נכתב ע״י : יצחק גולדרר

קורס : חדו״א מ2

נגזרות חלקיות

הגדרה : בהינתן $f(x,y)$ המוגדרת ב-(x_0,y_0) ובסביבתה,

נגדיר נגזרת חלקית לפי x בנקודה (x_0,y_0) באופן הבא :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

ונגזרת חלקית לפי y בנקודה (x_0,y_0) באופן הבא :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$$

הערות :

1) אין קשר בין רציפות הפונקציה f לבין קיום הנגזרות החלקיות שלה.

2) $f_x(x,y)$ ו-$f_y(x,y)$ הן פונקציות ב-2 משתנים.

תרגילים :

1. בדקו את רציפות הפונקציה וחשבו את הנגזרות חלקיות שלה לפי x ולפי y בראשית הצירים

עבור הפונקציה :

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (0,0)\\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{אחרת}\end{cases}$$

פתרון :

נציע מסלול $y=kx$ ונקבל :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(kx)^2}{x^2+(kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-k^2)}{x^2(1+k^2)}=\frac{1-k^2}{1+k^2}$$

קיבלנו גבול שתלוי ב-k ולכן **גבול** הפונקציה בראשית **לא קיים**.

ולכן הפונקציה **לא רציפה** בראשית הצירים.

הערה : ניתן להפריך את קיום הגבול בראשית גם ע״י המסלולים $x\to 0, y=0$ ו-$x=0, y\to 0$ בהם

מקבלים: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=1$ ו-1- $\lim_{y\to 0}\frac{0^2-y^2}{0^2+y^2}=-1$ (גבולות שונים לאורך מסלולים שונים $\Leftarrow$ אין גבול בראשית).

נבדוק אם הנגזרות החלקיות לפי x ולפי y בראשית רציפות, לפי ההגדרה נקבל:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2-0^2}{h^2+0^2}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0^2-h^2}{0^2+h^2}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1-1}{h}=\text{לא קיים}$$

לסיכום f איננה רציפה, הנגזרת החלקית לפי x קיימת ושווה ל-0 והנגזרת החלקית לפי y איננה קיימת.

כיצד נחשב נגזרת חלקית שלא לפי ההגדרה?

אם $f(x,y)$ מוגדרת בתחום פתוח אזי הנגזרת החלקית לפי x היא פשוט גזירה (ע"פ כללי נגזרת)

לפי x כאשר מתייחסים ל-y כאל קבוע ובאופן דומה עבור הנגזרת החלקית לפי y (שם נתייחס ל-x כאל קבוע).

למשל עבור הפונקציה: $f(x,y)=sin(xy)+x^2y$ נקבל:

$$f_x(x,y)=ycos(xy)+2xy,\ \ f_y(x,y)=xcos(xy)+x^2$$

בתחום מפוצל נפתור באופן הבא:

2. תהי $f(x,y)=\begin{cases}0 & (0,0)\\ \frac{xsin(y^2)}{x^2+y^2} & \text{אחרת}\end{cases}$

א) בדקו רציפות בראשית.

ב) חשבו f_x בכל המישור.

ג) האם f_x רציפה בראשית?

<u>פתרון:</u>

א) נעבור לקואורדינטות קוטביות (פולריות):

$$|f(x,y)|=|f(rcos\alpha,rsin\alpha)|=\left|\frac{rcos\alpha\cdot sin(r^2sin^2\alpha)}{r^2}\right|$$

$$\left|\frac{rcos\alpha \cdot sin(r^2sin^2\alpha)}{r^2sin^2\alpha} \cdot sin^2\alpha\right| = \left|rcos\alpha sin^2\alpha \cdot \underbrace{\frac{sin(r^2sin^2\alpha)}{r^2sin^2\alpha}}_{\substack{\text{שואף ל} -1 \\ \text{כאשר } r\to 0}}\right|$$

הפונקציה $G(\theta) = cos\alpha sin^2\alpha$ חסומה ו- $F(r) = r \to 0$ כאשר $r \to 0$ ולכן הגבול הוא 0

ולכן הפונקציה רציפה בראשית הצירים.

ב) בכל המישור פרט לראשית, מתקבל תחום פתוח ולכן נוכל לחשב בקלות :

$$f_x = \frac{sin(y^2)(x^2+y^2) - 2x \cdot xsin(y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{sin(y^2)(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

בראשית הצירים נחשב את f_x לפי ההגדרה :

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{hsin(0^2)}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

בסה"כ קיבלנו :

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 0 & (0,0) \\ \frac{(y^2-x^2)sin(y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{אחרת} \end{cases}$$

ג) נבדוק את רציפות f_x נציע מסלול מהצורה $y = kx$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2-x^2)\,sin(y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(k^2x^2-x^2)\,sin(k^2x^2)}{(x^2+k^2x^2)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2(k^2-1)(k^2x^2)}{x^4(1+k^2)^2} \cdot \underbrace{\frac{sin(k^2x^2)}{k^2x^2}}_{\substack{\text{שואף ל} -1 \\ \text{כאשר } x\to 0}}\right) = \frac{(k^2-1)k^2}{(k^2+1)^2}$$

קיבלנו גבול שתלוי ב-k ולכן הגבול של $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ לא קיים, ומכאן ש-$f_x(x,y)$ לא רציפה בראשית.

3. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (0,0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{אחרת} \end{cases}$$

הפונקציה f לא רציפה (ניתן להראות זאת בקלות ע״י המסלול $y = kx$ או ע״י קואורדינטות פולריות).

בכל נקודה שאיננה ראשית הצירים נקבל:

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^2+y^2-2x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

בצורה סימטרית מכיוון ש-$f(x,y) = f(y,x)$ נובע כי $f_y(x,y) = f_x(y,x)$.

כלומר:

$$f_y(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

בראשית הצירים נחשב את הנגזרות החלקיות לפי x ולפי y

ע״פ ההגדרה ונקבל:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

הנגזרות החלקיות של הפונקציה לפי x ולפי y בראשית הצירים קיימות ושוות ל-0.

<u>הערות:</u>

1) מהתרגילים הקודמים ניתן לראות ש**אין קשר** בין **רציפות** בנקודה **לנגזרות f_x ו-f_y** בנקודה.

2) דרך קיצור לחישוב נגזרת חלקית לפי ההגדרה, נתבונן בהגדרת הנגזרת החלקית לפי x למשל בנק׳ (a,b):

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

ניתן לראות שההגדרה תלוי רק בערכי הפונקציה כאשר $y = b$, כלומר אפשר לחשב את הערכים $f(x,b)$

ולגזור כפונקציה של המשתנה היחיד x בנקודה $x = a$.

4. נתונה הפונקציה: $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & y > 0 \\ 0 & y = 0 \\ -\sqrt{x^2+y^2} & y < 0 \end{cases}$.

א) חשבו את $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ב) חשבו את $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ג) חשבו את $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

<u>פתרון:</u>

א) נעבור לקואורדינטות קוטביות ונקבל כי: $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = r$ לכן $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

אפשר גם לפי כלל הסנדוויץ': $0 \le |f(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ לכן $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

ב)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx}\big(f(x,0)\big)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}(0)\Big|_{x=0} = 0|_{x=0} = 0$$

ג)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy}\big(f(0,y)\big)\Big|_{y=0} = \frac{d}{dy}\left(\begin{cases} |y| & y>0 \\ 0 & y=0 \\ -|y| & y<0 \end{cases}\right)\Bigg|_{y=0} = \frac{d}{dy}(y)\Big|_{y=0} = 1|_{y=0} = 1$$

5. נתונה הפונקציה: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2>0 \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

חשבו את f_x ו-f_y, אם הן קיימות בראשית בדוק האם הן רציפות שם.

<u>פתרון:</u>

$$f_x(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+2y^3)}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{6y^2(x^2+y^2) - 2y(x^3+2y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

ובראשית:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \frac{d}{dx}\big(f(x,0)\big)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+2\cdot 0^3}{x^2+0^2}\right)\Bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx}(x)\Big|_{x=0} = 1|_{x=0} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \frac{d}{dy}\big(f(0,y)\big)\Big|_{y=0} = \frac{d}{dy}\left(\frac{0^3+2\cdot y^3}{0^2+y^2}\right)\Bigg|_{y=0} = \frac{d}{dy}(2y)\Big|_{y=0} = 2|_{y=0} = 2$$

נבדוק את רציפות

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2(x^2+y^2)-2x(x^3+2y^3)}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2>0\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

בראשית.

לאורך המסלול $y=0$, $x\to 0$ נקבל: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} f_x(x,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1$.

לאורך המסלול $x=0$, $y\to 0$ נקבל: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} f_x(0,y)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{0}{y^4}=0$.

לכן הגבול לא קיים בראשית $\Leftarrow$ $f_x(x,y)$ לא רציפה בראשית.

<u>הערה:</u> באופן זהה $f_y(x,y)$ לא רציפה בראשית.

6. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה: $f(x,y)=\sqrt[5]{x^3y^2}=x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{2}{5}}$

ובדקו את רציפותן בראשית.

<u>פתרון:</u>

$$f_x(x,y)=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}y^{\frac{2}{5}}\Longrightarrow f_x(x,y)=\frac{3}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{y}{x}\right)^2},\quad f_y(x,y)=\frac{2}{5}x^{\frac{3}{5}}y^{-\frac{3}{5}}\Longrightarrow f_y(x,y)$$
$$=\frac{2}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{x}{y}\right)^3}$$

בראשית:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{h^3\cdot 0^2}-0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{0^3\cdot y^2}-0}{h}=0$$

נבדוק עבור $f_x(0,y)$ כאשר $y\neq 0$:

$$f_x(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{h^3y^2}-0}{h}=\text{לא קיים}$$

באופן דומה עבור $f_y(x,0)$ כאשר $x\neq 0$.

עבור $(x,y)\neq(0,0)$ הפונקציות $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ רציפות.

עבור $(x,y)=(0,0)$ של $f_x(x,y)$ ונקבל כי: לא קיים $=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ (ניקח את המסלול $y=kx$).

דיפרנציאביליות

<u>הגדרה</u>: נאמר כי $f(x,y)$ גזירה/דיפ' בנקודה (x_0,y_0), אם לכל (x,y) בסביבת (x_0,y_0) מתקיים:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+\varepsilon(x,y)\cdot\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

כאשר A,B קבועים ו- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\varepsilon(x,y)=0$.

<u>משמעות גיאומטרית</u>

f גזירה/דיפ' בנקודה p_0 פירושו שניתן לקרב את גרף הפונקציה ע"י מישור משיק בסביבת p_0.

<u>משפט</u>

אם f גזירה/דיפ' ב-(x_0,y_0) אז:

א) f רציפה ב-(x_0,y_0).

ב) $f_x(x_0,y_0)$ ו-$f_y(x_0,y_0)$ קיימות ו-$A=f_x(x_0,y_0)$ ו-$B=f_y(x_0,y_0)$.

כיצד נבדוק האם f גזירה בנקודה $p_0(x_0,y_0)$?

א) האם f רציפה ב-p_0? במידה ולא אז סיימנו כי אז f לא גזירה ב-p_0

ב) האם $f_x(p_0),f_y(p_0)$ קיימות? במידה ולא אז סיימנו כי אז f לא גזירה ב-p_0.

ג) לאחר-מכן נציב בנוסחא, נחלץ את $\varepsilon(x,y)$.

ד) האם $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\varepsilon(x,y)=0$? במידה וכן אז f גזירה ב-p_0 ובמידה ולא אז f לא גזירה ב-p_0.

<u>הערות</u>:

1) אם f גזירה ב-p_0, נסמן: $grad\,f(p_0)=\vec{\nabla}f(p_0)=\left(f_x(p_0),f_y(p_0)\right)$ – הגרדיאנט של f ב-p_0.

2) אין משמעות לוקטור הגרדיאנט אם f איננה גזירה.

3) וקטור הגרדיאנט מצביע לכיוון בו השיפוע הוא מקסימלי.

סיכום:

קיום נגזרות חלקיות רציפות ב-(x_0,y_0) ⇐ דיפ' ב- (x_0,y_0) ⇐ רציפות ב $-(x_0,y_0)$
קיום נ"ח ב $-(x_0,y_0)$

תרגיל

בדקו דיפ' ב-$(0,0)$ של הפונקציה: $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$

פתרון הערך של f על הצירים קבוע ולכן: $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

$$f(x,y)=f(0,0)+0\cdot(x-0)+0\cdot(y-0)+\varepsilon(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}\ \ \rightarrow \varepsilon(x,y)=\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

על המסלול $y=kx$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|kx^2|}}{\sqrt{x^2+k^2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\sqrt{|k|}}{|x|\sqrt{1+k^2}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{|k|}{1+k^2}}=\sqrt{\frac{|k|}{1+k^2}}$$

הגבול תלוי ב-k ולכן לא קיים, מכאן שהפונקציה לא דיפ' בראשית.

<u>משפט</u>: אם f_x,f_y קיימות ורציפות ב-p_0 אזי f גזירה ב-p_0.

<u>הערה</u>: המשפט ההפוך לא נכון, כדוגמא נגדית נתבונן בפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{אחרת}\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

הפונקציה הזו גזירה בראשית, אבל f_x רציפה שם.

2. בדקו דיפ' ב-$(0,0)$ של הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)=(0,0)\\ \frac{(x^4+y^2)^2}{x^8+y^4} & \text{אחרת}\end{cases}$$

נחשב את הגבול בראשית לאורך המסלול $y=kx^2$ ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^4+(kx^2)^2)^2}{x^8+(kx^2)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^4+k^2x^4)^2}{x^8+k^4x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{x^8(1+k^2)^2}{x^8+k^4x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+k^2)^2}{1+k^4}=\frac{(1+k^2)^2}{1+k^4}$$

הגבול תלוי ב-k ולכן לא קיים ולכן הפונקציה לא רציפה בראשית ומכאן איננה דיפ' שם.

3. בדקו דיפ' של הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)=(0,0)\\ e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

<u>פתרון :</u> בנקודה שונה מהראשית הנגזרות החלקיות f_x, f_y הן פונקציות אלמנטריות, בלי סינגולריות

לכן הן רציפות כפונקציה של x, y :

$$f_x(x,y)=\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}},\quad f_y(x,y)=\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

לכן f דיפ' בכל נקודה שונה מהראשית.

בראשית נגזור לפי ההגדרה :

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}\underbrace{=}_{t=\frac{1}{h}}\lim_{h\to 0}\frac{t}{e^{t^2}}=0$$

כנ"ל $f_y(0,0)$, נציב בנוסחה ונקבל :

$$f(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)(x-0)+f_y(0,0)(y-0)+\varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}=\varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}\Longrightarrow \varepsilon(x,y)=\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

נחשב את הגבול של $\varepsilon(x,y)$ בראשית ונקבל :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\underbrace{=}_{t=\sqrt{x^2+y^2}}\lim_{t\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t}=0$$

לכן f דיפ' בראשית ולסיכום f דיפ' בכל $\mathbb{R}^2$.

מישור משיק לגרף של פונקציה

<u>הגדרה :</u> אם F גזירה (דיפ') ב-p_0 נסמן : $\vec{\nabla}F(p_0)=grad\,F(p_0)=\left(F_x(p_0),F_y(p_0)\right)$.

<u>הערה :</u> לוקטור הגרדיאנט אין משמעות אם f לא גזירה.

<u>תזכורת :</u> הגרף של f "חיי" ב-$\mathbb{R}^3$ והינו : $G_f=\{(x,y,z)|z=f(x,y)\}$.

נזכר כי אם f דיפ' ב-$p_0(x_0,y_0)$ אז ניתן לקרב את גרף הפונ' ע"י מישור משיק :

$$f(x,y)=\underbrace{f(p_0)+f_x(p_0)(x-x_0)+f_y(p_0)(y-y_0)}_{p_0(x_0,y_0)\text{ הקירוב הלינארי של } f \text{ בסביבת}}+\varepsilon(x,y)\ldots$$

נסמן : $f(x,y)=z$, $f(x_0,y_0)=z_0$ ע"י העברת אגפים נקבל :

$sgershon@technion.ac.il$

$$f_x(p_0)x - f_y(p_0)y + z = \underbrace{z_0 - f_x(p_0)x_0 - f_y(p_0)y_0}_{\text{קבוע}}$$

התקבלה משוואת מישור עם נורמל: $\vec{N} = \alpha(-f_x(p_0), -f_y(p_0), 1)$ כאשר $\alpha \neq 0$.

<u>הגדרה:</u> אם $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ גזירה/דיפ' ב-$p_0(x_0, y_0)$ אז המישור המשיק לגרף הפונקציה ב-p_0 הוא:

$$\underbrace{f_x(x_0, y_0)}_{A}(x - x_0) + \underbrace{f_y(x_0, y_0)}_{B}(y - y_0) + \underbrace{(-1)}_{C}(z - z_0) = 0$$

<u>תרגילים:</u>

1. יהי המשטח $z = x^2 + y^2$ חשבו את המישור המשיק ב-$(0,3)$.

<u>פתרון:</u> נגדיר $z = f(x, y)$ ל-f קיימות נגזרות חלקיות רציפות (מכל סדר) בכל $\mathbb{R}^2$ ולכן f גזירה/דיפ'.

הנגזרות החלקיות בנקודה $(0,3)$ הן:

$$f_x(0,3) = 2x|_{x=0} = 0\,, \qquad f_y(0,3) = 2y|_{y=3} = 6$$

וערך הפוקנציה בנקודה הוא: $f(0,3) = 0^2 + 3^2 = 9$.

מכאן נובע שמשוואת המישור המשיק היא:

$$0(x - 0) + 6(y - 3) - (z - 9) = 0 \Longrightarrow 6y - z = 9$$

2. נתון המשטח $z = cos(x) \cdot cos(y)$, מצאו מישור משיק בנקודה $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

<u>פתרון:</u>

לפונקציה $z = f(x, y)$ קיימות נגזרות חלקיות רציפות (מכל סדר) בכל $\mathbb{R}^2$ ולכן f גזירה/דיפ'.

הנגזרות החלקיות בנקודה $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ הן:

$$f_x(x, y) = -sin(x) \cdot cos(y) \Longrightarrow f_x\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -1$$

$$f_y(x, y) = -cos(x) \cdot sin(y) \Longrightarrow f_y\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0$$

וערך הפוקנציה בנקודה הוא: $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(0) = 0$.

מכאן נובע שמשוואת המישור המשיק היא:

$$-1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 \cdot (y - 0) - (z - 0) = 0 \Longrightarrow x + z = \frac{\pi}{2}$$

3. מצאו מישור משיק למשטח $z = 9 - x^2 - y^2$ בנקי' $(1,2,4)$.

פתרון: לפונקציה $z = f(x,y)$ קיימות נגזרות חלקיות רציפות (מכל סדר) בכל $\mathbb{R}^2$ ולכן f גזירה/דיפ'.

הנגזרות החלקיות בנקודה $(1,2)$ הן:

$$f_x(x,y) = -2x \Longrightarrow f_x(1,2) = -2, \quad f_y(x,y) = -2y \Longrightarrow f_y(1,2) = -4$$

וערך הפוקנציה בנקודה הוא: $f(1,2) = 9 - 1^2 - 2^2 = 4$.

מכאן נובע שמשוואת המישור המשיק היא:

$$-2(x-1) - 4(y-2) - (z-4) = 0 \Longrightarrow 2x + 4y + z - 14 = 0$$

4. מצאו מישור משיק למשטח: $xy + 2xz + 3yz = 11$ בנקודה $(1,1,2)$.

פתרון: נגדיר $F(x,y,z) = xy + 2xz + 3yz - 11$.

הנגזרות החלקיות בנקודה $(1,1,2)$ הן:

$$F_x(x,y,z) = y + 2z \Longrightarrow F_x(1,1,2) = 5$$

$$F_y(x,y,z) = x + 3z \Longrightarrow F_y(1,1,2) = 7$$

$$F_z(x,y,z) = 2x + 3y \Longrightarrow F_z(1,1,2) = 5$$

מכאן נובע שמשוואת המישור המשיק היא:

$$5(x-1) + 7(y-1) + 5(z-2) = 0 \Longrightarrow 5x + 7y + 5z = 22$$

5. מצאו מישור משיק למשטח: $xyz = 1$ המקביל למישור: $x + y + z = 1$.

פתרון:

ע"פ הנתונים המישור המבוקש מקביל למישור $x + y + z = 1$

ולכן מצד אחד הנורמל שלו מקביל לוקטור $(1,1,1)$ כלומר: $\vec{N} = (\alpha,\alpha,\alpha)$ כאשר $\alpha \neq 0$.

ומצד שני הנורמל שלו מקביל ל-(f_x, f_y, f_z) ולכן:

$$\begin{cases} \alpha = f_x = yz \\ \alpha = f_y = xz \\ \alpha = f_z = xy \end{cases}$$

אם נכפול את המשוואות נקבל: $\alpha^3 = (yz)(xz)(xy) = \left(\underbrace{xyz}_{\text{נתון } xyz=1}\right)^2 = 1^2 = 1 \Longrightarrow \alpha = 1$

ולכן $xy = xz = yz = 1$ משיקולי סימטריה נקבל כי: $x = y = z = 1$.

לסיכום הנורמל הוא: $(1,1,1)$ ונקודה כלשהי שמונחת על המישור היא: $(1,1,1)$.

$sgershon@technion.ac.il$

לכן משוואת המישור המשיק למשטח $xyz = 1$ היא:

$$1(x-1)+1(y-1)+1(z-1)=0 \Longrightarrow x+y+z=3$$

6. מצאו משוואה של מישור המשיק למשטח $x(u,v)=u+v,\ \ y(u,v)=u^2+v,$
$z(u,v)=u^3-v$

עבור $u=1,\ \ v=2$.

<u>פתרון:</u> וקטור המייצג את המשטח הוא: $\vec{r}(u,v)=(u+v)\cdot\hat{\imath}+(u^2+v)\hat{\jmath}+(u^3-v)\hat{k}$.

נתבונן בוקטורים:

$$\vec{r}_u(u,v)=\hat{\imath}+2u\hat{\jmath}+3u^2\hat{k} \Longrightarrow \vec{r}_u(1,2)=\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+3\hat{k}$$

$$\vec{r}_v(u,v)=\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k} \Longrightarrow \vec{r}_v(1,2)=\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k}$$

2 הוקטורים הללו משיקים למשטח ולכן הנורמל של המשטח הוא: $\vec{r}_u(1,2)\times\vec{r}_v(1,2)$, נחשבו:

$$\vec{r}_u(1,2)\times\vec{r}_v(1,2)=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-5\hat{\imath}+4\hat{\jmath}-\hat{k}=(-5,4,-1)$$

בנוסף: $\vec{r}(1,2)=3\hat{\imath}+3\hat{\jmath}-\hat{k}=(3,3,-1)$ לכן משוואת המישור המשיק למשטח היא:

$$-5(x-3)+4(y-3)-1(z+1)=0 \Longrightarrow 5x-4y+z=2$$

7. מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח: $x^2+y^2+z^2-2z=0$

הניצב למישורים: $z=x+y$ ו-$z-y=\frac{x}{2}$.

<u>פתרון:</u> הנורמל למישור המבוקש מאונך לשני המישורים הנ"ל,

כלומר לוקטורי הנורמל של המישורים הללו שהם: $(1,1,-1),\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$.

לכן מצד אחד נוכל למצוא נורמל למישור המבוקש ע"י מכפלה וקטורית:

$$\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 0.5 & 1 & -1\end{vmatrix}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow \vec{N}=(0,\alpha,\alpha)$$

ומצד שני רכיבי הנורמל הם: $\vec{N}=(2x,2y,2z-2)$ ולכן:

$$\begin{cases}0=2x\\ \alpha=2y\\ \alpha=2z-2\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=\frac{1}{2}\alpha\\ z=\frac{1}{2}\alpha+1\end{cases} \Longrightarrow (x,y,z)=\left(0,\frac{1}{2}\alpha,\frac{1}{2}\alpha+1\right)$$

הנקודה (x,y,z) נמצאת על המשטח ולכן על-מנת למצוא את α נציב אותה במשוואת המשטח:

$$0^2+\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2+\left(\frac{1}{2}\alpha+1\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\alpha+1\right)=0\Longrightarrow\alpha^2=2\Longrightarrow\alpha=\pm\sqrt{2}$$

עבור $\alpha=\sqrt{2}$ נקבל את הנקודה: $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ומשוואת המישור תהיה: $y+z=1+\sqrt{2}$.

עבור $\alpha=-\sqrt{2}$ נקבל את הנקודה: $\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ומשוואת המישור תהיה: $y+z=1-\sqrt{2}$.

נגזרת מכוונת

יהי $\hat{u}=(u_1,u_2)$ וקטור יחידה, כלומר: $u_1^2+u_2^2=1$).

הנגזרת המכוונת של f בנקודה (x_0,y_0) בכיוון $\hat{u}$ מוגדרת ע״י:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hu_1,y_0+hu_2)-f(x_0,y_0)}{h}$$

בתנאי שהגבול קיים וסופי.

<u>משפט</u>: אם f דיפ׳ ב-(x_0,y_0) ו-$\hat{u}=(u_1,u_2)$ וקטור יחידה:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\underbrace{\cdot}_{\text{מכפלה סקלרית}}\hat{u}=\left(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)\right)\cdot(u_1,u_2)$$

$$=f'_x(x_0,y_0)\cdot u_1+f'_y(x_0,y_0)\cdot u_2$$

<u>הערות</u>:

1) ∇f מצביע על הכיוון שבו הנגזרת המכוונת מקסימלית,

כלומר כיוון העלייה התלולה ביותר על המשטח $z=f(x,y)$.

<u>הסבר</u>:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=\vec{\nabla}f(x_0,y_0)\cdot\hat{u}=\left|\vec{\nabla}f(x_0,y_0)\right|\cdot|\hat{u}|\cdot cos(\alpha)=\left|\vec{\nabla}f(x_0,y_0)\right|\cdot cos(\alpha)$$

(כאשר $\alpha=\sphericalangle\left(\vec{\nabla}f(x_0,y_0),\hat{u}\right)$)

כעת נתבונן ב-3 מקרים חשובים:

אם: $\alpha=0\Longrightarrow cos(\alpha)=1$ אז $\hat{u}$ בכיוון $\vec{\nabla}f$ ונקבל את הנגזרת המכוונת המקסימלית.

אם $\alpha=\pi\Longrightarrow cos(\alpha)=-1$ אז $\hat{u}$ בכיוון $-\vec{\nabla}f$ ונקבל את הנגזרת המכוונת המינימלית.

ואם $\alpha=\pi/2\Longrightarrow cos(\alpha)=0$ אז $\hat{u}$ ניצב ל-$\vec{\nabla}f$ ונקבל שהנגזרת המכוונת היא 0.

(קווים שלאורכם הנגזרת המכוונת היא אפס הם קווי הגובה של הפונקציה).

2) הנגזרות החלקיות של f לפי x ולפי y הן מקרה פרטי של הנגזרת המכוונת.

אם $\hat{u} = (1,0)$ את f_x ואם $\vec{u} = (0,1)$ נקבל את f_y.

<u>תרגילים :</u>

1. חשבו את הנגזרת המכוונת ב-(0,0) כאשר : $f(x,y) = \begin{cases} 0 & (0,0) \\ \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{אחרת} \end{cases}$

<u>דרך א׳ (לפי הגדרה) :</u>

נסמן : $\hat{u} = (u_1, u_2)$ ונקבל :

$$f_u(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+tu_1, 0+tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3u_1^2u_2}{t^2(u_1^2+u_2^2)} - 0}{t} = \frac{u_1^2u_2}{u_1^2+u_2^2} = u_1^2u_2$$

<u>דרך ב׳ (לפי המשפט) :</u>

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \vec{\nabla}f(0,0)\cdot(u_1,u_2)$$

נחשב תחילה את :

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

מכאן :

$$\nabla f(0,0)\cdot(u_1,u_2) = (0,0)\cdot(u_1,u_2) = 0$$

קיבלנו תוצאות שונות כי לא בדקנו שתנאי המשפט מתקיימים **(דרך ב׳ לא נכונה!!!)**.

נראה כעת כי תנאי המשפט אינם מתקיימים, כלומר $f(x,y)$ הנתונה איננה דיפ׳ ב-(0,0).

נבדוק דיפ׳ לפי ההגדרה :

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \varepsilon\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

נשים לב כי $(x_0,y_0) = (0,0)$ ועי״פ החישובים הקודמים : $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ ומכאן נקבל :

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)\cdot x + f_y(0,0)\cdot y + \varepsilon\sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow f(x,y) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot y + \varepsilon\sqrt{x^2+y^2}$$

נחלץ את $\varepsilon(x,y)$ ונקבל : $\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{x^2y}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{1.5}}$ נעבור לקואורדינטות פולריות ונקבל :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{1.5}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3cos^3\alpha sin\alpha}{r^3} = \underbrace{1}_{F(r)} \cdot \underbrace{cos^3\alpha sin\alpha}_{G(\alpha)}$$

הגבול $\lim_{r\to 0} F(r) = 1 \neq 0$ ו-$G(\alpha)$ איננה קבועה לכן ע״פ משפט הגבול לא קיים ולכן f לא דיפ׳.

2. נתונה: $f(x,y) = x^3y - y^3x$ ו-$\vec{u} = (1,1)$ חשבו את $\frac{\partial f}{\partial u}(1,2)$.

<u>פתרון:</u>

הפונקציה f דיפ׳ ולכן ניתן להשתמש במשפט (לא לשכוח לנרמל את הוקטור $\vec{u}$):

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,2) = \nabla f \cdot \hat{u} = (3x^2y - y^3, x^3 - 3y^2x)|_{(1,2)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\hat{u}} = (-2,-11) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -\frac{13}{\sqrt{2}}$$

3. תהי $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ גזירה בכל נקודה ומקיימת:

א. לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים: $f(x, y, 2x^2 + y^2) = 3x - 5y$.

ב. $\hat{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial u}(1,2,6) = 1$.

חשבו את $\vec{\nabla} f(1,2,6)$.

<u>פתרון:</u> אנו מחפשים את f_x, f_y, f_z בנקודה $(1,2,6)$.

נשים לב כי $(1,2,6)$ היא נקודה מהצורה: $(x, y, 2x^2 + y^2)$.

בנקודה הנ״ל לפי נתון (1) מתקיים:

$$f(x,y,z) = f\left(x, y, \underbrace{2x^2 + y^2}_{z(x,y)}\right) = 3x - 5y$$

נגזור את f בנקודה הנ״ל:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \cdot x_x + f_y \cdot y_x + f_z \cdot z_x|_{(1,2)} \Rightarrow 3 = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 + f_z \cdot 4x|_{(1,2)}$$

$$\Rightarrow 3 = f_x + 4xf_z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_x \cdot x_y + f_y \cdot y_y + f_z \cdot z_y\Big|_{(1,2)} \Rightarrow -5 = f_x \cdot 0 + f_y \cdot 1 + f_z \cdot 2y|_{(1,2)}$$

$$\Rightarrow -5 = f_y + 2yf_z$$

מנתון (2) נקבל את המשוואה החסרה, f דיפ׳ ולכן לפי המשפט שלמדנו מקבלים:

$$\underbrace{1 = \frac{\partial f}{\partial u}(1,2,6)}_{\text{ע"פ הנתון}} = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u} = \left(f_x, f_y, f_z\right) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow 1 = \frac{1}{3} f_x + \frac{2}{3} f_y + \frac{2}{3} f_z \Longrightarrow 3 = f_x + 2f_y + 2f_z$$

נפתור את מערכת המשוואות הבאה :

$$\begin{cases} 3 = f_x + 4x f_z \\ -5 = f_y + 2y f_z \\ 3 = f_x + 2f_y + 2f_z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f_x = 7 \\ f_y = -1 \\ f_z = -1 \end{cases}$$

ומכאן נקבל כי :

$$\vec{\nabla} f = (7, -1, -1)$$

<u>הערה :</u> בכל המקומות שרשום $\vec{\nabla} f$ או f_x, f_y, f_z הכוונה היא בנקודה $(1,2,6)$.

4. זבוב ולטאה נמצאים יחד בנקודה $(0,0,5)$ על שולחן בגובה $z = 5$.

הטמפרטורה בחדר נתונה ע"י הפונקציה $T(x, y, z) = x + 2y + 3z$, מהם כיווני הוקטורים $\hat{n}_{\text{זבוב}}$, $\hat{n}_{\text{לטאה}}$ שבמקביל אליהם ינועו הזבוב והלטאה בהתאמה כדי להרגיש עלייה מקסימלית בטמפ' ?

<u>פתרון :</u>

הלטאה **מוגבלת** לשולחן (אין לה כנפיים) ולכן יש לחשב את הגרדיאנט תחת ה**אילוץ** $z = 5$.

∇

$$\vec{\nabla} T|_{z=5} = \vec{\nabla}(x + 2y + 15) = (1,2,0)$$

מכאן : $\hat{n}_{\text{לטאה}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ (לאחר נרמול הוקטור $(1,2,0)$ שאורכו $\sqrt{5}$).

הזבוב **לא מוגבל** ולכן הגרדיאנט שלו :

$$\vec{\nabla} T = \vec{\nabla}(x + 2y + 3z) = (1,2,3)$$

מכאן : $\hat{n}_{\text{זבוב}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$ (לאחר נרמול הוקטור $(1,2,3)$ שאורכו $\sqrt{14}$).

5.כדור מונח על המשטח $z = f(x, y) = 2y^2 - x^2 y$ בנקודה $p_0(1,3,15)$.

לאיזה כיוון מתגלגל הכדור ?

<u>פתרון :</u> מבחינה גיאומטרית הכדור יתגלגל על המישור המשיק לגרף בכיוון הירידה התלול ביותר.

השינוי הגדול ביותר הוא בכיוון $-\vec{\nabla}f$ כלומר: $(-f_x, -f_y, c)$ כאשר c הוא הכיוון שיתאים ותלוי ב-f_x וב-f_y.

ברור כי $(-f_x, -f_y, c)$ מאונך לנורמל של המישור המשיק שהוא: $(f_x, f_y, -1)$.

ולכן מכפלתם הסקלרית היא אפס, כלומר: $0 = \left(-f_x, -f_y, c\right) \cdot \left(f_x, f_y, -1\right)$.

מכאן נובע ש- $-{f_x}^2 - {f_y}^2 = c$.

<u>לסיכום:</u>

הכיוון המרחבי של העלייה התלולה הוא: $(f_x, f_y, f_x^2 + f_y^2)$.

הכיוון המרחבי של של הירידה התלולה הוא: $\left(-f_x, -f_y, -f_x^2 - f_y^2\right)$.

ע"פ הנתונים:

$$f_x(1,3) = -2xy|_{(1,3)} = -6, \qquad f_y(1,3) = (4y - x^2)|_{(1,3)} = 11$$

ולכן אצלנו כיוון הירידה התלולה הוא: $\vec{v} = \left(-f_x, -f_y, -f_x^2 - f_y^2\right) = (6, -11, -157)$.

6. מטייל עומד מעל הנקודה $(1, -3)$ על הר שצורתו נתונה ע"י המשוואה $z = e^{-x^2-y^2}$.

הוא מחליט ללכת בדרך אשר תשאר מעל אותו קו גובה של ההר, באיזה מהכיוונים במרחב עליו לפנות

בתחילת הטיול?

א) $-2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$ ב) $3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + e^{-12}\hat{k}$ ג) $e^{-12}(-2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 2^{\sqrt{10}}\hat{k})$ ד) $3\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ ה) $-2e^{-10}\hat{\imath}$ $6e^{10}\hat{\jmath} - \hat{k}$

<u>פתרון:</u> הוא לא רוצה לשנות גובה ולכן נפסול תשובות המכילות רכיב $z \neq 0$ (תשובות ב',ג' וה' נפסלות).

<u>דרך א':</u> כדי להישאר מעל אותו קו-גובה הוא צריך לפנות בכיוון ניצב לגרדיאנט (נגזרת מכוונות = 0)

$$\vec{\nabla}f = \left(-2xe^{-x^2-y^2}, -2ye^{-x^2-y^2}\right) \Longrightarrow \vec{\nabla}f(1,-3) = e^{-10}(-2,6)$$

אם נציב את א' נקבל: $e^{-10}(-2,6) \cdot (-2,6) = 40e^{-10} \neq 0$ לכן תשובה זו נפסלת.

אם נציב את ד' נקבל: $e^{-10}(-2,6) \cdot (3,1) = 0$.

<u>דרך ב':</u> $e^{-x^2-y^2}$ היא קבועה כאשר החזקה קבועה, ז"א קווי-הגובה הם מעגלים

מהצורה $x^2 + y^2 = ln\left(\frac{1}{A}\right) \Longleftarrow e^{-x^2-y^2} = A$.

לכן מבין האפשרויות צריך לבחור משיק למעגל (שהוא קו-הגובה), הכיוון של המשיק למעגל הוא $(3,1)$.

7.נתונה הפונקציה $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$ הראו לפי ההגדרה שבראשית היא בעלת נגזרות מכוונות בכל כיוון

אך היא איננה דיפ' שם.

<u>פתרון :</u> נחשב נגזרת מכוונת בכיוון כללי : $\hat{u}=(u_1,u_2)$ (כלומר $u_1^2+u_2^2=1$).

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+hu_1,0+hu_2)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(hu_1)^2hu_2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sqrt[3]{u_1^2u_2}}{h}$$
$$=\sqrt[3]{u_1^2u_2}$$

נשים לב כי $\sqrt[3]{u_1^2u_2}$ מוגדר לכל u_1 ו-u_2 ולכן הנגזרת המכוונת בראשית קיימת בכל כיוון.

נבדוק דיפ' בראשית : תחילה הנגזרות החלקיות בראשית הן : $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

לכן לאחר הצבה בנוסחה : $f(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)(x-0)+f_y(y-0)+\varepsilon(x,y)\sqrt(x^2+y^2)$

ונחלץ את $\varepsilon(x,y)$, נקבל כי : $\varepsilon(x,y)=\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ולאורך המסלול $y=kx$ נקבל :

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{kx^3}}{\sqrt{x^2+k^2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt[3]{k}}{|x|\sqrt{1+k^2}}=\pm\frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{1+k^2}}$$

הגבול לא קיים ולכן f לא דיפ' בראשית.

כלל השרשרת

במשתנה יחיד

עבור פונקציה $f\big(u(x)\big)$ ע"פ כלל השרשרת נקבל :

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

למשל עבור $f\big(u(x)\big)=sin(lnx)$ נקבל :

$$\frac{d}{dx}\big(sin(lnx)\big)=cos(lnx)\cdot\frac{1}{x}$$

בשני משתנים

<u>משפט :</u>

יהיו $u,v:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ פונקציות גזירות ב- $p(x_0,y_0)$ ו- $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ גזירה

ב-$\big(u(p_0),v(p_0)\big)=(u_0,v_0)$ אזי $f(u,v)=f\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ גזירה ב-p_0 ומתקיימים :

$$\frac{\partial}{dx}[f(u(x,y),v(x,y)]=\frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{(u_0,v_0)}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)}+\frac{\partial f}{\partial v}\bigg|_{(u_0,v_0)}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)}$$

$$\frac{\partial}{dy}[f(u(x,y),v(x,y)] = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} \cdot \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

<u>תרגילים</u> :

1. נתונה $f(x,y) = e^x cos(y)$ ונתון $x(t) = 2t$ ו-$y(t) = t^2$, חשבו את $\frac{\partial f}{\partial t}$ לפי כלל השרשרת.

<u>פתרון</u> :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = e^x cos(y)\cdot 2 + (-e^x\, sin(y))\ \cdot 2t$$

$$= 2e^x(cos(y) - tsin(y)) = 2e^{2t}(cos(t^2) - tsin(t^2))$$

<u>הערה</u>: נשים לב שיכולנו להציב את x ואת y ולגזור פונקציה במשתנה יחיד t.

2. תהי $f(x,y)$ גזירה ונתון כי מתקיים : $\nabla f(2,3) = (3,4)$, $\underbrace{\nabla f(1,1) = (5,0)}_{\text{בדיעבד זה נתון מיותר}}$

נגדיר : $g(x,y) = f(x^2 - y + 2, y^3 - x + 3)$

חשבו את $g'_x(1,1)$.

<u>פתרון</u>: נסמן $g(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big)$ כאשר $u(x,y) = x^2 - y + 2$ ו-$v(x,y) = y^3 - x + 3$.

נשים לב כי : $u(1,1) = 1^2 - 1 + 2 = 2$ ו- $v(1,1) = 1^3 - 1 + 3 = 3$.

ע"פ כלל השרשרת נקבל :

$$g'_x(1,1) = f_u|_{(2,3)}\cdot u_x|_{(1,1)} + f_v|_{(2,3)}\cdot v_x|_{(1,1)}$$

ע"פ הנתון :

$$\nabla f(2,3) = \Big(f_u(2,3), f_v(2,3)\Big) = (3,4) \Longrightarrow f_u(2,3) = 3, \qquad f_v(2,3) = 4$$

בנוסף הנגזרות החלקיות של u ו-v לפי x הם :

$$u_x(x,y) = 2x \Longrightarrow u_x(1,1) = 2$$

$$v_x(x,y) = -1 \Longrightarrow v_x(1,1) = -1$$

מכאן נקבל כי :

$$f_u|_{(2,3)}\cdot u_x|_{(1,1)} + f_v|_{(2,3)}\cdot v_x|_{(1,1)} = 3\cdot 2 + 4\cdot(-1) = 2 \Longrightarrow g'_x(1,1) = 2$$

7. תהי $f(x,y)$ דיפ׳ ונתון שמתקיים : $f(x,x^2) = 1$ ו-$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x$.

חשבו $\frac{\partial f}{\partial y}(x,x^2)$ כאשר $x \neq 0$.

<u>פתרון :</u> מצד אחד $\frac{d}{dx}[f(x,x^2)]=\frac{d}{dx}(1)=0$.

מצד שני לפי כלל השרשרת :

$$\frac{d}{dx}f(x,x^2)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial(x^2)}{\partial x}\Longrightarrow\frac{d}{dx}f(x,x^2)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial x^2}\cdot 2x\Longrightarrow\frac{d}{dx}f(x,x^2)=x+2x\frac{\partial f}{\partial x^2}$$

לכן :

$$\Longrightarrow x+2x\frac{\partial f}{\partial x^2}=0\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(x,x^2)=-\frac{1}{2}$$

8. נתונה המשוואה :

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

מבצעים החלפת משתנים מ-(x,y) ל-(s,t) בצורה הבאה : $s(x,y)=x,\ \ t(x,y)=x^2+y^2$

למה תהפוך המשוואה כתלות ב-s,t ?

<u>פתרון :</u> נשים לב כי $z(x,y)=z\big(s(x,y),t(x,y)\big)$

מכאן ע״פ כלל השרשרת נקבל :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot 1+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot 2x=\frac{\partial z}{\partial s}+2x\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot 0+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot 2y=2y\frac{\partial z}{\partial t}$$

מכאן נובע שהמשוואה החדשה היא :

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0\Longrightarrow y\left(\frac{\partial z}{\partial s}+2x\frac{\partial z}{\partial t}\right)-x\left(2y\frac{\partial z}{\partial t}\right)\Longrightarrow y\frac{\partial z}{\partial s}=0$$

נמצא את y בעזרת t,s ונקבל : $t=x^2+y^2\Longrightarrow y^2=t-x^2\Longrightarrow y^2=t-s^2\Longrightarrow y=\pm\sqrt{t-s^2}$

מכאן נקבל את המשוואה :

$$\sqrt{t-s^2}\frac{\partial z}{\partial s}=0$$

<u>הערה :</u> לא רשום $\pm$ כי גם ככה אפשר לוותר על $y=\pm\sqrt{t-s^2}$ ולכתוב את המשוואה : $\frac{\partial z}{\partial s}=0$.

<u>נגזרות מסדר גבוה</u>

כפי שהגדרנו נגזרות חלקיות לפי x ולפי y ניתן להמשיך לגזור.

<u>משפט שוורץ :</u> $f(x,y)$ מוגדרת בסביבת p_0 כך ש-

א. f_x, f_y קיימות ב-p_0.
ב. f_{xy}, f_{yx} קיימות ורציפות ב-p_0.

אז $f_{yx}(p_0) = f_{xy}(p_0)$.

באופן כללי אם f בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר n בסביבה של p_{0_0}

אז הנגזרות החלקיות המעורבות עד סדר n לא תלויות בסדר הגזירה.

<u>תרגילים :</u>

1. הוכיחו כי כל פונקציה מהצורה : $h(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$

מקיימת את המשוואה $h_{tt} - c^2 h_{xx} = 0$ עבור f, g גזירות פעמיים ברציפות ($f, g \in C^2$).

<u>פתרון :</u>

נסמן : $u(x,t) = x + ct$ ו- $v(x,t) = x - ct$ ואז $h(x,t) = f\big(u(x,t)\big) + g\big(v(x,t)\big)$.

נחשב את h_{xx}, h_{tt} ע"פ כלל השרשרת :

$$h_x = f_u u_x + g_v v_x = f_u \cdot 1 + g_v \cdot 1 \Longrightarrow h_x = f_u + g_v$$

$$h_{xx} = (f_u)_u u_x + (g_v)_v v_x \Longrightarrow h_{xx} = f_{uu} + g_{vv}$$

בנוסף :

$$h_t = f_u u_t + g_v u_t = f_u \cdot c + g_v \cdot (-c) \Longrightarrow h_t = c(f_u - g_v)$$

$$h_{tt} = c[(f_u)_u u_t - (g_v)_v v_t)] = c[(f_u)_u \cdot c - (g_v)_v \cdot (-c)] \Longrightarrow h_{tt} = c^2(f_{uu} + g_{vv})$$

נציב במשוואה ונקבל :

$$h_{tt} - c^2 h_{xx} = c^2(f_{uu} + g_{vv}) - c^2(f_{uu} + g_{vv}) = 0$$

2. נתון כי f גזירה ברציפות פעמיים ב-$\mathbb{R}^3$, נניח שקיימת פונקציה של משתנה אחד g :

$g(u) = f(x,y,z)$ כך ש- $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

הוכיח כי הביטוי : $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ תלוי ב-u בלבד.

<u>פתרון :</u>

$$f_x = \Big(g\big(u(x,y,z)\big)\Big)_x = g_u \cdot u_x = g' \cdot 2x$$

$$f_{xx} = \Big(2xg'\big(u(x,y,z,)\big)\Big)_x = 2g' + 2x \cdot (g')_u u_x = 2g' + 2xg'' \cdot 2x = 2g' + 4x^2 g''$$

בצורה סימטרית :

$$f_{yy} = 2g' + 4y^2g''$$

$$f_{zz} = 2g' + 4z^2g''$$

כעת סכום הנגזרות הנ"ל:

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 6g' + 4g''(x^2 + y^2 + z^2) = 6g' + 4g''u$$

g היא פונקציה של u ולכן הביטוי תלוי רק ב-u.

3. תהי $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר שני ($f \in C^2$)

המקיימת: $4f_{yy} - f_{xx} = 1$ לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

נגדיר $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ע"י: $g(s,t) = f(s - 2t, 2s + 4t)$, למה שווה g_{st} ?

<u>פתרון:</u>

נסמן $x(s,t) = s - 2t$ ו- $y(s,t) = 2s + 4t$ ואז $g(s,t) = f\big(x(s,t), y(s,t)\big)$.

$$g_s = f_x x_s + f_y y_s = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 2 \Longrightarrow g_s = f_x + 2f_y$$

$$g_{st} = \left(f_x + 2f_y\right)_t = (f_x)_x x_t + (f_x)_y y_t + 2\left[\left(f_y\right)_x x_t + \left(f_y\right)_y y_t\right]$$

$$= f_{xx} \cdot (-2) + f_{xy} \cdot 4 + 2\left[f_{yx} \cdot (-2) + f_{yy} \cdot 4\right]$$

$$= -2f_{xx} + 4f_{xy} - 4f_{yx} + 8f_{yy} = -2f_{xx} + 8f_{yy} = 2\left(4f_{yy} - f_{xx}\right) = 2 \cdot 1 = 2$$