Ibrahima Niang

Des tendances sur la suite de Syracuse

Mots clé : suite de Syracuse, Algorithme, Arithmétique modulaire

Abstract

La suite de Syracuse a été qualifiée par certains comme étant irrésoluble. Ceci serait dû au caractère qui paraît chaotique de ses valeurs. En réalité, les suites générées sur les propriétés de cette suite se séparent en sous-suites qui sont constantes où arithmétiques. C'est pour cela qu'on parle se super-suites. La suite de Syracuse peut aussi être généralisée vers une infinité de suites pour donner des résultats assez intéressants.

INTRODUCTION :

Parmi tous les problèmes mathématiques actuellement non résolus, lequel contient l'énoncé le plus élémentaire ? C'est peut-être là la conjecture de Syracuse : accessible à tous dans son propos, elle interpelle les chercheurs depuis des décennies. Le problème 3n + 1 se pose en ces termes : partons de tout entier positif, et lui appliquons de manière répétée la transformation suivante (on parle de trajectoire) : si ce nombre est pair, on le divise par 2, si le nombre est impair, on le multiplie par trois puis on ajoute 1, on obtient donc un autre nombre. Est-il vrai que tôt ou tard nous nous retrouverons avec 1 ? Tous les calculs effectués à ce jour confirment cette prédiction.

Les valeurs générées par cette suite sur la durée du vol et l'altitude maximale correspondent à ce que j'appelle les super-suites. Ainsi, « l'algorithme de séparation permet de distinguer les sous-suites qui ont la même tendance.

I. Généraliser la suite de Syracuse

La suite de Syracuse est définie de la manière suivante :

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{2} \quad \text{si} \quad U_n \mod 2 = 0$$

$$U_{n+1} = 3U_n + 1 \quad \text{si} \quad U_n \mod 2 \neq 0$$

Réécrivons la suite de la manière suivante où k est appelé le rang de la suite :

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{k} \quad \text{si} \quad U_n \mod k = 0$$

$$U_{n+1} = (k+1)U_n + k - (U_n \mod k) \quad \text{si} \quad U_n \mod k \neq 0$$

Si on remplace k par la valeur 2 on obtient la suite de Syracuse originelle.

Par contre, si cette valeur de k est autre que 2, on aura une autre suite qui a le même comportement que la suite de Syracuse pour certaines valeurs de k. On dit qu'on a généralisé la suite de Syracuse et on appellera cette suite la $k^{ième}$ suite de Syracuse. L'ensemble de ces suites sera appelé : les suites de Syracuse.

Si $k = 5$, la suite devient la cinquième suite :

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{5} \quad \text{si} \quad U_n \mod 5 = 0$$

$U_{n+1} = 6U_n + 5 - (U_n \mod 5)$ si $U_n \mod 5 \neq 0$

Les 10 premières valeurs de k pour lesquelles la suite garde le même comportement sont : $2{,}5{,}6{,}7{,}8{,}13{,}14{,}18{,}19$ et 21.

II. LES SUPER-SUITES NUMERIQUES

Une super-suite numérique est une famille d'éléments qui sont des sous-suites numériques. On peut aussi dire que c'est une suite de séquences d'entiers. La taille des séquences qui contiennent une super-suite est au moins d'une unité.

En se basant sur un entier appelé rang de séparation et noté s, n'importe qu'elle suite peut être transformée en super-suite à partir de **l'algorithme de séparation** qui est la méthode utilisée pour mettre en place ce genre de suite.

NB : Si l'on sépare une suite en groupes différents, c'est parce que les éléments de chaque groupe partagent une régularité ou monotonie entre eux, d'où l'intérêt. C'est cette même régularité qu'on trouve dans les caractéristiques de la suite de Syracuse.

On notera que pour chaque $k^{ième}$ suite de Syracuse, la durée du vol, la durée du vol en altitude, le nombre d'étapes paires, le nombre d'étapes impaires et l'altitude maximale sont décrits par les super-suites numériques.

ALGORITHME DE SEPARATION :

Soit $(U_n)_n$ la suite sur laquelle on veut appliquer cet algorithme.

Cette suite est de longueur infinie.

En se basant sur l'indice de séparation s choisi, on va diviser d'abord notre suite U_n en deux groupes : le groupe de la droite et celui de la gauche.

Si $n \mod (s+1) = 0$ ou $n \mod (s+1) = 1$ on dit que l'élément U_n fait partie de la droite.

Sinon, l'élément U_n fait partie de la gauche.

On notera que chaque entier de la suite U_n est caractérisé par son rang noté n_s avec $n_s = \left\lfloor \frac{n}{s+1} \right\rfloor$

Les éléments de la droite seront répartis sur les têtes de sous-suites tandis que les éléments de gauche forment le reste de chaque sous-suite.

A partir de là, les s premiers éléments de U_n sont ignorés.

Pour former une sous-suite, on commence par choisir sa tête en commençant par la première du groupe de la droite.

Les sous-suites seront notées : $V_{p,n}$ où p est l'indice supérieur de la sous-suite et n son indice.

On considère un curseur qui se déplace sur la suite U_n dans le sens croissant de l'indice n de U_n . Le curseur se déplace à un rythme d'un par un sur les éléments de la super-suite.

Au départ, le curseur est à une valeur appelée valeur actuelle et notée a avec $a = 0$

A chaque déplacement, la valeur actuelle du curseur fait une incrémentation d'une unité.

On commence à partir U_{s+1}, le premier du groupe de la droite.

On a plusieurs étapes en supposant qu'on veut générer la sous suite $V_{p,1}$ en commençant par un des éléments du groupe de la droite.

Etape 1 :

Choisir l'élément du groupe de la droite qu'on note U_p dont on veut générer la sous-suite et on la place à la tête de $V_{1,n}$ (première séquence générée).

Donc $V_{1,1}$=U_p

Le curseur est placé sur U_p

Etape 2 :

Déplacer le curseur d'une unité, c'est-à-dire vers l'élément qui deviendra valeur actuelle de la suite.

Donc la valeur actuelle du curseur fait une incrémentation d'une unité.

Il y a deux cas possibles :

- Si la valeur de la suite, sur lequel le curseur est pointé, fait partie du groupe de la droite, on recommence **l'étape 2**.
- Si la valeur pointée fait partie du groupe de la gauche, on passe à l'étape (3) suivante.

Etape3 :

On fait une comparaison entre la valeur actuelle du curseur a et le rang de la valeur pointée n_s.

Il y a trois cas possibles :

- Si $n_s + 1 = a$ (la valeur actuelle du curseur et la valeur du rang sont égales), alors là on tient la deuxième valeur de la suite $V_{1,n}$ qu'on va lui ajouter.
  On réinitialisant le curseur à 0 et on recommence à **l'étape 2** à partir l'élément qu'on vient de trouver.

- Sinon, si $n_s + 2 \leq a$, alors la sous-suite $V_{1,n}$ s'arrête et on recommence à **l'étape 1** en partant du prochain élément du groupe de la droite.

- Sinon, on recommence à **l'étape 2** (pour déplacer le curseur une nouvelle fois)

III. Quel lien avec la suite de Syracuse ?

Quel que soit le rang de la $k^{ième}$ suite de Syracuse, on a :

- Les durées de vol d'une même sous-suite ont la relation : $U_{n+1} = U_n - 2$
- Les altitudes maximales d'une même sous-suite sont définies par la relation : $U_n = constnte$.
- Les nombres d'étapes paires ou impaires d'une même sous-suite sont liées par : $U_{n+1} = U_n - 1$

• Tableaux représentatifs de quelques sous-suites :

Nous allons représenter les sous-suites dans des tableaux pour mieux les visualiser, dans le cas de la suite de Syracuse ($k=2$) ainsi que dans la suites où $k=5$.

NB : on va seulement choisir cinq sous-suites parmi le reste et les représenter

1. **Pour la suite de Syracuse ($k=2$) :**

On va représenter les sous-suites : $V_{1,n}$, $V_{4,n}$, $V_{9,n}$, $V_{20,n}$ et $V_{25,n}$

- **Pour** $V_{1,n}$

$V_{1,n}$	Durée de vol	Altitude maximale	Nombre d'étapes paires	Nombre d'étapes impaires
3	7	8	2	5
5	5	8	1	4
8	3	8	0	3

- **Pour** $V_{4,n}$

$V_{4,n}$	Durée de vol	Altitude maximale	Nombre d'étapes paires	Nombre d'étapes impaires
7	16	26	5	11
11	14	26	4	10
17	12	26	3	9
26	10	26	2	8

- **Pour** $V_{9,n}$

$V_{9,n}$	Durée de vol	Altitude maximale	Nombre d'étapes paires	Nombre d'étapes impaires
15	17	80	5	12
23	15	80	4	11
35	13	80	3	10

53	11	80	2	9
80	9	80	1	8

- **Pour** $V_{20,n}$

$V_{20,n}$	Durée de vol	Altitude maximale	Nombre d'étapes paires	Nombre d'étapes impaires
31	106	4616	39	67
47	104	4616	38	66
71	102	4616	37	65
107	100	4616	36	64
161	98	4616	35	63
242	96	4616	34	62

- **Pour** $V_{25,n}$

$V_{25,n}$	Durée de vol	Altitude maximale	Nombre d'étapes paires	Nombre d'étapes impaires
39	34	152	11	23
59	32	152	10	22
89	30	152	9	21
134	28	152	8	20

2. Pour le cas $k=5$:

On va représenter les sous-suites : $V_{2,n}$, $V_{5,n}$, $V_{6,n}$, $V_{11,n}$ et $V_{13,n}$

- **Pour $V_{2,n}$**

$V_{2,n}$	Durée de vol	Altitude maximale	Nombre d'étapes paires	Nombre d'étapes impaires
7	31	100	14	17
9	29	100	13	16
11	27	100	12	15
14	25	100	11	14
17	23	100	10	13
21	21	100	9	12
26	19	100	8	11
32	17	100	7	10
39	15	100	6	9
47	13	100	5	8
57	11	100	4	7
69	9	100	3	6
83	7	100	2	5
100	5	100	1	4

- **Pour $V_{5,n}$**

$V_{5,n}$	Durée de vol	Altitude maximale	Nombre d'étapes paires	Nombre d'étapes impaires
18	19	40	8	11
22	17	40	7	10
27	15	40	6	9
33	13	40	5	8
40	11	40	4	7

- **Pour** $V_{6,n}$

$V_{6,n}$	Durée de vol	Altitude maximale	Nombre d'étapes paires	Nombre d'étapes impaires
19	19	50	8	11
23	17	50	7	10
28	15	50	6	9
34	13	50	5	8
41	11	50	4	7
50	9	50	3	6

- **Pour** $V_{11,n}$

$V_{11,n}$	Durée de vol	Altitude maximale	Nombre d'étapes paires	Nombre d'étapes impaires
36	30	135	13	17
44	28	135	12	16
53	26	135	12	15

64	24	135	10	14
77	22	135	19	13
93	20	135	8	12
112	18	135	7	11
135	16	135	6	10

- **Pour** $V_{13,n}$

$V_{13,n}$	Durée de vol	Altitude maximale	Nombre d'étapes paires	Nombre d'étapes impaires
42	13	75	5	8
51	11	75	4	7
62	9	75	3	6
75	7	75	2	5

References

[1] Y. Bugeaud. Effective irrationality measures for quotients of logarithms of rational numbers, Hardy-Ramanujan Journal, (38):45-48, 2015.

[2] J. L. Davidson. Some comments on an iteration problem, Proc. 6th Manitoba Conf. On Numerical Mathematics, pages 155-159, 1976.

[3] R. E. Crandall. On the 3x+1 problem, Mathematics of Computation, 32 (144): 1281-1292, 1978.

[4] S. Eliahou. The 3x+1 problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths, Discrete Mathematics, 118(3): 45-56, 1993.

[5] J. Lagarias. The 3x+1 problem and its generalizations, American Mathematical Monthly, 1(92): 3-23, 1985.

[6] J. Lagarias. The set of rational cycles for the 3x+1 problem, Acta Arithmetica, 1, (56): 33-53, 1990.
[7] J. Lagarias. The 3x+1 problem: An annotated Bibliography (2000-2009) and (1963- 1999) , arXiv: math/0608208v5, 2011.

[8] T. Oliviera e. Silva. Empirical Verification of the 3x+1 and Related Conjectures., in The Ultimate Challenge: The 3x+1 Problem," (edited by Jeffrey C. Lagarias), American Mathematical Societey, pages 189-207, 2010.

[9] G. Rhin. Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité, Goldstein (ed.), Séminaire de Théorie des nombres, Paris 1985-86, Springer Science+Business Media New York , pages 155-164, 1987.

[10] O. Rozier. Démonstration de l'absence de cycles d'une certaine forme pour le problème de Syracuse, Singularité, 1, (3): 9-10, 1990.

[11] J. Simons and B. de Weger. Theoritical and computational bounds for m-cycles of the 3n + 1 problem, Acta Arithmetica, 117: 51-70, 2005.