Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
(повне найменування вищого навчального закладу)

Інститут математики, економіки і механіки
(повне найменування інституту/факультету)

кафедра оптимального управління і економічної кібернетики
(повна назва кафедри)

Дипломна робота

магістра
(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: «Теорія ігор на часових шкалах»

«Game theory on time scales»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 8.04030101 Прикладна математика

Бондаренко Олексій Миколайович
(прізвище, ім'я, по-батькові)

Керівник канд. фіз.-мат. наук, Огулегнко О.П.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доцент, Кічмаренко О.Д..
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№_____ від _________________ р.

Захищено на засіданні ЕК №________
протокол №____ від _____________ р.
Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

__________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Голова ЕК

___________ ______________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність макроекономічних моделей, розглянутих у роботі, обумовлена тим, що вони являють собою спробу об'єднати два математичних підходу до моделювання реальних процесів управління і прийняття рішень.

Перший — теоретико-ігровий — підхід дозволяє розглядати ситуації конфлікту інтересів. Навіть гранично спрощені моделі у вигляді біматричних ігор є основою для цікавих висновків прикладного характеру.

Другий підхід полягає в розгляді конфлікту як явища протяжного у часу, динамічного процесу прийняття рішень протиборчими сторонами. Разом з класичними повторюваними іграми останнім часом активно вивчаються гри на тимчасових шкалах, тобто ігри, в яких час для одного або всіх гравців влаштовано складніше, ніж просто множина $\mathbb{N}_0$.

У даній дипломній роботі, відштовхуючись від відомих результатів по вивченню моделі Барро — Гордона на тимчасових шкалах, запропонована і досліджена модель взаємодії профспілки і фірми - монополіста. Розроблене програмне забезпечення дозволило шляхом імітаційного моделювання дослідити властивості запропонованої моделі та сформулювати певні висновки про способи формування довгострокової рівноваги.

Структура роботи наступна: в розділі 1 коротко викладаються елементи теорії ігор і аналізу на тимчасових шкалах. У Розділі 2 розглядається теоретичний базис обох розглянутих моделей. У розділі 3 викладаються результати комп'ютерних експериментів з вивченими моделями, далі формулюються висновки. Завершує текст роботи список використаної літератури і додаток, в якому наведен прокоментований код програми.

РОЗДІЛ 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ

1.1 Елементи теорії ігор

Визначення 1. (S,H) — *не кооперативна гра посіб в нормальній формі, де* S — *набір чистих стратегій, а* H — *набір виграшів. Коли кожен гравець* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *вибирає стратегію* $x_i \in S$ *в профілі стратегій* $x = (x_1,\ldots,x_n)$, *ігрок i отримує виграш* $H_i(x)$. *Профіль стратегій* $x^* \in S$ *є рівновагою Неша, якщо зміна своєї стратегії з* x_i^* *на* x_i *невигідно жодному гравцю* i, *тобто* $\forall i : H_i(x^*) \geqslant H_i(x_i, x_{-i}^*)$.

Визначення 2. *Рівновага Неша називається бездоганною по під-іграм, якщо і тільки якщо вона є рівновагою Неша для кожної під-ігри.*

Визначення 3. *Парето-оптимальність в сенсі теорії ігор характеризує таку ситуацію, при якій неможливо поліпшити результат гри для одного гравця без його погіршення для інших гравців.*

Визначення 4. *Інфляція — підвищення загального рівня цін на товари і послуги.*

Визначення 5. *Індексація заробітної плати — підвищення заробітних плат з метою часткової захисту населення від зростання споживчих цін на товари та послуги.*

Визначення 6. *Будь-яку досконалу рівновагу на під-іграх (SPNE), в якому обидва гравці вибирають стратегію L у всіх своїх ходах, назвемо* ***досконалою рівновагою Рамсея на під-іграх (Ramsey SPNE)*** *[?]*

1.2 Елементи аналізу на часових шкалах

Відомості з теорії часових шкал наводяться слідуючи двом основним джерелами[**?** **?**].

Визначення 7. *Під часовою шкалою розуміється непорожня замкнута підмножина безлічі дійсних чисел, вона позначається символом* $\mathbb{T}$. *Властивості часової шкали визначаються трьома функціями:*

1) оператор переходу вперед:

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\};$$

2) оператор перехода назад:

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\},$$

(при цьому покладається $\inf\varnothing = \sup\mathbb{T}$ *і* $\sup\varnothing = \inf\mathbb{T}$*);*

3) функція зернистості

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Поведінка операторів переходу вперед і назад в конкретній точці на шкалі часу визначає тип цієї точки. Відповідна класифікація точок представлена в таблиці (1.1).

Таблиця 1.1

Класифікація точок на шкалі часу

t праворуч розсіяна	$t < \sigma(t)$
t праворуч щільна	$t = \sigma(t)$
t зліва розсіяна	$\rho(t) < t$
t зліва щільна	$\rho(t) = t$
t ізольована	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t щільна	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

Визначення 8. *Множину* $\mathbb{T}^\kappa$ *визначимо як:*

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T}\setminus\{M\}, & \text{якщо } \exists \text{ праворуч розсіяна точка } M\in\mathbb{T}: \\ & M = \sup\mathbb{T}, \sup\mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T}, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Далі вважаємо $[a,b] = \{t\in\mathbb{T} : a\leqslant t\leqslant b\}$.

Визначення 9. *Нехай* $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *и* $t\in\mathbb{T}^\kappa$*. Число* $f^\Delta(t)$ *називається* Δ*-похідною функції* f *в точці* t*, якщо* $\forall\varepsilon > 0$ *знайдеться такий окіл* U *точки* t *(тобто,* $U = (t-\delta, t+\delta)\cap\mathbb{T}, \delta < 0$*), що*

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t)-s)\right| \leqslant \varepsilon\left|\sigma(t)-s\right| \quad \forall s\in U.$$

Визначення 10. *Якщо* $f^\Delta(t)$ *існує* $\forall t\in\mathbb{T}^\kappa$*, то* $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *називається* Δ*-диференційованою на* $\mathbb{T}^\kappa$*. Функція* $f^\Delta(t):\mathbb{T}^\kappa\to\mathbb{R}$ *називається дельта-похідною функції* f *на* $\mathbb{T}^\kappa$*.*

Якщо f диференційована в t, то

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t).$$

Визначення 11. *Функція* $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *називається регулярною, якщо у всіх щільних справа точках тимчасової шкали* $\mathbb{T}$ *вона має кінцеві правобічні границі, а у всіх зліва щільних точках вона має кінцеві лівобічні границі.*

Визначення 12. *Функція $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ називається rd-неперервною, якщо в справа щільних точках вона неперервна, а в зліва щільних точках має кінцеві лівобічні границі. Множина таких функцій позначається $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T})$, а множина диференційованих функцій, похідна яких rd-неперервна, позначається як $C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T})$.*

Визначення 13. *Для будь-якої регулярної функції $f(t)$ існує функція F, диференційовна в області D така, що для усіх $t \in D$ виконується рівність*

$$F^{\Delta}(t) = f(t).$$

Ця функція називається перед-первісною для $f(t)$ і визначається вона неоднозначно.

Невизначений інтеграл на часовій шкалі має вигляд:

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C,$$

де C — довільна константа інтегрування, а$F(t)$ — перед-первісна для $f(t)$. Далі, якщо для всіх $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ виконується $F^{\Delta}(t) = f(t)$, де $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ — rd-неперервна функція, то $F(t)$ називається первісною функції $f(t)$. Якщо $t_0 \in \mathbb{T}$, то $F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Delta s$ для усіх t. Визначений Δ-інтеграл для будь-яких $r,s \in \mathbb{T}$ визначається як

$$\int\limits_{r}^{s} f(t)\Delta t = F(s) - F(r).$$

РОЗДІЛ 2 МАКРОЕКОНОМІЧНІ МОДЕЛІ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

2.1 Класична модель Барро-Гордона

Класична модель Барро-Гордона розглядає уряд (в особі деякого одного політика), яке приймає рішення про заходи впливу на економіку ґрунтуючись на двох факторах. Перший фактор являє собою сумарну функцію добробуту виду

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t w_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(y_t - \frac{\lambda \pi^2}{2} \right), \quad 0 < \beta < 1, \tag{2.1}$$

де β^t - значимість t-ого періоду для добробуту політика, w_t - функція добробуту політика в t-ом періоді. При цьому взаємозв'язок між інфляцією та безробіттям задається кривою Лукаса

$$y = y^* + \alpha(\pi - \pi^\beta). \tag{2.2}$$

Другий фактор прийняття рішення - це оцінка громадськістю дій уряду у вигляді підтримки або недовіри. Така оцінка в моделі задається через інфляційні очікування, які формуються в період t наступним чином:

$$\pi_t = \begin{cases} \pi, & \forall t : \pi_t = \tilde{\pi}_t, \\ \frac{\alpha}{\lambda}, & \exists s < t : \pi_s \neq \tilde{\pi}_s, \end{cases} \tag{2.3}$$

де $\tilde{\pi}$- рівень інфляції, який політик обіцяє досягти в результаті впливу на економіку.

Як випливає з (2.3), якщо політик поводиться чесно, то громадськість йому довіряє і чекає обіцяний їм рівень інфляції. Якщо політик хоча б раз, обдуривши очікування, провів не ту політику, яку обіцяв, то громадськість йому не вірить. У такому випадку вона очікує відмінний від обіцяного рівень інфляції, який складає $\frac{\alpha}{\lambda}$,оскільки вважає, що в разі обману політик буде прагнути до того, щоб в економіці встановився саме цей рівень інфляції.

Дійсно, в разі обману політик вибере такий рівень інфляції, який буде максимізувати його функцію добробуту в цьому періоді (припустимо, в періоді s). Оскільки, згідно (2.1)-(2.3), функція добробуту періоду s при $\pi_s \neq \tilde{\pi}$ має вигляд

$$w_s = y^*\alpha\left(\pi_s - \frac{\lambda\pi_s^2}{2}\right), \qquad (2.4)$$

то максимизирующий её уровень инфляции будет равен величине $\frac{\alpha}{\lambda}$, что следует из первого условия максимизации.

Так как репутация политика влияет на инфляционные ожидания общественности, то, согласно (2.1)-(2.2), репутация влияет также и на его общую функцию благосостояния. Предположим, что политик ведет себя честно, то есть проводит ту политику, которую обещал. Тогда его общая функция благосостояния принимает вид

$$w^{fair} = \frac{1}{(1-\beta)}\left(y^* - \frac{\lambda\pi^2}{2}\right), \qquad (2.5)$$

поскольку в этом случае, согласно (2.1)-(2.3), функция благосостояния для любого периода t имеет вид

$$w_t^{fair} = y^* - \frac{\lambda\pi^2}{2}. \qquad (2.6)$$

Если политик решит обмануть ожидания общественности в какой-то (допустим в нулевой) период времени, то в этом случае, согласно (2.1)-(2.3), его функция благосостояния в нулевой период составит

$$w_0^{deception} = y^* - \frac{\alpha^2}{2\lambda} - \alpha\tilde{\pi}, \qquad (2.7)$$

а во все последующие периоды вследствие недоверия населения общественности

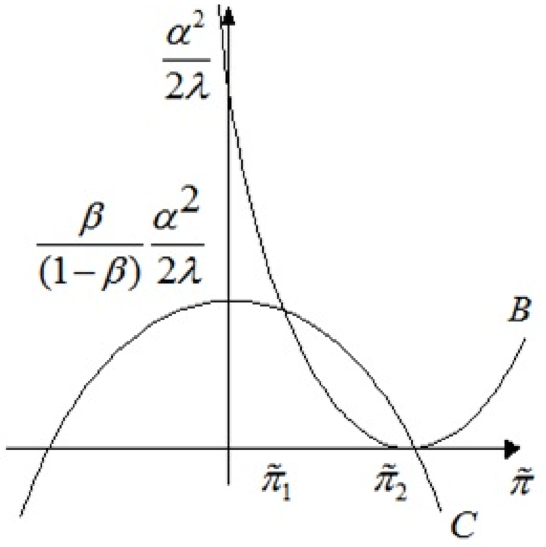
$$w_0^{deception} = y^* - \frac{\alpha^2}{2\lambda}. \qquad (2.8)$$

Следовательно, общая функция благосостояния политика в случае нарушения данных обещаний имеет вид

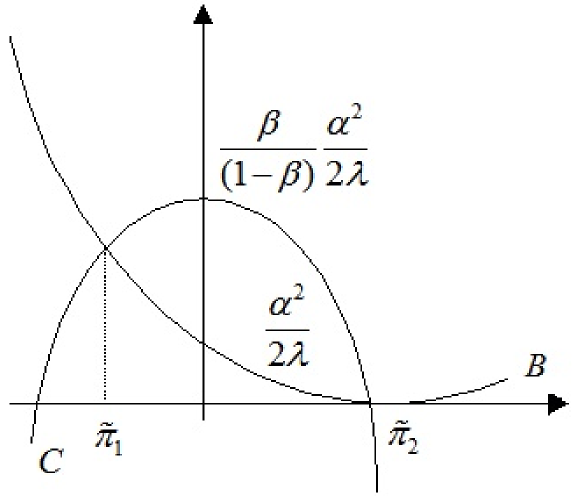
$$W^{deception} = \frac{1}{(1-\beta)}y^* + \frac{(1-2\beta)\alpha^2}{(1-\beta)2\lambda} - \alpha\tilde{\pi}, \qquad (2.9)$$

Очевидно, что политику имеет смысл вести себя честно только при условии $W^{fair} > W^{deception}$, в противном случае он выигрывает больше от невыполнения данных ранее обещаний.

Выведем условия, при которых политик ведет себя честно, не обманывая ожидания населения. Воспользуемся для этого графической интерпретацией этой проблемы: построим графики выигрыша и проигрыша политика в случае обмана и найдем области, в которых выигрыш будет больше проигрыша и наоборот.



(а) $\beta < \frac{1}{2}$



(б) $\beta > \frac{1}{2}$

Рis 2.1 – Графики потерь и выигрыша

Если политик обманывает ожидание общественности в нулевой момент времени, то выигрыш он получает за счет того, что в нулевой момент времени обманул ожидания общественности, а проигрыш – что в дальнейшем общественность перестает ему доверять и всегда ожидает больший уровень инфляции, чем было объявленно.

Следовательно, выигрыш обманывающего население в нулевой момент времени политика

$$B = w_0^{deception} - w_0^{fair} = \frac{\lambda \pi^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2\lambda} - \alpha\tilde{\pi} \tag{2.10}$$

является квадратичной функцией от объявляемого уровня инфляции. Эта функция достигает минимума $B = 0$ в точке $\tilde{\pi} = \frac{\alpha}{\lambda}$. При $\tilde{\pi} = 0$ выигрыш равен $\frac{\alpha^2}{\lambda}$.

Проигрыш обманывающего население в нулевой момент времени политика также является квадратичной функцией от объявляемого уровня инфляции, поскольку

$$C = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t (w_t^{deception} - w_t^{fair}) = -\frac{\lambda\tilde{\pi}^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2\lambda}. \tag{2.11}$$

Функция, задаваемая выражением (2.11), описывает параболу, достигающую максимума $C = \frac{\beta}{(1-\beta)}\frac{\alpha^2}{2\lambda}$ в точке $\tilde{\pi} = 0$. Значение функции C равняется нулю, когда уровень инфляции составляет $\tilde{\pi} \pm \frac{\alpha}{\lambda}$.

Взаиморасположение графиков потерь и выигрыша обманывающего общественность в нулевой момент времени политика зависит от того, больше или меньше единицы величина $\frac{\beta}{1-\beta}$.

Если $\frac{\beta}{1-\beta} < 1$, то есть $\beta < \frac{1}{2}$, то функция потерь и функция выигрыша пересекаются в точках $\tilde{\pi}_1 > 0$ и $\tilde{\pi}_2 > 0$ (2.1а), причем $\tilde{\pi}_1 = \frac{\alpha(1-2\beta)}{\lambda}$, $\tilde{\pi}_2 = \frac{\alpha}{\lambda}$. Если $\frac{\beta}{1-\beta} > 1$, то есть $\beta > \frac{1}{2}$, то функция потерь и функция выигрыша пересекаются в точках $\tilde{\pi}_1 < 0$, $\tilde{\pi}_2 > 0$ (2.1б).

Таким образом, из проведенного анализа следует, что поведение политика (будет он выполнять обещания или нет) зависит от его отношения к репутации. Если для него репутация не важна, будущее мало влияет на его функцию благосостояния $\beta < \frac{1}{2}$, то политику не выгодно вести себя честно. Поскольку, как видно из (2.1а), существует достаточно невысокий уровень инфляции $\tilde{\pi} \in \left(0; \frac{\alpha(1-2\beta)}{\lambda}\right)$, обещая который он может выиграть больше в результате обмана (по сравнению с честным поведением). Если для политика его репутация важна, будущее значимо для его благосостояния $\beta < \frac{1}{2}$, то ему имеет смысл вести себя честно. Поскольку, как видно из (2.1б), не существует уровня инфляции близкого к нулю, обещая который он может получить большую реализацию своих целей в результате обмана по сравнению с честным поведением.

2.2 Теоретико-игровая интерпретация модели Барро-Гордона

В игре участвуют два игрока: p - правительство, q - общественность, которые оперируют инфляцией π и индексированием заработной платы ω соответственно. Для упрощения модели положим, что оба не могут прогнозировать будущие. Каждый игрок выбирает из следующих стратегий: низким L и высоким H уровнем повышения. В общем виде игра может быть задана в виде матрицы выигрышей,

Таблиця 2.1

Матрица выигрышей в модели Барро-Гордона

		Общественность	
		L	H
Правительство	L	a,q	b,v
	H	c,x	d,z

где параметры a,b,c,d,q,v,x,z - выигрыши удовлетворяющие следующим ограничениям [**?**]

$$c > a > d > b, q > v, q \geqslant z > x. \tag{2.12}$$

В данном случае проще всего описать экономику через функцию совокупного предложения Лукаса [**?**]

$$y_t - Y = \lambda(\pi_t - \omega_t) + \varepsilon_t, \tag{2.13}$$

где $\lambda > 0, y$ – производительность, Y – естественный уровень производительности, а ε - макроэкономический шок близкий к нулю. Коэффициенты дисконтирования игроков составляют β_g и β_p, а их функции полезности имеют следующий вид

$$u_t^g = -(\pi_t - \tilde{\pi})^2 + \alpha y_t - \beta(y_t - Y)^2, \tag{2.14}$$

$$u_t^p = -(\pi_t - \omega)^2, \tag{2.15}$$

где $\tilde{\pi}$ - оптимальный уровень инфляции, а $\alpha > 0, \beta > 0$ описывают относительный вес целей правительства (стабильной инфляции, высокой и стабильной производительности). Общественность озабочена верным ожиданием уровня инфляции для того, чтобы определить уровень зарплат на рынке.

Так как нас интересует эффект от выбранной политики, то сфокусируемся на долгосрочном исходе игры. Для этого однозначно определим экономику положив $\forall t,\ \varepsilon_t = 0$, что подразумевает, что мы можем положить $\beta = 0$ без потери общности. Из этого следует, что инструмент правительства π представляет собой выбор средней инфляции.

В стандартной пошаговой игре, в которой игроки могут менять свое поведение в каждый период, мы используем (2.13)-(2.14) для получения равновесия

$$\pi_t^* = \tilde{\pi} + \frac{\alpha\lambda}{2} = \omega_t^*, \tag{2.16}$$

что является известным результатом $\pi_t^* > \tilde{\pi}$. Сфокусировав внимание на двух уровнях инфляции мы следуем [**?**], где были предложены два наиболее естественных варианта – оптимальный уровень из (2.14) и согласованного по времени из (2.16)

$$\pi \in \left\{ L = \tilde{\pi}, H = \tilde{\pi} + \frac{\alpha\lambda}{2} \right\} \ni \omega_t^*. \tag{2.17}$$

Мы можем, учитывая (2.13)-(2.15) и поделив на $\left(\frac{\alpha\lambda}{2}\right)$, без потери общности вывести соответствующие выигрыши, представленные в таблице ниже. Так же вне зависимости от λ и α справедливы следующие ограничения для данной игры в дополнение к изначальным (2.12)

$$c > a = 0 > d > b, c = -d = -\frac{b}{2}, q > v, q \geqslant z > x \tag{2.18}$$

$$c = 1 > a = 0 > d = -1 > b = -2, q = z = 0 > v = x = -1, \tag{2.19}$$

Таблиця 2.2

Матрица выигрышей из (2.19)

		Общественность	
		L	H
Правительство	L	0, 0	-1,-1
	H	$\frac{1}{2}$,-1	$-\frac{1}{2}$, 0

Стандартная пошаговая игра имеет уникальное равновесие по Нэшу $(H{,}H)$. Однако, оно неэффективно, так как является Парето доминированным. Это означает, что существует такой исход игры, который улучшит состояние одного, но при этом не ухудшит его для других игроков. В данном случае это «не Нэшовский» исход $(L{,}L)$. У правительства возникает соблазн создать неожиданную инфляцию, чтобы повысить производительность и снизить уровень безработицы. Так как общественность рациональна, то будет ожидать высокую инфляцию – оба игрока будут в проигрыше.

2.3 Устойчивость равновесных стратегий в модели Барро-Гордона на временных шкалах

Рассмотрим игровую интерпретацию модели Барро-Гордона на временных шкалах.

Все допущения выдвинутые в стандартной игре остаются. Расширим их:

– игра начинается одновременным ходом,

– заранее известно неизменное количество ходов $r^g \in \mathbb{N}$ и $r^p \in \mathbb{N}$,

– игра заканчивается через T периодов, где T - наименьшее общее кратное для r^g и r^p,

– игроки рациональны, обладают равноценными знаниями и полной информацией о структуре игры, матрице выигрышей и всех предыдущих ходах.

Другими словами определяется три временных шкалы: правительства, общественности и самой игры:

$$T_g = \{0,r^g,2r^g,...,T\}, T_p = \{0,r^p,2r^p,...,T\}, T = T_g \cup T_p \qquad (2.20)$$

Главным преимуществом использования однородных временных шкал является экономическая интерпретация: r^g и r^p представляют собой степень возможности изменений политики относительно инфляции и степень реагирования для внесения изменений в заработные платы.

Асинхронная игра на временных шкалах будет как правило иметь несколько равновесий по Нэшу, среди которых мы выберем лучшую в зависимости от под-игры.

Теорема 1. *Рассмотрим общую несогласованную по времени игру на однородных временных шкалах, для которой выполняются (2.18) и (2.20). Тогда все SNPE игры будут SNPE Рамсея, если и только если*

$$r^g > \bar{r^g}(R) = \begin{cases} \dfrac{c-d}{a-d} r^p = \dfrac{a-b}{a-d} r^p, & \textit{если } R = 0 \\ \dfrac{(1+R)(c-d)}{a-d} r^p = \dfrac{a-b+R(c-d)}{a-d} r^p, & \textit{если } R \in (0; \bar{R}) \\ \dfrac{c-d-(1-R)(a-b)}{a-d} r^p = \dfrac{(a-b)}{a-d} R r^p, & \textit{если } R \in (\bar{R}; 1) \end{cases} \tag{2.21}$$

где $\bar{R} = \frac{q-v}{z-x+q-v}$. В несогласованной игре, где справедливо (2.18), (2.21) преобразуется в

$$\frac{r^g}{r^p} \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right) \tag{2.22}$$

Доказательство: смотреть Либиха и Штелиха [**?**].

Можно утверждать, что действия игроков могут не всегда быть детерминистическими и/или что частота их ходов различается во времени или подчиняется некоторому случайному процессу. Разнородные временные шкалы позволяют изучать подобные случаи. Для большей эффективности нормализуем горизонт планирования как $T = r^g$. Как и ранее игроки g и p ходят одновременно в первом периоде и во всех $T = r^g$ периодах, в промежутках между которыми общественность так же способна реагировать на ход правительства. Для удобства сравнения оставим все предположения предыдущего параграфа неизменными.

Рассмотрим произвольную временную шкалу $\mathbb{T}$ и произвольную невозрастающую функцию реакции общественности $f : \mathbb{T} \to [0,1]$. В данной работе рассматриваются два представляющих интерес особых случая. В первом, при разнородной (атомистической) общественности, функция реакции может быть интерпретирована как часть общественности, которая уже имела возможность совершить ход. Во втором, при вероятностных ходах общественности, функция реакции может быть интерпретирована как кумулятивная функция распределения её ходов.

Чтобы удостовериться в том, что все SPNE являются SPNE Рамсея, достаточно показать, что в первом ходе оптимальной стратегией g является L вне зависимости от хода общественности в первом периоде. Получим два соответствующих условия:

$$ar^g > c \int_0^{r^g} 1 - f(t)\Delta t + d \int_0^{r^g} f(t)\Delta t, \tag{2.23}$$

$$dr^g > b\int_0^{r^g} 1 - f(t)\Delta t + a\int_0^{r^g} f(t)\Delta t. \tag{2.24}$$

Теорема 2. *Рассмотрим общую несогласованную по времени игру, в которой выполняется* (2.18) *и* $f : \mathbb{T} \to [0,1]$ *– невозрастающая функция реакции. Тогда все SPNE игры являются SPNE Рамсея тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\int_0^{r^g} f(t)\Delta t > \frac{r^g}{2}. \tag{2.25}$$

Для лучшей наглядности теоремы 2 и лучшего понимания приведём несколько следствий и рассмотрим пример. Как уже было указано ранее, мы концентрируемся на двух случаях: разнородной общественности и вероятностных моделях.

2.3.1 Разнородная общественность. Во-первых, предположим, что существует N различных общественных групп (профсоюзов) $p_1,\ldots,p_N$ с соответствующими $r^{p_1},\ldots,r^{p_N}$ и размерами $s_1,\ldots,s_N \in [0,1]$, которые удовлетворяют естественному предположению $\sum_{i=1} Ns_i = 1$. Чтобы свести наше внимание к первому ходу правительства, предположим что r^g является кратным для r^{p_i} для всех $i = 1,\ldots,N$, то есть

$$\frac{r^g}{r^{p_i}} \in \mathbb{N}.$$

Для более асинхронных случаев см. [**?**]. Для данного особого случая теорему 2 можно переписать следующим образом.

Следствие 1. *Рассмотрим общую несогласованную по времени игру, в которой выполняется* (2.18) *и общественность состоит из* N *различных групп. Тогда все SPNE игры являются SPNE Рамсея тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{N} s_i(r^g - r^{p_i}) \geqslant \frac{r^g}{2}. \tag{2.26}$$

2.3.2 Вероятностная модель. Вернёмся к случаю с унифицированной общественностью, чтобы рассмотреть вероятностные ходы отдельно от влияния эффектов разнородной общественности. В зависимости от результатов переговоров общественность будет реагировать на первый ход правительства в какой-то момент времени из интервала $[a,b], 0 < a < b < r^g$, с равномерно распределённым вероятностным законом. Теорема 2 принимает вид:

Следствие 2. *Рассмотрим общую несогласованную по времени игру, в которой выполняется* (2.18) *и общественность делает второй ход в какой-то момент времени из интервала* $[a,b]$ *с равномерно распределённым вероятностным законом. Тогда все SPNE игры являются SPNE Рамсея тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\frac{b^2 - a^2}{2} \geqslant b - \frac{r^g}{2}. \tag{2.27}$$

Очевидно, что можно рассматривать произвольные комбинации описанных выше подходов, то есть разнородных игроков с вероятностными ходами, вероятность которых может быть описана некоторыми функциями распределения. Приведём пример.

Пример 1. Рассмотрим экономику с двумя профсоюзами, каждый их которых состоит из s_1 и s_2 рабочих соответственно, так что выполняется $s_1 + s_2 = 1$. Примем в качестве одного периода квартал (раз в квартал выпускаются сводки по макроэкономике). Предположим, что $r^g = 5$ и что время реакции профсоюзов составляют как минимум 1 и 3 квартала, но как максимум – 1,5 и 3,5 квартала соответственно. Для простоты предположим, что решение, принятое за полтора квартала подчиняется равномерному закону распределения. Тогда получим:

$$\mathbb{T} := 0 \cup [1, 1.5] \cup r^g,$$

$$\mathbb{T} := 0 \cup [3, 3.5] \cup r^g.$$

Функция реакции тогда имеет вид $f : \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2 \to [0,1]$:

$$f(x) \begin{cases} 0 & if \quad x = 0, \\ 2s_1(x-1) & if \quad x \in [1,1.5], \\ s_1 + 2s_2(x-3) & if \quad x \in [3,3.5], \\ 1 & if \quad x = 5. \end{cases}$$

Интегрируя по $\mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2$ получим

$$\int_0^5 f(x)\Delta x = \frac{15}{4}s_1 + \frac{7}{4}s_2.$$

Предположение (2.25) теоремы 2 удовлетворяется (и следовательно единственное равновесие является равновесием Рамсея) тогда и только тогда, когда выполняется

$$s_1 \geqslant \frac{3}{8}, \text{или, что эквивалентно,} s_2 \leqslant \frac{5}{8}.$$

Интуитивно понятно, что профсоюз, принимающий решения быстрее, должен быть достаточно велик для того, чтобы общая реакция общественности была достаточно быстрой, чтобы препятствовать увеличению инфляции правительством.

2.4 Классическая модель профсоюз—монополист

Данная модель является моделью отношений профсоюз—фирма по Леонтьеву [**?**], в которой профсоюз задаёт уровень заработной платы W, после чего фирма выбирает желаемое количество наёмных работников (уровень найма) E. Предполагается, что фирма оперирует в условиях конкурентного рынка с рыночной ценой P.

Функция полезности профсоюза имеет вид

$$U = U(W,E), \quad \frac{\partial U}{\partial W} > 0; \quad \frac{\partial U}{\partial E} \ > \ 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial W^2} \leqslant 0.$$

В простейшем случае можно взять, например, $U = \lambda WE$, где $\lambda \in (0; 1)$.

Полезность для фирмы измеряется как прибыль

$$\Pi \ = \ PY(\bar{K},E) \ - \ WE,$$

где цена P дана, а капитал $\bar{K}$ фиксирован. Отсюда мы можем переписать

$$\Pi(W,E) \ = \ R(E) \ - \ WE,$$

где R — доход.

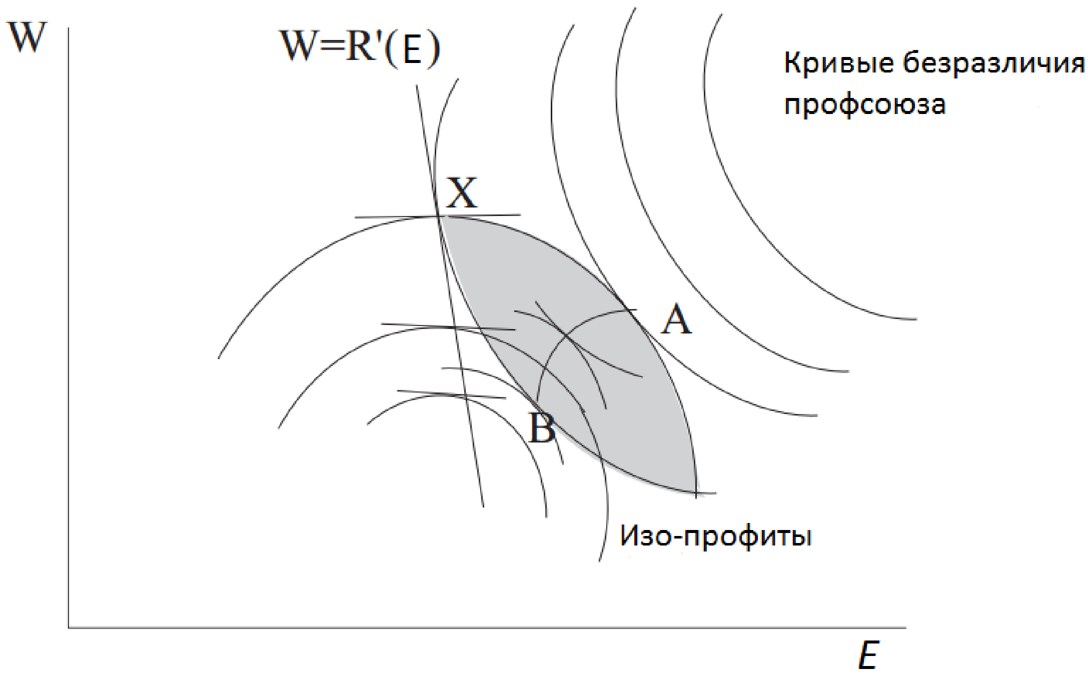
Классическим является решение методом обратной индукции. При этом вначале фирма максимизирует свою прибыль по E, считатя уровень заработной платы фиксированным и заданным. Условие экстремума первого порядка примет вид

$$W = R'(E).$$

Разрешая уравнение относительно E, мы получим кривую спроса на рабочую силу: $E \ = \ g(W)$. Зная, к чему приходит фирма, профсоюз решает задачу

$$\max_W U(W,E) = U(W, g(W)).$$

Схематически решение представлено на графике 2.2. Графически можно показать, что исход игры неэффективен. Точка X является точкой равновесия обратной индукции модели монополии профсоюза. Точки в закрашенной области предпочтительнее по Парето, чем X. AB является так называемой кривой контракта, состоящей из точек, в которых изопрофиты и кривые безразличия профсоюза имеют общий тангенс [?].



Рiс 2.2 – Кривые безразличия игроков в модели профсоюз—монополист

2.5 Модель профсоюз—монополист на временных шкалах

Эта модель в литературе не встречается и исследована нами впервые. В игре, так же как и в непрерывной модели, два игрока: профсоюз P и фирма–монополист F, чьими рычагами влияния на игру являются W (зарплата рабочего) и E (количество наняты х рабочих) соответственно. Каждый игрок выбирает одну из двух стратегий: установить низкое L или высокое H значение управляемого им параметра. В общем виде игра может быть задана следующей матрицей выигрышей:

Функцию полезности профсоюза мы полагаем линейной: $U(W,E) = \lambda WE$, где $\lambda \in (0;1)$:

$$\frac{\partial U}{\partial W} > 0; \quad \frac{\partial U}{\partial E} > 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial W^2} \leqslant 0$$

Таблиця 2.3

Матрица выигрышей для модели "профсоюз—монополист"

		Профсоюз	
		L	H
Фирма	L	a,q	b,v
	H	c,x	d,z

$$U(0,E) = U(W,0) = U(0,0) = 0.$$

Функция полезности фирмы имеет вид $\Pi(W,E) = cP(\bar{K},E) - WE$:

$$P(\bar{K}, E) = A\bar{K}^{\alpha}E^{\beta},$$

где A — коэффициент нейтрального технического прогресса, α и β — коэффициенты эластичности валового внутреннего продукта по капитальным и трудовым затратам.

Для профсоюза соотношения между значениями функции полезности для различных игровых ситуаций будут следующими:

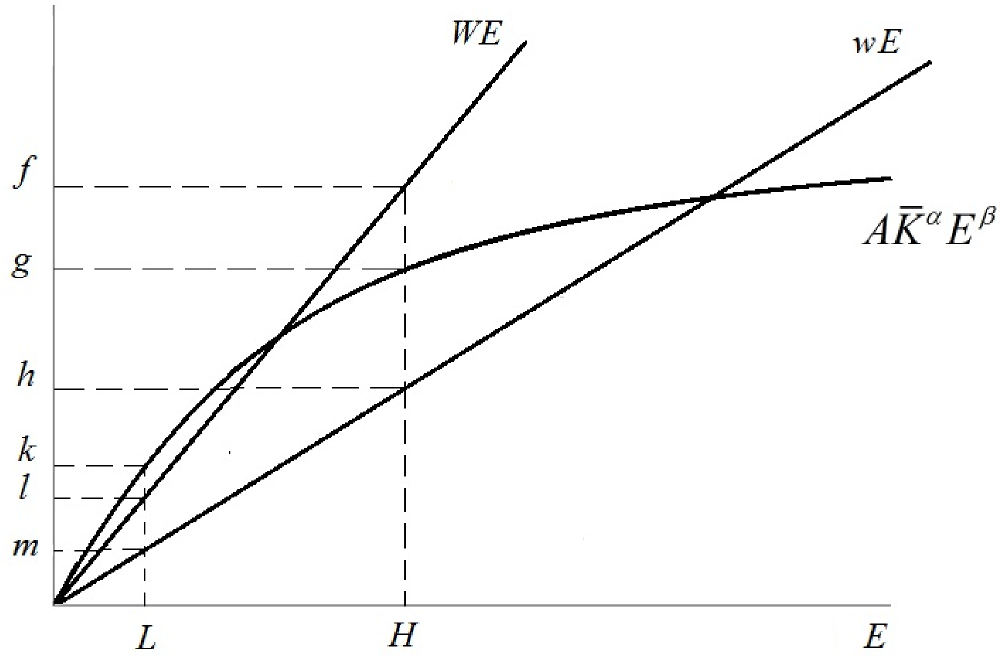
$$U(L,L) < U(L,H) \nsim U(H,L) < U(H,H). \tag{2.28}$$

Соотношение $U(L,H) \nsim U(H,L)$ не может быть определенно однозначно, так как это «политический» выбор между двумя альтернативами: большее количество людей, получающих меньшую зарплату (условно «левый» подход к распределению доходов) или меньшее количество людей, получающих большую зарплату (условно «правый» подход).

Для нахождения соотношений между значениями функции полезности фирмы в разных игровых ситуациях построим график 2.3.

На рисунке w — низкий уровень зарплат по стратегии L, W — высокий уровень зарплат по стратегии H. Принимая во внимание, что за исключением количества нанятых и уровня зарплат, все остальные величины постоянны, легко вывести следующее:

$$\Pi(H,H) = g - f < \Pi(H,L) = k - l < \Pi(L,L) = k - m < \Pi(L,H) = g - h. \tag{2.29}$$



Рiс 2.3 – Компоненты функции полезности фирмы при разных уровнях зарплат

Следовательно матрица выигрышей (2.3) будет следующей:

Таблиця 2.4

Матрица выигрышей для модели "профсоюз—монополист"

		Профсоюз	
		L	H
Фирма	L	a,q	b,v
	H	c,x	d,z

где $q < x \approx v < z, 0 > d < b < a < c$.

РОЗДІЛ 3 КОМПЬЮТЕРНАЯ ИМИТАЦИЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В рамках дипломной работы была разработана программа, которая эмулирует биматричную игру на временных шкалах и доказывает эмпирически изложенные в работе результаты.

Разработка программного продукта велась на языке Python 3.4. Программа позволяет пользователю задать r^g, r^p и соответствующие скалярные функции поведения игрока в определенный момент времени. Значениями данной функции будет вероятность выбора игроком стратегии H в данный период времени. Так же пользователь может задать количество запусков игры с входящими данными для подсчета статистики. В качестве интерфейса входящих данных был выбран простой текстовый файл, что позволяет строить в случае необходимости большие последовательности экспериментов.

3.1 Анализ устойчивости стратегий в модели Барро-Гордона

Положим, что матрица выигрышей двух игроков соответствует 2.2, $r^g = 7$ (количество ходов правительства), $r^p = 4$ (количество ходов общества).

Таблиця 3.1

Матрица выигрышей для модели Барро-Гордона

		Общественность	
		L	H
Правительство	L	0, 0	-1,-1
	H	$\frac{1}{2}$,-1	$-\frac{1}{2}$, 0

Проверим выполнение условия теоремы 2.21 для матрицы выигрышей 3.1.

$$r^g > \bar{r^g}(R) = \begin{cases} 2r^p = 2r^p, & \text{если } R = 0 \\ 2(1+R)r^p = 2(1+R)r^p, & \text{если } R \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \\ 2Rr^p = 2Rr^p, & \text{если } R \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \end{cases}$$

$$r^g > \bar{r^g}(R) = 0$$

$$4 > 0$$

Следовательно $\frac{r^g}{r^p} \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$ выбраны правильно и все совершенные равновесия по под-играм должны быть совершенными равновесиями по под-играм

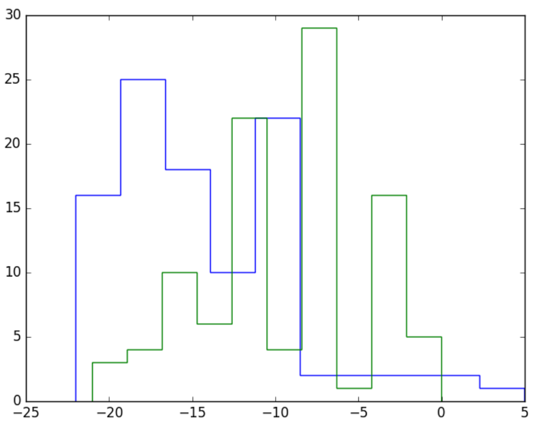
Рамсея.

Рассмотрим случай, когда правительство скорее склонно ввести высокий уровень инфляции, а общественность предполагая, что правительство пойдет на этот шаг с высокой долей вероятности поднимет зарплаты.

Зададим распределение вероятностей выбора стратегии H для каждого из двух игроков:

$$q^g = [0.5; 0.9; 0.7; 0.5; 0.9; 0.73; 0.8]\,,$$
$$q^p = [0.8; 0.9; 0.8; 1]\,.$$

С помощью программы проведем эмуляцию 100 игр с такими исходными данными.



Pic 3.1 – Гистограмма выигрышей, синий - правительство, зеленый - общественность

Таблиця 3.2

Статистические показатели для 100 игр

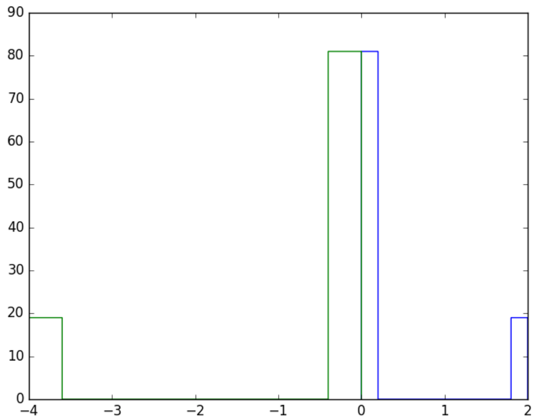
	Правительство	Общественность
Среднее	-14.26	-9.46
Стандартное отклонение	5.34	4.66
Ассиметрия	1.1	-0.041
Эксцесс	1.37	-0.37

Согласно полученным результатам легко видеть, что подобный набор стратегий невыгоден обеим сторонам, к тому же правительству из-за более «мягкого» подхода «более невыгодно».

Рассмотрим случай, когда правительство на последнем шаге может отступить от оптимальной для обоих игроков стратегии (L,L).

Зададим распределение вероятностей выбора данной стратегии для каждого из двух игроков:

$$q^g = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0.3] \,,$$
$$q^p = [0; 0; 0; 0] \,.$$



Рic 3.2 – Гистограмма выигрышей, синий - правительство, зеленый - общественность

Таблиця 3.3

Статистические показатели для 100 игр

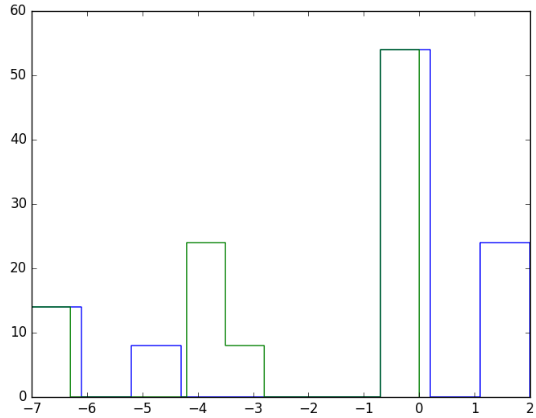
	Правительство	Общественность
Среднее	0.39	-0.78
Стандартное отклонение	0.78	1.56
Ассиметрия	1.6	-1.11
Эксцесс	0.58	0.58

Данная стратегия является выигрышной для правительства, если общественность не ожидает подобного хода под конец действия срока правительства.

Рассмотрим случай, когда общественность доверяет правительству и почти уверенно, что оно не может поднять уровень инфляции к окончанию срока своего правления.

Зададим распределение вероятностей выбора данной стратегии для каждого из двух игроков:

$$q^g = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0.3] \,,$$
$$q^p = [0; 0; 0; 0.15] \,.$$



Ріс 3.3 – Гистограмма выигрышей, синий - правительство, зеленый - общественность

Таблиця 3.4

Статистические показатели для 100 игр

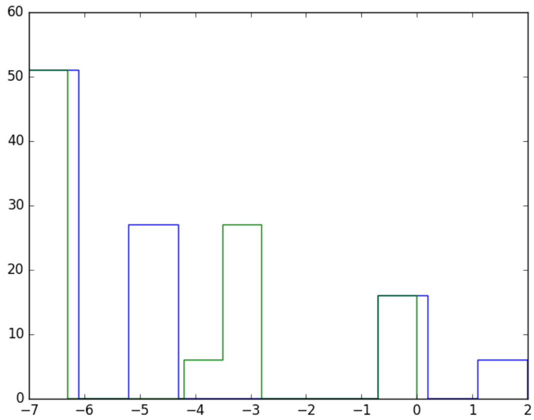
	Правительство	Общественность
Среднее	-0.9	-2.18
Стандартное отклонение	3	2.58
Ассиметрия	-1.16	-0.68
Эксцесс	-0.06	-0.95

Легко видеть, что данная стратегия однозначно ухудшает позицию правительства, но так же не выгодна общественности.

Рассмотрим случай, когда общественность не доверяет правительству и почти уверенно, что оно повысит уровень инфляции к окончанию срока своего правления. Зададим распределение вероятностей выбора данной стратегии для каждого из двух игроков:

$$q^g = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0.3] \,,$$
$$q^p = [0; 0; 0; 0.8] \,.$$

Данная стратегия является равносильно невыгодна для обоих игроков.



Ріс 3.4 – Гистограмма выигрышей, синий - правительство, зеленый - общественность

Таблиця 3.5

Статистические показатели для 100 игр

	Правительство	Общественность
Среднее	-4.8	-4.62
Стандартное отклонение	2.99	2.65
Ассиметрия	1.18	0.54
Эксцесс	-0.12	-1.15

В связи с полученными результатами можно сделать вывод, что если правительство имеет больше шагов на временных шкалах, то ей имеет смысл отклонится от оптимальной по Парето стратегии (L, L) и повысить уровень инфляции под конец срока своего правления, так как даже если общественность будет ожидать такого хода, то с целью минимизировать свои потери не будет повышать индексирование заработной платы заранее. Естественно если правительство захочет заручиться поддержкой общественности на следующих выборах, то такой ход с её стороны будет сродни «политическому самоубийству».

3.2 Анализ устойчивости стратегий в модели профсоюз — монополист

Положим матрицу выигрышей в соответствии с 2.4 следующим образом:

Таблица 3.6

Матрица выигрышей соответствующая (2.4)

		Профсоюз	
		L	H
Фирма	L	3, 1	2, 3.9
	H	7, 4	-3, 7

Для нахождения равновесия по Нэшу посчитаем следующее:
Фирма

$$L: 3\alpha + 2(1-\alpha) = \alpha + 2$$

$$H: 7\alpha - 3(1-\alpha) = 10\alpha - 3$$

$$10\alpha - 3 = \alpha + 2$$

$$\alpha = \frac{5}{9}$$

Профсоюз

$$L: \beta + 4(1-\beta) = -3\beta + 4$$

$$H: 3.9\beta + 7(1-\beta) = -3.1\beta + 7$$

$$0.1\beta = 3$$

$$\beta = 30$$

Следовательно равновесием по Нэшу будет стратегия L,H.

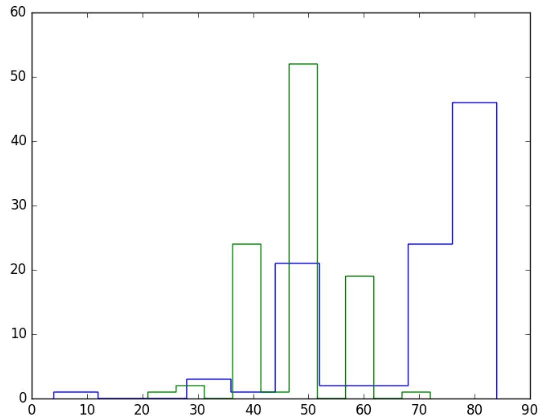
В каждом столбце матрицы фирмы найдем максимальный элемент. Затем в каждой строке матрицы профсоюза выберем наибольший элемент. Платежная матрица фирмы:

3, 1	**2, 3.9**
7, 4	-3, **7**

Оптимальной по Парето будет стратегия (H,L). Далее полагаем $r^f = 4$ (количество ходов фирмы за одну игру), $r^p = 3$ (количество ходов профсоюза).

Рассмотрим случай, когда оба игрока стараются следовать равновесной стратегии по Нэшу. Зададим распределение вероятностей выбора первой стратегии для каждого из двух игроков:

$$q^f = [0.9; 0.9; 0.9; 0.9]\,,$$
$$q^p = [0.1; 0.1; 0.1]\,.$$



Pic 3.5 – Гистограмма выигрышей, синий - фирма, зеленый - профсоюз

Таблиця 3.7

Статистические показатели для 100 игр

	Фирма	Профсоюз
Среднее	69.02	47.84
Стандартное отклонение	18.1	8.19
Ассиметрия	-1.04	0.017
Эксцесс	0.25	0.69

Рассмотрим случай, когда профсоюз пытается увеличивать зарплату, на своём последнем шаге, а фирма для выхода из нерентабельного положения сокращает количество сотрудников. Зададим распределение вероятностей выбора данной стратегии для каждого из двух игроков:

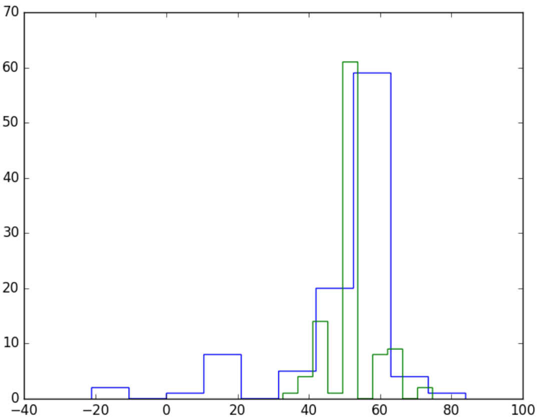
$$q^f = [0.9; 0.9; 0.9; 0.1] \,,$$
$$q^p = [0.1; 0.1; 0.9] \,.$$

Таблиця 3.8

Статистические показатели для 100 игр

	Фирма	Профсоюз
Среднее	50.48	51.1
Стандартное отклонение	17.18	7.17
Ассиметрия	-2.02	0.57
Эксцесс	5.21	1.44

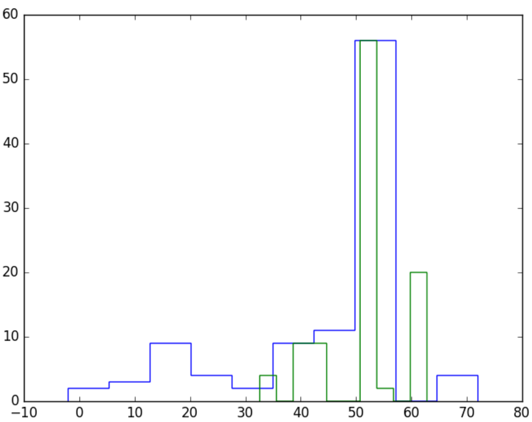
Такая стратегия незначительно улучшит позиции профсоюза, но заметно пошатнет позицию фирмы.



Рiс 3.6 – Гистограмма выигрышей, синий - фирма, зеленый - профсоюз

Рассмотрим случай, когда профсоюз увеличит зарплату во второй раз и вернется к оптимальной стратегии на третий период. Зададим распределение вероятностей выбора данной стратегии для каждого из двух игроков:

$$q^f = [0.9; 0.9; 0.1; 0.9],$$
$$q^p = [0.1; 0.9; 0.1].$$



Рiс 3.7 – Гистограмма выигрышей, синий - фирма, зеленый - профсоюз

Снова таки разовая акция поднятия зарплат даёт профсоюзу незначительный выигрыш, но фирма при этом проигрывает относительно много больше, чем выигрывает профсоюз.

Таблиця 3.9

Статистические показатели для 100 игр

	Фирма	Профсоюз
Среднее	43.06	50.64
Стандартное отклонение	14.47	7.38
Ассиметрия	-1.06	-0.29
Эксцесс	1.30	0.09

Рассмотрим случай, когда профсоюз поднимает на втором своём ходе зарплату, но не опускает его вплоть до конца игры. Зададим распределение вероятностей выбора этой стратегии для каждого из двух игроков:

$$q^f = [0.9; 0.9; 0.1; 0.2]\,,$$
$$q^p = [0.1; 0.9; 0.8]\,.$$

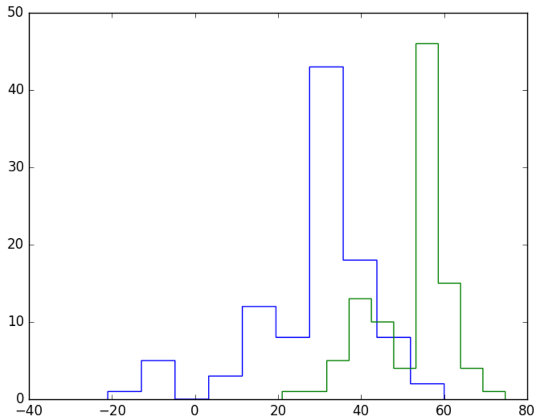


Рис 3.8 – Гистограмма выигрышей, синий - фирма, зеленый - профсоюз

Таблиця 3.10

Статистические показатели для 100 игр

	Фирма	Профсоюз
Среднее	30.37	51.37
Стандартное отклонение	13.64	8.99
Ассиметрия	-1.36	-0.53
Эксцесс	2.74	0.8

Фирма снова теряет в относительных деньгах, в то время как профсоюз только незначительно увеличивает своё положение. Разумно с точки зрения фирмы сделать предложение профсоюзу не менять уровень зарплат с оптимального, а взамен отплачивать разным видом бонусов. Тогда функция полезности изменится для обоих игроков на равную величину. Фирме стоит подобрать эту величину бонусов так, чтобы остаток между её оптимальным выигрышем после вычитания бонусов был чем-то средним между собственными выигрышами, когда профсоюз устанавливает высокий уровень зарплат и низкий.

ВЫВОДЫ

В данной работе была рассмотрена игровая интерпретация модели Барро-Гордона на временных шкалах. Нами впервые введена игровая интерпретация модели «профсоюз — монополист». Эта модель была рассмотрена и на временные шкалах. Разработано программное обеспечение для имитационного моделирования рассмотренных макроэкономических игр.

В результате проведенной работы было показано, что на временных шкалах монополисту стоит договариваться с профсоюзом о дополнительных выплатах (например, в виде бонусов) при низком уровне найма вместо установления высокого уровня найма. В противном случае профсоюз всегда будет устанавливать высокий уровень зарплат, что невыгодно монополисту, так как он потеряет больше, чем если бы отдал часть выручки в виде бонусов.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Пояснения к коду

`util.fromFileToMap(filepath)`

Функция парсит входящие данных

`nash.calculate_nash(government_payoffs, public_payoffs)`

Функция рассчитывает равновесие по Нэшу для стандартной игры.

`nash.time_scales_game(request, government_payoffs, public_payoffs))`

Имитация игры на временных шкалах, результатом который есть вектор выигрышей игроков за время игры

`util.create_all_stats(array, player_name, time)`

Рассчитывает статистические параметры, строит гистограмму для выигрышей одного игрока.

Листинг

entryPoint.py:

```
 from datetime import datetime
import nash
import util

ClientInput = util.fromFileToMap(util.parse().filePath)

GovernmentPayoffs = ['Government',
                   ('L', 'L', 3),
                   ('L', 'H', 5),
                   ('H', 'L', 2),
                   ('H', 'H', -1)]
PublicPayoffs = ['Public',
               ('L', 'L', 0),
               ('L', 'H', 2),
               ('H', 'L', 3),
               ('H', 'H', 7)]

nash.calculate_nash(GovernmentPayoffs, PublicPayoffs)


time = datetime.timestamp(datetime.now())
stop = int(util.parse().iterations)
mat = [[0] * stop for i in range(2)]
for i in range(0, stop):
    game = nash.time_scales_game(ClientInput, GovernmentPayoffs, PublicPayoffs)
    for j in range(0, 2):
        mat[j][i] = game[j]

util.create_all_stats(mat[0], 'Government', time)
util.create_all_stats(mat[1], 'Public', time)

print("␣")
```

util.py

```
import argparse
import os
import re

import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats.stats as st
from numpy import std


def fromFileToMap(filePath):
    newDict = {}
    with open(filePath) as f:
        for line in f:
            line = re.split("#", line)
            splitLine = line[0].split()
            newDict[splitLine[0]] = ",".join(splitLine[1:])
    return newDict


def parse():
    parser = argparse.ArgumentParser()
    parser.add_argument('-f', '--filePath', default="files/income.txt")
    parser.add_argument('-i', '--iterations', default=1)
    return parser.parse_args()


def lcm(a, b):
    m = a * b
    while a != 0 and b != 0:
        if a > b:
            a %= b
        else:
            b %= a
    return m // (a + b)


def add(x, y):
    return list(map(lambda a, b: a + b, x, y))


def make_histogramm(array, player_name, path):
    plt.hist(array, histtype='step')
    file_name = str(player_name) + ".png"
    try:
        os.mkdir(path, mode=0o777)
    except OSError:
        pass
    plt.savefig(path + file_name, format='png')


def make_all_calculations(array, player_name, file):
    file.write(str(player_name + "'s␣average␣=␣" + str(float(sum(array)) / len(array)) + "\n
        "))
    file.write(str(player_name + "'s␣standard␣deviation␣=␣" + str(std(array)) + "\n"))
```

```
    file.write(str(player_name + "'s␣asymmetry␣=␣" + str(st.skew(array, bias=False)) + "\n")
        )
    file.write(str(player_name + "'s␣excess␣=␣" + str(st.kurtosis(array, bias=False)) + "\n"
        ))


def create_all_stats(array, player_name, time):
    path = "results/game" + str(time) + "/"
    make_histogramm(array, player_name, path)

    file = open(path + "allEquations.txt", "a")
    make_all_calculations(array, player_name, file)
```

nash.py

```
import math
import random

import globalConstants
import util


class Player:
    def __init__(self, name, order, strategy_space, payoffs, choice, suboptimal, strategies,
         state, game_play):
        self.name = name
        self.order = order
        self.strategy_space = strategy_space
        self.payoffs = payoffs
        self.choice = choice
        self.suboptimal = suboptimal
        self.strategies = strategies
        self.state = state
        self.game_play = game_play

    def process_game(self, G):
        for i in range(0, len(G)):
            X = G[i]
            if X[0] == self.name:
                for j in range(1, len(X)):
                    Branch = X[j]
                    Alternative = list(Branch)
                    del Alternative[len(Alternative) - 1]
                    self.strategy_space = self.strategy_space + [tuple(Alternative)]
                    self.payoffs = self.payoffs + [Branch[len(Branch) - 1]]

    def evaluate(self):
        X = []
        for i in range(0, len(self.strategy_space)):
            Alternative1 = self.strategy_space[i]
            for j in range(0, len(self.strategy_space)):
                Alternative2 = self.strategy_space[j]
                if Alternative1 != Alternative2:
                    if len(Alternative1) == len(Alternative2):
                        Compare = 0
                        for k in range(0, len(Alternative1) - 1):
```

```
                            if Alternative1[k] == Alternative2[k]:
                                Compare = Compare + 0
                            else:
                                Compare = Compare + 1
                        if Compare == 0:
                            PayoffCompare = [self.payoffs[i], self.payoffs[j]]
                            M = max(PayoffCompare)
                            if self.payoffs[i] == M:
                                self.choice = Alternative1
                                X = X + [self.choice]
                            else:
                                self.suboptimal = self.suboptimal + [Alternative1]
                            if self.payoffs[j] == M:
                                self.choice = Alternative2
                                X = X + [self.choice]
                            else:
                                self.suboptimal = self.suboptimal + [Alternative2]

        X = set(X)
        self.suboptimal = set(self.suboptimal)
        self.strategies = list(X - self.suboptimal)
        print("\nStrategies␣selected␣by␣" + self.name + ":")
        print(self.strategies)
        for l in range(0, len(self.strategies)):
            strategy = self.strategies[l]
            for m in range(0, len(strategy)):
                O = self.order[m]
                self.state[O] = strategy[m]
            self.game_play = self.game_play + [tuple(self.state)]


class Game:
    def __init__(self, players, structure, optimal):
        self.players = players
        self.structure = structure
        self.optimal = optimal

    def nash(self, GP):
        Y = set(GP[0])
        for i in range(0, len(GP)):
            X = set(GP[i])
            Y = Y & X
        self.optimal = list(Y)
        if len(self.optimal) != 0:
            print("\nThe␣pure␣strategies␣Nash␣equilibrium␣␣are:")
            for k in range(0, len(self.optimal)):
                print(self.optimal[k])
        else:
            print("\nThis␣game␣has␣no␣pure␣strategies␣Nash␣equilibrium!")


class TimeScaleGame(Game):
    def __init__(self, players, structure, optimal, government_period, public_period,
        government_strategy,
                 public_strategy):
```

```
        super().__init__(players, structure, optimal)
        self.government_period = government_period
        self.public_period = public_period
        self.government_strategy = government_strategy
        self.public_strategy = public_strategy

    def play(self):
        fullTime = util.lcm(self.government_period, self.public_period)
        self.government_strategy = self.getStrategyForAllPeriod(self.government_strategy,
            self.government_period,
                                                                 fullTime)
        self.public_strategy = self.getStrategyForAllPeriod(self.public_strategy, self.
            public_period, fullTime)
        self.payoff = [0, 0]
        for x in range(0, fullTime):
            self.payoff = util.add(self.getPayoff(x), self.payoff)
        return self.payoff

    def getPayoff(self, x):
        g_strat = self.government_strategy[x]
        p_strat = self.public_strategy[x]
        summ = []
        for i in range(0, len(self.structure)):
            X = self.structure[i]
            for d in range(0, len(self.players)):
                if X[0] == self.players[d]:
                    for j in range(1, len(X)):
                        Branch = X[j]
                        Alternative = list(Branch)
                        del Alternative[len(Alternative) - 1]
                        if Alternative == [g_strat, p_strat]:
                            summ.append(list(Branch)[len(Branch) - 1])
        return summ


    def getStrategyForAllPeriod(self, strategy, period, fullTime):
        new_strategy = []
        changePeriod = fullTime / period
        tmp = -1
        for x in range(0, fullTime):
            index = math.floor(x / changePeriod)
            if index != tmp:
                probability = float(strategy[index])
                rand = random.randrange(0, 100) / 100
                if probability > rand:
                    new_strategy.append('H')
                else:
                    new_strategy.append('L')
                tmp = index
            else:
                new_strategy.append(new_strategy[x - 1])
        return new_strategy


def calculate_nash(government_payoffs, public_payoffs):
```

```
    # game(players,structure,plays,optimal)
    game = Game(('Government', 'Public'), [government_payoffs, public_payoffs], None)
    # player(name,order,strategySpace,payoffs,choice,suboptimal,strategies,state,gameplay):
    player1 = Player('Government', (1, 0), [], [], None, [], None, [0, 0], [])
    player2 = Player('Public', (0, 1), [], [], None, [], None, [0, 0], [])
    players = [player1, player2]
    for i in range(0, len(players)):
        players[i].process_game(game.structure)
        players[i].evaluate()
    GP = []
    for i in range(0, len(players)):
        X = players[i].game_play
        GP = GP + [X]
    game.nash(GP)


def time_scales_game(request, government_payoffs,
                     public_payoffs):
    government_period = request.get(globalConstants.GOVERNMENT_TIME_PERIOD)
    public_period = request.get(globalConstants.PUBLIC_TIME_PERIOD)
    government_strategy = str(request.get(globalConstants.GOVERNMENT_SCALAR_STRATEGY)).split
        (',')
    public_strategy = str(request.get(globalConstants.PUBLIC_SCALAR_STRATEGY)).split(',')

    game = TimeScaleGame(('Government', 'Public'), [government_payoffs, public_payoffs],
        None, int(government_period),
                         int(public_period), government_strategy, public_strategy)
    return game.play()
```