# B1 – Analysis

1.1 Der Linearfaktor $k^2 \cdot x + k$ im Funktionsterm der Schar beschreibt einen linearen Anstieg mit einer Steigung, die von $k^2$ abhängt. Der Exponentialfaktor $\mathrm{e}^{-0,1k\cdot x}$ sorgt dafür, dass die Funktion für größere $x$-Werte abfällt. Dieser Abfall ist umso schneller, je größer $k$ ist, da der Exponent schneller negativ wird.

Somit ergibt sich folgende Zuordnung:

Graph A: $k = 3,2$

Graph B: $k = 3$

Graph C: $k = 2$

1.2 Für große Werte von $x$ dominiert der exponentielle Faktor $\mathrm{e}^{-0,1k\cdot x}$ den Term $f_k(x)$.

Da der Exponentialterm gegen null geht, nähert sich auch $f_k(x)$ für große $x$-Werte der $x$-Achse an.

1.3.1 **1. Schritt: Zweite Ableitung bestimmen**

Mit der Produkt- und Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned} f_k''(x) &= -0,1k^3 \cdot \mathrm{e}^{-0,1k\cdot x} + \left(-0,1k^3 \cdot x + 0,9k^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,1k\cdot x} \cdot (-0,1k) \\ &= -0,1k^3 \cdot \mathrm{e}^{-0,1k\cdot x} + \left(0,01k^4 \cdot x - 0,09k^3\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,1k\cdot x} \\ &= \left(0,01k^4 \cdot x - 0,19k^3\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,1k\cdot x} \end{aligned}$$

**2. Schritt: Notwendige Bedingung für Wendestellen anwenden**

$$\begin{aligned} f_k''(x) &= 0 & & \\ \left(0,01k^4 \cdot x - 0,19k^3\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,1k\cdot x} &= 0 & & \mid : \mathrm{e}^{-0,1k\cdot x} > 0 \\ 0,01k^4 \cdot x - 0,19k^3 &= 0 & & \mid +0,19k^3 \\ 0,01k^4 \cdot x &= 0,19k^3 & & \mid : 0,01k^4 \\ x &= \frac{19}{k} & & \end{aligned}$$

**3. Schritt: $y$-Koordinate bestimmen**

$$\begin{aligned} f_k\left(\frac{19}{k}\right) &= \left(k^2 \cdot \frac{19}{k} + k\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,1k\cdot \frac{19}{k}} \\ &= 20k \cdot \mathrm{e}^{-1,9} \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Wendepunkts jeder Scharkurve sind somit gegeben durch $\left(\frac{19}{k} \middle| 20k \cdot \mathrm{e}^{-1{,}9}\right)$.

1.3.2 Aus der $x$-Koordinate des Wendepunkts ergibt sich:

$$\begin{aligned} x &= \frac{19}{k} && \mid \cdot k \quad \mid : x \\ k &= \frac{19}{x} \end{aligned}$$

Die $y$-Koordinate der Wendepunkte ist in Abhängigkeit von $k$ gegeben durch $y = 20k \cdot \mathrm{e}^{-1{,}9}$.

Einsetzen von $k = \frac{19}{x}$ liefert:

$$\begin{aligned} y &= 20 \cdot \frac{19}{x} \cdot \mathrm{e}^{-1{,}9} \\ &= \frac{380}{x} \cdot \mathrm{e}^{-1{,}9} \end{aligned}$$

Die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte lautet also $y = \frac{380}{x} \cdot \mathrm{e}^{-1{,}9}$.

2.1 Der Parameter $k$ beeinflusst die Form der Vase wie folgt:

- Umso größer der $k$-Wert, desto größer ist die Wölbung des unteren inneren Teils der Vase und somit die Breite der inneren Form.
- Umso größer der $k$-Wert, desto schmaler ist der obere innere Teil der Vase und somit die Öffnung der Vase.

2.2.1 Der Ansatz zur Berechnung des Volumens der Vase ergibt sich durch das Rotieren der Funktion $f_3$ um die $x$-Achse.

Mit $f_3(x) = (9x+3) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}3x}$ gilt für das Rotationsvolumen:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^{17} f_3(x)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \int_0^{17} \left((9x+3) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}3x}\right)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \int_0^{17} (9x+3)^2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}3x \cdot 2} \, \mathrm{d}x && \mid \text{1. bin. Formel} \\ &= \pi \cdot \int_0^{17} (81x^2 + 54x + 9) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}6x} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

2.2.2 **1. Schritt: Allgemeine Stammfunktion aufstellen**

Da die Funktion $h$ aus einem quadratischen Term und einer Exponentialfunktion zusammengesetzt ist, gilt für mögliche Stammfunktionen $H(x)$ :

$$H(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}6x}$$

**2. Schritt: Stammfunktion ableiten**

Zur Bestimmung der Koeffizienten $a$, $b$, und $c$ muss $H(x)$ durch Anwendung der Produktregel abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} H'(x) &= (2ax+b)\cdot \mathrm{e}^{-0.6x}+\left(ax^2+bx+c\right)\cdot(-0,6)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}6x} \\ &= \left((2ax+b)-0,6\cdot\left(ax^2+bx+c\right)\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}6x} \\ &= \left(2ax+b-0,6ax^2-0,6bx-0,6c\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}6x} \\ &= \left(-0,6ax^2+(2a-0,6b)x+b-0,6c\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}6x} \end{aligned}$$

**3. Schritt: Koeffizientenvergleich**

Es muss gelten:

$$\begin{aligned} H'(x) &= h(x) \\ \left(-0,6ax^2+(2a-0,6b)x+b-0,6c\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}6x} &= \left(81x^2+54x+9\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}6x} \quad &&|:\mathrm{e}^{-0{,}6x} \\ -0,6ax^2+(2a-0,6b)x+b-0,6c &= 81x^2+54x+9 \end{aligned}$$

Vergleichen der Koeffizienten liefert für $x^2$ :

$$\begin{aligned} -0,6a &= 81 \quad &&|:(-0,6) \\ a &= -135 \end{aligned}$$

Analog folgt für die Koeffizienten von $x$ :

$$\begin{aligned} 2a-0,6b &= 54 \quad &&|\ a=-135 \\ -270-0,6b &= 54 \quad &&|\ +270 \\ -0,6b &= 324 \quad &&|:(-0,6) \\ b &= -540 \end{aligned}$$

Für den konstanten Term ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} b-0,6c &= 9 \quad &&|\ b=-540 \\ -540-0,6c &= 9 \quad &&|\ +540 \\ -0,6c &= 549 \quad &&|:(-0,6) \\ c &= -915 \end{aligned}$$

**4. Schritt: Stammfunktion aufstellen**

Einsetzen der Koeffizienten in die allgemeine Stammfunktion liefert:

$$H(x)=\left(-135x^2-540x-915\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}6x}$$

**5. Schritt: Füllvolumen berechnen**

Mit der Formel zur Berechnung des Füllvolumens der Vase aus der Aufgabenstellung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
V &= \pi\cdot\int_0^{17}(81x^2+54x+9)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}6x}\ \mathrm{d}x \\
&= \pi\cdot\left[\left(-135x^2-540x-915\right)\cdot \mathrm{e}^{-0.6x}\right]_0^{17} \\
&= \pi\cdot\left(\left(-135\cdot 17^2-540\cdot 17-915\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}6\cdot 17}-\left(-135\cdot 0^2-540\cdot 0-915\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}6\cdot 0}\right) \\
&= \pi\cdot\left(-49110\cdot \mathrm{e}^{-10{,}2}+915\cdot \mathrm{e}^{0}\right) \\
&\approx 2868{,}8\,[\,\mathrm{cm}^3]
\end{aligned}$$

Das Füllvolumen der Vase beträgt somit etwa $2868{,}8\,\mathrm{cm}^3$ und somit ca. $2{,}9$ Liter.

2.3 Der Materialverbrauch der Vase ergibt sich als Differenz der Volumina, die sich durch die äußere und innere Funktion ergeben:

Es gilt also:

$$\begin{aligned}
V_{\text{Material}} &= \pi\cdot\left(\int_0^{17} g(x)^2\ \mathrm{d}x-\int_0^{17} f_3(x)^2\ \mathrm{d}x\right) \\
&= \pi\cdot\left(\int_0^{17} g(x)^2\ \mathrm{d}x\right)-\pi\cdot\left(\int_0^{17} f_3(x)^2\ \mathrm{d}x\right) \\
&= \pi\cdot\left(\int_0^{17}\left((10{,}24x+3{,}2)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}3x}\right)^2\ \mathrm{d}x\right)-2868{,}8
\end{aligned}$$

Mit dem WTR kann das Integral bestimmt werden und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
V &= \pi\cdot 1167{,}66-2868{,}8 \\
&\approx 799{,}5\ [\,\mathrm{cm}^3]
\end{aligned}$$

Der Materialverbrauch der Vase beträgt somit etwa $799{,}5\,\mathrm{cm}^3$.

2.4 Aus der Aufgabe 1.3.1 sind die Koordinaten der Wendepunkte der Schar in Abhängigkeit von $k$ bekannt. Für $f_3$ folgt also:

$$W_3\left(\frac{19}{3}\,\middle|\,60\cdot \mathrm{e}^{-1{,}9}\right)$$

Ab dem Wendepunkt verläuft die innere Randfunktion linear mit der Steigung $m=f_3'\left(\frac{19}{3}\right)$.

Ableitung bestimmen:

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= 9\mathrm{e}^{-0,3x} + (9x+3)\cdot \mathrm{e}^{-0,3x}\cdot(-0,3) \\ &= 9\mathrm{e}^{-0,3x} + (-2,7x-0,9)\cdot \mathrm{e}^{-0,3x} \\ &= (9-2,7x-0,9)\cdot \mathrm{e}^{-0,3x} \\ &= (8,1-2,7x)\cdot \mathrm{e}^{-0,3x} \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} m &= f_3'\left(\frac{19}{3}\right) \\ &= \left(8,1-2,7\cdot\frac{19}{3}\right)\cdot \mathrm{e}^{-0,3\cdot\frac{19}{3}} \\ &\approx -1,35 \end{aligned}$$

Einsetzen der Steigung $m$ sowie der Koordinaten des Wendepunkts in die allgemeine Tangentengleichung liefert:

$$\begin{aligned} t: \quad y &= m\cdot x + c \\ 60\cdot \mathrm{e}^{-1,9} &= -1,35\cdot\frac{19}{3} + c \\ 60\cdot \mathrm{e}^{-1,9} &= -8,55 + c \qquad \mid +8,55 \\ 17,52 &\approx c \end{aligned}$$

Ab dem Wendepunkt verläuft die Vase somit entlang der Tangente $t:\ y = -1,35\cdot x + 17,52.$

Da die Vase $12\,\mathrm{cm}$ hoch sein soll, entspricht der Radius ihrer Halsöffnung der $y$-Koordinate an der Stelle $x = 12:$

$$\begin{aligned} y &= -1,35\cdot 12 + 17,52 \\ &= 1,32 \end{aligned}$$

Der Durchmesser der Halsöffnung der Vase ist somit gegeben durch $2\cdot 1,32\ \mathrm{cm} = 2,64\ \mathrm{cm}.$

3 Das Füllvolumen der Vase lässt sich wie in Aufgabe 2.2.1 hergeleitet mit folgender Formel berechnen:

$$V = \pi\cdot\int_0^{17} f_3(x)^2\ \mathrm{d}x$$

Analog gilt für das Füllvolumen der neuen Vase:

$$V_{neu} = \pi\cdot\int_0^{h} r(x)^2\ \mathrm{d}x$$

Die Höhe $h$ der neuen Vase und somit die obere Integralsgrenze ist genau so gewählt, dass trotz $r(x) < f_3(x)$ Gleichheit der Integrale zur Bestimmung der Schnittflächen gilt.

Wegen $r(x) < f_3(x)$ gilt auch $r(x)^2 < f_3(x)^2$.

Durch das Quadrieren der Randfunktionen zur Bestimmung der Füllmenge wird jedoch auch die Differenz der Integrale über die beiden Funktionen proportional zum Quadrat der Randfunktion größer, während die obere Integralsgrenze $h$ konstant bleibt.

Das Füllvolumen der neuen Vase wird folglich geringer sein.