Formes bilinéaires et formes quadratiques

Mots clés : formes bilinéaires, formes quadratiques, matrice d'une forme bilinéaire ou d'une forme quadratique, rang, noyau, signature d'une forme quadratique, réduction de Gauss.
Objectifs : A l'issue de ce PEG, l'étudiant doit être capable de:

- Déterminer la forme bilinéaire associée à une forme quadratique donnée et réciproquement
- Déterminer la matrice d'une forme bilinéaire et d'une forme quadratique.
- Déterminer le rang, et le noyau d'une forme bilinéaire et d'une forme quadratique.
- Décomposer en carrées une forme quadratique et déterminer la signature.
- Définir un produit scalaire à partir d'une forme bilinéaire.
- Définir une norme et une distance.

0.1 Activité introductive:

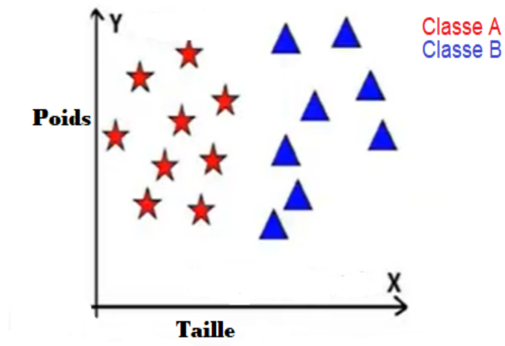
C'est quoi le machine learing?

Le machine learning ou l'apprentissage automatique est un nouveau type d'**intelligence artificielle** (**I.A**) (**I.A** un terme de haute niveau utilisé pour décrire toute approche pour rendre un ordinateur intelligent.) qui permet au ordinateur d'apprendre sans étre explicitement programmés.
C'est un ensemble de classifieurs et d'algorithmes qui se fonde sur des approches mathématiques et statistique pour donner aux ordinateurs la capacité d'apprendre à partir de données.
Par exemple, l'application google photos permet aux utilisateurs de sauvegarder les photos à partir de plusieurs pérephérique dans un seul emplacement, tout en collectant des photos des mémes personnes ou des objets dans des groupes organisées.
Un certain nombre d'algorithme de machine learning utilise les **mesures de distance**. On prend l'exemple de

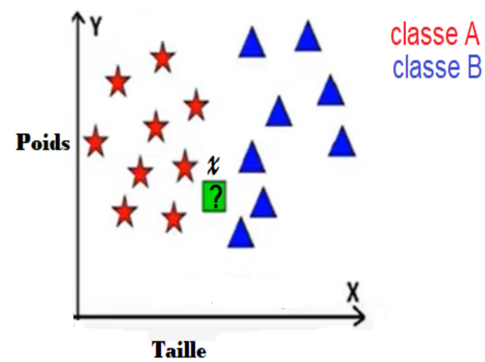
l'algorithme K Nearest Neighber "KNN" (K plus proche voisins).

Comment il fonctionne l'algorithme KNN?
Principe de fonctionnement
Exemple:

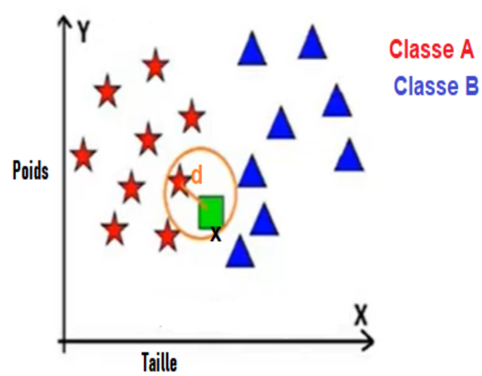
On considére un ensemble de donnée selon 2 classes les étoiles rouges et les triangles bleus.
Chacune des données à 2 caractéristiques par exemple (Taille, poids), ce qui nous permet de les représenter dans un repére orthonormé.



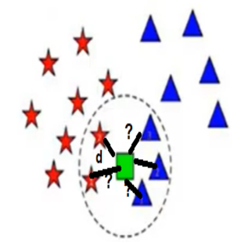
Un nouveau point x dont on connaît les caractéristiques se presente, sa classe est **inconnue**.
L'objectif de lui attribuer une classe: étoile ou triangle.



L'algorithme recherche dans l'ensemble de donnée les K points les plus proches de x au sens de la distance d, et attribue x à la classe qui est la plus fréquente parmi ces K voisins.

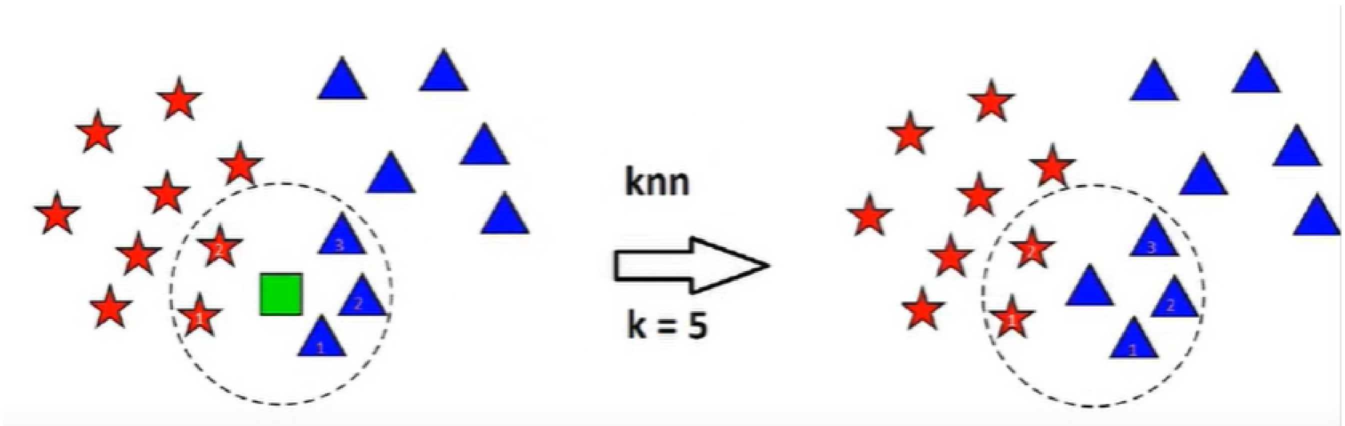


On prend par exemple la distance Euclidienne d et $K = 5$ voisins.
La distance euclidienne est l'une des mesures de distance les plus utilisées.



$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$$

où, n-nombre de variables, x_i et y_i sont les variables des vecteurs x et y respectivement.



Parmi les 5 voisins les plus proches du carrées, il y a 3 triangles et 2 étoiles. Il y a plus de triangle que d'étoiles donc avec la méthode des $K = 5$ plus proches voisins et en utilisant la distance Euclidienne, on effectera au carré la classe triangle.
Il existe aussi d'autres distances qu'on peut utiliser dans l'algorithme d comme:
Distance Manhattan:
Nous utilisons Manhattan Distance si nous devons calculer la distance entre deux points de données dans une grille comme un chemin. La distance d sera calculée en utilisant une somme absolue de la différence entre ses coordonnées cartésiennes comme ci-dessous:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid .$$

Le choix de la métrique de la distance peut avoir un effet sur les performences du processus de classification, de regroupement et de recherche d'information.
Questions:

- Comment on définit une distance?
- Quelle est la relation entre une distance et un produit scalaire?
- Comment prouver qu'une application est un produit scalaire?
- Comment peut on construire un produit scalaire à partir d'une forme bilinéraire?

0.2 Formes bilinéaires et formes quadratiques

En mathématiques, plus précisément en algèbre linéaire, une forme bilinéaire est un type particulier d'application qui, à deux vecteurs d'un espace vectoriel (chacun sur un certain corps commutatif, le même pour les deux espaces vectoriels), associe un scalaire (c'est-à-dire un élément de ce corps). Certaines formes bilinéaires sont de plus des produits scalaires.

0.2.1 Formes bilinéaires symétriques :

Définition 1.

Soit un espace vectoriel $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{R}$, une application

$$b : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

est appelée une **forme bilinéaire** si

$$\forall x_1, x_2, y \in \mathbb{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad b(x_1 + \lambda x_2, y) = b(x_1, y) + \lambda b(x_2, y)$$

$$\forall x, y_1, y_2 \in \mathbb{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad b(x, y_1 + \lambda y_2) = b(x, y_1) + \lambda b(x, y_2)$$

(bilinéarité =linéaire par rapport à chaque variable).
On dit que b est **symétrique** si

$$\forall x, y \in \mathbb{E} \qquad b(x, y) = b(y, x).$$

Exercice 1 *Parmi les expressions ci-dessous, déterminer celles qui définissent une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ et indiquer celles qui sont symétrique :*

Applications	*forme bilinéaire*	*symétrique*
$b_1(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.		
$b_2(x, y) = 2 + x_1 y_1 + 3x_2 y_2$.		
$b_3(x, y) = x_1 x_2 + 8x_2 y_1$.		

Remarque 2.

La symétrie permet de ne vérifier la linéarité que par rapport à une seule variable. Autrement dit si b est symétrique et linéarité par rapport à **une variable** alors b est une forme bilinéaire.

0.2.2 Formes Quadratiques

Les formes quadratiques sont naturellement liées aux formes bilinéaires symétriques.

Définition 3.

Une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ est une application

$$q : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant les deux conditions suivantes:

1. $\forall x \in \mathbb{E}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
2. L'application $(x, y) \longmapsto \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ est une forme bilinéaire symétrique.

Exercice 2 *L'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit $P(x_1, x_2, x_3)$ un point de $\mathbb{R}^3$. On note d la distance OP et on pose $q = d^2$.*

1. *Déterminer l'expression de q en fonction de x_1, x_2 et x_3.*
2. *Vérifier que q et une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.*

Proposition 4.

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{E}$, il existe une unique forme bilinéaire symétrique b telle que

$$b(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)].$$

Cette forme est appelée la forme bilinéaire symetrique associée à q ou la forme polaire associée à q.

Exercice 3 *Soit q le polynôme défini par:*

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

1. *Montrer que q définit une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer la forme bilinéaire associée à q.*

Définition 5.

Une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ est une application $q : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique $b : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{E}, \quad q(x) = b(x, x).$$

Exercice 4 *Soient les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}$ suivantes:*

$$\begin{aligned} b_1(x, y) &= 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2. \\ b_2(x, y) &= 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_1y_3 + 2x_2y_3 \end{aligned}$$

Donner les formes quadratiques q_1 et q_2 associées aux formes bilinéaire b_1 et b_2.

0.2.3 Ecriture matricielle:

Proposition 6.

Soit b une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{E}$ et soit $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{E}$.
La matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M_{ij} = b(e_i, e_j)$$

s'appelle la matrice de b relativement à la base B.
Si X et Y désignent respectivement la matrice colonne des coordonnées de X et Y dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, alors on a

$$b(X, Y) = {}^tXMY = {}^tYMX.$$

Exercice 5 *Revenons à l'exercice* 1*:*

1. *Ecrire la matrice de la forme bilinéaire* b_1.
2. *Calculer* $b_1(X, Y)$ *pour* $X = (1, 2)$ *et* $Y = (2, -1)$ *de deux manières:*
   a) *En utilisant l'expression de* b_1.
   b) *Avec le produit matriciel.*

Exercice 6 *Soient les matrices suivantes:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Ecrire l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune de ces matrices.*
2. *Lesquelles sont symétriques ?*

Comme dans le cas d'une forme bilinéaire, une forme quadratique admet une écriture matricielle.

Proposition 7.

Soient q une forme quadratique sur $\mathbb{E}$, b sa forme polaire et $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{E}$. Soient $x \in \mathbb{E}$ et X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base B. En utilisant la formule $q(x) = b(x, x)$, on peut déduire l'écriture matricielle de q.

$$q(X) = {}^tXMX$$

avec M la matrice de la forme bilinéaire b associée à q dans la base B (i.e $M_{ij} = b(e_i, e_j)$). Elle s'appelle aussi la matrice de la forme quadratique q dans la base B.

Exercice 7 *Soit* q *la forme quadratique sur* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$$

1. *Déterminer la forme polaire* b *de* q.

2. *Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

3. *Soit $x = (3, 1)$, calculer $q(x)$ de deux manières.*

0.2.4 Rang et noyau d'une forme bilinéaire et une forme quadratique :

Définition 8.

Soit b une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{E}$ associée à une forme quadratique q.

1. On appelle rang de b (ou de q), noté $rg(b)$ (ou $rg(q)$), le rang de la matrice M de b (ou de q).

$$rg(b) = rg(q) = rg(M)$$

.

2. On appelle noyau de b (ou de q) , noté $ker(b)$ (ou $ker(q)$) le sous-espace vectoriel :

$$ker(b) = ker(q) := \{x \in \mathbb{E} / \forall y \in \mathbb{E}, b(x, y) = 0\}$$

Le noyau et le rang d'une forme quadratique sont définis comme ceux de sa forme polaire. Donc la notion d'une forme dégénérée ou non dégénérée est la méme pour la forme quadratique et sa forme polaire.

Définition 9 (Définition de forme bilinéaire symétrique non dégénérée ou de forme quadratique non dégénérée)**.**

La forme bilinéaire symétrique b (ou la forme quadradratique q) est dite non dégénérée si le noyeau de b (ou de q) est rédruit au vecteur nul

$$ker(b) = ker(q) = \{0_{\mathbb{E}}\}$$

Autrement dit,

$$b \text{ est dite non dégénérée } \iff \forall x \in \mathbb{E}, (\forall y \in \mathbb{E}, b(x, y) = 0 \Longrightarrow x = 0).$$

Elle est dite dégénérée dans le cas contraire..

Exercice 8 *On considère la forme bilinéaire $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:*

$$b(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 - 3x_2y_4 - 3x_4y_2 + x_3y_4 + x_4y_3.$$

1. *Ecrire la matrice de b relative à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et préciser son rang.*

2. *Quel est son noyau ?*

3. *La forme bilinéaire b est-elle dégénérée ou non dégénérée ?*

Exercice 9 *Déterminer le rang et le noyau de chacune des formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^2$ et préciser celles qui sont dégénérées et qui sont non dégénérées.*

1. *$q_1(x) = x_1^2 + x_2^2$.*

2. $q_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$.

3. $q_3(x) = x_1^2 - 2x_1x_2$.

Proposition 10.

Une forme bilinéaire symétrique b est non dégénérée $\iff rg(b) = dim(\mathbb{E})$
$\iff M$ inversible

0.2.5 Formes quadratiques définies positives:

Définition 11.

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ associée à la forme quadratique q. On dit que

1. q (ou b) est positive si: pour tout $x \in \mathbb{E}$, $q(x) = b(x,x) \geq 0$.
2. q (ou b) est définie si: pour tout $x \in \mathbb{E}$, $q(x) = b(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.
3. q (ou b) est définie positive si elle est à la fois définie et positive.

Exercice 10 *Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$q(x,y,z) = 2x^2 + 2xy + y^2 + z^2$$

1. *Ecrire la forme bilinéaire associée et la matrice de q.*
2. *La forme q est-elle définie, positive ?*

Remarque 12.

1. b est définie positive $\Longrightarrow b$ est non dégénérée.
2. b est positive et non dégénérée $\Longrightarrow b$ est définie positive.

Exercice 11 *Soit la forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^3$*

$$b(x,y) = 2x_1y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_3 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1$$

1. *Ecrire la forme quadratique q associée à b.*
2. *Ecrire la matrice de q.*
3. *La forme q est-elle définie, positive ?*

La proposition suivante donne un critère simple pour montrer qu'une forme quadratique est définie ou positive en utilisant la notion de valeur propre:

Proposition 13.

Soient q une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ et M sa matrice dans une base B de $\mathbb{E}$. Alors

1. Toutes les valeurs propres de M sont réelles (c'est-à-dire son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$).
2. q est positive $\iff$ toutes les valeurs propres de M sont positives.
3. q est définie $\iff$ toutes les valeurs propres sont non nulles et de même signes.
4. q est définie positive $\iff$ toutes les valeurs propres de$M$ sont strictement positives.

Exercice 12 *Revenons à l'exercice précedent.*
En utilisant maintenant la matrice de q, chercher si la forme q est définie, positive.

0.2.6 Décomposition en carrés d'une forme quadratique: Réduction de Gauss

La décomposition en carrés d'une forme quadratique (appelée aussi réduction de Gauss) est un procédé (il s'agit en fait d'un algorithme) qui permet d'écrire toute forme quadratique comme une somme de carrés de combinaisons linéaires indépendantes des variables. La méthode employée est proche de la mise sous forme canonique d'une équation du second degré.

Pour éviter les notations trop lourdes, nous allons simplement voir comment procéder une étape de réduction sur des exemples. Supposons que nous avons une forme quadratique

$$q(x) = \sum_{i,j} c_{i,j} x_i x_j.$$

On distingue deux cas:

1^{er} cas: La forme quadratique q contient le carré d'une variable
On regroupe alors tous les termes comprenant x_i en les mettant dans un carré du type

$$c_{ii}(x_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j x_j)^2$$

et en soustrayant les termes en trop. Tout ce qui reste en dehors de ce carré ne dépendra pas de x_i.
Exemple 1 *Soit q la forme quadratique définie par :*

$$q(x) = \mathbf{x_1^2} - \mathbf{x_2^2} + \mathbf{x_3^2} + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Le principe est de regrouper tous les termes contenants x_1 et faire apparaître un début de carré.
On écrit alors:

$$q(x) = \mathbf{x_1^2} + 2\mathbf{x_1}(x_2 - x_3) - x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3.$$

On reconnait le début du développement d'un carré et on écrit alors:

$$\begin{aligned} q(x) &= \underbrace{x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (\mathbf{x_2} - \mathbf{x_3})^{\mathbf{2}}}_{=(x_1+x_2-x_3)^2} - (\mathbf{x_2} - \mathbf{x_3})^{\mathbf{2}} - x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} - \mathbf{x_3})^{\mathbf{2}} \underbrace{-2x_2^2 + 4x_2x_3}_{q_1(x)}. \end{aligned}$$

On recommence alors avec la forme quadratique $q_1(x) = -2x_2^2 + 4x_2x_3$ qui s'écrit alors

$$\begin{aligned} q_1(x) &= -2(x_2^2 - 2x_1x_3) \\ &= -2(\underbrace{x_2^2 - 2x_1x_3 + \mathbf{x_3^2}}_{=(x_2-x_3)^2} - \mathbf{x_3^2}) \\ &= -2(x_2 - x_3)^2 + 2x_3^2 \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$q(x) = (x_1 + x_2 - x_3)^2 - 2(x_2 - x_3)^2 + 2x_3^2$$

.

2^{eme} cas: La forme quadratique q ne contient aucun carré de variable.

On prend un terme type $c_{ij}x_ix_j$ et on regroupe tous les termes comprenant x_i ou x_j dans un produit

$$c_{ij}(x_i + \sum_{k \neq i,j} \alpha_k x_k)(x_j + \sum_{k \neq i,j} \beta_k x_k).$$

Puis on utilise la formule

$$ab = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right).$$

Les termes venant de $(a+b)$ et $(a-b)$ sont indépendants et tous les autres termes ne feront plus intervenir x_i et x_j.

Exemple 2 *Soit q la forme quadratique définie par :*

$$q(x) = 2\mathbf{x_1}\mathbf{x_2} + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 + x_3x_4$$

L'idée est de regrouper tous termes contenants x_1 et x_2. On écrit alors :

$$q(x) = 2\mathbf{x_1}\mathbf{x_2} + \mathbf{x_1}(x_3 + x_4) + \mathbf{x_2}(x_3 - x_4) + x_3x_4$$

Rappelons que si on a q sous la forme

$$q(x) = ax_1x_2 + Bx_1 + Cx_2$$

où B et C sont des formes linéaires. On peut la factoriser sous la forme suivante:

$$q(x) = a(x_1 + \frac{C}{a})(x_2 + \frac{B}{a}) - \frac{BC}{a}$$

alors

$$\begin{aligned} q(x) &= 2x_1x_2 + x_1(x_3+x_4) + x_2(x_3-x_4) + x_3x_4 \\ &= 2[\underbrace{(x_1+\frac{x_3-x_4}{2})(x_2+\frac{x_3+x_4}{2})}_{\substack{\text{En utilisant l'identité remarquable} \\ ab=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]}} - \frac{(x_3+x_4)(x_3-x_4)}{4}] + x_3x_4. \end{aligned}$$

$$q(x) = \frac{1}{2}\left[(x_1+\frac{x_3-x_4}{2}+x_2+\frac{x_3+x_4}{2})^2 - (x_1+\frac{x_3-x_4}{2}-x_2-\frac{x_3+x_4}{2})^2\right] - \frac{(x_3+x_4)(x_3-x_4)}{2} + x_3x_4$$

Il suffit alors d'itérer la méthode avec la forme quadratique:

$$q_1(x) = -\frac{(x_3+x_4)(x_3-x_4)}{2} + x_3x_4$$

Exercice 13 *Déterminer une réduction de Gauss pour les formes quadratiques suivantes:*

1. $q(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - 4xy - 8yz$.
2. $q(x,y,z) = x^2 + xy + xz$.
3. $q(x,y,z) = xy + xz + yz + zt$.

0.2.7 Signature d'une forme quadratique :

Définition 14.

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ qu'on suppose mise sous forme réduite par l'algorithme de réduction de Gauss:

$$q(x) = \alpha_1(\ell_1(x))^2 + \cdots + \alpha_k(\ell_k(x))^2, \quad k \leq n,$$

avec $(\ell_i)_{i=1\ldots k}$ sont des formes linéaires indépendantes . On note:

- r le nombre des α_i positifs
- s le nombre des α_i négatifs

Le couple (r,s) est appelé signature de la forme quadratique q.

Proposition 15.

Soient q une forme quadratique de signe (r,s) sur $\mathbb{R}^n$ et b sa forme polaire.

1. La forme quadratique q est définie si et seulement si $r+s=n$.
2. La forme quadratique q est positive si et seulement si sa signature est de la forme $(r,0)$ (i.e $s=0$).
3. La forme quadratique q est définie positive si et seulement si sa signature est $(n,0)$ (i.e $r=n$).
4. $r+s=rg(q)$.

Application: On reprend l'exercice précédent. Déterminer la signature de chacune des formes quadratiques et déduire si elles sont définies positives.

0.3 Produit scalaire, Norme et vecteurs orthogonaux

0.3.1 Produit scalaire:

Dans cette partie, $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition 16.

On dit que l'application $\varphi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire si:

1. φ est bilinéaire.
2. φ est symétrique: $\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
3. φ est positive: $\forall x \in \mathbb{E}$, $\varphi(x, x) \geq 0$.
4. φ est définie: $\forall x \in \mathbb{E}$, $\varphi(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_{\mathbb{E}}$.

Autrement dit un produit scalaire sur $\mathbb{E}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, on le note souvent $\langle x, y \rangle$ ou $(x \mid y)$.
On appelle espace euclidien un espace vectoriel de dimension fini muni d'un produit scalaire.

Exemples fondamentaux

On donne ici une liste de produits scalaires usuels.

- Sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, on pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle x, y \rangle = x \times y.$$

  L'application $(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}$.

- Plus généralement, sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, on pose pour tout $(x, y) = ((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

  L'application $(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ (ou aussi produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$).

- Sur $\mathbb{E} = M_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose pour tout $(X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$,

$$\langle X, Y \rangle = {}^t XY.$$

  L'application $(X, Y) \longmapsto \langle X, Y \rangle$ est le produit scalaire canonique sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$
  Vérification :

....
....
....
....

- Sur $\mathbb{E} = M_n(\mathbb{R})$, on pose pour tout $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$,

$$\langle A, B\rangle = Tr({}^tAB).$$

Vérifions que l'application $(A, B) \longmapsto \langle A, B\rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R})^2.\langle A, B\rangle = Tr({}^tAB) = Tr(t({}^tAB)) = Tr({}^tBA) = \langle B, A\rangle$. Donc, l'application $(A, B) \longmapsto \langle B, A\rangle$ est symétrique.
2. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, l'application $A \longmapsto Tr({}^tAB)$ est linéaire par bilinéarité du produit matriciel et par linéarité de la transposition et de trace.
3. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R}).Tr({}^tAA) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2 \geq 0$ avec égalité si et seulement si tous les $a_{i,j}$ sont nuls et donc la forme bilinéaire, symétrique $(A, B) \longmapsto \langle A, B\rangle$ est définie, positive.

- Sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$, on pose pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Vérifions-le explicitement.
....
....
....

Exercice 14 *Soit* $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$. *Pour* $((x, y), (x', y')) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$, *on pose*

$$\varphi((x, y), (x', y')) = xx' + \frac{1}{2}(xy' + yx') + yy'.$$

Vérifier que φ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{E}$.

Exercice 15

1. *Montrer que l'application* $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(X, Y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$$

définie un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. *Montrer que l'application* $\omega : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\omega(X, Y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_3$$

définie un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 17 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)**.**

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$. Alors
$$\forall x, y \in \mathbb{E}, \mid \langle x, y\rangle \mid^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Exemple 3

- *Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :*
$$\forall\,((x_i)_{1\leq i\leq n}, (y_i)_{1\leq i\leq n}) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots +;;, x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

- *Dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit:*
$$\forall(f, g) \in (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}))^2, \left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq (\int_a^b f^2(t)dt)(\int_a^b g^2(t)dt)$$

Exercice 16 *Soient $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^n$.*

1. *Démontrer que*
$$(\sum_{k=1}^n x_k)^2 \leq n\sum_{k=1}^n x_k^2$$

2. *On suppose en outre que $x_k > 0$ pour chaque $k \in \{1, \cdots, n\}$ et que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Démontrer que*
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

Indication:

1. *Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ avec les vecteurs*
$$x = (x_1, \cdots, x_n) \qquad \textit{et} \qquad y = (1, \cdots, 1).$$

2. *Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs*
$$y = (\sqrt{x_1}, \cdots, \sqrt{x_n}) \qquad \textit{et} \qquad z = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}).$$

0.3.2 Norme et distance:

Définition 18 (Norme)**.**

On appelle norme sur $\mathbb{E}$ toute application N de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$ telle que:
1. $\forall x \in \mathbb{E}$, $N(x) \geq 0$ et $(N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_{\mathbb{E}})$.
2. $\forall x \in \mathbb{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) =\mid \lambda \mid N(x)$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{E}$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Dans ce cas, on dit que le couple $(\mathbb{E}, N)$ est un espace vectoriel normé.

Exercice 17 *On définit sur $\mathbb{R}^n$ les applications suivantes: Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$N_1(x) =\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid$$

$$N_2(x) =\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2}$$

$$N_\infty(x) =\| x \|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \mid x_i \mid$$

Montrer que ces applications N_1, N_2 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 18 *Soit $\mathbb{E} = \mathcal{C}^1([0.1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.*
N et N' les applications définies sur $\mathbb{E}$ par

$$N(f) = \int_0^1 \mid f(t) \mid dt, \qquad \textit{et} \qquad N'(f) =\mid f(0) \mid \int_0^1 \mid f'(t) \mid dt.$$

Montrer que les applications N et N' sont des normes sur $\mathbb{E}$.

Exercice 19 *Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé.*
Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{E}, \qquad N(x) + N(y) \leq N(x+y) + N(x-y).$$

Proposition 19 (Inégalité sur les normes)**.**

Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé.

$$\forall x, y \in \mathbb{E}, \qquad N(x) + N(y) \leq N(x+y) + N(x-y).$$

Définition 20 (Norme euclidienne)**.**

Soit $(\mathbb{E}, <,>)$ un espace euclidienne. L'application,

$$x \longmapsto \sqrt{< x, x >}.$$

est une norme sur $\mathbb{E}$ dite la norme euclidienne associée au produit scalaire $< ., . >$.
On note $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$

Proposition 21 (Inégalité sur les normes euclidiennes)**.**

Soit $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé, où N est une norme euclidienne associée au produit scalaire $< ., . >$.

$$\forall x, y \in \mathbb{E}, \qquad (N(x) + N(y))^2 \leq N(x+y)^2 + N(x-y)^2.$$

Exemples:

1. La norme N_2 définie sur $\mathbb{R}^n$ par $N_2(x) = \| x \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n | x_i |^2}$ est une nome euclidienne.
2. La norme N_1 définie sur $\mathbb{R}^n$ par $N_1(x) = \| x \|_1 = \sum_{i=1}^n | x_i |$ n'est pas une norme euclidienne.

Définition 22 (Distance)**.**

A partir de toute norme N sur $\mathbb{E}$, on peut construire une distance d définie par:

$$\begin{array}{rcl} d & : & \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & N(x-y) \end{array}$$

L'application $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifie les propriétés suivantes: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{E}^3$,

1. $d(x, y) = d(y, x)$.
2. $d(x, y) \geq 0$.
3. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Exercice 20 *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel. Pour x, y, on définit:*

$$d(x, y) = \begin{cases} \textit{0 si x=y} \\ \textit{1 si non.} \end{cases}$$

Montrer que d définit une distance.

Remarque 23.

Soit $(\mathbb{E}, \| \,.\, \|)$ est un espace vectoriel normé, avec $\| \,.\, \|$ est une norme euclidienne associée à produit scalaire $< .,. >$ (i.e$\| x \| = \sqrt{< x, x >}$) alors

$$\forall x, y \in \mathbb{E}, \quad d(x,y) = \| x - y \|$$

est dite la distance euclidienne entre x et y

Exemple: soient x et y dans $\mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \| x - y \|_2$, est une distance euclidienne.

0.3.3 Orthogonalité:

Vecteurs orthogonaux:

Définition 24.

Deux vecteurs x et y d'un espace vectoriel euclidien sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul :

$$\langle x, y \rangle = 0 \Longleftrightarrow x \perp y.$$

Application: Soit l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, définis pour, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ par,

$$< X, Y > = aa' + bb' + cc'$$

Supposant que $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ \alpha - 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Chercher α tel que X et Y soient orthogonaux.

Exercice 21 *Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degrés $\leq n$.*

1. *Montrer que $\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ définie un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.*
2. *Déterminer la norme associée à ϕ.*
3. *Donner l'expression de la distance $d(P,Q)$ associée à ϕ.*
4. *Soit $P(X) = X^3$ et $Q(X) = aX^2 + bX + c$*

   a) *Calculer $\phi(P - Q, 1)$; $\phi(P - Q, X)$ et $\phi(P - Q, X^2)$.*

b) *Résoudre le système:*

$$\left\{\begin{array}{l}\phi(P-Q,1)=0\\ \phi(P-Q,X)=0\\ \phi(P-Q,X^2)=0\end{array}\right.$$

c) *Que représente le polynôme Q ? (pour P).*

Définition 25.

Deux parties A et B d'un espace vectoriel euclidien sont dites orthogonales si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B :

$$\langle x,y\rangle=0 \qquad \text{pour tout } (x,y)\in A\times B\,.$$

On appelle orthogonal d'une partie A de E, et on note $A^{\perp}$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de A:

$$A^{\perp}=\{x\in E\mid \langle x,y\rangle=0 \text{ pour tout } y\in A\}\,.$$

Définition 26.

On appelle base orthonormée (ou orthonormale) d'un espace vectoriel euclidien E toute base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E vérifiant

$$\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

L'intérêt des bases orthonormales vient de ce que le produit scalaire et la norme ont même expression dans toute base orthonormale : si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormale de E et $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ et $y=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$ sont deux vecteurs de E, alors

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\sqrt{\langle x,x\rangle}\,.$$

De plus les coordonnées d'un vecteur x dans une base orthonormée $(e_1,\ldots,e_n)$ sont données par :

$$x_i=\langle e_i,x\rangle \qquad \text{pour tout } i=1,\ldots,n.$$

Si on note, pour tout vecteur x de E, X la matrice colonne ${}^t(x_1,\ldots,x_n)$ des composantes de x dans la base orthonormée $(e_1,\ldots,e_n)$, le produit scalaire et la norme s'écrivent matriciellement :

$$\langle x, y\rangle = {}^tXY = {}^tYX, \quad \|x\| = ({}^tXX)^{1/2}\ .$$

Matrices orthogonales

Définition 27.

Une matrice réelle A carrée d'ordre n est dite orthogonale si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- ${}^tAA = I_n$
- $A^tA = I_n$
- A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.

Proposition 28 (Condition suffisante)**.**

Toute matrice orthogonale a un déterminant égal à ± 1.

Attention: (la réciproque est trivialement fausse).
Toute matrice de déterminant ± 1 n'est toujours orthogonale!
Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 22 *On considère une matrice diagonalisable* $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifier que M est une matrice orthogonale et symétrique.*
2. *Déterminer ses valeurs propres avec ordre de multiplicité.*
3. *Vérifier que A est diagonalisable.*

Proposition 29.

Soit A une matrice symétrique orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$. Alors A est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 ou -1.