

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| Вступление . . . . .   | 3  |
| Раздел 1 Основные понятия и определения . . . . .  | 4  |
| 1.1 Элементы теории игр . . . . .  | 4  |
| 1.2 Элементы анализа на временных шкалах . . . . .   | 4  |
| Раздел 2 Макроэкономические модели на временных шкалах . . . . .                               | 7  |
| 2.1 Классическая модель Барро-Гордона . . . . .  | 7  |
| 2.2 Теоретико-игровая интерпретация модели Барро-Гордона . . . .                               | 11 |
| 2.3 Устойчивость равновесных стратегий в модели Барро-Гордона<br>на временных шкалах . . . . . | 13 |
| 2.4 Классическая модель профсоюз—монополист . . . . .  | 17 |
| 2.5 Модель профсоюз—монополист на временных шкалах . . . . .                                   | 18 |
| Раздел 3 Компьютерная имитация макроэкономических моделей . . . .                              | 21 |
| 3.1 Анализ устойчивости стратегий в модели Барро-Гордона . . . .                               | 21 |
| 3.2 Анализ устойчивости стратегий в модели профсоюз — моно-<br>полист . . . . .                | 25 |
| Выводы . . . . .   | 30 |
| Список литературы . . . . .  | 31 |
| Приложение А . . . . .   | 32 |

## ВСТУПЛЕНИЕ

Актуальность макроэкономических моделей, рассмотренных в работе, обусловлена тем, что они представляют собой попытку объединить два математических подхода к моделированию реальных процессов управления и принятия решений.

Первый — теоретико-игровой — подход позволяет рассматривать ситуации конфликта интересов. Даже предельно упрощенные модели в виде биматричных игр являются основой для интересных выводов прикладного характера.

Второй подход заключается в рассмотрении конфликта как явления протяженного во времени, динамического процесса принятия решений противоборствующими сторонами. Вместе с классическими повторяющимися играми в последнее время активно изучаются игры на временных шкалах, т. е. игры, в которых время для одного или всех игроков устроено сложнее, чем просто множество  $\mathbb{N}_0$ .

В данной дипломной работе, отталкиваясь от известных результатов по изучению модели Барро—Гордона на временных шкалах, предложена и изучена модель взаимодействия профсоюза и фирмы—монополиста. Разработанное программное обеспечение позволило путем имитационного моделирования изучить свойства предложенной модели и сформулировать определенные выводы о способах формирования долгосрочного равновесия.

Структура работы следующая: в разделе 1 кратко излагаются элементы теории игр и анализа на временных шкалах. Раздел 2 посвящен описанию теоретического базиса обоих рассмотренных моделей. В разделе 3 излагаются результаты компьютерных экспериментов с изученными моделями, далее формулируются выводы. Завершает текст работы список использованной литературы и приложение, в котором приведен прокомментированный исходных код приложения.

# РАЗДЕЛ 1    ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

## 1.1    Элементы теории игр

**Определение 1.**  $(S, H)$  — не кооперативная игра  $n$  лиц в нормальной форме, где  $S$  — набор чистых стратегий, а  $H$  — набор выигрышей. Когда каждый игрок  $i \in \{1, \dots, n\}$  выбирает стратегию  $x_i \in S$  в профиле стратегий  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , игрок  $i$  получает выигрыш  $H_i(x)$ . Профиль стратегий  $x^* \in S$  является равновесием по Нэшу, если изменение своей стратегии с  $x_i^*$  на  $x_i$  не выгодно ни одному игроку  $i$ , то есть  $\forall i : H_i(x^*) \geq H_i(x_i, x_{-i}^*)$ .

**Определение 2.** Равновесие по Нэшу называется безупречным по подыграм, если и только если оно является равновесием по Нэшу для каждой подыгры.

**Определение 3.** Парето-оптимальность в смысле теории игр характеризует такую ситуацию, при которой невозможно улучшить исход игры для одного игрока без его ухудшения для других игроков.

**Определение 4.** Инфляция — повышение общего уровня цен на товары и услуги.

**Определение 5.** Индексация заработной платы — повышение заработных плат с целью частичной защиты населения от роста потребительских цен на товары и услуги.

**Определение 6.** Любое совершенное равновесие по подыграм (SPNE), в котором оба игрока выбирают стратегию  $L$  во всех своих ходах, назовём **совершенным равновесием Рамсея по под-играм (Ramsey SPNE) [1]**

## 1.2    Элементы анализа на временных шкалах

Сведения из теории временных шкал приводятся следуя двум основным источникам [2, 3].

**Определение 7.** Под временной шкалой понимается непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел, она обозначается символом  $\mathbb{T}$ . Свойства временной шкалы определяются тремя функциями:

1) оператор перехода вперед:

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\};$$

2) оператор перехода назад:

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\},$$

(при этом полагается  $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$  и  $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ );

3) функция зернистости

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Поведение операторов перехода вперед и назад в конкретной точке временной шкалы определяет тип этой точки. Соответствующая классификация точек представлена в таблице (1.1).

|                       |                           |
|-----------------------|---------------------------|
| $t$ справа рассеянная | $t < \sigma(t)$           |
| $t$ справа плотная    | $t = \sigma(t)$           |
| $t$ слева рассеянная  | $\rho(t) < t$             |
| $t$ слева плотная     | $\rho(t) = t$             |
| $t$ изолированная     | $\rho(t) < t < \sigma(t)$ |
| $t$ плотная           | $\rho(t) = t = \sigma(t)$ |

Таблица 1.1 – Классификация точек временной шкалы

**Определение 8.** Множество  $\mathbb{T}^\kappa$  определим как:

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \{M\}, & \text{если } \exists \text{ справа рассеянная точка } M \in \mathbb{T} : \\ & M = \sup \mathbb{T}, \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее полагаем  $[a, b] = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}$ .

**Определение 9.** Пусть  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $t \in \mathbb{T}^\kappa$ . Число  $f^\Delta(t)$  называется  $\Delta$ -производной функции  $f$  в точке  $t$ , если  $\forall \varepsilon > 0$  найдется такая окрестность  $U$  точки  $t$  (то есть,  $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}, \delta < 0$ ), что

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U.$$

**Определение 10.** Если  $f^\Delta(t)$  существует  $\forall t \in \mathbb{T}^\kappa$ , то  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $\Delta$ -дифференцируемой на  $\mathbb{T}^\kappa$ . Функция  $f^\Delta(t) : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$  называется дельта-производной функции  $f$  на  $\mathbb{T}^\kappa$ .

Если  $f$  дифференцируемая в  $t$ , то

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t).$$

**Определение 11.** Функция  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  называется регулярной, если во всех плотных справа точках временной шкалы  $\mathbb{T}$  она имеет конечные правосторонние пределы, а во всех слева плотных точках она имеет конечные левосторонние пределы.

**Определение 12.** Функция  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $rd$ -непрерывной, если в справа плотных точках она непрерывна, а в слева плотных точках имеет конечные левосторонние пределы. Множество таких функций обозначается  $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T})$ , а множество дифференцируемых функций, производная которых  $rd$ -непрерывна, обозначается как  $C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T})$ .

**Определение 13.** Для любой регулярной функции  $f(t)$  существует функция  $F$ , дифференцируемая в области  $D$  такая, что для всех  $t \in D$  выполняется равенство

$$F^\Delta(t) = f(t).$$

Эта функция называется пред-первообразной для  $f(t)$  и определяется она неоднозначно.

Неопределенный интеграл на временной шкале имеет вид:

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C,$$

где  $C$  — произвольная константа интегрирования, а  $F(t)$  — пред-первообразная для  $f(t)$ . Далее, если для всех  $t \in \mathbb{T}^\kappa$  выполняется  $F^\Delta(t) = f(t)$ , где  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  —  $rd$ -непрерывная функция, то  $F(t)$  называется первообразной функции  $f(t)$ . Если  $t_0 \in \mathbb{T}$ , то  $F(t) = \int_{t_0}^t f(s)\Delta s$  для всех  $t$ . Определенный

$\Delta$ -интеграл для любых  $r, s \in \mathbb{T}$  определяется как

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r).$$

## РАЗДЕЛ 2    МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

### 2.1    Классическая модель Барро-Гордона

Классическая модель Барро-Гордона рассматривает правительство (в лице некоторого одного политика), которое принимает решение о мерах воздействия на экономику основываясь на двух факторах. Первый фактор является собой суммарную функцию благосостояния вида

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t w_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left( y_t - \frac{\lambda \pi^2}{2} \right), \quad 0 < \beta < 1, \quad (2.1)$$

где  $\beta^t$  - значимость  $t$ -ого периода для благосостояния политика,  $w_t$  - функция благосостояния политика в  $t$ -ом периоде. При этом взаимосвязь между инфляцией и безработицей задается кривой Лукаса

$$y = y^* + \alpha(\pi - \pi^\beta). \quad (2.2)$$

Второй фактор принятия решения – это оценка общественностью действий правительства в виде поддержки или недоверия. Такая оценка в модели задается через инфляционные ожидания, которые формируются в период  $t$  следующим образом:

$$\pi_t = \begin{cases} \pi, & \forall t : \pi_t = \tilde{\pi}_t, \\ \frac{\alpha}{\lambda}, & \exists s < t : \pi_s \neq \tilde{\pi}_s, \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $\tilde{\pi}$  - уровень инфляции, который политик обещают достичь в результате воздействия на экономику.

Как следует из (2.3), если политик ведет себя честно, то общественность ему доверяет и ожидает обещанный им уровень инфляции. Если политик хотя бы раз, обманув ожидания, провел не ту политику, которую обещал, то общественность ему не верит. В таком случае она ожидает отличный от обещанного уровень инфляции, который составляет  $\frac{\alpha}{\lambda}$ , поскольку полагает, что в случае обмана политик будет стремиться к тому, чтобы в экономике установился именно этот уровень инфляции.

Действительно, в случае обмана политик выберет такой уровень инфляции, который будет максимизировать его функцию благосостояния в этом периоде (допустим, в периоде  $s$ ). Поскольку, согласно (2.1)-(2.3), функция

благополучия периода  $s$  при  $\pi_s \neq \tilde{\pi}$  имеет вид

$$w_s = y^* \alpha \left( \pi_s - \frac{\lambda \pi_s^2}{2} \right), \quad (2.4)$$

то максимизирующий её уровень инфляции будет равен величине  $\frac{\alpha}{\lambda}$ , что следует из первого условия максимизации.

Так как репутация политика влияет на инфляционные ожидания общественности, то, согласно (2.1)-(2.2), репутация влияет также и на его общую функцию благополучия. Предположим, что политик ведет себя честно, то есть проводит ту политику, которую обещал. Тогда его общая функция благополучия принимает вид

$$w^{fair} = \frac{1}{(1-\beta)} \left( y^* - \frac{\lambda \pi^2}{2} \right), \quad (2.5)$$

поскольку в этом случае, согласно (2.1)-(2.3), функция благополучия для любого периода  $t$  имеет вид

$$w_t^{fair} = y^* - \frac{\lambda \pi^2}{2}. \quad (2.6)$$

Если политик решит обмануть ожидания общественности в какой-то (допустим в нулевой) период времени, то в этом случае, согласно (2.1)-(2.3), его функция благополучия в нулевой период составит

$$w_0^{deception} = y^* - \frac{\alpha^2}{2\lambda} - \alpha \tilde{\pi}, \quad (2.7)$$

а во все последующие периоды вследствие недоверия населения общественности

$$w_0^{deception} = y^* - \frac{\alpha^2}{2\lambda}. \quad (2.8)$$

Следовательно, общая функция благополучия политика в случае нарушения данных обещаний имеет вид

$$W^{deception} = \frac{1}{(1-\beta)} y^* + \frac{(1-2\beta)\alpha^2}{(1-\beta)2\lambda} - \alpha \tilde{\pi}, \quad (2.9)$$

Очевидно, что политику имеет смысл вести себя честно только при условии  $W^{fair} > W^{deception}$ , в противном случае он выигрывает больше от невыполнения данных ранее обещаний.

Выведем условия, при которых политик ведет себя честно, не обманы-

вая ожидания населения. Воспользуемся для этого графической интерпретацией этой проблемы: построим графики выигрыша и проигрыша политика в случае обмана и найдем области, в которых выигрыш будет больше проигрыша и наоборот.

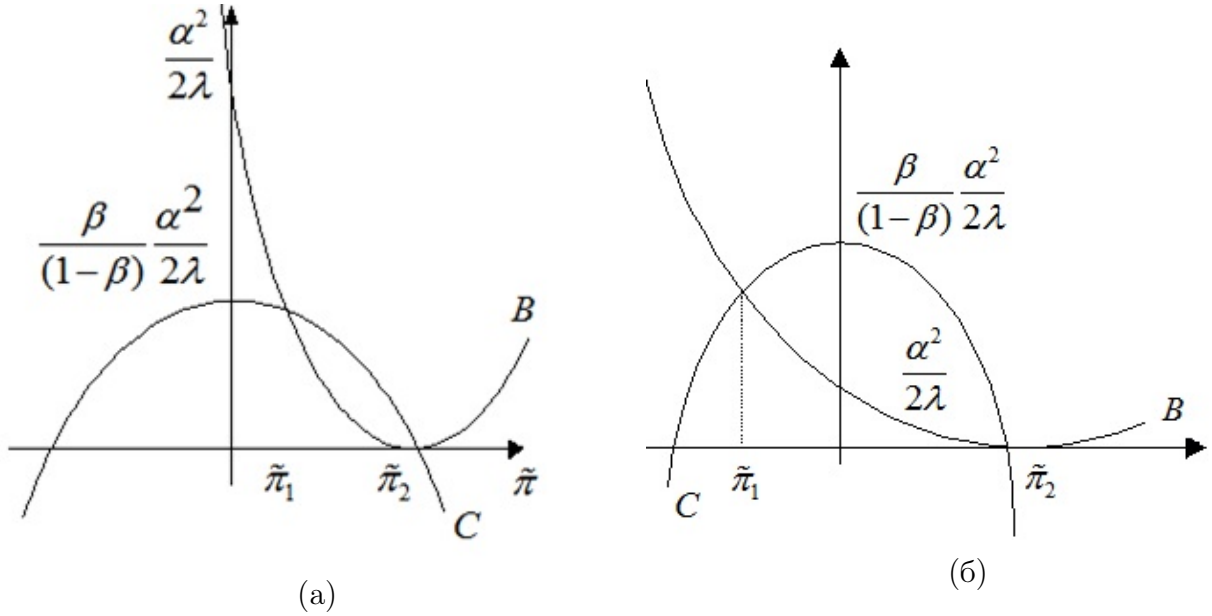


Рис 2.1

Если политик обманывает ожидания общественности в нулевой момент времени, то выигрыш он получает за счет того, что в нулевой момент времени обманул ожидания общественности, а проигрыш – что в дальнейшем общественность перестает ему доверять и всегда ожидает больший уровень инфляции, чем было объявлено.

Следовательно, выигрыш обманывающего население в нулевой момент времени политика

$$B = w_0^{deception} - w_0^{fair} = \frac{\lambda \pi^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2\lambda} - \alpha \tilde{\pi} \quad (2.10)$$

является квадратичной функцией от объявляемого уровня инфляции. Эта функция достигает минимума  $B = 0$  в точке  $\tilde{\pi} = \frac{\alpha}{\lambda}$ . При  $\tilde{\pi} = 0$  выигрыш равен  $\frac{\alpha^2}{\lambda}$ .

Проигрыш обманывающего население в нулевой момент времени политика также является квадратичной функцией от объявляемого уровня инфляции, поскольку

$$C = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t (w_t^{deception} - w_t^{fair}) = -\frac{\lambda \tilde{\pi}^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2\lambda}. \quad (2.11)$$



Функция, задаваемая выражением (2.11), описывает параболу, достигающую максимума  $C = \frac{\beta}{(1-\beta)} \frac{\alpha^2}{2\lambda}$  в точке  $\tilde{\pi} = 0$ . Значение функции  $C$  равняется нулю, когда уровень инфляции составляет  $\tilde{\pi} \pm \frac{\alpha}{\lambda}$ .

Взаиморасположение графиков потерь и выигрыша обманывающего общественность в нулевой момент времени политика зависит от того, больше или меньше единицы величина  $\frac{\beta}{1-\beta}$ .

Если  $\frac{\beta}{1-\beta} < 1$ , то есть  $\beta < \frac{1}{2}$ , то функция потерь и функция выигрыша пересекаются в точках  $\tilde{\pi}_1 > 0$  и  $\tilde{\pi}_2 > 0$  (2.1а), причем  $\tilde{\pi}_1 = \frac{\alpha(1-2\beta)}{\lambda}$ ,  $\tilde{\pi}_2 = \frac{\alpha}{\lambda}$ . Если  $\frac{\beta}{1-\beta} > 1$ , то есть  $\beta > \frac{1}{2}$ , то функция потерь и функция выигрыша пересекаются в точках  $\tilde{\pi}_1 < 0$ ,  $\tilde{\pi}_2 > 0$  (2.1б).

Таким образом, из проведенного анализа следует, что поведение политика (будет он выполнять обещания или нет) зависит от его отношения к репутации. Если для него репутация не важна, будущее мало влияет на его функцию благосостояния  $\beta < \frac{1}{2}$ , то политику не выгодно вести себя честно. Поскольку, как видно из (2.1а), существует достаточно невысокий уровень инфляции  $\tilde{\pi} \in \left(0; \frac{\alpha(1-2\beta)}{\lambda}\right)$ , обещая который он может выиграть больше в результате обмана (по сравнению с честным поведением). Если для политика его репутация важна, будущее значимо для его благосостояния  $\beta < \frac{1}{2}$ , то ему имеет смысл вести себя честно. Поскольку, как видно из (2.1б), не существует уровня инфляции близкого к нулю, обещая который он может получить большую реализацию своих целей в результате обмана по сравнению с честным поведением.

## 2.2 Теоретико-игровая интерпретация модели Барро-Гордона

В игре участвуют два игрока:  $p$  - правительство,  $q$  - общественность, которые оперируют инфляцией  $\pi$  и индексированием заработной платы  $\omega$  соответственно. Для упрощения модели положим, что оба не могут прогнозировать будущее. Каждый игрок выбирает из следующих стратегий: низким  $L$  и высоким  $H$  уровнем повышения. В общем виде игра может быть задана в виде матрицы выигрышей,

|               |   | Общественность |     |
|---------------|---|----------------|-----|
|               |   | L              | H   |
| Правительство | L | a,q            | b,v |
|               | H | c,x            | d,z |

где параметры  $a, b, c, d, q, v, x, z$  - выигрыши удовлетворяющие следующим ограничениям [1]

$$c > a > d > b, q > v, q \geq z > x. \quad (2.12)$$

В данном случае проще всего описать экономику через функцию совокупного предложения Лукаса [4]

$$y_t - Y = \lambda(\pi_t - \omega_t) + \varepsilon_t, \quad (2.13)$$

где  $\lambda > 0$ ,  $y$  - производительность,  $Y$  - естественный уровень производительности, а  $\varepsilon$  - макроэкономический шок близкий к нулю. Коэффициенты дисконтирования игроков составляют  $\beta_g$  и  $\beta_p$ , а их функции полезности имеют следующий вид

$$u_t^g = -(\pi_t - \tilde{\pi})^2 + \alpha y_t - \beta(y_t - Y)^2, \quad (2.14)$$

$$u_t^p = -(\pi_t - \omega)^2, \quad (2.15)$$

где  $\tilde{\pi}$  - оптимальный уровень инфляции, а  $\alpha > 0, \beta > 0$  описывают относительный вес целей правительства (стабильной инфляции, высокой и стабильной производительности). Общественность озабочена верным ожиданием уровня инфляции для того, чтобы определить уровень зарплат на рынке.

Так как нас интересует эффект от выбранной политики, то сфокусируемся на долгосрочном исходе игры. Для этого однозначно определим экономику положив  $\forall t, \varepsilon_t = 0$ , что подразумевает, что мы можем положить  $\beta = 0$  без потери общности. Из этого следует, что инструмент правительства

$\pi$  представляет собой выбор средней инфляции.

В стандартной пошаговой игре, в которой игроки могут менять свое поведение в каждый период, мы используем (2.13)-(2.14) для получения равновесия

$$\pi_t^* = \tilde{\pi} + \frac{\alpha\lambda}{2} = \omega_t^*, \quad (2.16)$$

что является известным результатом  $\pi_t^* > \tilde{\pi}$ . Сфокусировав внимание на двух уровнях инфляции мы следуем [5], где были предложены два наиболее естественных варианта – оптимальный уровень из (2.14) и согласованного по времени из (2.16)

$$\pi \in \left\{ L = \tilde{\pi}, H = \tilde{\pi} + \frac{\alpha\lambda}{2} \right\} \ni \omega_t^*. \quad (2.17)$$

Мы можем, учитывая (2.13)-(2.15) и поделив на  $\left(\frac{\alpha\lambda}{2}\right)$ , без потери общности вывести соответствующие выигрыши, представленные в таблице ниже. Так же вне зависимости от  $\lambda$  и  $\alpha$  справедливы следующие ограничения для данной игры в дополнение к изначальным (2.12)

$$c > a = 0 > d > b, c = -d = -\frac{b}{2}, q > v, q \geq z > x \quad (2.18)$$

$$c = 1 > a = 0 > d = -1 > b = -2, q = z = 0 > v = x = -1, \quad (2.19)$$

Таблица 2.1

|               |   | Общественность    |                   |
|---------------|---|-------------------|-------------------|
|               |   | L                 | H                 |
| Правительство | L | 0, 0              | -1, -1            |
|               | H | $\frac{1}{2}, -1$ | $-\frac{1}{2}, 0$ |

Стандартная пошаговая игра имеет уникальное равновесие по Нэшу  $(H, H)$ . Однако, оно неэффективно, так как является Парето доминированным. Это означает, что существует такой исход игры, который улучшит состояние одного, но при этом не ухудшит его для других игроков. В данном случае это «не Нэшовский» исход  $(L, L)$ . У правительства возникает соблазн создать неожиданную инфляцию, чтобы повысить производительность и снизить уровень безработицы. Так как общественность рациональна, то будет ожидать высокую инфляцию – оба игрока будут в проигрыше.

## 2.3 Устойчивость равновесных стратегий в модели Барро-Гордона на временных шкалах

Рассмотрим игровую интерпретацию модели Барро-Гордона на временных шкалах.

Все допущения выдвинутые в стандартной игре остаются. Расширим их:

- игра начинается одновременным ходом,
- заранее известно неизменное количество ходов  $r^g \in \mathbb{N}$  и  $r^p \in \mathbb{N}$ ,
- игра заканчивается через  $T$  периодов, где  $T$  - наименьшее общее кратное для  $r^g$  и  $r^p$ ,
- игроки рациональны, обладают равноценными знаниями и полной информацией о структуре игры, матрице выигрышей и всех предыдущих ходах.

Другими словами определяется три временных шкалы: правительства, общественности и самой игры:

$$T_g = \{0, r^g, 2r^g, \dots, T\}, T_p = \{0, r^p, 2r^p, \dots, T\}, T = T_g \cup T_p \quad (2.20)$$

Главным преимуществом использования однородных временных шкал является экономическая интерпретация:  $r^g$  и  $r^p$  представляют собой степень возможности изменений политики относительно инфляции и степень реагирования для внесения изменений в заработные платы.

Асинхронная игра на временных шкалах будет как правило иметь несколько равновесий по Нэшу, среди которых мы выберем лучшую в зависимости от под-игры.

**Теорема 1.** *Рассмотрим общую несогласованную по времени игру на однородных временных шкалах, для которой выполняются (2.18) и (2.20). Тогда все SNPE игры будут SNPE Рамсея, если и только если*

$$r^g > \bar{r}^g(R) = \begin{cases} \frac{c-d}{a-d}r^p = \frac{a-b}{a-d}r^p, & \text{если } R = 0 \\ \frac{(1+R)(c-d)}{a-d}r^p = \frac{a-b+R(c-d)}{a-d}r^p, & \text{если } R \in (0; \bar{R}) \\ \frac{c-d-(1-R)(a-b)}{a-d}r^p = \frac{(a-b)}{a-d}Rr^p, & \text{если } R \in (\bar{R}; 1) \end{cases} \quad (2.21)$$

где  $\bar{R} = \frac{q-v}{z-x+q-v}$ . В несогласованной игре, где справедливо (2.18), (2.21)

преобразуется в

$$\frac{r^g}{r^p} \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right) \quad (2.22)$$

Доказательство: смотреть Либиха и Штелиха [4].

Можно утверждать, что действия игроков могут не всегда быть детерминистическими и/или что частота их ходов различается во времени или подчиняется некоторому случайному процессу. Разнородные временные шкалы позволяют изучать подобные случаи. Для большей эффективности нормализуем горизонт планирования как  $T = r^g$ . Как и ранее игроки  $g$  и  $p$  ходят одновременно в первом периоде и во всех  $T = r^g$  периодах, в промежутках между которыми общественность так же способна реагировать на ход правительства. Для удобства сравнения оставим все предположения предыдущего параграфа неизменными.

Рассмотрим произвольную временную шкалу  $\mathbb{T}$  и произвольную невозрастающую функцию реакции общественности  $f : \mathbb{T} \rightarrow [0,1]$ . В данной работе рассматриваются два представляющих интерес особых случая. В первом, при разнородной (атомистической) общественности, функция реакции может быть интерпретирована как часть общественности, которая уже имела возможность совершить ход. Во втором, при вероятностных ходах общественности, функция реакции может быть интерпретирована как кумулятивная функция распределения её ходов.

Чтобы удостовериться в том, что все SPNE являются SPNE Рамсея, достаточно показать, что в первом ходе оптимальной стратегией  $g$  является  $L$  вне зависимости от хода общественности в первом периоде. Получим два соответствующих условия:

$$ar^g > c \int_0^{r^g} 1 - f(t) \Delta t + d \int_0^{r^g} f(t) \Delta t, \quad (2.23)$$

$$dr^g > b \int_0^{r^g} 1 - f(t) \Delta t + a \int_0^{r^g} f(t) \Delta t. \quad (2.24)$$

**Теорема 2.** *Рассмотрим общую несогласованную по времени игру, в которой выполняется (2.18) и  $f : \mathbb{T} \rightarrow [0,1]$  – невозрастающая функция реакции. Тогда все SPNE игры являются SPNE Рамсея тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\int_0^{r^g} f(t) \Delta t > \frac{r^g}{2}. \quad (2.25)$$

Для лучшей наглядности теоремы 2 и лучшего понимания приведём несколько следствий и рассмотрим пример. Как уже было указано ранее, мы концентрируемся на двух случаях: разнородной общественности и вероятностных моделях.

**2.3.1 Разнородная общественность.** Во-первых, предположим, что существует  $N$  различных общественных групп (профсоюзов)  $p_1, \dots, p_N$  с соответствующими  $r^{p_1}, \dots, r^{p_N}$  и размерами  $s_1, \dots, s_N \in [0, 1]$ , которые удовлетворяют естественному предположению  $\sum_{i=1}^N N s_i = 1$ . Чтобы свести наше внимание к первому ходу правительства, предположим что  $r^g$  является кратным для  $r^{p_i}$  для всех  $i = 1, \dots, N$ , то есть

$$\frac{r^g}{r^{p_i}} \in \mathbb{N}.$$

Для более асинхронных случаев см. [4]. Для данного особого случая теореме 2 можно переписать следующим образом.

**Следствие 1.** *Рассмотрим общую несогласованную по времени игру, в которой выполняется (2.18) и общественность состоит из  $N$  различных групп. Тогда все SPNE игры являются SPNE Рамсея тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^N s_i (r^g - r^{p_i}) \geq \frac{r^g}{2}. \quad (2.26)$$

**2.3.2 Вероятностная модель.** Вернёмся к случаю с унифицированной общественностью, чтобы рассмотреть вероятностные ходы отдельно от влияния эффектов разнородной общественности. В зависимости от результатов переговоров общественность будет реагировать на первый ход правительства в какой-то момент времени из интервала  $[a, b]$ ,  $0 < a < b < r^g$ , с равномерно распределённым вероятностным законом. Теорема 2 принимает вид:

**Следствие 2.** *Рассмотрим общую несогласованную по времени игру, в которой выполняется (2.18) и общественность делает второй ход в какой-то момент времени из интервала  $[a, b]$  с равномерно распределённым вероятностным законом. Тогда все SPNE игры являются SPNE Рамсея тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\frac{b^2 - a^2}{2} \geq b - \frac{r^g}{2}. \quad (2.27)$$

Очевидно, что можно рассматривать произвольные комбинации описанных выше подходов, то есть разнородных игроков с вероятностными ходами, вероятность которых может быть описана некоторыми функциями распределения. Приведём пример.

**Пример 1.** Рассмотрим экономику с двумя профсоюзами, каждый из которых состоит из  $s_1$  и  $s_2$  рабочих соответственно, так что выполняется  $s_1 + s_2 = 1$ . Примем в качестве одного периода квартал (раз в квартал выпускаются сводки по макроэкономике). Предположим, что  $r^g = 5$  и что время реакции профсоюзов составляют как минимум 1 и 3 квартала, но как максимум – 1,5 и 3,5 квартала соответственно. Для простоты предположим, что решение, принятое за полтора квартала подчиняется равномерному закону распределения. Тогда получим:

$$\mathbb{T} := 0 \cup [1, 1.5] \cup r^g,$$

$$\mathbb{T} := 0 \cup [3, 3.5] \cup r^g.$$

Функция реакции тогда имеет вид  $f : \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2 \rightarrow [0, 1]$ :

$$f(x) \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0, \\ 2s_1(x - 1) & \text{if } x \in [1, 1.5], \\ s_1 + 2s_2(x - 3) & \text{if } x \in [3, 3.5], \\ 1 & \text{if } x = 5. \end{cases}$$

Интегрируя по  $\mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2$  получим

$$\int_0^5 f(x) \Delta x = \frac{15}{4}s_1 + \frac{7}{4}s_2.$$

Предположение (2.25) теоремы 2 удовлетворяется (и следовательно единственное равновесие является равновесием Рамсея) тогда и только тогда, когда выполняется

$$s_1 \geq \frac{3}{8}, \text{ или, что эквивалентно, } s_2 \leq \frac{5}{8}.$$

Интуитивно понятно, что профсоюз, принимающий решения быстрее, должен быть достаточно велик для того, чтобы общая реакция общественности была достаточно быстрой, чтобы препятствовать увеличению инфляции правительством.

## 2.4 Классическая модель профсоюз—монополист

Данная модель является моделью отношений профсоюз—фирма по Леонтьеву [6], в которой профсоюз задаёт уровень заработной платы  $W$ , после чего фирма выбирает желаемое количество наёмных работников (уровень найма)  $E$ . Предполагается, что фирма оперирует в условиях конкурентного рынка с рыночной ценой  $P$ .

Функция полезности профсоюза имеет вид

$$U = U(W, E), \quad \frac{\partial U}{\partial W} > 0; \quad \frac{\partial U}{\partial E} > 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial W^2} \leq 0.$$

В простейшем случае можно взять, например,  $U = \lambda W E$ , где  $\lambda \in (0; 1)$ .

Полезность для фирмы измеряется как прибыль

$$\Pi = PY(\bar{K}, E) - WE,$$

где цена  $P$  дана, а капитал  $\bar{K}$  фиксирован. Отсюда мы можем переписать

$$\Pi(W, E) = R(E) - WE,$$

где  $R$  — доход.

Классическим является решение методом обратной индукции. При этом вначале фирма максимизирует свою прибыль по  $E$ , считая уровень заработной платы фиксированным и заданным. Условие экстремума первого порядка примет вид

$$W = R'(E).$$

Разрешая уравнение относительно  $E$ , мы получим кривую спроса на рабочую силу:  $E = g(W)$ . Зная, к чему приходит фирма, профсоюз решает задачу

$$\max_W U(W, E) = U(W, g(W)).$$

Схематически решение представлено на графике 2.2. Графически можно показать, что исход игры неэффективен. Точка  $X$  является точкой равновесия обратной индукции модели монополии профсоюза. Точки в закрашенной области предпочтительнее по Парето, чем  $X$ .  $AB$  является так называемой кривой контракта, состоящей из точек, в которых изопрофиты и кривые безразличия профсоюза имеют общий тангенс [7].



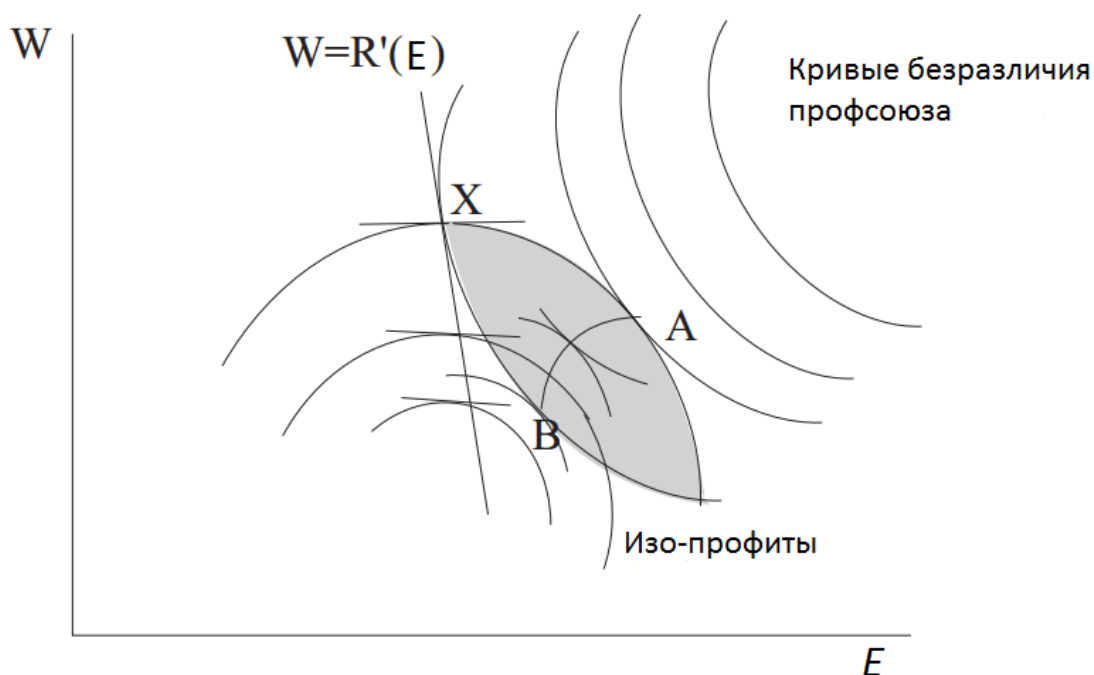


Рис 2.2 – Кривые безразличия игроков в модели профсоюз—монополист

## 2.5 Модель профсоюз—монополист на временных шкалах

Эта модель в литературе не встречается и исследована нами впервые. В игре, также как и в непрерывной модели, два игрока: профсоюз  $P$  и фирма—монополист  $F$ , чьими рычагами влияния на игру являются  $W$  (зарплата рабочего) и  $E$  (количество нанятых рабочих) соответственно. Каждый игрок выбирает одну из двух стратегий: установить низкое  $L$  или высокое  $H$  значение управляемого им параметра. В общем виде игра может быть задана следующей матрицей выигрышей:

|       |     | Профсоюз |        |
|-------|-----|----------|--------|
|       |     | $L$      | $H$    |
| Фирма | $L$ | $a, q$   | $b, v$ |
|       | $H$ | $c, x$   | $d, z$ |

Функцию полезности профсоюза мы полагаем линейной:  $U(W, E) = \lambda W E$ , где  $\lambda \in (0; 1)$ :

$$\frac{\partial U}{\partial W} > 0; \quad \frac{\partial U}{\partial E} > 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial W^2} \leq 0$$

$$U(0, E) = U(W, 0) = U(0, 0) = 0.$$

Функция полезности фирмы имеет вид  $\Pi(W, E) = cP(\bar{K}, E) - WE$ :

$$P(\bar{K}, E) = A\bar{K}^\alpha E^\beta,$$

где  $A$  — коэффициент нейтрального технического прогресса,  $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты эластичности валового внутреннего продукта по капитальным и трудовым затратам.

Для профсоюза соотношения между значениями функции полезности для различных игровых ситуаций будут следующими:

$$U(L, L) < U(L, H) \approx U(H, L) < U(H, H). \quad (2.28)$$

Соотношение  $U(L, H) \approx U(H, L)$  не может быть определено однозначно, так как это «политический» выбор между двумя альтернативами: большее количество людей, получающих меньшую зарплату (условно «левый» подход к распределению доходов) или меньшее количество людей, получающих большую зарплату (условно «правый» подход).

Для нахождения соотношений между значениями функции полезности фирмы в разных игровых ситуациях построим график 2.3.

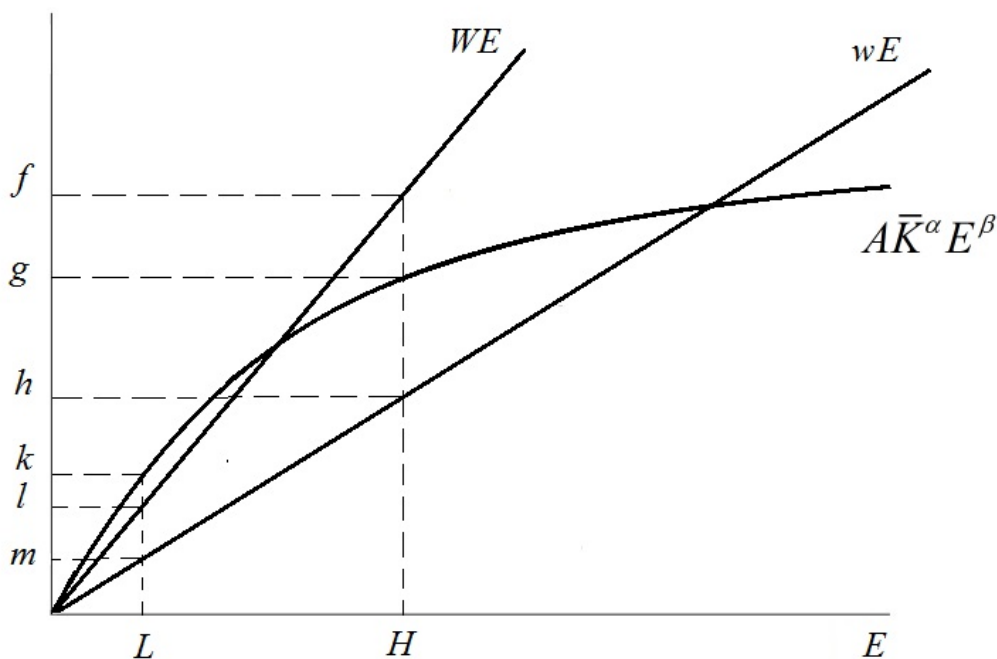


Рис 2.3 — Компоненты функции полезности фирмы при разных уровнях зарплат

На рисунке  $w$  — низкий уровень зарплат по стратегии  $L$ ,  $W$  — высокий

уровень зарплат по стратегии  $H$ . Принимая во внимание, что за исключением количества нанятых и уровня зарплат, все остальные величины постоянны, легко вывести следующее:

$$\Pi(H, H) = g - f < \Pi(H, L) = k - l < \Pi(L, L) = k - m < \Pi(L, H) = g - h. \quad (2.29)$$

Следовательно матрица выигрышей будет следующей:

Таблица 2.2

|       |   | Профсоюз |     |
|-------|---|----------|-----|
|       |   | L        | H   |
| Фирма | L | a,q      | b,v |
|       | H | c,x      | d,z |

где  $q < x \approx v < z, 0 > d < b < a < c$ .

## РАЗДЕЛ 3 КОМПЬЮТЕРНАЯ ИМИТАЦИЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В рамках дипломной работы была разработана программа, которая эмулирует биматричную игру на временных шкалах и доказывает эмпирически изложенные в работе результаты.

Разработка программного продукта велась на языке Python 3.4. Программа позволяет пользователю задать  $r^g$ ,  $r^p$  и соответствующие скалярные функции поведения игрока в определенный момент времени. Значениями данной функции будет вероятность выбора игроком стратегии  $H$  в данный период времени. Так же пользователь может задать количество запусков игры с входящими данными для подсчета статистики. В качестве интерфейса входящих данных был выбран простой текстовый файл, что позволяет строить в случае необходимости большие последовательности экспериментов.

### 3.1 Анализ устойчивости стратегий в модели Барро-Гордона

Положим, что матрица выигрышей двух игроков соответствует 2.1,  $r^g = 7$  (количество ходов правительства),  $r^p = 4$  (количество ходов общества).

Таблица 3.1

|               |   | Общество          |                   |
|---------------|---|-------------------|-------------------|
|               |   | L                 | H                 |
| Правительство | L | 0, 0              | -1, -1            |
|               | H | $\frac{1}{2}, -1$ | $-\frac{1}{2}, 0$ |

Проверим выполнение условия теоремы 2.21 для матрицы выигрышей 3.1.

$$r^g > \bar{r}^g(R) = \begin{cases} 2r^p = 2r^p, & \text{если } R = 0 \\ 2(1+R)r^p = 2(1+R)r^p, & \text{если } R \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \\ 2Rr^p = 2Rr^p, & \text{если } R \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases}$$

$$r^g > \bar{r}^g(R) = 0$$

$$4 > 0$$

Следовательно  $\frac{r^g}{r^p} \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$  выбраны правильно и все совершенные равновесия по под-играм должны быть совершенными равновесиями по под-играм Рамсея.

Рассмотрим случай, когда правительство скорее склонно ввести высокий уровень инфляции, а общественность предполагая, что правительство пойдет на этот шаг с высокой долей вероятности поднимет зарплаты.

Зададим распределение вероятностей выбора стратегии  $H$  для каждого из двух игроков:

$$q^g = [0.5; 0.9; 0.7; 0.5; 0.9; 0.73; 0.8],$$

$$q^p = [0.8; 0.9; 0.8; 1].$$

С помощью программы проведем эмуляцию 100 игр с такими исходными данными.

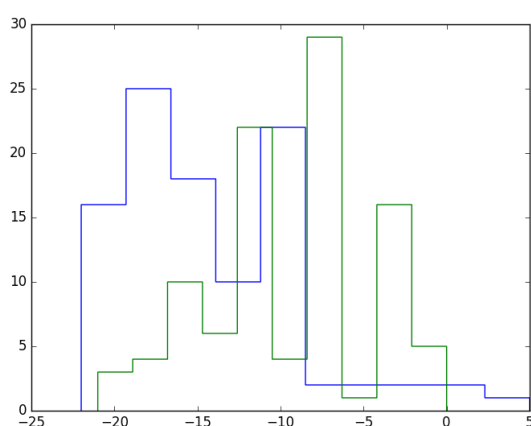


Рис 3.1 – Гистограмма выигрышей, синий - правительство, зеленый - общественность

|                        | Правительство | Общественность |
|------------------------|---------------|----------------|
| Среднее                | -14.26        | -9.46          |
| Стандартное отклонение | 5.34          | 4.66           |
| Ассиметрия             | 1.1           | -0.041         |
| Эксцесс                | 1.37          | -0.37          |

Согласно полученным результатам легко видеть, что подобный набор стратегий невыгоден обеим сторонам, к тому же правительству из-за более «мягкого» подхода «более невыгодно».

Рассмотрим случай, когда правительство на последнем шаге может отступить от оптимальной для обоих игроков стратегии  $(L, L)$ .

Зададим распределение вероятностей выбора данной стратегии для каж-

дого из двух игроков:

$$q^g = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0.3],$$

$$q^p = [0; 0; 0; 0].$$

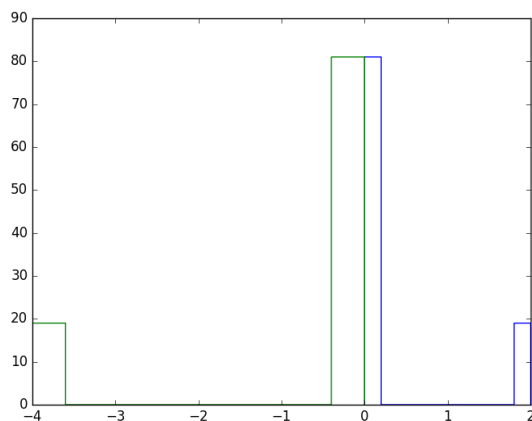


Рис 3.2 – Гистограмма выигрышей, синий - правительство, зеленый - общественность

|                        | Правительство | Общественность |
|------------------------|---------------|----------------|
| Среднее                | 0.39          | -0.78          |
| Стандартное отклонение | 0.78          | 1.56           |
| Ассиметрия             | 1.6           | -1.11          |
| Эксцесс                | 0.58          | 0.58           |

Данная стратегия является выигрышной для правительства, если общественность не ожидает подобного хода под конец действия срока правительства.

Рассмотрим случай, когда общественность доверяет правительству и почти уверенно, что оно не может поднять уровень инфляции к окончанию срока своего правления.

Зададим распределение вероятностей выбора данной стратегии для каждого из двух игроков:

$$q^g = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0.3],$$

$$q^p = [0; 0; 0; 0.15].$$

Легко видеть, что данная стратегия однозначно ухудшает позицию правительства, но так же не выгодна общественности.

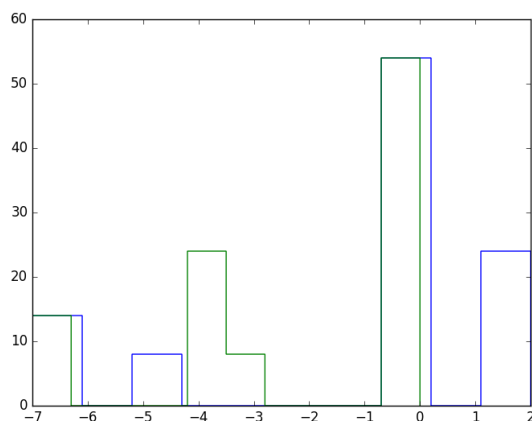


Рис 3.3 – Гистограмма выигрышей, синий - правительство, зеленый - общественность

|                        | Правительство | Общественность |
|------------------------|---------------|----------------|
| Среднее                | -0.9          | -2.18          |
| Стандартное отклонение | 3             | 2.58           |
| Ассиметрия             | -1.16         | -0.68          |
| Эксцесс                | -0.06         | -0.95          |

Рассмотрим случай, когда общественность не доверяет правительству и почти уверенно, что оно повысит уровень инфляции к окончанию срока своего правления. Зададим распределение вероятностей выбора данной стратегии для каждого из двух игроков:

$$q^g = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0.3],$$

$$q^p = [0; 0; 0; 0.8].$$

|                        | Правительство | Общественность |
|------------------------|---------------|----------------|
| Среднее                | -4.8          | -4.62          |
| Стандартное отклонение | 2.99          | 2.65           |
| Ассиметрия             | 1.18          | 0.54           |
| Эксцесс                | -0.12         | -1.15          |

Данная стратегия является равносильно невыгодна для обоих игроков.

В связи с полученными результатами можно сделать вывод, что если правительство имеет больше шагов на временных шкалах, то ей имеет смысл отклониться от оптимальной по Парето стратегии  $(L, L)$  и повысить уровень

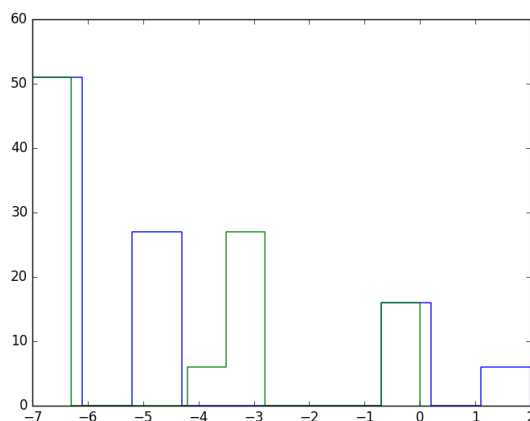


Рис 3.4 – Гистограмма выигрышей, синий - правительство, зеленый - общественность

инфляции под конец срока своего правления, так как даже если общественность будет ожидать такого хода, то с целью минимизировать свои потери не будет повышать индексирование заработной платы заранее. Естественно если правительство захочет заручиться поддержкой общественности на следующих выборах, то такой ход с её стороны будет сродни «политическому самоубийству».

### 3.2 Анализ устойчивости стратегий в модели профсоюз — монополист

Положим матрицу выигрышей в соответствии с 2.2 следующим образом:

|       |   | Профсоюз |        |
|-------|---|----------|--------|
|       |   | L        | H      |
| Фирма | L | 3, 1     | 2, 3.9 |
|       | H | 7, 4     | -3, 7  |

Для нахождения равновесия по Нэшу посчитаем следующее:  
Фирма

$$L : 3\alpha + 2(1 - \alpha) = \alpha + 2$$

$$H : 7\alpha - 3(1 - \alpha) = 10\alpha - 3$$

$$10\alpha - 3 = \alpha + 2$$

$$\alpha = \frac{5}{9}$$

Профсоюз

$$L : \beta + 4(1 - \beta) = -3\beta + 4$$



$$H : 3.9\beta + 7(1 - \beta) = -3.1\beta + 7$$

$$0.1\beta = 3$$

$$\beta = 30$$

Следовательно равновесием по Нэшу будет стратегия  $L, H$ .

В каждом столбце матрицы фирмы найдем максимальный элемент. Затем в каждой строке матрицы профсоюза выберем наибольший элемент. Платежная матрица фирмы:

|             |               |
|-------------|---------------|
| 3, 1        | <b>2, 3.9</b> |
| <b>7, 4</b> | -3, 7         |

Оптимальной по Парето будет стратегия  $(H, L)$ . Далее полагаем  $r^f = 4$  (количество ходов фирмы за одну игру),  $r^p = 3$  (количество ходов профсоюза).

Рассмотрим случай, когда оба игрока стараются следовать равновесной стратегии по Нэшу. Зададим распределение вероятностей выбора первой стратегии для каждого из двух игроков:

$$q^f = [0.9; 0.9; 0.9; 0.9],$$

$$q^p = [0.1; 0.1; 0.1].$$

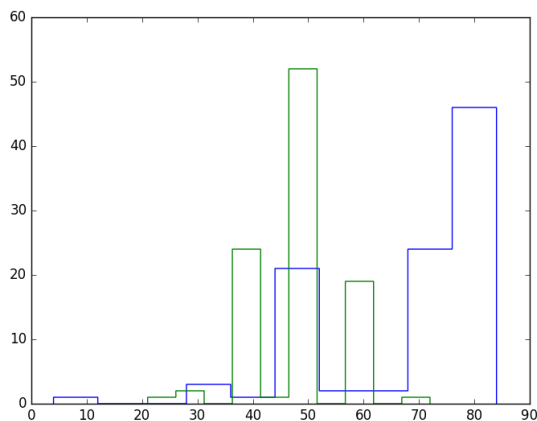


Рис 3.5 – Гистограмма выигрышей, синий - фирма, зеленый - профсоюз

|                        | Фирма | Профсоюз |
|------------------------|-------|----------|
| Среднее                | 69.02 | 47.84    |
| Стандартное отклонение | 18.1  | 8.19     |
| Ассиметрия             | -1.04 | 0.017    |
| Экссесс                | 0.25  | 0.69     |

Рассмотрим случай, когда профсоюз пытается увеличивать зарплату, на своём последнем шаге, а фирма для выхода из нерентабельного положения сокращает количество сотрудников. Зададим распределение вероятностей выбора данной стратегии для каждого из двух игроков:

$$q^f = [0.9; 0.9; 0.9; 0.1],$$

$$q^p = [0.1; 0.1; 0.9].$$

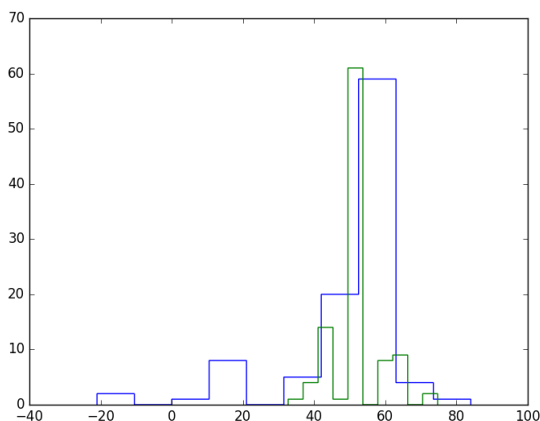


Рис 3.6 – Гистограмма выигрышей, синий - фирма, зеленый - профсоюз

|                        | Фирма | Профсоюз |
|------------------------|-------|----------|
| Среднее                | 50.48 | 51.1     |
| Стандартное отклонение | 17.18 | 7.17     |
| Ассиметрия             | -2.02 | 0.57     |
| Экссесс                | 5.21  | 1.44     |

Такая стратегия незначительно улучшит позиции профсоюза, но заметно пошатнет позицию фирмы.

Рассмотрим случай, когда профсоюз увеличит зарплату во второй раз и вернется к оптимальной стратегии на третий период. Зададим распределение вероятностей выбора данной стратегии для каждого из двух игроков:

$$q^f = [0.9; 0.9; 0.1; 0.9],$$

$$q^p = [0.1; 0.9; 0.1].$$

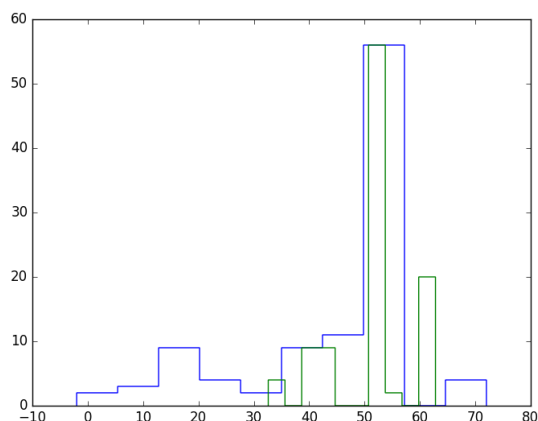


Рис 3.7 – Гистограмма выигрышей, синий - фирма, зеленый - профсоюз

|                        | Фирма | Профсоюз |
|------------------------|-------|----------|
| Среднее                | 43.06 | 50.64    |
| Стандартное отклонение | 14.47 | 7.38     |
| Ассиметрия             | -1.06 | -0.29    |
| Эксцесс                | 1.30  | 0.09     |

Снова таки разовая акция поднятия зарплат даёт профсоюзу незначительный выигрыш, но фирма при этом проигрывает относительно много больше, чем выигрывает профсоюз.

Рассмотрим случай, когда профсоюз поднимает на втором своём ходе зарплату, но не опускает его вплоть до конца игры. Зададим распределение вероятностей выбора этой стратегии для каждого из двух игроков:

$$q^f = [0.9; 0.9; 0.1; 0.2],$$

$$q^p = [0.1; 0.9; 0.8].$$

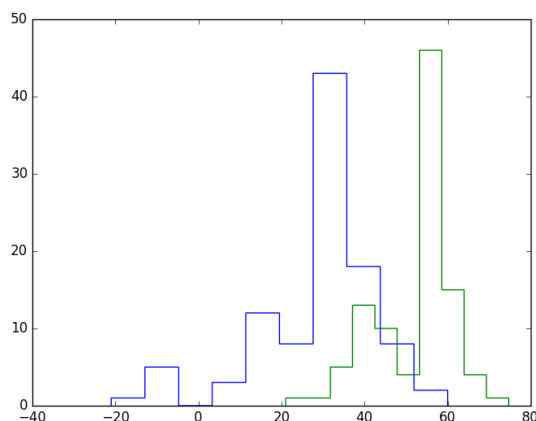


Рис 3.8 – Гистограмма выигрышей, синий - фирма, зеленый - профсоюз

|                        | Фирма | Профсоюз |
|------------------------|-------|----------|
| Среднее                | 30.37 | 51.37    |
| Стандартное отклонение | 13.64 | 8.99     |
| Ассиметрия             | -1.36 | -0.53    |
| Экссесс                | 2.74  | 0.8      |

Фирма снова теряет в относительных деньгах, в то время как профсоюз только незначительно увеличивает своё положение. Разумно с точки зрения фирмы сделать предложение профсоюзу не менять уровень зарплат с оптимального, а взамен отплачивать разным видом бонусов. Тогда функция полезности изменится для обоих игроков на равную величину. Фирме стоит подобрать эту величину бонусов так, чтобы остаток между её оптимальным выигрышем после вычитания бонусов был чем-то средним между собственными выигрышами, когда профсоюз устанавливает высокий уровень зарплат и низкий.

## ВЫВОДЫ

В данной работе была рассмотрена игровая интерпретация модели Барро-Гордона на временных шкалах. Нами впервые введена игровая интерпретация модели «профсоюз — монополист». Эта модель была рассмотрена и на временных шкалах. Разработано программное обеспечение для имитационного моделирования рассмотренных макроэкономических игр.

В результате проведенной работы было показано, что на временных шкалах монополисту стоит договариваться с профсоюзом о дополнительных выплатах (например, в виде бонусов) при низком уровне найма вместо установления высокого уровня найма. В противном случае профсоюз всегда будет устанавливать высокий уровень зарплат, что невыгодно монополисту, так как он потеряет больше, чем если бы отдал часть выручки в виде бонусов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Libich, Jan. Macroeconomic games on time scales / Jan Libich, Petr Stehlik // Dynamic Systems and Applications. — 2008. — Vol. 5. — Pp. 274–278.
- [2] Bohner M., Peterson A. Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications / Peterson A. Bohner M. — Basel : Birkhäuser, 2001. — 358 P.
- [3] Bohner M., Peterson A. Advances in Dynamic Equations on Time Scales / Peterson A. Bohner M. — Springer, 2002. — 368 P.
- [4] Libich, Jan. Incorporating rigidity and commitment in the timing structure of macroeconomic games / Jan Libich, Petr Stehlik // Economic Modelling. — 2010. — Vol. 27, no. 3. — Pp. 767–781.
- [5] Choi S., Smith B. “Inflation, Financial Markets, and Capital Formation / Smith B. Choi, S., J.H. Boyd // Federal Reserve Bank of St. Louis. — 1996. — Vol. 14. — Pp. 41–58.
- [6] Leontief, W. Input-Output Economics / W. Leontief. — 2-nd edition. — 200 Madison Avenue, New York : Oxford University Press, Inc., 1946. — 436 P.
- [7] Toi, L. Game Theory / L. Toi. — Shandong : School of economics, Shandong university, 2012. — 67 P.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

## Пояснения к коду

`util.fromFileToMap(filepath)`

Функция парсит входящие данных

`nash.calculate_nash(government_payoffs, public_payoffs)`

Функция рассчитывает равновесие по Нэшу для стандартной игры.

`nash.time_scales_game(request, government_payoffs, public_payoffs))`

Имитация игры на временных шкалах, результатом которой есть вектор выигрышей игроков за время игры

`util.create_all_stats(array, player_name, time)`

Рассчитывает статистические параметры, строит гистограмму для выигрышей одного игрока.

## Листинг

`entryPoint.py:`

```
from datetime import datetime
import nash
import util

ClientInput = util.fromFileToMap(util.parse().filePath)

GovernmentPayoffs = ['Government',
                     ('L', 'L', 3),
                     ('L', 'H', 5),
                     ('H', 'L', 2),
                     ('H', 'H', -1)]
PublicPayoffs = ['Public',
                 ('L', 'L', 0),
                 ('L', 'H', 2),
                 ('H', 'L', 3),
                 ('H', 'H', 7)]

nash.calculate_nash(GovernmentPayoffs, PublicPayoffs)

time = datetime.timestamp(datetime.now())
stop = int(util.parse().iterations)
mat = [[0] * stop for i in range(2)]
for i in range(0, stop):
    game = nash.time_scales_game(ClientInput, GovernmentPayoffs, PublicPayoffs)
    for j in range(0, 2):
        mat[j][i] = game[j]

util.create_all_stats(mat[0], 'Government', time)
util.create_all_stats(mat[1], 'Public', time)

print("🏁")
```

util.py

```
import argparse
import os
import re

import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats.stats as st
from numpy import std

def fromFileToMap(filePath):
    newDict = {}
    with open(filePath) as f:
        for line in f:
            line = re.split("#", line)
            splitLine = line[0].split()
            newDict[splitLine[0]] = ",".join(splitLine[1:])
    return newDict

def parse():
    parser = argparse.ArgumentParser()
    parser.add_argument('-f', '--filePath', default="files/income.txt")
    parser.add_argument('-i', '--iterations', default=1)
    return parser.parse_args()

def lcm(a, b):
    m = a * b
    while a != 0 and b != 0:
        if a > b:
            a %= b
        else:
            b %= a
    return m // (a + b)

def add(x, y):
    return list(map(lambda a, b: a + b, x, y))

def make_histogramm(array, player_name, path):
    plt.hist(array, histtype='step')
    file_name = str(player_name) + ".png"
    try:
        os.mkdir(path, mode=0o777)
    except OSError:
        pass
    plt.savefig(path + file_name, format='png')

def make_all_calculations(array, player_name, file):
    file.write(str(player_name + "'s average = " + str(float(sum(array)) / len(array)) + "\n"))
    file.write(str(player_name + "'s standard deviation = " + str(std(array)) + "\n"))
```



```

file.write(str(player_name + "'s asymmetry=" + str(st.skew(array, bias=False)) + "\n")
)
file.write(str(player_name + "'s excess=" + str(st.kurtosis(array, bias=False)) + "\n"
))

def create_all_stats(array, player_name, time):
    path = "results/game" + str(time) + "/"
    make_histogramm(array, player_name, path)

    file = open(path + "allEquations.txt", "a")
    make_all_calculations(array, player_name, file)

```

nash.py

```

import math
import random

import globalConstants
import util

class Player:
    def __init__(self, name, order, strategy_space, payoffs, choice, suboptimal, strategies,
        state, game_play):
        self.name = name
        self.order = order
        self.strategy_space = strategy_space
        self.payoffs = payoffs
        self.choice = choice
        self.suboptimal = suboptimal
        self.strategies = strategies
        self.state = state
        self.game_play = game_play

    def process_game(self, G):
        for i in range(0, len(G)):
            X = G[i]
            if X[0] == self.name:
                for j in range(1, len(X)):
                    Branch = X[j]
                    Alternative = list(Branch)
                    del Alternative[len(Alternative) - 1]
                    self.strategy_space = self.strategy_space + [tuple(Alternative)]
                    self.payoffs = self.payoffs + [Branch[len(Branch) - 1]]

    def evaluate(self):
        X = []
        for i in range(0, len(self.strategy_space)):
            Alternative1 = self.strategy_space[i]
            for j in range(0, len(self.strategy_space)):
                Alternative2 = self.strategy_space[j]
                if Alternative1 != Alternative2:
                    if len(Alternative1) == len(Alternative2):
                        Compare = 0
                        for k in range(0, len(Alternative1) - 1):

```

```

        if Alternative1[k] == Alternative2[k]:
            Compare = Compare + 0
        else:
            Compare = Compare + 1
    if Compare == 0:
        PayoffCompare = [self.payoffs[i], self.payoffs[j]]
        M = max(PayoffCompare)
        if self.payoffs[i] == M:
            self.choice = Alternative1
            X = X + [self.choice]
        else:
            self.suboptimal = self.suboptimal + [Alternative1]
    if self.payoffs[j] == M:
        self.choice = Alternative2
        X = X + [self.choice]
    else:
        self.suboptimal = self.suboptimal + [Alternative2]

X = set(X)
self.suboptimal = set(self.suboptimal)
self.strategies = list(X - self.suboptimal)
print("\nStrategies_selected_by_" + self.name + ":")
print(self.strategies)
for l in range(0, len(self.strategies)):
    strategy = self.strategies[l]
    for m in range(0, len(strategy)):
        O = self.order[m]
        self.state[O] = strategy[m]
    self.game_play = self.game_play + [tuple(self.state)]

class Game:
    def __init__(self, players, structure, optimal):
        self.players = players
        self.structure = structure
        self.optimal = optimal

    def nash(self, GP):
        Y = set(GP[0])
        for i in range(0, len(GP)):
            X = set(GP[i])
            Y = Y & X
        self.optimal = list(Y)
        if len(self.optimal) != 0:
            print("\nThe_pure_strategies_Nash_equilibrium_are:")
            for k in range(0, len(self.optimal)):
                print(self.optimal[k])
        else:
            print("\nThis_game_has_no_pure_strategies_Nash_equilibrium!")

class TimeScaleGame(Game):
    def __init__(self, players, structure, optimal, government_period, public_period,
                 government_strategy,
                 public_strategy):

```

```

super().__init__(players, structure, optimal)
self.government_period = government_period
self.public_period = public_period
self.government_strategy = government_strategy
self.public_strategy = public_strategy

def play(self):
    fullTime = util.lcm(self.government_period, self.public_period)
    self.government_strategy = self.getStrategyForAllPeriod(self.government_strategy,
                                                             self.government_period,
                                                             fullTime)
    self.public_strategy = self.getStrategyForAllPeriod(self.public_strategy, self.
                                                         public_period, fullTime)
    self.payoff = [0, 0]
    for x in range(0, fullTime):
        self.payoff = util.add(self.getPayoff(x), self.payoff)
    return self.payoff

def getPayoff(self, x):
    g_strat = self.government_strategy[x]
    p_strat = self.public_strategy[x]
    summ = []
    for i in range(0, len(self.structure)):
        X = self.structure[i]
        for d in range(0, len(self.players)):
            if X[0] == self.players[d]:
                for j in range(1, len(X)):
                    Branch = X[j]
                    Alternative = list(Branch)
                    del Alternative[len(Alternative) - 1]
                    if Alternative == [g_strat, p_strat]:
                        summ.append(list(Branch)[len(Branch) - 1])
    return summ

def getStrategyForAllPeriod(self, strategy, period, fullTime):
    new_strategy = []
    changePeriod = fullTime / period
    tmp = -1
    for x in range(0, fullTime):
        index = math.floor(x / changePeriod)
        if index != tmp:
            probability = float(strategy[index])
            rand = random.randrange(0, 100) / 100
            if probability > rand:
                new_strategy.append('H')
            else:
                new_strategy.append('L')
            tmp = index
        else:
            new_strategy.append(new_strategy[x - 1])
    return new_strategy

def calculate_nash(government_payoffs, public_payoffs):

```

```

# game(players,structure,plays,optimal)
game = Game(('Government', 'Public'), [government_payoffs, public_payoffs], None)
# player(name,order,strategySpace,payoffs,choice,suboptimal,strategies,state,gameplay):
player1 = Player('Government', (1, 0), [], [], None, [], None, [0, 0], [])
player2 = Player('Public', (0, 1), [], [], None, [], None, [0, 0], [])
players = [player1, player2]
for i in range(0, len(players)):
    players[i].process_game(game.structure)
    players[i].evaluate()
GP = []
for i in range(0, len(players)):
    X = players[i].game_play
    GP = GP + [X]
game.nash(GP)

def time_scales_game(request, government_payoffs,
                     public_payoffs):
    government_period = request.get(globalConstants.GOVERNMENT_TIME_PERIOD)
    public_period = request.get(globalConstants.PUBLIC_TIME_PERIOD)
    government_strategy = str(request.get(globalConstants.GOVERNMENT_SCALAR_STRATEGY)).split(
        ',')
    public_strategy = str(request.get(globalConstants.PUBLIC_SCALAR_STRATEGY)).split(',')

    game = TimeScaleGame(('Government', 'Public'), [government_payoffs, public_payoffs],
                        None, int(government_period),
                        int(public_period), government_strategy, public_strategy)
    return game.play()

```