Bayes Teoremi

Bayes teoremi çətin hesablanan şərti ehtimalları daha asan hesablanan şərti ehtimallarla ifadə edir.

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(A \mid E_i)P(E_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid E_i)P(E_i)}{P(A \mid E_1)P(E_1) + P(A \mid E_2)P(E_2) + \ldots + P(A \mid E_k)P(E_k)}$$

Antik Yunanlar (müəyyən edirdilər ki, hələ statistika haqqında çox şey bilmirdilər) hər bir gəmi batandan sonra, xilas olan bütün dənizçilər dəniz tanrısı Poseidanaya dua etdiklərinə inanırdılar. (Poseidana- Qədim Yunanıstanda Okeanların Allahı, Dəniz Tanrılarının Allahı sayılırdı). Bu müşahidədən hərəkətlə, onların həqiqətən xilas olmasının səbəbi dua etmiş olmaları olduğu şərh edilirdi. Bu məsələ əslində 16-cı əsr İngilis filosofu Francsi Bekon tərəfindən gündəmə gətirilmişdir.

Statistik baxımından, **"xilas olma"** hadisəsin A və **"dua etmə"** hadisəsin isə B olaraq təyin edək. Beləcə, sual **dua etmənin xilas olma ehtimalını yüksəldib yüksəlmədiyi olur, yəni** ($\boldsymbol{P(A|B) > P(A) \equiv p}$ **əlaqəsi doğrumu və ya doğru deyilmi?** Bütün xilas olan dənizçilərin dua etmiş olduğu müşahidəsi ($P(B|A) = 1 -$ ə $çevrilir$. Bu məlumat həqiqətən də dua etmənin xilas olma şansını əhəmiyyətli ölçüdə artırıb arıtmadığını sualını cavablandırmaq üçün kafi ola bilərmi? ($P(B|A)$ ilə əlaqədar məlumatı istifadə edərək($P(A|B)$ haqqındakı məlumatı necə öyrənirik?

Şərti ehtimalın tərifindən aşağıdakı əlaqəni əldə edirik:

$$\boldsymbol{P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)}$$

İkinci tənliyin yenidən təşkili

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

münasibətini alırıq. Aşağıdakı hadisəni bölə biləcəyimizi daha əvvəl görmüşük,

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C)$$

Beləliklə, aşağıdakı nəticəyə gəlirik:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C)}$$

Bu nəticəni aşağıdakı teoremdə ümumiləşdirildiyi kimi S-nin istənilən bölməsinə ümumiləşdirə bilərik.

Teorem 1. (Bayes teoremi) Əgər $A_1, A_2, \ldots$ S bölməsidirsə, P(B) > 0 olan hər hansı B hadisəsi üçün aşağıdakıları yaza bilərik.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j\geq 1} P(B|A_j)P(A_j)}$$

- $P(A_i)$ A_i hadisəsindən əvvəlki ehtimaldır (yəni təcrübədən əvvəlki ehtimal)

- $P(A_i|B) \to A_i - nin$ növbəti ehtimalıdır (yəni təcrübədən məlumat əldə edildikdən və B haqqında Bayes nəzəriyyəmdən sonra)

Optimal qərar vermənin bütün statistik nəzəriyyəsi bu sadə fikrə əsaslanır: Bayes qərar nəzəriyyəsi.

NÜMUNƏ

Sağ qalanların əvvəlki nümunəsi üçün biz $P(B\backslash A) = 1$ və dənizçilərin $P(A)$ (şərtsiz) sağ qalma nisbətini müşahidə edə bilərik. Lakin $P(B\backslash A^c)$ (batanlar arasında dua edənlərin nisbəti) müşahidə edə bilmədiyimiz üçün dua etmənin mütləq sağ qalma şansını artırıb-artmadığı sualına cavab vermək üçün kifayət qədər məlumatımız olmadığını görə bilərik. Biz əminliklə güman edə bilərik ki, onlar da ölüm qorxusundan dua ediblər (yəni $P(B\backslash A^c) = 1$). Beləliklə, aşağıdakı əlaqəni əldə edə bilərik,

$$P(A|B) = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + 1 \cdot (1-p)} = p = P(A)$$

Müəyyən mənada antik yunanların mühakimə forması sağqalma qərəzinə misal ola bilər. Bayes teoremi göstərir ki, əgər biz ancaq sağ qalanları müşahidə edə biliriksə, biz olanların sağ qalması haqqında mühakimə yürüdə bilmərik, ta o vaxta qədər ki, sağ qalmayanlar haqqında da məlumat əldə edək.