Résumé forme Quadratique

① Forme Quadratique

Déf : Soit $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application.
On dit q est une forme quadratique s'il existe une forme bilinéaire symétrique $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$
tq $\forall X \in E$, $q(X) = b(X, X)$

Exple. $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto q(X) = x_1^2 + x_2^2$$

On pose : $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(X, Y) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$$

b est une f. B symétrique $\forall X \in \mathbb{R}^2$

$$b(X, X) = q(X)$$

$\Rightarrow q$ est une f Q.

<u>Proposition</u> : Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une application.
q est une forme quadratique si :

① $\forall X \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, q(\lambda X) = \lambda^2 q(X)$

② $b(X, Y) = \frac{1}{2}\left(q(X+Y) - q(X) - q(Y)\right)$

est une <u>FB symétrique</u>

<u>Expl</u> : —

<u>Définition</u> : Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une FQ. Alors

<u>l'application</u> : $\varphi(X, Y) = \frac{1}{2}\left[q(X+Y) - q(X) - q(Y)\right]$

est une FB symétrique. Elle est appelée forme

polaire associée à q.

② <u>Ecriture matricielle</u>

<u>Def</u> : Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une FQ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$

sa forme polaire. On appelle matrice de q

relativement à une base B de E la matrice définie

Cor :

$$M = (M_{ij})_{1 \le i,j \le n}.$$

$$M_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$$

~~Déf : (Noyau d'une F~~

Rque : Soit q une FQ et M sa matrice

alors $\forall X \in E$, $q(X) = {}^tX.M.X$.

Déf : (Noyau d'une FQ)

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une FQ. On appelle noyau de q noté $\ker(q)$ le sous espace vectoriel :

$$\ker(q) = \{X \in E \,/\, q(X) = 0\}$$

$$= \{X \in E \,/\, MX = 0_E\}.$$

Déf. Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique.

q est dite non dégénérée si :

$$\ker(q) = \{0_E\}.$$

Déf. (Rang d'une f(Q)).

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une fQ. On appelle rang de q le rang de sa matrice M. ($rg(q) = rg(M)$)

Proposition :

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une fQ. Alors

q est non dégénérée $\Leftrightarrow rg(q) = \dim(E) \Leftrightarrow$ M est inversible ($\det(M) \neq 0$).

③ **fQ définie positive**

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une fQ. Alors :

① q est positive si : $\forall x \in E$, $q(x) \geq 0$

② q est définie si : $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

③ q est définie positive si elle est à la fois définie et positive. ④

Rque :

① s'il existe $x \in E$ tq $q(x) < 0$

$\Rightarrow$ q n'est pas positive

② s'il existe $x \in E$ non nul tq $q(x) = 0$

$\Rightarrow$ q n'est pas définie.

Proposition :

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une f.Q et M sa matrice (dans ...)

① q est positive $\Leftrightarrow$ toutes les v.p de M sont positives

② q est définie $\Leftrightarrow$ toutes les v.p de M sont non nulles et de même signe.

③ q est définie positive $\Leftrightarrow$ toutes les v.p de M sont strictement positives.

(4) Décomposition de Gauss :

$$q : E \longrightarrow \mathbb{R}, \ \dim E = n$$
$$X \longmapsto q(X)$$

$$q(X) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, x_i x_j$$

Déf

La décomposition de Gauss est un procédé permettant d'écrire une forme quadratique sous la forme d'une somme de carrés de combinaisons linéaires. Autrement dit :

$$q(X) = \alpha_1 (\ell_1(X))^2 + \cdots + \alpha_k (\ell_k(X))^2$$

avec $k \le \dim E$

k désigne le rang de la forme quadratique.

Identités à utiliser

① $t^2 + 2tu = (t+u)^2 - u^2$

② $tu = \frac{1}{4}\left[(t+u)^2 - (t-u)^2\right]$

③ $axy + bx + cy = a\left(x + \frac{c}{a}\right)\left(y + \frac{b}{a}\right) - \frac{bc}{a}$

Proposition

Déf : ~~On appelle signature~~ Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique dont la décomposition de Gauss donnée par :

$$q(X) = \alpha_1 (\ell_1(X))^2 + \cdots + \alpha_k (\ell_k(X))^2$$

la signature de q est le couple (r, s) avec

r : le nbre des α_i positives

s : " " négatives.

Proposition

Soit $q : E \to \mathbb{R}$, dont la signature (r, s)

1. q est positive $\Leftrightarrow s = 0$
2. q est définie $\Leftrightarrow r + s = n$
3. q est définie positive $\Leftrightarrow r = n$ $\Leftrightarrow (r, s) = (n, 0)$

5 Produit scalaire

Déf

Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. φ est un produit scalaire si :

1. φ est symétrique
2. φ est bilinéaire
3. φ est positive
4. φ est définie.

Déf : ~~Soit $X, Y \in E$~~ Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur E et $X, Y \in E$.

On dit que X et Y sont orthogonaux si :

$$\underline{\varphi(X, Y) = 0}$$

Expls

1. $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$(X, Y) \longmapsto \varphi(X, Y) = \sum x_i y_i$

2. $\varphi : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$(f, g) \longmapsto \varphi(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t) \, dt$

⑥ Norme et distance

Déf (Norme)

Soit $N : E \to \mathbb{R}$ une application. On dit que N est une norme si :

① $\forall x \in E,\ N(x) \geq 0$

② $\forall x \in E ;\ N(x) = 0 \iff x = 0_E$

③ $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

④ $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Déf. Norme issue d'un produit scalaire.

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ un produit scalaire

Alors : ~~N(x~~ $N : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x) = \sqrt{\varphi(x,x)}$$

est une norme dite norme issue du produit scalaire φ.

Déf (Distance)

Soit $d : E \times E \to \mathbb{R}$ une application. d est une distance si :

1. $d(x,y) = d(y,x)$
2. $d(x,y) \geq 0$
3. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Déf : (Distance issue d'une norme).

Soit $N : E \to \mathbb{R}$ une norme. Alors, l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto d(x,y) = N(x-y)$$

est une distance.

· **Expl** : On considère la ~~fonction~~ forme bilinéaire symétrique : $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \longmapsto 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1$$

$$+ x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

① Déterminer la f Q associée φ.

$q(X) = \varphi(X, X) =$ —

$$= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$$

② Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $B = (e_1, e_2, e_3)$

③ Déterminer le ~~ker~~ noyau de φ

④ φ est-elle non dégénérée

⑤ Décomposer q en somme de carrés

⑥ déterminer la signature de q

(7) φ est elle définie ? positive ?

(8) φ est-elle un produit scalaire

(9) donner la Norme N issue de φ

(10) donner la distance d issue de la norme N.

$$\Pi = \left(\qquad \right)$$

$$q(X) = 2\left(x + \frac{y+z}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y + \frac{z}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}z^2$$