University Mohammed VI Polytechnic

TD2 : Mouvement brownien et calcul d'Itô IBNJAA Said

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une sous-tribu de $\mathcal{F}$ notée $\mathcal{G}$ et $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ une filtration sur Ω.
Dans tout ce qui suit, $(B_t, t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel. On note $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle.

Dans certains exercices, il sera précisé que B part de x. On rappelle que B et $(B_t^2 - t, t \geq 0)$ sont des martingales.

Exercice 1:

1. Calculer pour tout couple (s,t) les quantités $\mathbb{E}(B_s B_t^2)$, $\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s)$ et $\mathbb{E}(B_t|B_s)$.
2. Déterminer la loi de $B_t + B_s$.

Exercice 2:
Parmi les processus suivants, quels sont ceux qui sont des martingales. (On pourra utiliser, sans démonstration, que $\mathbb{E}[\int_0^t B_u\, du|\mathcal{F}_s] = \int_0^t \mathbb{E}[B_u|\mathcal{F}_s]\, du$.)

1. $M_t = B_t^3 - 3\int_0^t B_s\, ds$.
2. $M_t = B_t^3 - 3tB_t$.
3. $M_t = tB_t - \int_0^t B_s\, ds$.
4. $M_t = \sin(B_t) - \int_0^t B_s(\cos s)\, ds$.
5. $M_t = \sin(B_t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(B_s)\, ds$.
6. $M_t = t^2 B_t - 2\int_0^t B_s\, ds$.

Exercice 3:

$$dX_t = -aX_t\, dt + e^{bt}\, dB_t.$$

1. Trouver la solution de l'équation.
2. Calculer $\mathbb{E}(X_t)$.
3. Calculer $\mathrm{Var}(X_t)$.

Exercice 4:
Soit $Y_t = tB_t$.

1. Calculer dY_t.
2. Calculer l'espérance de Y_t.
3. Calculer $\mathbb{E}(Y_t Y_s)$.

Exercice 5:
Soit la variable aléatoire $X_t = \int_0^t (\sin s)\, dB_s$.

1. Montrer que X_t est définie.
2. Montrer que X est un processus gaussien. Calculer son espérance et la covariance $\mathbb{E}(X_s X_t)$.
3. Calculer $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$.
4. Montrer que
$$X_t = (\sin t)B_t - \int_0^t (\cos s)B_s\, ds.$$

Exercice 6:
Écrire les processus suivants comme des processus d'Itô en précisant leur drift et le coefficient de diffusion :

1. $X_t = B_t^2$.
2. $X_t = t + e^{B_t}$.
3. $X_t = B_t^3 - 3tB_t$.
4. $X_t = 1 + 2t + e^{B_t}$.
5. $X_t = (B_t + t)\exp(-B_t - \frac{1}{2}t)$.
6. $X_t = \exp(\frac{t}{2})\sin(B_t)$.

Exercice 6:
Soit $Y_t = tX_1(t)X_2(t)$ où :

- $dX_1(t) = f(t)\, dt + \sigma_1(t)\, dB_t$,
- $dX_2(t) = \sigma_2(t)\, dB_t$.

Calculer dY_t.