****

LIMITES - CONTINUITÉ - DÉRIVATION & ETUDE DE FONCTION

✍ Exercice 1

Étudier la limite en x_0 de la fonction f.

a) $f(x) = x^2 + x + 1, \quad x_0 = 2.$

b) $f(x) = \dfrac{3x-1}{7x-4}, \quad x_0 = 1.$

c) $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2}, \quad x_0 = 2.$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{3x^2-2x-1}, \quad x_0 = 1.$

e) $f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-3}, \quad x_0 = 9.$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}, \quad x_0 = 3.$

g) $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+2}}, \quad x_0 = 0.$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}, \quad x_0 = 3.$

i) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}, \quad x_0 = 0.$

j) $f(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{x-\sqrt{x+6}}, \quad x_0 = 3.$

k) $f(x) = \dfrac{2x-\sqrt{x+1}-4}{(x+1)(x-3)}, \quad x_0 = 3.$

l) $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}, \quad x_0 = 2.$

m) $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+2}}, \quad x_0 = 0.$

n) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}, \quad x_0 = 0.$

o) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}, \quad x_0 = 1.$

p) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}{x^2-16}, \quad x_0 = 4.$

✍ Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}} \dfrac{(x-2)(3x-4)}{3x-4}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-2x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+2}-x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}+2x$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2-3x+5}}{x+3-\sqrt{x^2-6x}}$

✍ Exercice 3

Calculer la limite à gauche et la limite à droite de la fonction f en x_0 ; f admet-elle une limite en x_0 ?

a) $\begin{cases} f(x) = 2x^2-1 \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} \text{ si } x \geq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^3+1}, \quad x_0 = -1$

c) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{6-x}-2}{x-2} \text{ si } x \leq 2 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}-1}{4\sqrt{2x}-8} \text{ si } x \geq 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$

✍ Exercice 4

Étudier les limites aux bornes de D_f.

1) $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-5}{-3x^2-5x+2}$; 2) $f(x) = \dfrac{4x+3}{4x^2-1}$;

3) $f(x) = \dfrac{3x^2-4x^3+2x-1}{x^3-x^2-x+1}$;

4) $f(x) = x+\sqrt{x^2+1}$; 5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$.

✍ Exercice 5

Étudier la continuité de la fonction f en x_0 dans les cas suivants :

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-|x|}{x^2+|x|} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases} \quad , x_0 = 0$;

b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} \\ f(4) = 3 \end{cases} \quad , x_0 = 4$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x+2}}, \ x_0 = 1$

✍ Exercice 6

On considère la fonction g définie par :

$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ si } x \neq -1 \\ g(-1) = 0 \end{cases}$

Étudier la continuité de g en -1.

✍ Exercice 7

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x-3}$.

1) Déterminer D_f et calculer les limites aux bornes.
2) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x de D_f, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-3}$.
3) En déduire que la droite (Δ), d'équation $y = 2x + 6$, est asymptote à la courbe C_f en $-\infty$ et $+\infty$.
Étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite (Δ).

✍ Exercice 8

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 \text{ si } x < 2 \\ 2x - a \text{ si } x > 2 \\ f(2) = b. \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle continue en 2 ?

✍ Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x \text{ si } x \in]-\infty; -1] \\ \sqrt{1-x^2} \text{ si } x \in]-1; 1[\\ x - 1 \text{ si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

✍ Exercice 10

Calculer la fonction dérivée de la fonction f en précisant l'ensemble de dérivabilité.

1) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$; 2) $f(x) = \dfrac{4-x}{x+3}$;
3) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$; 4) $f(x) = 3x + 2 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$;
5) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$; 6) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$;
7) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$; 8) $f(x) = (1+\sqrt{x})(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1)$;
9) $f(x) = \dfrac{1}{(4x-2)^2}$; 10) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^2$;
11) $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 2}$; 12) $f(x) = \sqrt{-3x^2 + 4}$;
13) $f(x) = (x+1)(2x-5)^2$.

✍ Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (1-x)\sqrt{|1-x^2|}$.

1) Étudier la dérivabilité de f en 1 et en -1. Donner l'ensemble de dérivabilité de f.
2) Calculer $f'(x)$ dans chaque intervalle où elle est dérivable.

✍ Exercice 12

Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

✍ Exercice 13

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en x_0.

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x} \text{ si } x \leq 2 \\ f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-1} \text{ si } x > 2 \end{cases}$ $\quad x_0 = 2.$

b) $\begin{cases} f(x) = 2x - 1 \text{ si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{x} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1.$

✍ Exercice 14

Déterminer les extréma des fonctions suivantes (extréma relatifs) et préciser les :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x-2}$; b) $g(x) = \sqrt{3x^2 + 7x - 2}$;
c) $h(x) = x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 - 4x + 5$.

✍ Exercice 15

On considère la fonction f définie par :
$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$. Déterminer s'il existe les points de C_f où la tangente :

1) admet m comme coefficient directeur pour $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$
2) est parallèle à la droite $(D) : y = \dfrac{1}{2}x + 3$
3) est perpendiculaire à la droite $(D) : y = \dfrac{1}{3}x + 1$
4) est dirigé par le vecteur $\vec{u}(2; -4)$

✍ Exercice 16

Soit la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x + 2}{2x - 1}$

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2) Trouver trois réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x-1}$ pour tout $x \in D_f$.
3) Déterminer les limites aux bornes de D_f ; en déduire que la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est une asymptote à C_f.
4) Montrer que la droite d'équation $(D) : y = -x+1$ est une asymptote oblique à C_f.
5) Étudier la position de (C_f) par rapport à (D).
6) Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f.
7) Construire C_f.

✍ Exercice 17

Soit la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$.
1) Déterminer le domaine de définition de h ; étudier sa parité et préciser son domaine d'étude.
2) Étudier la dérivabilité de h en 2.
3) Déterminer la fonction dérivée de h puis établir son tableau de variation.
4) Tracer la courbe C_h de h.
5) Déterminer les points de rencontre de la courbe C_h avec la droite d'équation $y = x$.

✍ Exercice 18

Soit la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$
1) Déterminer le domaine de définition de h puis étudier les limites aux bornes de D_h.
2) Étudier la continuité de h en -1 et en -2.
Étudier la dérivabilité de h en -1 et en -2.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3) Montrer que la courbe C_h admet deux asymptotes obliques puis étudier leur position relative.
4) Déterminer la fonction dérivée de h puis établir son tableau de variation.
5) Tracer la courbe C_h de h.

✍ Exercice 19

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^3 - 2x + 4$.
1) Déterminer D_f et étudier les limites aux bornes.
2) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Montrer que le point $S(0;4)$ est centre de symétrie à C_f.
5) Tracer C_f dans une repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

✍ Exercice 20

Soit $f(x) = \dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.
1) Déterminer les réels a et b tels que C_f passe par le point $A(0;3)$ et admet en ce point une tangente d'équation $y = 4x+3$.
2) Étudier f et tracer C_f.

✍ Exercice 21 ★

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x+\sqrt{x^2+4} \text{ si } x<0 \\ \sqrt{|4-x^2|} \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

1) Déterminer D_f.
2) Écrire $f(x)$ sans valeur absolue.
3)a) Étudier la continuité de f en 0.
b) Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
c) Étudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter.
4) Étudier les **branches infinies** en l'infini.
5) Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe.

✍ Exercice 22

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+3x-2}{2x+2}$, et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
1) Déterminer D_f et étudier les limites aux bornes.
2) Montrer qu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout x de D_f , $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$. Enduire que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x+1$ est asymptote à C_f. Déterminer la position de (D) par rapport à C_f.
3) Montrer que C_f admet une asymptote parallèle à (Oy) et donner son équation.
4) Étudier le sens de variation de f dans les intervalles où elle est définie.
5) On désigne par A le point de la courbe C_f ayant pour abscisse 0, déterminer une équation de la droite T, tangente à la courbe C_f en A.
6) Construire, les asymptotes de C_f, le point A , la droite T et la courbe C_f.

✍ Exercice 23

On considère la fonction f définie par
$f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$
1) Déterminer les réels a et b tels que C_f passe par le point $A(0;1)$ et admet en ce point une tangente horizontale.
1) On suppose $a = 1, b = -1$.
a) Déterminer les limites aux bornes de D_f. Préciser les asymptotes éventuelles.
b) Déterminer les réels α, β et γ tels que $f(x) = \alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{x-1}$. En déduire que la droite $(D) : y = x+2$ est asymptote oblique à la courbe.
c) Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe.
3) Résoudre graphiquement l'équation
$x^2+(1-m)x+m-1 = 0$.
4) Soit $g(x) = \dfrac{x^2+x-1}{|x-1|}$. Tracer C_g à l'aide de C_f.

✍ Exercice 24 ★

Soit $f(x) = \sqrt{|x^2-2x-3|}$.
1) Déterminer D_f. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Écrire $f(x)$ sans valeur absolue. Étudier la continuité et la dérivabilité en -1 et 3 puis interpréter graphiquement les résultats.
3) Étudier les **branches infinies** de C_f en l'infini.
4) Tracer C_f.