Dans ce devoir, nous allons explorer deux processus stochastiques importants : le processus d'Ornstein-Uhlenbeck et le modèle de Vasicek. Nous commencerons par examiner le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, en trouvant sa formule explicite, son espérance et sa variance. Ensuite, nous étudierons le modèle de Vasicek, en discutant de ses dynamiques et en calculant les mêmes caractéristiques. Enfin, nous effectuerons une calibration pratique du modèle de Vasicek en utilisant des données réelles de taux d'intérêt.

Partie 1 : Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Soit le processus X_t défini par :

$$dX_t = -cX_t\,dt + \sigma\,dW_t$$

avec $X_0 = x$.

1. Soit $Y_t = X_t \exp(ct)$. Calculer dY_t.

2. En déduire que :
$$X_t = xe^{-ct} + \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs}\,dW_s$$

3. Montrer que $\int_0^t e^{cs}\,dW_s$ est une martingale, puis en déduire que $\mathbb{E}(X_t) = xe^{-ct}$.

4. Montrer que :
$$\mathrm{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{2c}\left(1 - e^{-2ct}\right)$$

Partie 2 : Modèle de Vasicek

Dans ce modèle, on suppose que le processus $r(t)$ vérifie :

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t$$

1. On pose $X_t = r(t) - b$. Calculer dX_t.

2. En déduire que :
$$r(t) = r(0)e^{-at} + b\left(1 - e^{-at}\right) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as}\,dW_s$$

3. Montrer que :
$$\mathbb{E}(r(t)) = r(0)e^{-at} + b\left(1 - e^{-at}\right)$$

4. Montrer que :

$$\mathrm{Var}(r(t)) = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)$$

Partie 3 : Applications Pratiques du Modèle de Vasicek

1. Montrer que :

$$r_s = r_t e^{-a(s-t)} + b\left(1 - e^{-a(s-t)}\right) + \sigma e^{-as}\int_t^s e^{au}\, dW_u$$

2. En déduire que :

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b\left(1 - e^{-a}\right) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}}\epsilon$$

   où ϵ est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

3. Montrer que :

$$r_t = b(1 - e^{-a}) + e^{-a} r_{t-1} + \epsilon_t$$

   avec $\epsilon_t \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a})\right)$.

4. Télécharger les données des taux moyen pondéré depuis le site de Bank Al-Maghrib. Utiliser Python pour déduire les paramètres a, b et σ du modèle de Vasicek.