Министерство Образования Украины

Учреждение образования
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Институт Інститут математики, економіки та механіки
Факультет Прикладная математика

Одесса 2016

СОДЕРЖАНИЕ

1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. (S,H)— *некооперативная игра n лиц в нормальной форме, где S — набор чистых стратегий, а H — набор выигрышей. Когда каждый игрок $i \in \{1,...,n\}$ выбирает стратегию $x_i \in S$ в профиле стратегий $x = (x_1,...,x_n)$, игрок i получает выигрыш $H_i(x)$. Профиль стратегий $x^* \in S$ является равновесием по Нэшу, если изменение своей стратегии с x_i^* на x_i не выгодно ни одному игроку i, то есть $\forall i : H_i(x^*) \geq H_i(x_i, x_{-i}^*)$.*

Определение 2. *Равновесие по Нэшу называется безупречным по подиграм, если и только если оно является равновесием по Нэшу для каждой подигры.*

Определение 3. *Парето-оптимальность в смысле теории игр – исход игры такой, что невозможно сделать результат для кого-то из игроков лучше не в ущерб другим игрокам.*

Определение 4. *Инфляция — повышение общего уровня цен на товары и услуги.*

Определение 5. *Индексация заработной платы – повышение заработных плат с целью частичной защиты населения от роста потребительских цен на товары и услуги.*

Определение 6. *Любое совершенное равновесие по подыграм (SPNE), в котором оба игрока играют L во всех своих ходах назовём* ***совершенным равновесием по подыграм Рамси (Ratsey SPNE)***

2 КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БАРРО-ГОРДОНА

В классической модели Барро-Гордон рассматривается власть(в виде какого-то одного политика), принимающая решение о мерах воздействия на экономику, не только на основе суммарной функции благосостояния

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t w_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(y_t - \frac{\lambda \pi^2}{2} \right), 0 < \beta < 1 \tag{2.1}$$

где
β^t - значимость t-ого периода для благосотояния политика;
w_t -функция благосостояния политика в t-ом периоде;
учитывая, что взаимосвязь между инфляцией и безработицей задается кривой Лукаса

$$y = y^* + \alpha(\pi - \pi^\beta), \tag{2.2}$$

но и на основе того, как их оценивает население: относится оно к ним как к политикам, умеющим держать слово, или оно считает, что им нельзя доверять.
Оценка населением политика в модели задается через инфляционные ожидания, которые формируются в период t следующим образом:

$$\pi_t = \begin{cases} \tilde{\pi}, \forall t : \pi_t = \tilde{\pi}_t \\ \dfrac{\alpha}{\lambda}, \exists s < t : \pi_s \neq \tilde{\pi}_s \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\tilde{\pi}$ - уровень инфляции, который политики обещают достичь в результате воздействия на экономику.

Как следует из (2.3), если политик ведет себя честно, то население ему доверяет и ожидает тот уровень инфляции, который этот политик обещает достичь. Если политик, хотя бы раз обманул население, провел не ту политику, которую обещал, то население ему не верит, и ожидает уровень инфляции отличный от того, который этот политик обещает. Население в этом случае ожидает уровень инфляции $\frac{\alpha}{\lambda}$, поскольку оно понимает, что в случае обмана политик будет стремиться, чтобы в экономике установился именно этот уровень инфляции.

Действительно, в случае обмана политик будет выбирать уровень инфляции, который будет максимизировать его функцию благосостояния в этом периоде (допустим, в периоде s). Поскольку, согласно выражениям (2.1) — (2.3), функция благосостояния периода s при $\pi_s \neq \tilde{\pi}$ имеет вид:

$$w_s = y^* \alpha \left(\pi_s - \frac{\lambda \pi_s^2}{2} \right), \tag{2.4}$$

то уровень инфляции, максимизирующий эту функцию благосостояния , как следует из первого условия максимизации, будет равен величине $\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)$. Так как репутация политика влияет на инфляционные ожидания населения, то, согласно выражениям (2.1) — (2.2), она влияет также и на общую функцию благосостояния этого политика. Допустим, политик ведет себя честно, то есть выполняет ту политику, которую обещал. Тогда его общая функция благосостояния

$$w^{fair} = \frac{1}{(1-\beta)} \left(y^* - \frac{\lambda \pi^2}{2} \right) \tag{2.5}$$

поскольку в этом случае для любого периода t, функция благосостояния периода t, согласно (2.1) — (2.3), имеет вид:

$$w_t^{fair} = y^* - \frac{\lambda \pi^2}{2}. \tag{2.6}$$

Если политик решит обмануть ожидания населения в какой-то период (допустим в нулевой период), то в этом случае, согласно (2.1) — (2.3), в нулевой период его функция благосостояния будет равна

$$w_0^{deception} = y^* - \frac{\alpha^2}{2\lambda} - \alpha \tilde{\pi}, \tag{2.7}$$

но во все последующее время население не будет ему доверять, поэтому его функция благосостояния в любой ненулевой период будет равна

$$w_0^{deception} = y^* - \frac{\alpha^2}{2\lambda}, \tag{2.8}$$

следовательно, общая функция благосостояния политика в случае нарушения данных обещаний:

$$W^{deception} = \frac{1}{(1-\beta)} y^* + \frac{(1-2\beta)\alpha^2}{(1-\beta)2\lambda} - \alpha \tilde{\pi}, \tag{2.9}$$

Очевидно, что политику имеет смысл вести себя честно только в том случае, когда $W^{fair} > W^{deception}$, в противном случае он получит больше в случае невыполнения данных ранее обещаний.

Выведем условия, при которых политик ведет себя честно, не обманывает ожидания населения. Воспользуемся для этого графической интерпретацией этой проблемы: построим графики выигрыша и проигрыша политика в случае обмана и найдем области, в которых выигрыш будет больше проигрыша и наоборот.

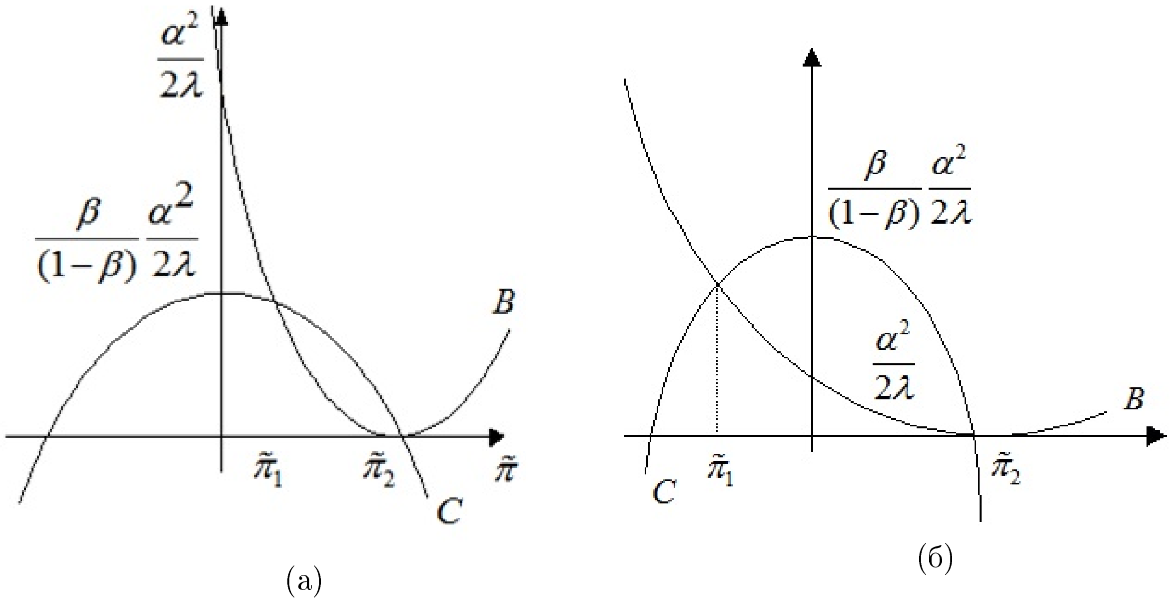


Рисунок 2.1

Если политик обманывает ожидание населения в нулевой момент времени, то выигрыш он получает за счет того, что в нулевой момент времени обманул ожидания населения, а проигрыш – за счет того, что в дальнейшем население перестает ему верить и всегда ожидает больший уровень инфляции, чем он объявляет.

Следовательно, выигрыш обманывающего население в нулевой момент времени политика

$$B = w_0^{deception} - w_0^{fair} = \frac{\lambda\pi^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2\lambda} - \alpha\tilde{\pi} \tag{2.10}$$

является квадратичной функцией от объявляемого политиками уровня инфляции, который они собираются достичь. Эта функция достигает минимума $B = 0$ в точке $\tilde{\pi} = \frac{\alpha}{\lambda}$, а когда $\tilde{\pi} = 0$ выигрыш равен $\frac{\alpha^2}{\lambda}$.

Проигрыш обманывающего население в нулевой момент времени политика также является квадратичной функцией от объявляемого политиками уровня инфляции, поскольку

$$C = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t (w_t^{deception} - w_t^{fair}) = -\frac{\lambda\tilde{\pi}^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2\lambda} \tag{2.11}$$

Функция, задаваемая выражением (2.11), является параболой, достигающей максимума $C = \frac{\beta}{(1-\beta)} \frac{\alpha^2}{2\lambda}$ в точке $\tilde{\pi} = 0$. Значение функции равно нулю, когда уровень инфляции $\tilde{\pi} \pm \frac{\alpha}{\lambda}$.

Взаиморасположение графиков потерь и выигрыша обманывающего население в нулевой момент времени политика зависит от того больше или меньше величина $\frac{\beta}{1-\beta}$ единицы.

Если $\frac{\beta}{1-\beta} < 1$, то есть $\beta < \frac{1}{2}$, то функция потерь и функция выигрыша пересекаются в этом случае в точках $\tilde{\pi}_1 > 0$, $\tilde{\pi}_2 > 0$ (2.1a), причем $\tilde{\pi}_1 = \frac{\alpha(1-2\beta)}{\lambda}$ $\tilde{\pi}_2 = \frac{\alpha}{\lambda}$. Если $\frac{\beta}{1-\beta} > 1$, то есть $\beta > \frac{1}{2}$, то функция потерь и функция выигрыша пересекаются в этом случае в точках $\tilde{\pi}_1 < 0$, $\tilde{\pi}_2 > 0$ (2.1б). //

Таким образом из проведенного анализа следует, что поведение политика: будет он выполнять обещания или нет, зависит от его отношения к репутации. Если для политика его репутация не важна, будущее мало влияет на функцию благосостояния политика $\beta < \frac{1}{2}$, то такому политику нет резона вести себя честно. Поскольку, как видно из (2.1a), существует достаточно маленький уровень инфляции $\tilde{\pi} \in \left(0; \frac{\alpha(1-2\beta)}{\lambda}\right)$, обещая который, он может получить большую реализацию своих целей в результате обмана по сравнению с честным поведением. Если для политика его репутация важна, будущее значимо для его благосостояния $\beta < \frac{1}{2}$, то такому политику имеет смысл вести себя честно. Поскольку, как видно из (2.1б), не существует уровня инфляции близкого к нулю, обещая который, он может получить большую реализацию своих целей в результате обмана по сравнению с честным поведением.

3 ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МОДЕЛИ БАРРО-ГОРДОНА

В игре присутствуют два игрока: p - власть, q - общественность, чьими инструментами является инфляция π и индексирование заработной платы ω, соответственно. Для упрощения модели положим, что оба не могут прогнозировать будущие. Каждый игрок может оперировать своими инструментами следующими стратегиями: низким L и высоким H уvронем поднятия. В общем виде игра может быть суммирована в виде матрицы выигрышей.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Public</td></tr>
<tr><td>L</td><td>H</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Government</td><td>L</td><td>a,q</td><td>b,v</td></tr>
<tr><td>H</td><td>c,x</td><td>d,z</td></tr>
</table>

где параметры a,b,c,d,q,v,x,z - выигрыши удовлетворяющие следующим ограничениям.

$$c > a > d > b, q > v, q \geq z > x \tag{3.1}$$

Самый простой способ описания экономики в данном случае через функцию совокупного предложения Лукаса

$$y_t - Y = \lambda(\pi_t - \omega_t) + \varepsilon_t \tag{3.2}$$

где $\lambda > 0, y$ – производительность, Y – естественный уровень производительности, а ε - макроэкономический шок близкий к нулю. Коэффициенты дисконтирования игроков β_g и β_p, а их функции полезности следующие:

$$u_t^g = -(\pi_t - \tilde{\pi})^2 + \alpha y_t - \beta(y_t - Y)^2 \tag{3.3}$$

$$u_t^p = -(\pi_t - \omega)^2, \tag{3.4}$$

где $\tilde{\pi}$ - оптимальный уровень инфляции, а $\alpha > 0, \beta > 0$, который описывает относительный вес между целями власти (стабильной инфляции, высокой производительности и стабильной производительности). Ожидания стандартны, общественность беспокоится о верном ожидании уровня инфляции для поддержки уровня зарплат на рынке.

Так как нас интересует эффективность политики, то сфокусируемся на долгосрочном исходе игры. Для того, чтобы этого добиться однозначно определим экономику положив $\forall t, \varepsilon_t = 0$, что подразумевает, что мы можем положить $\beta = 0$ без потери общности. Из этого следует, что инструмент власти π представляет собой выбор средней инфляции.

В стандартной пошаговой игре, в которой игроки могут менять свое поведение в каждый период, мы используем (3.2)—(3.3) для получения равновесия:

$$\pi_t^* = \tilde{\pi} + \frac{\alpha\lambda}{2} = \omega_t^* \tag{3.5}$$

это результат смещения инфляции $\pi_t^* > \tilde{\pi}$. Сфокусировав наше внимание на двух уровнях действий (Чо и Мацуи(2006)), которые являются наиболее естественными кандидатами – оптимальный уровень из (3.3) и согласованного по времени из (3.5).

$$\pi \in \left\{L = \tilde{\pi}, H = \tilde{\pi} + \frac{\alpha\lambda}{2}\right\} \ni \omega_t^* \tag{3.6}$$

Мы можем, учитывая (3.2)—(3.4) и поделив на $\left(\frac{\alpha\lambda}{2}\right)$ без потери общности вывести соответствующие выигрыши, представленные в таблице ниже:

$$c > a = 0 > d > b, c = -d = -\frac{b}{2}, q > v, q \geq z > x \tag{3.7}$$

$$c = 1 > a = 0 > d = -1 > b = -2, q = z = 0 > v = x = -1, \tag{3.8}$$

		Public	
		L	H
Government	L	0,0	$-1, -1$
	H	$\frac{1}{2}, -1$	$-\frac{1}{2}$,0

Таблица 3.1

И вне зависимости от λ и α справедливы следующие ограничения для данной игры в дополнение к изначальным (3.1).

Стандартная пошаговая игра имеет уникальное равновесие по Нэшу (H,H), которое, однако, неэффективно так как является Парето доминированным, то есть существует такой исход игры, который улучшит состояние одного, при этом не пойдет во вред другим игрокам, в данном случае это «не Нэшовский» исход (L,L). У власти возникает соблазн создать неожиданную инфляцию, чтобы повысить производительность и снизить уровень безработицы. Так как общественность рационально, то будет ожидать высокую инфляцию – оба игрока будут в проигрыше.

4 ДИСКРЕТНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ ШКАЛЫ

Рассмотрим игровую интерпритацию модели Барро-Гордона на временных шкалах.

Все допущения выдвинутые в стандартной игре остаются. Расширим их:

– игра начинается одновременным ходом.

– заранее известно незименное количество ходов $r^g \in \mathbb{N}$ и $r^p \in \mathbb{N}$.

– игра заканчивается через T периодов, где T - наименьшее общее кратное для r^g и r^p

– игроки рациональны, обладают равноценными знаниями и полной информацией о структуре игры, матрицей выигрышей, и могут мониторить все предшествующие ходы

Другими словами определяется три временных шкалы: правительства, общественности и самой игры:

$$T_g = \{0,r^g,2r^g,...,T\}, T_p = \{0,r^p,2r^p,...,T\}, T = T_g \cup T_p \tag{4.1}$$

Главным преимуществом использования однородных временных шкал это экономическая интерпретация: r^g и r^p представляют собой степень приверженности (???) правительства и степень жесткости поднятия заработных плат общественности (????).

Ассинхронная игра на временных шкалах будет иметь несколько равновесий по Нэшу, среди которых мы выберем лучшую в зависимости от подыгры.

Теорема 1. *Рассмотрим общую несогласованную по времени игру на однородных временных шкалах, для которой выполняются (3.7) и (4.1). Тогда все SNPE игры будут Ramsey SNPE, если и только если*

$$r^g > \bar{r^g}(R) = \begin{cases} \dfrac{c-d}{a-d}r^p = \dfrac{a-b}{a-d}r^p, & \text{если } R = 0 \\ \dfrac{(1+R)(c-d)}{a-d}r^p = \dfrac{a-b+R(c-d)}{a-d}r^p, & \text{если } R \in (0;\bar{R}) \\ \dfrac{c-d-(1-R)(a-b)}{a-d}r^p = \dfrac{(a-b)}{a-d}Rr^p, & \text{если } R \in (\bar{R};1) \end{cases} \tag{4.2}$$

, где $\bar{R} = \frac{q-v}{z-x+q-v}$. В несогласованной игре, где справедливо (3.7), (4.2) преобразуется в

$$\frac{r^g}{r^p} \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right) \tag{4.3}$$

докозательство: ссылка на Либиха и Штелика или копия оттуда.

5 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

5.1 Информация о программе

В рамках дипломной работы была разработана программа, которая эмулирует биматричную игру на временных шкалах и доказывает эмпирически изложенные в работе результаты.

Разработка программного продукта велась на языке Python 3.4. Программа позваляет пользователю задать r^g, r^p и соответсвующие скалярные функции поведения игрока в определенный момент времени. Значениями данной функции будет вероятность выбора игроком стратегии H в данный период времени. Так же пользователь может задать количество запусков игры с входящими данными для подсчета статистики. В качетсве интерфейса входящих данных был выбран txt файл.

5.2 Пояснения к коду

```
util.fromFileToMap(filepath)
```

Функция парсит входящие данных

```
nash.calculate_nash(government_payoffs, public_payoffs)
```

Функция рассчитывает равновесие по Нэшу для стандартной игры.

```
nash.time_scales_game(request, government_payoffs, public_payoffs))
```

Имитация игры на временных шкалах, результатом который есть вектор выигрышей игроков за время игры

```
util.create_all_stats(array, player_name, time)
```

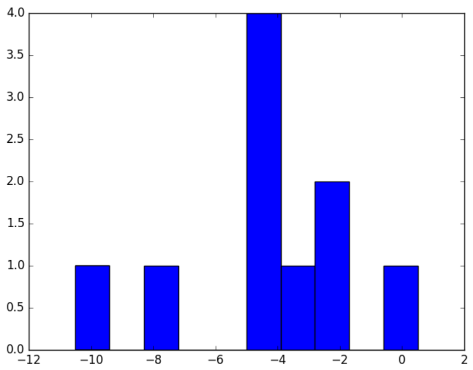
Рассчитывает статистические параметры, строит гистограму для выигрышей одного игрока.

5.3 Листинг

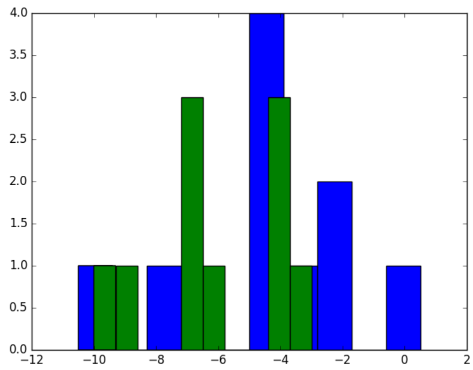
https://github.com/ibrabon/EquilibriumNash/

6 ПРИМЕРЫ

Положим, что матрица выигрышей двух игроков соответсвует (3.1)
$r^g = 4$ - количество ходов совершаемое правительством за игру
$q^g = [0.5; 0.9; 0.7; 0.4]$ - соответсвующая скалярная функция
$r^p = 3$ - количество ходов совершаемое обществом за игру
$q^p = [0.6; 0.8; 1]$ - соответсвующая скалярная функция



(а) Правительство



(б) Общественность

Рисунок 6.1 – Гистограмма выигрышей

Government's average = -4.55
Government's standard deviation = 2.86749019179
Government's asymmetry = -0.41010602681026553
Government's excess = 0.9969338499220726
Public's average = -6.1
Public's standard deviation = 2.21133443875
Public's asymmetry = -0.31057123429132594
Public's excess = -0.977347391965933

Тут будут какие-то выводы из статистических результатов и 2 примера, когда каждый по очереди следует проигрышной стратегии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ