussien du mouvement brownien sera vu ensuite.

Définition 2.1.1 *: Un processus* $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *à valeurs réelles est appelé mouvement brownien si*

(2.1)
$$B_0 = 0 \quad \mathbb{P}-p.s.$$

(2.2)
$$\forall\, 0 \leq s \leq t, \text{ la variable aléatoire } B_t - B_s \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_s.$$

(2.3)
$$\forall\, 0 \leq s \leq t, \quad B_t - B_s \quad \text{est de loi} \quad \mathcal{N}(0, t-s).$$

Autrement dit, le processus B part de 0, ses accroissements sont indépendants du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps.

Définition 2.1.2 : *Lorsque $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle de $(B_t)_{t\geq 0}$, on dit que B est un mouvement brownien naturel.*

Remarques : 1) On considère parfois des mouvements browniens sur un intervalle de temps compact $T = [0, a]$. La définition est la même que celle donnée ci-dessus mutatis-mutandis[2].
2) Le point (2.2) implique que les variable aléatoires $B_t - B_s$ et $B_{u_1} \dots B_{u_n}$ sont indépendantes pour tous $u_1, \dots, u_n \leq s$.
3) On peut affaiblir la condition (2.3), en demandant seulement que les variables aléatoires $\frac{1}{\sqrt{t-s}}(B_t - B_s)$, pour $0 \leq s < t$, soient toutes de même loi centrée avec un moment d'ordre deux. En effet en écrivant

$$\frac{B_t - B_s}{\sqrt{t-s}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{B_t - B_{(s+t)/2}}{\sqrt{\frac{t-s}{2}}} + \frac{B_{(s+t)/2} - B_s}{\sqrt{\frac{t-s}{2}}} \right),$$

on voit que $X = \frac{B_t - B_{(s+t)/2}}{\sqrt{\frac{t-s}{2}}}$ et $Y = \frac{B_{(s+t)/2} - B_s}{\sqrt{\frac{t-s}{2}}}$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{L}$, et que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ est aussi de loi $\mathcal{L}$. Il est bien connu que cela implique que $\mathcal{L} = \mathcal{N}(0, 1)$ (voir par exemple le livre de A. Rényi [49] p. 305).
4) Le point (2.2) de la définition a trois conséquences importantes :

Proposition 2.1.1 : *Tout mouvement brownien est une martingale relativement à sa filtration i.e. : pour tout $s < t$, $\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s$.*

Démonstration : si $s < t$, l'indépendance de $B_t - B_s$ et $\mathcal{F}_s$ implique que $\mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$, puisque B est centré. D'où le résultat.
□

Proposition 2.1.2 : *Tout mouvement brownien est un processus à accroissements indépendants i.e. : Pour tous $s = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, les variables aléatoires $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ ($k = 1, \dots, n$) sont indépendantes et indépendantes de la tribu $\mathcal{F}_s$.*

Démonstration : Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ des boréliens de $\mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{F}_s$. Comme pour tout $k = 1, \dots, n$, $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ est indépendante de $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$, on voit facilement par récurrence descendante que :

[2] i.e. en remplaçant $T = [0, \infty[$ par $T = [0, a]$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \in \Gamma_n, \ldots, B_{t_1} - B_s \in \Gamma_1, A) \\
&\quad = \mathbb{P}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \in \Gamma_n)\mathbb{P}(B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}} \in \Gamma_{n-1} \ldots B_{t_1} - B_s \in \Gamma_1, A) \\
&\quad = \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \in \Gamma_k)\right) \mathbb{P}(A)
\end{aligned}$$

ce qui prouve en même temps que les variables aléatoires $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ sont indépendantes (prendre $A = \Omega$) et le résultat. □

Le résultat précédent a pour conséquence l'intéressante propriété suivante du mouvement brownien

Corollaire 2.1.1 *: Si B est un mouvement brownien, le processus $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*

Démonstration : Soit $t > s$. Comme $\mathbb{E}(B_t B_s|\mathcal{F}_s) = B_s^2$ (car B est une martingale) et $\mathbb{E}((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((B_t - B_s)^2)$ (voir la proposition 2.1.2), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_t^2 - t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}\left((B_t - B_s)^2 + B_s^2 - t|\mathcal{F}_s\right) \\
&= t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s. \qquad \square.
\end{aligned}$$

Il est important de signaler que cette propriété est caractéristique du mouvement brownien parmi les martingales continues. Plus précisément on a le résultat suivant de P. Lévy (voir l'annexe pour une démonstration) :

Théorème 2.1.1 *(caractérisation de P. Lévy du mouvement brownien) : Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une $\mathcal{F}_t$-martingale continue avec $M_0 = 0$. Si le processus $(M_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est aussi une $\mathcal{F}_t$-martingale, alors M est un mouvement brownien.*

On aura besoin par la suite de la précision suivante sur les accroissements du mouvement brownien à partir d'un instant s :

Proposition 2.1.3 *: Pour tout $s > 0$ (fixé), la tribu $\sigma(B_t - B_s; t \geq s)$ engendrée par tous les accroissements ultérieurs à l'instant s, est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s$.*

Démonstration : L'assertion découle aussitôt du résultat précédent et des deux lemmes suivants dont nous omettons la démonstration (voir [45] p. 39) :

Lemme 2.1.1 : *Soient $F_1 = (X_i)_{i\in I}$ et $F_2 = (Y_j)_{j\in J}$ deux familles de variables aléatoires. Les tribus $\sigma((X_i)_{i\in I})$ et $\sigma((Y_j)_{j\in J})$ engendrées respectivement par F_1 et F_2, sont indépendantes si et seulement si pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ et tout choix des variables $X_1, \ldots, X_n \in F_1$ et $Y_1, \ldots, Y_m \in F_2$, les vecteurs aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_m)$ sont indépendants.*

Lemme 2.1.2 : *Soient $s \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$. La tribu $\sigma(B_{t_n} - B_s, B_{t_{n-1}} - B_s, \ldots, B_{t_1} - B_s)$ coïncide avec la tribu*

$$\sigma(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}, \ldots, B_{t_1} - B_s).$$

2.1.2 Caractère gaussien du mouvement brownien

Théorème 2.1.2 : *1) Soit $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien. Alors il satisfait les propriétés suivantes :*

(2.4)
$$B_0 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s.$$

(2.5)
$$\forall\, 0 \leq t_1 < \cdots < t_n,\ (B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) \text{ est un vecteur gaussien centré},$$

(2.6)
$$\forall s, t \geq 0, \quad \mathbb{E}(B_s B_t) = \min(s, t).$$

c'est-à-dire B est un processus gaussien réel centré et de fonction de covariance $\Gamma(s, t) = \min(s, t)$.
2) Inversement, si un processus B vérifie (2.4), (2.5), (2.6) et si on note $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de la famille $(B_t)_{t\geq 0}$, alors

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$$

est un mouvement brownien (naturel).

Démonstration :
partie 1 : supposons que B soit un mouvement brownien. Il n'y a que (2.5) et (2.6) à prouver. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$. Montrons par récurrence sur n que $a_1 B_{t_1} + \cdots + a_n B_{t_n}$ est une variable aléatoire normale. Si $n = 1$ cela résulte de (2.3) car $a_1 B_{t_1} = a_1(B_{t_1} - B_0)$. Si on suppose l'assertion démontrée pour $n-1$, la variable aléatoire $a_1 B_{t_1} + \cdots + a_n B_{t_n}$ est alors normale comme somme des deux variables aléatoires $a_1 B_{t_1} + \cdots + (a_n + a_{n-1}) B_{t_{n-1}}$ et $a_n(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ qui sont normales et indépendantes, d'où (2.5). Prenons maintenant $0 \leq s \leq t$. Grâce à (2.2) et à (2.3), on a $\mathbb{E}(B_s(B_t - B_s)) = \mathbb{E}(B_s)\mathbb{E}(B_t - B_s)) = 0$. On obtient alors aussitôt (2.6) puisque

$$\mathbb{E}(B_s B_t) = \mathbb{E}\big(B_s(B_t - B_s) + B_s^2\big) = \mathbb{E}(B_s^2) = s = \min(s,t).$$

partie 2 : Supposons que le processus B vérifie (2.4), (2.5), (2.6). Les conditions (2.1) et (2.4) sont identiques. Soit $0 \leq s \leq t$. D'après (2.5), $B_t - B_s$ est une variable normale et centrée car chaque B_t est centrée. De plus (2.6) implique que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big((B_t - B_s)^2\big) &= \mathbb{E}(B_s^2) + \mathbb{E}(B_t^2) - 2\mathbb{E}(B_s B_t)\\ &= t + s - 2s = t - s.\end{aligned}$$

Donc $B_t - B_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t-s)$. Finalement pour tous $0 \leq r \leq s \leq t$, d'après (2.6), on a

$$\mathbb{E}\big((B_t - B_s)B_r\big) = \min(t,r) - \min(s,r) = 0.$$

Comme le processus B est gaussien, les variables aléatoires $B_t - B_s$ et B_r sont indépendantes pour tout $r \leq s$, ce qui prouve que la variable $B_t - B_s$ est indépendante de la tribu $\widetilde{\mathcal{F}_s} = \sigma(B_r; r \leq s)$. Cela montre que B est un mouvement brownien pour sa filtration naturelle. □

Il résulte alors de la partie 1) du théorème, l'important fait suivant :

Corollaire 2.1.2 *: Le mouvement brownien est unique à équivalence*[3] *près.*

Remarque : Le résultat précédent justifie l'abus de langage qui consiste à parler "du" mouvement brownien au lieu "d'un" mouvement brownien.

[3]Voir la définition 1.1.3 du chapitre 1.

2.1.3 Construction du mouvement brownien

Il existe de nombreuses constructions du mouvement brownien mais toutes procédent en fait des mêmes idées, soit on le construit explicitement par une méthode hilbertienne à partir d'une suite de variables aléatoires normales indépendantes $\mathcal{N}(0,1)$, soit on utilise le théorème de Kolmogorov 1.2.1 pour justifier son existence.

A) Existence du mouvement brownien

Théorème 2.1.3 *: Il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace $\mathbb{R}^{[0,+\infty[}$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\otimes[0,+\infty[}$ tel que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ des applications coordonnées, soit un mouvement brownien naturel.*

Démonstration : On vient de voir qu'un processus réel, gaussien centré, partant de 0 et de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = \min(s,t)$ est un mouvement brownien. Il suffit donc d'après le théorème 1.2.1 de prouver le résultat suivant :

Lemme 2.1.3 *: Pour tout entier n et tous $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, la matrice $\Gamma = \big(\min(t_i,t_j)\big)_{1\leq i,j\leq n}$ est de type positif*

Démonstration du lemme : Par récurrence sur n. Si $n = 1$, le résultat est trivial. Si $n = 2$, on a

$$\Gamma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix},$$

et pour un vecteur $u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$, on a facilement $< u|\Gamma u >= t_1u_1^2 + 2t_1u_1u_2 + t_2u_2^2 \geq t_1u_1^2 + 2t_1u_1u_2 + t_1u_2^2 = t_1(u_1+u_2)^2 \geq 0$, d'où le résultat dans ce cas. On fait alors l'hypothèse de récurrence suivante : Pour $n-1$ instants, la matrice Γ correspondante est telle que pour tout vecteur $v = (v_1,\ldots,v_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, on a $< v|\Gamma v >\geq t_1(v_1+\cdots+v_{n-1})^2$. Pour vérifier cette hypothèse à l'ordre n, remarquons que la matrice Γ a sa première ligne et sa première colonne composées uniquement de la valeur t_1 et que le reste constitue une matrice Γ_{n-1} correspondant aux valeurs $t_2 \leq \ldots \leq t_n$. Pour tout vecteur $u = (u_1,\ldots,u_n)$ on obtient alors

$$< u|\Gamma u >= t_1u_1^2 + 2t_1u_1(u_2+\cdots+u_n) + < v|\Gamma_{n-1}v >,$$

où $v = (u_2, \ldots, u_n)$. Mais on a $< v|\Gamma_{n-1}v > \geq t_2(u_2 + \cdots + u_n)^2 \geq t_1(u_2 + \cdots + u_n)^2$, et l'hypothèse de récurrence est aussitôt vérifiée. D'où le résultat. $\square$

B) Construction hilbertienne du mouvement brownien

Soit $I = [0, T]$ (ou $\mathbb{R}_+$) et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne orthonormale de l'espace de Hilbert $L^2(I, dt)$ des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur I. On note $< f, g >= \int_0^T f(t)g(t)dt$ le produit scalaire des fonctions $f, g \in L^2(I, dt)$.

Théorème 2.1.4 *: soit $(\mathcal{N}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ définies sur un espace probabilisé*[4] $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Pour tout $t \in I$, on pose*

$$B_t = \sum_{n \in \mathbb{N}} < \mathbf{1}_{[0,t]}, e_n > \mathcal{N}_n \tag{2.7}$$

Alors le processus $B = (B_t)_{t \in I}$ est bien défini et c'est un mouvement brownien naturel sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Démonstration : La série (2.7) converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En effet si $S_t^{(n)}$ désigne sa somme partielle d'ordre n, comme les $\mathcal{N}_k$ sont non-corrélées, pour tout $m \leq n$, on a

$$\mathbb{E}\left((S_t^{(n)} - S_t^{(m)})^2\right) = \sum_{k=m+1}^{n} < \mathbf{1}_{[0,t]}, e_k >^2 \to 0$$

quand $m, n \to \infty$ comme reste de la série convergente qui s'écrit : $\sum_{k=0}^{+\infty} < \mathbf{1}_{[0,t]}, e_k >^2 = ||\mathbf{1}_{[0,t]}||_{L^2(I)}$[5]. Ce qui montre que la suite $S_t^{(n)}$ est de Cauchy dans L^2 donc elle converge. De plus comme les $S_t^{(n)}$ sont des variables aléatoires normales centrées, il en est de même pour leur limite B_t (voir le paragraphe 1.2.1, propriété 6). Par le même argument, on voit aussi que toute combinaison linéaire $a_1 B_{t_1} + \cdots + a_N B_{t_N}$ est aussi une variable normale centrée donc le processus $(B_t)_{t \in I}$ est gaussien centré. De plus $B_0 = 0$ par définition et pour tout $s, t \in [0, I]$, grâce à l'indépendance

[4] par exemple l'espace canonique $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ et $\mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{N}}$ où μ est la mesure gaussienne centrée réduite sur $\mathbb{R}$.

[5] d'après l'égalité de Bessel-Parseval.

des $\mathcal{N}_j$, on voit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_sB_t) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} < \mathbf{1}_{[0,s]}, e_k >< \mathbf{1}_{[0,t]}, e_k > \\ &=< \mathbf{1}_{[0,s]}, \mathbf{1}_{[0,t]} >= \min(s,t),\end{aligned}$$

par la formule de Bessel-Parseval. Le processus B est donc un mouvement brownien sur I d'après le Théorème 2.1.2.

Remarque : Si $I = [0,T]$, à partir de $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ on peut construire un mouvement brownien $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ par un procédé de recollement. Considérons une suite $B^{(k)}$ ($k \geq 1$) de copies indépendantes du processus B. Si $0 \leq t \leq T$, on pose $B_t = B_t^{(1)}$ et pour tout entier $n \geq 1$ et tout $nT \leq t \leq (n+1)T$, on définit

$$B_t = \sum_{k=1}^{n} B_T^{(k)} + B_{t-nT}^{(n+1)}.$$

Le processus B part de 0, il est gaussien centré et de covariance $\mathbb{E}(B_sB_t) = \inf(s,t)$. En effet considérons par exemple le cas $n \geq 1$ et $nT \leq s \leq t \leq (n+1)T$. Alors, par l'indépendance de B_{nT} et $B^{(n+1)}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_sB_t) &= \mathbb{E}\left((B_{nT} + B_{s-nT}^{(n+1)})(B_{nT} + B_{t-nT}^{(n+1)})\right) \\ &= \mathbb{E}(B_{nT}^2 + B_{nT}B_{t-nT}^{(n+1)} + B_{nT}B_{s-nT}^{(n+1)} + B_{s-nT}^{(n+1)}B_{t-nT}^{(n+1)}) \\ &= \mathbb{E}(B_{nT}^2) + \mathbb{E}(B_{s-nT}^{(n+1)}B_{t-nT}^{(n+1)}) = nT + \inf(s-nT, t-nT) \\ &= s = \min(s,t).\end{aligned}$$

Le cas où s et t sont dans deux intervalles différents de la forme $[nT, (n+1)T]$ est laissé en exercice.

Exemple : La première construction explicite de ce type est due à N. Wiener, qui montre que le processus $W = (W_t)_{t\in[0,\pi]}$ défini par

$$W_t = \frac{t}{\sqrt{\pi}}\mathcal{N}_0 + \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(jt)}{j}\mathcal{N}_j\right) \tag{2.8}$$

est un mouvement brownien sur $I = [0,\pi]$. Ceci résulte du théorème avec la base hilbertienne $e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $e_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nt)$ ($n \geq 1$) de

$L^2([0,\pi])$. Mais la sommation par paquets de la série (2.8) a permis à Wiener de démontrer que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la série converge uniformément pour $t \in [0,\pi]$ et donc que $t \mapsto W_t(\omega)$ est continue. Ce point délicat est démontré dans l'annexe. Cet exemple de Wiener a été aussi le point de départ de la théorie des séries de Fourier aléatoires (voir le livre de J.P. Kahane [31]). D'autres constructions analogues sont abordées dans les exercices.

2.1.4 Continuité des trajectoires browniennes

Supposons donné un mouvement brownien

$$B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}).$$

Théorème 2.1.5 *: Il existe une version continue de B. Plus précisément, il existe une version de B telle que, pour tout $\gamma < \frac{1}{2}$, les trajectoires sont höldériennes d'exposant γ sur tout intervalle compact.*

Démonstration : Soit $n > 0$ et $0 < s < t$. Comme $B_t - B_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t-s)$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|B_t - B_s|^{2n}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{(t-s)}\right) dx \\
&= (t-s)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{2n} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \\
&= c_n (t-s)^n,
\end{aligned}$$

où $c_n > 0$ est une constante. Le théorème de continuité de Kolmogorov (Théorème 1.1.2 du chapitre 1 avec $\beta = 2n$ et $\alpha = n-1$) montre alors que B a une version continue et même höldérienne d'exposant $\gamma < \frac{n-1}{2n}$ sur tout compact. Notons $B^{(n)}$ cette version. Pour $m \neq n$, la proposition 1.1.2 montre que les versions $B^{(n)}$ et $B^{(m)}$ sont indiscernables, c'est-à-dire l'ensemble

$$A_{n,m} = \{\omega \in \Omega \; ; \; \forall t \geq 0 \; , \; B_t^{(n)}(\omega) = B_t^{(m)}(\omega)\} \tag{2.9}$$

est tel que $\mathbb{P}(A_{n,m}^c) = 0$. Ainsi il suffit de restreindre B à l'espace $\Omega' = \cap_{n,m} A_{n,m}$ pour obtenir une version à trajectoires (localement) höldériennes pour tout $\gamma < \frac{1}{2}$. □

2.1.5 La mesure de Wiener sur $C([0,\infty[,\mathbb{R})$

Considérons l'espace $\mathcal{C} = C([0,\infty[,\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,\infty[$ à valeurs réelles et pour tout $t \geq 0$, considérons l'application t-ième coordonnée $X_t : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, définie pour tout $\omega \in \mathcal{C}$ par

$$X_t(\omega) = \omega(t).$$

On munit l'espace $\mathcal{C}$ de la filtration naturelle $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ des X_t et de la tribu terminale $\mathcal{G} = \sigma(\cup_{t\geq 0}\mathcal{G}_t)$ qui compte tenu du Théorème 1.5.4, coïncide avec la tribu borélienne de l'espace polonais $(\mathcal{C}, d)$ où d est la métrique de la convergence uniforme sur les compacts. Considérons maintenant un mouvement brownien continu[6] $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t>0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. On a

Proposition 2.1.4 *: L'application*

(2.10) $$\Phi : \omega \longmapsto \{t \mapsto B_t(\omega)\},$$

de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathcal{C}, \mathcal{G})$ qui à $\omega \in \Omega$ associe la trajectoire brownienne $t \mapsto B_t(\omega)$, est mesurable.

Démonstration : Il suffit de montrer que l'image inverse par Φ de tout cylindre ouvert de $\mathcal{G}$

(2.11)
$$C = \{f \in \mathcal{C}; f(t_1) \in O_1, \ldots, f(t_n) \in O_n\} \quad (t_i \in \mathbb{R}, O_i \text{ ouvert de } \mathbb{R}),$$

est dans $\mathcal{F}$. Mais ceci est clair car :

(2.12)
$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(C) &= \{\omega \in \Omega; (B_t(\omega))_{t\geq 0} \in C\}\\ &= \{\omega \in \Omega; B_{t_1}(\omega) \in O_1, \ldots, B_{t_n}(\omega) \in O_n\}\\ &= [B_{t_1} \in O_1, \ldots, B_{t_n} \in O_n] \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Proposition 2.1.5 *: 1) Soit $\mathcal{W} = \Phi\mathbb{P}$ la mesure image de $\mathbb{P}$ par l'application Φ définie en (2.10). Cette mesure $\mathcal{W}$ sur la tribu de Borel $\mathcal{G}$ de $C([0,\infty[,\mathbb{R})$, ne dépend pas du mouvement brownien continu B qui a servi à la construire. On l'appelle la mesure de Wiener de $C([0,\infty[,\mathbb{R})$.*

2) Le processus $W = (\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq 0}, \mathcal{W})$ est un mouvement brownien continu appelé processus de Wiener.

[6]qui existe d'après le théorème 2.1.5

Démonstration : 1) Il suffit de vérifier que la mesure $\mathcal{W}$ est définie de manière intrinsèque sur les cylindres (2.11). Mais d'après (2.12),

$$\mathcal{W}(C) = \mathbb{P}\big(\Phi^{-1}(C)\big) = \mathbb{P}(B_{t_1} \in O_1, \dots, B_{t_n} \in O_n),$$

ne dépend que de la loi de $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ qui est intrinsèque. D'où le 1).
2) Le processus W est à trajectoires continues par définition et ses lois de dimension finie sont les mêmes que celles de B donc c'est aussi un mouvement brownien . □

2.1.6 Invariances du mouvement brownien

Théorème 2.1.6 *: Soit* $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un mouvement brownien et* $s > 0$, $c > 0$ *des réels fixés. Les processus définis sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *par*

$$B_t^{(1)} = -B_t, \tag{2.13}$$

$$B_t^{(2)} = B_{t+s} - B_s, \tag{2.14}$$

$$B_t^{(3)} = cB_{\frac{t}{c^2}}, \tag{2.15}$$

$$B_t^{(4)} = tB_{\frac{1}{t}} \quad (t > 0) \quad \text{et} \quad B_0^{(4)} = 0, \tag{2.16}$$

sont des mouvements browniens, les deux premiers relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, *le troisième pour la filtration* $(\mathcal{F}_{\frac{t}{c^2}})_{t\geq 0}$ *et le quatrième pour sa filtration naturelle.*

Démonstration : Les assertions concernant (2.13), (2.14) et (2.15) sont faciles et laissées en exercice. Le processus $B^{(4)}$ part de 0 par définition et c'est clairement un processus gaussien centré. De plus pour $0 < s, t$, on a

$$\mathbb{E}(B_s^{(4)} B_t^{(4)}) = st\mathbb{E}(B_{\frac{1}{s}} B_{\frac{1}{t}}) = st \min(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}) = \min(s, t),$$

d'où le résultat pour $B^{(4)}$ grâce au Théorème 2.1.2. □

Remarque : Le théorème précédent montre que modulo multiplication par un scalaire et centrage adéquat le mouvement brownien est invariant par les changements de temps de la forme $t \to \frac{at+b}{ct+d}$ (transformations projectives ou homographiques).

2.1.7 Mouvement brownien multidimensionnel

On peut généraliser la définition 2.1.1 comme suit

Définition 2.1.3 : *Un processus* $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *est appelé mouvement brownien d-dimensionnel si*

(2.17)
$$B_0 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s.$$

(2.18)
$$\forall\, 0 \leq s \leq t, \text{ le vecteur aléatoire } B_t - B_s \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_s.$$

(2.19)
$$\forall\, 0 \leq s \leq t,\ B_t - B_s \text{ est de loi gaussienne } \mathcal{N}_d(0, (t-s)I_d),$$

où I_d *est la matrice identité de* $\mathbb{R}^d$.

La structure du mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$ est très simple comme l'indique le résultat suivant :

Proposition 2.1.6 : *Soit* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$. *Ecrivons* $B_t = (B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)})$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^d$. *Alors* B *est un mouvement brownien d-dimensionnel si et seulement si les processus* $B^{(i)} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t^{(i)})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *sont des mouvement browniens réels indépendants*[7] *(*$1 \leq i \leq d$*).*

Démonstration : i)(condition nécessaire) Supposons que B est un mouvement brownien d-dimensionnel. Il est facile de vérifier avec la définition 2.1.1, que les processus réels $B^{(i)}$ sont des mouvements browniens réels. Comme ils sont tous issus d'une même famille gaussienne, pour montrer qu'ils sont indépendants, il suffit de vérifier que pour $i \neq j$ et pour $t_1 \leq t_2$, on a $\mathbb{E}(B_{t_1}^{(i)} B_{t_2}^{(j)}) = 0$. Mais $\mathbb{E}(B_{t_1}^{(i)} B_{t_2}^{(j)}) = \mathbb{E}\left((B_{t_1}^{(i)} - B_{t_2}^{(i)})B_{t_2}^{(j)}\right) + \mathbb{E}(B_{t_2}^{(i)} B_{t_2}^{(j)}) = 0$. En effet $\mathbb{E}\left((B_{t_1}^{(i)} - B_{t_2}^{(i)})B_{t_2}^{(j)}\right) = 0$ car les variables aléatoires $B_{t_1}^{(i)} - B_{t_2}^{(i)}$ et $B_{t_2}^{(j)}$ sont indépendantes (car $B_{t_1} - B_{t_2}$ et $\mathcal{F}_{t_2}$ le sont) et $\mathbb{E}(B_{t_2}^{(i)} B_{t_2}^{(j)}) = 0$ car la matrice des covariances de B_{t_2} est diagonale.
ii)(condition suffisante) : La réciproque est facile à vérifier. $\square$

[7] voir la définition 1.5.4

2.2 Régularité des trajectoires browniennes

2.2.1 Variation quadratique des trajectoires

Rappel : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction et $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ une subdivision de $[a,b]$. La variation (resp. la variation quadratique de f le long de la subdivision π) est le nombre $V_\pi = \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$ (resp. $V_\pi^{(2)} = \sum_{k=0}^{n-1}(f(t_{k+1}) - f(t_k))^2$) et la variation (totale) de f sur $[a,b]$ est égale à

$$V_{a,b}^f = \sup_\pi V_\pi.$$

où le sup est pris sur toutes les subdivisions de $[a,b]$. La fonction f est alors dite à variation bornée[8] sur $[a,b]$ si $V_{a,b}^f < +\infty$. Toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes[9] et réciproquement. Il en résulte que la somme, la différence et le produit de deux fonctions à variation bornée est aussi à variation bornée. De plus, comme toute fonction croissante, toute fonction à variation bornée est dérivable presque partout.
Pour les besoins de la théorie des processus, on définit la variation quadratique (totale) de f sur $[a,b]$ non pas comme $\sup_\pi V_\pi^{(2)}$ mais comme la limite

$$[f]_{a,b} = \lim_{|\pi| \to 0} V_\pi^{(2)},$$

où $|\pi| = \max_k(t_{k+1} - t_k)$ est le pas de la subdivision π. On voit immédiatement que si f est continue et à variation bornée, sa variation quadratique est nulle (voir la démonstration du corollaire ci-dessous).
Soit maintenant B un mouvement brownien. On va étudier la variation quadratique de ses trajectoires un intervalle de temps quelconque $[s,t]$. Comme ci-dessus pour une subdivision $\pi : s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, on pose :

$$V_\pi^{(2)} = \sum_{k=0}^{n-1} (B(t_{k+1}) - B(t_k))^2.$$

$V_\pi^{(2)}$ est maintenant une variable aléatoire dont on va considérer la convergence au sens de L^2. On a :

---

[8] ou à variation finie.

[9] au sens large

Proposition 2.2.1 *:* $\lim_{|\pi|\to 0} V_\pi^{(2)} = t - s$ *dans* L^2 *i.e.*

$$\lim_{|\pi|\to 0} \mathbb{E}\big((V_\pi^{(2)} - (t-s))^2\big) = 0.$$

Démonstration : Soit $h = t - s = \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k)$. Alors

$$V_\pi^{(2)} - h = \sum_{k=0}^{n-1} \left((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k)\right).$$

Comme les variables aléatoires $(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k)$ sont indépendantes et centrées, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((V_\pi^{(2)} - h)^2\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(\left((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k)\right)^2\right). \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^2\, \mathbb{E}\left(\left[\frac{(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2}{t_{k+1} - t_k} - 1\right]^2\right).
\end{aligned}$$

Mais la quantité

$$c = \mathbb{E}\left(\left[\frac{(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2}{t_{k+1} - t_k} - 1\right]^2\right)$$

est finie et indépendante de k puisque la variable aléatoire $\frac{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}}$ est de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On a donc

$$\mathbb{E}\left((V_\pi^{(2)} - h)^2\right) = c \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^2 \le c|\pi|(t-s).$$

D'où le résultat en faisant tendre $|\pi|$ vers 0. □

Corollaire 2.2.1 *: Soit B un mouvement brownien continu. Alors, presque sûrement, pour tous $0 \le s < t$, les trajectoires de B ne sont pas à variation bornée sur $[s,t]$.*

Démonstration : On reprend les notations de la proposition précédente. Pour tout $\omega \in \Omega$ et toute subdivision π de $[s,t]$, on a

$$\begin{aligned}
V_\pi^{(2)}(\omega) &= \sum_{k=0}^{n-1}(B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega))^2 \\
&\leq \left(\sup_k |B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)|\right) \sum_{k=0}^{n-1} |B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)| \\
&\leq V_{s,t}(\omega) \left(\sup_k |B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)|\right), \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

où $V_{s,t}(\omega)$ est la variation totale sur $[s,t]$ de la fonction $u \mapsto B_u(\omega)$. Comme cette fonction est uniformément continue, on a

$$\lim_{|\pi|\to 0} \left(\sup_k |B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)|\right) = 0. \qquad (2.21)$$

Si $V_{s,t}(\omega) < +\infty$, (2.20) et (2.21) montrent que nécessairement on doit avoir

$$\lim_{|\pi|\to 0} V_\pi^{(2)}(\omega) = 0. \qquad (2.22)$$

Mais comme la convergence L^2 implique la convergence presque sûre pour une suite extraite, on déduit de la proposition précédente qu'il existe un ensemble $A_{s,t} \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(A_{s,t}) = 1$ et une suite extraite π_k de subdivisions dont le pas tend vers 0 et tel que

$$\lim_{k\to\infty} V_{\pi_k}^{(2)}(\omega) = t - s \neq 0.$$

D'après (2.22), une trajectoire ω qui vérifie $V_{s,t}(\omega) < +\infty$ appartient donc à l'ensemble $(A_{s,t})^c$ qui est de probabilité nulle. Ainsi une trajectoire qui serait à variation bornée sur un certain intervalle de temps, doit appartenir à $\cup_{s,t\in\mathbb{Q}}(A_{s,t})^c$ qui est de probabilité nulle, d'où le corollaire. □

2.2.2 Non différentiabilité des trajectoires browniennes

Le corollaire 2.2.1 implique que presque sûrement, il n'y a aucun intervalle (aussi petit soit-il) sur lequel la trajectoire du mouvement brownien ait une dérivée bornée. Ceci laisse suspecter que la trajectoire brownienne n'est dérivable en aucun point. Ce fait a été conjecturé par le physicien J. Perrin puis démontré rigoureusement par Paley, Wiener et Zygmund en 1933. La démonstration très simple que nous donnons ci-dessous est due à Dvoretski, Erdös et Kakutani (1961).

Théorème 2.2.1 *: Presque sûrement, les trajectoires du mouvement brownien ne sont différentiables en aucun point.*

Démonstration : Il suffit d'après (2.14) de se restreindre à l'étude des trajectoires sur l'intervalle $[0,1]$. Fixons $M > 0$ et pour tout entier $n > 0$ considérons l'événement :

$$A_n = \left\{\omega \in \Omega; \exists s \in \left[\frac{2}{n}, 1 - \frac{2}{n}\right] : |s-t| \leq \frac{2}{n} \right.$$
$$\left. \Rightarrow |B_s(\omega) - B_t(\omega)| \leq 2M|s-t|\right\}.$$

Les A_n forment une suite croissante et $A^{(M)} = \cup_n A_n$ contient tous les $\omega \in \Omega$ tels que la trajectoire $t \longrightarrow B_t(\omega)$ a une dérivée en un point de $]0,1[$ dont la valeur absolue est inférieure à M. D'autre part si $s \in \left[\frac{2}{n}, 1-\frac{2}{n}\right]$ est tel que $|s-t| \leq \frac{2}{n}$ implique $|B_s(\omega) - B_t(\omega)| \leq 2M|s-t|$ et si k est le plus grand entier tel que $\frac{k}{n} \leq s$, alors, on a :

$$\Delta_k(\omega) = \max\Big(|B_{\frac{k+2}{n}}(\omega) - B_{\frac{k+1}{n}}(\omega)|, |B_{\frac{k+1}{n}}(\omega)$$
$$-B_{\frac{k}{n}}(\omega)|, |B_{\frac{k}{n}}(\omega) - B_{\frac{k-1}{n}}(\omega)|\Big) \leq \frac{6M}{n}.$$

Si donc on considère les événements

(2.23)
$$\widetilde{A}_n = \left\{\omega \in \Omega; \exists k \leq n-2 : \Delta_k(\omega) \leq \frac{6M}{n}\right\} = \bigcup_{k=1}^{n-2}\left[\Delta_k \leq \frac{6M}{n}\right].$$

On a $A_n \subset \widetilde{A}_n$. Donc pour prouver que $\mathbb{P}(A^{(M)}) = 0$, il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\widetilde{A}_n) = 0$. On déduit de (2.23) que

$$\mathbb{P}(\widetilde{A}_n) \le \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}\left(\Delta_k \le \frac{6M}{n}\right). \tag{2.24}$$

Mais la valeur de $\mathbb{P}\left(\Delta_k \le \frac{6M}{n}\right)$ ne dépend pas de k car le vecteur aléatoire

$$\left(B_{\frac{k+2}{n}} - B_{\frac{k+1}{n}}, B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}}, B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}\right)$$

a des composantes indépendantes et il est donc de loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})^{\otimes 3}$. On peut alors récrire (2.24) sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\widetilde{A}_n) &\le (n-2)\left(\mathbb{P}\left(|B_{\frac{1}{n}}| \le \frac{6M}{n}\right)\right)^3 \\
&= (n-2)\left(\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\frac{6M}{n}}^{\frac{6M}{n}} \exp\left(-\frac{1}{2}nx^2\right)dx\right)^3 \\
&= (n-2)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\int_{-6M}^{6M} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y^2}{n}\right)dy\right)^3 \to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\mathbb{P}(A^{(M)}) = 0$. Pour finir, il suffit de remarquer que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la trajectoire $t \to B_t(\omega)$ est dérivable quelque part, est inclus dans $\cup_{M\in\mathbb{N}} A^{(M)}$ qui est de probabilité nulle. $\square$

2.3 Renaissance du mouvement brownien après un temps d'arrêt

2.3.1 L'accroissement du mouvement brownien à partir d'un temps d'arrêt

On a vu au théorème 2.1.6 que pour tout $s \ge 0$ fixé, le processus $B_t^{(1)} = B_{s+t} - B_s$ est encore un mouvement brownien. On va généraliser ce résultat en remplaçant le temps fixe s par un temps d'arrêt. C'est la raison du titre imagé de ce paragraphe : le mouvement brownien "renait"[10]

[10]Itô et Mc Kean [29] utilisent le terme "starts afresh" qui a été repris depuis dans la littérature anglophone.

Théorème 2.3.1 : *Soit τ un temps d'arrêt pour la filtration de B. On suppose que τ est presque sûrement fini (i.e. $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$). Alors le processus X défini par*

$$X_t = B_{\tau+t} - B_\tau \quad (t \geq 0),$$

est un mouvement brownien relativement à la filtration $(\mathcal{F}_{\tau+t})_{t\geq 0}$ et indépendant de $\mathcal{F}_\tau$.

Démonstration : Supposons que τ prend un nombre dénombrable de valeurs $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ et soient $A_1, \ldots, A_n$ des boréliens de $\mathbb{R}$ et E dans la tribu $\mathcal{F}_\tau$ des événements antérieurs à τ. Pour $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n, E) \\
&\quad = \sum_k \mathbb{P}(B_{t_1+s_k} - B_{s_k} \in A_1, \ldots, B_{t_n+s_k} - B_{s_k} \in A_n, \tau = s_k, E) \\
&\quad = \mathbb{P}(B_{t_1} \in A_1, \ldots, B_{t_n} \in A_n)\mathbb{P}(E),
\end{aligned}$$

car $[\tau = s_k, E] \in \mathcal{F}_{s_k}$ et les variables aléatoires $B_{t_n+s_k} - B_{s_k}$ sont indépendantes de $\mathcal{F}_{s_k}$ et leur loi ne dépend pas de s_k. En prenant $E = \Omega$, on voit que le processus X a les mêmes lois de dimension finie que B. Comme $X_0 = 0$, X est donc un mouvement brownien. En prenant ensuite E quelconque dans $\mathcal{F}_\tau$, le calcul précédent montre aussi que X est indépendant de $\mathcal{F}_\tau$. Pour terminer la démonstration dans le cas général, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.1 : *Soit τ un temps d'arrêt du mouvement brownien B. Alors il existe une suite $(\tau_n)_{n>0}$ de temps d'arrêt prenant chacun un ensemble dénombrable de valeurs, tels que $[\tau_n = +\infty] = [\tau = +\infty]$ et $\tau_n \searrow \tau$ i.e. $\tau_{n+1} \leq \tau_n$ et $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$.*

Démonstration : Il suffit de considérer les τ_n définis par

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \frac{k+1}{2^n} & \text{si} \quad \frac{k}{2^n} < \tau(\omega) \leq \frac{k+1}{2^n} \\ +\infty & \text{si} \quad \tau(\omega) = +\infty. \end{cases}$$

Alors il est clair que $\tau_n \searrow \tau$. De plus, pour tout $t > 0$, $[\tau_n \leq t] = \bigcup_{\frac{k+1}{2^n} \leq t} [\tau_n = \frac{k+1}{2^n}] = \bigcup_{\frac{k+1}{2^n} \leq t} [\frac{k}{2^n} < \tau \leq \frac{k+1}{2^n}] \in \mathcal{F}_t$. Donc τ_n est un temps d'arrêt. □

suite de la démonstration du théorème : Soit $\tau < +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s. un temps d'arrêt et τ_n les temps d'arrêt considérés dans le lemme. Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$ et $E \in \mathcal{F}_\tau$ (noter que pour tout n, $E \in \mathcal{F}_{\tau_n}$ car $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau_n}$). D'après la première étape, on a

$$\begin{aligned}(2.25)\quad \mathbb{E}\left(f(B_{\tau_N+t_1} - B_{\tau_N}, \ldots, B_{\tau_N+t_n} - B_{\tau_N})\mathbf{1}_E\right) \\ = \mathbb{E}\left(f(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})\right)\mathbb{P}(E).\end{aligned}$$

Comme les trajectoires de B sont continues, le terme de gauche dans (2.25), converge vers $\mathbb{E}\left(f(B_{\tau+t_1} - B_\tau, \ldots, B_{\tau+t_n} - B_\tau)\mathbf{1}_E\right)$ quand $N \to \infty$, d'après le théorème de convergence dominée. D'où le résultat. □

2.3.2 Loi du temps d'atteinte d'un point

Une application intéressante du théorème précédent est la détermination explicite de la loi de l'instant (aléatoire) où le mouvement brownien atteint un point donné. Soit $a \in \mathbb{R}$. Le temps d'atteinte τ_a de a par le mouvement brownien continu B est la variable aléatoire définie par

$$\tau_a(\omega) = \inf\{t \geq 0; B_t(\omega) = a\}.$$

On a vu dans le chapitre 1 que τ_a est un temps d'arrêt de B.

Proposition 2.3.1 *: Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$(2.26)\qquad \mathbb{P}(\tau_a \leq t) = \int_0^t \frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp(-\frac{a^2}{2u})du.$$

Autrement dit la variable aléatoire τ_a a une densité de probabilité de la forme

$$f_{\tau_a}(u) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp(-\frac{a^2}{2u})\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(u).$$

Démonstration : On a

$$(2.27)\qquad \mathbb{P}(\tau_a < t) = \mathbb{P}(\tau_a < t, B_t > a) + \mathbb{P}(\tau_a < t, B_t < a),$$

et comme par continuité des trajectoires $[B_t > a] \subset [\tau_a < t]$, il vient

$$(2.28)\qquad \mathbb{P}(\tau_a < t, B_t > a) = \mathbb{P}(B_t > a).$$

Maintenant

$$\begin{aligned}(2.29)\qquad \mathbb{P}(\tau_a < t, B_t < a) &= \mathbb{P}(\tau_a < t, B_{\tau_a+(t-\tau_a)} - B_{\tau_a} < 0)\\ &= \mathbb{P}(\tau_a < t, \widehat{B}_{(t-\tau_a)} < 0) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau_a < t),\end{aligned}$$

car $\widehat{B} = (B_{\tau_a+u} - B_{\tau_a})_{u\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_a}$ par le théorème 2.3.1. Il résulte de 2.28 et 2.29 qu'on a

$$(2.30)\qquad \mathbb{P}(\tau_a < t) = 2\mathbb{P}(B_t > a) = 2\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{y^2}{2t})dy.$$

D'où le résultat (2.26) en faisant le changement de variable $y = \sqrt{(a^2t)/u}$ dans l'intégrale du second membre de (2.30). □

Corollaire 2.3.1 *(égalité maximale pour le mouvement brownien) : Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a*

$$(2.31)\qquad \mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a).$$

Démonstration : On utilise (2.30) et l'égalité évidente $[\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a] = [\tau_a \leq t]$. □

Une autre conséquence très utile du théorème 2.3.1 est le fait que la famille des temps d'atteinte $(\tau_a)_{a\geq 0}$ constitue un processus de Lévy . Plus précisément

Corollaire 2.3.2 *(processus temps d'atteinte) : Pour la filtration $(\mathcal{F}_{\tau_a})_{a\geq 0}$, $(\tau_a)_{a\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires (i.e. la loi de $\tau_b - \tau_a$ $(a < b)$ est la même que celle de τ_{b-a}).*

Démonstration : $(\mathcal{F}_{\tau_a})_{a\geq 0}$ est une filtration car si $0 \leq a \leq b$, $\tau_a \leq \tau_b$ (car le mouvement brownien est à trajectoires continues partant de 0) donc $\mathcal{F}_{\tau_a} \subset \mathcal{F}_{\tau_b}$. De plus pour tout $a \geq 0$, τ_a est $\mathcal{F}_{\tau_a}$-mesurable. Soient $a \geq 0$ et $h > 0$ et $\widehat{B} = (B_{\tau_a+u} - B_{\tau_a})_{u\geq 0}$ le mouvement brownien renaissant à l'instant τ_a. La continuité des trajectoires de B montre que

$$\tau_{a+h} = \tau_a + \inf\{t > 0;\ \widehat{B} = h\} = \tau_a + \widehat{\tau}_h,$$

où $\widehat{\tau}_h$ est le temps d'atteinte de h pour $\widehat{B}$. Mais $\widehat{B}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_a}$ donc $\widehat{\tau}_h = \tau_{a+h} - \tau_a$, ce qui implique le résultat. □

Une application importante du résultat précédent est la détermination de la loi jointe du couple (B_t, M_t) où $M_t = \sup_{0\leq s\leq t} B_s$ est le maximum de la trajectoire brownienne sur l'intervalle $[0, t]$.

Corollaire 2.3.3 : *Pour $t > 0$, la loi de (B_t, M_t) a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ de la forme*

(2.32)
$$f_t(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x > y \; ou \; y < 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{(2y-x)}{t^{3/2}} \exp\left(-\dfrac{(2y-x)^2}{2t}\right) & si \quad y \geq 0 \; et \; x \leq y \end{cases}$$

Démonstration : D'après le corollaire 2.3.1 on sait que $M_t > 0$ p.s. ; prenons donc $y > 0$ et considérons le mouvement brownien $\widehat{B} = (B_{\tau_y+u} - B_{\tau_y})_{u\geq 0}$ renaissant après le temps τ_y d'atteinte du point y. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_t \leq x, M_t \geq y) &= \mathbb{P}(\tau_y \leq t,\ \widehat{B}_{(t-\tau_y)} \leq x - y) \\
&= \mathbb{P}(\tau_y \leq t,\ \widehat{B}_{(t-\tau_y)} \geq x - y))\ (*) \\
&= \mathbb{P}(\tau_y \leq t,\ \widehat{\tau}_{(y-x)} \leq t - \tau_y)\ (**) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\widehat{\tau}_{(y-x)} + \tau_y \leq t) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau_{(2y-x)} \leq t)\ (***) \\
&= \mathbb{P}(B_t \geq 2y - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{2y-x}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) du,
\end{aligned}$$

les égalités $(*)$ par symétrie de la loi gaussienne, $(**)$ d'après (2.31), $(***)$ car (τ_a) est à accroissements indépendants et l'avant dernière égalité toujours d'après (2.31). On obtient alors le résultat en dérivant en x et y. □

Remarque : Une autre démonstration de ce résultat est basée sur le principe de symétrie d'André (voir l'annexe).

2.4 Annexe

2.4.1 La caractérisation de P. Lévy du mouvement brownien

Nous donnons ici une démonstration du théorème 2.1.1. Pour alléger les notations nous noterons $\mathbb{E}^{(t)}(X) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$, l'espérance conditionnelle de la variable aléatoire X relativement à la sous-tribu $\mathcal{F}_t$. Les hypothèses du théorème se traduisent alors pour tous $t, h \geq 0$ par

$$\mathbb{E}^{(t)}(M_{t+h} - M_t) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^{(t)}\left((M_{t+h} - M_t)^2\right) = h.$$

En fait il nous suffit de prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}^{(t)}\left(e^{ix(M_{t+h}-M_t)}\right) = e^{-\frac{1}{2}x^2 h}. \tag{2.33}$$

En effet si (2.33) est vraie, pour toute suite finie $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ et tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E\left(e^{i\sum_{k=1}^{n} x_k(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{i\sum_{k=1}^{n-1} x_k(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})}\right. \\ &\qquad \left.\mathbb{E}^{(t_{n-1})}\left(e^{ix_n(M_{t_n}-M_{t_{n-1}})}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{i\sum_{k=1}^{n-1} x_k(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})}\right) e^{-\frac{1}{2}x_n^2(t_n-t_{n-1})}, \end{aligned}$$

et par récurrence

$$\mathbb{E}\left(e^{i\sum_{k=1}^{n} x_k(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})}\right) = \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}x_k^2(t_k-t_{k-1})},$$

ce qui montre que les variables aléatoires $M_{t_k} - M_{t_{k-1}}$ sont indépendantes gaussiennes centrées et $\mathbb{E}\left((M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2\right) = t_k - t_{k-1}$. D'où le résultat du théorème.

Passons à la preuve de (2.33) et pour cela fixons $t, h \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ et posons :

$$M_{k,n} = M_{t+\frac{k}{n}h} - M_{t+\frac{k-1}{n}h}.$$

On peut écrire

$$\mathbb{E}^{(t)}\left(e^{ix(M_{t+h}-M_t)}\right)-e^{-\frac{1}{2}x^2h}=\mathbb{E}^{(t)}\left(e^{ix(\sum_{k=1}^{n}M_{k,n})}\right)-e^{-\frac{1}{2}x^2h}$$

(2.34)

$$=\sum_{r=0}^{n-1}\mathbb{E}^{(t)}\left(e^{ix(\sum_{k=1}^{r+1}M_{k,n})}-e^{ix(\sum_{k=1}^{r}M_{k,n})-\frac{1}{2n}x^2h}\right)e^{-\frac{1}{2n}(n-r-1)x^2h}.$$

Evaluons la quantité :

$$\mathbb{E}^{(t)}\left(e^{ix(\sum_{k=1}^{r+1}M_{k,n})}-e^{ix(\sum_{k=1}^{r}M_{k,n})-\frac{1}{2n}x^2h}\right)$$

$$=\mathbb{E}^{(t)}\left(e^{ix(\sum_{k=1}^{r}M_{k,n})}\left[e^{ixM_{r+1,n}}-e^{-\frac{1}{2n}x^2h}\right]\right)$$

$$=\mathbb{E}^{(t)}\left(e^{ix(\sum_{k=1}^{r}M_{k,n})}\mathbb{E}^{(t+\frac{rh}{n})}\left[e^{ixM_{r+1,n}}-e^{-\frac{1}{2n}x^2h}\right]\right)$$

$$=\mathbb{E}^{(t)}\left(e^{ix(\sum_{k=1}^{r}M_{k,n})}\mathbb{E}^{(t+\frac{rh}{n})}\left[e^{ixM_{r+1,n}}-1-ixM_{r+1,n}\right.\right.$$

(2.35)

$$\left.\left.+\frac{x^2}{2}(M_{r+1,n})^2\right]\right)+\mathbb{E}^{(t)}\left(e^{ix(\sum_{k=1}^{r}M_{k,n})}\left[1-\frac{1}{2n}x^2h-e^{-\frac{1}{2n}x^2h}\right]\right).$$

En tenant compte de $e^{-\alpha}-1+\alpha=O(\alpha^2)$, le dernier terme de (2.35) est $O(\frac{1}{n^2})$ et grâce à (2.34) et au calcul précédent on obtient la majoration :

$$|\mathbb{E}^{(t)}\left(e^{ix(M_{t+h}-M_t)}\right)-e^{-\frac{1}{2}x^2h}|\leq O(\frac{1}{n})$$

(2.36)

$$+\sum_{r=0}^{n-1}\mathbb{E}^{(t)}\left(\left|\mathbb{E}^{(t+\frac{rh}{n})}\left[e^{ixM_{r+1,n}}-1-ixM_{r+1,n}+\frac{x^2}{2}(M_{r+1,n})^2\right]\right|\right).$$

Admettons que l'on ait démontré que pour tous $t,h\geq 0$, l'accroissement $M_{t+h}-M_t$ a un moment d'ordre 4 tel que :

$$\mathbb{E}^{(t)}\left((M_{t+h}-M_t)^4\right)\leq 12h^2. \tag{2.37}$$

Alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathbb{E}^{(t)}\left(|M_{t+h}-M_t|^3\right)\leq\left[\mathbb{E}^{(t)}\left((M_{t+h}-M_t)^4\right)\mathbb{E}^{(t)}\left((M_{t+h}-M_t)^2\right)\right]^{1/2}$$

et on déduit de (2.37) que

$$\mathbb{E}^{(t+\frac{rh}{n})}(|M_{k,n}|^3) = O\left(\frac{1}{n}\right)^{3/2} \tag{2.38}$$

Mais puisque $\left|e^{i\theta} - 1 - i\theta + \frac{\theta^2}{2}\right| \le \frac{|\theta|^3}{6}$, (2.38) implique

$$\sum_{r=0}^{n-1} \mathbb{E}^{(t)}\left(\left|\mathbb{E}^{(t+\frac{rh}{n})}\left[e^{ixM_{r+1,n}} - 1 - ixM_{r+1,n} + \frac{x^2}{2}(M_{r+1,n})^2\right]\right|\right)$$
$$\le \frac{|x|^3}{6} nO\left(\frac{1}{n}\right)^{3/2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

On déduit alors de (2.36) que $|\mathbb{E}^{(t)}\left(e^{ix(M_{t+h}-M_t)}\right) - e^{-\frac{1}{2}x^2 h}| = 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, donc $\mathbb{E}^{(t)}\left(e^{ix(M_{t+h}-M_t)}\right) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Il reste donc à démontrer l'inégalité (2.37) :
D'abord remarquons que pour $\delta > 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}(M_{k,n})^{2+\delta} \le \sup_k (M_{k,n})^{\delta} \sum_{k=1}^{n}(M_{k,n})^2$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n}(M_{k,n})^{2+\delta} \to 0 \quad \text{en probabilité} \quad (n \to \infty) \tag{2.39}$$

(car $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n}(M_{k,n})^2 \ge N\right) \le \frac{h}{N} \to 0$ $(N \to \infty)$ et $\sup_k (M_{k,n})^{\delta} \to 0$ *p.s.* si $n \to \infty$ puisque les trajectoires sont continues). Ainsi, comme pour tout entier n, on a $(M_{t+h} - M_t)^4 = \left(\sum_{k=1}^{n} M_{k,n}\right)^4$, on peut écrire :

$$(M_{t+h} - M_t)^4 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} M_{k,n}\right)^4. \tag{2.40}$$

Mais d'après (2.39), quitte à prendre une sous-suite (pour conserver la convergence p.s.), on a aussi

(2.41)

$$(M_{t+h} - M_t)^4 =$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} M_{k,n}\right)^4 +3\left(\sum_{k=1}^{n} M_{k,n}^4\right) - 4\left(\sum_{k=1}^{n} M_{k,n}^3\right)\left(\sum_{l=1}^{n} M_{l,n}\right).$$

On a besoin du lemme suivant dont la démonstration se fait par récurrence sur n :

Lemme 2.4.1 *: Pour toute suite finie de réels $x_1, \dots, x_n$, on a*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^4 + 3\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^4\right) - 4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right)\left(\sum_{l=1}^{n} x_k\right)$$
$$= 6\sum_{i=1}^{n} x_i^2(\sum_{j\neq i} x_j)^2 + 24 \sum_{1\le i<j<k<l\le n} x_i x_j x_k x_l - 6 \sum_{1\le i<j\le n} x_i^2 x_j^2$$
$$\le 6\sum_{i=1}^{n} x_i^2(\sum_{j\neq i} x_j)^2 + 12 \sum_{1\le i<j<k<l\le n} (x_i x_j + x_k x_l)^2 - 18 \sum_{1\le i<j\le n} x_i^2 x_j^2.$$

Grâce au Lemme, pour tout entier n, on a

$$S_n = (\sum_{k=1}^{n} M_{k,n})^4 + 3\sum_{k=1}^{n} M_{k,n}^4 - 4\sum_{k=1}^{n} M_{k,n}^3 \sum_{l=1}^{n} M_{l,n}$$
$$+ 18\sum_{i<j} M_{i,n}^2 M_{j,n}^2 \ge 0.$$

On déduit alors de (2.41) et du lemme de Fatou :

$$\mathbb{E}^{(t)}\left((M_{t+h} - M_t)^4\right) \le \mathbb{E}^{(t)}(\lim_{n\to\infty} S_n) \le \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^{(t)} S_n. \tag{2.42}$$

Mais si on développe S_n, on constate qu'il n'y a (à une constante multiplicative près) que des termes de la forme $M_{i,n}M_{j,n}M_{k,n}M_{l,n}$ (avec $i < j < k < l$), $M_{i,n}M_{j,n}M_{k,n}^2$ (avec $i < j < k$), $M_{i,n}^2 M_{j,n}M_{k,n}$ (avec $i < j < k$)

et $M_{i,n}^2 M_{j,n}^2$ (avec $i < j$) et on voit facilement que tous ces termes sont dans L^1 et qu'on a

$$\mathbb{E}^{(t)}\left(M_{j,n}M_{k,n}M_{l,n}M_{m,n}\right) = \mathbb{E}^{(t)}\left(M_{j,n}M_{k,n}M_{l,n}\mathbb{E}^{(t+\frac{(m-1)h}{n})}(M_{m,n})\right) = 0,$$

et si $j < k < l$,

$$\mathbb{E}^{(t)}\left(M_{j,n}M_{k,n}(M_{l,n})^2\right) = \mathbb{E}^{(t)}\left(M_{j,n}M_{k,n}\mathbb{E}^{(t+\frac{(l-1)h}{n})}(M_{l,n})^2\right) = \left(\frac{h}{n}\right)\mathbb{E}^{(t)}\left(M_{j,n}M_{k,n}\right) = 0.$$

Il ne reste dans $\mathbb{E}^{(t)}S_n$ que les termes $\mathbb{E}^{(t)}\left((M_{i,n})^2(M_{j,n})^2\right)$ pour $i < j$. Mais comme

$$\mathbb{E}^{(t)}\left((M_{i,n})^2(M_{j,n})^2\right) = \mathbb{E}^{(t)}\left((M_{i,n})^2\mathbb{E}^{(t+\frac{(j-1)h}{n})}(M_{j,n})^2\right) = \frac{h}{n}\mathbb{E}^{(t)}\left((M_{j,n})^2\right) = \left(\frac{h}{n}\right)^2,$$

on déduit aussitôt de (2.42)

$$\mathbb{E}^{(t)}\left((M_{t+h} - M_t)^4\right) \leq \lim_{n\to\infty} 24\mathbb{E}^{(t)}\left(\sum_{i<j} M_{i,n}^2 M_{j,n}^2\right) \leq \lim_{n\to\infty} 24\frac{n(n-1)}{2}\frac{h^2}{n^2} \leq 12h^2,$$

ce qui termine la preuve du théorème. □

2.4.2 La construction de Wiener du mouvement brownien

On va montrer que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto W_t(\omega)$ donnée par la formule (2.8) est continue sur $[0, \pi]$. Pour $0 \leq t \leq \pi$ et $0 \leq m < n$ entiers, on considère les variables aléatoires

$$S_{m,n}(t) = \sum_{j=m}^{n-1} \frac{\sin(jt)}{j}\mathcal{N}_j \quad \text{et} \quad T_{m,n} = \max_{0\leq t\leq\pi} |S_{m,n}(t)|.$$

La démonstration est basée sur le lemme technique suivant :

Lemme 2.4.2 : *Pour tout entier $m > 0$, on a*

$$\mathbb{E}(T_{m,2m}) \leq \frac{\sqrt{3}}{m^{1/4}}. \tag{2.43}$$

Admettons provisoirement ce lemme. On voit alors clairement que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n\geq 1} T_{2^{n-1},2^n}\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(T_{2^{n-1},2^n}) < +\infty,$$

ce qui implique

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n\geq 1} T_{2^{n-1},2^n} < +\infty\right) = 1.$$

Ainsi la série

$$\sum_{n\geq 1} \sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(jt)}{j} \mathcal{N}_j$$

converge uniformément et sa somme est donc une fonction continue (avec probabilité 1). D'où le résultat. Il reste à prouver le lemme :

Démonstration du lemme : On a $T_{m,n}^2 \leq \max_{0\leq t\leq \pi} \left|\sum_{j=m}^{n-1} \frac{e^{i(jt)}}{j} \mathcal{N}_j\right|^2$. Mais

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=m}^{n-1} \frac{e^{i(jt)}}{j} \mathcal{N}_j\right|^2 &= \sum_{l,j=m}^{n-1} \frac{e^{i(l-j)t}}{lj} \mathcal{N}_l \mathcal{N}_j \\
&= \sum_{j=m}^{n-1} \frac{\mathcal{N}_j^2}{j^2} + 2\sum_{j<l} \frac{\cos(l-j)t}{lj} \mathcal{N}_l \mathcal{N}_j \\
&= \sum_{j=m}^{n-1} \frac{\mathcal{N}_j^2}{j^2} + 2\sum_{k=1}^{n-m-1} \sum_{j=m}^{n-k-1} \frac{\cos kt}{(j+k)j} \mathcal{N}_j \mathcal{N}_{j+k},
\end{aligned} \tag{2.44}$$

où pour obtenir la dernière égalité de (2.44), on a fait le changement de variable $l - j = k \in \{1, \ldots, n-m-1\}$ (ce qui revient à sommer suivant les tranches parallèles à la diagonale des axes l, j). Ainsi on a

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{E}(T_{m,n}))^2 \leq \mathbb{E}(T_{m,n}^2) &\leq \sum_{j=m}^{n-1} \frac{1}{j^2} + 2 \sum_{k=1}^{n-m-1} \mathbb{E} \left| \sum_{j=m}^{n-k-1} \frac{1}{(j+k)j} \mathcal{N}_j \mathcal{N}_{j+k} \right| \\
&\leq \sum_{j=m}^{n-1} \frac{1}{j^2} + 2 \sum_{k=1}^{n-m-1} \left(\mathbb{E} \left(\sum_{j=m}^{n-k-1} \frac{1}{(j+k)j} \mathcal{N}_j \mathcal{N}_{j+k} \right)^2 \right)^{1/2} \\
&= \sum_{j=m}^{n-1} \frac{1}{j^2} + 2 \sum_{k=1}^{n-m-1} \left(\sum_{j=m}^{n-k-1} \frac{1}{(j+k)^2 j^2} \right)^{1/2}, \qquad (2.45)
\end{aligned}
$$

car dans le développement de $\mathbb{E} \left(\sum_{j=m}^{n-k-1} \frac{1}{(j+k)j} \mathcal{N}_j \mathcal{N}_{j+k} \right)^2$ ci-dessus on a
$\mathbb{E}(\mathcal{N}_j^2 \mathcal{N}_{j+k}^2) = 1$ et $\mathbb{E}(\mathcal{N}_j \mathcal{N}_{j+k} \mathcal{N}_{j'} \mathcal{N}_{j'+k}) = 0$ si $j \neq j'$. Finalement la somme (2.45) est encore majorée par $\dfrac{n-m}{m^2} + 2(n-m) \left(\dfrac{n-m}{m^4} \right)^{1/2}$
D'où il résulte que $\mathbb{E}(T_{m,2m}) \leq \left(\dfrac{1}{m} + 2m(\dfrac{1}{m^3})^{1/2} \right)^{1/2} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{m^{1/4}}.$ □

2.4.3 Le principe de symétrie d'André

Soit τ un temps d'arrêt de la filtration d'un mouvement brownien continu B. On suppose que $\tau < +\infty$ *p.s.* et on considère le processus $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$
\widetilde{B}_t(\omega) = \begin{cases} B_t(\omega) & si \quad t < \tau(\omega) \\ 2B_{\tau(\omega)}(\omega) - B_t(\omega) & si \quad \tau(\omega) \leq t \end{cases} \qquad (2.46)
$$

Autrement dit si on considère le graphe de $t \mapsto B_t(\omega)$, avant l'instant τ, $\widetilde{B}_t(\omega)$ coïncide avec $B_t(\omega)$ et, à partir de τ, $\widetilde{B}_t(\omega)$ est le symétrique de $B_t(\omega)$ par rapport à la droite horizontale $y = \widetilde{B}_\tau(\omega)$ (voir la figure ci-dessous) :

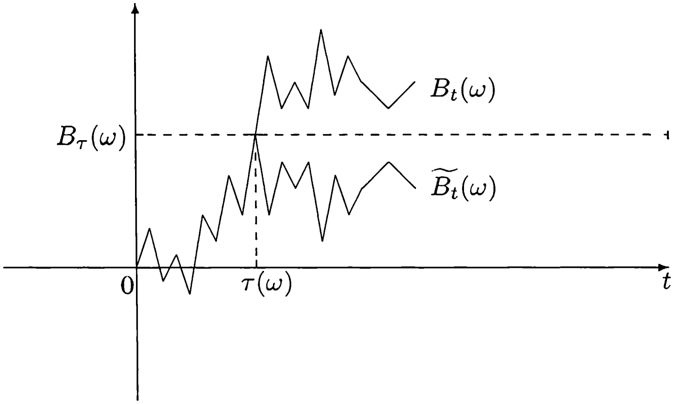

figure : principe de symétrie d'André

Théorème 2.4.1 *: Le processus $\widetilde{B}$ défini en (2.46) est un mouvement brownien continu.*

Démonstration : Par définition on a $\widetilde{B}_t = X_t + Y_t$, où X et Y sont tels que

(2.47) $$X_t = B_t \mathbf{1}_{[t<\tau]} + B_\tau \mathbf{1}_{[\tau \leq t]} = B_{t\wedge\tau} \quad (t \geq 0)$$

et

(2.48) $$Y_t = (B_\tau - B_t)\mathbf{1}_{[\tau\leq t]} = -(B_{t\vee\tau} - B_\tau) \quad (t \geq 0)$$

Puisque $t \wedge \tau \leq \tau$, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable d'après la proposition 1.3.1. D'autre part par la même méthode que celle utilisée dans la preuve du théorème 2.3.1, on voit que le processus Y est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_\tau$. Les processus X et Y sont donc indépendants. De plus les processus Y et $-Y$ sont de même loi comme on peut le voir sur les lois de dimension finie en conditionnant par τ. Les couples de processus (X, Y) et $(X, -Y)$ sont donc de même loi et sont à trajectoires dans $C([0, +\infty[, \mathbb{R}) \times C([0, +\infty[, \mathbb{R})$. Si on les transforme par la fonctionnelle déterministe somme ϕ définie dans l'annexe du chapitre 1 en (1.56), vu qu'elle conserve l'égalité des lois d'après la proposition 1.5.2 , on obtient aussitôt

(2.49) $$\widetilde{B} = \phi(X, Y) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \phi(X, -Y) = B$$

C'est le résultat annoncé. □

Applications : 1) A l'aide du principe de symétrie d'André, on peut donner une démonstration élégante de la proposition 2.3.1 donnant la loi du temps d'atteinte τ_a du point a par le mouvement brownien B : Considérons le mouvement brownien $\widetilde{B}$ réfléchi au sens d'André à partir du temps d'arrêt τ_a. Ayant établi les équations (2.27) et (2.28), on continue en appliquant le principe de symétrie d'André pour dire que :

$$(2.50)\qquad \mathbb{P}(\tau_a, B_t < a) = \mathbb{P}(\tau_a < t, \widetilde{B}_t > a) = \mathbb{P}(\widetilde{\tau}_a < t, \widetilde{B}_t > a)\ (*),$$

car le temps d'atteinte $\widetilde{\tau}_a$ de a par $\widetilde{B}$ est égal à τ_a. Donc par (2.28), on a $(*) = \mathbb{P}(\widetilde{B}_t > a) = \mathbb{P}(B_t > a)$. D'où $\mathbb{P}(\tau_a < t) = 2\mathbb{P}(B_t > a)$.
2) On peut aussi redémontrer le résultat du corollaire 2.3.3 sur la loi du couple (B_t, M_t) en considérant le mouvement brownien $\widetilde{B}$ réfléchi à partir du temps d'arrêt τ_y (qui est aussi le temps d'atteinte de y pour $\widetilde{B}$). Comme $[M_t \geq y] = [\tau_y \leq t]$ et que sur $[\tau_y \leq t]$ on a $B_t = 2y - \widetilde{B}$, pour $x > y$, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_t \leq x, M_t \geq y) &= \mathbb{P}(B_t \leq x, \tau_y \leq t) = \mathbb{P}(\widetilde{B} \geq 2y - x, \tau_y \leq t)\\ &= \mathbb{P}(B_t \geq 2y - x, \tau_y \leq t) = \mathbb{P}(B_t \geq 2y - x),\end{aligned}$$

et la fin de la démonstration est la même qu'en 2.3.3.

2.4.4 Notes et exercices

Exercice 1 (Construction de Ciesielski du mouvement brownien) : On considère la fonction $h = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}[} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1[}$ qui vaut 1 sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}[$ et -1 sur $[\frac{1}{2}, 1[$ et zéro ailleurs. Alors pour tous les entier $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$, on définit

$$h_{k,n}(t) = 2^{n/2} h(2^n t - k) \quad (t \in [0, 1]).$$

(i.e. $h_{k,n} = 2^{n/2}\mathbf{1}_{[k2^{-n},(k+\frac{1}{2})2^{-n}[} - 2^{n/2}\mathbf{1}_{[(k+\frac{1}{2})2^{-n},(k+1)2^{-n}[}$). L'ensemble constitué des fonctions 1, h et des $h_{k,n}$ est appelé le système de Haar et c'est une base hilbertienne de l'espace $L^2([0, 1], dx)$ (voir par exemple [35]). On considère aussi les primitives nulles en 0 des fonctions de Haar :

$$s(t) = \int_0^t h(x)dx, \quad s_{k,n}(t) = \int_0^t h_{k,n}(x)dx.$$

La fonction $s_{k,n}$ est une fonction continue "en triangle" basée sur l'intervalle $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ et qui vaut $2^{-(n/2)-1}$ au point $(k+\frac{1}{2})2^{-n}$. L'ensemble constitué des fonctions t, s et des $s_{k,n}$ est connu sous le nom de système de Schauder.

On se donne maintenant une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$ et qu'on note $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_{k,n}$ $(n \geq 1, 0 \leq k \leq 2^n - 1)$ et pour tout $n \geq 1$, on définit un processus $(S_t^{(n)})_{t\in[0,1]}$ en posant

$$S_t^{(n)}(\omega) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathcal{N}_{k,n}(\omega) s_{k,n}(t).$$

1) Montrer que la série $B_t = t\mathcal{N}_0 + s(t)\mathcal{N}_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_t^{(n)}$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et que $B = (B_t)_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien de fonction de covariance $\min(s,t)$.
2) Vérifier que

$$||S^{(n)}(\omega)||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |S_t^{(n)}(\omega)| = 2^{-(n/2)-1}\left(\max_{0\leq k\leq 2^n-1} |\mathcal{N}_{k,n}(\omega)|\right).$$

3) Démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq k\leq 2^n-1} |\mathcal{N}_{k,n}| > \sqrt{2n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

(on utilisera les inégalités classiques : i) $1-NX \leq (1-X)^N$ si $0 \leq X \leq 1$ et ii) $\int_a^\infty e^{-x^2/2}dx \leq \frac{1}{a}e^{-a^2/2}$ si $a > 0$).
3) En déduire à l'aide du lemme de Borel-Cantelli que pour $\mathbb{P}$-presque tout ω :

$$||S^{(n)}(\omega)||_\infty \leq \sqrt{2n}2^{-(n/2)-1},$$

si n est assez grand et que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} S_t^{(n)}(\omega)$ est uniformément convergente sur $[0,1]$.
4) Conclusion : Presque toutes les trajectoires du mouvement brownien de Ciesielski B sont continues.

Exercice 2 (Une construction hilbertienne du mouvement brownien) : On considère l'opérateur de Fredholm K de $L^2([0,1], dx)$ dans lui même de noyau $k(s,t) = \min(s,t)$ i.e. pour toute $f \in L^2([0,1], dx)$,

$$Kf(s) = \int_0^1 \min(s,t)f(t)dt \quad (s \in [0,1]).$$

1) Vérifier que l'opérateur K est injectif.
2) Pour un scalaire $\lambda \neq 0$, montrer que l'équation aux valeurs propres $K\phi = \lambda\phi$ est équivalente à l'équation différentielle

$$\phi'' + \frac{1}{\lambda}\phi = 0.$$

avec les conditions au bord $\phi(0) = 0$ et $\phi'(1) = 0$.
3) En déduire que les seules valeurs propres possibles de l'opérateur K sont les nombres $\lambda_k = \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2k+1)^2}$ ($k \in \mathbb{N}$) et que les fonctions propres (de norme 1) associées sont données par

$$\phi_k(t) = \sqrt{2}\sin\left((k + \frac{1}{2})\pi t\right).$$

4) On se donne une suite $(\mathcal{N}_k)_{k\geq 0}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$ et on pose

$$B_t(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\mathcal{N}_k(\omega)\phi_k(t).$$

i) Montrer que la série précédente converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et que $B = (B_t)_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien de covariance $k(s,t) = \min(s,t)$. (On pourra utiliser le théorème de Mercer : $k(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k\phi_k(s)\phi_k(t)$).
ii) En déduire que B est un mouvement brownien.

Exercice 3 : Soit B un mouvement brownien sur $[0,1]$. On veut déterminer la loi de la variable aléatoire $\omega \mapsto \int_0^1 B_t^2(\omega)dt$ qu'on notera $\int_0^1 B_t^2 dt$.
1) En utilisant la représentation de B de l'exercice 2, montrer que

$$\int_0^1 B_t^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \mathcal{N}_k^2.$$

2) En déduire la fonction caractéristique

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i\xi\int_0^1 B_t^2 dt\right)\right] = \prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1-2i\xi\lambda_k}}.$$

(on utilisera la fonction caractéristique d'une loi du χ^2 à un degré de liberté qui est la fonction $\xi \mapsto (1-2i\xi)^{-1/2}$).

3) Est-ce-que la représentation de Ciesielski de B permet d'obtenir le résultat de 2) ?
4) Quelles sont l'espérance et la variance de $\int_0^1 B_t^2 dt$?
5) Remarque (due à M. Yor) : Par la même méthode qu'à la question 1) mais en considérant la transformée de Laplace au lieu de la fonction caractéristique et comme on sait que $\mathbb{E}(\exp(-\lambda \mathcal{N}_k^2)) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}}$ $(\lambda > -\frac{1}{2})$(voir [12] t.1 p.118), on obtient la formule dite "de l'aire de Lévy" (voir [51] p. 445) :

$$\mathbb{E}\left(\exp(-\frac{\xi^2}{2}\int_0^1 B_t^2 dt)\right) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(\xi)}}.$$

Exercice 4 : Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Pour tout $n \geq 1$, on considère l'événement

$$A_n = \left[\frac{|B_t|}{t} > n \text{ pour un } t \in]0, \frac{1}{n^4}]\right].$$

1) En utilisant l'événement $\left[n^4 B_{\frac{1}{n^4}} > n\right]$ et l'invariance du mouvement brownien par changement d'échelle, montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$.
2) En déduire que $\mathbb{P}$-presque sûrement, $t \mapsto B_t$ n'est pas dérivable en $t = 0$.
3) Montrer que pour tout $s \geq 0$ (fixé), $\mathbb{P}$-presque sûrement, $t \mapsto B_t$ n'est pas dérivable en s.
4) Expliquer pourquoi le résultat de la question 3) est beaucoup plus faible que celui du théorème 2.2.1.

Exercice 5 : Soit B un mouvement brownien. Pour tout $\lambda > 0$, on considère le processus

$$M_t^{(\lambda)} = \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right).$$

1) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}(M_t^{(\lambda)}) = 1$.
2) En déduire que $M_t^{(\lambda)}$ est une martingale (*indication* : faire apparaître $B_t - B_s$ dans le calcul de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(M_t^{(\lambda)}|\mathcal{F}_s)$).
Cette martingale est appelée *martingale exponentielle*.
3) Si $\tau_a = \inf\{t \geq 0;\ B_t = a\}$ désigne le temps d'atteinte du point a, montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, $\mathbb{E}\left(\exp(-\frac{\lambda^2}{2}\tau_a)\right) = e^{-\lambda a}$.

Exercice 6 : Soit $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un processus sur $\mathbb{R}$ avec $X_0 = 0$.
1) On suppose que pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tous $t, h \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}\left(\exp(iu(X_{t+h} - X_t))|\mathcal{F}_t\right) = \exp(-\frac{1}{2}u^2 h).$$

Démontrer que X est un mouvement brownien.
(*indication* : pour $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, on pourra calculer la fonction caractéristique du vecteur $(X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$.
2) De même montrer qu'un processus X ayant des moments exponentiels, est un mouvement brownien si pour tout $\lambda > 0$ et tous $t, h \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}\left(\exp(\lambda(X_{t+h} - X_t))|\mathcal{F}_t\right) = \exp(\frac{1}{2}\lambda^2 h).$$

3) (Application) Si pour tout $\lambda > 0$, le processus $M_t^{(\lambda)} = \exp\left(\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)$ est une martingale, montrer que X est un mouvement brownien.

Exercice 7 : Soit B un mouvement brownien.
1) Montrer que le processus $U = (U_t)_{t\in[0,1]}$ défini par $U_t = B_t - tB_1$ est un processus gaussien dont on calculera la fonction de covariance. Ce processus s'appelle *le pont brownien.*
2) Si U est un pont brownien, montrer que $(U_{1-t})_{t\in[0,1]}$ est aussi un pont brownien et que le processus $\left((t+1)U_{\frac{t}{t+1}}\right)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
3) Remarque : la loi de la variable aléatoire $\sup_{t\in[0,1]} U_t$ est utilisée en statistique dans le test de Kolmogorov-Smirnov (voir [12] t.2 p. 226).

Exercice 8 : Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $M_t = \sup_{0\leq s\leq t} B_s$ le maximum de B sur l'intervalle de temps $[0, t]$ où $t > 0$ est fixé.
1) Montrer que la variable aléatoire $M_t - B_t$ est distribuée comme $|B_t|$ et comme M_t.
2) Montrer que $2M_t - B_t$ est distribuée comme $||B_t^{(3)}||$ où $B^{(3)}$ est un mouvement brownien de $\mathbb{R}^3$ et $||.||$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$.
Remarque : Ces résultats à temps fixé s'étendent au niveau des processus, ainsi
a) Les processus $(M_t - B_t)_{t\geq 0}$ et $(|B|_t)_{t\geq 0}$ ont même loi (théorème de Lévy).

b) Les processus $(2M_t - B_t)_{t\geq 0}$ et $(||B^{(3)}||_t)_{t\geq 0}$ ont même loi (théorème de Pitman) (voir [51] p. 253).

Exercice 9 : (marche aléatoire et mouvement brownien)
Soit $(\xi_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi prenant les deux valeurs ± 1 avec probabilité $1/2$. Le processus $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $S_0 = 0$ et $S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$ ($k \geq 1$) est la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Les changements d'états s'effectuent à chaque unité de temps (mettons chaque seconde) en effectuant un pas de ± 1 unité avec équiprobabilité. Effectuons un *changement d'échelle* à la fois de temps et d'espace en considérant (pour n entier fixé) la marche aléatoire $(X_t^{(n)})_{t\in\frac{1}{n}\mathbb{N}}$ sur $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{Z}$ partant de 0 telle que

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_k \quad \text{si} \quad t = \frac{k}{n}.$$

Ici les changements d'états ont lieu toutes les $\frac{1}{n}$ secondes en faisant un pas de $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ avec équiprobabilité. Considérons alors le processus à temps continu qu'on notera encore $X_t^{(n)}$, dont les trajectoires sont obtenues par interpolation linéaire entre chaque couple de points $(\frac{k}{n}, X_{k/n}^{(n)})$ et $(\frac{k+1}{n}, X_{(k+1)/n}^{(n)})$.

1) Montrer qu'on peut l'exprimer explicitement sous la forme

$$\forall t \geq 0,\ X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]} + (nt - [nt]) \frac{\xi_{[nt]+1}}{\sqrt{n}}.$$

2) Pour tout $p \geq 1$ et tous $0 \leq t_1 < \cdots < t_p$, montrer[11] qu'on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_{[nt_1]}, S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]}, \ldots, S_{[nt_p]} - S_{[nt_{p-1}]}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_p} - B_{t_{p-1}}),$$

où $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
(*indication* : on pourra utiliser l'indépendance des composantes)
3) En déduire que

[11]le signe $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ signifie converge en loi.

$$(X_{t_1}^{(n)}, X_{t_2}^{(n)} - X_{t_1}^{(n)}, \ldots, X_{t_p}^{(n)} - X_{t_{p-1}}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_p} - B_{t_{p-1}})$$

4) Conclure que $(X_{t_1}^{(n)}, X_{t_2}^{(n)}, \ldots, X_{t_p}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_p})$, autrement dit les lois de dimension finie du processus $(X_t^{(n)})_{t\geq 0}$ convergent vers les lois de dimension finie correspondantes du mouvement brownien.
5) *Remarque* : En fait la loi $\mathbb{P}_n$ de $(X_t^{(n)})_{t\geq 0}$ considérée comme mesure de probabilité sur l'espace $C([0,\infty[,\mathbb{R})$ muni de sa tribu de Borel[12], converge étroitement vers la mesure de Wiener (théorème de Donsker, [51] p. 518).
6) *Note pratique* : pour simuler une trajectoire brownienne sur ordinateur, on peut construire une trajectoire du processus $(X_t^{(n)})_{t\geq 0}$ (pour n assez grand).

Notes : Après le fameux livre de P. Lévy [37] paru dans les années 50 et mis à part le traité très complet de D. Revuz et M. Yor [51], il y a peu d'ouvrages récents dont le sujet principal soit le mouvement brownien. Il est souvent considéré comme un processus bien connu alors qu'en fait, beaucoup de ses propriétés sont très subtiles. Ce sont quelques unes de ces propriétés bien connues que nous avons présentées dans ce chapitre, sans prétention d'aucune originalité.
La démonstration de la non-différentiabilité des trajectoires browniennes est empruntée à Breiman ([5] p. 261), la démonstration simple de la proposition 2.3.1 et du corollaire 2.3.3 sur la loi des temps d'atteinte et la loi du couple (B_t, M_t) nous a été communiquée par Marc Yor alors que notre démonstration initiale était basée sur le principe de symétrie d'André dont la preuve assez délicate que nous donnons en annexe est inspirée d'un argument heuristique de Rogers et Williams ([52] vol.1, p. 25). La construction de Wiener du mouvement brownien sur $[0,\pi]$ est empruntée à Itô et McKean ([29]) et le prolongement à $\mathbb{R}$ par recollement de copies indépendantes suit l'idée donnée par D. Revuz dans [50] p. 243. Enfin la démonstration du théorème 2.1.1 de P. Lévy sur la caractérisation du brownien comme l'unique martingale continue de variation quadratique égale à t, nous a posé

[12] voir l'annexe du chapitre 1.

plus de problèmes. La démonstration qu'on donne maintenant est élégante est rapide (voir par exemple [51] p. 150) mais elle utilise le calcul stochastique et est basée sur la notion de crochet de martingales que je n'ai pas souhaité introduire. J'ai dû revenir à la démonstration initiale de Lévy qui a malheureusement disparu des éditions de 1965 et 1992 ([37]) dont je disposais. J'ai donc reconstitué cette preuve à partir des notes d'un cours donné par B. Roynette en 1976 à l'Université de Nancy. Enfin l'exercice 2 sur la construction hilbertienne du mouvement brownien est empruntée au livre de M. Kac ([30] p. 12) qui fait remarquer que les constructions de Wiener ou de Ciesielski ne permettent pas de déterminer les lois de certaines fonctionnelles naturelles du mouvement brownien comme celles de l'exercice 3 par exemple. Mais comme nous l'a fait remarquer Marc Yor, il convient de relativiser toutes ces constructions particulières élaborées à une époque où leurs auteurs ne disposaient pas du critère général de Kolmogorov de continuité des trajectoires (théorème 1.1.2).

Chapitre 3

Le mouvement brownien comme processus de Markov

Un processus $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, (X_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans l'espace d'états $(E, \mathcal{B}_E)$ est de Markov si pour tous $s < t(\in T)$ la loi de X_t sachant le passé jusqu'à l'instant s ne dépend que de X_s (i.e. du passé le plus récent). Dans le cas d'un processus de Markov à temps discret $T = \mathbb{N}$ et à espace d'états discret, ceci se traduit par la condition que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $i, j, i_{n-1}, \ldots, i_0 \in E$, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1}{=}i_{n-1} \ldots X_0 = i_0){=}P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

La quantité $p_{n,n+1}(i,j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i)$ est la probabilité de transition partant de i à l'instant n d'aller en j à l'instant $n+1$. On sait alors que les lois de dimension finie de X sont entièrement déterminées par la loi de X_0 et par les probabilités de transition puisqu'alors pour tous $n \in \mathbb{N}, i_0, i_1, \ldots, i_n \in E$, on a :

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \\ \mathbb{P}(X_0 = i_0) p_{0,1}(i_0, i_1) \cdots p_{n-1,n}(i_{n-1}, i_n).$$

Quand les probabilités de transition $p_{n,n+1}(i,j) = p(i,j)$ ne dépendent pas de n le processus est homogène et s'appelle "chaîne de Markov".

Dans le cas où le temps est continu et (ou) l'espace des états est quelconque, la modélisation rigoureuse d'un processus de Markov est beaucoup plus délicate pour deux raisons :

D'abord on ne peut pas éviter l'utilisation de l'espérance conditionnelle pour exprimer la propriété de Markov. Ainsi, on dit que X est un processus de Markov si pour tous $s < t(\in T)$ et tout $A \in \mathcal{B}_E$, on a

$$\mathbb{P}(X_t \in A|\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A|X_s). \tag{3.1}$$

D'après (1.24), on sait que $\mathbb{P}(X_t \in A|X_s) = \phi(X_s)$ où ϕ est une fonction déterministe[1]. On note alors $\mathbb{P}(X_t \in A|X_s = x) := \phi(x)$. Pour abréger, on pose $\phi(x) := P_{s,t}(x, A)$ et on dit que c'est la probabilité de transition partant de x à l'instant s d'atteindre l'ensemble d'états A à l'instant t. En fait, on peut, pour chaque triplet (s, t, A) choisir la fonction ϕ de telle sorte que l'application $A \mapsto P_{s,t}(x, A)$ soit une mesure de probabilité sur la tribu $\mathcal{B}_E$ (voir [5] p.319). On la note $P_{s,t}(x, dy)$.

Ensuite, il convient d'adopter un nouveau point de vue sur les probabilités de transition. On doit considérer $P_{s,t}(x, dy)$ comme un opérateur $P_{s,t}$ qui transforme une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ borélienne bornée (ou positive) en une fonction $P_{s,t}f$ donnée par :

$$P_{s,t}f(x) = \int_E f(y) P_{s,t}(x, dy).$$

Concrètement $P_{s,t}f(x)$ représente l'espérance de $f(X_t)$ sachant que $X_s = x$. On a ainsi un moyen analytique efficace pour exprimer la propriété de Markov et calculer les lois de dimension finie du processus. Si $P_{s,t}$ ne dépend que de la différence $t - s$, on dit que le processus de Markov est homogène.

Les processus de Feller constituent une classe particulièrement intéressante de processus de Markov homogènes. Leurs opérateurs de transition forment un semi-groupe dont la structure analytique est assez riche pour fournir de précieuses propriétés probabilistes du processus. Dans ce chapitre nous illustrons ces idées sur l'exemple du mouvement brownien. Ceci nous permet d'introduire les outils fondamentaux que sont la résolvante et le générateur infinitésimal d'un processus de Feller.

[1] déterminée à un ensemble μ_{X_s}-négligeable près.

3.1 Notions sur les processus de Markov

3.1.1 Noyaux de transition et propriété de Markov

Soit $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}_+$ ou $[0, a]$ $(a > 0)$ et $(E, \mathcal{B}_E)$ un espace polonais.

Définition 3.1.1 : *Une collection* $\{P_{s,t}\,;\ s, t \in T$ *et* $s < t\}$ *d'applications de* $E \times \mathcal{B}_E$ *dans* $[0, 1]$ *est appelée famille de noyaux de transition si*
1) $\forall A \in \mathcal{B}_E$, $\forall s < t$, *l'application* $x \mapsto \mathbb{P}_{s,t}(x, A)$ *est mesurable.*
2) $\forall x \in E$, $\forall s < t$, $A \mapsto P_{s,t}(x, A)$ *est une mesure de probabilité sur* $\mathcal{B}_E$.
3) $\forall A \in \mathcal{B}_E$, $\forall s < t < u$, *on a l'équation de Chapman-Kolmogorov :*

$$P_{s,u}(x, A) = \int_E P_{s,t}(x, dy) P_{t,u}(y, A). \tag{3.2}$$

Remarque 1 : Les noyaux de transition $P_{s,t}$ agissent comme des opérateurs sur les fonctions boréliennes bornées $f : E \to \mathbb{R}$, si on pose

$$P_{s,t} f(x) = \int_E P_{s,t}(x, dy) f(y). \tag{3.3}$$

On vérifie immédiatement que la fonction $\mathbb{P}_{s,t} f$ ainsi définie sur E est aussi une fonction borélienne et bornée. L'équation de Chapman-Kolmogorov (3.2) se traduit alors en termes d'opérateurs sous la forme

$$P_{s,u} = P_{s,t} P_{t,u}, \tag{3.4}$$

où $P_{s,t}P_{t,u}$ est le composé (dans cet ordre) des opérateurs $P_{s,t}$ et $P_{t,u}$ (i.e. pour toute fonction f borélienne bornée, $P_{s,t}P_{t,u}f = P_{s,t}(P_{t,u}f)$).

Remarque 2 : Lorsque $E = \mathbb{R}^d$ et que pour tout $x \in E$, et tous $s < t$, la mesure $P_{s,t}(x, dy)$ a une densité $y \mapsto p_{s,t}(x, y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue (i.e. $P_{s,t}(x, dy) = p_{s,t}(x, y)dy$), les fonctions $p_{s,t}$ s'appellent les densités de transition de la famille $(P_{s,t})$. L'équation de Chapman-Kolmogorov prend alors la forme suivante (exercice) :

$$\forall x, z \in \mathbb{R}^d, \quad \forall s < t < u, \quad p_{s,u}(x, z) = \int_{\mathbb{R}^d} p_{s,t}(x, y) p_{t,u}(y, z) dy.$$

Définition 3.1.2 : *Un processus* $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ *est un processus de Markov à valeurs dans* E *et de famille de noyaux de transition*

$\{P_{s,t}\,;\ s,t \in T$ et $s < t\}$ si pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ borélienne bornée et tous $s < t$ dans T, on a

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = P_{s,t}f(X_s) \quad \mathbb{P}-p.s.. \tag{3.5}$$

Les noyaux de transition $P_{s,t}$ sont aussi appelés probabilités de transition. La loi de X_0 i.e. la mesure de probabilité ν sur $\mathcal{B}_E$ définie par

$$\nu(A) = \mathbb{P}(X_0 \in A),$$

est appelée loi initiale du processus X.
Lorsque $P_{s,t} = P_{0,t-s}$ ne dépend que de la différence $t-s$, on dit que X est un processus de Markov homogène.

Remarque 3 : L'équation (3.5) s'appelle la propriété de Markov. Si $f = \mathbf{1}_A$ où $A \in \mathcal{B}_E$, elle signifie que $\mathbb{P}(X_t \in A|\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A|X_s)$ (voir l'introduction).

Remarque 4 : L'introduction du chapitre peut suggérer que la définition 3.1.2 devrait plutôt avoir un statut de Proposition. En fait, en temps continu, on ne prend pas (3.1) comme définition d'un processus de Markov pour éviter des complications théoriques. En particulier, il faudrait alors démontrer que les noyaux de transition vérifient l'équation de Chapman-Kolmogorov ce qui exigerait quelque restriction supplémentaire sur le processus X : voir à ce propos l'exercice 1 à la fin de ce chapitre.

Remarque 5 : Lorsque le processus de Markov X est homogène, la famille des noyaux de transition ne dépend plus que d'un paramètre car pour tous s et u dans T, $P_{s,s+u} = P_{0,u}$. On pose alors $P_{0,u} := P_u$ pour simplifier les notations. On a alors

$$\forall s \in T, \quad P_u(x, A) = \mathbb{P}(X_{s+u} \in A|X_s = x),$$

et la propriété de Markov (3.5) prend la forme

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = P_{t-s}f(X_s) \quad \mathbb{P}-p.s. \tag{3.6}$$

La propriété de Chapman-Kolmogorov (3.4), s'écrit alors

$$\forall t, t' \in T, \quad P_t P_{t'} = P_{t+t'}. \tag{3.7}$$

La famille d'opérateurs $(P_t)_{t\in T}$ est *le semi-groupe* du processus de Markov homogène X. Lorsque $T = \mathbb{N}$, le semigroupe est complètement déterminé par l'opérateur P_1 puisque la propriété de semi-groupe (3.6) implique que pour tout entier n, on a

$$P_n = (P_1)^n.$$

Dans ce cas le processus X est appelé chaîne de Markov d'opérateur de transition P_1. Le cas où l'espace des états E est fini ou dénombrable[2] est généralement étudié en détail dans les cours de Master 1 (voir [39]).

3.1.2 Lois de dimension finie d'un processus de Markov

Proposition 3.1.1 *: Soit X un processus de Markov de loi initiale ν et de probabilités de transition $P_{s,t}$. Pour toute suite finie d'instants $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ et tout choix de fonctions boréliennes bornées $f_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$ $(0 \leq i \leq k)$, on a*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big(f_0(X_0)f_1(X_{t_1})\dots f_k(X_{t_k})\big)\\
&\qquad = \int_E \nu(dx_0)f(x_0)\int_E P_{0,t_1}(x_0,dx_1)f_1(x_1)\dots\\
&\qquad\qquad \dots\int_E P_{t_{k-1},t_k}(x_{k-1},dx_k)f_k(x_k)\\
&\qquad\qquad\quad =< \nu, f_0P_{t_0,t_1}f_1P_{t_1,t_2}f_2\dots f_{k-1}P_{t_{k-1},t_k}f_k >,
\end{aligned}$$

où dans la formule précédente, on utilise la notation (3.3) et où chaque opérateur P_{t_{i-1},t_i} s'applique à toute l'expression située à sa droite alors que chaque fonction f_i est multipliée par toute l'expression située à sa droite.

[2]dans ce cas P_1 s'identifie à la matrice des transitions de la chaîne de Markov X.

Démonstration : En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle et la propriété de Markov, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k} f_i(X_{t_i})\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\prod_{i=0}^{k} f_i(X_{t_i})|\mathcal{F}_{t_{k-1}})\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k-1} f_i(X_{t_i})\mathbb{E}\big(f_k(X_{t_k})|\mathcal{F}_{t_{k-1}}\big)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k-1} f_i(X_{t_i})P_{t_{k-1},t_k}f_k(X_{t_{k-1}}))\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k-1} g_i(X_{t_i})\right),
\end{aligned}$$

où $g_i = f_i$ si $i \leq k-2$ et $g_{k-1} = f_{k-1}P_{t_{k-1},t_k}f_k$. On arrive alors au résultat par récurrence descendante sur k. □

Corollaire 3.1.1 *: Sous les hypothèses de la proposition précédente, pour tous $A_0, A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{B}_E$, on a*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_k} \in A_k\big)\\
&\quad = \int_{A_0} \nu(dx_0) \int_{A_1} P_{0,t_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} P_{t_1,t_2}(x_1, dx_2) \ldots\\
&\qquad\qquad \ldots \int_{A_k} P_{t_{k-1},t_k}(x_{k-1}, dx_k).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Si le processus de Markov X est homogène de semi-groupe $(P_u)_{u\geq 0}$, la formule précédente se récrit sous la forme

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_k} \in A_k\big)\\
&\quad = \int_{A_0} \nu(dx_0) \int_{A_1} P_{t_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \ldots\\
&\qquad\qquad \ldots \int_{A_k} P_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Démonstration : il suffit d'appliquer la proposition avec $f_i = 1_{A_i}$. □

Remarque : Supposons que $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ soit la filtration naturelle du processus de Markov X. La restriction de la probabilité $\mathbb{P}$ à la tribu $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t\in T}\mathcal{F}_t)$ terminale de X est parfaitement déterminée par les valeurs $\mathbb{P}(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_k} \in A_k)$ prises par $\mathbb{P}$ sur les ensembles cylindriques

$$[X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_k} \in A_k] \tag{3.10}$$

$(k \in \mathbb{N}, (t_i) \in T^k, (A_i) \in (\mathcal{B}_E)^{k+1})$. On voit grâce à (3.8) et (3.9) que cette probabilité notée parfois $\mathbb{P}_\nu$ est entièrement caractérisée par la loi initiale ν et les noyaux de transition (resp. le semi-groupe) de X. En général, lorsque X est un Markov homogène, on définit sur $\mathcal{F}_\infty$ une famille $(\mathbb{P}_x)_{x\in E}$ de mesures de probabilité en posant

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x\big(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_k} \in A_k\big) \\
&\quad = \int_{A_0} \delta_x(dx_0) \int_{A_1} P_{t_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots \int_{A_k} P_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k),
\end{aligned}$$

où δ_x est la mesure de Dirac au point x. Cette mesure $\mathbb{P}_x$ qui s'identifie à la probabilité conditionnelle "sachant $[X_0 = x]$" permet des interprétations très intéressantes dans l'étude des processus de Markov et permet de simplifier beaucoup d'énoncés. Nous donnerons quelques détails sur ces notions dans l'annexe de ce chapitre et en particulier nous verrons qu'on a

$$\mathbb{P}_\nu = \int_E \mathbb{P}_x d\nu(x).$$

3.2 Probabilités de transition du mouvement brownien

3.2.1 Le semi-groupe du mouvement brownien

Soit $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.2.1 : *B est un processus de Markov homogène sur $\mathbb{R}$, de loi initiale $\nu = \delta_0$ et dont le semi-groupe est de la forme*

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-y)^2}{t}\right) f(y)dy, \tag{3.11}$$

pour tout $t > 0$ et toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, borélienne bornée. Autrement dit pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$,

$$P_t(x, A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-y)^2}{t}\right) dy,$$

i.e. $P_t(x, dy)$ est la mesure gaussienne de moyenne x et de variance t.

Pour la démonstration on aura besoin d'un résultat bien connu sur l'espérance conditionnelle :

Lemme 3.2.1 : *Soient $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne bornée, X et Y des variables aléatoires avec X mesurable par rapport à une tribu $\mathcal{T}$ et Y indépendante de la tribu $\mathcal{T}$. Alors si $\widetilde{g}(x) = \mathbb{E}(g(x, Y))$, on a :*

$$\mathbb{E}(g(X, Y)|\mathcal{T}) = \widetilde{g}(X).$$

Démonstration : Voir par exemple le livre de J.Y. Ouvrard [45] p.161.

Démonstration du théorème : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée et $0 < s < t$. Alors en considérant la fonction[3]

$$\widetilde{f}(x) = \mathbb{E}(f(x+B_t-B_s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-y)^2}{t-s}\right) f(y)dy$$

et en appliquant le lemme 3.2.1. avec $X = B_s$, $Y = B_t - B_s$, $g(x, y) = f(x+y)$, $\mathcal{T} = \mathcal{F}_s$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(B_t)|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(f(B_t - B_s + B_s)|\mathcal{F}_s) = \widetilde{f}(B_s)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(B_s-y)^2}{t-s}\right) f(y)dy\\ &= P_{t-s}f(B_s),\end{aligned}$$

ce qui prouve d'après (3.6) que B est un processus de Markov homogène dont le semigroupe P_t est bien de la forme annoncée en (3.11). □

Remarque : Le lemme 3.2.1 se généralise immédiatement au cas de 2 vecteurs aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ avec $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. On montre alors de la même façon que le mouvement brownien de $\mathbb{R}^d$ (voir

[3] on rappelle que $B_t - B_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t-s)$

2.1.3) est un processus de Markov homogène de semi-groupe (P_t) donné par

$$(3.12) \qquad P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{||x-y||^2}{t}\right) f(y)dy,$$

pour tout $t > 0$ et toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, borélienne bornée, où $||.||$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$. Autrement dit le mouvement brownien de $\mathbb{R}^d$ a des densités de transition

$$(3.13) \qquad p_t(x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{||x-y||^2}{t}\right) \quad (x, y \in \mathbb{R}^d).$$

3.2.2 La propriété de Markov forte

Nous avons défini le mouvement brownien

$$B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$$

comme un processus partant de 0 (i.e. $B_0 = 0$). Le processus $B^{(x)}$ défini pour tout $t \geq 0$ par

$$(3.14) \qquad B_t^{(x)} = x + B_t,$$

est aussi un processus de Markov homogène de même semi-groupe que B donné par la formule (3.11). On l'appelle le *mouvement brownien partant de x*. Plus généralement, si on considère une variable aléatoire X_0 indépendante de B, le processus $(X_0 + B_t)_{t\geq 0}$ est encore un processus de Markov de semi-groupe (3.11).
Voyons maintenant comment on peut reformuler le théorème d'arrêt vu dans la section 3 du chapitre 2 à l'aide du semi-groupe (3.11) de B :

Théorème 3.2.2 *(Propriété de Markov forte) : Pour toute fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée, pour tout $h \geq 0$ et tout temps d'arrêt presque sûrement fini τ de la filtration de B, on a*

$$\mathbb{E}(f(B_{\tau+h})|\mathcal{F}_\tau) = P_h f(B_\tau) \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Démonstration : on écrit $\mathbb{E}(f(B_{\tau+h})|\mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(f(B_{\tau+h} - B_\tau + B_\tau)|\mathcal{F}_\tau)$ et on utilise le lemme 3.2.1 avec $X = B_\tau$, $Y = B_{\tau+h} - B_\tau$ et $g(x,y) = f(x+y)$, la démonstration est alors identique à celle du théorème 3.2.1, puisqu'on sait par le théorème 2.3.1 que la variable aléatoire $B_{\tau+h} - B_\tau$ est de même loi que B_h et qu'elle est indépendante de B_τ. □

On trouvera dans l'annexe une présentation rapide de la propriété de Markov forte pour un processus de Markov canonique.

3.3 Propriétés analytiques du semi-groupe brownien

3.3.1 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller

Considérons l'espace de Banach $\big(C_0(E), ||.||_\infty\big)$ des fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ continues et tendant vers 0 à l'infini, muni de la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in E} |f(x)|$ de la convergence uniforme et soit $(P_t)_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs positifs[4] de $C_0(E)$ dans lui même.

Définition 3.3.1 *: On dit que $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de Feller si :*
1) $P_0 = I$ et $||P_t|| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.
2) $\forall t, t' \geq 0, P_t P_{t'} = P_{t+t'}$
3) $\forall f \in C_0(\mathbb{R}), \quad \lim_{t\downarrow 0} ||P_t f - f||_\infty = 0$.
Un processus de Markov homogène sur E dont le semi-groupe (au sens de (3.7)) est de Feller, est appelé processus de Feller[5].
Ainsi un processus de Markov homogène sur E est de Feller si ses opérateurs de transition envoient $\mathbb{C}_0(E)$ dans lui même et si pour toute fonction $f \in \mathbb{C}_0(E)$, $\lim_{t\downarrow 0} ||P_t f - f||_\infty = 0$.

Remarque : On déduit immédiatement de 2) et 3), la continuité à droite du semi-groupe en tout point $t \geq 0$ i.e.

$$\lim_{h\downarrow 0} P_{t+h} f = P_t f \quad \text{dans} \quad C_0(E). \tag{3.15}$$

Définition 3.3.2 *: Si $f \in C_0(E)$ est telle que la limite*

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(P_t f - f) = Af, \tag{3.16}$$

[4] i.e. $f \geq 0 \Rightarrow P_t f \geq 0$.

[5] Pour un tel semi-groupe, les opérateurs sont de plus markoviens i.e. $\forall t \geq 0, P_t\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

existe dans $C_0(E)$[6], on dit que f est dans le domaine D_A de l'opérateur A ainsi défini par (3.16) et appelé générateur infinitésimal du semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$.

Remarques : 1) La notion de générateur infinitésimal pour un processus X de Markov-Feller, permet de préciser l'accroissement du processus en temps petit. En effet, avec les notations de (3.6), pour tout instant $s > 0$, si $h > 0$, pour tout $f \in D_A$, on a

$$\mathbb{E}(f(X_{s+h})|\mathcal{F}_s) = P_h f(X_s) = f(X_s) + hAf(X_s) + o(h),$$

où $o(h)$ ne dépend que de f.
2) L'importance du générateur infinitésimal dans la théorie moderne des processus de Markov est due au fait que pour toute fonction $f \in D_A$, le processus

(3.17) $$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Af)(X_s)ds \quad (t \geq 0),$$

est une martingale par rapport à la filtration de X. Nous donnerons un aperçu de ces liens entre générateur infinitésimal et propriétés de martingale dans l'annexe de ce chapitre.

Les propriétés analytiques générales liant le semi-groupe et son générateur infinitésimal sont contenues dans le résultat suivant

Proposition 3.3.1 *: Soit $f \in D_A$. On a :*
i) $\forall t \geq 0$, $P_t f \in D_A$
ii) pour tout $x \in \mathbb{R}$,la fonction $t \mapsto P_t f(x)$ est dérivable, la fonction $\frac{d}{dt}P_t f : x \mapsto \frac{d}{dt}P_t f(x)$ est dans $C_0(E)$ et on a

(3.18) $$\frac{d}{dt}P_t f = AP_t f = P_t Af,$$

de plus on a

(3.19) $$P_t f - f = \int_0^t AP_s f ds = \int_0^t P_s Af ds.$$

[6] i.e. $Af \in C_0(E)$ et $\lim_{t\to 0} ||\frac{1}{t}(P_t f - f) - Af||_\infty = 0$.

Démonstration : Soit $t \geq 0$. La propriété de semi-groupe et la continuité de l'opérateur P_t impliquent

$$\begin{aligned}\lim_{u \to 0} \frac{P_u(P_t f) - P_t f}{u} &= \lim_{u \to 0} P_t \left(\frac{P_u f - f}{u} \right) \\ &= P_t A f \\ &= A P_t f,\end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion i). Le même calcul montre que $t \mapsto P_t f$ est dérivable en tout $t > 0$ et dérivable à droite en $t = 0$ et qu'on a (3.18). De plus la fonction $t \mapsto \int_0^t AP_s f ds$ est dérivable et sa dérivée $t \mapsto AP_t f$ coïncide avec la dérivée de la fonction $t \mapsto P_t f - f$. Ces deux fonctions égales à 0 en $t = 0$ sont donc égales partout et on a (3.19). □

Remarque : L'équation (3.18) montre que la fonction

$$(t, x) \mapsto u(t, x) = P_t f(x); (t > 0, x \in R),$$

est solution de "l'équation de la chaleur"

$$(\frac{\partial}{\partial t} - A)u = 0$$

avec la condition initiale $u(0, x) \equiv f(x)$. Cette dénomination trouve son origine dans le cas du semi-groupe du mouvement brownien dont le générateur infinitésimal est l'opérateur $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$ comme on va le voir ci-dessous.

Théorème 3.3.1 : *Le mouvement brownien est un processus de Feller. De plus toute fonction $f \in C_0(\mathbb{R})$, de classe C^2 avec une dérivée seconde $f'' \in C_0(\mathbb{R})$, est dans le domaine D_A du générateur infinitésimal A et pour une telle fonction, on a*

$$Af(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x).$$

Démonstration : 1) Montrons d'abord que B est un processus de Feller. Pour $f \in C_0(\mathbb{R})$, la fonction $P_t f$ définie par la formule (3.11), est continue d'après le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. En effet pour tout y fixé, la fonction sous le signe intégrale est clairement continue en x et on peut la dominer, si x est dans un intervalle

compact, par une fonction intégrable de la forme $||f||_\infty \exp(-\frac{1}{2}y^2 + Cy)$, où $C > 0$ est une constante. Montrons ensuite que $P_t f(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$:
Soit $\epsilon > 0$ et $M = M(\epsilon) > 0$ tel que $|y| > M$ implique $|f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Comme le noyau intégral de (3.11) est une densité de probabilité, on a

$$|P_t f(x)| \leq \int_{-M}^{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-y)^2}{t}\right) |f(y)| dy + \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.20}$$

Mais en passant à la limite sous le signe somme, l'intégrale du second membre de (3.20) tend vers zéro quand $|x| \to \infty$ puisque la convergence est dominée par la fonction continue $|f|$ qui est intégrable sur $[-M, M]$. On a ainsi $P_t f(x)| \leq \epsilon$ pour x assez grand, ce qui prouve que $P_t f \in C_0(\mathbb{R})$. Il reste à prouver le point 3) de la définition 3.3.1 :
On a

$$\begin{aligned} P_t f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-y)^2}{t}\right) (f(y) - f(x)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{z^2}{t}\right) (f(x+z) - f(x)) dz. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $f \in C_0(\mathbb{R})$, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|z| \leq \alpha$ implique qu'on ait la relation $|f(x+z) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. En décomposant l'intégrale du second membre de (3.21) en une intégrale sur $[-\alpha, \alpha]$ et sur $[-\alpha, \alpha]^c$, on déduit aussitôt que (3.22)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P_t f(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + 2||f||_\infty \int_{[-\alpha,\alpha]^c} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{z^2}{t}\right) dz.$$

Mais l'intégrale dans le second membre de (3.22) tend vers 0 quand $t \to \infty$. Le premier membre de (3.22) peut donc être rendu inférieur à ϵ pour t assez grand, d'où l'assertion 3).
2) Considérons maintenant $f \in C_0(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ avec $f'' \in C_0(\mathbb{R})$. Si on fait le changement de variable $y = x + z\sqrt{t}$ dans la formule (3.11), on a

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) f(x + z\sqrt{t}) dz.$$

La formule de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 2 au point x avec l'accroissement $h = z\sqrt{t}$, montre qu'on peut écrire

$$f(x+z\sqrt{t}) = f(x) + z\sqrt{t}f'(x) + \frac{1}{2}z^2tf''(x) + \frac{1}{2}z^2t\left(f''(x+\theta z\sqrt{t}) - f''(x)\right), \tag{3.23}$$

où $\theta = \theta(x, z\sqrt{t}) \in [0,1]$. Ainsi lorsqu'on intégre la relation 3.23 par rapport à la mesure $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)dz$, en tenant compte du fait que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^2 \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz = 1,$$

on voit que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t}(P_tf(x) - f(x)) - \frac{1}{2}f''(x) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^2 \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)\left(f''(x+\theta z\sqrt{t}) - f''(x)\right) dz. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Il nous reste à prouver que le second membre de (3.24), tend vers 0 uniformément en $x \in \mathbb{R}$ quand $t \to 0$. On doit procéder délicatement. D'abord, on fait le changement de variable $u = z\sqrt{t}$ et l'intégrale de (3.24), s'écrit

$$r(t,x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t\sqrt{t}} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right)\left(f''(x+\theta u) - f''(x)\right) du.$$

Comme f'' est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, à tout $\epsilon > 0$, on peut associer $\alpha > 0$ tel que $|h| \leq \alpha$ implique $|f''(x+h) - f''(x)| \leq \epsilon$. Si on décompose l'intégrale précédente, en une intégrale sur $[-\alpha, \alpha]$ et sur $[-\alpha, \alpha]^c$, on obtient

$$|r(t,x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + ||f''||_\infty \int_{[-\alpha,\alpha]^c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t\sqrt{t}} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) du,$$

et en revenant à $z = \frac{u}{\sqrt{t}}$, on obtient

$$|r(t,x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + 2||f''||_\infty \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^2 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz. \tag{3.25}$$

Comme l'intégrale du second membre de (3.25) tend vers 0 quand $t \to 0$, ceci montre que $|r(t,x)| \leq \epsilon$ uniformément en x, pour t assez petit. La deuxième assertion du théorème en résulte aussitôt. □

3.3.2 La résolvante du mouvement brownien

Pour déterminer complètement le domaine D_A du générateur infinitésimal du mouvement brownien, on a besoin de la notion de résolvante :

Définition 3.3.3 *: On appelle résolvante*[7] *d'un semi-groupe de Feller $(P_t)_{t\geq 0}$, la famille $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ des opérateurs définis sur $C_0(E)$ par :*

$$R_\lambda f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_t f(x) dt \quad (x \in E). \tag{3.26}$$

On notera que la fonction $t \mapsto P_t f(x)$ est borélienne (puisque continue à droite d'après (3.15)) et qu'elle est bornée (par $||f||_\infty$) donc elle est intégrable pour la mesure $e^{-\lambda t}dt$. L'expression $R_\lambda f(x)$ est donc bien définie. De plus, par continuité sous le signe somme et par convergence dominée, on voit clairement que $R_\lambda f \in C_0(E)$.

Proposition 3.3.2 *: La résolvante $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ d'un semi-groupe de Feller $(P_t)_{t\geq 0}$ vérifie les propriétés suivantes :*
1) $\forall \lambda > 0$, $\forall t \geq 0$, $P_t R_\lambda = R_\lambda P_t$.
2) $\forall \lambda, \mu > 0$, $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.
3) $\forall \lambda, \mu > 0$, $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$ (équation résolvante)[8].
4) $\forall \lambda > 0$, $\forall f \in C_0(E)$, $||\lambda R_\lambda f||_\infty \leq ||f||_\infty$.

Démonstration : Les propriétés de commutation 1) et 2) sont faciles à établir et sont laissées en exercice. La propriété 4) est immédiate puisque pour tout x, $|P_t f(x)| \leq ||f||_\infty$. Etablissons l'équation résolvante.
Pour $f \in C_0(E)$, on a

$$R_\lambda R_\mu f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_t \left(\int_0^{+\infty} e^{-\mu s} P_s f(x) ds \right) dt, \tag{3.27}$$

et comme P_t est un opérateur continu, on voit facilement qu'on peut le passer à l'intérieur de la deuxième intégrale du membre de droite de (3.27), ce qui compte tenu de la propriété de semi-groupe donne :

$$R_\lambda R_\mu f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\mu s} P_{t+s} f(x) ds \right) dt. \tag{3.28}$$

[7] ou transformée de Laplace.

[8] On notera que l'équation résolvante implique la propriété de commutation 2).

Le changement de variable $s = u - t$ dans l'intégrale centrale de (3.28) puis une interversion des intégrations donne alors

$$\begin{aligned}
R_\lambda R_\mu f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\left(\int_t^{+\infty} e^{-\mu(u-t)} P_u f(x) ds\right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\mu u} P_u f(x) \left(\int_0^u e^{-(\lambda-\mu)t} dt\right) du \\
&= \frac{1}{\lambda-\mu}\int_0^{+\infty} e^{-\mu u} P_u f(x)\left(1 - e^{-(\lambda-\mu)u}\right) du \\
&= \frac{1}{\lambda-\mu}\left(R_\mu f(x) - R_\lambda f(x)\right) = \frac{1}{\mu-\lambda}(R_\lambda - R_\mu) f(x).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Une conséquence cruciale de l'équation résolvante, concerne la constance de l'image de $C_0(E)$ par les opérateurs R_λ :

Corollaire 3.3.1 : *L'espace $\mathcal{D} = R_\lambda(C_0(E))$ ne dépend pas de $\lambda > 0$.*

Démonstration : Grâce à l'équation résolvante, pour $f \in C_0(E)$, on a

$$\begin{aligned}
R_\lambda f &= R_\mu f + (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda f \\
&= R_\mu \left(f + (\mu - \lambda) R_\lambda f\right),
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $R_\lambda(C_0(E)) \subset R_\mu(C_0(E))$; mais comme $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont quelconques, on a aussi $R_\mu(C_0(E)) \subset R_\lambda(C_0(E))$, d'où l'égalité $R_\lambda(C_0(E)) = R_\mu(C_0(E))$. □

Cet espace $\mathcal{D}$, image commune de $C_0(E)$ par les opérateurs résolvants R_λ, coïncide en fait avec le domaine D_A du générateur infinitésimal A du semi-groupe ! Plus précisément on a le théorème fondamental suivant :

Théorème 3.3.2 : *Soient $\lambda > 0$ et $f, g \in C_0(E)$. Alors $g = R_\lambda f$ si et seulement si $g \in D_A$ et*

$$\lambda g - A g = f.$$

Autrement dit $\mathcal{D} = D_A$ et $(\lambda I - A) R_\lambda = I$, où I est l'opérateur identité de $C_0(E)$[9].

[9] On notera qu'on a alors aussi $R_\lambda(\lambda I - A) = I_{D_A}$ où I_{D_A} est l'opérateur identité de D_A car R_λ et A commutent sur D_A.

Démonstration : i)(condition nécessaire) Supposons que $g = R_\lambda f$. Alors pour tout $h > 0$, on a

(3.29)
$$\frac{1}{h}(P_h - I)g(x) = \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{t+h}f(x)dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x)dt.$$

Le changement de variable $s = t + h$ dans la première intégrale de (3.29) conduit à

$$\frac{1}{h}(P_h - I)g(x) = \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s} P_s f(x)ds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s} P_s f(x)ds$$

(3.30)
$$= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}(g(x) - \frac{1}{\lambda}f(x)) - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}\left(P_s f(x) - f(x)\right)ds.$$

Comme $P_t f(x) - f(x) \to 0$ uniformément en x, quand $t \to 0$, l'intégrale du second membre de (3.30) tend vers 0 quand $h \to 0$ (uniformément en x), ce qui implique

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(P_h - I)g = \lambda\left(g - \frac{1}{\lambda}f\right) \quad \text{dans} \quad C_0(E).$$

Donc $g \in D_A$ et $Ag = \lambda g - f$ i.e. $f = (\lambda I - A)g$. D'où la condition nécessaire.

ii) (condition suffisante) Soit $v \in D_A$. On a donc $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(P_h - I)v = Av$ dans $C_0(E)$ et comme l'opérateur R_λ est continu et commute avec P_h, ceci implique

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(P_h - I)R_\lambda v = R_\lambda A v. \tag{3.31}$$

Mais, dans la condition nécessaire, on a vu que la limite du membre de gauche de (3.31) est égale à $\lambda R_\lambda v - v$. On a donc $R_\lambda A v = \lambda R_\lambda v - v$, ce qui montre que $v \in R_\lambda(C_0(E))$ et comme R_λ et A commutent, on obtient aussi $v = (\lambda I - A)R_\lambda v$. D'où le théorème. □

Théorème 3.3.3 : *1) La résolvante du mouvement brownien est la famille des opérateurs intégraux $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ de la forme :*

$$R_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \exp\left(-\sqrt{2\lambda}|x - y|\right) f(y)dy \quad (f \in C_0(\mathbb{R})). \tag{3.32}$$

2) Le domaine D_A du générateur infinitésimal du mouvement brownien est constitué des $f \in C_0(\mathbb{R})$ de classe C^2 et telles que f'' appartienne aussi à $C_0(\mathbb{R})$. Pour $f \in D_A$, on a alors $Af = \frac{1}{2}f''$.

Démonstration : 1) Pour une fonction $f \in C_0(\mathbb{R})$ positive, le théorème de Fubini-Tonelli permet d'écrire

$$R_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{2t}) dt \right) f(y) dy.$$

Pour prouver (3.32), il suffit donc de montrer que

$$\phi(z) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{z^2}{2t}) dt = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}|z|}. \tag{3.33}$$

Pour $z > 0$, on peut dériver $\phi(z)$ sous le signe intégrale, ce qui donne

$$\phi'(z) = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{z}{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{z^2}{2t}) dt. \tag{3.34}$$

Si on fait le changement de variable $s = \frac{z^2}{2\lambda t}$ dans l'intégrale (3.34), on obtient aussitôt

$$\phi'(z) = -\sqrt{2\lambda}\phi(z),$$

ce qui implique que $\phi(z) = Ce^{-\sqrt{2\lambda}z}$ $(z > 0)$; mais $C = \phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ comme on peut le voir aussitôt par un changement de variable évident[10]. On en déduit (3.33) puisque $\phi(z)$ est une fonction paire.
2) Si on récrit la formule (3.32) sous la forme

$$R_\lambda f(x) = e^{-\sqrt{2\lambda}x} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{\sqrt{2\lambda}y} f(y) dy \\ + e^{\sqrt{2\lambda}x} \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}y} f(y) dy,$$

[10]dans l'intégrale donnant $f(0)$ faire le changement de variable $\lambda t = \frac{s^2}{2}$ pour se ramener à une intégrale de Gauss.

on voit facilement que la fonction $g(x) := R_\lambda f(x)$ a des dérivées première et seconde données par

(3.35)
$$g'(x) = -e^{-\sqrt{2\lambda}x}\int_{-\infty}^{x} e^{\sqrt{2\lambda}y} f(y)dy + e^{\sqrt{2\lambda}x}\int_{x}^{+\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}y} f(y)dy,$$

et

$$g''(x) = 2\lambda g(x) - 2f(x). \tag{3.36}$$

La relation (3.36) montre que $g'' \in C_0(\mathbb{R})$. L'image de $C_0(\mathbb{R})$ par R_λ égale à D_A (d'après le Théorème 3.3.2) est donc contenue dans l'ensemble $C_0^2(\mathbb{R})$ des fonctions $g \in C_0(\mathbb{R})$ de classe C^2 telles que $g'' \in C_0(\mathbb{R})$ qui est lui même inclus dans D_A d'après le Théorème 3.3.1. Donc $D_A = C_0^2(\mathbb{R})$ et le théorème en découle. □

Remarque : La formule (3.35) montre que l'on a

$$\begin{aligned}|g'(x)| \le e^{-\sqrt{2\lambda}x}\int_{-\infty}^{x} e^{\sqrt{2\lambda}y}|f(y)|dy + e^{\sqrt{2\lambda}x}\int_{x}^{+\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}y}|f(y)|dy \\ = \sqrt{2\lambda}R_\lambda|f|(x),\end{aligned}$$

donc $g'(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$. Ainsi les fonctions $f \in D_A$ sont aussi telles que $f' \in C_0(\mathbb{R})$, ce qui n'était pas clair a priori (on essayera de montrer directement qu'une fonction $f \in C_0(\mathbb{R})$ de classe C^2 et telle que $f'' \in C_0(\mathbb{R})$, vérifie aussi $f' \in C_0(\mathbb{R})$).

3.4 Annexe

3.4.1 Famille des lois de probabilité d'un processus de Markov

Soit $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, (X_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ (où $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}_+$) un processus à valeurs dans un espace polonais $(E, \mathcal{B}_E)$. On suppose que X est un processus de Markov homogène de semi-groupe $(P_t)_{t\in T}$. Pour simplifier on supposera que $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est la filtration naturelle de X et on notera $\mathcal{F}_\infty$ sa tribu terminale. On sait d'après le corollaire 3.1.1 que la restriction $\mathbb{P}_\nu$ de $\mathbb{P}$ à $\mathcal{F}_\infty$ est déterminée par la formule (3.9).

Définition 3.4.1 : *On appelle probabilité partant de $x \in E$, la mesure de probabilité $\mathbb{P}_x$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ définie sur les ensembles cylindriques (3.10) par*[11]

$$\mathbb{P}_x\big(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_k} \in A_k\big)$$
$$= \int_{A_0} \delta_x(dx_0) \int_{A_1} P_{t_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} P_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2) \ldots$$
$$\ldots \int_{A_k} P_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k). \tag{3.37}$$

$(\mathbb{P}_x)_{x \in E}$ *est la famille des lois associée au processus de Markov X.*

Il est clair que si l'on regarde la collection des variables aléatoires $(X_t)_{t \in T}$ sur l'espace filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathcal{F}_\infty)$ muni de la probabilité $\mathbb{P}_x$ que nous venons de définir, on obtient un nouveau processus de Markov

$$X^{(x)} = (\Omega, \mathcal{F}_\infty, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P}_x), \tag{3.38}$$

homogène de même semi-groupe $(P_t)_{t \in T}$ et qui est tel que $X_0 = x$ $\mathbb{P}_x$-p.s. Ce processus est obtenu à partir de X en changeant la probabilité $\mathbb{P}$ en $\mathbb{P}_x$. Quand on considère un processus de Markov homogène X, on doit donc considérer la famille des lois $(\mathbb{P}_x)_{x \in E}$ comme autant de processus de Markov associés au sens de (3.38). On fait souvent l'abus de langage qui consiste à parler du processus "X sous $\mathbb{P}_x$" quand on considère $X^{(x)}$.

On constate immédiatement à partir de (3.9) et de (3.37) qu'on peut écrire

$$\mathbb{P}\big(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_k} \in A_k\big)$$
$$= \int_E \mathbb{P}_x\big(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_k} \in A_k\big)\nu(dx).$$

La probabilité $\mathbb{P}_\nu$ peut donc s'exprimer comme la moyenne relativement à ν des mesures P_x :

$$\mathbb{P}_\nu = \int_E \mathbb{P}_x \nu(dx), \tag{3.39}$$

[11] il est facile de vérifier en adaptant l'argument de cohérence de Kolmogorov du chapitre 1 que $\mathbb{P}_x$ est bien définie sur $\mathcal{F}_\infty$.

au sens où pour tout $F \in \mathcal{F}_\infty$, on a

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}_\nu(F) = \int_E \mathbb{P}_x(F)\nu(dx), \tag{3.40}$$

Remarques : 1) Pour un $t > 0$ et $A \in \mathcal{B}_E$, la formule (3.37) appliquée à l'événement $[X_t \in A]$ donne

$$\mathbb{P}_x(X_t \in A) = P_t\mathbf{1}_A(x) = P_t(x, A),$$

c'est à dire la probabilité partant de x d'aller dans A à l'instant t.
2) On peut comparer (3.40) à la formule "de la probabilité totale" relative au système complet d'événements (infinitésimaux) "$[X_0 = x]$" ($x \in E$) :

$$\mathbb{P}(F) = \int_E \mathbb{P}(F|X_0 = x)\mathbb{P}(X_0 \in dx) = \int_E \mathbb{P}(F|X_0 = x)\nu(dx).$$

Ces deux remarques nous conduisent à admettre que la probabilité $\mathbb{P}_x$ peut aussi être considérée comme la probabilité conditionnelle sachant "$[X_0 = x]$"[12]. C'est la raison pour laquelle on dit que $\mathbb{P}_x$ est la probabilité pour le processus "partant de x" ou "sachant qu'il part de x".

Définition 3.4.2 *(et Notation) : Pour toute variable aléatoire $Z : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\mathcal{F}_\infty$-mesurable, on posera*

$$\mathbb{E}_x(Z) = \int_\Omega Z d\mathbb{P}_x \quad (\textit{éventuellement } +\infty),$$

Pour une variable aléatoire $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $\mathcal{F}_\infty$-mesurable et telle que $\mathbb{E}_x(|Z|) < +\infty$, son espérance sous $\mathbb{P}_x$ est donnée par

$$\mathbb{E}_x(Z) = \int_\Omega Z d\mathbb{P}_x.$$

On dira que l'opérateur $\mathbb{E}_x$ est l'espérance pour le processus partant de x.

[12] Nous n'essayerons pas de détailler plus rigoureusement cette question de probabilité conditionnelle ; nous invitons le lecteur intéressé à consulter les ouvrages spécialisés indiqués dans la bibliographie.

Exemple : Pour une variable aléatoire de la forme

$$Z = f_1(X_{t_1}) f_2(X_{t_2}) \cdots f_k(X_{t_k}),$$

où $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ et $f_i : E \to \mathbb{R}$ est borélienne bornée (ou positive), on a

$$\mathbb{E}_x(Z) = \int_E P_{t_1}(x, dx_1) f_1(x_1) \int_E P_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2) f_2(x_2) \dots \\ \dots \int_E P_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k) f_k(x_k).$$

En particulier pour $t > 0$ et $f : E \to \mathbb{R}$ borélienne bornée (ou positive)

$$\mathbb{E}_x(f(X_t)) = \int_E P_t(x, dy) f(y) = P_t f(x). \tag{3.41}$$

Ainsi la propriété de Markov (3.6) peut (pour $t > s$) s'écrire sous la forme

$$\mathbb{E}\left(f(X_t) | \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}_{X_s}(f(X_{t-s})) \quad p.s., \tag{3.42}$$

où pour une variable aléatoire Z, la variable aléatoire $\mathbb{E}_{X_s}(Z)$ (appelée espérance de Z partant de X_s) est la composée des applications $\omega \to X_s(\omega)$ et $x \to \mathbb{E}_x(Z)$.

Exercice : Si $X = B$ est un mouvement brownien, vérifier (avec les notations précédentes) que les probabilités P_x sont données par

$$\mathbb{P}_x\big(B_{t_1} \in A_1, \dots, B_{t_k} \in A_k\big) = \mathbb{P}\big(x + B_{t_1} \in A_1, \dots, x + B_{t_k} \in A_k\big) \\ = \mathbb{P}\big(B_{t_1}^{(x)} \in A_1, \dots, B_{t_k}^{(x)} \in A_k\big),$$

où $B^{(x)}$ est le mouvement brownien partant de x, défini en (3.14) et que l'espérance partant de x est telle que

$$\mathbb{E}_x\left(f(B_t)\right) = \mathbb{E}(f(B_t + x)) = \mathbb{E}(f(B_t^{(x)})).$$

Remarque : Le principe de symétrie d'André (voir annexe du chapitre 2) est également valable pour le mouvement brownien partant de n'importe quel point x autrement dit sous n'importe quelle probabilité $\mathbb{P}_x$ comme on peut le vérifier facilement en reprenant la démonstration du théorème 2.4.1.

3.4.2 Processus de Markov canonique

3.4.2.1 Construction du processus canonique

Soit $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}_+$ et $(E, \mathcal{B}_E)$ un espace polonais. On suppose donné un semi-groupe markovien $(P_t)_{t\in T}$ sur E. On peut construire[13] un processus de Markov de semi-groupe $(P_t)_{t\in T}$ et de loi initiale donnée sur l'espace canonique $\Omega = E^T$ de la manière suivante :
Pour tout $t \in T$, on considère la t-ième application coordonnée de Ω dans E, donnée par

$$X_t : \omega \to X_t(\omega) = \omega(t).$$

et la tribu

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(X_s, s \leq t\right),$$

engendrée par les applications X_s pour tous les $s \leq t$. Ainsi $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est la filtration naturelle de la famille $(X_t)_{t\in T}$. On munit alors Ω de la tribu $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t\in T}\mathcal{F}_t)$. Soit ν une probabilité sur $(E, \mathcal{B}_E)$. Pour tout entier $k > 0$, tout choix d'instants $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ et de boréliens $A_0, \ldots, A_k$ de E, si $I = \{t_1, \ldots, t_k\}$ on pose

$$\mu_I(A_0 \times A_1 \ldots \times A_k) = \int_{A_0} \nu(dx_0) \int_{A_1} P_{t_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} P_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2) \ldots \\ \ldots \int_{A_k} P_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k).$$

Alors μ_I définit une mesure de probabilité sur E^I et on peut vérifier facilement que la famille $(\mu_I)_{I\in P_f(T)}$ est une famille cohérente au sens de Kolmogorov. Il existe donc une probabilité $\mathbb{P}_\nu$ sur $(E^T, \mathcal{B}^{\otimes T})$ dont les μ_I sont les lois de dimension finie i.e. on a

$$\mathbb{P}_\nu(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_k} \in A_k) = \\ \int_{A_0} \nu(dx_0) \int_{A_1} P_{0,t_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} P_{t_1,t_2}(x_1, dx_2) \ldots \\ \ldots \int_{A_k} P_{t_{k-1},t_k}(x_{k-1}, dx_k).$$

[13]comme on l'a fait au chapitre 1

Le processus des coordonnées $X = (X_t)_{t\in T}$ est donc un processus de Markov de semi-groupe $(P_t)_{t\in T}$ et de loi initiale ν. On l'appelle le *processus canonique* de loi initiale ν.

3.4.2.2 Les opérateurs de décalage sur E^T et la propriété de Markov

Pour tout $t \in T$ (fixé), on considère l'application $\theta_t : E^T \longrightarrow E^T$ telle que pour tout $\omega \in E^T$, $\theta_t(\omega)$ est la trajectoire définie par

$$\theta_t(\omega)(s) = \omega(t+s) \quad (s \in T).$$

On dit que θ_t est l'opérateur de translation ou de décalage[14] par t. Son action sur les variables aléatoires coordonnées X_u se traduit par

$$X_u \circ \theta_t = X_{u+t}.$$

Plus généralement si Z est une variable aléatoire définie sur E^T, la variable aléatoire $Z \circ \theta_t$ est par définition telle que :

$$(Z \circ \theta_t)(\omega) = Z(\theta_t(\omega)).$$

Heuristiquement, si Z est une caractéristique numérique des trajectoires, $Z \circ \theta_t$ est la mesure de cette caractéristique sur les trajectoires décalées de t. Par exemple soit x_0 un point fixé de l'espace des états E et supposons que $Z(\omega)$ égale le nombre de fois (éventuellement $+\infty$) où la trajectoire ω passe en x_0 ; $Z \circ \theta_t$ est alors la variable aléatoire qui représente le nombre de passages en x_0 à partir de l'instant t.
Ce formalisme des opérateurs de décalage est très pratique pour exprimer simplement la propriété de Markov (3.6) et (3.42) sous la forme suivante

$$(3.43) \qquad \forall s,u \in T, \quad \mathbb{E}\left(f(X_u)\circ\theta_s|\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}_{X_s}(f(X_u)) \quad p.s.$$

On peut montrer (exercice) qu'on peut généraliser (3.43) en remplaçant $f(X_u)$ par n'importe quelle variable aléatoire $Z : \Omega = E^T \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_\infty$-mesurable et bornée et on a la propriété de Markov "générale" :

$$\forall s \in T, \quad \mathbb{E}\left(Z\circ\theta_s|\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}_{X_s}(Z) \quad p.s.$$

[14] ou "shift" en anglais

Cette propriété est très parlante car elle exprime que l'espérance conditionnelle (sachant $\mathcal{F}_s$) de Z mesuré sur les trajectoires à partir du temps s est égale à l'espérance de Z partant de X_s. Heuristiquement cela signifie que pour $x \in E$:

$$\forall s \in T, \quad \mathbb{E}\left(Z \circ \theta_s | X_s = x\right) = \mathbb{E}_x(Z).$$

3.4.2.3 Décalage par un temps d'arrêt et propriété de Markov forte

On considère toujours un processus de Markov canonique X et soit τ un temps d'arrêt presque sûrement fini du processus X. On définit l'opérateur de décalage θ_τ par le temps d'arrêt τ comme l'application $\theta_\tau : E^T \to E^T$ donnée par

$$\forall \omega \in E^T, \quad \theta_\tau(\omega) = \theta_{\tau(\omega)}(\omega),$$

autrement dit

$$\forall s \in T, \quad \theta_\tau(\omega)(s) = \omega(s + \tau(\omega)),$$

$\theta_\tau(\omega)$ est donc la trajectoire ω "regardée" à partir de l'instant $\tau(\omega)$.

Définition 3.4.3 *: On dit que le processus de Markov X vérifie la propriété de Markov forte si pour tout temps d'arrêt presque sûrement fini τ et toute variable aléatoire bornée Z définie sur E^T, on a*

$$\mathbb{E}\left(Z \circ \theta_\tau | \mathcal{F}_\tau\right) = \mathbb{E}_{X_\tau}(Z) \quad p.s.,$$

où $\mathcal{F}_\tau$ est la tribu des événements antérieurs au temps τ et X_τ l'état du processus à l'instant aléatoire τ (voir le chapitre 1).

Exemple : Le résultat du théorème 3.2.2 est équivalent à la propriété de Markov forte pour le mouvement brownien. D'autres processus vérifient la propriété de Markov forte par exemple les processus de Markov-Feller (voir [51]).

Remarque : Il n'est pas nécessaire de considérer la version canonique d'un processus de Markov $X = (X_t)$ pour exprimer la propriété de Markov forte qui (comme on l'a vu pour le mouvement brownien) s'énonce comme suit : Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée, pour tout $h \geq 0$ et tout temps d'arrêt presque sûrement fini τ de la filtration de X, on a

$$\mathbb{E}(f(X_{\tau+h}) | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}_{X_\tau} f(X_h) \quad \mathbb{P} - p.s.$$

(voir [14] pour des détails).

3.4.3 Processus de Markov-Feller et propriété de martingale

Comme annoncé dans le paragraphe 3.3.1 (en particulier en (3.17)) nous donnons quelques détails des liens fondamentaux entre générateur infinitésimal et propriété de martingale. Soit X un processus de Feller sur E de semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ de générateur infinitésimal A et de loi initiale ν. On note D_A le domaine dans $C_0(E)$ de l'opérateur A.

Théorème 3.4.1 *Soit $f \in D_A$. Alors le processus*

$$M_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Af)(X_s)ds \quad (t \geq 0), \tag{3.44}$$

est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ du processus X, quelle que soit la loi initiale ν.

Démonstration : Pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire M_t^f est dans L^1 puisque f est Af sont des fonctions bornées. Si $0 \leq s \leq t$, on a alors
(3.45)

$$\mathbb{E}\left(M_t^f | \mathcal{F}_s\right) = M_t^f + \mathbb{E}\left(f(X_t) - f(X_s) - \int_0^t (Af)(X_u)du \middle| \mathcal{F}_s\right).$$

Mais d'après la propriété de Markov (3.42), l'espérance conditionnelle du second membre de (3.45) est égale à

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{X_s}\left(f(X_{t-s}) - f(X_0) - \int_0^{t-s} (Af)(X_u)du\right) \\
&= P_{t-s}f(X_s) - f(X_s) - \int_0^{t-s} P_uAf(X_s)du \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'après (3.19). D'où le résultat. □

Remarque : On notera que pour une fonction $f \in D_A$ telle que $Af = 0$, le processus $(f(X_t))$ est une martingale.

Le résultat qui suit est une sorte de réciproque du précédent énoncé.

Proposition 3.4.1 *: Si des fonctions f et g de $C_0(E)$ sont telles que pour toute loi initiale de X, le processus*

$$M_t^{f,g} = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t g(X_s)ds$$

est une martingale, alors $f \in D_A$ et $Af = g$.

Démonstration : Puisque $(M_t^{f,g})$ est une martingale pour toute probabilité $\mathbb{P}_x$ $(x \in E)$, on a $\mathbb{E}_x(M_t^{f,g}) = \mathbb{E}_x(M_0^{f,g}) = 0$. Mais d'après (3.41), on a

$$\mathbb{E}_x(M_t^{f,g}) = P_t f(x) - f(x) - \int_0^t P_s g(x) ds.$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{t}(P_t f - f) - g \right\|_\infty &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t (P_s g - g) ds \right\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \|(P_s g - g)\|_\infty \, ds \to 0 \ (t \to 0).\end{aligned}$$

□

3.4.4 Notes et exercices

Exercice 1 : Soit X un processus vérifiant la condition de Markov (3.1) donnée dans l'introduction du chapitre 3.
1) Pour tous $s < t < u$, montrer en utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle et le fait que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, qu'on a

$$P_{s,u}(X_s, A) = \int_E P_{s,t}(X_s, dy) P_{t,u}(y, A).$$

2) En déduire que si μ_{X_s} désigne la loi de X_s sur $(E, \mathcal{B}_E)$, on a

$$P_{x,u}(x, A) = \int_E P_{s,t}(x, dy) P_{t,u}(y, A)$$

pour μ_{X_s}-presque tout $x \in E$.

Exercice 2 : 1) Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus sur $\mathbb{R}^d$ à accroissements indépendants (i.e pour tous $s = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, les variables aléatoires $X_{t_k} - X_{t_{k-1}} (k = 1, \ldots, n)$ sont indépendantes et indépendantes de la tribu $\mathcal{F}_s$) et stationnaires (i.e la loi de $X_t - X_s$ ne dépend que de $t - s$). Démontrer que X est un processus de Markov homogène de semi-groupe donné par

$$P_t f(x) = \mathbb{E}(f(X_t - X_0 + x)).$$

On remarquera que si μ_t désigne le loi de $X_t - X_0$, la formule précédente peut s'écrire $P_t f(x) = \delta_x \star \mu_t(f)$ où δ_x désigne la mesure de Dirac en

x et $\star$ le produit de convolution des mesures. La propriété de semi-groupe $P_u(P_v) = P_v(P_u) = P_{u+v}$ est équivalente ici au fait que $\mu_u \star \mu_v = \mu_v \star \mu_u = \mu_{u+v}$. Pour cette raison on dit que $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de convolution et que $(\mu_t)_{t\geq 0}$ est le semi-groupe de mesures associé.
Remarque : Les processus de Markov de ce type très particulier portent le nom de *processus de Lévy* et jouent un rôle très important dans la théorie des processus. Le mouvement brownien est un processus de Lévy ainsi que le processus de Poisson (question suivante et exercice 3) et le processus des temps d'atteinte (voir le corollaire 2.3.2 du chapitre 2).
2) En déduire que le processus de Poisson de paramètre λ est un processus de Markov homogène et déterminer la forme explicite de son semi-groupe d'opérateurs de transition.

Exercice 3 (semi-groupe de Poisson) : Soit $\lambda > 0$. Pour tout $t > 0$, on considère l'opérateur défini par

$$P_t f(x) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

où $f \in C_b(\mathbb{R})$.
1) Montrer directement (i.e. sans utiliser l'exercice 2) que $(P_t)_{t>0}$ est un semi-groupe markovien.
2) Vérifier que $(P_t)_{t>0}$ est un semi-groupe de Feller.
3) Trouver le générateur infinitésimal du semi-groupe.

Exercice 4 (mouvement brownien avec dérive) : Soit B un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$. Montrer que le processus $(B_t + \mu t)_{t\geq 0}$ (mouvement brownien avec dérive $\mu \in \mathbb{R}$) est un processus de Lévy (voir exercice 2) et déterminer ses noyaux de transition.
Remarque : On peut montrer que les seuls processus de Lévy à trajectoires continues sont de la forme $(\sigma B_t + \mu t)_{t\geq 0}$ où σ et μ sont des constantes réelles (voir [51]).

Exercice 5 (processus de Bessel) : Soit B un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) et $||.||$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $R = (||B_t||)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov homogène sur $[0, \infty[$, dont le semi-groupe a des densités de transition de la forme

$$p_t(x,y) = \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2t}\right) (xy)^{-\alpha} I_\alpha\left(\frac{xy}{t}\right) y^{2\alpha+1},$$

si $t > 0$, $x > 0$ et $y > 0$ avec $\alpha = \frac{d}{2} - 1$ et I_α est la fonction de Bessel modifiée d'indice α : $I_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x/2)^{2n+\alpha}}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}$ (*indication* : on pourra utiliser la formule donnant la transformée de Laplace de la mesure superficielle $d\sigma$ de la sphère unité S_{d-1} de $\mathbb{R}^d$: $\int_{S_{d-1}} e^{<x,\sigma>} d\sigma = (2\pi)^{d/2}||x||^{-(d/2-1)} I_{d/2-1}(||x||)$).
Si $x = 0$, $p_t(0, y)$ est la limite de l'expression précédente quand $x \to 0$ i.e.

$$p_t(0, y) = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) t^{\alpha+1}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) y^{2\alpha+1},$$

Remarque : Pour tout réel $\alpha \geq -1/2$, il existe un processus de Markov homogène sur $[0, \infty[$ ayant les densités de transition précédentes. C'est le processus de Bessel d'indice α (voir le livre de Revuz et Yor [51]).

Exercice 6* : Soit B un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$ dont on note $p_t(x, y)$ les densités de transition. Montrer que le processus $(|B_t|)_{t\geq 0}$ (mouvement brownien réfléchi en 0) est de Markov-Feller homogène sur $E = [0, +\infty[$ et qu'il a des densités de transition de la forme $p_t(x, y) + p_t(x, -y)$ $(x, y \in E)$ et un générateur infinitésimal $Af(x) = \frac{1}{2} f''(x)$ avec le domaine

$$D_A = \left\{ f \in C_0([0, +\infty[) \cap C^2([0, +\infty[); f', f'' \in C_0([0, +\infty[), f'(0) = 0 \right\}.$$

Exercice 7* : Soit $\tau = \inf\{t \geq 0; B_t = 0\}$ le temps d'atteinte de 0 pour le mouvement brownien B.
1) Soit $x > 0$ un point fixé et $A \subset \mathbb{R}_+$ un borélien. On note $\mathbb{P}_x$ la probabilité pour le mouvement brownien B partant de x.
a) Démontrer que $\mathbb{P}_x(B_t \in A, \tau \leq t) = \mathbb{P}_x(B_t \in -A)$.
b) En déduire que $\mathbb{P}_x(\tau \leq t) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy$.

2) Montrer que pour tout $x_0 > 0$, sous la probabilité $\mathbb{P}_{x_0}$, le processus $X = (B_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ (mouvement brownien absorbé en 0) est de Markov sur $E = [0, +\infty[$ avec un semi-groupe de la forme

$$Q_t f(x) = \int_0^{+\infty} (p_t(x, y) - p_t(x, -y)) f(y) dy + 2f(0) \int_0^{+\infty} p_t(x, -y) dy,$$

où les $p_t(x, y)$ sont les densités de transition de B. Autrement dit (puisque $Q_t f(x) = \mathbb{E}_x f(X_t)$) ceci signifie que la loi de X_t (sachant que $X_0 = x$),

est la somme d'une mesure ponctuelle en 0 de masse $2\int_0^{+\infty} p_t(x,-y)dy$ et d'une mesure absolument continue sur $\mathbb{R}_+$ de densité $y \mapsto p_t(x,y) - p_t(x,-y)$.
Montrer ensuite que X a pour générateur infinitésimal $Af(x) = \frac{1}{2}f''(x)$ avec le domaine

$$D_A = \left\{ f \in C_0([0,+\infty[) \cap C^2([0,+\infty[); f', f'' \in C_0([0,+\infty[), f''(0)=0 \right\}.$$

Remarque importante : on notera que les processus des exercices 6 et 7 bien que différents, admettent le même générateur infinitésimal mais sur des domaines distincts.

Notes : La notion de processus de Markov à temps continu est délicate à formaliser comme nous l'avons expliqué au début de ce chapitre. Par exemple quand on a reconnu le caractère markovien homogène d'un processus donné X, on a besoin pour pouvoir travailler, de considérer toute la famille des processus $X^{(x)}$ définis en (3.38) qui permettent le passage dans les deux sens du raisonnement probabiliste au calcul fonctionnel via la propriété de Markov : $\mathbb{E}_x(f(X_t)) = P_t f(x)$. Le cas du mouvement brownien est spécial et plus simple car $B^{(x)} = x + B$ (homogénéité spatiale). Le cas des processus de Markov non-homogènes est abordé dans le chapitre 5 et nécessite encore plus de précautions. C'est pour rester dans le cadre d'une introduction élémentaire que nous avons limité au maximum les développements généraux et que nous nous sommes contentés des exemples qu'on trouve dans la section exercices. C'est d'ailleurs celle que nous considérons comme la plus importante de ce chapitre. Notre référence principale pour ce chapitre est encore le livre de Revuz et Yor ([51]) où nous avons emprunté essentiellement les résultats de l'annexe : processus canonique, opérateurs de décalage, propriété de Markov forte et propriétés de martingale. Le calcul de la résolvante et la détermination du domaine du générateur infinitésimal du mouvement brownien suit la présentation de Karlin et Taylor ([32] p. 288 et p.296). Ce livre [32] est une source extraordinaire d'exemples de processus de Markov, nos exercices 6 et 7 en sont extraits (exercices 45 et 47 énoncés p. 392 mais non résolus). Une exposition élémentaire très instructive des divers aspects du mouvement brownien dont l'aspect markovien, figure dans le petit livre de Chung [9] dont nous recommandons la lecture. Pour une étude plus avancée des processus de Markov incluant la théorie du potentiel, on peut consulter le livre de Dellacherie et Meyer [16].

Chapitre 4

Construction de l'intégrale stochastique

4.1 Introduction

Dans l'Analyse du 18ième siècle, l'intégration est l'opération inverse de la dérivation. Ainsi, étant donnée une fonction $t \mapsto y(t)$ ($t \in [0,a]$) dont la différentielle est de la forme $dy(t) = f(t)dt$, où f est une fonction assez régulière (disons continue), on peut récupérer la valeur $y(t)$ de la fonction y au point t en "sommant" ses accroissements de 0 à t i.e. $y(t) - y(0) = \int_0^t f(s)ds$. Plus généralement si les accoissements infinitésimaux de y sont de la forme $dy(t) = f(t)dg(t)$ où g est une fonction à variation bornée, on peut encore "sommer" les accroissements de y et on obtient $y(t) - y(0) = \int_0^t f(s)dg(s)$ (intégrale de Riemann-Stieltjes).

Soit maintenant $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien continu. Dans certains problèmes on est amené à considérer des processus Y dont les accroissements infinitésimaux[1] dY_t (pour t variant dans un certain intervalle de temps $[a,b]$) sont de la forme $dY_t = X_t dB_t$ où dB_t est l'accroissement infinitésimal du mouvement brownien B et $X = (X_t)_{t\in[a,b]}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et suffisamment régulier. Pour pouvoir reconstituer le processus Y en "sommant" ses accroisse-

[1]La notion de différentielle stochastique sera formalisée dans le chapitre 5.

ments, il nous faut donner un sens à des expressions du type

$$\int_a^b X_s(\omega)dB_s(\omega). \tag{4.1}$$

La première idée serait de définir (4.1) "ω par ω"(i.e. trajectoriellement) mais on a vu au chapitre 2 que la fonction $s \to B_s(\omega)$ n'est pas à variation bornée donc on ne peut pas considérer (4.1) comme une intégrale de Lebesgue-Stieltjes.

La bonne méthode, initiée par Wiener dans le cas où le processus intégrand X est une fonction déterministe puis systématiquement développée par K. Itô, a été d'utiliser des procédés d'approximation probabiliste comme la convergence L^2 et la convergence en probabilité pour définir (4.1) comme une limite de sommes de Riemann convenables. Ainsi les processus intégrands X devront pouvoir être approchés (au sens L^2 ou en probabilité) par des processus élémentaires qui vont jouer le rôle des fonctions en escalier (resp. des fonctions simples) dans l'intégration des fonctions au sens de Riemann (resp. au sens de Lebesgue).

4.2 Intégrale stochastique des processus élémentaires

Définition 4.2.1 *: On dit qu'un processus $X = (X_s)_{s\in[a,b]}$ est élémentaire s'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de l'intervalle $[a,b]$ et des variables aléatoires réelles (X_i), $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, telles que*

$$\forall t \in [a,b], \forall \omega \in \Omega, \quad X_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\omega)\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(t), \tag{4.2}$$

et telles que pour tout $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, X_i soit $\mathcal{F}_{t_i}$ mesurable. Autrement dit dans chaque intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}[$, $X_t(\omega)$ ne dépend pas de t et vaut $X_i(\omega)$.
On notera alors $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}_n$, $n > 0$) l'ensemble de tous les processus élémentaires sur $[a,b]$ (resp. le sous-ensemble des $X \in \mathcal{E}$ tels que les variables aléatoires X_i ont un moment d'ordre n, i.e. $\mathbb{E}(|X_i|^n) < +\infty$).

Exercice : On rappelle (cf. chap. 1) qu'un processus $X = (X_t)_{t\in[a,b]}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t>0})$ est progressivement mesurable si pour tout $s \in [a,b]$, la fonction $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ de $[a, s] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathcal{B}_{[a,s]} \otimes \mathcal{F}_s$ mesurable [2]. Montrer que tout processus $X \in \mathcal{E}$ est progressivement mesurable.

Définition 4.2.2 *: On appelle intégrale stochastique (au sens d'Itô) du processus $X \in \mathcal{E}$ donné par (4.1), la variable aléatoire réelle*

$$\int_a^b X_t dB_t := \sum_{i=0}^{n-1} X_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}). \tag{4.3}$$

Proposition 4.2.1 *(propriétés de l'intégrale stochastique) :*
1)(linéarité) Si X et $Y \in \mathcal{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b (\lambda X_t + \mu Y_t) dB_t = \lambda \int_a^b X_t dB_t + \mu \int_a^b Y_t dB_t. \tag{4.4}$$

2)(centrage) Si $X \in \mathcal{E}_1$, alors $\int_a^b X_t dB_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on a

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b X_t dB_t\right) = 0, \tag{4.5}$$

3)(appartenance à L^2) Si $X \in \mathcal{E}_2$, alors $\int_a^b X_t dB_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_t dB_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_a^b X_t^2 dt\right) \tag{4.6}$$

Démonstration : 1) Il suffit d'écrire la définition de l'intégrale stochastique dans une subdivision commune à X et Y et le résultat est alors trivial.
2) Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, les variables aléatoires $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ et X_i sont indépendantes[3] et sont dans L^1 donc leur produit est dans L^1 et comme $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ est centrée, on a

$$\mathbb{E}\left(X_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = 0,$$

et 2) en résulte aussitôt.
3) Soit $i < j$. La variable aléatoire $X_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ est dans L^2 comme

[2] où $\mathcal{B}_{[a,s]}$ désigne la tribu de Borel de l'intervalle $[a, s]$.

[3] car $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ est indépendante de $\mathcal{F}_{t_i}$ donc indépendante de X_i

produit de deux variables de L^2 indépendantes. Comme X_j est dans L^2, la variable aléatoire $X_iX_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ est dans L^1. De plus étant $\mathcal{F}_{t_j}$ mesurable, elle est indépendante de $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$. Le produit de ces deux dernières variables est donc dans L^1 et on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(X_iX_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right)\\ &\qquad = \mathbb{E}\left(X_iX_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right)\mathbb{E}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) = 0.\end{aligned}$$

On en déduit que $\int_a^b X_t dB_t$ est dans L^2 et que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_t dB_t\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} X_iX_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}\left((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(X_i^2)(t_{i+1} - t_i) = \int_a^b \mathbb{E}(X_t^2)dt\\ &= \mathbb{E}\left(\int_a^b X_t^2 dt\right)\end{aligned}$$

(la troisième égalité découlant de l'indépendance de $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$ et de $\mathcal{F}_{t_i}$ donc de X_i^2 et la quatrième du fait que $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ est de variance égale à $t_{i+1} - t_i$). D'où le résultat.

Remarque : Il est intéressant de noter que si on considère un processus $X \in \mathcal{E}_2$ comme une fonction $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ des deux variables $(t, \omega) \in [a, b] \times \Omega$ alors $X \in L^2([a, b] \times \Omega, \mathcal{B}_{[a,b]} \otimes \mathcal{F}, dt \otimes d\mathbb{P})$ et $\mathbb{E}(\int_a^b X_t^2 dt) = \int_{[a,b]\times\Omega} (X_t(\omega))^2 dt d\mathbb{P}$ n'est autre que le carré de la norme L^2 de X dans cet espace de Hilbert. On peut alors reconsidérer les résultats de la proposition sous la forme suivante qui va se révéler cruciale pour la suite :

Corollaire 4.2.1 *: L'application $X \longmapsto I(X) := \int_a^b X_t dB_t$ est une isométrie de l'espace vectoriel $\mathcal{E}_2$ muni de la norme de $L^2([a, b] \times \Omega, \mathcal{B}_{[a,b]} \otimes \mathcal{F}, dt \otimes d\mathbb{P})$ dans l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

Démonstration : La linéarité de $X \longmapsto I(X)$ est donnée dans le 1) de la proposition et l'égalité $\|I(X)\|_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} = \|X\|_{L^2([a,b]\times\Omega,dt\otimes\mathbb{P})}$ est l'équation (4.6). □

4.3 Les processus intégrands

Dans cette partie nous définissons les classes de processus qu'on peut intégrer par rapport au mouvement brownien. Les notations et le contexte sont les mêmes que précédemment.

Définition 4.3.1 *: Soit $X = (X_t)_{t\in[a,b]}$ un processus défini sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t>0}, \mathbb{P})$ du mouvement brownien continu B considéré au paragraphe 1, et restreint à l'intervalle de temps $[a, b]$.*
1) On dit que X est dans la classe Λ^2 si X est progressivement mesurable et si

$$\int_a^b X_t^2 dt < +\infty, \quad \mathbb{P} \quad p.s. \tag{4.7}$$

2) On dit que X est dans la classe M^2 si X est progressivement mesurable et si

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b X_t^2 dt\right) < +\infty, \tag{4.8}$$

où $\int_a^b X_t^2 dt$ est la variable aléatoire qui pour tout $\omega \in \Omega$ est égale à l'intégrale de Lebesgue $\int_a^b X_t^2(\omega) dt$.

Remarque : On a clairement $\mathcal{E}_2 \subset M^2 \subset \Lambda^2$ et Λ^2(resp. M^2, resp.$\mathcal{E}$) est un espace vectoriel pour les opérations usuelles d'addition des processus $(\forall X, Y \in \Lambda^2, X+Y = (X_t+Y_t)_{t\in[a,b]})$ et la multiplication d'un processus par un scalaire $(\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X \in \Lambda^2, \lambda X = (\lambda X_t)_{t\in[a,b]})$. En fait c'est M^2 qui a la structure la plus intéressante car c'est un espace de Hilbert. En effet comme dans une remarque précédente, on constate que tout $X \in M^2$ s'identifie à un élément de $L^2([a,b] \times \Omega, \mathcal{B}_{[a,b]} \otimes \mathcal{F}, dt \otimes d\mathbb{P})$ puisque la condition (4.8) s'écrit

$$\|X\|^2_{L^2([a,b]\times\Omega,dt\otimes\mathbb{P})} = \mathbb{E}(\int_a^b X_t^2 dt) = \int_{[a,b]\times\Omega} (X_t(\omega))^2 dt d\mathbb{P} < +\infty.$$

4.3.1 Aspects hilbertiens de l'intégrale stochastique

On conserve les notations précédentes.

Proposition 4.3.1 *: M^2 est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert*

$$L^2([a,b]\times\Omega, \mathcal{B}_{[a,b]}\otimes\mathcal{F}, dt\otimes d\mathbb{P}).$$

Démonstration : Soit $(X^{(n)})$ une suite d'éléments de M^2 qui converge vers un élément $X \in L^2([a,b]\times\Omega, dt\otimes d\mathbb{P})$. Alors il existe une sous-suite $(X^{(n_i)})$ qui converge vers X $dt\otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement et donc X est progressivement mesurable comme chacun des $X^{(n_i)}$. □

On peut encore préciser la structure de M^2 par le résultat suivant :

Proposition 4.3.2 *: L'ensemble $\mathcal{P}rog$ de toutes les parties $A\subset[a,b]\times\Omega$ telles que le processus $(t,\omega)\mapsto \mathbf{1}_A(t,\omega)$ est progressivement mesurable, est une sous-tribu de $\mathcal{B}_{[a,b]}\otimes\mathcal{F}$. De plus on a :*

$$M^2 = L^2([a,b]\times\Omega, \mathcal{P}rog, dt\otimes d\mathbb{P}). \tag{4.9}$$

Démonstration : Il est clair que $A\in\mathcal{P}rog$ si et seulement si pour tout $s\in[a,b]$, $A\cap[a,s]\times\Omega\in\mathcal{B}_{[a,s]}\otimes\mathcal{F}_s$ et on en déduit que $\mathcal{P}rog$ est une tribu. Soit alors X un processus progressivement mesurable. Par définition, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $s\in[a,b]$, l'événement[4] $[X\le x]\cap[a,s]\times\Omega$ appartient à $\mathcal{B}_{[a,s]}\otimes\mathcal{F}_s$. Ceci signifie que $[X\le x]\in\mathcal{P}rog$ i.e. X est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{P}rog$ et le résultat (4.9) en découle aussitôt. □

Notation : Pour simplifier l'écriture, on notera $\|X\|_{M^2} := \|X\|_{L^2([a,b]\times\Omega, dt\otimes\mathbb{P})}$ la norme du processus X de l'espace de Hilbert M^2.

Théorème 4.3.1 *: L'espace $\mathcal{E}_2$ des processus élémentaires de carré intégrable est un sous-espace dense de l'espace de Hilbert M^2.*
(i.e. $\forall X\in M^2$, $\exists (X^{(n)})\in\mathcal{E}_2$: $\lim_{n\to\infty}\|X^{(n)}-X\|_{M^2}=0$)

Démonstration : Voir l'annexe. □

[4] $[X\le x] := \{(t,\omega); X_t(\omega)\le x\}$

Corollaire 4.3.1 : *L'isométrie $I : X \longmapsto I(X) = \int_a^b X_t dB_t$ de $\mathcal{E}_2$ dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ définie au corollaire 4.2.1, se prolonge de manière unique en une isomètrie de M^2 dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ (qu'on notera toujours I). Pour $X \in M^2$, on posera*

$$I(X) = \int_a^b X_t dB_t \tag{4.10}$$

et on l'appellera l'intégrale stochastique de X sur l'intervalle $[a, b]$.

Remarque :Pour déterminer pratiquement l'intégrale stochastique d'un processus $X \in M^2$, on doit donc trouver une suite de processus élémentaires $(X^{(n)}) \in \mathcal{E}_2$ qui converge vers X au sens de la norme $||.||_{M^2}$. On a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b X_t^{(n)} dB_t = \int_a^b X_t dB_t \quad \text{dans } L^2.$$

Toutes les propriétés de l'intégrale stochastique des processus élémentaires de la proposition 4.2.1 sont valables pour les processus de M^2 :

Proposition 4.3.3 : *L'application $X \longmapsto \int_a^b X_t dB_t$ est linéaire de M^2 dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ et pour tout $X \in M^2$, on a*

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b X_t dB_t\right) = 0, \tag{4.11}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_t dB_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_a^b X_t^2 dt\right). \tag{4.12}$$

Corollaire 4.3.2 *(covariance de deux intégrales stochastiques) :*
Pour $X, Y \in M^2$, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_t dB_t\right)\left(\int_a^b Y_t dB_t\right)\right] = \mathbb{E}\left(\int_a^b X_t Y_t dt\right). \tag{4.13}$$

Démonstration : En utilisant les notations du Corollaire 4.3.1, le premier membre de (4.13) est le produit scalaire $< I(X), I(Y) >_{L^2(\Omega,\mathbb{P})}$ et le second membre n'est autre que $< X, Y >_{M^2}$. L'égalité (4.13) n'est donc rien d'autre que la conservation du produit scalaire par l'isométrie I. □

Exemple (calcul d'une intégrale stochastique) : Soit $a > 0$. On va calculer l'intégrale stochastique $I = \int_0^a B_t dB_t$ où B est le mouvement brownien de référence (restreint à l'intervalle $[0, a]$). Notons tout d'abord que $B \in M^2$. En effet B est à trajectoires continues donc progressivement mesurable d'après le théorème 1.1.1 et :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^a B_t^2 dt\right) = \int_0^a \mathbb{E}B_t^2 dt = \int_0^a t dt = \frac{a^2}{2} < +\infty,$$

donc l'intégrale I a un sens. Considérons alors la subdivision π_n de l'intervalle $[0, a]$ constituée des points,

$$t_k = \frac{ka}{2^n}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^n.$$

et les processus élémentaires $X^{(n)} = (X_t^{(n)})_{t \in [0,a]}$, définis par :

$$X_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{2^n - 1} B_{ka/2^n} \mathbf{1}_{[ka/2^n, (k+1)a/2^n[}(t).$$

La suite $(X^{(n)})$ converge vers B dans M^2. En effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\int_0^a (X_t^{(n)} - B_t)^2 dt) &= \mathbb{E}(\sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{ka/2^n}^{(k+1)a/2^n} (X_t^{(n)} - B_t)^2 dt) \\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{ka/2^n}^{(k+1)a/2^n} \mathbb{E}((B_t - B_{ka/2^n})^2) dt \\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{ka/2^n}^{(k+1)a/2^n} (t - ka/2^n) dt \\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2} \frac{a^2}{2^{2n}} = \frac{a^2}{2^{n+1}} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Calculons maintenant l'intégrale stochastique de $X^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b X_t^{(n)} dB_t &= \sum_{k=0}^{2^n-1} B_{ka/2^n}(B_{(k+1)a/2^n} - B_{ka/2^n}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^n-1} \left[B^2_{(k+1)a/2^n} - B^2_{ka/2^n} - (B_{(k+1)a/2^n} - B_{ka/2^n})^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^n-1} \left(B^2_{(k+1)a/2^n} - B^2_{ka/2^n}\right) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^n-1} \left(B_{(k+1)a/2^n} - B_{ka/2^n}\right)^2 .
\end{aligned}$$

La première des sommes ci-dessus est télescopique et vaut B_a^2 (car $B_0 = 0$). la deuxième somme est égale à la variation quadratique S_{π_n} de B sur l'intervalle $[0, a]$. D'après un résultat vu au chapitre 2, on sait que $\lim_{n\to\infty} S_{\pi_n} = a$ (dans L^2). Il en résulte que

$$\int_0^a B_t dB_t = \frac{1}{2}(B_a^2 - a). \tag{4.14}$$

Remarque et Exercice : En utilisant les mêmes méthodes que précédemment, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} B_{(k+1)a/2^n}(B_{(k+1)a/2^n} - B_{ka/2^n}) = \frac{1}{2}(B_a^2 + a).$$

La limite est donc différente de celle trouvée en (4.14). On notera à ce propos que les processus

$$Y_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{2^n-1} B_{(k+1)a/2^n} \mathbf{1}_{[ka/2^n,(k+1)a/2^n[}(t),$$

ne sont pas des processus élémentaires au sens de la définition 4.2.1 car ils ne sont pas $\mathcal{F}_t$-adaptés : la variable aléatoire $B_{(k+1)a/2^n}$ n'est pas $\mathcal{F}_{ka/2^n}$ mesurable ; elle est en fait $\mathcal{F}_{(k+1)a/2^n}$ mesurable i.e. la valeur de $Y_t^{(n)}$ à un instant t dépend du futur.

4.3.2 Extension de l'intégrale stochastique à la classe Λ^2

Pour étendre l'intégrale stochastique aux processus de la classe Λ^2, on va utiliser une propriété d'approximation de tout processus $X \in \Lambda^2$ par des processus élémentaires, au sens suivant :

Proposition 4.3.4 *: pour tout $X \in \Lambda^2$, il existe une suite $(X^{(n)}) \in \mathcal{E}$ telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (X_t - X_t^{(n)})^2 dt = 0, \quad \mathbb{P} - p.s. \tag{4.15}$$

(la convergence a donc lieu aussi en probabilité).

Démonstration : voir l'annexe. Le résultat fondamental est alors le suivant :

Théorème 4.3.2 *: 1) Si $X \in \Lambda^2$ et $(X^{(n)}) \in \mathcal{E}$ vérifient (4.15), alors la suite $\int_a^b X_t^{(n)} dB_t$ converge en probabilité vers une variable aléatoire $I(X)$ qui ne dépend pas de la suite $(X^{(n)}) \in \mathcal{E}$ vérifiant (4.15). On pose alors*

$$I(X) = \int_a^b X_t dB_t$$

et on l'appelle l'intégrale stochastique de X.
2) Si $X \in M^2$, l'intégrale stochastique de X obtenue au paragraphe 4.3.1 coïncide avec l'intégrale obtenue ci-dessus au 1).

Pour la preuve on a besoin d'une inégalité de type Bienaymé-Tchebychev pour l'intégrale stochastique des processus élémentaires :

Lemme 4.3.1 *: Soit $X \in \mathcal{E}$. Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\alpha > 0$, on a*

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_a^b X_t dB_t\right| > \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\int_a^b X_t^2 dt > \alpha\right) + \frac{\alpha}{\epsilon^2}. \tag{4.16}$$

Démonstration : On a $X_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(t)$. Considérons le processus tronqué $X^{(\alpha)}$ défini par

$$X_t^{(\alpha)} = \begin{cases} X_j & \text{si} \quad t \in [t_j, t_{j+1}[\quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{j-1} X_i^2(t_{i+1} - t_i) \leq \alpha. \\ 0 & \text{si} \quad t \in [t_j, t_{j+1}[\quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{j-1} X_i^2(t_{i+1} - t_i) > \alpha. \end{cases}$$

Dans chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}[$, le processus $X^{(\alpha)}$ ne dépend pas de t. C'est donc un processus élémentaire. D'autre part on a

$$\int_a^b (X_t^{(\alpha)})^2 dt \leq \alpha, \tag{4.17}$$

par construction. Donc $X^{(\alpha)} \in M^2$. Mais on a aussi l'inclusion des événements

$$\left[\int_a^b X_t^2 dt \leq \alpha\right] \subset \left[X_t = X_t^{(\alpha)}, \forall t \in [a,b]\right]. \tag{4.18}$$

On déduit aussitôt de (4.18) l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_a^b X_t dB_t\right| > \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\int_a^b X_t^2 dt > \alpha\right) + \mathbb{P}\left(\left|\int_a^b X_t^{(\alpha)} dB_t\right| > \epsilon\right).$$

On déduit alors aussitôt (4.16) de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire $\int_a^b X_t^{(\alpha)} dB_t$ compte tenu de (4.17). □

Démonstration du théorème : 1) Soit $(X^{(n)}) \in \mathcal{E}$ vérifiant (4.15). l'inégalité triangulaire pour la norme de $L^2([a,b], dt)$ implique que $\int_a^b (X_t^{(n)} - X_t^{(m)})^2 dt \to 0$ $\mathbb{P} - p.s.$, donc en probabilité si $n, m \to +\infty$. Pour tout $\alpha > 0$, il existe[5] un entier N_α tel que $n, m > N_\alpha$ impliquent

$$\mathbb{P}\left(\int_a^b (X_t^{(n)} - X_t^{(m)})^2 dt > \alpha\right) < \alpha. \tag{4.19}$$

En utilisant l'inégalité (4.16) avec $X_t = X_t^{(n)} - X_t^{(m)}$ et la relation (4.19), pour $n, m > N_\alpha$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_a^b (X_t^{(n)} dB_t - \int_a^b X_t^{(m)} dB_t\right| > \epsilon\right) < \alpha + \frac{\alpha}{\epsilon^2}. \tag{4.20}$$

Etant donné ϵ, on peut choisir α assez petit pour qu'on ait à la fois $\alpha < \frac{\epsilon}{2}$ et $\frac{\alpha}{\epsilon^2} < \frac{\epsilon}{2}$. Le second membre de (4.20) est alors inférieur à ϵ dès que $n, m > N_\alpha$. Ceci montre que la suite des variables aléatoires

$$\left(\int_a^b X_t^{(n)} dB_t\right)_{n>0},$$

[5] par définition de la convergence en probabilité

est de Cauchy en probabilité. Donc elle converge en probabilité vers une variable aléatoire U. On va montrer maintenant que cette limite est indépendante de la suite $(X^{(n)})$:
Soit $(Y^{(n)}) \in \mathcal{E}$ une autre suite convergente vers X au sens de (4.15) et soit V la variable aléatoire telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b Y_t^{(n)} dB_t = V,$$

en probabilité (qui existe d'après le raisonnement précédent). Considérons alors la suite $(Z^{(n)}) \in \mathcal{E}$ telle que $Z^{(n)} = X^{(n)}$ si n est pair et $Z^{(n)} = Y^{(n)}$ si n est impair. Il est clair que $(Z^{(n)})$ converge vers X au sens de (4.15). Donc il existe aussi une variable aléatoire W telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b Z_t^{(n)} dB_t = W,$$

en probabilité. La suite $\left(\int_a^b Z_t^{(n)} dB_t\right)$ a deux sous-suites $\left(\int_a^b X_t^{(n)} dB_t\right)$ et $\left(\int_a^b Y_t^{(n)} dB_t\right)$ qui convergent respectivement vers U et V. L'unicité de la limite en probabilité exige que l'on ait $U = V = W$. D'où le 1) du théorème.
2) Si $X \in M^2$, soit $(X^{(n)}) \in \mathcal{E}_2$ une suite qui converge vers X au sens de M^2 i.e

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_a^b (X_t - X_t^{(n)})^2 dt\right) = 0.$$

La suite $\left(\int_a^b (X_t - X_t^{(n)})^2 dt\right)$ qui converge vers 0 dans L^1 a donc une sous suite qui converge vers 0 $\mathbb{P} - p.s.$ donc en probabilité i.e. : il existe une sous suite $(X^{(n_i)})$ de $(X^{(n)})$ qui converge vers X au sens de (4.15). D'après le 1), la suite des intégrales stochastiques $\int_a^b X_t^{(n_i)} dB_t$ converge en probabilité vers l'intégrale stochastique donnée par le 1) du théorème mais elle converge aussi (au sens L^2) vers l'intégrale stochastique du paragraphe 4.3.1 donc les deux intégrales sont les mêmes. Le théorème est donc entièrement démontré. □

Exercice : Montrer que l'inégalité de type Bienaymé-Tchebychev donnée dans le lemme 4.3.1, est valable pour tout processus $X \in \Lambda^2$.

Théorème 4.3.3 *(intégrale d'un processus continu et sommes de Riemann-Stieltjes) : Soit $X \in \Lambda^2$ un processus continu. Alors pour toute suite (π_n) de subdivisions $a = t_{n,0} < t_{n,1} < \cdots < t_{n,m_n} = b$ dont le pas $|\pi_n|$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, on a*

$$\sum_{i=0}^{m_n-1} X_{t_{n,i}}(B_{t_{n,i+1}} - B_{t_{n,i}}) \longrightarrow \int_a^b X_t dB_t, \tag{4.21}$$

en probabilité quand $n \to \infty$.

Démonstration : pour tout entier n, considérons le processus $X^{(n)}$ défini par

$$X_t^{(n)} = \sum_{i=0}^{m_n-1} X_{t_{n,i}} \mathbf{1}_{[t_{n,i}, t_{n,i+1}[}(t).$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire $t \to X_t(\omega)$ étant continue, on a $X_t^{(n)} \longrightarrow X_t(\omega)$ uniformément sur $[a, b]$ quand $n \to \infty$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (X_t(\omega) - X_t^{(n)}(\omega))^2 dt = 0,$$

et le résultat du théorème découle de la définition de l'intégrale stochastique. □

4.3.3 Résultats complémentaires sur l'intégrale stochastique

Théorème 4.3.4 *(multiplication par une variable aléatoire bornée) : Soit Z une variable aléatoire $\mathcal{F}_a$-mesurable et bornée ; alors pour tout processus $X \in \Lambda^2$, on a :*

$$\int_a^b Z X_t dB_t = Z \int_a^b X_t dB_t. \tag{4.22}$$

Démonstration : Le résultat est évident si X est un processus élémentaire. Dans le cas général, soit $X^{(n)}$ une suite de processus élémentaires approchant X au sens de (4.15). Alors le processus $ZX^{(n)} = (ZX_t^{(n)})_{t\in[a,b]}$ est encore élémentaire et comme Z est bornée la suite $ZX^{(n)}$ converge vers ZX au sens de (4.15). Ainsi on a

$$\begin{aligned}\int_a^b ZX_t dB_t &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b ZX_t^{(n)} dB_t \\ &= \lim_{n\to\infty} Z \int_a^b X_t^{(n)} dB_t \\ &= Z \int_a^b X_t dB_t.\end{aligned}$$

□

Théorème 4.3.5 *(égalité de deux intégrales sur un ensemble) : Soit $A \in \mathcal{F}$ et $X, Y \in \Lambda^2$, deux processus qui coïncident sur $[a,b] \times A$ (i.e. $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ pour tout $t \in [a,b]$ et tout $\omega \in A$). Alors :*

$$\int_a^b X_t dB_t = \int_a^b Y_t dB_t \quad \mathbb{P}-\textit{presque sûrement sur } A. \tag{4.23}$$

Démonstration : Dans la démonstration de la proposition 4.3.4 (voir le théorème 4.5.1), on peut constater que si $X^{(n)}$ et $Y^{(n)}$ sont les processus élémentaires approchant respectivement X et Y, alors pour tout entier n, on a

$$\int_a^b X_t^{(n)} dB_t = \int_a^b Y_t^{(n)} dB_t \quad \text{sur } A.$$

Le résultat du théorème en découle en passant à la limite quand $n \to \infty$ puisque la convergence en probabilité implique la convergence presque sûre pour une sous-suite. □

Théorème 4.3.6 *(convergence des intégrales stochastiques) : Soit $(X^{(n)}) \in \Lambda^2$ une suite de processus (pas forcément élémentaires) et $X \in \Lambda^2$. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (X_t - X_t^{(n)})^2 dt = 0$ en probabilité. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b X_t^{(n)} dB_t = \int_a^b X_t dB_t \quad \textit{en probabilité}.$$

Démonstration : il suffit d'appliquer l'inégalité de Tchebychev du lemme 4.3.1[6] au processus $X^{(n)} - X$; alors l'inégalité (4.19) est vraie avec le processus $X^{(n)} - X$ au lieu de $X^{(n)} - X^{(m)}$ et on termine en utilisant la même méthode que dans la preuve du Théorème 4.3.2. □

[6]qui est valable pour tout processus $X \in \Lambda^2$

4.4 L'intégrale stochastique comme processus

4.4.1 La martingale intégrale stochastique

Dans toute cette partie on a besoin de supposer que le mouvement brownien $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ qui sert à définir les intégrales stochastiques a une filtration complète [7]. L'intervalle d'intégration sera $[0, T]$ ($T > 0$). Pour un processus $X \in \Lambda^2([0, T])$, on considère les intégrales

$$I_t = \int_0^t X_s dB_s \quad (t \in [0, T]). \tag{4.24}$$

Il est clair que pour tous $0 \leq t < t' \leq T$, on a $I_{t'} - I_t = \int_t^{t'} X_s dB_s$.

Proposition 4.4.1 : *Le processus $I = (I_t)_{t\in[0,T]}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$.*

Démonstration : Soit $X^{(n)}$ une suite de processus élémentaires approchant X au sens de (4.15) et $I_t^{(n)} = \int_0^t X_s^{(n)} dB_s$. Alors $I_t^{(n)} \to I_t$ en probabilité donc $\mathbb{P}$-presque sûrement pour éventuellement une sous-suite. Comme les $I_t^{(n)}$ sont des variables aléatoires $\mathcal{F}_t$-mesurables par construction et que la tribu $\mathcal{F}_t$ est complète, I_t est donc aussi $\mathcal{F}_t$-mesurable. □

Théorème 4.4.1 : *Si X est un processus de M^2, alors le processus $I = (I_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale de carré intégrable, adaptée à la filtration brownienne.*

Démonstration : Soit $0 \leq t < t + h \leq T$. Pour tout $A \in \mathcal{F}_t$, d'après le théorème 4.3.4, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((I_{t+h} - I_t)\mathbf{1}_A) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_A \int_t^{t+h} X_s dB_s) \\ &= \mathbb{E}(\int_t^{t+h} \mathbf{1}_A X_s dB_s) = 0, \end{aligned}$$

car l'intégrale stochastique est une variable aléatoire centrée. La propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle implique $\mathbb{E}((I_{t+h} - I_t)|\mathcal{F}_t) = 0$, d'où le résultat. □

[7] i.e. pour tout $t \geq 0$, la tribu $\mathcal{F}_t$ contient les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$.

Théorème 4.4.2 : *Si le processus X est dans Λ^2, alors le processus $I = (I_t)_{t\in[0,T]}$ a une version continue.*

Démonstration : Supposons d'abord $X \in M^2$ et soit $X^{(n)}$ une suite de processus élémentaires de M^2 approchant X dans M^2. Par construction les processus $I^{(n)} = (I_t^{(n)})_{t\in[0,T]}$ sont à trajectoires continues. D'après le Théorème 4.4.1, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $I^{(n)} - I^{(m)}$ est donc une martingale continue et par l'inégalité maximale (1.37)(appliquée à la sous-martingale $(I^{(n)} - I^{(m)})^2$), pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$(4.25) \quad \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,T]} (I_t^{(n)} - I_t^{(m)})^2 \geq \epsilon^2\Big) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}((I_T^{(n)} - I_T^{(m)})^2) = \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\int_0^T (X_s^{(n)} - X_s^{(m)})^2 ds.$$

Mais le terme de droite de (4.25) tend vers zéro quand $n, m \to \infty$. En prenant $\epsilon = 2^{-k}$ ($k \in \mathbb{N}$), il existe donc une suite strictement croissante d'entiers n_k, telle que

$$(4.26) \qquad \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(n_k)} - I_t^{(n_{k+1})}| \geq 2^{-k}\Big) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Le lemme de Borel-Cantelli montre alors que

$$(4.27) \quad \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(n_k)} - I_t^{(n_{k+1})}| \geq 2^{-k} \text{pour une infinité de } k\Big) = 0.$$

Pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, on a donc

$$(4.28) \qquad \sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(n_k)}(\omega) - I_t^{(n_{k+1})}(\omega)| \leq 2^{-k},$$

pour tout k assez grand. Grâce aux inégalités (4.28) on voit[8] qu'on peut appliquer le critère de Cauchy uniforme et on en déduit que $I_t^{(n_k)}(\omega)$ converge uniformément sur $[0, T]$ lorsque $n_k \to \infty$. La limite qu'on note $J_t(\omega)$, est donc une fonction continue de $t \in [0, T]$. Mais on a aussi $I_t^{(n_k)} \to I_t$ dans L^2, ce qui exige $J_t = I_t$ $\mathbb{P}$-presque sûrement. On a donc montré que

[8]par sommation sur l'indice k.

$J = (J_t)$ est une version continue de I et le théorème est entièrement prouvé dans le cas $X \in M^2$.

étape 2(peut être omise en première lecture) : Soit $X \in \Lambda^2$. Pour tout $\lambda > 0$, on pose

$$\tau_\lambda(\omega) = \begin{cases} \inf\{t \in [0,T]; \int_0^t X_s^2(\omega)ds \geq \lambda\} \\ T \quad \text{si} \quad \{t \in [0,T]; \int_0^t X_s^2(\omega)ds \geq \lambda\} = \emptyset. \end{cases} \tag{4.29}$$

Il est facile de voir que τ_λ est un temps d'arrêt. Considérons le processus "tué" après l'instant τ_λ :

$$X_t^{(\lambda)}(\omega) = X_t \mathbf{1}_{[t \leq \tau_\lambda]}(t). \tag{4.30}$$

Il est clair que $X^{(\lambda)} \in \Lambda^2$ et que $\int_0^T (X_t^{(\lambda)})^2 dt \leq \lambda$. Donc $X^{(\lambda)} \in M^2$. Soit alors $J_t^{(\lambda)}$ une version continue de l'intégrale stochastique $\int_0^t X_s^{(\lambda)} dB_s$ qui existe d'après l'étape 1 et considérons l'événement

$$\Omega_\nu = \left[\int_0^T X_t^2 dt < \nu\right] \quad (\nu > 0).$$

Si $\nu < \lambda$, on a $\Omega_\nu \subset \Omega_\lambda$ et si de plus $\omega \in \Omega_\nu$, on a clairement $X_t^{(\nu)}(\omega) = X_t^{(\lambda)}(\omega)$ pour tout $t \in [0,T]$ et donc $J_t^{(\lambda)}(\omega) = J_t^{(\nu)}(\omega)$ pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega_\nu$ d'après le théorème 4.3.5. D'autre part comme $X \in \Lambda^2$, on a $\Omega_\nu \nearrow \Omega$ $\mathbb{P}$-p.s. quand $\nu \nearrow \infty$. Il en résulte que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, $J_t^{(\nu)}(\omega)$ est constant pour ν assez grand. Ainsi la limite suivante existe

$$\lim_{\nu \to \infty} J_t^{(\nu)}(\omega) = J_t(\omega), \tag{4.31}$$

uniformément en $t \in [0,T]$. La fonction $t \mapsto J_t(\omega)$ est donc continue. De plus c'est une version de I_t. En effet pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^t (X_s - X_s^{(\nu)})^2 ds \geq \epsilon\Big) \leq \mathbb{P}\big((\Omega_\nu)^c\big) \to 0 \quad (\nu \to \infty).$$

Donc d'après le Théorème 4.3.6, pour tout $t \in [0,T]$, $J_t^{(\nu)} \to I_t$ $(\nu \to \infty)$ en probabilité donc $\mathbb{P}$-p.s. pour une sous-suite. Compte tenu de (4.31), on a donc $I_t = J_t$ $\mathbb{P}$-p.s. □

Convention : A partir de maintenant, nous considérerons toujours que $I_t = \int_0^t X_s dB_s$ est la version continue de l'intégrale stochastique.

Corollaire 4.4.1 *(théorème d'arrêt) : Soit $X \in M^2([0,T])$ et τ un temps d'arrêt de la filtration brownienne tel que $\tau \leq T$. Alors le processus*

$$I_{t\wedge\tau} = \int_0^{t\wedge\tau} X_s dB_s \quad (t \in [0,T])$$

est une martingale.

Démonstration : Le résultat découle du théorème 1.4.10. □

Remarque et contre exemple : Si le processus $X \in \Lambda^2$ n'appartient pas à M^2, $I_t = \int_0^t X_s dB_s \quad (t \in [0,T])$ n'est pas en général une martingale. Par exemple soit $T > 1/2$ et $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ le processus élémentaire $X_t = \exp(B^2_{\frac{1}{2}})\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},T]}(t)$. Dans ce cas pour $\frac{1}{2} < t \leq T$, $I_t = e^{B^2_{1/2}}(B_t - B_{1/2})$ n'est pas intégrable puisque $\mathbb{E}(|I_t|) = \mathbb{E}(e^{B^2_{1/2}})\mathbb{E}(|B_t - B_{1/2}|) = +\infty$. Ceci nous conduit à introduire la notion de martingale locale qui joue un rôle important dans la théorie moderne du calcul stochastique.

Définition 4.4.1 *: Un processus réel (resp. à valeurs dans $\mathbb{C}$) M est une $\mathcal{F}_t$-martingale locale réelle (resp. complexe) s'il existe une suite croissante $(\tau_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt telle que*
1) $\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s.
2) Pour tout n, le processus $(M_{t\wedge\tau_n})_t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale équi-intégrable[9].
La suite de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est appelée suite localisante de M.

Exemple et Remarque : Toute martingale continue M est une martingale locale. En effet la définition est vérifiée en prenant pour τ_n le temps d'entrée[10] de M dans l'ensemble fermé $|x| \geq n$. De la même manière, dans la définition de martingale locale, on peut, si M est continue, remplacer la condition 2) par la condition apparemment plus forte : Pour tout n, le processus $(M_{t\wedge\tau_n})_t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale bornée. Il suffit en effet de remplacer les temps d'arrêt τ_n de la définition par $\tau_n \wedge \widetilde{\tau_n}$ où $\widetilde{\tau_n}$ est le temps d'entrée dans l'ensemble $|x| \geq n$.

[9] voir le théorème 1.4.9. Il suffit par exemple qu'elle soit bornée dans L^2.
[10] c'est un temps d'arrêt d'après la proposition 1.3.3.

Théorème 4.4.3 : *Si $X \in \Lambda^2$, $I_t = \int_0^t X_s dB_s \quad (t \in [0,T])$ est une martingale locale.*

Pour la preuve on a besoin du lemme suivant

Lemme 4.4.1 *(intégrale jusqu'à un temps d'arrêt) : Soit τ un temps d'arrêt pour la filtration brownienne tel que $\tau \leq T$ et soit $X \in \Lambda^2([0,T])$. Alors le processus $(X_t \mathbf{1}_{[t<\tau]})_{t\in[0,T]}$ appartient à $\Lambda^2([0,T])$ et on a*

$$\int_0^\tau X_s dB_s = \int_0^T X_s \mathbf{1}_{[s<\tau]} dB_s. \tag{4.32}$$

Démonstration : Ce résultat est intuitivement évident et peut être admis en première lecture. Nous donnons une preuve complète dans l'annexe.

Démonstration du théorème : Posons

$$\tau_n^{(1)} = \inf\left\{t \in [0,T]; \int_0^t X_s^2 ds \geq n\right\}$$

ainsi que

$$\tau_n^{(2)} = \inf\left\{t \in [0,T]; \left|\int_0^t X_s dB_s\right| \geq n\right\}$$

(avec la convention que $\inf\{\emptyset\} = +\infty$) et $\tau_n = \tau_n^{(1)} \wedge \tau_n^{(2)}$. Alors τ_n est un temps d'arrêt et $\lim \tau_n = +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s. car pour tout ω fixé les fonctions $t \mapsto \int_0^t X_s^2(\omega) ds$ et $t \mapsto \int_0^t X_s dB_s(\omega)$ sont continues donc bornées sur $[0,T]$ et donc $\tau_n^{(1)}(\omega) = \tau_n^{(2)}(\omega) = +\infty$ pour n assez grand. Or d'après le lemme on a

$$I_{t\wedge\tau_n} = \int_0^t \mathbf{1}_{[s<\tau_n]} X_s dB_s,$$

qui est une martingale puisque le processus intégrand est dans M^2 par définition de $\tau_n^{(1)}$ et cette martingale est bornée par définition de $\tau_n^{(2)}$. □

Remarque : Une martingale locale M telle que M_t soit intégrable pour tout t n'est pas forcément une martingale. On trouvera un contre-exemple dans le livre de D. Revuz et M. Yor [51] (chapitre 5, p.194). Inversement voici un résultat très simple qui donne une condition suffisante :

Proposition 4.4.2 : *Une martingale locale M dominée par une variable aléatoire intégrable (i.e. telle que pour tout t, $|M_t| \leq Y$ avec $Y \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$) est une martingale.*

Démonstration : Pour tout t, on a $M_{t\wedge\tau_n} \to M_t$ $\mathbb{P}$-p.s. donc dans L^1 d'après le théorème de convergence dominée. Ainsi pour tout $0 \leq s \leq t$, en utilisant la continuité de l'espérance contionnelle et en passant à la limite dans L^1 quand $n \to \infty$ dans la relation $\mathbb{E}(M_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s) = M_{s\wedge\tau_n}$, on obtient $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$. □

4.4.2 Applications : Inégalités maximales pour le processus intégrale stochastique

On examine dans ce paragraphe quelques conséquences très utiles dans la pratique de la propriété de martingale de l'intégrale stochastique.

Théorème 4.4.4 *(inégalité maximale simple) : Soit X un processus appartenant à M^2. Alors pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$(4.33) \qquad \mathbb{P}\big(\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t X_s dB_s| \geq \epsilon\big) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\big(\int_0^T X_s^2 ds\big).$$

Démonstration : le processus (I_t) de (4.24) est une martingale continue de carré intégrable. Il suffit donc d'appliquer l'inégalité maximale (1.37). □

Théorème 4.4.5 *(inégalité maximale L^2) : Soit X un processus appartenant à M^2. Alors*

$$(4.34) \qquad \mathbb{E}\big(\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t X_s dB_s|^2\big) \leq 4\mathbb{E}\big(\int_0^T X_s^2 ds\big).$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 1.4.3). □

Théorème 4.4.6 *(inégalité de Tchebychev maximale) : Soit X un processus appartenant à Λ^2. Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\lambda > 0$, on a*

$$(4.35) \qquad \mathbb{P}\big(\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t X_s dB_s| \geq \epsilon\big) \leq \mathbb{P}\left(\int_0^T X_t^2 dt > \lambda\right) + \frac{\lambda}{\epsilon^2}.$$

Démonstration : Utilisons le processus tué $X^{(\lambda)}$ défini en (4.30) et pour tout $t \in [0,T]$ soit $I_t = \int_0^t X_s dB_s$ et $I_t^{(\lambda)} = \int_0^t X_s^{(\lambda)} dB_s$. Il est clair que si on a à la fois $\sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(\lambda)}| \leq \epsilon$ et $\sup_{t\in[0,T]} |I_t - I_t^{(\lambda)}| = 0$, alors $\sup_{t\in[0,T]} |I_t| \leq \epsilon$. Donc

(4.36)
$$\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} |I_t| > \epsilon) \leq \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} |I_t - I_t^{(\lambda)}| > 0) + \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(\lambda)}| > \epsilon).$$

Comme $X^{(\lambda)} \in M^2$, le théorème 4.4.4 montre que

$$\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} |I_t^{(\lambda)}| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}(\int_0^T (X_s^{(\lambda)})^2 ds) \leq \frac{\lambda}{\epsilon^2}. \tag{4.37}$$

Le résultat du théorème découle alors de (4.36) compte tenu de (4.37) et du fait que

$\left[\sup_{t\in[0,T]} |I_t - I_t^{(\lambda)}| > 0\right] \subset \left[\int_0^T X_t^2 dt > \lambda\right]$. □

L'inégalité de Tchebychev maximale, permet d'obtenir un résultat très intéressant de convergence uniforme des intégrales stochastiques lorsque les processus intégrands convergent dans Λ^2 :

Théorème 4.4.7 *(convergence uniforme des intégrales stochastiques) : Soient $X^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) et X des processus appartenant à Λ^2. On suppose que la suite $(X^{(n)})$ converge vers X dans Λ^2 (i.e. $\int_0^T (X_s^{(n)} - X_s)^2 ds \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$,$n \to \infty$). Alors*

$$\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t X_s^{(n)} dB_s - \int_0^t X_s dB_s| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad (n \to \infty). \tag{4.38}$$

Démonstration : En appliquant l'inégalité de Tchebychev maximale au processus $X^{(n)} - X$, on obtient

(4.39)
$$\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t (X_s^{(n)} - X_s) dB_s| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}\left(\int_0^T (X_s^{(n)} - X_s)^2 ds > \lambda\right) + \frac{\lambda}{\epsilon^2}.$$

Pour $\epsilon > 0$ fixé, on choisit $\lambda \leq \frac{\epsilon^3}{2}$. Alors puisque que pour n assez grand, on a

$\mathbb{P}\left(\int_0^T (X_s^{(n)} - X_s)^2 ds > \lambda\right) \leq \frac{\epsilon}{2}$, le premier membre de (4.39) est inférieur à ϵ, ce qui prouve le résultat. □

4.5 Annexe

4.5.1 Approximation d'un processus de Λ^2 par des processus élémentaires

Définition 4.5.1 *(Rappel) $\Lambda^2([a,b])$ (resp. $M^2([a,b])$) désigne la classe des processus réels*
$X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{a\le t\le b}, (X_t)_{a\le t\le b}, \mathbb{P})$ *qui sont*

i) progressivement mesurables (ou non anticipatifs)

ii) tels que $\mathbb{P}(\int_a^b |X_t|^2dt < +\infty) = 1$ (resp. $\mathbb{E}\left(\int_a^b |X_t|^2dt\right) < +\infty$).

Théorème 4.5.1 *: Soit $X \in \Lambda^2$. Alors*
i) il existe une suite $(Y^{(n)})_n$ de processus continus appartenant à Λ^2 tels que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |Y_t^{(n)} - X_t|^2 dt = 0 \ \ p.s. \tag{4.40}$$

ii) il existe une suite $(X^{(n)})_n$ de processus élémentaires tels que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |X_t^{(n)} - X_t|^2 dt = 0 \ \ p.s. \tag{4.41}$$

Avant de commencer la démonstration, considérons la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\rho(t) = \begin{cases} c\, e^{-1/(1-t^2)} & si \quad |t| < 1 \\ 0 & si \quad |t| \ge 1, \end{cases} \tag{4.42}$$

où la constante c est telle que $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)dt = 1$. Alors la famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ où $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$, est une approximation de l'identité[11] de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact. Le résultat suivant est bien connu mais nous le présentons en détails pour éviter le recours à des références.

Lemme 4.5.1 *: Soit f une fonction de $L^1([a,b])$ qu'on prolonge à $\mathbb{R}$ en posant $f(t) = 0$ si $t \notin [a,b]$. Alors*

[11] On dit aussi que $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une unité approchée ou famille régularisante suivant les auteurs.

i) pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $\rho_\varepsilon * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\varepsilon(t-s)f(s)ds$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

ii) Si $f \in L^2([a,b])$ alors $\lim_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon * f = f$ dans $L^2([a,b])$ ($i.e.$ $\int_a^b |\rho_\varepsilon * f(t) - f(t)|^2 dt \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$).

Démonstration du lemme : i) Soient x et $h \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}|\rho_\varepsilon * f(x+h) - \rho_\varepsilon * f(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\rho_\varepsilon(x+h-s)ds - \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\rho_\varepsilon(x-s)ds\right| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(s)(\rho_\varepsilon(x+h-s) - \rho_\varepsilon(x-s))ds\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)||\rho_\varepsilon(x+h-s) - \rho_\varepsilon(x-s)|ds \\ &\leq \triangle_h \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|ds \qquad (4.43)\end{aligned}$$

où $\triangle_h = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\rho_\varepsilon(y+h) - \rho_\varepsilon(y)|$. Or ρ_ε est continue et à support compact. En particulier ρ_ε est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim_{h\to 0} \triangle_h = 0$ et la majoration (4.43) montre aussitôt que $\rho_\varepsilon * f$ est continue en x.

ii) On va faire la preuve dans le cas où f est continue (on n'utilisera le résultat d'ailleurs que dans ce cas). Grâce aux propriétés de ρ_ε, en particulier au fait que $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\varepsilon(s)ds = 1$, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b |\rho_\varepsilon * f(t) - f(t)|^2 dt &= \int_a^b \left|\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\varepsilon(t-s)f(s)ds - f(t)\right|^2 dt \\ &= \int_a^b \left|\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\varepsilon(t-s)(f(s)-f(t))ds\right|^2 dt \\ &= \int_a^b \left|\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \rho_\varepsilon(t-s)(f(s)-f(t))ds\right|^2 dt \\ &\leq \int_a^b dt \left(\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \rho_\varepsilon(t-s)ds\right)^2 \sup_{|s-t|<\epsilon} |f(s)-f(t)|^2 \\ &\leq (b-a) \sup_{|s-t|<\epsilon} |f(s)-f(t)|^2 \to 0,\end{aligned}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ car la fonction f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration de la partie i) du théorème :
Soit $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega \,;\, \int_a^b X_t^2(\omega)dt < +\infty\}$. On a $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ par hypothèse. Pour $\omega \in \Omega_0$, la fonction $X_\bullet(\omega) : t \mapsto X_t(\omega)$ est dans $L^2([a, b])$ (et donc dans $L^1([a, b])$). D'après le lemme 1.3, la fonction

$$\rho_\varepsilon * X_\bullet(\omega) : t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\varepsilon(t - s)X_s(\omega)ds$$

est continue[12]. Définissons alors pour tout $\varepsilon > 0$, un processus $Z^{(\varepsilon)} = (Z_t^{(\varepsilon)})_{t\in[a,b]}$ en posant

$$Z_t^{(\varepsilon)}(\omega) = \begin{cases} (\rho_\varepsilon * X_\bullet(\omega))(t) & si \quad \omega \in \Omega_0 \\ 0 & si \quad \omega \notin \Omega_0 \end{cases} \tag{4.44}$$

Ce processus est à trajectoires continues et il est adapté (exercice) donc il est progressivement mesurable d'après le théorème 1.1.1.

Lemme 4.5.2 : *Pour tout $\varepsilon > 0$, le processus $Z^{(\varepsilon)}$, défini par (4.44), est dans la classe Λ^2.*

Démonstration du Lemme : Soit $\omega \in \Omega_0$; on a

$$\int_a^b [Z_t^{(\varepsilon)}(\omega)]^2 dt = \int_a^b dt\Big(\int_{-1}^1 \rho(v)X_{t-\varepsilon v}(\omega)dv\Big)^2$$
$$= \int_a^b dt\Big(\int_{-1}^1 \rho(v)^{1/2}\rho(v)^{1/2}X_{t-\varepsilon v}(\omega)dv\Big)^2 \leq$$
$$\int_a^b dt \int_{-1}^1 \rho(v)dv \int_{-1}^1 \rho(v)X_{t-\varepsilon v}^2(\omega)dv \text{ (Cauchy-Schwarz)}$$
$$\leq \int_{-1}^1 \rho(v)\Big(\int_a^b X_{t-\varepsilon v}^2(\omega)dt\Big)dv \leq \int_a^b X_t^2(\omega)dt < +\infty.$$

Lemme 4.5.3 : $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^b |X_t - Z_t^{(\varepsilon)}|^2 dt = 0\, p.s.$

[12] on a posé $X_t = 0$ si $t \notin [a, b]$).

Démonstration du Lemme : Soit $\omega \in \Omega_0$ et $\delta > 0$ donnés. Les fonctions continues étant denses dans $L^2([a,b])$, il existe une fonction $\psi_\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue telle que $\int_a^b |X_t(\omega) - \psi_\delta(t)|^2 dt \leq \frac{\delta}{12}$. Alors on a

$$\begin{aligned}\int_a^b |X_t(\omega) - Z_t^{(\varepsilon)}(\omega)|^2 dt &\leq 3 \int_a^b |\rho_\varepsilon * (X_\bullet(\omega) - \psi_\delta)(t)|^2 dt \\ &\quad + 3 \int_a^b |\rho_\varepsilon * \psi_\delta(t) - \psi_\delta(t)|^2 dt \\ &\quad + 3 \int_a^b |\psi_\delta(t) - X_t(\omega)|^2 dt \\ &\leq 3 \int_a^b |\rho_\varepsilon * \psi_\delta(t) - \psi_\delta(t)|^2 dt + \frac{6\delta}{12}.\end{aligned}$$

(on a utilisé l'inégalité

$$\int_a^b |\rho_\varepsilon * (X_\bullet(\omega) - \psi_\delta)(t)|^2 dt \leq \int_a^b |X_t(\omega) - \psi_\delta(t)|^2 dt).$$

D'après le lemme 4.5.1 ii), la dernière intégrale ci-dessus peut être rendue inférieure à $\delta/6$ pour ε assez petit. Au total on a

$$\int_a^b |X_t(\omega) - Z_t^{(\varepsilon)}(\omega)|^2 dt \leq \delta$$

dès que ε est assez petit ; d'où le lemme. Le point i) du théorème en résulte en posant

$$Y_t^{(n)} = Z_t^{(1/n)}. \tag{4.45}$$

Démonstration du ii) du Théorème : Pour simplifier les notations, on suppose $[a,b] = [0,1]$. On considère pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, la suite des processus élémentaires $Y^{(n,m)}$ définis à partir du processus $Y^{(n)}$ de (4.45) par :

$$Y_t^{(n,m)} = \sum_{k=0}^{m-1} Y_{k/m}^{(n)} \mathbf{1}_{[k/m,(k+1)/m[}(t).$$

Comme la fonction $t \mapsto Y_t^{(n)}(\omega)$ est continue sur $[a,b]$, on a

$$\lim_{m\to+\infty} Y_t^{(n,m)}(\omega) = Y_t^{(n)}(\omega)$$

uniformément en $t \in [a, b]$. Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^1 |Y_t^{(n,m)}(\omega) - Y_t^{(n)}(\omega)|^2 dt = 0.$$

Donc $\lim_{m \to +\infty} \int_0^1 |Y_t^{(n,m)} - Y_t^{(n)}|^2 dt = 0$ en probabilité, pour tout n fixé.

Soit maintenant $\delta > 0$ fixé. D'après (4.45) et le lemme 4.5.3, $\int_0^1 |X_t - Y_t^{(n)}|^2 dt \xrightarrow{P} 0$. Il existe donc un entier $n_0 = n_0(\delta)$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\int_0^1 |X_t - Y_t^{(n_0)}|^2 dt \geq \delta/4\right) \leq \delta/4.$$

Pour cet entier n_0, il existe un autre entier $m_0 = m_0(\delta)$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\int_0^1 |Y_t^{(n_0,m_0)} - Y_t^{(n_0)}|^2 dt \geq \delta/4\right) \leq \delta/4.$$

Mais

$$\int_0^1 |X_t - Y_t^{(n_0,m_0)}|^2 dt \leq 2\int_0^1 |X_t - Y_t^{(n_0)}|^2 dt + 2\int_0^1 |Y_t^{(n_0)} - Y_t^{(n_0,m_0)}|^2 dt.$$

Donc $\int_0^1 |X_t - Y_t^{(n_0,m_0)}|^2 dt \geq \delta$ implique qu'on a

$$\int_0^1 |X_t - Y_t^{(n_0)}|^2 dt \geq \delta/4 \quad \text{ou} \int_0^1 |Y_t^{(n_0)} - Y_t^{(n_0,m_0)}|^2 dt \geq \delta/4.$$

Il en résulte que

$$\mathbb{P}\left(\int_0^1 |X_t - Y_t^{(n_0,m_0)}|^2 dt \geq \delta\right) \leq \delta/2 + \delta/2 \leq \delta.$$

En prenant $\delta = 1/k$ et en posant

$$X_t^{(k)} = Y_t^{\left(n_0(1/k),m_0(1/k)\right)},$$

on obtient donc

$$\int_0^1 |X_t - X_t^{(k)}|^2 dt \xrightarrow{P} 0 \; (k \to +\infty).$$

La convergence en probabilité impliquant la convergence p.s. pour une sous suite, il existe $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\int_0^1 |X_t - X_t^{(k_n)}|^2 dt \longrightarrow \; 0 \; p.s. \; (n \to +\infty),$$

et le ii) du théorème est démontré. □

Remarque : Dans toute la démonstration, on a utilisé la propriété suivante de la convergence en probabilité : une suite X_n converge vers 0 en probabilité si et seulement si pour tout $\delta > 0$, il existe un entier $n(\delta)$ tel que

$$\forall n \geq n(\delta), \; \mathbb{P}(|X_n| \geq \delta) \leq \delta.$$

4.5.2 Approximation d'un processus de M^2 par des processus élémentaires de carré intégrable

Théorème 4.5.2 *: Pour tout processus $X = (X_t)_{t\in[a,b]} \in M^2$, il existe une suite $X^{(n)}$ de processus élémentaires dans $\mathcal{E}_2$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_a^b |X_t^{(n)} - X_t|^2 dt\right) = 0.$$

Démonstration : On va déduire ce résultat du théorème 4.5.1 par une méthode de troncature. Pour tout $N > 0$ fixé, considérons la fonction

$$\Phi_N(x) = \begin{cases} x & si \quad |x| \leq N \\ \frac{Nx}{|x|} & si \quad |x| > N. \end{cases} \tag{4.46}$$

Il est clair que Φ_N est lipschitzienne de constante de Lipschitz égale à 1. D'après le théorème 4.5.1, il existe une suite $(Y^{(n)})$ de processus élémentaires telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |X_t - Y_t^{(n)}|^2 dt = 0 \quad p.s.$$

On a alors

$$U_n = \int_a^b |\Phi_N(X_t) - \Phi_N(Y_t^{(n)})|^2 dt \leq \int_a^b |X_t - Y_t^{(n)}|^2 dt \longrightarrow 0 \ (n \to +\infty),$$

presque sûrement. Mais la suite U_n est bornée car $0 \leq U_n \leq 4N^2(b-a)$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne alors

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\Big(\int_a^b |\Phi_N(X_t) - \Phi_N(Y_t^{(n)})|^2 dt\Big) = 0, \tag{4.47}$$

pour tout $N > 0$ fixé. D'autre part, on a

(4.48)

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{E} \int_a^b |\Phi_N(X_t) - X_t|^2 dt \overset{(i)}{\leq} 2 \lim_{N \to +\infty} \mathbb{E} \int_a^b \mathbf{1}_{[|X_t| > N]} |X_t|^2 dt \overset{(ii)}{=} 0$$

(L'inégalité (i) car $|\Phi_N(X_t) - X_t|^2 = |X_t|^2 |\frac{N}{|X_t|} - 1| \leq 2|X_t|^2$ si $|X_t| > N$ et l'égalité (ii) par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, puisque $\lim\limits_{N \to +\infty} \int_a^b \mathbf{1}_{[|X_t|>N]}(\omega) |X_t(\omega)|^2 dt = 0$). Mais pour tout $\omega \in \Omega$ fixé, on a

$$\begin{aligned}
\Big(\int_a^b |\Phi_N\big(Y_t^{(n)}(\omega)\big) - X_t(\omega)|^2 dt\Big)^{1/2} \leq& \\
&\Big(\int_a^b |\Phi_N\big(X_t(\omega)\big) - X_t(\omega)|^2 dt\Big)^{1/2} \\
&+ \Big(\int_a^b |\Phi_N\big(Y_t^{(n)}(\omega)\big) - \Phi_N(X_t(\omega))|^2 dt\Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

(inégalité triangulaire pour la norme de $L^2([a,b], dt)$).
En élevant au carré, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |\Phi_N\big(Y_t^{(n)}\big) - X_t|^2 dt \\
&\leq 2\Big(\int_a^b |\Phi_N\big(Y_t^{(n)}\big) - \Phi_N(X_t)|^2 dt + \int_a^b |\Phi_N(X_t) - X_t|^2 dt\Big).
\end{aligned} \tag{4.49}$$

En passant ensuite aux espérances dans l'inégalité (4.49), on voit facilement à partir de (4.47) et (4.48) que pour tout entier k, il existe des entiers N et n tels que

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b |\Phi_N(Y_t^{(n)}) - X_t|^2 dt\right) \leq 1/k.$$

Pour ces entiers N et n, on pose $X_t^{(k)} = \Phi_N(Y_t^{(n)})$. La suite de processus élémentaires $(X^{(k)})$ ainsi définie, satisfait le théorème. □

4.5.3 Intégrale jusqu'à un temps d'arrêt : démonstration du lemme 4.4.1

La formule (4.32) est claire si X est un processus élémentaire et si le temps d'arrêt τ prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable. Lorsque $X \in \Lambda^2([0,T])$, considérons une suite $X^{(n)}$ de processus élémentaires telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |X_t^{(n)} - X_t|^2 dt = 0 \text{ en probabilité,} \tag{4.50}$$

et $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de temps d'arrêt prenant chacun un nombre dénombrable de valeurs et telle que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$ (voir le lemme 2.3.1). Pour tout entier n on a

$$\int_0^{\tau_n} X_t^{(n)} dB_t = \int_0^T X_t^{(n)} \mathbf{1}_{[t<\tau_n]} dB_t. \tag{4.51}$$

Mais, d'une part, on a

$$\int_0^T \left|\mathbf{1}_{[s<\tau_n]} X_t^{(n)} - \mathbf{1}_{[s<\tau]} X_t\right|^2 dt \to 0 \quad \text{en probabilité} \tag{4.52}$$

puisque $\int_0^T |\mathbf{1}_{[t<\tau_n(\omega)]} X_t(\omega) - \mathbf{1}_{[t<\tau(\omega)]} X_t(\omega)|^2 dt \to 0$ pour $\mathbb{P}$-presque tout ω et que clairement, $\int_0^T \mathbf{1}_{[t<\tau_n]} |X_t^{(n)} - X_t|^2 dt \to 0$ en probabilité. Le théorème 4.3.6 montre alors que

$$\int_0^T \mathbf{1}_{[s<\tau_n]} X_t^{(n)} dB_t \to \int_0^T \mathbf{1}_{[s<\tau]} X_t dB_t \quad \text{en probabilité.} \tag{4.53}$$

D'autre part, d'après le théorème 4.4.7,

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t X_s^{(n)} dB_s - \int_0^t X_s dB_s \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad (n \to \infty),$$

ce qui implique

$$(4.54) \qquad \left| \int_0^{\tau_n} X_s^{(n)} dB_s - \int_0^{\tau_n} X_s dB_s \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad (n \to \infty).$$

Mais

$$(4.55) \qquad \int_0^{\tau_n} X_s dB_s \xrightarrow{p.s.} \int_0^{\tau} X_s dB_s \quad (n \to \infty)$$

car les trajectoires de l'intégrale stochastique sont continues. Il résulte alors de (4.54) que

$$(4.56) \qquad \int_0^{\tau_n} X_s^{(n)} dB_s \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^{\tau} X_s dB_s \quad (n \to \infty).$$

D'où le résultat compte tenu de (4.51), (4.53) et (4.56). □

4.5.4 Notes et exercices

Dans tous les exercices, $B = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0})$ un mouvement brownien naturel sur $\mathbb{R}$ à trajectoires continues.

Exercice 1 : Considérons un processus $X = (X_t)_{t\in[0,T]} \in M^2([0,T])$ (ou plus généralement $\Lambda^2([0,T])$) et soient $0 \leq a < b < T$.

1) Soit $0 \leq c \leq a$. Vérifier que

$$\int_a^b X_s dB_s = \int_{a-c}^{b-c} X_{t+c} dB_t^{(1)},$$

où $B_t^{(1)} = B_{t+c} - B_t$ (*indication* : commencer par le cas où X est élémentaire).

2) Soit $c > 0$ tel que $bc \leq T$. Montrer que

$$\int_a^b X_s dB_s = \int_{ac}^{bc} \frac{1}{\sqrt{c}} X_{\frac{t}{c}} dB_t^{(c)},$$

où $B_t^{(c)} = \sqrt{c} B_{\frac{t}{c}}$ (on notera le facteur $\frac{1}{\sqrt{c}}$ alors qu'avec l'intégrale classique on a le facteur $\frac{1}{c}$).

Exercice 2 : Soit $X = (X_t)_{t \in [0,T]} \in M^2([0,T])$. Montrer que le processus suivant est une martingale

$$M_t = \left(\int_0^t X_s dB_s \right)^2 - \int_0^t X_s^2 ds \quad (t \in [0,T]).$$

Exercice 3 (intégrales de Wiener-Itô) : Soit $f \in L^2([0,T])$ une fonction déterministe. Pour tous $0 \leq a < b \leq T$, on pose :

$$\mathcal{J}_{a,b} = \int_a^b f(s) dB_s.$$

1) i) Dans le cas où la fonction f est en escalier sur l'intervalle $[0,T]$, montrer que $\mathcal{J}_{a,b}$ est une variable aléatoire normale centrée dont on précisera la variance.
ii) En déduire en toute généralité que $\mathcal{J}_{a,b}$ est une variable aléatoire normale centrée de variance égale à $\int_a^b f^2(s) ds$.
2) Soient $0 \leq a < b \leq c < d \leq T$.
Montrer que le couple de variables aléatoires $(\mathcal{J}_{a,b}, \mathcal{J}_{c,d})$ est gaussien et que $\mathcal{J}_{a,b}$ et $\mathcal{J}_{c,d}$ sont des variables aléatoires indépendantes. (*indication* : on pourra commencer par le cas où f est en escalier sur $[0,T]$).
3) Pour $t \in [0,T]$, on pose $\mathcal{J}_t = \mathcal{J}_{0,t}$. Démontrer que le processus $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_t)_{t \in [0,T]}$ est gaussien et calculer sa fonction de covariance.
4) En déduire que le processus $(\mathcal{J}_t)_{t \in [0,T]}$ est équivalent au mouvement brownien changé de temps

$$\left(B_{\int_0^t f^2(s) ds} \right)_{t \in [0,T]}.$$

Exercice 4 : Soit $f \in L^2([0,T])$. Montrer que le processus défini pour $t \in [0,T]$ par

$$M_t = \exp \left(\int_0^t f(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(s) ds \right),$$

est une martingale (*indication* : utiliser l'exercice 3 et s'inspirer du cas $f \equiv 1$ déjà traité dans un autre exercice).

Exercice 5 : On reprend les hypothèses de l'exercice 3.
1) On suppose que f est de la forme $f(s) = \sqrt{\Phi'(s)}$ où $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction dérivable, strictement croissante et telle que $\Phi(0) = 0$. Vérifier dans ce cas que le processus gaussien $\mathcal{J}$ a une fonction de covariance $\Gamma(s,t) = \Phi(s \wedge t)$ où $s \wedge t = \min(s,t)$.
2) Prouver que le processus $B^\Phi = (B_t^\Phi)_{t \geq 0}$ défini par :

$$B_t^\Phi = \int_0^{\Phi^{-1}(t)} \sqrt{\Phi'(s)} dB_s$$

est un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle mais aussi par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{\Phi^{-1}(t)})_{t \geq 0}$. (Remarque (de M. Yor) : En fait on peut montrer que ces deux filtrations coïncident aux ensembles négligeables près si $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration naturelle de B).

Exercice 6 (identification de $L^2(\mathbb{R}_+)$ à l'espace gaussien engendré par B) : Soit $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$.
1) Montrer que la limite $\lim_{t \to \infty} \int_0^t g(s) dB_s$ existe dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On notera $\int_0^{+\infty} g(s) dB_s$ cette limite et on donnera son espérance et sa variance.
2) Soit $H \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ le sous-ensemble des variables aléatoires de la forme $Y_g = \int_0^{+\infty} g(s) dB_s$ où $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Montrer que H est le sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ engendré par les variables aléatoires B_t ($t \in \mathbb{R}_+$) et que l'application $g \mapsto Y_g$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+)$ sur H. Cet espace s'appelle *l'espace gaussien* engendré par B.

Exercice 7 (variation quadratique d'une intégrale de Wiener) : Soit $f \in L^2([0,T])$ une fonction qui ne s'annule sur aucun sous intervalle de $[0,T]$ et soit $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_t)_{t \in [0,T]}$ où $\mathcal{J}_t = \int_0^t f(s) dB_s$, le processus intégrale stochastique considéré dans l'exercice 3.
Lorsque $\pi : 0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_N = t$, est une subdivision de $[0,t]$, on note $|\pi| = \max\{u_{k+1} - u_k ; 0 \leq k \leq N-1\}$ le pas de cette subdivision et on considère la variation quadratique de $\mathcal{J}$ sur π :

$$S_\pi = \sum_{k=0}^{N-1} (\mathcal{J}_{u_{k+1}} - \mathcal{J}_{u_k})^2.$$

1) (Question préliminaire) : Montrer que $\sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{u_k}^{u_{k+1}} (f(s))^2 ds \right)^2 \to 0$ lorsque $|\pi| \to 0$.

2) Montrer que

$$\lim_{|\pi|\to 0} S_\pi = \int_0^t f^2(s)ds \quad (\text{dans } L^2)$$

(on l'appelera variation quadratique de $\mathcal{J}$ sur $[0,t]$) (*indication* : commencer par calculer $\mathbb{E}(S_\pi)$ et s'inspirer du cas du mouvement brownien).
3) En déduire que $\mathbb{P}$-presque sûrement, les trajectoires du processus $\mathcal{J}$ ne sont à variation bornée sur aucun intervalle de temps.

Notes : Comme nous l'avons dit dans l'avant-propos, par souci de simplicité, nous n'avons pas souhaité dépasser le cadre de l'intégrale stochastique relative au mouvement brownien en abordant par exemple l'intégrale par rapport à une martingale continue. Comme nous l'a fait remarquer Marc Yor, cela présente certains inconvénients dans l'optique d'une généralisation ultérieure de la théorie. Par exemple nos processus élémentaires de la définition 4.2.1 sont dans la théorie générale des processus optionnels élémentaires. Dans le cas de la filtration brownienne ceci est sans importance car les deux notions de prévisibles et optionnels coïncident mais ce n'est plus vrai dans un cadre plus général où il convient donc de considérer des processus élémentaires prévisibles. On pourra consulter à ce propos le livre de Priouret [47] ou celui de Chung et Williams [11].
Les résultats de ce chapitre viennent de deux sources essentielles : les livres de Baldi [2] et de McKean [41]. Plus particulièrement, les sections 4.3.2 (extension de l'intégrale stochastique à la classe Λ^2), 4.4.2 (inégalités maximales pour le processus intégrale stochastique), 4.5.1 et 4.5.2 (approximation d'un processus de Λ^2 par des processus élémentaires) sont empruntées à l'excellent livre de Baldi.
Je voudrais faire une dernière remarque au sujet des notations M^2 et Λ^2 pour les deux classes essentielles de processus intégrands de la définition 4.3.1. On peut associer la lettre M à "martingale" et la lettre Λ (i.e. L) à "locale" car l'intégrale stochastique d'un processus de M^2 est une martingale (théorème 4.4.1) alors que l'intégrale stochastique d'un processus de Λ^2 n'est qu'une martingale locale (théorème 4.4.3). Espérons que cette astuce mnémotechnique contribuera à adoucir un peu l'accumulation des résultats essentiellement techniques de ce chapitre.

Chapitre 5

Notions sur le calcul stochastique d'Itô

5.1 Introduction

La classe des processus d'Itô relative à un mouvement brownien donné, est particulièrement intéressante pour une introduction aux idées du calcul stochastique. C'est d'abord une classe stable pour les opérations de combinaison linéaire et de multiplication des processus ; autrement dit elle a une structure d'algèbre. Cette classe est également stable par toute transformation déterministe de classe C^2. Elle se prête donc parfaitement au calcul et même à une sorte de calcul différentiel. De plus elle contient la classe des martingales browniennes. Enfin elle est largement utilisée dans les applications en particulier dans les modèles probabilistes des mathématiques financières.

Dès le début de ce chapitre nous introduisons la notion de différentielle stochastique pour les processus d'Itô. En fait la définition de cet objet n'est qu'un artifice de notation qui représente les processus intégrale usuelle et intégrale stochastique. Néanmoins son utilisation a le grand avantage de faciliter les calculs car il obéit à des règles simples analogues à celles du calcul différentiel usuel modulo un terme correctif : *le terme complémentaire d'Itô.* Les règles de ce pseudo calcul différentiel stochastique sont présentées de manière à la fois intuitive et suffisamment rigoureuse pour permettre une première approche du sujet.

Les deux résultats essentiels sont démontrés relativement en détail : le premier concerne l'expression de la différentielle d'un produit de deux processus d'Itô (résultat connu sous le nom de *formule d'intégration par parties*) et le second est la *formule d'Itô* qui donne la différentielle stochastique du transformé d'un processus d'Itô par une fonction de classe C^2. Ces résultats constituent le socle du calcul stochastique.

Comme application, nous présentons quelques exemples d'équations différentielles stochastiques ainsi qu'un théorème d'existence et d'unicité des solutions du type Cauchy-Lipschitz. On verra que ceci nous permet de traiter, tout de suite et sans "grand investissement", quelques questions fondamentales comme par exemple la représentation des martingales browniennes ou le fait que la solution d'une équation différentielle stochastique est toujours un processus de Markov dont on peut déterminer le semi-groupe si on sait résoudre les équations de Kolmogorov.

Enfin nous introduisons la notion d'exponentielle stochastique à l'origine d'une des techniques actuelles les plus fructueuses : le changement de probabilité que nous présentons brièvement. Comme application on trouvera en annexe la solution du fameux problème de Black, Scholes et Merton sur la détermination du prix d'une option européenne.

5.2 Processus d'Itô et notion de différentielle stochastique

Soit $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien continu, donné une fois pour toutes et $T > 0$ un temps fixé. On considérera, comme au chapitre 4, les espaces de processus intégrands $\Lambda^p([0,T]), p \geq 1$ (i.e. les processus X progressivement mesurables tels que $\mathbb{P}$-p.s., $t \mapsto X_t(\omega)$ est dans $L^p([0,T])$), (resp. l'espace $M^2([0,T])$) relativement à l'intervalle de temps $[0,T]$ et on les notera Λ^p (resp. M^2) pour simplifier les notations.

5.2.1 Notion de processus d'Itô

Définition 5.2.1 : *Un processus $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, est appelé processus d'Itô s'il est de la* *forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dB_s \quad (\forall t \in [0,T]), \tag{5.1}$$

où $a \in \Lambda^1$ et $b \in \Lambda^2$ sont deux processus.

Remarque 1 : On considérera toujours la version continue de l'intégrale stochastique. Ainsi le processus X défini en (5.1) est un processus continu et par conséquent, $X \in \Lambda^p$ pour tout $p \geq 0$.

Définition 5.2.2 *: Pour traduire l'égalité (5.1), on dira que le processus X admet la différentielle stochastique*

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t \tag{5.2}$$

Remarque 2 : On notera que (5.2) équivaut à dire que pour tous $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, on a

$$X_{t_2} - X_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} a_s ds + \int_{t_1}^{t_2} b_s dB_s. \tag{5.3}$$

Il suffit en effet de faire la différence des valeurs prises par (5.1) pour les valeurs $t = t_2$ et $t = t_1$.

Remarque 3 : On a privilégié l'intervalle de temps $[0,T]$ pour faciliter la présentation mais on peut définir la notion de processus d'Itô sur n'importe quel intervalle de temps $[c,d]$ $(0 \leq c < d)$. Ainsi un processus $X = (X_t)_{t\in[c,d]}$ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[c,d]}$, est d'Itô, s'il est de la forme

$$X_t = X_c + \int_c^t a_s ds + \int_c^t b_s dB_s \quad (\forall t \in [c,d]),$$

où $a \in \Lambda^1([c,d])$ et $b \in \Lambda^2([c,d])$ sont deux processus.
Il est évident que si X est un processus d'Itô sur un intervalle de temps I, sa restriction $\tilde{X} = (X_t)_{t\in I'}$ à un sous-intervalle $I' \subset I$, est un processus d'Itô sur I'.

Exemple 1 : On a vu au chapitre 3 que $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$ i.e. $B_t^2 = t + 2\int_0^t B_s dB_s$, qu'on peut récrire la sous forme différentielle :

$$d(B_t^2) = dt + 2B_t dB_t. \tag{5.4}$$

On remarque que par rapport à la règle de différentiation classique, il y a le terme supplémentaire dt.

Exemple 2 : On va montrer que $(tB_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus d'Itô et que sa différentielle stochastique est donnée par :

$$d(tB_t) = B_t dt + t dB_t. \tag{5.5}$$

Ici le résultat de la différentiation est le même que dans le cas classique. Pour démontrer (5.5), on utilise l'intégrale stochastique $\int_0^t s dB_s$ qui d'après le théorème 4.3.3 vaut :

$$\int_0^t s dB_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} t_{n,i}(B_{t_{n,i+1}} - B_{t_{n,i}}) \quad \text{(en probabilité)},$$

où $\pi_n : 0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \cdots < t_{n,i} < \cdots < t_{n,n} = t$ est une subdivision à points équidistants de pas $\frac{t}{n}$. Mais on peut remplacer la somme $\sum_{i=0}^{n-1} t_{n,i}(B_{t_{n,i+1}} - B_{t_{n,i}})$ par la somme $\sum_{i=0}^{n-1} t_{n,i+1}(B_{t_{n,i+1}} - B_{t_{n,i}})$ puisque la valeur absolue de la différence de ses deux sommes est majorée, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, par :

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} |t_{n,i+1} - t_{n,i}|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{n,i+1}} - B_{t_{n,i}}|^2\right)^{1/2} = \frac{t}{\sqrt{n}} S_{\pi_n}^{1/2} \xrightarrow{L^2} 0,$$

car la variation quadratique S_{π_n} du brownien relativement à la subdivision π_n tend vers t dans L^2 quand $n \to \infty$. Donc on a :

$$\int_0^t s dB_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} t_{n,i+1}(B_{t_{n,i+1}} - B_{t_{n,i}}) \quad \text{(en probabilité)}. \tag{5.6}$$

Mais on a aussi

$$\int_0^t B_s ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_{n,i}}(t_{n,i+1} - t_{n,i}) \quad \text{(en probabilité)}. \tag{5.7}$$

En sommant les deux relations (5.6) et (5.7), on obtient

$$\int_0^t s dB_s + \int_0^t B_s ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{n,i+1}B_{t_{n,i+1}} - t_{n,i}B_{t_{n,i}}) = tB_t,$$

car la somme est télescopique. La relation (5.5) en résulte. □

5.2.2 Différentielle stochastique d'un produit ou formule d'intégration par parties

Théorème 5.2.1 *(première formule d'Itô) : Soient X et Y deux processus d'Itô sur $[0,T]$ de différentielle stochastique*

$$\left\{ \begin{array}{ll} dX_t & = a_t^{(1)} dt + b_t^{(1)} dB_t \\ dY_t & = a_t^{(2)} dt + b_t^{(2)} dB_t. \end{array} \right. \tag{5.8}$$

Alors le processus $XY = (X_t Y_t)_{t \in [0,T]}$ est un processus d'Itô dont la différentielle stochastique est donnée par

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + b_t^{(1)} b_t^{(2)} dt. \tag{5.9}$$

Le terme supplémentaire $b_t^{(1)} b_t^{(2)} dt$ (par rapport à la règle de différentiation classique) s'appelle le terme d'Itô.

Démonstration :
étape 1 : Si les processus $a^{(i)}$ et $b^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ ne dépendent pas du temps, on vérifie immédiatement (exercice) que le résultat est une conséquence des deux formules (5.4) et (5.5) obtenues dans les exemples 1 et 2 ci-dessus.
étape 2 : Si les $a^{(i)}$ et $b^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ sont des processus élémentaires, considérons une subdivision (t_j) de $[0,T]$ commune à ces quatre processus. Sur tout sous-intervalle $[t_j, t_{j+1}]$, ces processus sont des constantes en t et d'après l'étape 1, on a

$$X_{t_{j+1}} Y_{t_{j+1}} - X_{t_j} Y_{t_j} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} X_t dY_t + \int_{t_j}^{t_{j+1}} Y_t dX_t + \int_{t_j}^{t_{j+1}} b_t^{(1)} b_t^{(2)} dt.$$

En sommant sur j toutes ces relations, on obtient immédiatement le résultat dans ce cas.
étape 3 : Soient $(a^{(i,n)})_{n \geq 0}$ et $(b^{(i,n)})_{n \geq 0}$ $(i = 1, 2)$ des suites de processus élémentaires telles que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T |a_t^{(i,n)} - a_t^{(i)}| dt = 0 \quad \text{p.s.}$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T |b_t^{(i,n)} - b_t^{(i)}| dt = 0 \quad \text{p.s.}$$

(de telles suites existent d'après le théorème 4.5.1). Définissons alors pour tout entier n, des processus $X^{(n)}$ et $Y^{(n)}$ sur $[0, T]$ par :

$$X_t^{(n)} = X_0 + \int_0^t a_s^{(1,n)} ds + \int_0^t b_s^{(1,n)} dB_s,$$

et

$$Y_t^{(n)} = Y_0 + \int_0^t a_s^{(2,n)} ds + \int_0^t b_s^{(2,n)} dB_s.$$

Alors en utilisant le théorème 4.4.7 [1] on obtient

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{0 \le t \le T} |X_t^{(n)} - X_t| = 0,$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{0 \le t \le T} |Y_t^{(n)} - Y_t| = 0,$$

en probabilité. D'où en passant éventuellement à une sous-suite, on a

$$\text{(5.10)} \qquad \lim_{n \to \infty} X_t^{(n)}(\omega) = X_t(\omega), \quad (\text{resp. } \lim_{n \to \infty} Y_t^{(n)}(\omega) = Y_t(\omega)),$$

uniformément en $t \in [0, T]$ et pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$. Or d'après l'étape 2, pour chaque entier n, on a

$$\begin{aligned} X_t^{(n)} Y_t^{(n)} = X_0^{(n)} Y_0^{(n)} &+ \int_0^t X_s^{(n)} (a_s^{(2,n)} ds + b_s^{(2,n)} dB_s) \\ &+ \int_0^t Y_s^{(n)} (a_s^{(1,n)} ds + b_s^{(1,n)} dB_s) \\ &+ \int_0^t b_s^{(1,n)} b_s^{(2,n)} ds. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on peut montrer grâce à (5.10) que les cinq intégrales ci-dessus convergent vers les intégrales des processus correspondant sans l'indice n. Le résultat du théorème en découle aussitôt. □

Remarque : Le résultat (5.8) est la formule d'intégration par parties stochastique. Elle signifie que pour tous $0 \le t_1 \le t_2 \le T$, on a

$$[X_t Y_t]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} X_t dY_t + \int_{t_1}^{t_2} Y_t dX_t + \int_{t_1}^{t_2} b_t^{(1)} b_t^{(2)} dt.$$

[1] sur la convergence uniforme (en probabilité) des intégrales stochastiques

Lorsque X ou Y sont des fonctions déterministes (i.e. $b_t^{(1)} \equiv 0$ ou $b_t^{(2)} \equiv 0$), c'est la formule d'intégration par parties classique.

Discussion heuristique du résultat du théorème 5.2.1 :
Considérons l'accroissement $\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t$ d'un processus d'Itô X entre les instants t et $t + \Delta t$. La différentielle de X est la *quantité fictive* dX_s susceptible d'être intégrée et telle que :

$$\Delta X_t = \int_t^{t+\Delta t} dX_s,$$

(cette égalité étant en fait la définition de la différentielle). Soit alors Y un autre processus d'Itô. L'accroissement du processus $XY = (X_t Y_t)_{t\in[0,T]}$ entre les instants t et $t + \Delta t$ est égal à

$$\begin{aligned}\Delta(XY)_t &= X_{t+\Delta t}Y_{t+\Delta t} - X_tY_t \\ &= (X_t + \Delta X_t)(Y_t + \Delta Y_t) - X_tY_t \\ &= X_t\Delta Y_t + Y_t\Delta X_t + \Delta X_t\Delta Y_t.\end{aligned}$$

Si on remplace l'accroissement par la différentielle et si on assimile $\Delta X_t \Delta Y_t$ à $dX_t dY_t$, en utilisant (5.8), on obtient :
(5.11)

$$dX_tdY_t = a_t^{(1)}a_t^{(2)}(dt)^2 + (a_t^{(1)}b_t^{(2)} + a_t^{(2)}b_t^{(1)})dtdB_t + b_t^{(1)}b_t^{(2)}(dB_t)^2.$$

Dans l'expression (5.11), on peut rejeter les quantités $a_t^{(1)}a_t^{(2)}(dt)^2$ et $(a_t^{(1)}b_t^{(2)} + a_t^{(2)}b_t^{(1)})dtdB_t$ comme étant des *infiniments petits* d'ordre supérieur aux *infiniments petits* dt et dB_t. Mais la quantité $b_t^{(1)}b_t^{(2)}(dB_t)^2$ ne doit pas être considérée comme un infiniment petit d'ordre supérieur car $(\Delta B_t)^2 = (B_{t+\Delta t} - B_t)^2$, et pour tout accroissement $\Delta t > 0$, on sait que

$$\frac{B_{t+\Delta t} - B_t}{\sqrt{\Delta t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, 1).$$

donc $\frac{(\Delta B_t)^2}{\Delta t} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\mathcal{N}(0, 1))^2$, d'où $\mathbb{E}\left(\frac{(\Delta B_t)^2}{\Delta t}\right) = 1$, i.e. $\mathbb{E}((\Delta B_t)^2) = \Delta t$. Ceci justifie heuristiquement qu'on doit considérer que

$$(dB_t)^2 = dt. \tag{5.12}$$

Ainsi l'expression (5.11) se réduit à

$$dX_tdY_t = b_t^{(1)}b_t^{(2)}dt \tag{5.13}$$

et on a donc $d((XY)_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + b_t^{(1)} b_t^{(2)} dt$. C'est la formule du Théorème 5.2.1.

5.3 La formule d'Itô

La propriété remarquable d'un processus d'Itô, c'est qu'il reste un processus d'Itô lorsqu'on le transforme par une application déterministe suffisamment "lisse". Plus précisément, on a le résultat suivant

Théorème 5.3.1 *(formule d'Itô) : Soit X un processus d'Itô sur l'intervalle $[0, T]$, de différentielle stochastique*

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t.$$

Soit $f : (x, t) \longmapsto f(x, t)$, une fonction de[2] *$C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Alors : $(f(X_t, t))_{t \in [0,T]}$, est un processus d'Itô qui a pour différentielle stochastique :*

(5.14)

$$d(f(X_t, t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)(b_t)^2 dt.$$

Le terme $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)(b_t)^2 dt$ s'appelle le terme complémentaire d'Itô.

5.3.1 Motivation heuristique à la formule d'Itô

Considérons une fonction f d'une variable réelle x, suffisamment différentiable. Le processus $X_t = f(B_t)$, transformé déterministe du mouvement brownien B, admet-il une différentielle stochastique ? Pour un accroissement Δt de la variable t, on a grâce à la formule de Taylor :

$$\begin{aligned}
\Delta X_t &= f(B_{t+\Delta t}) - f(B_t) \\
&= f(B_t + \Delta B_t) - f(B_t) \\
&= f'(B_t)\Delta B_t + \frac{1}{2} f''(B_t)(\Delta B_t)^2 + \cdots
\end{aligned}$$

[2] i.e. de classe C^2 en la variable x et de classe C^1 en la variable t.

Si on fait tendre Δt vers zéro, on obtient la relation différentielle

$$d\,(f(B_t)) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)(dB_t)^2 + \cdots$$

Si $t \longmapsto B_t$ était à variation bornée, seul le premier terme $f'(B_t)dB_t$ contribuerait à l'intégrale entre t_1 et t_2 pour obtenir l'accroissement $f(B_{t_1}) - f(B_{t_2})$. Mais ici ce n'est pas le cas et compte tenu de ce qu'on a vu en (5.12), on doit s'attendre à une contribution du deuxième terme, c'est à dire :

$$d\,(f(B_t)) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt.$$

C'est ce que précise de manière plus générale le théorème 5.3.1. Mais avant de démontrer ce résultat, voyons comment retrouver heuristiquement la formule (5.14). On écrit la formule de Taylor à l'ordre deux pour la fonction f :

$$\begin{aligned} d(f(X_t,t)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(X_t,t)dX_t + \frac{\partial f}{\partial t}(X_t,t)dt \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t,t)(dX_t)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(X_t,t)dX_t dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(X_t,t)(dt)^2\right). \end{aligned}$$

Les termes qui contiennent $dX_t dt$ et $(dt)^2$ doivent être négligés et d'après ce qu'on a vu en (5.13), $(dX_t)^2 = (b_t)^2 dt$. Des termes d'ordre deux dans le développement de Taylor, on ne retient donc que *le terme complémentaire d'Itô* :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t,t)(b_t)^2 dt.$$

5.3.2 Démonstration de la formule d'Itô

Venons en maintenant à la démonstration du théorème 5.3.1.
étape 1 : Supposons $f(x,t) = x^n$. On doit montrer que

$$d(X_t)^n = n(X_t)^{n-1}dX_t + \frac{1}{2}n(n-1)(X_t)^{n-2}(b_t)^2 dt. \tag{5.15}$$

La formule est claire si $n = 1$ et on a vu au théorème 5.2.1 qu'elle est vraie si $n = 2$. On procède alors par récurrence en appliquant le théorème 5.2.1 avec $X_t \leftrightarrow (X_t)^{n-1}$ et $Y_t \leftrightarrow X_t$.

étape 2 : On déduit immédiatement de l'étape 1 que le théorème est vrai lorsque $f(x) = P(x)$ est un polynôme en la variable x seule. Supposons que $f(x,t) = P(x)g(t)$ où P est un polynôme et g une fonction de la variable t. compte tenu du fait que $dg(t) = g'(t)dt$, en appliquant le théorème 5.2.1 aux deux processus $(P(X_t))_{t\in[0,T]}$ et $(g(t))_{t\in[0,T]}$, on obtient encore le résultat (5.14) dans ce cas.
étape 3 : Pour le cas général, on utilise le lemme d'approximation suivant :

Lemme 5.3.1 *: Si $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$, il existe une suite (f_n) de polynômes en les variables (x,t) telle que*

$$f_n(x,t) \to f(x,t), \quad \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial t}(x,t) \to \frac{\partial f}{\partial t}(x,t), \quad \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(x,t) \to \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t),$$

quand $n \to \infty$, uniformément en (x,t) sur tout compact de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$.

Démonstration : Le résultat est admis. Pour la preuve voir [21].

Fin de la démonstration du théorème : On écrit la formule d'Itô pour les processus $f_n(X_t,t)$ et grâce au lemme 5.3.1, on peut passer à la limite terme à terme dans l'égalité

$$\begin{aligned} f_n(X_t,t) = f_n(X_0,0) + \int_0^t \Big(\frac{\partial f_n}{\partial t}(X_s,s) + \frac{\partial f_n}{\partial x}(X_s,s)a_s \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(X_s,s)b_s^2\Big)ds + \int_0^t \frac{\partial f_n}{\partial x}(X_s,s)b_s dB_s, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. On notera quand même qu'on doit utiliser le théorème 4.3.6 pour assurer qu'on a la convergence :

$$\int_0^t \frac{\partial f_n}{\partial x}(X_s,s)b_s dB_s \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s,s)b_s dB_s.$$

□

Remarque importante : Le théorème 5.3.1 montre que les deux processus $f(X_t,t) - f(X_0,0)$ et
$Y_t := \int_0^t \big(\frac{\partial f}{\partial t}(X_s,s) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_s,s)a_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s,s)(b_s)^2\big)ds$

$+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) b_s dB_s$, sont une version l'un de l'autre. Comme de plus ils sont continus, ils sont indiscernables d'après la proposition 1.1.2.

On peut généraliser le théorème 5.3.1 à un nombre fini quelconque de processus d'Itô. Précisément, on a le résultat suivant que nous donnons sans démonstration :

Théorème 5.3.2 *: Soient $X^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, des processus d'Itô de différentielles respectives*

$$dX_t^{(i)} = a_t^{(i)} dt + b_t^{(i)} dB_t,$$

et soit $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+)$ une fonction à valeurs réelles. Si on pose $X_t = (X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(m)})$, le processus $(f(X_t, t))_{t \in [0,T]}$ est d'Itô et il a une différentielle stochastique donnée par :

$$\begin{aligned} d(f(X_t, t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) dt &+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t, t) dX_t^{(i)} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_t, t) b_t^{(i)} b_t^{(j)} dt. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Le terme complémentaire d'Itô est ici égal à :

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_t, t) b_t^{(i)} b_t^{(j)} dt.$$

Remarque : Il est souvent commode, comme nous le verrons au paragraphe 5.5.4, de considérer des processus à valeurs complexe. Soit $Z = (Z_t)_{t \in [0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont les parties réelle et imaginaire sont des processus d'Itô réels relatifs au même mouvement brownien B. Si $Z_t = X_t + iY_t$ avec X et Y des processus d'Itô réels tels que $dX_t = a_t^{(X)} dt + b_t^{(X)} dB_t$ et $dY_t = a_t^{(Y)} dt + b_t^{(Y)} dB_t$, on a

$$dZ_t = dX_t + i dY_t = a_t^{(Z)} dt + b_t^{(Z)} dB_t \tag{5.17}$$

avec $a_t^{(Z)} = a_t^{(X)} + i a_t^{(Y)}$ et $b_t^{(Z)} = b_t^{(X)} + i b_t^{(Y)}$. On a alors le résultat suivant

Corollaire 5.3.1 *(formule d'Itô holomorphe) : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et Z un processus complexe de différentielle stochastique donnée par* (5.17). *Alors le processus $(f(Z_t))_{t\in[0,T]}$ est un processus complexe de différentielle stochastique donnée par*

$$df(Z_t) = f'(Z_t)dZ_t + \frac{1}{2}f''(Z_t)(b_t^{(Z)})^2dt. \tag{5.18}$$

Démonstration : Posons pour $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$ et $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ où P et Q sont respectivement les parties réelle et imaginaire de f. Il suffit alors d'appliquer le théorème 5.3.2 aux processus réels $P(X_t, Y_t)$ et $Q(X_t, Y_t)$ pour obtenir le résultat, compte tenu des formules de Cauchy : $f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = -i(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y})$ et $f''(z) = \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 x} = -(\frac{\partial^2 P}{\partial^2 y} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 y})$. □

Exercices :

1) A l'aide de la formule d'Itô appliquée avec la fonction $f(x,t) = x^2$ (resp. x^3), retrouver la formule $d(B_t^2) = dt + 2B_tdB_t$.
(resp. montrer qu'on a $d(B_t^3) = 3B_tdt + 3B_t^2dB_t$).
3) Montrer que le processus $X_t := \exp(B_t - \frac{t}{2})$ est d'Itô et vérifie l'équation

$$dX_t = X_tdB_t. \tag{5.19}$$

(il suffit d'appliquer la formule d'Itô avec la fonction $f(x,t) = e^xe^{-t/2}$). L'équation (5.19) est un exemple d'équation différentielle stochastique. Nous allons présenter cette notion dans le paragraphe suivant.

5.4 Equations différentielles stochastiques

Définition 5.4.1 *: Soit $0 \leq a < b$. On appelle équation différentielle stochastique (EDS en abrégé) sur $[a,b]$, avec donnée initiale ξ_a, toute relation de la forme :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dX_t & = & \sigma(X_t,t)dB_t + \mu(X_t,t)dt \\ X_a & = & \xi_a, \end{array} \right. \tag{5.20}$$

où X est un processus d'Itô sur $[a,b]$ (appelé l'inconnue), ξ_a une variable aléatoire donnée, $\mathcal{F}_a$-mesurable et $\sigma(x,t)$ et $\mu(x,t)$ sont deux fonctions *données, mesurables définies sur $\mathbb{R} \times [a,b]$ et à valeurs réelles. Résoudre l'EDS (5.20) c'est trouver un processus d'Itô X sur l'intervalle $[a,b]$ tel que*

$$(5.21) \quad X_t = \xi_a + \int_a^t \sigma(X_s, s)dB_s + \int_a^t \mu(X_s, s)ds, \quad (\forall t \in [a,b]).$$

Remarque : Comme pour les équations différentielles, une EDS n'a pas forcément une solution. Même si une solution existe, on ne pourra pas, en général, l'exprimer simplement à l'aide du mouvement brownien (B_t). On va néanmoins donner un résultat d'existence et d'unicité dans un cas intéressant qui ressemble en tout point au théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles ordinaires.

5.4.1 Un théorème d'existence et d'unicité pour les EDS

Théorème 5.4.1 *: On suppose que les fonctions $t \mapsto \sigma(0,t)$ et $t \mapsto \mu(0,t)$ sont bornées sur $[a,b]$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [a,b]$, on ait*

$$(5.22) \quad |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \leq C|x-y|, \quad |\mu(x,t) - \mu(y,t)| \leq C|x-y|$$

i.e. les fonctions σ et μ sont lipschitziennes en la variable x, uniformément en $t \in [a,b]$. On suppose aussi que la donnée initiale ξ_a a un moment d'ordre deux.
Alors il existe une solution $X = (X_t)_{t\in[a,b]} \in M^2$ de (5.20) et une seule à indiscernabilité près (i.e. si $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ sont deux solutions de (5.20) dans M^2, alors $\mathbb{P}(X_t^{(1)} = X_t^{(2)}, \forall t \in [a,b]) = 1$).

Pour la démonstration, on aura besoin d'un résultat classique sur la croissance des fonctions lipschitziennes :

Lemme 5.4.1 *: Sous les hypothèses du théorème, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,T]$, on a :*

$$(5.23) \qquad |\sigma(x,t)| \leq K(1+|x|), \quad |\mu(x,t)| \leq K(1+|x|).$$

Démonstration : L'hypothèse (5.22) implique $|\sigma(x,t)| \leq |\sigma(0,t)| + C|x|$ et le résultat du lemme en découle puisque la fonction $t \mapsto \sigma(0,t)$ est bornée. Le même argument vaut aussi pour la fonction μ. □

Démonstration du théorème 5.4.1 : On va supposer que $[a,b] = [0,T]$ pour simplifier un peu les notations. On introduit aussi une nouvelle norme sur l'espace $M^2([0,T])$: pour un processus $X \in M^2$, on pose

$$||X||_\lambda^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-\lambda t}|X_t|^2 dt\right), \tag{5.24}$$

où $\lambda > 0$ est un nombre qui sera précisé par la suite. Il est clair qu'avec cette norme $||.||_\lambda$, M^2 est toujours un espace de Hilbert[3] et que les deux normes $||.||_\lambda$ et $||.||_{M^2}$ sont équivalentes. Si on peut démontrer que l'application $\Psi : X \mapsto \Psi(X)$ définie sur M^2 par :

$$\Psi(X)_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s,s)ds + \int_0^t \sigma(X_s,s)dB_s \quad (t \in [0,T]), \tag{5.25}$$

est à valeurs dans M^2 et qu'elle est strictement contractante, le théorème du point fixe de Picard, nous assurera alors qu'il existe un élément $X \in M^2$ unique, tel que $X = \Psi(X)$, d'où le résultat du théorème 5.4.1. Pour cela il suffit de montrer que les applications $\Psi_i : X \mapsto \Psi_i(X)$ $(i = 1,2)$, définies sur M^2 par

$$\Psi_1(X)_t = \int_0^t \mu(X_s,s)ds \quad (t \in [0,T]), \tag{5.26}$$

et

$$\Psi_2(X)_t = \int_0^t \sigma(X_s,s)dB_s \quad (t \in [0,T]), \tag{5.27}$$

sont à valeurs dans M^2 et sont des contractions de constantes respectives α_1 et α_2 telles que $0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 1$. On va donc décomposer l'argument en deux étapes :

i) Le lemme 5.4.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz permettent de voir facilement que si $X \in M^2$, alors $\Psi_1(X) \in M^2$. D'autre part, pour $X, Y \in$

[3] car c'est la norme de $L^2(\Omega \times [0,T], d\mathbb{P} \otimes e^{-\lambda t}dt)$

M^2, et grâce à la condition (5.22), on a aussi

$$
\begin{aligned}
||\Psi_1(X) - \Psi_1(Y)||_\lambda^2 &= \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-\lambda t}\Big(\int_0^t (\mu(X_s,s) - \mu(Y_s,s))ds\Big)^2 dt\right) \\
&\leq C^2 T \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-\lambda t}\int_0^t |X_s - Y_s|^2 ds dt\right) \\
&= C^2 T \mathbb{E}\left(-\frac{e^{-\lambda T}}{\lambda}\int_0^T |X_s - Y_s|^2 ds + \int_0^T \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}|X_t - Y_t|^2 dt\right) \\
&\leq \frac{C^2 T}{\lambda}\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-\lambda t}|X_t - Y_t|^2 dt\right) = \frac{C^2 T}{\lambda}||X - Y||_\lambda^2.
\end{aligned}
$$

ii) De même, on montre que $\Psi_2(X) \in M^2$. Puis en intervertissant les signes espérance et intégrale et en utilisant l'expression du moment d'ordre deux d'une intégrale stochastique, pour $X, Y \in M^2$, on a

$$
\begin{aligned}
||\Psi_2(X) - \Psi_2(Y)||_\lambda^2 &= \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-\lambda t}\Big(\int_0^t (\sigma(X_s,s) - \sigma(Y_s,s))dB_s\Big)^2 dt\right) \\
&= \int_0^T e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left(\left[\int_0^t (\sigma(X_s,s) - \sigma(Y_s,s))dB_s\right]^2\right) dt \\
&= \int_0^T e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left(\int_0^t (\sigma(X_s,s) - \sigma(Y_s,s))^2 ds\right) dt \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-\lambda t}\int_0^t (\sigma(X_s,s) - \sigma(Y_s,s))^2 ds dt\right)
\end{aligned}
$$

En procédant alors exactement comme en i), on obtient également :

$$
||\Psi_2(X) - \Psi_2(Y)||_\lambda^2 \leq \frac{C^2}{\lambda}||X - Y||_\lambda^2.
$$

Il suffit donc de choisir la constante λ telle que $C^2(\sqrt{T}+1)^2 < \lambda$ pour que l'application Ψ soit strictement contractante. D'où l'existence et l'unicité de la solution de (5.20) dans l'espace $M^2([0,T])$.

Enfin, pour montrer l'unicité à indiscernabilité près, considérons deux processus $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ satisfaisant (5.20). On vient de voir que $||X^{(1)} -$

$X^{(2)}||_{M^2} = 0$. Or on a

(5.28)

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{(1)} - X_t^{(2)}|^2 \leq & 2 \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t (\mu(X_s^{(1)}, s) - \mu(X_s^{(2)}, s))ds \right|^2 \\ & + 2 \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t (\sigma(X_s^{(1)}, s) - \sigma(X_s^{(2)}, s))dB_s \right|^2 .\end{aligned}$$

Mais en utilisant la condition (5.22) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer le premier sup du membre de droite de (5.28) puis en passant à l'espérance et en utilisant l'inégalité maximale L^2 (4.34) pour le deuxième sup, on obtient

(5.29)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{(1)} - X_t^{(2)}|^2 \right) \leq & 2(C^2T + 4C^2) \int_0^T \mathbb{E}\left[(X_s^{(1)} - X_s^{(2)})^2 \right] ds \\ & = 2C^2(T+4)||X^{(1)} - X^{(2)}||_{M^2}^2 = 0.\end{aligned}$$

Ce qui implique aussitôt

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{(1)} - X_t^{(2)}|^2 = 0 \right) = 1,$$

i.e. $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ sont indiscernables. □

Remarque importante : La solution de (5.20) s'obtient donc par la méthode des approximations successives, c'est-à-dire partant d'un processus $X^{(0)} = (X_t^{(0)})_{t\in[a,b]}$ quelconque de $M^2 = M^2([a,b])$ (par exemple $X^{(0)} \equiv 0$), la suite $X^{(n)} = (X_t^{(n)})_{t\in[a,b]}$ telle que $X^{(n+1)} = \Psi(X^{(n)})$ i.e.

$$X_t^{(n+1)} = \xi_a + \int_a^t \mu(X_s^{(n)}, s)ds + \int_a^t \sigma(X_s^{(n)}, s)dB_s, \tag{5.30}$$

converge vers la solution X dans M^2. Mais avec la même méthode utilisée pour les inégalités (5.28) et (5.29), on obtient

$$\mathbb{E}\left(\sup_{a\leq t\leq b} |X_t^{(n)} - X_t|^2 \right) \leq 2C^2(b+4)||X^{(n)} - X||_{M^2}^2 \tag{5.31}$$

et cette dernière expression tend vers 0 quand $n \to \infty$. Grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on en déduit le résultat suivant

Corollaire 5.4.1 *: La suite $X^{(n)}$ des approximations successives de la solution X de l'EDS (5.20) converge uniformément vers X en probabilité i.e.*

$$\forall \epsilon > 0, \ \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\sup_{a \leq t \leq b} |X_t^{(n)} - X_t| > \epsilon \right) = 0.$$

Le théorème d'existence et d'unicité est encore vrai lorsqu'on affaiblit les conditions de Lipschitz (5.22) en demandant seulement que les fonctions μ et σ soient localement lipschitziennes en la variable x (mais toujours uniformément en t). Plus précisément on a le résultat suivant (admis)

Théorème 5.4.2 *: Avec les notations de 5.4.1, on suppose que les fonctions $(x,t) \mapsto \sigma(x,t)$ et $(x,t) \mapsto \mu(x,t)$ sont mesurables et telles que*
1) il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $t \in [a,b]$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\mu(x,t)| \leq K(1+|x|), \quad |\sigma(x,t)| \leq K(1+|x|),$$

2) pour tout $n > 0$, il existe une constante $C_n > 0$ telle que pour tous $|x| \leq n$, $|y| \leq n$ et $t \in [a,b]$, on ait

$$|\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \leq C_n|x-y|, \quad |\mu(x,t) - \mu(y,t)| \leq C_n|x-y|.$$

Si la donnée initiale ξ_a a un moment d'ordre deux, alors il existe une solution $X = (X_t)_{t \in [a,b]} \in M^2$ de (5.20) et une seule à indiscernabilité près.

Remarque : La solution X de (5.20) du théorème 5.4.1 (ou du théorème 5.4.2) est construite dans l'espace filtré du mouvement brownien B considéré au départ. Dans les ouvrages qui traitent des EDS, une telle solution est appelée "solution forte". En fait dans des conditions plus générales où les conditions de Lipschitz ne sont pas satisfaites, les EDS peuvent avoir des solutions dans un autre espace filtré et on parle alors de "solution faible". Nous n'étudierons pas cette question ici.
Par contre voici une précision technique importante pour la suite concernant le processus $X = (X_t)_{t \in [a,b]}$ solution de l'EDS (5.20) :

Proposition 5.4.1 *: Si la condition initiale de l'EDS est une constante $\mathbb{P}-$p.s. (i.e. $\xi_a = x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}-$p.s.), alors pour tout $t \in [a, b]$, X_t est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(B_{s+a} - B_a,\ 0 \leq s \leq t-a)$ engendrée par les accroissements du brownien à partir de l'instant a. Ainsi le processus $X = (X_t)_{t\in[a,b]}$ est indépendant de la tribu $\sigma(B_u, u \leq a)$.*

Démonstration : Il suffit de démontrer que le résultat est vrai pour les processus $X^{(n)}$ (5.30) qui convergent vers X. Si on prend $X^{(0)} \equiv x$, on a

$$X_t^{(1)} = x + \int_a^t \mu(x, s)ds + \int_a^t \sigma(x, s)dB_s,$$

qui est bien $\sigma(B_{s+a} - B_a,\ 0 \leq s \leq t-a)$-mesurable par définition de l'intégrale stochastique. On procède alors de même par récurrence sur n.□

5.4.2 Signification heuristique d'une EDS

Quand un processus d'Itô satisfait une EDS (5.20), cela signifie que l'accroissement $\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t$ du processus entre les instants t et $t + \Delta t$ est approximativement donné par

$$\Delta X_t = \sigma(X_t, t)\Delta B_t + \mu(X_t, t)\Delta t. \tag{5.32}$$

Etant donné l'état X_t du processus à l'instant t, l'accroissement se compose d'une partie $\mu(X_t, t)\Delta t$ proportionnelle à Δt de coefficient instantané $\mu(X_t, t)$ (appelé dérive[4]) et d'un accroissement aléatoire $\sigma(X_t, t)\Delta B_t$ proportionnel à ΔB_t et de loi normale centrée de variance $\sigma^2(X_t, t)\Delta t$ (on appelle $\sigma^2(X_t, t)$ le coefficient de diffusion). Au total l'accroissement suit une loi normale de moyenne $\mu(X_t, t)\Delta t$ et de variance $\sigma^2(X_t, t)\Delta t$.
Les considérations précédentes fournissent le principe d'une méthode qui pourrait permettre de simuler une trajectoire approchée du processus solution de l'EDS (5.20), à condition de savoir simuler une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Cette méthode, directement inspirée de la méthode d'Euler de résolution approchée d'une équation différentielle $y' = f(t, y)$, consiste à se donner une subdivision

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots < t_n = b$$

[4]ou drift en anglais.

de l'intervalle $[a, b]$, avec $t_{i+1} - t_i = \Delta t$. Partant de la donnée initiale ξ_a (qu'on doit simuler si elle est aléatoire), on calcule une suite de valeurs $x^{(k)}$ (valeurs approchées de X_{t_k}) par récurrence, en posant :

$$\begin{cases} x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \sigma(x^{(k)}, t_k)\sqrt{\Delta t}\mathcal{N}_k + \mu(x^{(k)}, t_k)\Delta t \\ t_{k+1} &= t_k + \Delta t, \end{cases}$$

où $\mathcal{N}_k$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite[5] $\mathcal{N}(0, 1)$. Mais la méthode que nous venons de suggérer est trop schématique ; on utilise dans la pratique des méthodes plus sophistiquées (voir par exemple [38] et ses références).

Exemples et exercices : 1) On considère l'EDS sur $[0, T]$,

(5.33) $$dX_t = \sigma dB_t - \mu X_t dt, \quad (X_0 = x_0),$$

où σ et μ sont des constantes. Trouver l'EDS vérifiée par le processus $Y_t = e^{\mu t} X_t$ et en déduire la solution de (5.33).
2) Lorsque dans (5.20), on a $\mu(x, t) = ax$ et $\sigma(x, t) = bx$, on dit que l'EDS est linéaire, i.e.

(5.34) $$dX_t = aX_t dt + bX_t dB_t, \quad (X_0 = x_0),$$

par exemple, si $a = 1$ et $b = 0$, c'est l'équation différentielle de l'exponentielle classique et dans ce cas $X_t = x_0 e^{at}$. Si $a = 0$ et $b = 1$, c'est l'EDS de l'exponentielle stochastique et $X_t = x_0 e^{B_t} e^{-t/2}$.
3) Montrer que le processus $X_t = x_0 \exp(at + bB_t)$ est solution d'une EDS et en déduire la solution générale de l'équation linéaire (5.34).

5.4.3 Caractère markovien de la solution d'une EDS

Si on considère heuristiquement une EDS comme une relation donnant l'accroissement infinitésimal (5.32), on voit que la valeur de $X_{t+\Delta t}$ est fonction de X_t et de l'accroissement du brownien entre les instants t et $t + \Delta t$ qui est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_t$. Ainsi $X_{t+\Delta t}$ ne dépend du passé que par l'intermédiaire de X_t ; ce qui suggère que le processus X est de Markov. Pour justifier ce résultat, on a besoin d'un lemme sur l'espérance conditionnelle

[5] noter qu'alors $\sqrt{\Delta t}\mathcal{N}_k$ est de loi $\mathcal{N}(0, \Delta t)$ comme ΔB_t.

Lemme 5.4.2 : *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(Y^{(x)})_{x\in\mathbb{R}}$ une famille*[6] *uniformément bornée de variables aléatoires mesurables et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On suppose que l'application $(x,\omega) \mapsto Y^{(x)}(\omega)$ est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{G}$-mesurable. Soit $\mathcal{T}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ indépendante de $\mathcal{G}$ et X une variable aléatoire $\mathcal{T}$-mesurable. Alors*

i) $\forall x \in \mathbb{R},\ Y^{(x)}$ est $\mathcal{G}$-mesurable.

ii) La variable aléatoire $Y^{(X)} : \omega \mapsto Y^{(X(\omega))}(\omega)$ a un sens et

$$\mathbb{E}(Y^{(X)}|\mathcal{T}) = h(X) \quad (\mathbb{P}-p.s.), \tag{5.35}$$

où la fonction h est de la forme $h(x) = \mathbb{E}(Y^{(x)})$ $(x \in \mathbb{R})$.

Ce lemme généralise le lemme 3.2.1 qui correspond ici au cas où $Y^{(x)} = g(x,Y)$ avec $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne bornée et Y une variable aléatoire. La démonstration analogue à celle de 3.2.1 est omise.

On suppose que $[a,b] = [0,T]$ et on considère X la solution de l'EDS (5.20) sous les hypothèses du théorème 5.4.1. Pour $0 \le t \le T$, on a donc

$$X_t = \xi_0 + \int_0^t \mu(X_u,u)du + \int_0^t \sigma(X_u,u)dB_u. \tag{5.36}$$

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $s \in [0,T]$, soit $X^{x,s} = (X_t^{x,s})_{t\ge s}$ la solution de l'EDS (5.20) partant de x à l'instant s (i.e. $[a,b] = [s,T]$ et $\xi_s \equiv x$). Autrement dit pour tout $t \ge s$:

$$X_t^{x,s} = x + \int_s^t \mu(X_u^{x,s},u)du + \int_s^t \sigma(X_u^{x,s},u)dB_u. \tag{5.37}$$

D'autre part on déduit aussitôt de (5.36) que pour $t \ge s$, on a

$$X_t = X_s + \int_s^t \mu(X_u,u)du + \int_s^t \sigma(X_u,u)dB_u. \tag{5.38}$$

Mais si on remplace formellement x par X_s dans (5.37), on voit que

$$X_t^{X_s,s} = X_s + \int_s^t \mu(X_u^{X_s,s},u)du + \int_s^t \sigma(X_u^{X_s,s},u)dB_u, \tag{5.39}$$

[6] indexée par l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

pour tout $t \geq s$, où $X_t^{X_s,s}(\omega) = X_t^{X_s(\omega),s}(\omega)$. On peut justifier rigoureusement la manipulation osée que nous venons d'effectuer. C'est un résultat difficile que nous admettrons (voir par exemple [48], p. 294). Les relations (5.38) et (5.39) montrent alors que les processus X_t et $X_t^{X_s,s}$, vérifient pour $t \geq s$ la même EDS. Par unicité de la solution, on en déduit :

Proposition 5.4.2 : *Pour tout $t \geq s$, on a*

$$X_t = X_t^{X_s,s} \quad \mathbb{P} - p.s. \tag{5.40}$$

Notation : Pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, tout $0 \leq s \leq t$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$P_{s,t}(x, A) = \mathbb{P}(X_t^{x,s} \in A). \tag{5.41}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A \mapsto \mathbb{P}(X_t^{x,s} \in A)$ est une probabilité. On admettra que pour tout $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, l'application $x \mapsto P_{s,t}(x, A)$ est mesurable[7]. On va voir que les $P_{s,t}$ sont les noyaux de Markov du processus X.

Théorème 5.4.3 *Le processus X donné en (5.36) est de Markov avec des noyaux de transition donnés par (5.41).*

Démonstration : Pour $0 \leq s \leq t$ et f borélienne bornée, si on applique (5.40), la proposition 5.4.1 et le lemme 5.4.2 avec $Y^{(x)} = f(X_t^{x,s})$ et $\mathcal{T} = \sigma(B_{s+h} - B_s, h \geq 0)$, on obtient

$$\mathbb{E}\left(f(X_t)|\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(f\left(X_t^{X_s,s}\right)|\mathcal{F}_s\right) = h(X_s), \tag{5.42}$$

où $h(x) = \mathbb{E}\left(f(X_t^{x,s})\right) = P_{s,t}f(x)$ par définition de $P_{s,t}$. Donc le processus X est de Markov. Il reste à voir que les noyaux $P_{s,t}$ vérifient la propriété de Chapman-Kolmogorov.

Soient $0 < s < t < u$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée. Par les propriétés de l'espérance conditionnelle et la proposition 5.4.1, on a

$$\begin{aligned} P_{s,u}f(x) &= \mathbb{E}\left(f(X_u^{x,s})\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(f(X_u^{x,s})|\mathcal{F}_t)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(f(X_u^{X_t^{x,s},t})|\mathcal{F}_t)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(h(X_t^{x,s})\right), \end{aligned}$$

[7] ceci résulte de la mesurabilité de $(x, t, \omega) \mapsto X_t^{x,s}(\omega)$, voir [52].

où $h(z) = \mathbb{E}\left(f(X_u^{z,t})\right) = P_{t,u}f(z)$. On a donc

$$\begin{aligned} P_{s,u}f(x) &= \int_{\mathbb{R}} h(z)\mathbb{P}(X_t^{x,s} \in dz) = \int_{\mathbb{R}} h(z)P_{s,t}(x, dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}} P_{s,t}(x, dz)P_{t,u}f(z), \end{aligned}$$

et la propriété de Chapman-Kolmogorov est vérifiée. □

Remarque : Le processus de Markov X que nous venons de considérer a pour espace de temps l'intervalle $[0, T]$ mais si les fonctions $\mu(x, t)$ et $\sigma(x, t)$ sont définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et que les conditions de Lipschitz du théorème 5.4.2 sont uniformes en $t \in \mathbb{R}_+$, une solution de l'EDS existe sur tout intervalle $[0, T]$. Si $T' > T$, il est clair que la solution sur $[0, T']$ prolonge la solution sur $[0, T]$ donc il existe une unique solution $X = (X_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{R}_+$. Cette solution est un processus de Markov de noyaux $P_{s,t}$, $s, t \in \mathbb{R}_+$, $s < t$.

5.4.4 Notion de processus de diffusion

On va examiner dans ce paragraphe le cas particulier où la dérive et le coefficient de diffusion d'une EDS sont indépendants du temps. Soit

$$(5.43) \qquad \begin{cases} dX_t &= \sigma(X_t)dB_t + \mu(X_t)dt \\ X_0 &= \xi_0, \end{cases}$$

où μ et σ sont des fonctions localement lipschitziennes vérifiant la condition de croissance $|\mu(x)| \leq K(1 + |x|)$ et $|\sigma(x)| \leq K(1 + |x|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On sait alors que si ξ_0 admet un moment d'ordre 2, il existe un processus unique X solution de cette EDS.

Proposition 5.4.3 *La solution X de l'EDS (5.43) est un processus de Markov homogène.*

Démonstration : Il s'agit de démontrer que le noyau $P_{s,t}$ défini en (5.41) ne dépend que de la différence $t - s$. Posons $t = s + h$ ($h > 0$). On a $P_{s,s+h}(x, A) = \mathbb{P}(X_{s+h}^{x,s} \in A)$. D'après (5.37) et en faisant le changement de variable $u = s + v$ ($0 \leq v \leq h$), le processus $Y_h = X_{s+h}^{x,s}$ vérifie la relation

$$(5.44) \qquad Y_h = x + \int_0^h \mu(Y_v)dv + \int_0^h \sigma(Y_v)dB_v^{(1)},$$

où $B_v^{(1)} = B_{s+v} - B_s$ est aussi un mouvement brownien d'après le théorème 2.1.6. Mais le processus $X_h^{x,0}$ ($h \geq 0$) vérifie d'après (5.37) la même relation (5.44) que Y_h mais avec B au lieu de $B^{(1)}$. Il en résulte que Y_h et $X_h^{x,0}$ ont la même loi. Donc $P_{s,s+h}(x, A) = \mathbb{P}(X_h^{x,0} \in A) = P_{0,h}(x, A)$ et le résultat est démontré. □

Notation (et rappel) : D'après la Remarque 4 du paragraphe 3.1.1, X est un processus de Markov homogène. Changeons alors de notation et posons $P_{0,t} = P_t$. Les opérateurs de transition P_t sont donc tels que

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(z) P_t(x, dz) = \int_{\mathbb{R}} f(z) \mathbb{P}(X_t^{x,0} \in dz)$$

pour toute fonction f borélienne bornée. Si $(\mathcal{G}_t)$ désigne la filtration naturelle du processus X et $\mathcal{G}_\infty$ est la tribu terminale[8], on considère, pour $x \in \mathbb{R}$, la probabilité $\mathbb{P}_x$ sur $\mathcal{G}_\infty$ de la définition 3.4.1 et construite avec les noyaux P_t. C'est la probabilité pour le processus partant de x. L'espérance $\mathbb{E}_x$ associée est alors telle que $\mathbb{E}_x(f(X_t)) = \int_E P_t(x, dy) f(y) = P_t f(x)$ d'après (3.41). Mais on remarquera qu'on a aussi $\mathbb{E}_x(f(X_t)) = \mathbb{E}\left(f(X_t^{x,0})\right)$ car $X_t^{x,0}$ est un processus de Markov de même semi-groupe P_t et qui part de x.

Générateur infinitésimal du processus X : Le processus de Markov homogène X n'est pas forcément un processus de Feller au sens de la définition 3.3.1, mais on a quand même une notion de générateur infinitésimal pour le semi-groupe (P_t). Plus précisément c'est la formule fondamentale (3.19) de la théorie des semi-groupes qui garde un sens comme on va le voir mais pour des fonctions f suffisamment régulières.

Théorème 5.4.4 : *Pour toute* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *bornée et à dérivées bornées*[9], *tout* $t > 0$ *et tout* $x \in R$, *on a*

$$P_t f(x) = f(x) + \int_0^t P_s(Af)(x) ds, \tag{5.45}$$

où A *est l'opérateur différentiel*

$$Af(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x) f''(x) + \mu(x) f'(x) \tag{5.46}$$

[8] qui est simplement $\mathcal{G}_T$ si on considère X sur un intervalle de temps fini $[0, T]$.

[9] par exemple de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et à support compact.

et en particulier on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t f(x) - f(x)) = Af(x). \tag{5.47}$$

L'opérateur différentiel A est appelé générateur infinitésimal du processus X solution de l'EDS (5.43). Pour des raisons provenant de la physique (voir par exemple [19]), on dit que X est un processus de diffusion (homogène) d'opérateur infinitésimal A.

Démonstration du théorème : La formule d'Itô donne immédiatement

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma^2(X_s)ds.$$

En tenant compte de l'expression (5.43) de dX_s, en passant à l'espérance $\mathbb{E}_x$ dans l'égalité précédente et puisqu'une intégrale d'Itô est toujours d'espérance nulle, on obtient aussitôt[10] la relation (5.45). On en déduit alors (5.47). □

Corollaire 5.4.2 *Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ bornée et à dérivées bornées. Alors le processus*

$$M_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Af)(X_s)ds \quad (t \geq 0), \tag{5.48}$$

est une martingale pour la filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ du processus X.

La démonstration de ce résultat est identique à celle du théorème 3.4.1 car elle n'utilise que la propriété (5.45) du semi-groupe.

Remarque 1 : Avec l'hypothèse supplémentaire que les fonctions σ et μ sont bornées sur $\mathbb{R}$, on peut montrer que le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ est de Feller (voir [51] p.380).

Remarque 2 : En fait il existe des processus de diffusion beaucoup plus généraux que celui que nous venons de considérer. C'est la condition de martingale vue dans le Corollaire qui sert à les définir. Nous renvoyons le lecteur intéréssé au livre de D. Revuz et M. Yor [51].

---

[10] on peut justifier facilement l'intervertion de $\mathbb{E}_x$ et du signe $\int_0^t$.

Exemple : Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est la solution de l'EDS appelée équation de Langevin :

$$\text{(5.49)} \qquad \begin{cases} dX_t &= -\lambda X_t dt + \sigma dB_t \\ X_0 &= x, \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ sont des constantes. Dans le problème physique modélisé par cette équation, X_t représente la vitesse[11] d'une particule en suspension dans un liquide, soumise au bombardement moléculaire ainsi qu'à une force de frottement[12]de coefficient λ.
Si on fait le changement de processus $Y_t = e^{\lambda t} X_t$, la première formule d'Itô donne $dY_t = \lambda e^{\lambda t} X_t dt + e^{\lambda t} dX_t = \sigma e^{\lambda t} dB_t$. Donc $Y_t = x + \sigma \int_0^t e^{\lambda s} dB_s$. D'où la solution

$$\text{(5.50)} \qquad X_t = e^{-\lambda t} x + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dB_s.$$

Ce processus est une diffusion homogène d'après la proposition 5.4.3 et le théorème 5.4.4. Son générateur infinitésimal est l'opérateur différentiel $A = \sigma \frac{d^2}{dx^2} - \lambda x \frac{d}{dx}$ d'après 5.46.

Remarque 3 : Nous avons étudié le cas des diffusions homogènes pour simplifier la présentation mais dans le cas général considéré en (5.36) et au théorème 5.4.3, le processus X est aussi une diffusion au sens où la famille $P_{s,t}$ $(s < t)$ des opérateurs de transition définis en (5.41) vérifie une relation fondamentale généralisant (5.45) :
Pour tous $0 < s < t$, tout $x \in \mathbb{R}$ et toute $f \in C^2(\mathbb{R})$ bornée et à dérivées bornées, on a

$$\text{(5.51)} \qquad P_{s,t} f(x) = f(x) + \int_s^t P_{s,u}(A_u f)(x) du,$$

où A_u est l'opérateur différentiel

$$\text{(5.52)} \qquad A_u f(x) = \frac{1}{2} \sigma^2(x,u) f''(x) + \mu(x,u) f'(x).$$

En particulier, on a

$$\text{(5.53)} \qquad \lim_{t \to s, t > s} \frac{1}{t-s} (P_{s,t} f(x) - f(x)) = A_s f(x).$$

[11]ou à un coefficient près la quantité de mouvement.

[12]L'absence de frottement ($\lambda = 0$) correspond au mouvement brownien.

On peut aussi donner une version du corollaire 5.4.2 et même une version plus générale en utilisant la formule d'Itô pour les fonctions dépendant aussi du temps. Plus précisément, pour toute fonction $f \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ bornée et à dérivées partielles bornées, le processus

$$(5.54)\quad M_t^f := f(X_t, t) - f(X_0, 0) - \int_0^t (\frac{\partial f}{\partial t} + A_s f)(X_s, s) ds \quad (t \geq 0),$$

est une martingale, où l'opérateur A_s agit sur la variable d'espace, c'est à dire

$$A_s f(x,s) = \frac{1}{2}\sigma^2(x,s)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,s) + \mu(x,s)\frac{\partial f}{\partial x}(x,s).$$

5.5 Exemples et applications

5.5.1 Représentation des martingales browniennes

Comme dans le paragraphe 2, soit $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien continu. On suppose aussi qu'il est standard , en particulier chaque tribu $\mathcal{F}_t$ est complète. Soit $T > 0$ un temps fixé. On s'intéresse à l'espace vectoriel H des variables aléatoires de la forme

$$Z = c + \int_0^T X_t dB_t,$$

où $X \in M^2([0,T])$. On notera que $c = \mathbb{E}(Z)$ puisque l'intégrale stochastique est une variable aléatoire centrée. On a le résultat suivant :

Théorème 5.5.1 *: $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ (Autrement dit toute variable aléatoire centrée de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ peut être représentée comme une intégrale stochastique).*

On a besoin de plusieurs lemmes :

Lemme 5.5.1 *: H est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.*

Démonstration : H est clairement un sous-espace de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. Montrons qu'il est fermé. Soit

$$Z^{(n)} = c_n + \int_0^T X_t^{(n)} dB_t,$$

où $X^{(n)} \in M^2$, une suite d'éléments de H qui converge dans L^2 vers une variable aléatoire Z. Elle converge aussi au sens de L^1. En particulier, $\mathbb{E}(Z^{(n)}) = c_n$ converge vers un réel c. La suite

$$\widetilde{Z^{(n)}} = Z^{(n)} - c_n = \int_0^T X_t^{(n)} dB_t,$$

doit donc converger dans L^2. Elle est donc de Cauchy et on a

$$\begin{aligned}
||\widetilde{Z^{(n)}} - \widetilde{Z^{(m)}}||_{L^2}^2 &= \mathbb{E}((\int_0^T X_t^{(n)} dB_t - \int_0^T X_t^{(m)} dB_t)^2) \\
&= \mathbb{E}((\int_0^T (X_t^{(n)} - X_t^{(m)}) dB_t)^2) \\
&= \mathbb{E}(\int_0^T (X_t^{(n)} - X_t^{(m)})^2 dt) \to 0 \quad \text{si } m, n \to \infty.
\end{aligned}$$

Ceci implique que la suite $X^{(n)} : (\omega, t) \mapsto X_t^{(n)}(\omega)$ est de Cauchy dans $L^2([0,T] \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P})$. En passant éventuellement à une sous suite, on peut supposer que

$$\lim_{n \to \infty} X_t^{(n)}(\omega) = X_t(\omega), \quad dt \otimes d\mathbb{P}\, p.s.$$

En utilisant le lemme de Fatou, on déduit aussitôt que

$$\mathbb{E}(\int_0^T (X_t^{(n)} - X_t)^2 dt) \to 0 \quad \text{si } n \to \infty,$$

ce qui montre que $(X^{(n)})$ converge vers X dans M^2. D'où

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T X_t^{(n)} dB_t = \int_0^T X_t dB_t,$$

dans L^2. Mais on a aussi $\lim_{n \to \infty} \int_0^T X_t^{(n)} dB_t = Z - c$ dans L^2. Par unicité de la limite, on déduit aussitôt que $Z \in H$. D'où le résultat du lemme. □

Lemme 5.5.2 : *Pour toute fonction $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ en escalier, la variable aléatoire*

$$V = \exp(\int_0^T \phi(s) dB_s), \tag{5.55}$$

appartient à l'espace vectoriel H.

Démonstration : Il est clair que le processus I défini par

(5.56) $$I_t = \int_0^t \phi(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\phi(s))^2 ds, \quad (t \in [0,T]),$$

est un processus d'Itô appartenant à M^2. La formule d'Itô appliquée au processus Y tel que $Y_t = \exp(I_t)$ donne immédiatement : $dY_t = Y_t\phi(t)dB_t$. D'où

$$Y_T = 1 + \int_0^T e^{I_s}\phi(s)dB_s.$$

Mais $Y_T = cV$ où la constante c est égale à $\exp(-\frac{1}{2}\int_0^T (\phi(s))^2 ds)$ et on aura $Y_T \in H$ donc $V \in H$ si on peut montrer que le processus $(\exp(I_t)\phi(t))_{t\in[0,T]}$ est dans M^2 i.e.

(5.57) $$\int_0^T \mathbb{E}\big((e^{I_t}\phi(t))^2\big)dt < \infty.$$

Montrons qu'en fait la fonction $t \mapsto \mathbb{E}\big((e^{I_t}\phi(t))^2\big)$ est bornée sur $[0,T]$. On a $\mathbb{E}\big((e^{I_t}\phi(t))^2\big) \leq K\mathbb{E}(e^{2I_t})$, où $K = \max_{t\in[0,T]}(\phi(t))^2$ et si

$$\phi = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1}[}$$

où les (t_k) forment une subdivision de $[0,t]$, on a compte tenu de (5.56), de l'indépendance des accroissements du mouvement brownien et de l'expression de la transformée de Laplace d'une loi normale[13] :

$$\begin{aligned}
\exp(\int_0^t \phi^2(s)ds)\mathbb{E}\big(e^{2I_t}\big) &= \mathbb{E}\left(\exp(\int_0^t 2\phi(s)dB_s)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\exp(\sum_{k=0}^{n-1} 2\lambda_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}))\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{k=0}^{n-1} \exp(2\lambda_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}))\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\big(\exp(2\lambda_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})\big) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \exp(2\lambda_k^2(t_{k+1} - t_k)) \\
&= \exp\left(2\int_0^t \phi^2(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto \mathbb{E}(e^{2I_t}) = \exp(\int_0^t (\phi(s))^2 ds)$ est continue donc bornée sur $[0,T]$ et par conséquent la condition (5.57) est bien vérifiée. D'où le lemme. □

Démonstration du théorème 5.5.1 : On va montrer que le sous-espace H est dense dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, ce qui compte tenu du Lemme 5.5.1, donnera le résultat. Soit U une variable aléatoire de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ orthogonale à H. Il faut montrer que $U = 0$:

Soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ une subdivision de $[0,T]$ et soit la fonction $\rho(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t)$. Grâce au lemme 5.5.2, U est orthogonale à $\exp(\int_0^T \rho(s)dB_s)$ i.e. U est orthogonale aux variables aléatoires de la forme

$$\exp(\lambda_1 B_{t_1} + \cdots + \lambda_N B_{t_N}) = \exp(< \lambda | W >),$$

où $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, $W = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_N})$ et $< .|. >$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$. D'après les propriétés de l'espérance conditionnelle, on a donc

$$0 = \mathbb{E}\big(U \exp(< \lambda | W >)\big) = \mathbb{E}\big(\exp(< \lambda | W >)\mathbb{E}(U|W)\big). \tag{5.58}$$

[13]On rappelle que $\mathbb{E}(\exp(\lambda\mathcal{N}(0,\sigma^2)) = \exp(\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2)$.

Or la variable aléatoire $\mathbb{E}(U|W)$ est $\sigma(W)$-mesurable donc elle est de la forme $\mathbb{E}(U|W) = g(W)$, où $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable. On peut donc récrire (5.58) sous la forme

$$(5.59) \qquad 0 = \int_{\mathbb{R}^N} \exp(<\lambda, w>) g(w) f(w) dw,$$

où f est la densité de probabilité de la variable aléatoire W. Mais (5.59) signifie que la transformée de Laplace de la fonction $g(w)f(w)$ est identiquement nulle. Donc $g(w)f(w) = 0$ dw-presque partout. Mais $f(w) > 0$ partout, ce qui implique que $g(w) = 0$ presque partout. D'où $\mathbb{E}(U|W) = 0$ et ceci vaut pour tous les vecteurs aléatoires $W = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_N})$. Il en résulte que $U = \mathbb{E}(U|\mathcal{F}_T) = 0$. D'où le théorème. □

Corollaire 5.5.1 *(structure des martingales browniennes) :*
Soit $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$, une $\mathcal{F}_t$-martingale qu'on suppose dans L^2 (i.e. $\mathbb{E}(M_t^2) < +\infty$). Alors il existe un réel c et un processus $X \in M^2([0,T])$ tels que

$$(5.60) \qquad \forall t \in [0,T], \quad M_t = c + \int_0^t X_s dB_s \quad (p.s.)$$

Démonstration : D'après le théorème 5.5.1, il existe $c \in \mathbb{R}$ et $X \in M^2$ tels que

$$M_T = c + \int_0^T X_s dB_s.$$

Comme la martingale M est bornée[14] dans L^2, elle s'exprime à l'aide de sa valeur terminale M_T sous la forme $M_t = \mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_t)$ ($t \in [0,T]$). Mais d'après le chapitre 4, on sait que le processus $\left(c + \int_0^t X_s dB_s\right)_{t\in[0,T]}$ est une martingale donc pour tout $t \in [0,T]$:

$$\mathbb{E}\left(c + \int_0^T X_s dB_s | \mathcal{F}_t\right) = c + \int_0^t X_s dB_s = M_t,$$

ce qui démontre le corollaire. □

[14]en effet $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(M_T^2) < +\infty$ car $t \mapsto \mathbb{E}(M_t^2)$ est une fonction croissante.

5.5.2 Les équations de Kolmogorov

Dans la pratique un processus de diffusion apparaît toujours comme solution d'une EDS

$$dX_t = \sigma(X_t, t)dB_t + \mu(X_t, t)dt, \quad X_0 = \xi_0 \tag{5.61}$$

et la question cruciale est alors : comment déterminer les noyaux de transition $P_{s,t}$ du processus de Markov X ?
Ce problème est délicat. Commençons par examiner le cas peut-être le plus simple, celui où les coefficients σ et μ ne dépendent pas du temps donc X est un processus de Markov homogène et plus particulièrement supposons que X est un processus de Feller[15] et soit A l'opérateur différentiel défini en (5.46). Si $f \in C_K^2(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions de classe C^2 à support compact), on déduit facilement de la relation (5.45) que $\frac{1}{t}(P_t f - f) \to Af$ uniformément quand $t \to 0$. Ceci montre que A coïncide avec le générateur infinitésimal du semi-groupe de Feller $(P_t)_{t\geq 0}$ sur $C_K^2(\mathbb{R})$. D'après la proposition 3.3.1, pour $f \in C_K^2(\mathbb{R})$, on peut permuter les opérateurs P_s et A dans la relation (5.45), c'est à dire qu'on a

$$P_t f(x) = f(x) + \int_0^t A(P_s f)(x)ds$$

et si on dérive cette expression par rapport à la variable t, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t f(x) = A(P_t f)(x).$$

Ainsi la fonction $u(x,t) = P_t f(x)$, satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = (\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x})u \\ u(0,x) = f(x). \end{cases} \tag{5.62}$$

Si pour tout $f \in C_K^2(\mathbb{R})$ on sait résoudre analytiquement cette EDP et si la solution bornée est unique, on récupérera la valeur de $P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) P_t(x, dy)$. Comme $C_K^2(\mathbb{R})$ est dense dans $C_K(\mathbb{R})$, la probabilité $P_t(x, dy)$ sera théoriquement déterminée. Cette détermination est plus facile dans le cas où l'on sait a priori que le semi-groupe a des densités de

[15] par exemple si σ et μ sont bornées, voir la remarque 1 suivant le corollaire 5.4.2.

transition $p_t(x,y)$ i.e. $P_t(x,dy) = p_t(x,y)dy$ $(x,y \in \mathbb{R})$. A condition de pouvoir dériver en t et en x sous le signe intégrale dans $P_tf(x) = \int_{\mathbb{R}} p_t(x,y)f(y)dy$, on déduit de (5.62) que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} p_t(x,y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x})p_t(x,y)f(y)dy.$$

Comme cette équation est satisfaite par toute $f \in C_K^2(\mathbb{R})$, on en déduit que pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x,y) = (\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x})p_t(x,y). \tag{5.63}$$

Cette équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction $(x,t) \mapsto p_t(x,y)$ s'appelle *l'équation de Kolmogorov du passé*[16] car elle porte sur la variable x qui est le point de départ. Il y a une autre équation de Kolmogorov qui porte sur la variable d'arrivée y. On l'obtient en dérivant directement par rapport à t la relation (5.45), ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial t} P_tf(x) = P_t(Af)(x).$$

Toujours dans l'hypothèse où le semi-groupe a des densités et si on dérive formellement en t sous le signe intégrale, on déduit qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} p_t(x,y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}} p_t(x,y)\left(\frac{1}{2}\sigma^2(y)f''(y) + \mu(y)f'(y)\right)dy.$$

En intégrant ensuite par parties le membre de droite, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} p_t(x,y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(p_t(x,y)\sigma^2(y)) - \frac{\partial}{\partial y}(\mu(y)p_t(x,y))\right) f(y)dy$$

et il en résulte *l'équation de Kolmogorov du futur*[17] vérifiée par la fonction $(y,t) \mapsto p_t(x,y)$:

[16] "backward Kolmogorov equation" en anglais

[17] "forward Kolmogorov equation" en anglais

(5.64) $$\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(p_t(x,y)\sigma^2(y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)p_t(x,y)\right).$$

On notera que cette équation est plus naturelle que l'équation "du passé" car on n'a pas eu besoin ici de supposer que le semi-groupe est de Feller. On remarquera que dans le second membre de (5.64) il apparaît l'opérateur différentiel A^* de la forme

(5.65) $$A^*f(y) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}(\sigma^2(y)f(y)) - \frac{d}{dy}(\mu(y)f(y))$$

qui est l'adjoint formel de A. L'équation de Kolmogorov du futur (dite aussi équation *de Fokker-Plank*) peut donc s'écrire de manière plus condensée sous la forme

(5.66) $$\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y) = A_y^*(p_t(x,y)),$$

où l'indice y signifie que l'opérateur A^* agit sur la variable y.

Il est important de noter que la discussion précédente est relativement formelle[18] mais elle est d'une grande importance car elle montre comment on peut espérer déterminer les probabilités de transition de la diffusion X. En fait il y a très peu de cas que l'on sait résoudre complètement. Voici tout de même un résultat d'existence et d'unicité intéressant que nous admettrons (voir [21]) :

Théorème 5.5.2 : *Supposons que les fonctions $x \mapsto \sigma(x)$ et $x \mapsto \mu(x)$ sont lipschitziennes, bornées et que $\sigma^2(x)$ est bornée inférieurement par une constante $\lambda > 0$ (condition d'ellipticité). Alors pour toute $f \in C_K^2(\mathbb{R})$ le problème de Cauchy (5.62) a une unique solution bornée de la forme*

(5.67) $$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} p_t(x,y)f(y)dy,$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto p_t(x,y)$ est une densité de probabilité et pour tout y, la fonction $(x,t) \mapsto p_t(x,y)$ est l'unique solution de l'équation de Kolmogorov du passé (5.63) avec la condition initiale

[18] et doit être considérée comme heuristique

$\lim_{t\to 0} p_t(x,y) = \delta_x(y)$ *au sens des distributions (i.e. pour toute fonction* $f \in C_K^\infty(\mathbb{R})$,
$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} p_t(x,y)f(y)dy = f(x)$*).*

Remarque : L'extrême difficulté à obtenir explicitement une expression de $p_t(x,y)$, a eu pour conséquence l'abandon progressif des méthodes analytiques au profit de méthodes probabilistes permettant d'obtenir d'intéressants résultats de nature qualitative sur les solutions des EDS. Nous nous contentons de quelques exemples typiques dans les paragraphes suivants.

5.5.3 Exponentielle stochastique

L'EDS $dX_t = X_t dB_t$ avec $X_0 = 1$ a (sur tout intervalle de temps $[0,T]$) une solution unique d'après le théorème 5.4.1. On peut alors "sortir du chapeau" la solution et vérifier grâce à la formule d'Itô que $X_t = \exp(B_t - \frac{1}{2}t)$. De manière plus instructive, si on note l'analogie avec l'équation différentielle classique $dx(t) = x(t)dt$ et $x(0) = 1$ dont la solution est $x(t) = e^t$, on peut imaginer que la solution X_t est peut-être de la forme $X_t = e^{Y_t}$, pour un certain processus d'Itô Y_t. Si tel était le cas, en supposant que $dY_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$, la formule d'Itô montre que

$$X_t dB_t = d(e^{Y_t}) = e^{Y_t}dY_t + \frac{1}{2}e^{Y_t}\sigma_t^2 dt = X_t dY_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2 X_t dt.$$

D'où il résulte que $dY_t = dB_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 dt$. Comparant les deux expressions de dY_t, il vient $dY_t = dB_t - \frac{1}{2}dt$ d'où (puisque $Y_0 = 0$) $Y_t = B_t - \frac{1}{2}t$. On vérifie ensuite que $X_t = \exp(B_t - \frac{1}{2}t)$ est bien la solution de l'EDS. Ce processus s'appelle *exponentielle stochastique* du mouvement brownien et on notera

$$\mathcal{E}(B)_t = \exp\left(B_t - \frac{1}{2}t\right) \tag{5.68}$$

Par rapport à l'exponentielle classique il y a le facteur multiplicatif supplémentaire $e^{-\frac{1}{2}t}$.
Plus généralement on peut définir l'exponentielle stochastique d'un processus d'Itô.

Théorème 5.5.3 *: Étant donné un processus d'Itô* Z *de différentielle stochastique* $dZ_t = a_t dt + b_t dB_t$*, l'EDS*

(5.69)
$$\begin{cases} dX_t &= X_t dZ_t = a_t X_t dt + b_t X_t dB_t \quad (t \in [0,T]) \\ X_0 &= 1, \end{cases}$$

a une solution unique de la forme

(5.70)
$$\mathcal{E}(Z)_t = \exp\left(Z_t - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds\right) \quad (t \in [0,T]).$$

On l'appelle exponentielle stochastique de Z.

On notera que l'EDS (5.69) n'est pas de la forme uselle définie en (5.20) sauf si a_t et b_t sont des fonctions déterministes.

Démonstration : Comme ci-dessus posons $X_t = e^{Y_t}$, où Y est un processus d'Itô tel que $dY_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$. La valeur de $d(e^{Y_t})$ (obtenue avec la formule d'Itô) comparée à celle de $X_t dZ_t$ montre aussitôt que $\mu_t = a_t - \frac{1}{2}b_t^2$ et $\sigma_t = b_t$. D'où
$$Y_t = Z_t - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds.$$
On vérifie alors immédiatement que le processus e^{Y_t} est solution de (5.69). Pour montrer l'unicité soit X_t une autre solution. Si on applique la formule d'intégration par parties au processus $X_t e^{-Y_t}$ en tenant compte du fait que $d(e^{-Y_t}) = -e^{-Y_t}(a_t - b_t^2)dt - e^{-Y_t} b_t dB_t$, on montre facilement que $d(X_t e^{-Y_t}) = 0$. La condition initiale implique $X_t e^{-Y_t} = 1$ i.e. $X_t = e^{Y_t}$. □

Remarques : 1) Si $Z_t = f(t)$ est une fonction déterministe, $\mathcal{E}(Z)_t = e^{f(t)}$.
2) Si Z et Z' sont deux processus d'Itô avec $dZ_t = a_t dt + b_t dB_t$ et $dZ'_t = a'_t dt + b'_t dB_t$, on a

(5.71)
$$\mathcal{E}(Z + Z')_t = \mathcal{E}(Z)_t \mathcal{E}(Z')_t \, e^{-\int_0^t b_s b'_s ds}.$$

Martingale exponentielle : Lorsque $a_t \equiv 0$ dans l'équation (5.69), l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(Z)_t = \exp\left(\int_0^t b_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds\right)$ est telle que

(5.72)
$$\mathcal{E}(Z)_t = 1 + \int_0^t \mathcal{E}(Z)_s \, b_s dB_s,$$

donc ce processus est une martingale locale d'après le théorème 4.4.3. De plus c'est une sur-martingale d'après le résultat suivant :

Proposition 5.5.1 : *Toute martingale locale positive est une sur-martingale.*

Démonstration : Soit (M_t) une martingale locale positive et $(\tau_n)_{n\geq 1}$ une suite localisante. Comme M_0 est intégrable, le lemme de Fatou implique que que pour tout t, M_t est intégrable car

$$\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} M_{t\wedge\tau_n}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_{t\wedge\tau_n}) = \mathbb{E}(M_0).$$

Mais pour tout n et $0 \leq s \leq t$, on a

$$\mathbb{E}(M_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s) = M_{s\wedge\tau_n}.$$

Le lemme de Fatou pour l'espérance conditionnelle, montre alors qu'on a $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} M_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s) \leq \liminf_{n\to\infty} M_{s\wedge\tau_n} = M_s$. □

Il en résulte que l'espérance de $\mathcal{E}(Z)_t$ est décroissante d'où le corollaire suivant

Corollaire 5.5.2 : *$(\mathcal{E}(Z)_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale si et seulement si pour tout t, $\mathbb{E}(\mathcal{E}(Z)_t) = 1$.*
On l'appelle la martingale exponentielle de Z.

Il n'est pas toujours facile de calculer l'espérance de $\mathcal{E}(Z)_t$ aussi on a cherché des conditions suffisantes simples pour assurer que l'exponentielle stochastique est une martingale. Le résultat suivant que nous admettrons (voir [33], [51], [52]) est un des plus efficaces :

Théorème 5.5.4 *(Novikov) : Soit $(b_t)_{t\in[0,T]} \in \Lambda^2$ et $Z = (\int_0^t b_s dB_s)_{t\in[0,T]}$. Supposons que*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T b_s^2 ds\right)\right) < +\infty. \tag{5.73}$$

Alors L'exponentielle stochastique

$$\mathcal{E}(Z) = \left\{\exp\left(\int_0^t b_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds\right) ;\ t \in [0,T]\right\} \tag{5.74}$$

est une martingale[19].

[19] on notera que dans ce cas Z est aussi une martingale car la condition de Novikov (5.73) implique $\mathbb{E}\left(\int_0^T b_t^2 dt\right) < +\infty$.

5.5.4 Changement de mesure de probabilité

Pour centrer une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(m,1)$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, il suffit de considérer la variable aléatoire $X-m$; mais la variable est transformée. Une autre façon est de changer la probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega,\mathcal{F})$ en la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ telle que $d\widetilde{\mathbb{P}} = \exp(-mX + \frac{1}{2}m^2)d\mathbb{P}$. La variable aléatoire X est alors de loi $\mathcal{N}(0,1)$. En effet pour tout $t \in \mathbb{R}$ et en utilisant la formule du transfert, on a

$$\widetilde{\mathbb{P}}(X \leq t) = \int_{[X\leq t]} e^{-mX+\frac{1}{2}m^2} d\mathbb{P}$$
$$\int_{-\infty}^{t} e^{(-mx+\frac{1}{2}m^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

On peut utiliser une idée analogue pour modifier la dérive d'un processus d'Itô. On suppose toujours qu'on travaille avec un mouvement brownien de référence continu $B = (\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},(B_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$. Soit $T > 0$.

Théorème 5.5.5 *(Girsanov) : Soit $(b_t)_{t\in[0,T]} \in \Lambda^2$ et $Z = (\int_0^t b_s dB_s)_{t\in[0,T]}$. On suppose que $\mathcal{E}(Z)$ est une martingale*[20]*. Posons*

$$\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t b_s ds \quad (t \in [0,T]).$$

Alors $\widetilde{B} = (\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]},(\widetilde{B}_t)_{t\in[0,T]},\widetilde{\mathbb{P}})$ est un mouvement brownien pour la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ de densité $\mathcal{E}(Z)_T$ par rapport à $\mathbb{P}$ (i.e. $d\widetilde{\mathbb{P}}(\omega) = \mathcal{E}(Z)_T(\omega)d\mathbb{P}(\omega)$).

On a besoin du lemme suivant

Lemme 5.5.3 *: Pour qu'un processus $(M_t)_{t\in[0,T]}$ soit une $(\mathcal{F}_t,\widetilde{\mathbb{P}})$-martingale (resp. martingale locale), il suffit que le processus $(\mathcal{E}(Z)_t\ M_t)_{t\in[0,T]}$ soit une $(\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$-martingale (resp. martingale locale).*

Démonstration : Supposons que $(\mathcal{E}(Z)_t\ M_t)_{t\in[0,T]}$ soit une $(\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$-martingale et soient $0 \leq s \leq t \leq T$.

[20] voir le théorème 5.5.4

Par la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle et la définition de $\widetilde{\mathbb{P}}$, $\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(M_t|\mathcal{F}_s)$ est l'unique variable aléatoire $\mathcal{F}_s$-mesurable telle que

$$(5.75) \qquad \forall A \in \mathcal{F}_s, \int_A \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(M_t|\mathcal{F}_s)\mathcal{E}(Z)_T d\mathbb{P} = \int_A M_t\mathcal{E}(Z)_T d\mathbb{P}.$$

Le membre de droite de (5.75) vaut $\int_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(M_t\mathcal{E}(Z)_T|\mathcal{F}_s)d\mathbb{P}$. Or on a $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(M_t\mathcal{E}(Z)_T|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(M_t\mathcal{E}(Z)_T|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(M_t\mathcal{E}(Z)_t|\mathcal{F}_s) = M_s\mathcal{E}(Z)_s$ (l'avant dernière égalité car $\mathcal{E}(Z)$ est une martingale et la dernière égalité par hypothèse). De la même façon on montre que le membre de gauche de (5.75) vaut $\int_A \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(M_t|\mathcal{F}_s)\mathcal{E}(Z)_s d\mathbb{P}$. On en déduit que $\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(M_t|\mathcal{F}_s)\mathcal{E}(Z)_s = M_s\mathcal{E}(Z)_s$ d'où $\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$. Le cas d'une martingale locale est analogue. □

Démonstration du théorème : Il suffit d'après une caractérisation du mouvement brownien vue au chapitre 2 de montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le processus

$$M_t = \exp\left(i\lambda\widetilde{B}_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$$

est une $(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathbb{P}})$-martingale. Mais comme $(M_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus borné, il suffit d'après la proposition 4.4.2 de montrer que c'est une martingale locale et donc d'après le lemme que $M_t\mathcal{E}(Z)_t$ est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale locale. D'après (5.73) On a

$$\begin{aligned} M_t\mathcal{E}(Z)_t &= M_t \exp\left(\int_0^t b_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds\right) \\ &= \exp\left(\int_0^t (b_s + i\lambda)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t (b_s + i\lambda)^2 ds\right) \end{aligned}$$

Mais la formule d'Itô holomorphe (corollaire 5.3.1) avec $f(z) = e^z$ montre que l'on a

$$d(M_t\mathcal{E}(Z)_t) = M_t\mathcal{E}(Z)_t(b_t + i\lambda)dB_t.$$

Le résultat découle alors du théorème 4.4.3[21]. □

Remarque importante : Comme $\mathcal{E}(Z)$ est une martingale, on voit facilement que pour tout $t \in [0, T]$ la probabilité $d\widetilde{\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t}$ restreinte à la sous-tribu

[21] qui est valable aussi lorsque l'intégrand est complexe.

$\mathcal{F}_t$ vaut

$$d\widetilde{\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}(Z)_t d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}. \tag{5.76}$$

Corollaire 5.5.3 *(Annulation de la dérive d'une diffusion) : Soit X une diffusion solution sur $[0,T]$ de l'EDS*

$$dX_t = \mu(X_t,t)dt + \sigma(X_t,t)dB_t, \tag{5.77}$$

avec $\sigma(x,t) > 0$. On pose $b_t = -\frac{\mu(X_t,t)}{\sigma(X_t,t)}$, $Z_t = \int_0^t b_s dB_s$ et on suppose que l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(Z)$ est une martingale. On considère la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ sur $\mathcal{F}_T$ de densité $\mathcal{E}(Z)_T$ par rapport à $\mathbb{P}$. Alors la diffusion X vérifie l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t,t)d\widetilde{B_t}, \tag{5.78}$$

où $\widetilde{B} = (\widetilde{B_t})_{t\in[0,T]}$ est un $(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathbb{P}})$ mouvement brownien.

Démonstration : Par le théorème de Girsanov, $\widetilde{B_t} = B_t - \int_0^t b_s ds$ est un $(\mathcal{F}_t, \widetilde{\mathbb{P}})$ mouvement brownien. En reportant cette valeur de B dans l'équation (5.77), on trouve aussitôt (5.78). □

Remarque : Le résultat précédent ne doit pas trop faire illusion car il ne permet pas, comme on pourrait le croire, de résoudre l'EDS (5.78) sauf dans le cas simple où il existe une relation de proportionnalité entre μ et σ car dans ce cas b_t est une constante et la mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$ est explicite.

Exemple : Soit $\mu \in \mathbb{R}$ une constante et $\widetilde{B}_t = B_t + \mu t$ le mouvement brownien avec dérive μ. On peut considérer ce processus sur un intervalle de temps $[0,T]$ pour être dans le cadre de ce chapitre[22]. Soit $t \in [0,T]$, on va déterminer la loi de $\widetilde{M_t} = \sup_{0\le s\le t} \widetilde{B}_s$. Soit $d\widetilde{\mathbb{P}}$ la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ pour laquelle $(\widetilde{B}_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien. Compte tenu de (5.76), pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\widetilde{M_t} \in A) &= \int \mathbf{1}_{[\widetilde{M_t}\in A]} d\mathbb{P} \\
&= \int \mathbf{1}_{[\widetilde{M_t}\in A]} \exp\left(\mu \widetilde{B}_t - \frac{1}{2}\mu^2 t\right) d\widetilde{\mathbb{P}} \\
&= \int\int_{\mathbb{R}\times A} \exp\left(\mu x - \frac{1}{2}\mu^2 t\right) f_t(x,y)dxdy,
\end{aligned}$$

[22] T peut évidemment être quelconque.

où f_t est la densité du couple (position, maximum) donnée en (2.32). La densité de la variable aléatoire $\widetilde{M}_t$ est donc nulle si $y < 0$ et vaut pour $y \geq 0$:

$$\begin{aligned}
f_{\widetilde{M}_t}(y) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\mu^2 t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mu x) f_t(x,y) dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\mu^2 t\right) \int_{-\infty}^{y} \exp(\mu x) \exp\left(-\frac{(2y-x)^2}{2t}\right) dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{-3/2} \exp\left(2\mu y - \frac{1}{2}\mu^2 t\right) \int_{y}^{+\infty} e^{-\mu u} \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) du.
\end{aligned}$$

5.6 Annexe

5.6.1 La formule de Black, Scholes et Merton

Comme exemple d'application du calcul stochastique aux mathématiques financières nous allons présenter la méthode de Black, Scholes et Merton de calcul du prix d'une option européenne. Nous n'allons évidemment pas entrer dans les justifications techniques des diverses hypothèses dont nous admettrons la pertinence et nous nous contenterons d'un examen succinct du schéma mathématique sous jacent.

A) Le modèle probabiliste de Black et Scholes

Supposons que le cours S_t (en euros) de l'action d'une certaine valeur boursière A à l'instant t, évolue suivant l'EDS

$$\left\{\begin{array}{lcl} dS_t &=& \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \\ S_0 &=& s_0 \end{array}\right. \tag{5.79}$$

où $\mu > 0$ est la dérive et $\sigma \neq 0$ la volatilité de l'action.

Le prix initial s_0 est supposé connu. La solution explicite de (5.79) est $S_t = s_0 \exp\left(\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B_t\right)$. Une option européenne est un produit financier qui donne le droit à un client d'acheter à la banque une action de A au prix p à l'instant T. Le problème est de déterminer le juste prix que la banque doit demander au client lorsqu'il achète son option. Autrement dit comment la banque doit-elle se prémunir du risque qu'à l'instant T, on ait $S_T > p$ et qu'alors elle perde la somme $S_T - p$? On se place donc du point de vue du banquier.

Désignons par $u(x,t)$ le juste prix de l'option à l'instant t sachant que $S_t = x$. Pratiquement, on cherche $u(s_0, 0)$. Les conditions aux limites sont clairement $u(0,t) = 0$ et $u(x,T) = (x-p)^+$. En fait c'est le processus aléatoire

$$C_t = u(S_t, t), \tag{5.80}$$

qu'on appelle le prix courant de l'option à l'instant t. Le banquier, pour couvrir son risque, utilise une stratégie dite d'autofinancement. Celle ci consiste à utiliser la somme $u(s_0, 0)$ qu'il demande au client pour constituer un "portefeuille" composé de deux actifs : des actions de A et des coupons d'obligations.
Rappelons qu'une obligation au taux $r > 1$ est un placement sans risque tel qu'une somme L_0 investie à l'instant 0 devient $L_t = L_0 e^{rt}$ à l'instant t. Le taux d'intérêt r est constant et en général il est fixé par l'Etat.
Supposons qu'à l'instant t le portefeuille comporte ϕ_t unités de l'action A et ψ_t coupons[23] d'obligation . Sa valeur est alors

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t L_t, \tag{5.81}$$

où S_t (resp. $L_t = e^{rt}$) est la valeur d'une action (resp. d'un coupon) à l'instant t (on suppose qu'un coupon valait 1 à l'instant 0). Le portefeuille est dit "simulant"[24] si

$$V_T = C_T$$

(i.e. si sa valeur finale est égale au prix de l'option à l'échéance) et il est dit "autofinancé" si

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dL_t. \tag{5.82}$$

Admettons qu'il existe de tels processus $\phi = (\phi_t)_{t\in[0,T]}$ et $\psi = (\psi_t)_{t\in[0,T]}$ adaptés et tels que $\mathbb{P}$-p.s.

$$\int_0^T \phi_s^2 ds + \int_0^T |\psi_s| ds < +\infty.$$

Alors on aurait

[23] attention ϕ_t et ψ_t peuvent être des nombres ≥ 0 quelconques pas forcément entiers.
[24] i.e. il simule le prix de l'option à l'instant t.

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}V_t) &= -re^{-rt}V_t + e^{-rt}dV_t \\ &= -re^{-rt}(\phi_t S_t + \psi_t L_t) + e^{-rt}(\phi_t dS_t + \psi_t dL_t) \\ &= -re^{-rt}\phi_t S_t + e^{-rt}\phi_t dS_t = \phi_t d(e^{-rt}S_t). \end{aligned}$$

Mais le processus $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ vérifie

$$d\widetilde{S}_t = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t = \widetilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t) = \widetilde{S}_t \sigma dW_t,$$

si on pose $W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t$. Or d'après le théorème de Girsanov, il existe une probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ telle que $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ soit un mouvement brownien. Alors $\widetilde{S}_t = \widetilde{S_0}\exp(\sigma W_t - (\sigma^2 t)/2)$ est une martingale sous la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$. Mais on peut voir facilement que le processus $(\phi_t \widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ est dans $M^2([0,T])$ donc, sous $\widetilde{\mathbb{P}}$, le processus

$$e^{-rt}V_t = V_0 + \int_0^t \phi_s \widetilde{S_s} \sigma dW_s \ (t \in [0,T]),$$

est une martingale bornée dans L^2. Elle converge donc vers sa valeur terminale $e^{-rT}V_T = e^{-rT}C_T$ et pour tout $t \in [0,T]$, on a
$e^{-rt}V_t = \mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}(e^{-rT}C_T|\mathcal{F}_t)$, d'où la valeur du portefeuille simulant :

$$V_t = \mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}(e^{-r(T-t)}C_T|\mathcal{F}_t)$$

qui est aussi la valeur C_t de l'option à l'instant t.

Remarque : Pour l'existence du portefeuille autofinancé c'est à dire des processus ϕ et ψ vérifiant (5.82), on peut consulter le livre de Lamberton et Lapeyre [38]. Cette existence résultera aussi a posteriori de la méthode de résolution explicite que nous présenterons dans le prochain paragraphe. On peut néanmoins expliquer heuristiquement comment il est possible d'ajuster le portefeuille à chaque instant de manière à assurer la condition (5.82) qui peut sembler un peu étrange au non spécialiste :
Les quantités ϕ_t et ψ_t ayant été calculées à l'instant t, servent jusqu'à l'instant $t + dt$ où la valeur S_{t+dt} ayant été observée, on les recalcule de telle sorte que

$$\begin{aligned} dV_t = V_{t+dt} - V_t &= \phi_{t+dt}S_{t+dt} + \psi_{t+dt}L_{t+dt} - \phi_t S_t - \psi_t L_t \\ &= \phi_t(S_{t+dt} - S_t) + \psi_t(L_{t+dt} - L_t) \end{aligned}$$

Mais comme $L_{t+dt} = (1+r)L_t dt$, la relation précédente est satisfaite si on détermine ϕ_{t+dt} et ψ_{t+dt} de telle sorte que

$$(\phi_{t+dt} - \phi_t)S_{t+dt} + (\psi_{t+dt} - \psi_t)rL_t dt = 0,$$

ce qui est possible dans la pratique où le temps est discrétisé (voir le modèle de Black et Scholes discret dans [38]).

B) Solution analytique du problème de Black, Scholes et Merton

Reconsidérons l'équation (5.82) du portefeuille autofinancé sous la forme

$$dC_t = \phi_t dS_t + (C_t - \phi_t S_t)r dt. \tag{5.83}$$

où $V_t = C_t = u(S_t, t)$ (voir (5.80)). Supposons que la fonction u soit de classe C^2. On peut appliquer la formule d'Itô, ce qui donne

$$\begin{aligned} dC_t &= \frac{\partial u}{\partial x} dS_t + \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sigma^2 S_t^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial x} dB_t. \end{aligned} \tag{5.84}$$

où les dérivées partielles sont prises au point (S_t, t). Mais l'égalité des deux expressions (5.83) et (5.84) impose que les coefficients de dB_t soient les mêmes, ce qui compte tenu de (5.79) est réalisé si :

$$\phi_t = \frac{\partial u}{\partial x}(S_t, t). \tag{5.85}$$

De même l'égalité des coefficients de dt donne

$$\frac{\partial u}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(S_t, t) + rS_t \frac{\partial u}{\partial x}(S_t, t) - ru(S_t, t) = 0. \tag{5.86}$$

Une manière d'assurer que cette relation est bien vérifiée et que u satisfasse l'équation aux dérivées partielles avec conditions aux limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + rx\dfrac{\partial u}{\partial x} - ru = 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(x,T) = f(x), \quad (0 \le t \le T, x \ge 0), \end{cases} \tag{5.87}$$

où u est continue dans le domaine fermé $[0,+\infty[\times[0,T]$ et de classe $C^{2,1}$ dans l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,T[$ et $f(x)=(x-p)^+$ avec les conditions imposées par le problème. C'est l'équation de Black, Scholes et Merton. On remarquera que la dérive μ du cours de l'action n'intervient pas ce qui explique pourquoi les financiers ne s'intéressent vraiment qu'à la volatilité[25]. Pour alléger l'énoncé qui suit, nous dirons qu'une solution u de (5.87) est à croissance au plus polynomiale s'il existe un polynôme $P(x)$ de la variable x tel que pour tout $t\in[0,T]$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$, on ait $u(x,t)\leq P(x)$.

Théorème 5.6.1 : *Dans l'ensemble des fonctions à croissance au plus polynomiale*[26]*, l'équation (5.87) a une solution unique de la forme*

$$u(x,t)=e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty} f\Big(x\exp\big(\sigma\xi\sqrt{T-t}+(r-\sigma^2/2)(T-t)\big)\Big)\frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}d\xi \tag{5.88}$$

En particulier si $f(x)=(x-p)^+$, on a

$$u(x,t)=x\Phi(\alpha_1)-pe^{-r(T-t)}\Phi(\alpha_2), \tag{5.89}$$

où $\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)d\xi$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et

$$\alpha_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln\left(\frac{x}{p}\right)+(r+\sigma^2/2)(T-t)\right)$$
$$\alpha_2=\alpha_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

Démonstration : Faisons le changement de variable $x=e^y$ et $t=T-s$ dans l'équation (5.88), la fonction $v(y,s):=u(e^y,T-s)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(r-\sigma^2/2)\frac{\partial v}{\partial y}-rv,$$

[25] Une explication plus mathématique est qu'on peut toujours éliminer la dérive par changement de probabilité comme on l'a vu dans le paragraphe 5.5.4 et en A)

[26] Noter que ceci implique que la donnée $f(x)=u(x,T)$ est aussi à croissance au plus polynomiale.

avec les conditions aux limites $v(-\infty, s) = 0$, $v(y, 0) = f(e^y)$, $(y \in \mathbb{R}, 0 \le s \le T)$. Si on fait ensuite le changement de fonction

$$w(y,s) = e^{-(a\sigma y + bs)} v(\sigma y, s), \tag{5.90}$$

avec $a = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}$ et $b = (a-1)(r + a\frac{\sigma^2}{2})$, on voit facilement que w vérifie l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (0 \le s \le T, \quad y \in \mathbb{R}), \tag{5.91}$$

avec la condition de Cauchy $w(y, 0) = e^{-a\sigma y} f(e^{\sigma y})$. La convolée de cette fonction et du noyau de la chaleur :

$$w(y,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{(y-\xi)^2}{2s}\right) e^{-a\sigma\xi} f(e^{\sigma\xi}) d\xi, \tag{5.92}$$

vérifie (5.91) et compte tenu de l'hypothèse de croissance polynomiale sur f, satisfait $|w(y,s)| \le Ce^{k|y|}$ $(y \in \mathbb{R}, 0 \le s \le T)$ où $C > 0$ et $k > 0$ sont des constantes. Or il est bien connu qu'il existe une solution unique de (5.91) dans l'ensemble des fonctions à croissance au plus en exponentielle quadratique (voir [20], p.57). Cette unique solution est donc donnée par (5.92) et ceci implique, compte tenu des changements de variables et de fonctions effectués, le résultat d'unicité annoncé. L'expression de $u(x,t)$ s'obtient alors par un calcul facile à partir (5.92), (5.90) et des valeurs de a et b. L'expression particulière (5.89), en découle sans difficulté ; nous laissons les détails en exercice. □

5.6.2 Notes et exercices

Exercice 1 (généralisation de l'EDS de Black et Scholes) : Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Résoudre l'EDS

$$\begin{cases} dX_t &= f(t)X_t dt + g(t)X_t dB_t \quad (t \in [0,T]) \\ X_0 &= \xi_0. \end{cases}$$

(*indication* : on cherchera X sous la forme $X_t = Y_t Z_t$ où Y est la solution de l'EDS précédente avec $f(t) \equiv 0$ et Z est un processus d'Itô à dérive et coefficient de diffusion déterministes).

Exercice 2 (EDS du pont brownien) : Montrer que pour tout $T < 1$ l'EDS suivante a une unique solution :

$$\begin{cases} dX_t & = & -\frac{X_t}{1-t}dt + dB_t \quad (t \in [0,T]) \\ X_0 & = & 0. \end{cases}$$

et trouver une forme explicite en cherchant X sous la forme d'un produit de deux processus d'Itô à coefficients déterministes. On déduira de l'expression de X que ce processus a même loi que le processus $(B_t - tB_1)_{0 \leq t < 1}$.

Exercice 3 : Le polynôme d'Hermite "espace-temps" d'ordre $n \in \mathbb{N}$ est défini par

$$H_n(x,t) = (-1)^n \frac{t^n}{n!} e^{x^2/2t} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2t}).$$

1) Montrer qu'on a la relation génératrice

$$\exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n H_n(x,t) \quad (\alpha, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+).$$

(*indication* : on pourra calculer $\frac{d^n}{d\alpha^n}\left(e^{-(x-\alpha t)^2/2t}\right)|_{\alpha=0}$).

2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère le processus $\mathcal{E}(\alpha B)$ (exponentielle stochastique de αB). En exprimant $\mathcal{E}(\alpha B)$ de deux façons différentes montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, on a

$$\int_0^t H_n(B_s, s) dB_s = H_{n+1}(B_t, t).$$

et en déduire que, pour tout $n \geq 0$, le processus $(H_n(B_t,t))_{t \geq 0}$ est une martingale.

3) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ une fonction déterministe. On note $\mathcal{E}^f$ l'exponentielle stochastique du processus $(\int_0^t f(s)dB_s)_t$ i.e.

$$\mathcal{E}_t^f = \exp\left(\int_0^t f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds\right).$$

En considérant $\mathcal{E}^{\alpha f}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) et avec la méthode de la question 2) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^t H_n\left(\int_0^s f(u)dB_u, \int_0^s f^2(u)du\right) f(s)dB_s$$
$$= H_{n+1}\left(\int_0^t f(u)dB_u, \int_0^t f^2(u)du\right).$$

4) En déduire que

$$\mathcal{E}_t^f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f(s_1)dB_{s_1} \int_0^{s_1} f(s_2)dB_{s_2} \dots \int_0^{s_{n-1}} f(s_n)dB_{s_n}.$$

où dans les intégrales itérées précédentes, il est convenu que les intégrations se font de la droite vers la gauche.

Exercice 4 : Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration du mouvement brownien B et $T > 0$ (éventuellement $T = +\infty$). On va donner une description hilbertienne de $L^2(\mathcal{F}_T) := L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.
Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'ensemble

$$\Delta_n = \left\{s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}_+^n | T \geq s_1 > s_2 > \dots > s_n\right\}$$

et $L^2(\Delta_n)$ l'espace des fonctions déterministes de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue définies sur Δ_n. On sait que le sous-ensemble E_n des fonctions $f := \otimes_{i=1}^n f_i$ où $f_i \in L^2([0,T])$ (*i.e.* $f(s_1, \dots, s_n) = f_1(s_1)\cdots f_n(s_n)$) est total dans $L^2(\Delta_n)$. Pour $f \in E_n$, on considère la variable aléatoire

$$I_n(f) = \int_0^T f_1(s_1)dB_{s_1} \int_0^{s_1} f_2(s_2)dB_{s_2} \dots \int_0^{s_{n-1}} f_n(s_n)dB_{s_n}$$

1) Montrer que $\|I_n(f)\|_{L^2(\mathcal{F}_T)} = \|f\|_{L^2(\Delta_n)}$ et que I_n se prolonge en une isométrie de $L^2(\Delta_n)$ sur le sous-espace K_n de $L^2(\mathcal{F}_T)$ engendré par $I_n(E_n)$. Ce sous-espace K_n est appelé le n-ième chaos de Wiener.
(Remarque : On peut montrer que K_n est l'ensemble des variables aléatoires de la forme

$$\int_0^T \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} f(s_1, \dots, s_n)dB_{s_1}dB_{s_2}\dots dB_{s_n}$$

où $f \in L^2(\Delta_n)$ mais il convient de donner un sens précis à l'intégrale stochastique itérée d'une fonction quelconque de $L^2(\Delta_n)$ ce qui est possible mais nous ne le demandons pas dans cet exercice.)

2) Montrer que les sous-espaces K_n sont deux à deux orthogonaux dans $L^2(\mathcal{F}_T)$.

3) Montrer que l'espace $L^2(\mathcal{F}_T)$ se décompose en la somme directe hilbertienne

$$L^2(\mathcal{F}_T) = \oplus_{n=0}^{\infty} K_n$$

où K_0 est l'espace des constantes. Autrement dit pour toute variable aléatoire $X \in L^2(\mathcal{F}_T)$, il existe une suite $(f^{(n)})_{n\geq 1}$ avec $f^{(n)} \in L^2(\Delta_n)$, telle que

$$Y = \mathbb{E}(Y) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f^{(n)})$$

où la convergence de la série précédente est au sens L^2. (*indication* : Montrer que le résultat est vrai pour les Y de la forme $\mathcal{E}_T^f$ où $f \in L^2([0,T])$ (voir l'exercice 3) et utiliser (après l'avoir montré) le fait que la famille des variables aléatoires $\mathcal{E}_T^f$ est totale dans dans $L^2(\mathcal{F}_T)$).

Exercice 5 : Soit X un processus tel que pour tout $T > 0$, $X \in \Lambda^2([0,T])$ et vérifiant la propriété suivante : Pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $T \mapsto \int_0^T X_s^2(\omega)ds$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$ lorsque $T \to +\infty$. Pour tout $a \geq 0$, on pose alors

$$\tau_a = \inf\left\{x \geq 0;\ \int_0^x X_s^2 ds > a\right\}.$$

1) a) Justifier que $\tau_a(\omega) < +\infty$ pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$.

b) Montrer que τ_a est un temps d'arrêt de la filtration brownienne et que $\int_0^{\tau_a} X_s^2 ds = a$.

2) a) Soit $a > 0$ fixé et $M = (M_t)_{t\geq 0}$ tel que $M_t = \int_0^t X_s \mathbf{1}_{[s\leq\tau_a]} dB_s$. Montrer que M est une martingale de carré intégrable et que $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(M_t^2) < +\infty$. b) En déduire que

$$\lim_{t\to+\infty} M_t := W_a \quad \text{existe } \mathbb{P} - p.s. \text{ et dans } L^1.$$

On écrira alors dans toute la suite

$$W_a = \int_0^{\tau_a} X_s dB_s.$$

On fixe alors une suite finie d'instants $0 \leq t_1 < \cdots < t_m$ et pour tout $k = 1, \ldots, m$, on considère le processus $X^{(k)} = (X_s^{(k)})_{s \geq 0}$ tel que

$$X_s^{(k)} = X_s \mathbf{1}_{[s \leq \tau_{t_k}]}.$$

On pose alors

$$Y_t = \exp\left(\sum_{k=1}^{m} i\lambda_k \int_0^t X_s^{(k)} dB_s + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k,l \leq m} \lambda_k \lambda_l \int_0^t X_s^{(k)} X_s^{(l)} ds\right),$$

où les λ_k ($k = 1, \cdots, m$) sont des réels fixés.

3) a) Justifier pourquoi $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô à valeurs complexes.

b) Calculer la différentielle stochastique de Y.

4) a) Vérifier que si $t_l \leq t_k$, il existe une constante $C > 0$ qu'on précisera explicitement, telle que

$$0 \leq \int_0^t X_s^{(k)} X_s^{(l)} ds \leq C$$

et en déduire que le processus Y est borné en précisant par quelle borne.

b) Démontrer que Y une martingale et donner la valeur de $\mathbb{E}(Y_t)$ pour tout $t \geq 0$ (*indication* : on pourra utiliser la question 3).

5) a) Démontrer que Y_t tend vers une limite $\mathbb{P}$-presque sûrement si $t \longrightarrow +\infty$ et déterminer explicitement cette limite.

b) En déduire la valeur explicite de la fonction caractéristique du vecteur aléatoire $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_m})$.

c) Conclure que W est un mouvement brownien.

6) a) Si on considère le processus défini par $a_t = \int_0^t X_s^2 ds$, montrer que $\mathbb{P}$-p.s. on a

$$W_{a_t} = \int_0^t X_s dB_s.$$

ce qui montre que toute intégrale stochastique est un mouvement brownien changé de temps.

b) En déduire par un autre argument que celui vu en cours que le processus $\left(\int_0^t X_s dB_s\right)_{t \geq 0}$ a une version continue.

Remarque : Les résultats des questions 2) b) et 6) a) constituent un cas particulier du célèbre théorème de Dambis, Dubins-Schwarz (voir [51] p. 181).

Exercice 6 : Soit $T_0 > 0$. On considère ici un processus X tel que pour tout $T < T_0$, $X \in \Lambda^2([0,T])$ et on suppose que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $T \mapsto \int_0^T X_s^2(\omega)ds$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$ lorsque $T \to T_0$.
Pour tout $t \geq 0$, on définit τ_t par la même formule qu'à l'exercice 5.

1) Montrer à grands traits (i.e. sans refaire tous les calculs) que tous les résultats de l'exercice précédent sont encore vrais.

2) On rappelle que le pont brownien est le processus vérifiant l'EDS

$$\begin{cases} dU_t &= -\frac{X_t}{1-t}dt + dB_t \quad (t \in [0,1[) \\ U_0 &= 0. \end{cases}$$

et que sa solution est $U_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}dB_s$. En appliquant les résultats précédents, montrer que $\lim_{t\to 1} U_t = 0$ $\mathbb{P}$-p.s. (On pourra utiliser les invariances du mouvement brownien par translation et inversion du temps).

Notes : La définition que nous donnons d'un processus d'Itô correspond dans notre cadre du mouvement brownien à celle de Revuz et Yor ([51] p.298). La discussion heuristique de la formule d'intégration par parties en particulier les équations 5.11, 5.12 et 5.13, ainsi que la motivation heuristique à la formule d'Itô sont inspirées de la "table de multiplication" des éléments différentiels dB_t et dt de Karatzas et Shreve [33] p. 154, table qui figure déjà dans le livre de McKean [41] p.33. Nous avons fait une brève allusion à la formule d'Itô holomorphe (corollaire 5.3.1) qui n'est en fait qu'une réécriture commode de la formule 5.16 dans le cas $m = 2$ lorsque la fonction f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann. Cette formule que nous avons appelée "holomorphe" ne sert que dans la démonstration du théorème de Girsanov et n'a rien à voir avec le calcul stochastique holomorphe ou conforme qui utilise un mouvement brownien complexe (voir par exemple l'article de Getoor et Sharpe [24]). Pour le théorème d'existence et d'unicité (théorème 5.4.1) nous avons adopté la présentation de Brzeźniak et Zastawniak ([6] p. 205) qui donne très rapidement l'existence de la solution ; mais pour obtenir l'unicité à indiscernabilité près, on utilise ensuite l'inégalité maximale L^p comme dans les preuves classiques (voir par exemple [2] p. 196). Pour obtenir le caractère markovien de la solution d'une EDS, nous avons suivi Protter ([48] p. 291) et Baldi ([2] p. 214). La présentation du problème de Black, Scholes et Merton est adaptée de Lamberton et Lapeyre [38] alors que la mise en équation du paragraphe 5.6.1 B) qui est celle utilisée par les professionnels de la finance, m'a été communiquée par mon fils Arnaud. Enfin les exercices 3 et 4 sur la décomposition en chaos de Wiener sont tirés du livre de Marc Yor [56].

Chapitre 6

Solutions des exercices

6.1 chapitre 1

Exercice 1 : 1) La fonction $(s,t) \mapsto \mathbf{1}_{[s=t]}$ qui vaut 1 si $s=t$ et 0 sinon est clairement une fonction de covariance et le processus gaussien X existe d'après le théorème 1.2.1.
2) Supposons que X est mesurable et soit $T>0$. Comme $\int_0^T \mathbb{E}(|X_t|)dt = 2T < +\infty$ et que $\int_0^T \mathbb{E}(|X_t|)dt = \mathbb{E}(\int_0^T |X_t|dt)$ (Fubini-Tonelli), on a $\int_0^T |X_t|dt < +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s. et $\int_0^T X_t dt$ est une variable aléatoire centrée (car par Fubini on a alors $\mathbb{E}(\int_0^T X_t dt) = \int_0^T \mathbb{E}(X_t)dt = 0$). Calculons sa variance :
$\mathbb{E}((\int_0^T X_t dt)^2) = \mathbb{E}(\int_0^T X_s ds \int_0^T X_t dt) = \mathbb{E}(\int_{[0,T]^2} X_s X_t dsdt) = \int_{[0,T]^2} \mathbb{E}(X_s X_t)dsdt = 0$ (l'intervertion de $\mathbb{E}$ et de $\int_{[0,T]^2}$ étant justifiée par le théorème de Fubini car $\int_{[0,T]^2} \mathbb{E}(|X_s||X_t|)dsdt = \int_{[0,T]^2} \mathbb{E}(|X_s|)\mathbb{E}(|X_t|)dsdt = 4T^2 < +\infty$). Il en résulte que $\int_0^T X_t dt = 0$ $\mathbb{P}$-p.s. Plus précisément il existe un ensemble mesurable $A_T \in \Omega$ avec $\mathbb{P}(A_T) = 1$ tel que $\int_0^T X_t(\omega)dt = 0$ pour tout $\omega \in A_T$. L'ensemble $A = \cap_{T\in\mathbb{Q}} A_T$ est de probabilité 1 et pour $\omega \in A$, on a $\int_0^T X_t(\omega)dt = 0$ pour tout $T \in \mathbb{Q}$ donc pour tout $T \in \mathbb{R}$ car la fonction $T \mapsto \int_0^T X_t(\omega)dt$ est continue. Mais alors ceci implique que pour tout $\omega \in A$, $X_t(\omega) = 0$ p.p. (i.e. pour presque tout t) ce qui contredit le fait que les X_t sont de loi $N(0,1)$. Donc le processus X n'est pas mesurable.

Exercice 2 : Il existe des suites (a_n) et (b_n) de réels tels $\phi(x) = \sup_n(a_nx + b_n)$ $(x \in \mathbb{R})$. La linéarité et la croissance de l'espérance conditionnelle, impliquent :

$$a_n\mathbb{E}(X|\mathcal{D}) + b_n = \mathbb{E}(a_nX + b_n|\mathcal{D}) \leq \mathbb{E}(\phi(X)|\mathcal{D}) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

En passant au sup en n, on obtient aussitôt le résultat.

Exercice 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, considérons les événements $A_{k,n} = [\frac{k-1}{2^n} \leq \tau < \frac{k}{2^n}]$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ et posons $\tau_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^n}\mathbf{1}_{A_{k,n}}$. Par construction on a $\tau_n \searrow \tau$ si $n \to +\infty$. D'autre part pour tout $t \in T$, si k_n est entier tel que $\frac{k_n}{2^n} \leq t < \frac{k_n+1}{2^n}$, on a $[\tau_n \leq t] = \cup_{k=1}^{k_n} A_{k,n} \in \mathcal{F}_{k_n/2^n} \subset \mathcal{F}_t$. Donc τ_n est un temps d'arrêt.

Exercice 4 : 1) si $T = \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[\tau + \sigma \leq n] = \cup_{k=0}^{n}[\tau \leq n-k] \cap [\sigma = k]$. Or $[\tau \leq n-k] \in \mathcal{F}_{n-k} \subset \mathcal{F}_n$ et $[\sigma = k] \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$, d'où $[\tau \leq n-k] \cap [\sigma = k] \in \mathcal{F}_n$ et $[\tau + \sigma \leq n] \in \mathcal{F}_n$ comme réunion de parties de $\mathcal{F}_n$ donc $\tau + \sigma$ est un temps d'arrêt. On notera que le résultat est évidemment le même pour l'espace des temps $T_m = \left\{\frac{k}{2^m};\ k \in \mathbb{N}\right\}$ où $m \in \mathbb{N}$ est fixé.

2) Si $T = \mathbb{R}_+$ (ou $[0, a]$) soit τ_n (resp. σ_n) les temps d'arrêt à valeurs dans T_n tels que $\tau_n \searrow \tau$ (resp.$\sigma_n \searrow \sigma$) quand $n \to +\infty$ construits à l'exercice précédent. Pour tout $t \in T$, on a donc $[\tau + \sigma \leq t] = \cap_{n=1}^{+\infty}[\tau_n + \sigma_n \leq t] \in \mathcal{F}_t$ car pour tout n, on a $[\tau_n + \sigma_n \leq t] \in \mathcal{F}_t$. D'où le résultat.

Exercice 5 : 1) Il est clair que $Z_n \in L^1$. En prenant l'espérance conditionnelle des deux membres de l'égalité $Z_{n+1} = Z_n + Y_{n+1}(X_{n+1} - X_n)$, on obtient $\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = Z_n$ car $\mathbb{E}(Z_n|\mathcal{F}_n) = Z_n$ et comme Y_{n+1} est $\mathcal{F}_n$ mesurable et bornée $\mathbb{E}(Y_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n) = Y_{n+1}\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n) = 0$ (puisque X est une martingale). Donc Z est une martingale.

2) $Y_k(X_k - X_{k-1}) \in L^1$ par Cauchy-Schwarz donc $Z_n \in L^1$. Mais les hypothèses L^2 assurent toujours l'égalité $\mathbb{E}(Y_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n) = Y_{n+1}\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n)$ et la méthode de 1) permet encore de conclure.

Exercice 6 : 1) Soit B un borélien de $\mathbb{R}$. L'événement $[Y_n \in B]$ vaut respectivement $\emptyset$, Ω, $[\tau \geq n]$ ou $[\tau < n]$ si $0, 1 \notin B$, $0, 1 \in B$, $1 \in B$ et $0 \notin B$, ou $1 \notin B$ et $0 \in B$. Dans tous les cas on a $[Y_n \in B] \in \mathcal{F}_{n-1}$ ce qui montre que Y_n est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable.

2) On a clairement $X_{\tau\wedge n} = X_n$ si $Y_n = 1$ et $X_{\tau\wedge n} = X_\tau$ si $Y_n = 0$. Mais en remarquant que si $Y_n = 1$, on a aussi $Y_k = 1$ pour $k \leq n$, ceci implique que $X_0 + Y_1(X_1 - X_0) + \cdots + Y_n(X_n - X_0) = X_n$ si $Y_n = 1$.

De même lorsque $Y_n(\omega) = 0$, la somme précédente vaut $X_{\tau(\omega)}$. D'où la formule donnant $X_{\tau\wedge n}$. Il suffit alors d'appliquer le résultat de l'exercice 5 pour en déduire que $(X_{\tau\wedge n})_n$ est une martingale.

Exercice 7 : 1) comme $\mathbb{P}(\tau = +\infty) = 0$ par hypothèse, on a $1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{[\tau=k]}$ p.s., donc $X_\tau = \sum_{k=1}^{+\infty} X_\tau \mathbf{1}_{[\tau=k]}$ p.s. et la première formule s'obtient en prenant l'espérance des deux membres puis en intervertissant $\mathbb{E}$ et $\sum$ ce qui, compte tenu du fait que les sommes partielles de la série sont dominées par la v.a. intégrable $|X_\tau|$ est justifié par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Le reste de la série convergente précédente tend donc vers zéro, ce qui se traduit par $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_\tau \mathbf{1}_{[\tau>n]}) = 0$.

2) On a $X_\tau = X_{\tau\wedge n} + (X_\tau - X_n)\mathbf{1}_{[\tau>n]}$ car puisque les deux événements $[\tau \leq n]$ et $[\tau > n]$ forment une partition de Ω, on vérifie immédiatement que le second membre de l'égalité vaut $X_\tau(\omega)$ si $\omega \in [\tau \leq n]$ ou si $\omega \in [\tau > n]$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}\left((X_\tau - X_n)\mathbf{1}_{[\tau>n]}\right),$$

car comme $(X_{\tau\wedge n})_n$ est une martingale, son espérance est constante et donc $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_{\tau\wedge n})$. Mais quand $n \to +\infty$, $\mathbb{E}\left((X_\tau - X_n)\mathbf{1}_{[\tau>n]}\right) \to 0$ par l'hypothèse et le résultat de 1). D'où $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_1)$.

Exercice 8 : 1) τ est le temps d'entrée du processus (à temps discret) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'ensemble $\{-a, a\}$. D'après le cours c'est donc un temps d'arrêt pour la filtration naturelle de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais aussi pour la filtration de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Si maintenant on voit la suite $(Z_i)_{i\geq 1}$ comme modélisant un jeu de pile ou face symétrique (avec 1 :=pile et -1 :=face), $\tau > 2an$ signifie qu'au cours des $2an$ premiers lancers, on n'a jamais atteint un total égal à a ou $-a$. Si l'on considère ces $2an$ lancers comme n séries de $2a$ lancers, ceci implique que parmi ces n séries, aucune n'est composée que de piles. Si on désigne cet événement par A et comme la probabilité qu'une série de $2a$ lancers ne contienne que des piles est égale à $\frac{1}{2^{2a}}$, par l'indépendance des lancers, on a donc

$$\mathbb{P}(\tau > 2an) \leq \mathbb{P}(A) = \left(1 - \frac{1}{2^{2a}}\right)^n$$

Mais pour tout entier $n > 0$, on a $[\tau = +\infty] \subset [\tau > 2an]$, d'où $0 \leq \mathbb{P}(\tau = +\infty) \leq \mathbb{P}(\tau > 2an) \to 0 \quad$ (si $n \to +\infty$). Donc $\mathbb{P}(\tau = +\infty) = 0$ ce qui équivaut à dire que $\tau < +\infty$ p.s.

Ecrivons alors $\mathbb{E}(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} m\mathbb{P}(\tau = m)$ et comme tout entier m s'écrit de manière unique $m = 2an + k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k < 2a$, en sommant par paquets de longueur $2a$ la série précédente, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2a}(2an+k)\mathbb{P}(\tau = 2an+k) \\ \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2a} 2a(n+1)\mathbb{P}(\tau > 2an) \\ \leq 4a^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mathbb{P}(\tau > 2an) \\ \leq 4a^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(1-\frac{1}{2^{2a}}\right)^n < +\infty.\end{aligned}$$

2) Le processus défini par $X_n = S_n^2 - n$ est une martingale. Si on peut utiliser le résultat de l'exercice 7 et puisque $S_\tau^2 = a^2$, on obtiendra aussitôt ce qui est demandé car $a^2 - \mathbb{E}(\tau) = \mathbb{E}(Z_1^2 - 1) = 0$. La première condition $X_\tau \in L^1$ est bien satisfaite car $\mathbb{E}(|X_\tau|) \leq \mathbb{E}(S_\tau^2) + \mathbb{E}(\tau) = a^2 + \mathbb{E}(\tau) < +\infty$. Pour vérifier de plus que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left((S_n^2 - n)\mathbf{1}_{[\tau>n]}\right) = 0,$$

il suffit de constater que puisque $S_n^2 \leq a^2$ sur $[\tau > n]$, on a $\mathbb{E}\left(S_n^2\mathbf{1}_{[\tau>n]}\right) \leq a^2\mathbb{P}(\tau > n) \to 0$ et que $\mathbb{E}\left(n\mathbf{1}_{[\tau>n]}\right) = n\mathbb{P}(\tau > n) \to 0$ d'après 1). D'où le résultat.

6.2 chapitre 2

Exercice 1 : 1) Les variables aléatoires $S_t^{(n)}$ et $S_t^{(m)}$ $(n \neq m)$ sont orthogonales dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ car les variables $\mathcal{N}_{k,n}$ et $\mathcal{N}_{k',m}$ le sont. D'autre part on a $\mathbb{E}\left((S_t^{(n)})^2\right) = \sum_{k=0}^{2^n-1}\mathbb{E}(\mathcal{N}_{k,n}^2)s_{k,n}^2(t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} s_{k,n}^2(t)$ $\leq 2^{-n}$ car les supports des $s_{k,n}$ sont disjoints. Ainsi pour $p < q$, le théorème de Pythagore implique

$$\mathbb{E}\left((\sum_{n=p}^{q} S_t^{(n)})^2\right) = \sum_{n=p}^{q} \mathbb{E}\left((S_t^{(n)})^2\right) \leq 2^{-p} + \cdots + 2^{-q} \leq 2^{-p+1} \to 0$$

si $p \to +\infty$. Les sommes partielles de la série donnant B_t forment une suite de Cauchy dans L^2 donc la série converge dans L^2. De plus les sommes partielles étant des variables gaussiennes, leur limite dans L^2, B_t, est aussi une variable gaussienne. On montre de même que toute combinaison linéaire $\alpha_1 B_{t_1} + \cdots + \alpha_k B_{t_k}$ est une variable gaussienne donc $(B_t)_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien.
Soient $0 \leq t \leq t+\delta \leq 1$. Dans le produit des séries donnant B_t et $B_{t+\delta}$, l'espérance des termes croisés est nulle car les variables en présence sont indépendantes et centrées. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t B_{t+\delta}) =& t(t+\delta)\mathbb{E}(\mathcal{N}_0^2) + s(t)s(t+\delta)\mathbb{E}(\mathcal{N}_1^2) + \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(S_t^{(n)} S_{t+\delta}^{(n)}) \\ =& \, t(t+\delta) + s(t)s(t+\delta) + \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{2^n-1} s_{k,n}(t)s_{k,n}(t+\delta)\right)\end{aligned}$$

Mais les $s_{k,n}(t) =< \mathbf{1}_{[0,t]}, h_{k,n} >$ (resp. $s(t)$, resp. t) sont les coefficients de Fourier de la fonction $\mathbf{1}_{[0,t]}$ relativement à la base hilbertienne des fonctions de Haar de $L^2([0,1])$. La formule de Bessel-Parseval, montre alors qu'on a $\mathbb{E}(B_t B_{t+\delta}) =< \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,t+\delta]} >= t = \min(t, t+\delta)$. Donc le processus gaussien B est un mouvement brownien.

2) Comme les supports des $s_{k,n}$ ($k = 0, \ldots, 2^n - 1$) sont disjoints, on a $||S^{(n)}(\omega)||_\infty = \max_{0\leq k\leq 2^n-1} \sup_{t\in[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[} |\mathcal{N}_{k,n}(\omega)s_{k,n}(t)|$ $= 2^{-(n/2)-1} \max_{0\leq k\leq 2^n-1} |\mathcal{N}_{k,n}(\omega)|$.

3) $\mathbb{P}(\max_k |\mathcal{N}_{k,n}| > \sqrt{2n}) = 1 - \prod_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{P}(|\mathcal{N}_{k,n}| \leq \sqrt{2n}) =$ $1 - \left(1 - 2\int_{\sqrt{2n}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt\right)^{2^n} \leq 2^{n+1} \int_{\sqrt{2n}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \leq \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2n}} \frac{e^{-(\sqrt{2n})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} =$ $\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{2}{e}\right)^n$.

4) La série de terme général $\mathbb{P}(||S^{(n)}||_\infty > \sqrt{2n}2^{-(n/2)-1})$ majoré par $\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{2}{e}\right)^n$ est donc convergente et d'après Borel-Cantelli, pour presque tout ω, on a $||S^{(n)}(\omega)||_\infty \leq \sqrt{2n}2^{-(n/2)-1}$ pour tout n assez grand. Ceci

montre que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} S_t^{(n)}(\omega)$ converge uniformément donc est une fonction continue de t. Ainsi pour presque tout ω, $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.

Exercice 2 : 1) $Kf(s) = \int_0^s tf(t)dt + s\int_s^1 f(t)dt$ est dérivable presque partout et $(Kf)'(s) = \int_s^1 f(t)dt$ p.p. Si $Kf = 0$, $\int_s^1 f(t)dt = 0$ p.p. donc $f = 0$ p.p.

2) $K\phi$ est une fonction continue, or $K\phi = \lambda\phi$ ($\lambda \neq 0$) implique ϕ continue donc $K\phi$ est dérivable en tout point, on peut encore dériver et $(K\phi)''(s) = -\phi(s) = \lambda\phi''(s)$. D'où $\phi'' + \frac{1}{\lambda}\phi = 0$ (*) et il est clair que $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) = 1$ (C.I). Inversement si ϕ vérifie cette équation différentielle avec conditions aux limites (C.I), il est facile de voir (en remontant les calculs) que $K\phi = \lambda\phi$.

3) L'équation caractéristique de (*) est $r^2 + \frac{1}{\lambda} = 0$. Si $\lambda < 0$, on voit facilement que la seule solution de (*) vérifiant (C.I) est $\phi \equiv 0$. Si $\lambda > 0$, on a $r_1 = i\sqrt{1/\lambda}$, $r_2 = -i\sqrt{1/\lambda}$, $\phi(t) = C_1e^{it\sqrt{1/\lambda}} + C_2e^{-it\sqrt{1/\lambda}}$. La condition $\phi(0) = 0$ implique $C_2 = -C_1$ et
$\phi'(1) = 0$ exige $2iC_1\sqrt{1/\lambda}\cos(\sqrt{1/\lambda}) = 0$. Les seules fonctions $\phi \neq 0$, sont obtenues pour $\sqrt{1/\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$. D'où le résultat.

4) Comme dans l'exercice 1, on applique le critère de Cauchy aux sommes partielles de la série définissant B_t ce qui implique

$$\mathbb{E}\left(\Big(\sum_p^q \sqrt{\lambda_k}\mathcal{N}_k\phi_k(t)\Big)^2\right) = \sum_p^q \lambda_k\phi_k^2(t) \leq 2\sum_p^q \lambda_k \to 0 \ (p, q \to \infty).$$

Donc la série donnant B_t converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Comme dans l'exercice 1, on montre facilement que B est un processus gaussien.

5) Pour $t, s \in [0,1]$, $\mathbb{E}(B_sB_t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k\phi_k(s)\phi_k(t) = k(s,t)$, la dernière égalité d'après le théorème de Mercer (voir [17] tome 1). Donc la covariance de B est celle d'un mouvement brownien. D'où le résultat.

Exercice 3 : 1) Pour presque tout ω, $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue donc $\int_0^1 B_t^2 dt$ est une variable aléatoire définie $\mathbb{P}$-p.s. En utilisant la représentation de B_t de l'exercice 2, on obtient immédiatement
$Z = \int_0^1 B_t^2 dt = \sum_{n,m} \sqrt{\lambda_n\lambda_m}\mathcal{N}_n\mathcal{N}_m \int_0^1 \phi_n(t)\phi_m(t)dt = \sum_{n\geq 0} \lambda_n\mathcal{N}_n^2$
car les ϕ_n sont orthogonales sur $[0,1]$. Si on note $Z_n = \sum_{k=0}^n \lambda_k\mathcal{N}_k^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\exp(i\xi Z_n)) = \mathbb{E}(\exp(i\xi Z))$ par le théorème de convergence dominée.
Mais $\mathbb{E}(\exp(i\xi Z_n)) = \prod_{k=0}^n \mathbb{E}(\exp(i\xi\lambda_k\mathcal{N}_k^2))$ (indépendance des $\mathcal{N}_k^2$) et

d'après l'expression bien connue de la fonction caractéristique du carré d'une loi normale, $\mathbb{E}(\exp(i\xi\lambda_k\mathcal{N}_k^2)) = (1-2i\xi\lambda_k)^{-1/2}$. D'où la formule annoncée.

3) La formule de Ciesielski ne permet pas d'obtenir ce résultat.

4) $\mathbb{E}(Z) = \int_0^1 \mathbb{E}(B_t^2)dt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$ (à l'aide du théorème de Fubini pour la première égalité). En utilisant 1) pour exprimer Z^2, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z) + \frac{1}{4} = \mathbb{E}(Z^2) &= \sum_{n,m} \lambda_n\lambda_m \mathbb{E}(\mathcal{N}_n^2\mathcal{N}_m^2)\\ &= \sum_{n\neq m} \lambda_n\lambda_m + \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2\mathbb{E}(\mathcal{N}_n^4)\\ &= \sum_{n\neq m} \lambda_n\lambda_m + 3\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n^2\\ &= (\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n)^2 + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n^2 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

car il est bien connu que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. Donc $\mathrm{Var}(Z) = \frac{1}{12}$.

Exercice 4 : 1) Il est clair que $\left[n^4|B_{1/n^4}| > n\right] \subset A_n$ donc, puisque n^4B_{1/n^4} est de loi $\mathcal{N}(0,n^4)$, $\int_{[-n,n]^c}\frac{1}{\sqrt{2\pi n^4}}e^{-t^2/2n^4}dt \leq \mathbb{P}(A_n)$. Le changement de variable $t = n^2\xi$ dans l'intégrale précédente montre alors que $\mathbb{P}(A_n)$ est minorée par $\int_{[-1/n,1/n]^c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/2}d\xi$ qui tend vers 1 si $n \to +\infty$. D'où le résultat.

2) Pour $s \geq 0$ fixé Notons $D_s^B = \{\omega \in \Omega;\ t \mapsto B_t(\omega)$ est dérivable en $t = s\}$. Or $A_n \searrow$ (i.e. $A_{n+1} \subset A_n$) donc $\mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n) = 1$. Mais $\cap_n A_n \subset (D_0^B)^c$. Ce qui implique $\mathbb{P}((D_0^B)^c) = 1$, d'où $\mathbb{P}(D_0^B) = 0$.

3) Comme $\widetilde{B} = (B_{s+t} - B_s)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien et $D_s^B = D_0^{\widetilde{B}}$, la question 3) implique aussitôt $\mathbb{P}(D_s^B) = \mathbb{P}(D_0^{\widetilde{B}}) = 0$.

4) On vient de montrer que pour tout $s \geq 0$, $\mathbb{P}$-presque sûrement, la fonction $t \mapsto B_t(\omega)$ n'est pas dérivable en $t = s$. Le presque sûrement dépend de s contrairement au presque sûrement du théorème 2.2.1 qui lui est indépendant de s.

Exercice 5 : 1) $\mathbb{E}(M_t^{(\lambda)}) = \exp(-\frac{\lambda^2}{2}t)\mathbb{E}\left(\exp(\lambda B_t)\right)$. Mais B_t est de même loi que $\sqrt{t}\mathcal{N}(0,1)$ donc $\mathbb{E}(\exp(\lambda B_t) = \exp((\lambda\sqrt{t})^2/2)$ (voir par exemple [12] t.1, p. 76). Donc $\mathbb{E}(M_t^{(\lambda)}) = 1$.

2) Si $t \geq s$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_t^{(\lambda)}|\mathcal{F}_s) &= e^{-\lambda^2 t/2+\lambda B_s}\mathbb{E}(e^{\lambda(B_t-B_s)}|\mathcal{F}_s)\\ &= e^{-\lambda^2 t/2+\lambda B_s}\mathbb{E}(e^{\lambda(B_t-B_s)})\\ &= e^{-\lambda^2 t/2+\lambda B_s}e^{\lambda^2(t-s)/2)} = M_s^{(\lambda)}\end{aligned}$$

(la première égalité car $e^{\lambda B_s}$ est une variable de L^2 qui est $\mathcal{F}_s$-mesurable et la deuxième égalité car $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$). Ce qui démontre le résultat.

3) Le processus $(M_{t\wedge\tau_a}^{(\lambda)})_{t\geq 0}$ est une martingale bornée par $e^{\lambda a}$ donc elle est uniformément intégrable. Le théorème d'arrêt de Doob appliqué à cette martingale et au temps d'arrêt τ_a : $\mathbb{E}(M_{\tau_a}^{(\lambda)}) = 1$ donne le résultat annoncé puisque $B_{\tau_a} = a$.

Exercice 6 : 1) Soient $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ des instants et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ des réels. Posons $Z_{1,\ldots,n} = \exp(i(\lambda_1(X_{t_2} - X_{t_1}) + \cdots + \lambda_{n-1}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}))$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_{1,\ldots,n}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_{1,\ldots,n}|\mathcal{F}_{t_{n-1}}))\\ &= \mathbb{E}\big(Z_{1,\ldots,n-1}\mathbb{E}(\exp(i\lambda_{n-1}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})|\mathcal{F}_{t_{n-1}})\big)\\ &= \exp(-\lambda_n^2(t_n - t_{n-1})/2)\mathbb{E}(Z_{1,\ldots,n-1}).\end{aligned}$$

Par récurrence descendante, on obtient ainsi $\mathbb{E}(Z_{1,\ldots,n}) = \prod_{k=2}^n \exp(-\lambda_{k-1}^2(t_k - t_{k-1})/2)$.

Cette fonction de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ est la fonction caractéristique d'un vecteur gaussien centrée de matrice des covariances diagonale, de diagonale $t_2 - t_1, t_3 - t_2, \ldots, t_n - t_{n-1}$, ce qui montre que les variables $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$. Le processus (X_t) est donc un processus à accroissements indépendants tel que $X_t - X_s \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, t-s)$ donc un mouvement brownien.

2) On utilise une méthode analogue à celle de la question 1) en utilisant la transformée de Laplace au lieu de la fonction caractéristique.

3) Il suffit de reprendre le calcul de la question 2 de l'exercice 5, on voit alors que l'hypothèse que $(M_t^{(\lambda)})$ est une martingale implique $\mathbb{E}(\exp\lambda(X_t-$

$X_s)|\mathcal{F}_s) = \exp(\lambda^2(t-s)/2)$ pour tous $s < t$. Le résultat de 2) permet alors de conclure.

Exercice 7 : 1) Pour des temps $t_1 < \cdots < t_n$ et des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, la variable $\alpha_1 U_{t_1} + \cdots + \alpha_n U_{t_n} = \alpha_1 B_{t_1} + \cdots + \alpha_n B_{t_n} - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) B_1$ est gaussienne car B est un processus gaussien donc U est gaussien et centré. Pour $s < t$, on a $\mathbb{E}(U_s U_t) = \mathbb{E}(B_s B_t - tB_1 B_s - sB_1 B_t + stB_{1)}^2) = s(1-t)$. Donc U est de covariance $(s,t) \mapsto \min(s,t)(1 - \max(s,t))$.

2) $(U_{1-t})_{t \in [0,1]}$ est clairement gaussien centré et pour $s < t$, puisque $1 - t < 1 - s$, on a $\mathbb{E}(U_{1-s} U_{1-t}) = (1-t)(1-(1-s)) = s(1-t)$ donc sa covariance est la même que celle de U. D'où le résultat.

3) $X = \left((t+1) U_{1/(t+1)}\right)_{t \geq 0}$ est gaussien centré car toute combinaison linéaire d'états de X s'écrit comme une combinaison linéaire d'états de U qui est gaussien centré. Pour $s < t$, on a $\mathbb{E}(X_s X_t) = (t+1)(s+1)\mathbb{E}(U_{1/(t+1)} U_{1/(s+1)}) = (t+1)(s+1)\frac{s}{1+s}(1 - \frac{t}{1+t}) = s = \min(s,t)$. Donc X a même covariance que le mouvement brownien et comme $X_0 = 0$, c'est aussi un mouvement brownien.

Exercice 8 : 1) a) Loi de $|B_t|$: Pour $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée, on a $\mathbb{E}(g(|B_t|)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(|x|) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)} dx = \int_0^{+\infty} g(x) \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-x^2/(2t)} dx$. Donc la fonction $x \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-x^2/(2t)}$ est la densité de $|B_t|$.

b) Loi de $M_t - B_t$: Pour $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée, écrivons $\mathbb{E}(g(M_t - B_t)) = \int\int_{0 \leq y, 0 \leq y-x} g(y-x) \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} (2y-x) e^{-(2y-x)^2/(2t)} dxdy (*)$ d'après l'expression de la densité du couple (B_t, M_t) donnée en (2.32). Faisons le changement de variable $u = y - x$ et $v = y$ de jacobien $\left|\frac{dudv}{dxdy}\right| = 1$ dans l'intégrale précédente. On obtient

$$(*) = \int\int_{0 \leq u, 0 \leq v} g(u) \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} (u+v) e^{-(u+v)^2/(2t)} dudv$$

$$= \int_0^\infty g(u) \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-u^2/(2t)} du,$$

ce qui montre que $M_t - B_t$ et $|B_t|$ ont même densité.

c) Loi de M_t : On a $\mathbb{E}(g(M_t)) = \int\int_{0 \leq y, 0 \leq y-x} g(y) \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} (2y-x) e^{-(2y-x)^2/(2t)} dxdy$ et le changement de variable $u = y$ et $v = y - x$ fait immédiatement apparaitre comme en b) que la densité de M_t est la même que celle de $|B_t|$.

2) a) Loi de $||B_t^{(3)}||$: Pour toute fonction g borélienne bornée, on a $\mathbb{E}(g(||B_t^{(3)}||)) = \int_{\mathbb{R}^3} g(||x||)(2\pi t)^{-3/2}e^{-||x||^2/(2t)}dx$ $(*)$ d'après l'expression de la densité de $B_t^{(3)}$ (voir 2.19). Si on fait le changement de variable en coordonnées sphériques $x = \rho\sigma$, où $\rho = ||x||$ et $\sigma = \frac{x}{||x||} \in S_2$ (la sphère unité de $\mathbb{R}^3$), on a
$(*) = \int_{S_2}\int_0^{+\infty} g(\rho)(2\pi t)^{-3/2}e^{-\rho^2/(2t)}\rho^2 d\rho d\sigma$, où $d\sigma$ est la mesure superficielle de S_2. Comme l'intégrale en $d\sigma$ vaut 4π, il en résulte aussitôt que la densité de $||B_t^{(3)}||$ est la fonction $\rho \mapsto (2\pi t^3)^{-1/2}\rho^2 e^{-\rho^2/(2t)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\rho)$.

b) Loi de $2M_t - B_t$: on procède comme en 1) pour écrire

$$\mathbb{E}(g(2M_t - B_t)) =$$
$$\int\int_{0\leq y, 0\leq y-x} g(2y-x)\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}(2y-x)e^{-(2y-x)^2/(2t)}dxdy(*).$$

Le changement de variable $u = 2y - x$ et $v = y$ de jacobien égal à 1, donne $(*) = \int\int_{0\leq v\leq u} g(u)\sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}ue^{-u^2/(2t)}dudv$ et l'intégration en v montre alors que $2M_t - B_t$ a même densité que $||B_t^{(3)}||$.

Exercice 9 : 1) Si $t = \frac{k}{n}$ ou $\frac{k+1}{n}$, la formule est claire ; si $\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}$, $X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}(S_k + (nt-k)\xi_{k+1})$ qui est exactement la fonction affine de t qui vaut $X_{k/n}^{(n)}$ en $t = k/n$ et $X_{(k+1)/n}^{(n)}$ en $t = (k+1)/n$.

2) Pour $0 \leq k \leq p$, on peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_{[nt_k]} - S_{[nt_{k-1}]}) = \sqrt{\frac{N}{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\xi_{[nt_{k-1}]+i}\right),$$

où $N = [nt_k] - [nt_{k-1}]$ et $t_{k-1} = 0$ (donc $S_{[nt_{k-1}]} = 0$) par convention si $k = 0$. Mais $N/n \to (t_k - t_{k-1})$ si $n \to +\infty$ et l'expression entre parenthèses dans le second membre de la formule précédente converge en loi vers une loi $\mathcal{N}(0,1)$ quand $n \to +\infty$ d'après le théorème limite central. Le premier membre converge donc en loi vers $\mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$. Comme ses composantes sont des variables aléatoires indépendantes, le vecteur $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(S_{[nt_1]}, S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]}, \ldots, S_{[nt_p]} - S_{[nt_{p-1}]})$ converge donc en loi vers $V = (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_p} - B_{t_{p-1}})$.

3) Mais $Z_n = (X^{(n)}_{t_1}, X^{(n)}_{t_2} - X^{(n)}_{t_1}, \ldots, X^{(n)}_{t_p} - X^{(n)}_{t_{p-1}}) = Y_n + \epsilon_n$, où ϵ_n est un vecteur aléatoire qui tend vers 0 $\mathbb{P}$-p.s. Il résulte alors du lemme classique de Slutzky que Z_n a la même limite en loi que Y_n.

4) En utilisant la fonction continue $f(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, x_1 + x_2, \ldots x_1 + \cdots x_p)$ et la conservation de la convergence en loi par transformation continue, on en déduit $f(Z_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(V)$. C'est le résultat demandé.

6.3 chapitre 3

Exercice 1 : 1) Pour alléger les notations, on écrira $\mathbb{E}^t$ pour désigner l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(.|\mathcal{F}_t)$. Pour $s < t < u$, on a $P_{s,u}(X_s, A) = \mathbb{P}(X_u \in A|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}^s(\mathbf{1}_A(X_u)) = \mathbb{E}^s(\mathbb{E}^t(\mathbf{1}_A(X_u)) = \mathbb{E}^s(P_{t,u}\mathbf{1}_A(X_t))$ (la dernière égalité d'après la condition de Markov (3.1)). Mais en notant $f = P_{t,u}\mathbf{1}_A$, on a $\mathbb{E}^s(f(X_t)) = P_{s,t}f(X_s)$ en appliquant une deuxième fois la condition de Markov 3.1. On a finalement montré $P_{s,u}(X_s, A) = \int_E P_{s,t}(X_s, dy)f(y) = \int_E P_{s,t}(X_s, dy)P_{t,u}(y, A)$.

2) On a vu que $P_{s,u}(X_s(\omega), A) = \int_E P_{s,t}(X_s(\omega), dy)P_{t,u}(y, A)$ pour $\mathbb{P}$-presque tout ω. Donc on a $P_{s,u}(x, A) = \int_E P_{s,t}(x, dy)P_{t,u}(y, A)$ pour les x de la forme $x = X_s(\omega)$ donc pour μ_{X_s}-presque tout $x \in E$.

Exercice 2 : 1) Soit f une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}^d$. Pour $s < t$, on a $\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t - X_s + X_s)|\mathcal{F}_s) = g(X_s)$ où $g(x) = \mathbb{E}\left(f(X_t - X_s + x)\right)$ d'après le lemme 3.2.1 puisque $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$ et que X_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable. Mais $X_t - X_s$ est de même loi que $X_{t-s} - X_0$ par hypothèse ; ainsi $\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = P_{t-s}f(X_s)$ où $P_u f(x) = \mathbb{E}(f(X_u - X_0 + x)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y + x)d\mu_u(y)$, avec μ_u la loi de $X_u - X_0$. Donc X est "candidat" à être un processus de Markov homogène avec $(P_t)_{t\geq 0}$ pour famille d'opérateurs de transition.
Si $u, v \geq 0$, $P_{u+v}f(x) = \mathbb{E}(f(X_{u+v} + x)) = \mathbb{E}(f(X_{u+v} - X_u + X_u - X_0 + x)$ (*). Mais les variables aléatoires $X_{u+v} - X_u$ et $X_u - X_0$ sont indépendantes et de loi respectives μ_v (car $X_{u+v} - X_u$ est de même loi que $X_v - X_0$) et μ_u donc (*)= $\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t + z + x)d\mu_v(t)d\mu_u(z) = \int_{\mathbb{R}^d} P_v f(z + x)d\mu_u(z) = P_u(P_v f)(x)$. Mais d'après Fubini cette quantité est aussi égale à $P_u(P_v f)(x)$. Donc la propriété de semi-groupe est vérifiée et X est donc un processus de Markov homogène.

2) D'après la proposition 1.1.4 et la question 1) le processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov homogène sur $\mathbb{R}$ de semi-groupe tel

que $P_tf(x) = \mathbb{E}(f(N_t + x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n)e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$ puisque N_t est de loi de Poisson de paramètre λt.

Exercice 3 : 1) On note que $P_tf(x) = \mathbb{E}\left(f(X_t + x)\right)$ où X_t est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λt. La première condition de la définition 3.3.1 est évidente. Vérifions la propriété de semi-groupe : Si $u, v \geq 0$, $P_{u+v}f(x) = \mathbb{E}(f(X_{u+v} + x))$ où X_{u+v} est une variable de Poisson de paramètre $\lambda(u+v)$. Cette variable est égale en loi à la somme de deux variables de Poisson indépendantes de paramètres λu et λv qu'on notera X_u et X_v (cette propriété d'additivité des lois de Poisson est bien connue). On a alors $P_{u+v}f(x) = \mathbb{E}(f(X_u + X_v + x))$ et par la même méthode qu'à la question 1) de l'exercice précédent, on montre que $P_{u+v}f(x) = P_u(P_vf)(x) = P_v(P_uf)(x)$. Donc (P_t) est un semi-groupe d'opérateurs de Markov.

2) Pour $f \in C_0(\mathbb{R})$, on a
$P_tf(x) - f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(f(x+n) - f(x))e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$. En fait on notera que la somme précédente commence en réalité à $n = 1$. On a donc $||P_tf - f||_\infty \leq 2||f||_\infty \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$ quantité qui tend clairement vers 0 quand $t \to 0$. Donc le semi-groupe est de Feller.

3) Pour $f \in C_0(\mathbb{R})$, on voit que $t^{-1}(P_tf(x) - f(x)) = \lambda(f(x+1) - f(x)) + \sum_{n=2}^{+\infty}(f(x+n) - f(x))e^{-\lambda t}(\lambda)^n t^{n-1}/n! \to \lambda(f(x+1) - f(x))$ si $t \to 0$. Donc le générateur du semi-groupe de Poisson est l'opérateur L de domaine $D_L = C_0(\mathbb{R})$ donné par $Lf(x) = \lambda(f(x+1) - f(x))$.

Exercice 4 : 1) Si $s < t$ et f est une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}(f(B_t + \mu t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(B_t - B_s + \mu(t-s) + B_s + \mu s|\mathcal{F}_s) = g(B_s + \mu s)$ où $g(x) = \mathbb{E}\left(f(B_t - B_s + \mu(t-s) + x)\right)$ (Lemme 3.2.1). Notons $g(x) = P_{s,t}f(x)$, car c'est le candidat à être le noyau de transition. Comme $B_t - B_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t-s)$, on a $P_{s,t}f(x) = (2\pi(t-s))^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(u + \mu(t-s) + x) \exp(-u^2/2(t-s))dz$, et par le changement de variable $u = z - x - \mu(t-s)$ on obtient :
$P_{s,t}f(x) = (2\pi(t-s))^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(z) \exp\left(-(z-x-\mu(t-s))^2/2(t-s)\right)du.$

Exercice 5 : Soit $\mathcal{F}$ la filtration de B et $0 \leq s < t$. On notera $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}$ l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_s$. Soit $A = [0, a]$. On a $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(\mathbf{1}_A(R_t)) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\mathbf{1}_A(||B_t||)\right) = \mathbb{E}_{B_s}(\mathbf{1}_A(||B_{t-s}||))$ d'après la propriété de Markov. On a $(*)\mathbb{E}_x(\mathbf{1}_A(||B_u||)) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi u)^{d/2}} \mathbf{1}_{||y|| \leq a} \exp(-||x-y||^2/(2u))dy$.
Mais si on fait le changement de variable en coordonnées sphériques $\rho = ||y||$ et $\sigma = y/||y|| \in S_{d-1}$ dans l'intégrale précédente, en notant $d\sigma$ la

mesure superficielle de la sphère S_{d-1}, on a
$(*) = \int_{[0,a]\times S_{d-1}} \frac{1}{(2\pi u)^{d/2}} \exp(-\frac{1}{2u}(||x||^2+\rho^2-2\rho < x,\sigma >)\rho^{d-1}d\rho d\sigma =$
$\int_0^a \frac{1}{(2\pi u)^{d/2}} \exp(-\frac{1}{2u}(||x||^2+\rho^2))(\int_{S_{d-1}} e^{(\rho/u)<x,\sigma>}d\sigma)\rho^{d-1}d\rho.$
Or pour $x \in \mathbb{R}^d$, l'intégrale $\int_{S_{d-1}} e^{<x,\sigma>}d\sigma$ vaut
$(2\pi)^{d/2}||x||^{1-d/2}I_{d/2-1}(||x||)$ (on peut démontrer ce résultat en passant en coordonnées sphériques ou le déduire de la formule (25) de [54] p.347). Ceci implique :

$$(*) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,a]}(\rho)\frac{1}{u}\exp(-\frac{1}{2u}(||x||^2+\rho^2))(||x||\rho)^{-\alpha} I_\alpha((||x||\rho)/u)\rho^{2\alpha+1}d\rho$$

où on a posé $\alpha = (d/2)-1$. En résumé on a démontré que $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(\mathbf{1}_A(R_t)) = g(||B_s)||)$ où $g(x) = g(||x||) = (*)$ est la fonction précédente (avec $u = t-s$) qui ne dépend que de $||x||$. Si on considère maintenant la filtration $\widetilde{\mathcal{F}}$ naturelle du processus R (qui est une sous-filtration de $\mathcal{F}$), on en déduit immédiatement que $\mathbb{E}^{\widetilde{\mathcal{F}}_s}(\mathbf{1}_A(R_t)) = g(R_s)$; d'où le résultat demandé.

Exercice 6 : a) Détermination du semi-groupe : Utilisons la filtration $(\mathcal{F}_t)$ du mouvement brownien B et son semi-groupe (P_t). Soit $A \subset \mathbb{R}_+$ un borélien et $s < t$, on a $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A(|B_t|)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A(B_t)+\mathbf{1}_{-A}(B_t)|\mathcal{F}_s) = P_{t-s}(\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_{-A})(B_s)$, d'après la propriété de Markov de B. Mais notons que si f est une fonction paire, P_tf est aussi une fonction paire et qu'alors on a $P_tf(B_s) = P_tf(|B_s|)$ (c'est l'observation clé !).
Donc $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A(|B_t|)|\mathcal{F}_s) = P_{t-s}(\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_{-A})(|B_s|)$ et cette relation est encore vraie si on remplace la filtration $(\mathcal{F}_t)$ par la filtration naturelle de $|B| = (|B_t|)_{t\geq 0}$. Donc $|B|$ est un processus de Markov homogène. De plus
$(*)\ P_u(\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_{-A})(x) = \int_{\mathbb{R}} p_u(x,y)\mathbf{1}_A(y)dy + \int_{\mathbb{R}} p_u(x,y)\mathbf{1}_{-A}(y)dy =$
$\int_0^{+\infty} p_u(x,y)\mathbf{1}_A(y)dy + \int_{-\infty}^0 p_u(x,y)\mathbf{1}_{-A}(y)dy$ (car $A \subset \mathbb{R}_+$) et le changement de variable $y \leftrightarrow -y$ dans la deuxième intégrale montre que $(*) = \int_0^{+\infty}(p_u(x,y)+p_u(x,-y))\mathbf{1}_A(y)dy$ donc le semi-groupe $(Q_t)_{t\geq 0}$ de $|B|$ a des densités de transition $p_t(x,y)+p_t(x,-y)$ $(x,y\geq 0)$.

b) Détermination du générateur infinitésimal : Soit D l'ensemble des fonctions $f \in C_0([0,+\infty[)$ telle que $f', f'' \in C_0([0,+\infty[)$ et $f'(0) = 0$ (en $x = 0$, $f'(0)$ et $f''(0)$ sont évidemment des dérivées à droite). Une fonction $f \in D$ se prolonge en une fonction paire $\tilde{f} \in C_0(\mathbb{R})$ deux fois dérivable dont les dérivées $\tilde{f}' \in C_0(\mathbb{R})$ et $\tilde{f}'' \in C_0(\mathbb{R})$ prolongent continuement les fonctions f' et f''. En effet si on pose $\tilde{f}(x) = f(x)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) + f(-x)\mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x)$ il est facile de vérifier les assertions précédentes. Cette observation va nous permettre de nous ramener au cas du mouvement brownien. En effet pour une telle fonction f, on a $Q_t f(x) = \int_0^{+\infty}(p_t(x,y) + p_t(x,-y))f(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} p_t(x,y)\tilde{f}(y)dy = P_t\tilde{f}(x)$. Mais on sait (théorème 3.3.1) que $t^{-1}(P_t\tilde{f} - \tilde{f}) \to A\tilde{f}$ dans $C_0(\mathbb{R})$ si $t \to 0$. Donc $t^{-1}(Q_t f - f) \to Af$ dans $C_0(\mathbb{R}_+)$ si $t \to 0$, ce qui montre que $D \subset D_A$. Pour l'inclusion inverse, on a besoin de la résolvante (R_λ^Q) du semi-groupe (Q_t) mais compte tenu de l'expression des densités de transition et du théorème 3.3.3, pour $f \in C_0(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\begin{aligned} R_\lambda^Q f(x) = e^{-\sqrt{2\lambda}x} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{\sqrt{2\lambda}y} f(y)dy \\ + e^{\sqrt{2\lambda}x} \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}y} f(y)dy \\ + e^{-\sqrt{2\lambda}x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}y} f(y)dy. \end{aligned}$$

Il est facile alors de vérifier que $R_\lambda^Q f \in D$ i.e. $D_A \subset D$. D'où $D_A = D$.

Exercice 7 : 1) a) $\mathbb{P}_x(B_t \in A, \tau \leq t) = \mathbb{P}_x(-B_t \in A, \tau \leq t)$ d'après le principe de symétrie d'André car pour B ou $-B$ partant de $x > 0$, le temps d'atteinte de 0 est le même. Mais $[B_t \in (-A)] \subset [\tau \leq t]$ car $-A \subset \mathbb{R}_-$ et les trajectoires de B sont continues donc si $B_t \in (-A)$ le point 0 a été atteint avant le temps t. D'où $\mathbb{P}_x(B_t \in A, \tau \leq t) = \mathbb{P}_x(B_t \in -A)$.

b) Si on applique le résultat de 1) avec $A = [0, +\infty[$, on voit que $\mathbb{P}_x(\tau \leq t) = \mathbb{P}_x(\tau \leq t, B_t \geq 0) + \mathbb{P}_x(\tau \leq t, B_t \leq 0) = 2\mathbb{P}_x(B_t \leq 0)$ Q.E.D.

2) Nous noterons $\mathbb{E}$ (au lieu de $\mathbb{E}_{x_0}$) l'espérance correspondant à la probabilité $\mathbb{P}_{x_0}$ sur l'espace Ω des trajectoires et $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}$ pour l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_s$.

a) Détermination du semi-groupe : Comme dans l'exercice 6, commençons par travailler avec la filtration de B. Pour $0 \leq s < t$ et $A \subset \mathbb{R}_+$ un borélien, on a $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(\mathbf{1}_A(X_t)) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(\mathbf{1}_A(X_t)\mathbf{1}_{[t<\tau]}) + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(\mathbf{1}_A(X_t)\mathbf{1}_{[\tau \leq t]}) =$

$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(\mathbf{1}_A(B_t)\mathbf{1}_{[t<\tau]}) + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(\mathbf{1}_A(B_\tau)\mathbf{1}_{[\tau\leq t]}) = (*) + (**)$.
Mais en écrivant $\mathbf{1}_{[t<\tau]} = 1 - \mathbf{1}_{[\tau\leq t]}$, on a $(*) =$
$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(\mathbf{1}_{[B_t\in A]}) - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(\mathbf{1}_{[B_t\in A,\tau\leq t]}) = \mathbb{E}_{B_s}(\mathbf{1}_{[B_{t-s}\in A]}) - \mathbb{E}_{B_s}(\mathbf{1}_{[B_{t-s}\in A,\tau\leq t-s]})$
d'après la propriété de Markov. Mais
$\mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{[B_u\in A]}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_u(x,y)\mathbf{1}_A(y)dy = \int_0^{+\infty} p_u(x,y)\mathbf{1}_A(y)dy$ (car $A \subset \mathbb{R}_+$) et d'après la question 1),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{[B_u\in A,\tau\leq u]}) &= \mathbb{P}_x(B_u \in -A)\\ &= \int_{-\infty}^{0} p_u(x,y)\mathbf{1}_{-A}(y)dy\\ &= \int_0^{\infty} p_u(x,-y)\mathbf{1}_A(y)dy\end{aligned}$$

d'où

$$(*) = \int_0^{\infty} (p_{t-s}(B_s,y) - p_{t-s}(B_s,-y))\mathbf{1}_A(y)dy.$$

Maintenant calculons
$(**) = \mathbf{1}_A(0)\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(\mathbf{1}_{[\tau\leq t]}) = \mathbf{1}_A(0)\mathbb{E}_{B_s}(\mathbf{1}_{[\tau\leq t-s]}) =$
$\mathbf{1}_A(0)\mathbb{P}_{B_s}(\tau \leq t-s)$ par la propriété de Markov. Mais $\mathbb{P}_x(\tau \leq u) = 2\mathbb{P}_x(B_u < 0)$ d'après la question 1).
D'où $(**) = 2\mathbf{1}_A(0)\int_0^{+\infty} p_{t-s}(B_s,-y)dy$.
On a donc prouvé que $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(\mathbf{1}_A(X_t)) = \phi(B_s)$ où ϕ est la fonction donnée par :
$\phi(x) = \int_0^{+\infty}(p_t(x,y) - p_t(x,-y))\mathbf{1}_A(y)dy + 2\mathbf{1}_A(0)\int_0^{+\infty} p_t(x,-y)dy$.
Considérons maintenant la filtration naturelle $(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ du processus X. On a $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s\wedge\tau}}(\mathbf{1}_A(X_t)) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s\wedge\tau}}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(\mathbf{1}_A(X_t)) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s\wedge\tau}}(\phi(B_s))$. Finalement pour montrer que X est de Markov avec les noyaux de transitions demandés, il suffit de montrer que :
$(***) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s\wedge\tau}}(\phi(B_s)) = \phi(B_{s\wedge\tau}) = \phi(X_s)$.
Pour cela écrivons :
$(***) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s\wedge\tau}}(\phi(B_s)\mathbf{1}_{[\tau\leq s]}) + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s\wedge\tau}}(\phi(B_s)\mathbf{1}_{[\tau>s]})$. Mais il est facile de voir que $[\tau \leq s] \in \mathcal{F}_{s\wedge\tau}$ donc $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s\wedge\tau}}(\phi(B_s)\mathbf{1}_{[\tau\leq s]}) =$
$\mathbf{1}_{[\tau\leq s]}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s\wedge\tau}}(\phi(B_s))$ et $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s\wedge\tau}}(\phi(B_s)\mathbf{1}_{[\tau>s]}) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s\wedge\tau}}(\phi(X_s)\mathbf{1}_{[\tau>s]})$
$= \phi(X_s)\mathbf{1}_{[\tau>s]}$. On a donc obtenu
$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s\wedge\tau}}(\phi(B_s)) = \mathbf{1}_{[\tau\leq s]}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{s\wedge\tau}}(\phi(B_s)) + \phi(X_s)\mathbf{1}_{[\tau>s]}$

et le résultat cherché en découle aussitôt.

b) détermination du générateur infinitésimal : Commençons par calculer la résolvante R_λ du processus X. Pour une fonction $f \in C_0([0,+\infty[)$, en utilisant la résolvante connue du mouvement brownien, on obtient
$R_\lambda f(x) = \int_0^{+\infty} P_t f(x) e^{-\lambda t} dt =$
$= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{+\infty} (e^{-\sqrt{2\lambda}|x-y|} - e^{-\sqrt{2\lambda}(x+y)}) f(y) dy$
$\qquad + 2f(0) \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}(x+y)} dy$
$= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \big(e^{-x\sqrt{2\lambda}} \int_0^x e^{y\sqrt{2\lambda}} f(y) dy + e^{x\sqrt{2\lambda}} \int_x^{+\infty} e^{-y\sqrt{2\lambda}} f(y) dy$
$\qquad - e^{-x\sqrt{2\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{-y\sqrt{2\lambda}} f(y) dy \big) + \frac{f(0)}{\lambda} e^{-x\sqrt{2\lambda}}.$
Ainsi
$\frac{d}{dx} R_\lambda f(x) = -e^{-x\sqrt{2\lambda}} \int_0^x e^{y\sqrt{2\lambda}} f(y) dy + e^{x\sqrt{2\lambda}} \int_x^{+\infty} e^{-y\sqrt{2\lambda}} f(y) dy$
$\qquad + e^{-x\sqrt{2\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{-y\sqrt{2\lambda}} f(y) dy - \sqrt{\frac{2}{\lambda}} f(0) e^{-x\sqrt{2\lambda}}.$
D'où $\frac{d^2}{dx^2} R_\lambda f(x) =$
$\sqrt{2\lambda} e^{-x\sqrt{2\lambda}} \int_0^x e^{y\sqrt{2\lambda}} f(y) dy + \sqrt{2\lambda} e^{x\sqrt{2\lambda}} \int_x^{+\infty} e^{-y\sqrt{2\lambda}} f(y) dy$
$\qquad - 2f(x) - \sqrt{2\lambda} e^{-x\sqrt{2\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{-y\sqrt{2\lambda}} f(y) dy + 2f(0) e^{-x\sqrt{2\lambda}}.$
On constate alors que $\frac{d^2}{dx^2} R_\lambda f(0) = 0$ et que $R_\lambda f$, $(R_\lambda f)'$ et $(R_\lambda f)''$ sont des fonctions de $C_0(\mathbb{R}_+)$. Si A désigne le générateur infinitésimal de X et D_A son domaine, on a donc
$D_A \subset D = \{f \in C_0([0,+\infty[); f', f'' \in C_0([0,+\infty[),\ f''(0) = 0\}$.
Réciproquement, soit $f \in D$ et prolongeons f en une fonction f_1 impaire sur $\mathbb{R}$ i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_1(x) = f(x) \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) - f(-x) \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x)$. On a alors
$\int_0^{+\infty} (p_t(x,y) - p_t(x,-y)) f(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} p_t(x,y) f_1(y) dy.$
De plus on remarque qu'on a
$2f(0) \int_0^{+\infty} p_t(x,-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} p_t(x,y) 2f(0) \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(y) dy$. Donc
$Q_t f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_t(x,y)(f_1(y) + 2f(0)\mathbf{1}_{]-\infty,0[}(y)) dy = P_t g(x)$,
où (P_t) est le semi-groupe du mouvement brownien et g est la fonction définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ par
$g(y) = f_1(y) + 2f(0)\mathbf{1}_{]-\infty,0[}(y)$.
Etant donné que $f''(0) = 0$, on constate immédiatement que la fonction g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, qu'elle coïncide avec f sur $[0,+\infty[$ et que $\lim_{y \to -\infty} g(y) = 2f(0)$ donc g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x \geq 0$, on a $\frac{1}{t}(P_t g(x) - g(x)) - \frac{1}{2} g''(x) = \frac{1}{t}(Q_t f(x) - f(x)) - \frac{1}{2} f''(x)$.

Mais si on reprend la méthode utilisée dans la deuxième partie du théorème 3.3.1 (en particulier entre (3.23) et (3.25)), on montre de même que $\frac{1}{t}(P_t g - g) - \frac{1}{2}g'' \to 0$ uniformément sur $\mathbb{R}$ si $t \to 0$. Il en résulte que $\frac{1}{t}(Q_t f(x) - f(x)) - \frac{1}{2}f''(x) \to 0$ uniformément en $x \geq 0$, si $t \to 0$. ce qui prouve que si $f \in D$, alors $f \in D_A$ et $Af(x) = \frac{1}{2}f''(x)$. D'où l'égalité $D = D_A$ et le résultat annoncé.

6.4 chapitre 4

Exercice 1 : 1) Si X est élémentaire,
$I = \int_a^b X_t dB_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ avec $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Si on pose $t_i = c + t'_i$, on a $a - c \leq t'_i \leq b - c$ et $I = \sum_i X_{c+t'_i}\left[(B_{c+t'_{i+1}} - B_c) - (B_{c+t'_i} - B_c)\right] = \sum_i X_{c+t'_i}(B^{(1)}_{t'_{i+1}} - B^{(1)}_{t'_i}) = \int_{a-c}^{b-c} X_{c+t} dB^{(1)}_t$, où $B^{(1)} = (B_{c+t} - B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien d'après le théorème 2.1.6. Si $X \in \Lambda^2([0,T])$, soit $X^{(n)}$ une suite de processus élémentaires tels que $X^{(n)} \to X$ dans Λ^2 ; alors en passant à la limite en probabilité quand $n \to +\infty$ dans l'égalité $\int_a^b X^{(n)}_t dB_t = \int_a^b X^{(n)}_{c+t} dB^{(1)}_t$, on obtient le résultat demandé.

2) Si X est élémentaire, $I = \int_a^b X_t dB_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ avec $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. En posant $t_i = t'_i/c$ avec $ac \leq t'_i \leq bc$, on a $I = \sum_i X_{t'_i/c} c^{-1/2}(B^{(c)}_{t'_{i+1}} - B^{(c)}_{t'_i}) = \int_{ac}^{bc} X_{t/c} dB^{(c)}_t$, où $B^{(c)} = (\sqrt{c}B_{t/c})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien. Pour le cas général on procède comme à la question 1).

Exercice 2 : Pour alléger l'écriture de l'espérance conditionnelle, on écrira $\mathbb{E}^t = \mathbb{E}(.|\mathcal{F}_t)$. Si $t \in T$ et $h > 0$, on peut écrire $\mathbb{E}^t(M_{t+h}) = M_t + A_1 + A_2$ où $A_1 =$
$\mathbb{E}^t\big(2\int_0^t X_s dB_s \int_t^{t+h} X_s dB_s\big)$ et $A_2 = \mathbb{E}^t\big((\int_t^{t+h} X_s dB_s)^2 - \int_t^{t+h} X_s^2 ds\big)$.
On va montrer que $A_1 = A_2 = 0$:

a) Comme la variable aléatoire $\int_0^t X_s dB_s$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable et dans L^2, on a $A_1 = 2\int_0^t X_s dB_s \ \mathbb{E}^t(\int_t^{t+h} X_s dB_s)$ et le terme en espérance conditionnelle est nul car $\int_0^t X_s dB_s$ est une martingale. Donc $A_1 = 0$.

b) Il est plus délicat de montrer que $A_2 = 0$. Commençons par le cas où X est un processus élémentaire. Alors
$\mathbb{E}^t((\int_t^{t+h} X_s dB_s)^2) = \mathbb{E}^t((\sum_i X_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))^2) =$

$\sum_{i,j} \mathbb{E}^t(X_{t_i}X_{t_j}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}))$. Mais si $t_i \neq t_j$, par exemple si $t_i < t_j$, $\mathbb{E}^t(X_{t_i}X_{t_j}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})) = \mathbb{E}^t\mathbb{E}^{t_j}(X_{t_i}X_{t_j}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})) = \mathbb{E}^t[X_{t_i}X_{t_j}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\mathbb{E}^{t_j}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] = 0$ car $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t_j}$ et centrée. Si $t_i = t_j$, $\mathbb{E}^t(X_{t_i}^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2) = \mathbb{E}^t[\mathbb{E}^{t_i}(X_{t_i}^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2)] = \mathbb{E}^t[X_{t_i}^2\mathbb{E}^{t_i}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2)] = \mathbb{E}^t[X_{t_i}^2(t_{i+1} - t_i)]$. Il en résulte que
$\mathbb{E}^t((\int_t^{t+h} X_s dB_s)^2) = \mathbb{E}^t[\sum_i X_{t_i}^2(t_{i+1} - t_i)] = \mathbb{E}^t(\int_t^{t+h} X_s^2 ds)$. Donc $A_1 = 0$. Dans le cas général $X \in M^2$, soit $X^{(n)}$ une suite de processus élémentaires tels que $X^{(n)}$ converge vers X dans $M^2([0,T])$. Alors la suite $Y_n = (\int_t^{t+h} X_s^{(n)} dB_s)^2 - \int_t^{t+h}(X_s^{(n)})^2 ds$ converge vers $Y = (\int_t^{t+h} X_s dB_s)^2 - \int_t^{t+h} X_s^2 ds$ dans L^1 et la continuité de l'espérance conditionnelle implique que $\mathbb{E}^t(Y) = \lim_n \mathbb{E}^t(Y_n) = 0$ i.e. $A_2 = 0$.

Exercice 3 : 1) i) Si $f = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}$ est en escalier sur $[a,b]$ (avec c_i des constantes et (t_i) une partition de $[a,b]$), $\int_a^b f(t)dt = \sum_i c_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ est une variable aléatoire normale et centrée comme somme de variables normales indépendantes et centrées.
On a aussi $\mathrm{Var}(\mathcal{J}_{a,b}) = \sum_i c_i^2 \mathrm{Var}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_i c_i^2(t_{i+1} - t_i) = \int_a^b f^2(t)dt$.

ii) Soit $f \in L^2([0,T])$. Il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier telles que $f_n \to f$ dans $L^2([0,T])$ si $n \to +\infty$. Mais alors on a aussi $f_n \to f$ dans M^2 en tant que processus donc $\int_a^b f_n(t)dB_t \to \mathcal{J}_{a,b} = \int_a^b f(t)dB_t$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puisque l'intégrale stochastique est une isométrie. Donc $\mathcal{J}_{a,b}$ est une variable aléatoire normale centrée comme limite dans L^2 de variables normales centrées.
De plus $\mathrm{Var}(\mathcal{J}_{a,b}) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Var}(\int_a^b f_n(t)dB_t) = \int_a^b f^2(t)dt$.

2) Soit $(t_i)_{i\in I}$ une subdivision finie de $[0,T]$ contenant les points a, b, c, d et $f = \sum_i c_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}$ une fonction en escalier.
Alors $\mathcal{J}_{a,b} = \sum_{i\in I_1} c_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ et $\mathcal{J}_{c,d} = \sum_{j\in I_2} c_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$ (où $I_1 \cap I_2$ est vide ou réduit à un point) sont des variables normales centrées et indépendantes. Il en résulte que toute combinaison linéaire $\alpha\mathcal{J}_{a,b} + \beta\mathcal{J}_{c,d}$ est une variable normale donc le couple $(\mathcal{J}_{a,b}, \mathcal{J}_{c,d})$ est gaussien. Si f est quelconque dans $L^2([0,T])$, soit (f_n) une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telle que $f_n \to f$ dans L^2 si $n \to +\infty$. Comme à la question 1), on montre que pour tout choix des constantes réelles α, β, on a $\alpha\mathcal{J}_{a,b}^{(n)} + \beta\mathcal{J}_{c,d}^{(n)} \to \alpha\mathcal{J}_{a,b} + \beta\mathcal{J}_{c,d}$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (l'indice (n) corres-

pondant à la fonction f_n). La variable $\alpha\mathcal{J}_{a,b}+\beta\mathcal{J}_{c,d}$ est donc normale donc le couple $(\mathcal{J}_{a,b},\mathcal{J}_{c,d})$ est gaussien. D'autre part, on a $\mathrm{cov}(\mathcal{J}_{a,b},\mathcal{J}_{c,d}) = \lim_n \mathrm{cov}(\mathcal{J}_{a,b}^{(n)},\mathcal{J}_{c,d}^{(n)}) = 0$. Les variables $\mathcal{J}_{a,b},\mathcal{J}_{c,d}$ étant non-corrélées, elles sont indépendantes puisque le couple $(\mathcal{J}_{a,b},\mathcal{J}_{c,d})$ est gaussien.

3) Par la même méthode qu'à la question 2), on montre que pour $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq T$, le k-uplet $(\mathcal{J}_{0,t_1},\mathcal{J}_{t_1,t_2},\ldots,\mathcal{J}_{t_{k-1},t_k})$ est gaussien et ses composantes sont indépendantes. Pour tout choix de scalaires $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, on a $\alpha_1\mathcal{J}_{t_1}+\cdots+\alpha_k\mathcal{J}_{t_k} = (\alpha_1+\cdots+\alpha_k)\mathcal{J}_{0,t_1}+(\alpha_2+\cdots+\alpha_k)\mathcal{J}_{t_1,t_2}+\cdots+\alpha_k\mathcal{J}_{t_{k-1},t_k}$ qui est donc une variable normale centrée donc $\mathcal{J}=(\mathcal{J}_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus gaussien centré.
Calculons sa fonction covariance Γ : si $s<t$, $\Gamma(s,t)=\mathbb{E}(\mathcal{J}_s\mathcal{J}_t) = \mathbb{E}(\mathcal{J}_{0,s}(\mathcal{J}_{0,s}+\mathcal{J}_{s,t})) = \mathbb{E}(\mathcal{J}_{0,s}^2) = \int_0^s f^2(u)du$ (en effet $\mathbb{E}(\mathcal{J}_{0,s}\mathcal{J}_{s,t})=0$ car les variables $\mathcal{J}_{0,s}$ et $\mathcal{J}_{s,t}$ sont indépendantes et centrées). Pour tous s et t on a donc $\Gamma(s,t)=\int_0^{s\wedge t} f^2(u)du$, où $s\wedge t=\min(s,t)$.

4) Si $g(t)=\int_0^t f^2(s)ds$, il est clair que le processus $\widetilde{B}=(B_{g(t)})_{t\in[0,T]}$ est gaussien centré. Pour $s<t$, on a $\mathbb{E}(B_{g(s)}B_{g(t)}) = \min(g(s),g(t)) = g(s)$. Donc $\mathcal{J}$ et $\widetilde{B}$ ont même fonction de covariance donc mêmes lois de dimension finie. Ce sont donc des processus équivalents.

Exercice 4 : L'exponentielle d'une variable aléatoire normale étant intégrable, on a clairement $M_t\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. On note encore $\mathbb{E}^t$ pour l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$. Pour $t\in[0,T]$ et $h>0$, on a $\mathbb{E}^t(M_{t+h}) = M_t\exp(-\frac{1}{2}\int_t^{t+h} f^2(s)ds)\mathbb{E}^t(\exp(\int_t^{t+h} f(s)dB_s))$.
Mais comme $\int_t^{t+h} f(s)dB_s$ est une variable aléatoire indépendante de $\mathcal{F}_t$ par construction puisque f est une fonction déterministe (voir l'exercice précédent), on a $\mathbb{E}^t(\exp(\int_t^{t+h} f(s)dB_s)) = \mathbb{E}(\exp(\int_t^{t+h} f(s)dB_s))$. Or comme $N=\int_t^{t+h} f(s)dB_s$ est une variable normale centrée (exercice 3), on sait que $\mathbb{E}(N)=\exp(\frac{1}{2}\mathrm{Var}(N)) = \exp(\frac{1}{2}\int_t^{t+h} f^2(s)ds$ (d'après l'exercice 3). Donc $\mathbb{E}^t(M_{t+h})=M_t$ et M est une martingale.

Exercice 5 : 1) On a $\int_0^t f^2(s)ds = \int_0^t \Phi'(s)ds = \Phi(s) < +\infty$ donc $f\in L^2$ et on peut appliquer les résultats de l'exercice 3, le processus $(\int_0^t \sqrt{\Phi'(s)}dB_s)_t$ est donc gaussien de fonction de covariance $(s,t)\mapsto \Phi(s\wedge t)$.

2) B^Φ est clairement gaussien centré et d'après la question 1)
$\mathbb{E}(B_s^\Phi B_t^\Phi) = \Phi(\Phi^{-1}(s)\wedge\Phi^{-1}(t)) = s\wedge t$. B^Φ est donc un mouvement brownien pour sa filtration mais de plus pour tout t, B_t^Φ est $\mathcal{F}_{\Phi(t)}$-mesurable

et $(\mathcal{F}_{\Phi(t)})$ est une filtration car Φ^{-1} est une fonction strictement croissante. Le procesus B^{Φ} est donc également un mouvement brownien pour cette filtration.

Exercice 6 : 1) On a :
$\mathbb{E}((\int_0^t g(u)dB_u - \int_0^s g(u)dB_u)^2) = \mathbb{E}((\int_s^t g(u)dB_u)^2) = \int_s^t g^2(u)du \to 0$ si $n \to +\infty$ car $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Le critère de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ montre alors que $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t g(s)dB_s := \int_0^{+\infty} g(s)dB_s$ existe dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Mais comme on a aussi convergence des moments d'ordre 1 et 2, on en déduit facilement que $\mathbb{E}(\int_0^{+\infty} g(s)dB_s = 0$ et $\mathbb{E}((\int_0^{+\infty} g(s)dB_s)^2)$ $= \int_0^{+\infty} g^2(s)ds$.

2) La variable aléatoire Y_g est gaussienne comme limite dans L^2 de variables gaussiennes et l'application $g \mapsto Y_g$ de $L^2(\mathbb{R}_+)$ sur H est clairement linéaire et isométrique donc H est fermé dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (comme image d'un espace complet par une isométrie).

Exercice 7 : 1) On a
$\sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{u_k}^{u_{k+1}} (f(s))^2 ds\right)^2 \leq \max_k(\int_{u_k}^{u_{k+1}} (f(s))^2 ds)$
$\cdot \sum_{k=0}^{N-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} (f(s))^2 ds =$
$\max_k(\int_{u_k}^{u_{k+1}} (f(s))^2 ds) \int_0^T (f(s))^2 ds$.
Mais pour une fonction h intégrable on sait que $\int_A h(t)dt \to 0$ si $\lambda(A) \to 0$ où λ désigne la mesure de Lebesgue (propriété d'absolue continuité de l'intégrale). Donc $\max_{0\leq k\leq N-1}(\int_{u_k}^{u_{k+1}} (f(s))^2 ds) \to 0$ si $|\pi| \to 0$ ce qui prouve le résultat annoncé.

2) On a $S_\pi = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{u_k}^{u_{k+1}} f(s)dB_s\right)^2$ et donc
$\mathbb{E}(S_\pi) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} f^2(s)ds = \int_0^t f^2(s)ds$ d'après l'exercice 3. Pour alléger les notations qui vont suivre posons $I_k = (\int_{u_k}^{u_{k+1}} f(s)dB_s)^2 - \int_{u_k}^{u_{k+1}} f^2(s)ds$. On a alors
$\mathbb{E}((S_\pi - \mathbb{E}(S_\pi))^2) = \mathbb{E}((\sum_{k=0}^{N-1} I_k)^2) = \sum_{0\leq i,j\leq N-1} \mathbb{E}(I_i I_j)$
$= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}(I_k^2)$ car si $i \neq j$, I_i et I_j sont des variables aléatoires indépendantes et d'espérance nulle.
Mais on peut écrire $\mathbb{E}(I_k^2) = (\int_{u_k}^{u_{k+1}} f^2(s)ds)^2 \mathbb{E}((J_k - 1)^2)$ où la variable aléatoire

$$J_k = \frac{(\int_{u_k}^{u_{k+1}} f(s)dB_s)^2}{\int_{u_k}^{u_{k+1}} f^2(s)ds},$$

est pour tout $0 \leq k \leq N-1$ égale en loi au carré d'une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(0,1)$. Il en résulte que $\mathbb{E}((J_k - 1)^2) = C$ (constante) ce qui montre que $\mathbb{E}((S_\pi - \mathbb{E}(S_\pi))^2) = C\sum_{k=0}^{N-1}\left(\int_{u_k}^{u_{k+1}}(f(s))^2 ds\right)^2 \to 0$ si $|\pi| \to 0$ d'après la question 1).

3) Comme dans le cas du mouvement brownien (corollaire 2.2.1), on en déduit que $\mathbb{P}$-presque sûrement, les trajectoires du processus $\mathcal{J}$ ne sont à variation bornée sur aucun intervalle de temps.

6.5 chapitre 5

Exercice 1 : Cherchons X sous la forme $X_t = Y_t Z_t$ où Y et Z sont des processus d'Itô respectivement tels que
$dY_t = g(t)Y_t dB_t$ et $Y_0 = \xi_0$
$dZ_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dB_t$ et $Z_0 = 1$,
où g, μ et σ sont des fonctions déterministes. En utlisant la formule d'intégration par parties pour différentier X, on obtient
$dX_t = Y_t dZ_t + Z_t dY_t + \sigma(t)g(t)Y_t dt = f(t)Y_t Z_t dt + g(t)Y_t Z_t dB_t$ (expression initiale de dX_t). Mais en observant que $g(t)Y_t Z_t dB_t = Z_t dY_t$, l'égalité précédente implique qu'on doit avoir :

$$Y_t[dZ_t + (\sigma(t)g(t) - f(t)Z_t)dt] = 0.$$

Si on prenait $\sigma(t) \equiv 0$, l'égalité précédente serait vérifiée si $dZ_t - f(t)Z_t dt = 0$ (avec $Z_0 = 1$). Mais cette équation est une équation déterministe (équation différentielle ordinaire) dont la solution est
$Z_t = \exp(\int_0^t f(s)ds)$.
comme l'équation de Y est, d'après le cours, celle de l'exponentielle stochastique, on sait que
$Y_t = \xi_0 \exp(\int_0^t g(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t g^2(s)ds)$.
L'expression de X_t devrait donc être nécessairement la suivante :

$$X_t = \xi_0 \exp\left(\int_0^t g(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t g^2(s)ds + \int_0^t f(s)ds\right).$$

Mais on vérifie facilement que ce processus satisfait l'EDS proposée. Comme l'EDS satisfait les conditions de Cauchy-Lipschitz l'expression trouvée est bien l'unique solution du problème.

Remarque : La démarche utilisée pour résoudre l'EDS précédente est typique de la technique qu'on utilise pour résoudre explicitement le petit nombre d'EDS satisfaisant la condition de Cauchy-Lipschitz et qui ont une solution explicite : on essaye de faire un changement de processus inconnu en introduisant un ou deux processus auxiliaires plus simples en relation avec les coefficients des termes en dt et en dB_t en espérant que ceci conduit à résoudre deux EDS plus simples qui vont donner ces processus intermédiaires. On va encore utiliser cette idée dans l'exercice qui suit.

Exercice 2 : Sur l'intervalle $[0, T]$, avec $T < 1$, cette EDS relève du théorème de Cauchy-Lipschitz avec $\mu(x,t) = -\frac{1}{1-t}x$ et $\sigma(x,t) = 1$ car ces coefficients sont bornés. Donc la solution est unique.
Cherchons alors X sous la forme $X_t = Y_t Z_t$ et essayons $Y_t = f(t)$ (fonction déterministe) et $dZ_t = g(t)dB_t$ avec g fonction déterministe. Dans ce cas on aurait :
$dX_t = Y_t dZ_t + Z_t dY_t = f(t)g(t)dB_t + (\int_0^t g(s)dB_s)f'(t)dt = dB_t - \frac{f(t)\int_0^t g(s)dB_s}{1-t}dt$ (la dernière égalité étant l'EDS initiale). Il serait judicieux de choisir f et g telles que $f(t)g(t) = 1$; dans ce cas l'équation précédente se réduirait à

$$-\frac{f(t)}{1-t}\int_0^t g(s)dB_s = (\int_0^t g(s)dB_s)f'(t),$$

condition qui serait satisfaite si $f(t) = -(1-t)f'(t)$ donc par $f(t) = 1-t$. Ce qui donnerait

$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}dB_s.$$

On vérifie alors facilement que ce processus X vérifie bien l'EDS proposée et c'est donc l'unique solution sur $[0, T]$ pour tout $T < 1$ donc la solution sur l'intervalle $[0, 1[$. De plus en utilisant les résultats de l'exercice 3 du chapitre 4, on montre facilement que sur $[0, T]$ (avec $T < 1$) X est un processus gaussien centré de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = s(1-t)$ si $s < t$. D'après l'exercice 7 du chapitre 2, ce processus est donc équivalent au pont brownien $(B_t - tB_1)_{t\in[0,T]}$. Ceci étant valable pour tout $T < 1$, le résultat est encore valable pour les processus prolongés à l'intervalle $[0, 1[$.

Exercice 3 : 1) La fonction $f : (x,u) \mapsto \exp(-(x-u)^2/2t)$ vérifie clairement $\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial u^n}$. Or $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}|_{u=0} = \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2t})$. Mais si dans la fonction f on fait le changement de variable $u = \alpha t$ (t est fixé), ceci implique $\frac{d^n}{d\alpha^n}\left(e^{-(x-\alpha t)^2/2t}\right)|_{\alpha=0} = t^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}|_{u=0} = (-t)^n\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2t})$. Donc

$$\frac{d^n}{d\alpha^n}\left(e^{\alpha x-(\alpha^2 t)/2}\right)|_{\alpha=0} = (-t)^n e^{x^2/2t}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2t}).$$

Mais la fonction $\alpha \mapsto e^{\alpha x-(\alpha^2 t)/2}$ est analytique donc égale à son développement de Taylor en $\alpha = 0$ qui d'après ce qui précéde est égal à : $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n H_n(x,t)$. D'où le résultat demandé.

2) D'après le cours on sait que $\mathcal{E}(\alpha B)_t = \exp(\alpha B_t - (\alpha^2 t)/2)$. Donc

$$(*)\ \mathcal{E}(\alpha B)_t = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n H_n(B_t,t).$$

D'autre part $\mathcal{E}(\alpha B)$ vérifie l'EDS de l'exponentielle stochastique, $d(\mathcal{E}(\alpha B)_t) = \alpha\mathcal{E}(\alpha B)_t dB_t$ avec $\mathcal{E}(\alpha B)_0 = 1$, donc $\mathcal{E}(\alpha B)_t = 1 + \alpha\int_0^t \mathcal{E}(\alpha B)_s dB_s$. Compte tenu de $(*)$, on a donc

$$(**)\ \mathcal{E}(\alpha B)_t = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^{n+1}\int_0^t H_n(B_s,s)dB_s.$$

En identifiant les coefficients des α^k dans les deux expressions $(*)$ et $(**)$, on en déduit aussitôt la relation annoncée. De plus comme $H_n(B_s,s)$ est un polynôme en B_s, c'est un processus appartenant à $M^2([0,T]$ donc $(\int_0^t H_n(B_s,s)dB_s)_{t\in[0,T]}$ est une martingale (théorème 4.4.1) et ceci vaut pour tout $T > 0$ donc
$(H_{n+1}(B_t,t))_{t\geq 0}$ est une martingale ($n \geq 0$) mais $H_0(B_t,t) \equiv 1$ est aussi une martingale, d'où le résultat.

3) Si on remplace x par $\int_0^t f(s)ds$ et t par $\int_0^t f^2(s)ds$ dans la relation génératrice des polynômes H_n de la question 1), on obtient
$\mathcal{E}_t^{\alpha f} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n H_n(\int_0^t f(s)dB_s, \int_0^t f^2(s)ds)\ (***)$.
Mais par définition on a aussi $\mathcal{E}_t^{\alpha f} = 1+\alpha\int_0^t(\mathcal{E}_s^{\alpha f})f(s)dB_s$ et en reportant l'expression $(***)$ sous l'intégrale puis en intégrant terme à terme comme dans la question 2), on a un autre développement en puissances de α. En identifiant les coefficients des α^k, on obtient
$H_n\left(\int_0^t f(u)dB_u, \int_0^t f^2(u)du\right) =$

$$\int_0^t H_{n-1}\left(\int_0^s f(u)dB_u, \int_0^s f^2(u)du\right)f(s)dB_s.$$

4) En utilisant à nouveau la relation précédente pour exprimer le terme en H_{n-1} du second membre par une intégrale en fonction de H_{n-2} puis en procédant de même par récurrence descendante on obtient

$$H_n\left(\int_0^t f(u)dB_u, \int_0^t f^2(u)du\right) = \int_0^t f(s_1)dB_{s_1}\int_0^{s_1} f(s_2)dB_{s_2} \cdot \ldots \int_0^{s_{n-1}} f(s_n)dB_{s_n}$$

D'où le résultat demandé grâce à $(***)$ en faisant $\alpha = 1$.

Exercice 4 : 1) Pour $n = 1$, $I_1(f) = \int_0^T f(s)dB_s$ et comme l'intégrale stochastique est une isométrie, on a
$||I_1(f)||^2_{L^2(\mathcal{F}_T)} = ||f||^2_{L^2([0,T])} = ||f||^2_{L^2(\Delta_1)}$.
Si $n = 2$, $f(s) = f_1(s_1)f_2(s_2)$ et $I_2(f) = \int_0^T f_1(s_1)X_{s_1}dB_{s_1}$, où $X_{s_1} = \int_0^{s_1} f_2(s_2)dB_{s_2}$, ce qui a bien un sens car le processus $(f_1(t)X_t)$ est dans M^2. Par le théorème d'isométrie, on a

$||I_2(f)||^2_{L^2(\mathcal{F}_T)} = \mathbb{E}(\int_0^T f_1^2(s_1)X^2_{s_1}ds_1) = \int_0^T f_1^2(s_1)\mathbb{E}(X^2_{s_1})ds_1 = \int_{\Delta_2} f_1^2(s_1)f_2^2(s_2)ds_1ds_2 = ||f||^2_{L^2(\Delta_2)}$. D'où la formule pour $n = 2$. Faisons l'hypothèse de récurrence que la formule est vraie à l'ordre $n-1$ et dans tout "triangle" de la forme

$$\Delta^a_{n-1} = \left\{(s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^{n-1}_+ | a \geq s_2 > s_3 > \cdots > s_n\right\},$$

avec $a \leq T$ i.e. pour toute fonction $f(s_2, \ldots, s_n) = f_2(s_2)\ldots f_n(s_n)$ de carré intégrable dans Δ^a_{n-1}, supposons $||I^a_2(f)||^2_{L^2(\mathcal{F}_T)} = ||f||^2_{L^2(\Delta^a_{n-1})}$. Vérifions l'hypothèse de récurrence : Soit $a \leq T$ et $f(s) = f_1(s_1)\ldots f_n(s_n)$, on a
$I^a_n(f) = \int_0^T f_1(s_1)X_{s_1}dB_{s_1}$ avec $X_{s_1} = \int_0^{s_1} f_2(s_2)dB_{s_2}\int_0^{s_2} \ldots \int_0^{s_{n-1}} f_n(s_n)dB_{s_n}$. Comme dans le cas $n = 2$, on montre que $||I^a_n(f)||^2_{L^2(\mathcal{F}_T)} = \int_0^a f_1^2(s_1)\mathbb{E}(X^2_{s_1})ds_1$. Par l'hypothèse de récurrence $\mathbb{E}(X^2_{s_1}) = ||f^{(1)}||^2_{L^2(\Delta^{s_1}_{n-1})}$ où $f^{(1)}(s_2, \ldots, s_n) = f_2(s_2)\ldots f_n(s_n)$. D'où $||I^a_n(f)||^2_{L^2(\mathcal{F}_T)} = \int_0^a f_1^2(s_1)||f^{(1)}||^2_{L^2(\Delta^{s_1}_{n-1})}ds_1 = ||f||^2_{L^2(\Delta^a_n)}$ Q.E.D. Finalement, il est clair que l'application I_n est linéaire de l'espace $\otimes^n_{i=1}L^2([0,T])|\Delta_n$ (des fonctions $f \in \otimes^n_{i=1}L^2([0,T])$ restreintes à Δ_n) dans $L^2(\mathcal{F}_T)$ donc c'est une isométrie qui se prolonge de manière unique en une isométrie de $L^2(\Delta_n)$ dans $L^2(\mathcal{F}_T)$ car $\otimes^n_{i=1}L^2([0,T])|\Delta_n$ est dense dans $L^2(\Delta_n)$.

2) $K_n = I_n(L^2(\Delta_n))$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathcal{F}_T)$ comme image isométrique d'un espace complet. Pour voir que $K_n \perp K_m$ si $n \neq m$, supposons que $n < m$ et soient $f \in L^2(\Delta_n)$ et $g \in L^2(\Delta_m)$; on a avec les notations de la question précédente
$\mathbb{E}(I_n(f)I_m(g)) = \mathbb{E}(\int_0^T f_1(s_1)I_{n-1}^{s_1}(f^{(1)})dB_{s_1} \int_0^T g_1(s_1)I_{m-1}^{s_1}(g^{(1)})dB_{s_1})$.
La propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique (corollaire 4.3.2.) montre alors que
$(*)\ \mathbb{E}(I_n(f)I_m(g)) = \int_0^T f_1(s_1)g_1(s_1)\mathbb{E}(I_{n-1}^{s_1}(f^{(1)})I_{m-1}^{s_1}(g^{(1)}))ds_1 :=$
$\int_0^T f_1(s_1)g_1(s_1)ds_1\mathbb{E}(I_{n-1}^{s_1}(f^{(1)})I_{m-1}^{s_1}(g^{(1)}))$ (on convient de déplacer l'élément différentiel ds_1 pour faciliter les notations, ce que nous ferons encore ci-dessous où figurent des intégrales itérées). Mais en itérant n fois la formule précédente on obtient :

$$(*) = \int_0^T f_1.g_1(s_1)ds_1 \int_0^{s_1} f_2.g_2(s_2)ds_2 \dots$$
$$\dots \int_0^{s_{n-1}} f_n.g_n(s_n)ds_n\mathbb{E}((I_{m-n}^{s_n}(g^{(n)})),$$

où on a noté

$$f_k.g_k(s_k) := f_k(s_k)g_k(s_k)$$
$$\text{et } g^{(n)}(s_{n+1},\dots,s_m) = g_{n+1}(s_{n+1})\dots g_m(s_m).$$

Mais l'expression précédente est nulle car $\mathbb{E}((I_{m-n}^{s_n}(g^{(n)})) = 0$ comme espérance d'une intégrale stochastique. D'où le résultat.

3) On a vu à l'exercice 3 que la variable aléatoire $\mathcal{E}_T^f$ se décompose sur la somme directe $\oplus_{n=0}^{+\infty}K_n$. Pour montrer que $L^2(\mathcal{F}_T) = \oplus_{n=0}^{+\infty}K_n$, il suffit de prouver que la famille des $\mathcal{E}_T^f$ ($f \in L^2([0,T])$ est totale dans $L^2(\mathcal{F}_T)$: Soit U une variable aléatoire orthogonale à toutes les $\mathcal{E}_T^f$ i.e. pour toute $f \in L^2([0,T]$, $U \perp \exp(\int_0^T f(s)dB_s)$. En particulier si $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}$ est une fonction en escalier, $U \perp \exp(\sum_{i=1}^n \lambda_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))$ et en faisant varier les coefficients λ_i et les subdivisions (t_i), on obtient

$$\forall n \geq 1,\ \forall \alpha_1,\dots,\alpha_n,\ \forall t_1 < \dots < t_n,\ U \perp \exp(\alpha_1 B_{t_1} + \dots + \alpha_n B_{t_n}),$$

i.e. $\mathbb{E}(U\exp(\alpha.Z)) = 0$ où $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $Z = (B_{t_1},\dots,B_{t_n})$ et $\alpha.Z$ est le produit scalaire de α et Z. On a donc $\mathbb{E}(\mathbb{E}(U\exp(\alpha.Z)|Z)) = 0$

ou encore $\mathbb{E}(\exp(\alpha.Z)g(Z)) = 0$ avec $g(Z) = \mathbb{E}(U|Z)$. Si f désigne la densité du vecteur aléatoire Z, on a alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\alpha.z)g(z)f(z)dz = 0,$$

i.e. la transformée de Laplace de la fonction $z \mapsto g(z)f(z)$ est nulle. Ceci implique que $g(z)f(z) = 0$ presque partout. Mais $f(z) > 0$ pour tout z donc $g(z) = 0$ presque partout, d'où $\mathbb{E}(U|Z) = 0$ et ceci vaut pour tous les $Z = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$. Il en résulte que $\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_T) = 0$ donc $U = 0$. Q.E.D.

Exercice 5 : 1) a) Comme par hypothèse $\int_0^T X_s^2(\omega)ds \to +\infty$, il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $\int_0^x X_s^2 ds > a$ donc $\tau_a(\omega) \leq x < +\infty$ (et ceci est vrai $\mathbb{P}$-p.s.).
b) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $[\tau_a \leq t] = \left[\int_0^t X_s^2 ds > a\right] \in \mathcal{F}_t$ car la v.a. $\int_0^t X_s^2 ds$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable. Donc τ_a est un temps d'arrêt. De plus comme l'application $x \mapsto \int_0^x X_s^2(\omega)ds$ est continue, si on avait $\int_0^{\tau_a(\omega)} X_s^2(\omega)ds > a$, il existerait $t_0 < \tau_a(\omega)$ tel que $\int_0^{t_0} X_s^2 ds > a$, ce qui contredirait la définition de $\tau_a(\omega)$. Pour une raison analogue, il n'est pas possible non plus que $\int_0^{\tau_a(\omega)} X_s^2(\omega)ds < a$. On a donc $\int_0^{\tau_a(\omega)} X_s^2(\omega)ds = a$.

2) a) Pour tout $a > 0$ (fixé), le processus $X^{(a)} = (X_s^{(a)})_{s\geq 0}$ où $X_s^{(a)} = X_s \mathbf{1}_{[s\leq\tau_a]}$ est progressivement mesurable car τ_a est un temps d'arrêt et pour tout $T > 0$ fixé, sa restriction à $[0,T]$ appartient à $M^2([0,T])$ puisque $\left(\int_0^t (X_s^{(a)})^2 ds\right)(\omega) \leq \int_0^{\tau_a(\omega)\wedge t} X_s^2(\omega)ds \leq a$, ce qui implique

$$(*)\ \mathbb{E}\left(\int_0^t (X_s^{(a)})^2 ds\right) \leq a.$$

D'après un résultat du cours $(M_t)_{t\in[0,T]}$ (le processus intégrale stochastique de $X^{(a)}$) est une martingale. Ceci étant valable pour tout $T > 0$, le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale. D'autre part, on a

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}\left(\left[\int_0^t X_s^{(a)} dB_s\right]^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t (X_s^{(a)})^2) ds\right) \leq a,$$

la dernière inégalité provenant de $(*)$. Donc $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(M_t^2) \leq a < +\infty$.
b) La martingale M est bornée dans L^2 d'après i), ce qui implique (théorème de convergence) que $\lim_{t\to+\infty} M_t := W_a$ existe $\mathbb{P} - p.s.$ et dans L^1.

3) a) Pour tout $T > 0$, le processus défini sur $[0, T]$ par

$$U_t = \sum_{k=1}^{m} i\lambda_k \int_0^t X_s^{(k)} dB_s + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k,l \leq m} \lambda_k \lambda_l \int_0^t X_s^{(k)} X_s^{(l)} ds,$$

est un processus d'Itô complexe (comme somme de processus d'Itô). Le processus $Y_t = \exp(U_t)$ est donc aussi d'Itô comme transformé de U par la fonction holomorphe exp (théorème du cours).

b) D'après la formule d'Itô holomorphe, on a

$$dY_t = d(\exp U_t) = \exp(U_t) dU_t + \frac{1}{2} \exp(U_t) b_t^2 dt = Y_t \left(dU_t + \frac{1}{2} b_t^2 dt \right),$$

où $b_t = \sum_{k=1}^{m} i\lambda_k X_t^{(k)}$. D'où $dY_t = \sum_{k=1}^{m} i\lambda_k Y_t X_t^{(k)} dB_t$.

4) a) En notant que $t_l \leq t_k$ implique $\tau_{t_l} \leq \tau_{t_k}$ et $\mathbf{1}_{[s \leq \tau_{t_l}]} \mathbf{1}_{[s \leq \tau_{t_k}]} = \mathbf{1}_{[s \leq \tau_{t_l}]}$, on voit que $X_s^{(k)} X_s^{(l)} = X_s^2 \mathbf{1}_{[s \leq \tau_{t_l}]}$ donc

$$\int_0^t X_s^{(k)} X_s^{(l)} ds = \int_0^t X_s^2 \mathbf{1}_{[s \leq \tau_{t_l}]} ds \leq t_l,$$

d'après l'inégalité obtenue en (*) dans la question 2). D'où a) avec $C = t_l$. De plus

$$\text{(6.1)} \quad |Y_t| \leq \exp \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k,l \leq m} |\lambda_k| |\lambda_l| \int_0^t X_s^{(k)} X_s^{(l)} ds$$
$$\leq \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{1 \leq k,l \leq m} |\lambda_k| |\lambda_l| t_l \right).$$

Donc le processus Y est borné.

b) Il résulte de a) que le processus $\left(\sum_{k=1}^{m} i\lambda_k Y_t X_t^{(k)} \right)_{t \in [0,T]}$ est dans $M^2([0, T]$ ce qui, compte tenu de 3) b) implique que $(Y_t)_{t \in [0,T]}$ (processus intégrale stochastique) est une martingale. Ceci étant vrai pour tout $T > 0$, Y est une martingale. On a alors $\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_0) = 1$.

5) a) Si on considère les différents termes composant U_t (voir question 3) a)), on voit que si $t \to +\infty$, $\int_0^t X_s^{(k)} dB_s \to W_{t_k}$ $\mathbb{P}$-p.s. et que

$\int_0^t X_s^{(k)} X_s^{(l)} ds \to t_k \wedge t_l$ $\mathbb{P}$-p.s. Il en résulte que si $t \to +\infty$, on a $\mathbb{P}$-p.s.

$$U_t \to \sum_{k=1}^{m} i\lambda_k W_{t_k} + \frac{1}{2} \sum_{1\le k,l\le m} \lambda_k \lambda_l (t_k \wedge t_l)$$

donc

$$\lim_{t\to+\infty} Y_t = \exp\left(\sum_{k=1}^{m} i\lambda_k W_{t_k} + \frac{1}{2} \sum_{1\le k,l\le m} \lambda_k \lambda_l (t_k \wedge t_l) \right) \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

b) Comme Y est borné la convergence est dominée et a lieu aussi dans L^1 donc $\lim \mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E} \exp(\sum_{k=1}^m i\lambda_k W_{t_k} + \frac{1}{2}\sum_{1\le k,l\le m} \lambda_k\lambda_l(t_k \wedge t_l))$. Or d'après 4) b) cette espérance vaut 1, d'où

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{m} i\lambda_k W_{t_k} \right) = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{1\le k,l\le m} \lambda_k \lambda_l (t_k \wedge t_l) \right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{m} i\lambda_k B_{t_k} \right).$$

c) On déduit de b) l'égalité en loi des vecteurs $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_m})$ et $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_m})$. Les processus W et B sont donc équivalents, ce qui montre que W est un mouvement brownien.

6) a) Il est clair que $\tau_{a_t} = t$. Donc d'après 1), on obtient aussitôt que $W_{a_t} = \int_0^t X_s dB_s$.
b) Si on prend une version continue de W et comme le processus a_t de la question 6 i) est continu (intégrale ordinaire), on déduit que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire $t \mapsto W_{a_t(\omega)}(\omega)$ est continue, ce qui prouve le résultat.

Exercice 6 : 1) Les résultats de la question 1) de l'exercice 5 sont encore vrais. On montre alors de manière analogue que $(M_t)_{0\le t<T_0}$ est une martingale bornée dans L^2 et que $\lim_{t\to T_0^-} M_t = W_{T_0}$ existe $\mathbb{P}$-p.s. et dans L^1. Les résultats des autres questions sont également valables.

2) Le processus déterministe $X_s = \frac{1}{1-s}$ pour $s \in [0, 1[$, vérifie $\int_0^T X_s^2 ds \nearrow +\infty$ si $T \nearrow 1$ donc les hypothèses de 1) qui permettent de définir le temps d'arrêt τ_t sont satisfaites. On considère alors $a_t = \int_0^t \frac{1}{(1-s)^2} ds = t/(1-t)$. On a alors $\int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s = W_{a_t}$ d'où $U_t = (1-t)W_{t/(1-t)}$. Mais d'après le théorème 2.1.6 le processus $(uW_{1/u})_{u\ge 0}$ est un mouvement brownien, en particulier $\lim_{u\to 0} uW_{1/u} = 0$ $\mathbb{P}$-p.s. donc $\lim_{t\to 1} \frac{1-t}{t} W_{t/(1-t)} = 0$ $\mathbb{P}$-p.s. D'où le résultat.

Index

Bibliographie

[1] **Bachelier L.** : Théorie de la spéculation, thèse (1900). Réédition par J. Gabay, Paris, 1995.

[2] **Baldi P.** : Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni. Quaderni dell'Unione Matematica Italiana 28. Pitagore Editrice, Bologna, 1984.

[3] **Barbut M., Locker B. et Mazliak L.** : Paul Lévy-Maurice Fréchet, 50 ans de correspondance mathématique, éditions Hermann, Paris 2003.

[4] **Bouchaud J.P.** : Les caprices des marchés financiers : régularités et turbulences, Université de tous les savoirs. Les Mathématiques, volume 13, Éditions Odile Jacob, Paris, 2002.

[5] **Breiman L.** : Probability. Reprint of the first edition published by Addison-Wesley in 1968. Classics in applied mathematics. S.I.A.M. editor, 1992.

[6] **Brzeźniak Z. and Zastawniak T.** : Basic stochastic processes. Springer-Verlag, London, 3rd printing with corrections, 2000.

[7] **Charpentier E., Lesne A. et Nikolski N.** : L'héritage de Kolmogorov en mathématiques. Éditions Belin, Paris, 2004.

[8] **Chaumont L. and Yor M.** : Exercises in Probability. A Guided Tour from Measure Theory to Random processes via Conditioning. Cambridge University Press. 2003.

[9] **Chung K.L.** : Green, Brown, and Probability & Brownian Motion on the Line. World Scientific, Singapore, 2002.

[10] **Comtet L.** : Analyse combinatoire, tome 1, Presses Universitaires de France, 1970.

[11] **Chung K.L. and Williams R.T.** : Introduction to stochastic integration. Birkhäuser, Boston, 1989.

[12] **Dacunha-Castelle D. et Duflo M.** : Probabilités et statistiques. Deux tomes : 1. Problèmes à temps fixe et 2. Problèmes à temps mobile. Masson éditeur, 1983.

[13] **Dellacherie C. et Meyer P.A.** : Probabilités et potentiel. Volume 1. Nouvelle édition. Hermann éditeur, 1975.

[14] **Dellacherie C. et Meyer P.A.** : Probabilités et potentiel. Volume 2. Théorie des martingales. Hermann éditeur, 1980.

[15] **Dellacherie C. et Meyer P.A.** : Probabilités et potentiel. Volume 4. Théorie du potentiel, processus de Markov. Hermann éditeur, 1987.

[16] **Dellacherie C., Maisonneuve B. et Meyer P.A.** : Probabilités et potentiel. Volume 5. Processus de Markov (fin). Compléments de calcul stochastique. Hermann éditeur, 1992.

[17] **Dieudonné J.** : Eléments d'Analyse. Tome 2. Gauthier-Villars.1968.

[18] **Doob J.L.** : Stochastic processes. Wiley and Sons editors, 1953.

[19] **Einstein A.** : Investigations on the theory of the Brownian movement. Complete text of 5 papers by A. Einstein translated by A.D. Cowper, first published in 1926. Reprint by Dover Publications, Inc in 1956.

[20] **Evans L.C.** : Partial Differential Equations. Graduate Studies in Math. Volume 19. AMS publications. Providence, Rhode Island, 1998.

[21] **Friedman A.** : Stochastic differential equations and applications. Volumes 1 and 2. Academic Press, 1975.

[22] **Gouy M.** : Sur le mouvement brownien. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, section physique, vol. 109, p.102-105, 1889.

[23] **Gelbaum E. and Olmsted J.** : Counterexamples in Analysis. Holden-Day, Inc., 1964.

[24] **Getoor R.K. and Sharpe M.J.** : Conformal martingales. Invent. Math. 16, p. 271-308, 1972.

[25] **Halmos P.R.** : Measure Theory, D. Van Nostrand Co. Inc, 1950.

[26] **Hänggi P. and Marchesoni F.** : 100 years of Brownian motion. Chaos 15, American Institute of Physics, 2005.

[27] **Haw M.D.** : Colloïdal suspensions, Brownian motion, molecular reality : A short history. J ; Phys. Condens. Matter 14, 7769-7779, 2002.

[28] **Itô K.** : Stochastic integral. Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, p. 519-524, 1944.

[29] **Itô K. and McKean H.P.** : Diffusion processes and their sample paths. Springer-Verlag, 1996, (Reprint of the 1974 Edition).

[30] **Kac M.** : Integration in function spaces and some of its applications. Scuola Normale Superiore. Lezioni Fermiane. Pisa, 1980.

[31] **Kahane J.P.** : Some random series of functions. Second edition. Cambrige studies in Advanced Mathematics, 5, (1985).

[32] **Karlin S. and Taylor H.M.** : A second course in stochastic processes. Academic Press, Inc., New York, 1981.

[33] **Karatzas I. and Shreve S.E.** : Brownian Motion and Stochastic Calculus. Corrected 8th printing. Springer Verlag. 2005.

[34] **Kolmogorov A.** : Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergeb. der Math. Springer, Berlin, 1933.

[35] **Kolmogorov A. et Fomine S.** : Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Ellipses éditeur, 1994.

[36] **Le Gall J.F.** : Introduction au mouvement brownien. Exposé à la journée annuelle de la Société Mathématique de France. Publications de la SMF. 1989.

[37] **Lévy P.** : Processus stochastiques et mouvement brownien. 2ième édition. Gauthier-Villars (1965). Réédition des éditions Gabay, 1992.

[38] **Lamberton D. et Lapeyre B.** : Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. S.M.A.I. collection Mathématiques et applications. 1992.

[39] **Mazliak M., Priouret P. et Baldi P.** : martingales et chaînes de Markov. Editions Hermann. 1998.

[40] **Métivier M.** : Notions fondamentales de la théorie des probabilités. Editions Dunod. 1968.

[41] **McKean H.P.** : Stochastic Integrals. AMS Chelsea Publishing, Reprint of the 1969 edition. 2005.

[42] **Neveu J.** : Processus aléatoires gaussiens. Les Presses de l'Université de Montréal. 1968.

[43] **Neveu J.** : Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson et Cie, 1970.

[44] **Neveu J.** : martingales à temps discret. Masson et Cie, 1972.

[45] **Ouvrard J.Y.** : Probabilités 2 (Maîtrise, Agrégation). Editions Cassini, 2000.

[46] **Perrin J.** : Les atomes. Presses Universitaires de France, troisième rédaction, 1939.

[47] **Priouret P.** : Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques. Lecture Notes in Mathematics, vol. 390, p. 38-113, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[48] **Protter P.E..** : Stochastic Integration and Differential Equations. 2nd edition. Springer Verlag. 2004.

[49] **Rényi A.** : Calcul des probabilités. Dunod éditeur, Paris, 1968.

[50] **Revuz D.** : Probabilités. Hermann , 1997.

[51] **Revuz D. and Yor M.** : Continuous martingales and Brownian motion. Third edition, corrected second printing 2001, Springer-Verlag editor.

[52] **Rogers L.C.G. & Williams D.** : Diffusions, Markov Processes and martingales. Volume 1 : Foundations and Volume 2 : Itô Calculus. Second Edition. Cambridge University Press. 2001.

[53] **Schmoluchowski M. (von)** : Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen. Ann. Phys. 21, p. 756-780, 1906.

[54] **Stein E.M.** : Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton University Press. 1993.

[55] **Williams D.** : Probability with martingales. Cambridge mathematical textbooks. Cambridge University Press. 7th printing 2003.

[56] **Yor M.** : Some Aspects of Brownian Motion. Part 1 : Some special functionnals, 1992. Part 2 : Some Recent martingale Problems, 1997. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser editor.

[57] **Yor M.** : Le mouvement brownien : un objet mathématique si commun et pourtant si exceptionnel. Leçons mathématiques d'aujourd'hui, collection le sel et le fer, vol.3. Cassini, Paris, 2007.

Achevé d'imprimer en juillet 2008
par la Sté ACORT Europe
www.cogetefi.com

Dépôt légal à parution

Imprimé en France

Mouvement brownien et calcul d'Itô

Léonard Gallardo

Le mouvement désordonné de particules de pollen en suspension dans un liquide en équilibre fut observé et rigoureusement rapporté par le botaniste écossais Robert Brown en 1827.
Ce phénomène aléatoire lié à l'agitation moléculaire reçut par la suite le nom de mouvement brownien. Sa description mathématique comme un processus stochastique a captivé l'attention des physiciens et mathématiciens depuis plus d'un siècle. Il intervient dans de très nombreux modèles en physique, chimie, biologie, sciences économiques et mathématiques financières.
Le mouvement brownien est l'objet central du calcul des probabilités moderne : il est tout à la fois une martingale, un processus gaussien, un processus à accroissements indépendants et un processus de Markov. Ces diverses propriétés qui en font le processus stochastique par excellence, sont présentées dans cet ouvrage avec les deux outils qu'il permet de développer : l'intégrale d'Itô et la notion d'équation différentielle stochastique.
Ce livre s'adresse à tous ceux et celles qui recherchent une introduction rapide et rigoureuse aux méthodes du calcul stochastique, en particulier aux étudiants des masters de mathématiques, aux élèves des grandes écoles scientifiques ainsi qu'aux candidats à l'agrégation. Nous y avons inclus des exercices de difficulté variée, corrigés en fin de volume, pour en faciliter la lecture et l'utilisation comme outil pédagogique.

Léonard Gallardo est professeur à l'université de Tours.

www.editions-hermann.fr

ISBN : 978 27056 6797 9

34 euros

Hermann