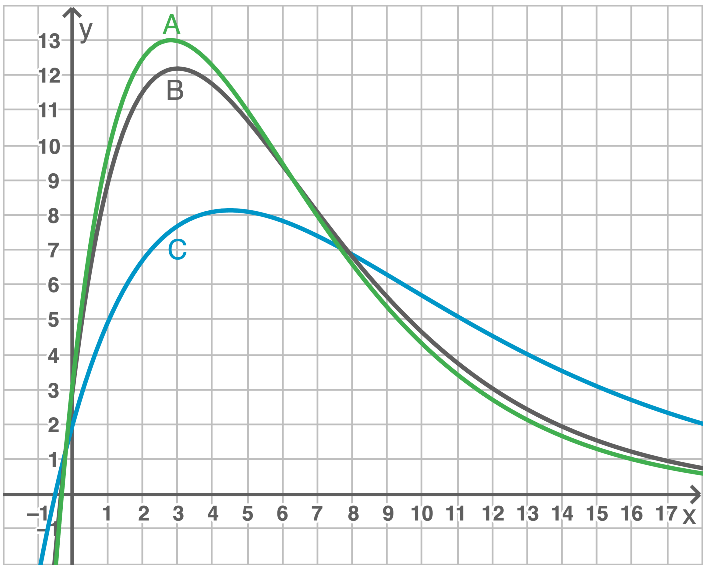
B1 – Analysis

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = \left(k^2 \cdot x + k\right) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1k \cdot x},\ k \in \mathbb{R}^+.$

1 Im Folgenden soll die Funktionenschar f_k untersucht werden.

1.1 In der folgenden Abbildung sind die Graphen der drei Scharfunktionen f_2, f_3 und $f_{3,2}$ dargestellt.

Ordne jedem Graphen den passenden Parameterwert zu.



(2 BE)

1.2 Begründe anhand des Funktionsterms der Funktionenschar, dass sich die Graphen aller Funktionen der Schar für größer werdende x-Werte der x-Achse annähern.

(3 BE)

1.3.1 Berechne in Abhängigkeit von k den Wendepunkt jeder Scharkurve. Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist ausreichend.

Die Funktionsgleichung der ersten Ableitung $f_k'(x) = \left(-0,1k^3 \cdot x + 0,9k^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1k \cdot x}$ kann ohne Nachweis verwendet werden.

$\left[\text{zur Kontrolle: } W_k\left(\frac{19}{k} \middle| 20k \cdot \mathrm{e}^{-1{,}9}\right)\right]$

(6 BE)

1.3.2 Berechne die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte der Schar f_k.

(2 BE)

2 Die Form bestimmter Vasen soll durch Rotationskörper modelliert werden, die im Intervall $[0; 17]$ durch Rotation von Flächen um die x-Achse entstehen.

Dabei soll als äußere Randfunktion der Fläche eine Funktion g, als innere Randfunktion eine geeignete Funktion der Schar f_k verwendet werden.

Im Modell liegt der Boden jeder Vase auf der y-Achse, die Dicke des Bodens soll vernachlässigt werden. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Zentimeter.

2.1 Beschreibe unter Angabe zweier Aspekte, welchen Einfluss der Parameter k der Schar f_k auf die innere Form der zu den Graphen in der Abbildung gehörigen Vasen hat.

(4 BE)

Im Folgenden wird die Vase mit der inneren Randfunktion f_3 betrachtet.

Diese Vase hat eine Höhe von $17\,\text{cm}$.

2.2 Um das Füllvolumen der Vase zu berechnen, wird folgender Ansatz gewählt:

$$V = \pi \int_0^{17} (81x^2 + 54x + 9) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}6x} \, \mathrm{d}x$$

2.2.1 Leite diesen Ansatz her.

(2 BE)

2.2.2 Berechne unter Verwendung eines geeigneten Formansatzes zur Ermittlung einer Stammfunktion der Funktion h mit $h(x) = \left(81x^2 + 54x + 9\right) \cdot \mathrm{e}^{-0.6x}$ das Füllvolumen der Vase.

$\Big[$ zur Kontrolle: $H(x) = \left(-135x^2 - 540x - 915\right) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}6x} \Big]$

(8 BE)

2.3 Für die äußere Randfunktion wird die Funktion g mit $g(x) = (10{,}24x + 3{,}2) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}3x}$ verwendet.

Ermittle den Materialverbrauch der Vase in cm^3. Die Dicke des Bodens der Vase soll dabei vernachlässigt werden.

(4 BE)

2.4 Es wird eine Vase betrachtet, deren Höhe $12\,\text{cm}$ beträgt. Die innere Randfunktion f_3 soll so verändert werden, dass ihr Graph ab dem Wendepunkt (Aufgabe 1.3.1) ohne Knick geradlinig weiter verläuft.

Bestimme den Durchmesser der Halsöffnung dieser Vase.

(5 BE)

3 Es soll eine neue Vase mit einer inneren Randfunktion r entworfen werden. Der innere Rotationskörper der neuen Vase ist im Vergleich zu dem der Vase mit der inneren Randfunktion f_3 schlanker (d.h. $r(x) < f_3(x)$), dafür aber höher (als $17\,\mathrm{cm}$).

Der Inhalt der Schnittflächen beider Rotationskörper bei einem Längsschnitt soll gleich bleiben, es gilt also:

$$A_{f_3} = 2 \cdot \int_0^{17} (9x+3) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}3x}\;\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^{h} r(x)\;\mathrm{d}x = A_r$$

Entscheide begründet, ob das Füllvolumen der neuen Vase kleiner oder größer ist als das Füllvolumen der Vase mit der inneren Randfunktion f_3, oder ob beide Füllvolumen gleich groß sind.

(4 BE)