Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une sous-tribu de $\mathcal{F}$ notée $\mathcal{G}$ et $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ une filtration sur Ω.

Exercice 1:

Soient F_1 et F_2 deux tribus. Montrer que:

1. $F_1 \cap F_2$ est une tribu.

2. En général, $F_1 \cup F_2$ n'est pas une tribu.

Exercice 2:

1. Si $X \in L^2$ et $\mathbb{E}(X|G) = Y$ et $\mathbb{E}(X^2|G) = Y^2$, montrer que $X = Y$.

2. Soient X, Y deux variables aléatoires telles que la variable aléatoire $X - Y$ est indépendante de G, d'espérance m et de variance σ^2. On suppose que Y est G-mesurable.

   (a) Calculer $\mathbb{E}(X - Y|G)$.

   (b) En déduire $\mathbb{E}(X|G)$.

   (c) Calculer $\mathbb{E}((X - Y)^2|G)$.

   (d) En déduire $\mathbb{E}(X^2|G)$.

Exercice 3:

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. intégrables, et soit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Calculer $\mathbb{E}[S|X_1]$.

2. Calculer $\mathbb{E}[X_1|S]$.

Exercice 4:

Soit $X = X_1 + X_2$. On suppose que X_1 est indépendante de G, que X_2 est G-mesurable, et que X_1 est gaussienne.

1. Calculer $\mathbb{E}[X|G]$ et $\mathrm{Var}(X|G)$.

2. Calculer $\mathbb{E}[e^{\lambda X}|G]$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 5:
Soit X une variable aléatoire intégrable. Montrer que la famille $(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t], t \geq 0)$ est une martingale.

Exercice 6:
Soit $(M_t, t \geq 0)$ une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable (telle que $\mathbb{E}[M_t^2]$ soit finie, pour tout t).

1. Montrer que $\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2|\mathcal{F}_s] - M_s^2$ pour $t > s$.
2. Montrer que $\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E}[M_t^2] - \mathbb{E}[M_s^2]$ pour $t > s$.
3. Montrer que la fonction Φ définie par $\Phi(t) = \mathbb{E}[M_t^2]$ est croissante.

Exercice 7:

1. Montrer que si X est de carré intégrable, alors $X_t^2 - \mathbb{E}[X_t^2]$ est une martingale.

Exercice 8:
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$.

1. Montrer que (S_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que $(S_n^2 - n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
3. Montrer que $(S_n^3 - 3nS_n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.