Министерство Образования Украины

Учреждение образования
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Институт	Інститут математики, економіки та механіки
Факультет	Прикладная математика

Одесса 2016

СОДЕРЖАНИЕ

1 Основные определения 3
2 Классическая модель Барро-Гордона 4
3 Теоретико-игровая интерпретация модели Барро-Гордона 8
4 Дискретные однородные временные шкалы 11
5 Разнородные временные шкалы 13
5.1 Разнородная общественность. 14
5.2 Вероятностная модель. 14
6 Модель монополии профсоюза 16
7 Модель монополии профсоюза на временных шкалах 18
8 Программная реализация 19
8.1 Информация о программе 19
8.2 Пояснения к коду 19
8.3 Листинг 19
9 Примеры 20
9.1 Барро-Гордон 20
9.2 Монополия профсоюза 24
Заключение 25
Список использованных источников 26

1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. (S,H)— *некооперативная игра* n *лиц в нормальной форме, где* S *— набор чистых стратегий, а* H *— набор выигрышей. Когда каждый игрок* $i \in \{1,...,n\}$ *выбирает стратегию* $x_i \in S$ *в профиле стратегий* $x = (x_1,...,x_n)$, *игрок* i *получает выигрыш* $H_i(x)$. *Профиль стратегий* $x^* \in S$ *является равновесием по Нэшу, если изменение своей стратегии с* x_i^* *на* x_i *не выгодно ни одному игроку* i, *то есть* $\forall i : H_i(x^*) \geq H_i(x_i, x_{-i}^*)$.

Определение 2. *Равновесие по Нэшу называется безупречным по подиграм, если и только если оно является равновесием по Нэшу для каждой под-игры.*

Определение 3. *Парето-оптимальность в смысле теории игр характеризует такую ситуацию, при которой невозможно улучшить исход игры для одного игрока без его ухудшения для других игроков.*

Определение 4. *Инфляция — повышение общего уровня цен на товары и услуги.*

Определение 5. *Индексация заработной платы – повышение заработных плат с целью частичной защиты населения от роста потребительських цен на товары и услуги.*

Определение 6. *Любое совершенное равновесие по под-играм (SPNE), в котором оба игрока выбирают стратегию L во всех своих ходах, назовём* ***совершенным равновесием Рамси по под-играм (Ramsey SPNE)***

2 КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БАРРО-ГОРДОНА

Классическая модель Барро-Гордона рассматривает правительство (в лице некоторого одного политика), которое принимает решение о мерах воздействия на экономику основываясь на двух факторах. Первый фактор являет собой суммарную функцию благосостояния вида

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t w_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(y_t - \frac{\lambda \pi^2}{2} \right), \quad 0 < \beta < 1, \tag{2.1}$$

где β^t - значимость t-ого периода для благосотояния политика, w_t - функция благосостояния политика в t-ом периоде. При этом взаимосвязь между инфляцией и безработицей задается кривой Лукаса

$$y = y^* + \alpha(\pi - \pi^\beta). \tag{2.2}$$

Второй фактор принятия решения – это оценка общественностью действий правительства в виде поддержки или недоверия. Такая оценка в модели задается через инфляционные ожидания, которые формируются в период t следующим образом:

$$\pi_t = \begin{cases} \pi, & \forall t : \pi_t = \tilde{\pi}_t, \\ \frac{\alpha}{\lambda}, & \exists s < t : \pi_s \neq \tilde{\pi}_s, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\tilde{\pi}$ - уровень инфляции, который политик обещают достичь в результате воздействия на экономику.

Как следует из (2.3), если политик ведет себя честно, то общественность ему доверяет и ожидает обещанный им уровень инфляции. Если политик хотя бы раз, обманув ожидания, провел не ту политику, которую обещал, то общественность ему не верит. В таком случае она ожидает отличный от обещанного уровень инфляции, который составляет $\frac{\alpha}{\lambda}$, поскольку полагает, что в случае обмана политик будет стремиться к тому, чтобы в экономике установился именно этот уровень инфляции.

Действительно, в случае обмана политик выберет такой уровень инфляции, который будет максимизировать его функцию благосостояния в этом периоде (допустим, в периоде s). Поскольку, согласно (2.1)-(2.3), функция благосостояния периода s при $\pi_s \neq \tilde{\pi}$ имеет вид

$$w_s = y^* \alpha \left(\pi_s - \frac{\lambda \pi_s^2}{2} \right), \tag{2.4}$$

то максимизирующий её уровень инфляции будет равен величине $\frac{\alpha}{\lambda}$, что следует из первого условия максимизации.

Так как репутация политика влияет на инфляционные ожидания общественности, то, согласно (2.1)-(2.2), репутация влияет также и на его общую функцию благосостояния. Предположим, что политик ведет себя честно, то есть проводит ту политику, которую обещал. Тогда его общая функция благосостояния принимает вид

$$w^{fair} = \frac{1}{(1-\beta)} \left(y^* - \frac{\lambda \pi^2}{2} \right), \tag{2.5}$$

поскольку в этом случае, согласно (2.1)-(2.3), функция благосостояния для любого периода t имеет вид

$$w_t^{fair} = y^* - \frac{\lambda \pi^2}{2}. \tag{2.6}$$

Если политик решит обмануть ожидания общественности в какой-то (допустим в нулевой) период времени, то в этом случае, согласно (2.1)-(2.3), его функция благосостояния в нулевой период составит

$$w_0^{deception} = y^* - \frac{\alpha^2}{2\lambda} - \alpha \tilde{\pi}, \tag{2.7}$$

а во все последующие периоды вследствие недоверия населения общественности

$$w_0^{deception} = y^* - \frac{\alpha^2}{2\lambda}. \tag{2.8}$$

Следовательно, общая функция благосостояния политика в случае нарушения данных обещаний имеет вид

$$W^{deception} = \frac{1}{(1-\beta)} y^* + \frac{(1-2\beta)\alpha^2}{(1-\beta)2\lambda} - \alpha \tilde{\pi}, \tag{2.9}$$

Очевидно, что политику имеет смысл вести себя честно только при условии $W^{fair} > W^{deception}$, в противном случае он выигрывает больше от невыполнения данных ранее обещаний.

Выведем условия, при которых политик ведет себя честно, не обманывая ожидания населения. Воспользуемся для этого графической интерпретацией этой проблемы: построим графики выигрыша и проигрыша политика в случае обмана и найдем области, в которых выигрыш будет больше проигрыша и наоборот.

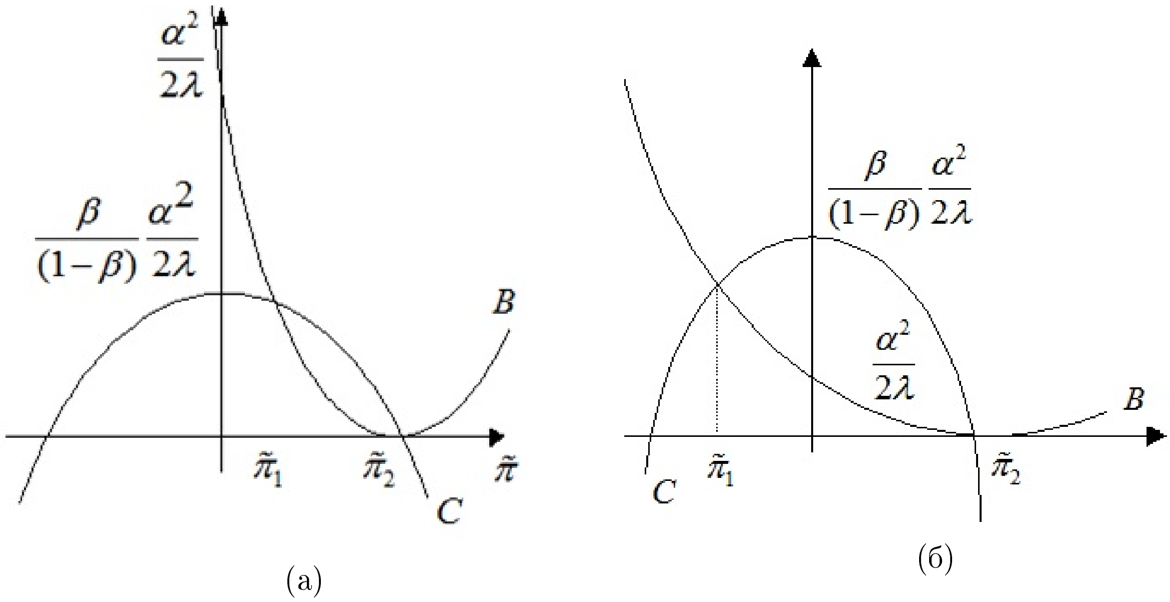


Рисунок 2.1

Если политик обманывает ожидание общественности в нулевой момент времени, то выигрыш он получает за счет того, что в нулевой момент времени обманул ожидания общественности, а проигрыш – что в дальнейшем общественность перестает ему доверять и всегда ожидает больший уровень инфляции, было объявлявленно.

Следовательно, выигрыш обманывающего население в нулевой момент времени политика

$$B = w_0^{deception} - w_0^{fair} = \frac{\lambda\pi^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2\lambda} - \alpha\tilde{\pi} \qquad (2.10)$$

является квадратичной функцией от объявляемого уровня инфляции. Эта функция достигает минимума $B = 0$ в точке $\tilde{\pi} = \frac{\alpha}{\lambda}$. При $\tilde{\pi} = 0$ выигрыш равен $\frac{\alpha^2}{\lambda}$.

Проигрыш обманывающего население в нулевой момент времени политика также является квадратичной функцией от объявляемого уровня инфляции, поскольку

$$C = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t (w_t^{deception} - w_t^{fair}) = -\frac{\lambda \tilde{\pi}^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2\lambda}. \tag{2.11}$$

Функция, задаваемая выражением (2.11), описывает параболу, достигающую максимума $C = \frac{\beta}{(1-\beta)} \frac{\alpha^2}{2\lambda}$ в точке $\tilde{\pi} = 0$. Значение функции равняется нулю, когда уровень инфляции составляет $\tilde{\pi} \pm \frac{\alpha}{\lambda}$.

Взаиморасположение графиков потерь и выигрыша обманывающего общественность в нулевой момент времени политика зависит от того, больше или меньше единицы величина $\frac{\beta}{1-\beta}$.

Если $\frac{\beta}{1-\beta} < 1$, то есть $\beta < \frac{1}{2}$, то функция потерь и функция выигрыша пересекаются в точках $\tilde{\pi}_1 > 0$ и $\tilde{\pi}_2 > 0$ (2.1а), причем $\tilde{\pi}_1 = \frac{\alpha(1-2\beta)}{\lambda}$? $\tilde{\pi}_2 = \frac{\alpha}{\lambda}$.
Если $\frac{\beta}{1-\beta} > 1$, то есть $\beta > \frac{1}{2}$, то функция потерь и функция выигрыша пересекаются в точках $\tilde{\pi}_1 < 0$, $\tilde{\pi}_2 > 0$ (2.1б). //

Таким образом, из проведенного анализа следует, что поведение политика (будет он выполнять обещания или нет) зависит от его отношения к репутации. Если для него репутация не важна, будущее мало влияет на его функцию благосостояния $\beta < \frac{1}{2}$, то политику не выгодно вести себя честно. Поскольку, как видно из (2.1а), существует достаточно невысокий уровень инфляции $\tilde{\pi} \in \left(0; \frac{\alpha(1-2\beta)}{\lambda}\right)$, обещая который он может выиграть больше в результате обмана (по сравнению с честным поведением). Если для политика его репутация важна, будущее значимо для его благосостояния $\beta < \frac{1}{2}$, то ему имеет смысл вести себя честно. Поскольку, как видно из (2.1б), не существует уровня инфляции близкого к нулю, обещая который он может получить большую реализацию своих целей в результате обмана по сравнению с честным поведением.

3 ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МОДЕЛИ БАРРО-ГОРДОНА

В игре участвуют два игрока: p - правительство, q - общественность, которые оперируют инфляцией π и индексированием заработной платы ω соответственно. Для упрощения модели положим, что оба не могут прогнозировать будущие. Каждый игрок выбирает из следующих стратегий: низким L и высоким H уровнем повышения. В общем виде игра может быть задана в виде матрицы выигрышей

		Public	
		L	H
Government	L	a,q	b,v
	H	c,x	d,z

где параметры a,b,c,d,q,v,x,z - выигрыши удовлетворяющие следующим ограничениям

$$c > a > d > b, q > v, q \geq z > x. \tag{3.1}$$

В данном случае проще всего описать экономику через функцию совокупного предложения Лукаса

$$y_t - Y = \lambda(\pi_t - \omega_t) + \varepsilon_t, \tag{3.2}$$

где $\lambda > 0, y$ – производительность, Y – естественный уровень производительности, а ε - макроэкономический шок близкий к нулю. Коэффициенты дисконтирования игроков составляют β_g и β_p, а их функции полезности имеют следующий вид

$$u_t^g = -(\pi_t - \tilde{\pi})^2 + \alpha y_t - \beta(y_t - Y)^2, \tag{3.3}$$

$$u_t^p = -(\pi_t - \omega)^2, \tag{3.4}$$

где $\tilde{\pi}$ - оптимальный уровень инфляции, а $\alpha > 0, \beta > 0$ описывают относительный вес целей правительства (стабильной инфляции, высокой и стабильной производительности). Общественность озабочена верным ожиданием уровня инфляции для того, чтобы определить уровень зарплат на рынке.

Так как нас интересует эффект от выбранной политики, то сфокусируемся на долгосрочном исходе игры. Для этого однозначно определим экономику положив $\forall t, \varepsilon_t = 0$, что подразумевает, что мы можем положить $\beta = 0$ без потери общности. Из этого следует, что инструмент правительства π представляет собой выбор средней инфляции.

В стандартной пошаговой игре, в которой игроки могут менять свое поведение в каждый период, мы используем (3.2)-(3.3) для получения равновесия

$$\pi_t^* = \tilde{\pi} + \frac{\alpha\lambda}{2} = \omega_t^*, \tag{3.5}$$

что является известным результатом $\pi_t^* > \tilde{\pi}$. Сфокусировав внимание на двух уровнях инфляции мы следуем [1], где были предложены два наиболее естественных варианта – оптимальный уровень из (3.3) и согласованного по времени из (3.5)

$$\pi \in \left\{ L = \tilde{\pi}, H = \tilde{\pi} + \frac{\alpha\lambda}{2} \right\} \ni \omega_t^*. \tag{3.6}$$

Мы можем, учитывая (3.2)-(3.4) и поделив на $\left(\frac{\alpha\lambda}{2}\right)$, без потери общности вывести соответствующие выигрыши, представленные в таблице ниже. Так же вне зависимости от λ и α справедливы следующие ограничения для данной игры в дополнение к изначальным (3.1)

$$c > a = 0 > d > b, c = -d = -\frac{b}{2}, q > v, q \geq z > x \tag{3.7}$$

$$c = 1 > a = 0 > d = -1 > b = -2, q = z = 0 > v = x = -1, \tag{3.8}$$

		Public	
		L	H
Government	L	0,0	$-1, -1$
	H	$\frac{1}{2}, -1$	$-\frac{1}{2}$,0

Таблица 3.1

Стандартная пошаговая игра имеет уникальное равновесие по Нэшу (H,H). Однако, оно неэффективно, так как является Парето доминированным. Это означает, что существует такой исход игры, который улучшит состояние одного, но при этом не ухудшит его для других игроков. В данном случае это «не Нэшовский» исход (L,L). У правительства возникает соблазн создать неожиданную инфляцию, чтобы повысить производительность и снизить уровень безработицы. Так как общественность рациональна, то будет ожидать высокую инфляцию – оба игрока будут в проигрыше.

4 ДИСКРЕТНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ ШКАЛЫ

Рассмотрим игровую интерпритацию модели Барро-Гордона на временных шкалах.

Все допущения выдвинутые в стандартной игре остаются. Расширим их:

– игра начинается одновременным ходом,

– заранее известно незименное количество ходов $r^g \in \mathbb{N}$ и $r^p \in \mathbb{N}$,

– игра заканчивается через T периодов, где T - наименьшее общее кратное для r^g и r^p,

– игроки рациональны, обладают равноценными знаниями и полной информацией о структуре игры, матрице выигрышей и всех предыдуущих ходах.

Другими словами определяется три временных шкалы: правительства, общественности и самой игры:

$$T_g = \{0,r^g,2r^g,...,T\}, T_p = \{0,r^p,2r^p,...,T\}, T = T_g \cup T_p \tag{4.1}$$

Главным преимуществом использования однородных временных шкал является экономическая интерпретация: r^g и r^p представляют собой степень возможности изменений политики относительно инфляции и степень реагирования для внесения изменений в заработные платы.

Ассинхронная игра на временных шкалах будет как правило иметь несколько равновесий по Нэшу, среди которых мы выберем лучшую в зависимости от под-игры.

Теорема 1. *Рассмотрим общую несогласованную по времени игру на однородных временных шкалах, для которой выполняются (3.7) и (4.1). Тогда все SNPE игры будут SNPE Рамси, если и только если*

$$r^g > \bar{r^g}(R) = \begin{cases} \dfrac{c-d}{a-d}r^p = \dfrac{a-b}{a-d}r^p, & \text{\textit{если} } R = 0 \\ \dfrac{(1+R)(c-d)}{a-d}r^p = \dfrac{a-b+R(c-d)}{a-d}r^p, & \text{\textit{если} } R \in (0;\bar{R}) \\ \dfrac{c-d-(1-R)(a-b)}{a-d}r^p = \dfrac{(a-b)}{a-d}Rr^p, & \text{\textit{если} } R \in (\bar{R};1) \end{cases} \tag{4.2}$$

где $\bar{R} = \frac{q-v}{z-x+q-v}$. В несогласованной игре, где справедливо (3.7), (4.2) преобразуется в

$$\frac{r^g}{r^p} \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right) \tag{4.3}$$

Докозательство: смотреть Либиха и Штелиха [2].

5 РАЗНОРОДНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ ШКАЛЫ

Можно утверждать, что действия игроков могут не всегда быть детерминистичны и/или что частота их ходов различается во времени или подчиняется некоторому случайному процессу. Разнородные временные шкалы позволяют изучать подобные случаи. Для большей эффективности нормализуем горизонт планирования как $T = r^g$. Как и ранее игроки g и p ходят одновременно в первом периоде и во всех $T = r^g$ периодах, в промежутках между которыми общественность так же способна реагировать на ход правительства. Для удобства сравнения оставим все предположения предыдущего параграфа неизменными.

Рассмотрим произвольную временную шкалу $\mathbb{T}$ и произвольную невозрастающую функцию реакции общественности $f : \mathbb{T} \to [0{,}1]$. В данной работе рассматриваются два представляющих интерес особых случая. В первом, при разнородной (атомистической) общественности, функция реакции может быть интерпретирована как часть общественности, которая уже имела возможность совершить ход. Во втором, при вероятностных ходах общественности, функция реакции может быть интерпретирована как кумулятивная функция распределения её ходов.

Чтобы удостовериться в том, что все SPNE являются SPNE Рамси, достаточно показать, что в первом ходе оптимальной стратегией g является L вне зависимости от хода общественности в первом периоде. Получим два соответствующих условия:

$$ar^g > c \int_0^{r^g} 1 - f(t)\Delta t + d \int_0^{r^g} f(t)\Delta t, \tag{5.1}$$

$$dr^g > b \int_0^{r^g} 1 - f(t)\Delta t + a \int_0^{r^g} f(t)\Delta t. \tag{5.2}$$

Теорема 2. *Рассмотрим общую несогласованную по времени игру, в которой выполняется* (3.7) *и* $f : \mathbb{T} \to [0{,}1]$ *– невозрастающая функция реакции. Тогда все SPNE игры являются SPNE Рамси тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\int_0^{r^g} f(t)\Delta t > \frac{r^g}{2}. \tag{5.3}$$

Для лучшей наглядности теоремы 2 и лучшего понимания приведём несколько следствий и рассмотрим пример. Как уже было указано ранее, мы концентрируемся на двух случаях: разнородной общественности и вероятностных моделях.

5.1 Разнородная общественность.

Во-первых, предположим, что существует N различных общественных групп (профсоюзов) $p_1,...,p_N$ с соответствующими $r^{p_1},...,r^{p_N}$ и размерами $s_1,...,s_N \in [0,1]$, которые удовлетворяют естественному предположению $\sum_{i=1} Ns_i = 1$. Чтобы свести наше внимание к первому ходу правительства, предположим что r^g является кратным для r^{p_i} для всех $i = 1,...,N$, то есть

$$\frac{r^g}{r^{p_i}} \in \mathbb{N}.$$

Для более асинхронных случаев см. [2]. Для данного особого случая теорему 2 можно переписать следующим образом.

Следствие 1. *Рассмотрим общую несогласованную по времени игру, в которой выполняется* (3.7) *и общественность состоит из N различных групп. Тогда все SPNE игры являются SPNE Рамси тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{N} s_i(r^g - r^{p_i}) \geq \frac{r^g}{2}. \tag{5.4}$$

5.2 Вероятностная модель.

Вернёмся к случаю с унифицированной общественностью, чтобы рассмотреть вероятностные ходы отдельно от влияния эффектов разнородной общественности. В зависимости от результатов переговоров общественность будет реогировать на первый ход правительства в какой-то момент времени из интервала $[a,b], 0 < a < b < r^g$, с равномерно распределённым вероятностным законом. Теорема 2 принимает вид:

Следствие 2. *Рассмотрим общую несогласованную по времени игру, в которой выполняется* (3.7) *и общественность делает второй ход в какой-то момент времени из интервала $[a,b]$ с равномерно распределённым вероятностным законом. Тогда все SPNE игры являются SPNE Рамси тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\frac{b^2 - a^2}{2} \geq b - \frac{r^g}{2}. \tag{5.5}$$

Очевидно, что можно рассматривать произвольные комбинации описанных выше подходов, то есть разнородных игроков с вероятностными ходами, вероятность которых может быть описана некоторыми функциями распределения. Приведём пример.

Пример 1. Рассмотрим экономику с двумя профсоюзами, каждый их которых состоит из s_1 и s_2 рабочих соответственно, так что выполняется $s_1 + s_2 = 1$. Примем в качестве одного периода квартал (раз в квартал выпускаются сводки по макроэкономике). Предположим, что $r^g = 5$ и что время реакции профсоюзов составляют как минимум 1 и 3 квартала, но как максимум – 1,5 и 3,5 квартала соответственно. Для простоты предположим, что решение, принятое за полтора квартаала подчиняется равномерному законц распределения. Тогда получим:

$$\mathbb{T} := 0 \cup [1, 1.5] \cup r^g,$$

$$\mathbb{T} := 0 \cup [3, 3.5] \cup r^g.$$

Функция реакции тогда имеет вид $f : \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2 \to [0{,}1]$:

$$f(x) \begin{cases} 0 & if \quad x = 0, \\ 2s_1(x-1) & if \quad x \in [1{,}1.5], \\ s_1 + 2s_2(x-3) & if \quad x \in [3{,}3.5], \\ 1 & if \quad x = 5. \end{cases}$$

Интегрируя по $\mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2$ получим

$$\int_0^5 f(x)\Delta x = \frac{15}{4}s_1 + \frac{7}{4}s_2.$$

Предположение (5.3) теоремы 2 удовлетворяется (и следовательно единственное равновесие является равновесием Рамси) тогда и только тогда, когда выполняется

$$s_1 \geq \frac{3}{8}, \text{или, что эквивалентно,} s_2 \leq \frac{5}{8}.$$

Интуитивно понятно, что профсоюз, принимающий решения быстрее, должен быть достаточно велик для того, чтобы общая реакция общественности была достаточно быстрой, чтобы препятствовать увеличению инфляции правительством.

6 МОДЕЛЬ МОНОПОЛИИ ПРОФСОЮЗА

Данная модель является моделью отношений профсоюз-фирма по Леонтьеву [3], в которой профсоюз задаёт уровень заработной платы, после чего фирма выбирает желаемое количество наёмных работников (уровень найма). Предположим что фирма оперирует в условиях конкурентного рынка с рыночной ценой P.

Порядок игры следующий:
Первый этап. Профсоюз устанавливает уровень заработной платы W.
Второй этап. Фирма выбирает уровень найма E.

Выигрыши составляют:
Функция полезности профсоюза имеет вид

$$U = U(W,E), \quad \frac{\partial U}{\partial W} > 0; \quad \frac{\partial U}{\partial E} > 0.$$

Например $U = \lambda WE.$, где $\lambda \in (0;1)$
Полезность для фирмы измеряется как прибыль

$$\Pi = PY(\bar{K},E) - WE,$$

где цена P дана, а капитал $\bar{K}$ фиксирован. Отсюда мы можем переписать

$$\Pi(W,E) = R(E) - WE,$$

где R – доход.

Решение методом обратной индукции:
Второй этап. Фирма максимизирует свою прибыль по L при заданном уровне заработной платы. Условие первого порядка примет вид

$$W = R'(E) = MPE.$$

Разрешая относительно L получим кривую спроса: $E = g(W)$.
Первый этап. Решается

$$\max_W U(W,E) = U(W,g(W)).$$

Решение приведено на графике 6.1. Графически можно показать, что исход игры неэффективен. Точка X является точкой равновесия обратной индукции модели монополии профсоюза. Точки в закрашенной области Парето-предпочтительнее X. AB яаляется кривой контракта, состоящей из точек, в которых изопрофиты и кривые безразличия профсоюза имеют общий тангенс [4].

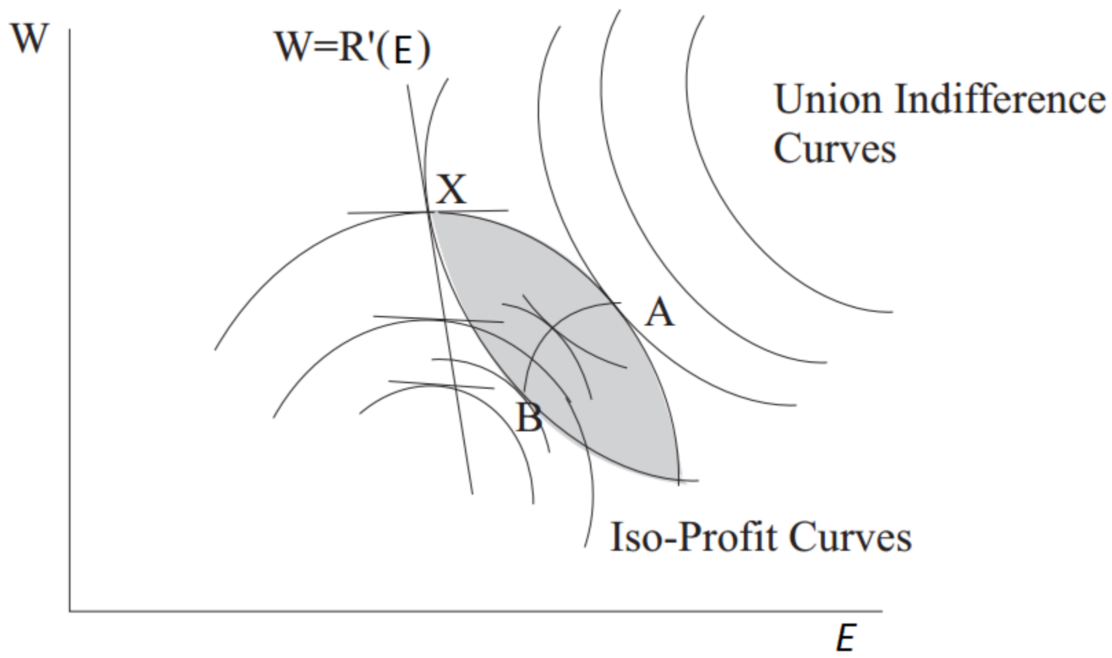


Рисунок 6.1

7 МОДЕЛЬ МОНОПОЛИИ ПРОФСОЮЗА НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

В игре, как и в непрерывной модели присутсвует два игрока: профсоюз P и фирма F, чьими рычагами влияния на игру являются W - зарплата рабочего и E - количество нанятых рабочих соответственно. Каждый игрок выбирает из следующих стратегий: низким L и высоким H уровнем повышения. В общем виде игра может быть задана следующей матрицей выигрышей:

		Union	
		L	H
Firm	L	a,q	b,v
	H	c,x	d,z

Функция полезности профсоюза $U_t(W,E) = \lambda WE$, где $\lambda \in (0;1)$:

$$\frac{\partial U}{\partial W} > 0; \quad \frac{\partial U}{\partial E} > 0 \quad U(0,E) = U(W,0) = U(0,0) = 0,$$

при этом

$$U(L,L) < U(L,H) \leq U(H,L) < U(H,H)$$

Функция полезности фирмы $\Pi_t(W,E) = cP(\bar{K},E) - WE$:

$$P(\bar{K},E) = A\bar{K}^{\alpha}E^{\beta}$$

, где A – коэффициент нейтрального технического прогресса, α и β – коэффициенты эластичности валового внутреннего продукта по капитальным и трудовым затратам.

$$\Pi(L,L) > \Pi(H,L)$$

$$\Pi(H,H) < \Pi(L,H)$$

Алексей Павлович, не могу понять, как можно вывести единое правило, если всё зависет от разных коэффициентов, ведь соотношение между функциями зависят от того, какое слогаемое из $\Pi_t(W,E) = cP(\bar{K},E) - WE$ растет быстрее.

8 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

8.1 Информация о программе

В рамках дипломной работы была разработана программа, которая эмулирует биматричную игру на временных шкалах и доказывает эмпирически изложенные в работе результаты.

Разработка программного продукта велась на языке Python 3.4. Программа позваляет пользователю задать r^g, r^p и соответсвующие скалярные функции поведения игрока в определенный момент времени. Значениями данной функции будет вероятность выбора игроком стратегии H в данный период времени. Так же пользователь может задать количество запусков игры с входящими данными для подсчета статистики. В качетсве интерфейса входящих данных был выбран txt файл.

8.2 Пояснения к коду

```
util.fromFileToMap(filepath)
```

Функция парсит входящие данных

```
nash.calculate_nash(government_payoffs, public_payoffs)
```

Функция рассчитывает равновесие по Нэшу для стандартной игры.

```
nash.time_scales_game(request, government_payoffs, public_payoffs))
```

Имитация игры на временных шкалах, результатом который есть вектор выигрышей игроков за время игры

```
util.create_all_stats(array, player_name, time)
```

Рассчитывает статистические параметры, строит гистограму для выигрышей одного игрока.

8.3 Листинг

https://github.com/ibrabon/EquilibriumNash/

9 ПРИМЕРЫ

9.1 Барро-Гордон

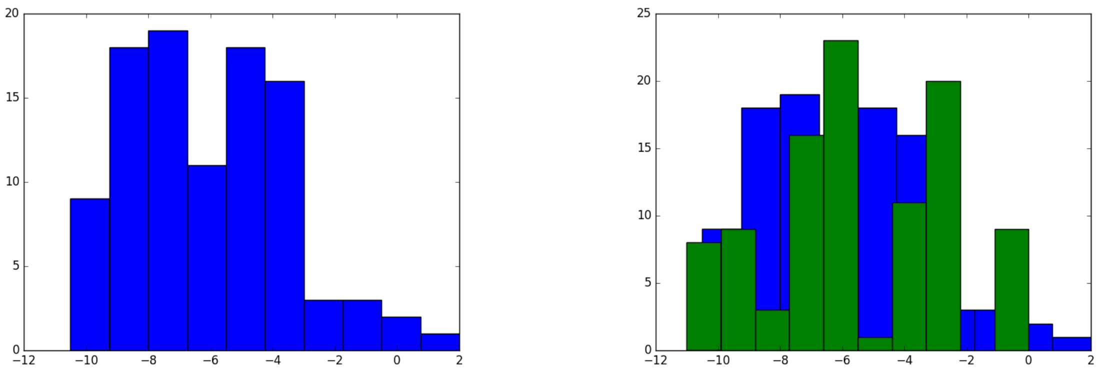
Положим, что матрица выигрышей двух игроков соответсвует (3.1).

$r^g = 4$ - количество ходов совершаемое правительством за игру
$r^p = 3$ - количество ходов совершаемое обществом за игру

1. Рассмотрим случай, когда правительство скорее склонно ввести высокий уровень инфляции, а общественность предполагая, что правительство пойдет на этот шаг с высокой долей вероятности поднимет зарплаты:

$q^g = [0.5; 0.9; 0.7; 0.4]$ - соответсвующая скалярная функция
$q^p = [0.6; 0.8; 1]$ - соответсвующая скалярная функция

С помощью программы проведем эммуляцию 100 игр с такими исходными данными.



(а) Правительство

(б) Общественность

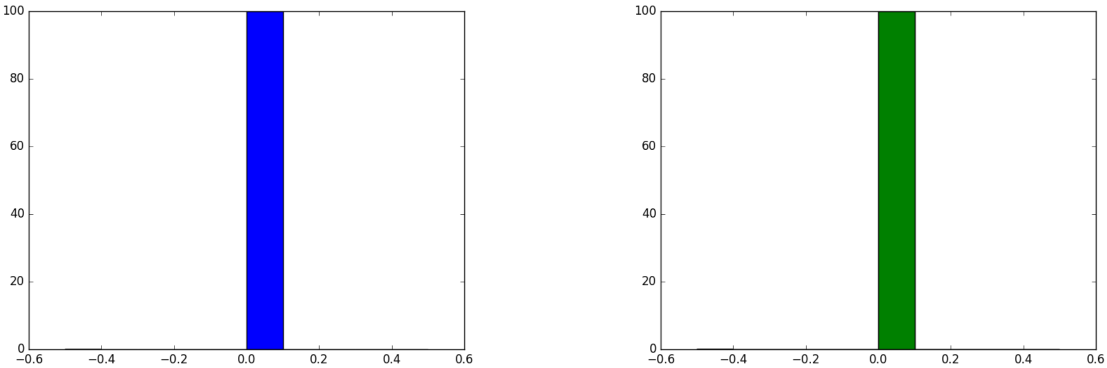
Рисунок 9.1 – Гистограмма выигрышей

Government's average = -6.185
Government's standard deviation = 2.78177551215
Government's asymmetry = 0.4507768484568038
Government's excess = -0.1516393985641198
Public's average = -5.47
Public's standard deviation = 2.76570063456
Public's asymmetry = 0.16025052323659267
Public's excess = -0.5107496427926015

Согалсно полученным результам легко видеть, что подобный набор стратегий невыгоден обеим сторонам, к тому же правительству из-за более "мягкого"подхода "более невыгодно".

2. Рассмотрим случай, когда оба игрока действут по Парето-оптмальной стратегии (L,L).

Для этого положим скалярные функции:
$q^g = [0; 0; 0; 0]$
$q^p = [0; 0; 0]$



(а) Правительство (б) Общественность

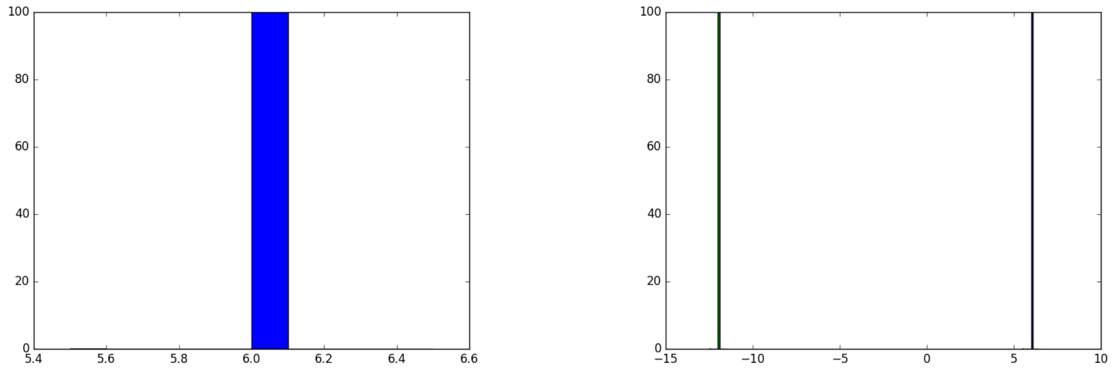
Рисунок 9.2 – Гистограмма выигрышей

Government's average = 0.0
Government's standard deviation = 0.0
Government's asymmetry = 0.0
Government's excess = -3.0
Public's average = 0.0
Public's standard deviation = 0.0
Public's asymmetry = 0.0
Public's excess = -3.0

Данная стратегия является Парето-оптимальной, игрокам нет смысла отклоняться от неё.

3. Рассмотрим случай, когда игроки выбирают неоптимальный путь. Государство устанавливает высокий уровень инфляции, а общественность выбирает стратегию L относительно повышения зарплат.
Для этого положим скалярные функции:

$q^g = [1; 1; 1; 1]$
$q^p = [0; 0; 0]$



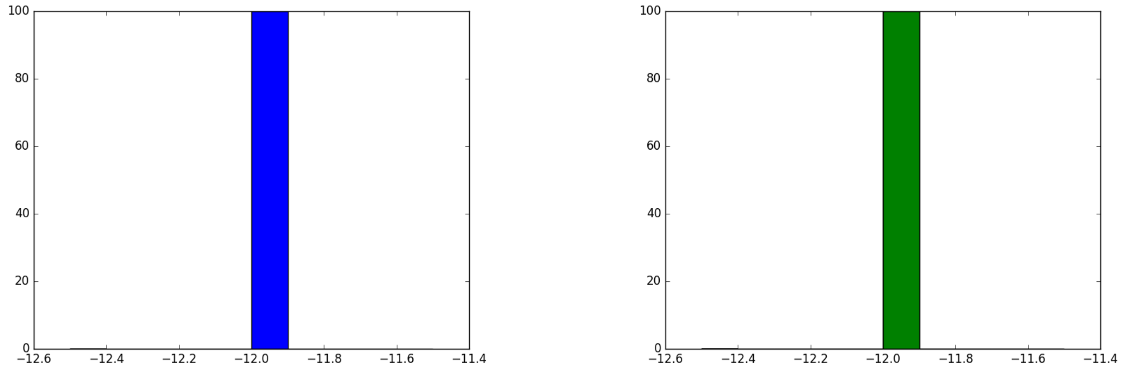
(а) Правительство (б) Общественность

Рисунок 9.3 – Гистограмма выигрышей

Government's average = 6.0
Government's standard deviation = 0.0
Government's asymmetry = 0.0
Government's excess = -3.0
Public's average = -12.0
Public's standard deviation = 0.0
Public's asymmetry = 0.0
Public's excess = -3.0

Как можно увидеть данная ситуация выгодная правительству, однако совершенно противоречит интересам общественности. Ссылаясь на классическую модель Барро-Гордона отметим, что данная стратегия на краткосрочную перспективу. Следовательно разумному правительству данная стратегия является неприемлимой на долгосрочную перспективу.

4. Рассмотрим обратную ситуацию, когда правительство решает не повышать уровень инфляции, а общественность повышает уровень зарплат.
Для этого положим скалярные функции:
$q^g = [0; 0; 0; 0]$
$q^p = [1; 1; 1]$



(а) Правительство (б) Общественность

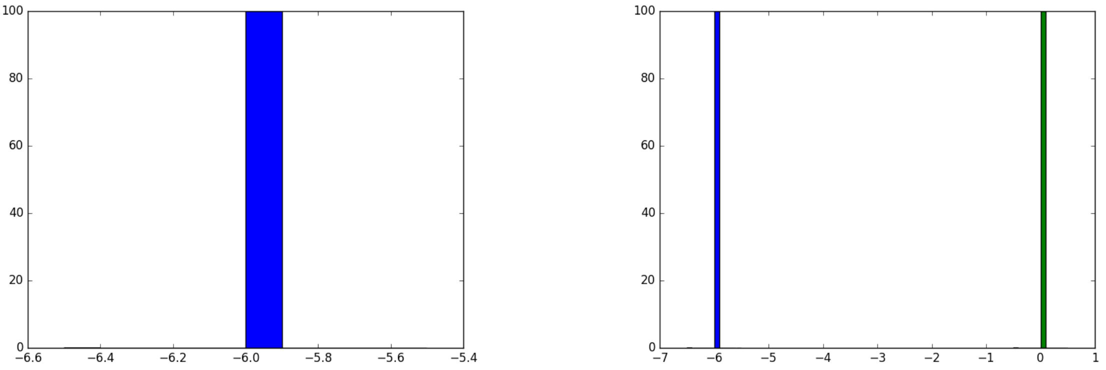
Рисунок 9.4 – Гистограмма выигрышей

Government's average = -12.0
Government's standard deviation = 0.0
Government's asymmetry = 0.0
Government's excess = -3.0
Public's average = -12.0
Public's standard deviation = 0.0
Public's asymmetry = 0.0
Public's excess = -3.0

Данная стратегия является равносильно невыгодной для обоих игроков.

5. Рассмотрим выбор стратегии, которая является равновесием по Нэшу (H,H)
Для этого положим скалярные функции:
$q^g = [1; 1; 1; 1]$
$q^p = [1; 1; 1]$

Government's average = -6.0
Government's standard deviation = 0.0
Government's asymmetry = 0.0
Government's excess = -3.0
Public's average = 0.0
Public's standard deviation = 0.0
Public's asymmetry = 0.0
Public's excess = -3.0



(а) Правительство (б) Общественность

Рисунок 9.5 – Гистограмма выигрышей

Стратегия хоть и является равновесием по Нэшу, тем не менее не Парето-оптимальна.

Империческим путем мы подтвердили правдивость теории.

9.2 Монополия профсоюза

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Choi S., Smith B. “Inflation, Financial Markets, and Capital Formation / Smith B. Choi, S., J.H. Boyd // Federal Reserve Bank of St. Louis. — 1996. — Vol. 14. — Pp. 41–58.

[2] J. Libich, P. Stehlic. Incorporating Rigidity in the Timing Structure of Macroeconomic Games / P. Stehlic J. Libich // Economic Modelling. — 2007. — Apr. — 29 P.

[3] Leontief, W. Input-Output Economics / W. Leontief. — 2-nd edition. — 200 Madison Avenue, New York : Oxford University Press, Inc., 1946. — 436 P.

[4] Toi, L. Game Theory / L. Toi. — Shandong : School of economics, Shandong university, 2012. — 67 P.