A2 - Analysis

Eine Schokoladenglocke soll mathematisch modelliert werden. Dazu werden an sieben verschiedenen Stellen die Radien der Glocke gemessen. Im **Material 1** sind die Messdaten als Punkte eingetragen. Die Punkte liegen auf dem oberen Rand der Querschnittsfläche, die bei einem Querschnitt durch eine Symmetrieebene der Glocke entsteht. Durch Rotation des oberen Randes der Querschnittsfläche um die x-Achse erhält man die Glockenform.
Die Wertetabelle gibt die im Koordinatensystem eingetragenen Punkte an. Eine Einheit entspricht dabei einem Zentimeter.

x	$-1,5$	$-1,0$	$-0,5$	$0,0$	$0,5$	$1,0$	$1,5$
y	$0,00$	$0,55$	$0,80$	$1,00$	$1,20$	$1,45$	$2,00$

1.
Die Form des oberen Randes der Querschnittsfläche soll in einem ersten Modell anhand der in der Wertetabelle gegebenen Punkte annähernd durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f beschrieben werden.

1.1
Begründe unter Verwendung von **Material 1**, warum die ganzrationale Funktion f mindestens dritten Grades sein muss.

(4P)

1.2
Bestimme eine ganzrationale Funktion f dritten Grades so, dass ihr Graph durch $(0,5 \mid 1,20)$ und $(1,5 \mid 2,00)$ verläuft und in $(0,0 \mid 1,00)$ einen Wendepunkt besitzt.

(8P)

2.
Die Form des oberen Randes der Querschnittsfläche soll in einem zweiten Modell annähernd durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = 0,16x^3 + 0,34x + 1$ beschrieben werden.
Bestimme als Näherungswert für das Volumen der Glocke das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall $[-1,5; 1,5]$ um die x-Achse entsteht.

(3P)

3.
Die Form des oberen Randes der Querschnittsfläche soll in einem dritten Modell in einer Umgebung von $x = 0$ für eine geeignete Wahl des Parameters t näherungsweise durch einen Graphen der Funktionenschar f_t mit
$f_t(x) = \dfrac{e^{tx} - e^{-tx}}{5t} + 1$ und $t \neq 0$ beschrieben werden **(Material 2)**.

3.1
Bestätige, dass für $t = 1,183$ der Graph von f_t durch den Punkt $(1,000 \mid 1,500)$ verläuft, wenn man auf drei Nachkommastellen rundet.

(2P)

3.2

Zeige, dass alle Graphen der um eine Einheit in Richtung der negativen y-Achse verschobenen Schar f_t punktsymmetrisch zum Ursprung sind, und stelle dar, was sich hieraus für die Symmetrieeigenschaft der Graphen der Schar f_t ergibt.

(5P)

3.3
Zeige, dass alle Graphen der Schar f_t genau einen Wendepunkt besitzen, und entscheide, ob dort ein Wechsel von einer Rechts- in eine Linskrümmung oder ein Wechsel von einer Links- in eine Recktskrümmung erfolgt.

(7P)

4.
Die Schokoladenglocke soll mit Blattgold verziert werden. Dazu wird eine extrem dünne, essbare Blattgoldfolie benötigt. Das Blattgold soll in einem Streifen von $x_1 = 0$ bis $x_2 = 1$ rund um die Glocke aufgetragen werden. Um einen ersten Näherungswert für den Materialbedarf zu erhalten, wird zunächst vereinfachend eine Funktion k betrachtet, deren Graph vom Punkt $(0 \mid 1)$ bis zum Punkt $(1 \mid 1,5)$ geradlinig verläuft und in diesem Intervall um die x-Achse rotiert. Es ergibt sich die Form eines geraden Kegelstumpfs. Als Maß für den Materialbedarf dient der Flächeninhalt der Mantelfläche des Kegelstumpfs.

4.1
Zeige, dass beim Bestimmen des Flächeninhalts der Mantelfläche des Kegelstumpfs, der bei Rotation des Graphen von k für $0 \leq x \leq 1$ um die x-Achse entsteht, beide in **Material 3** angegebenen Methoden A und B zum gleichen Ergebnis führen.

(7P)

4.2
Bestimme mithilfe der Methode A den Inhalt der mit Blattgold bedeckten Fläche unter Verwendung der Funktion $g(x) = 0,16x^3 + 0,34x + 1$ aus Aufgabe 2 und vergleiche das Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 4.1.

(4P)

Material 1

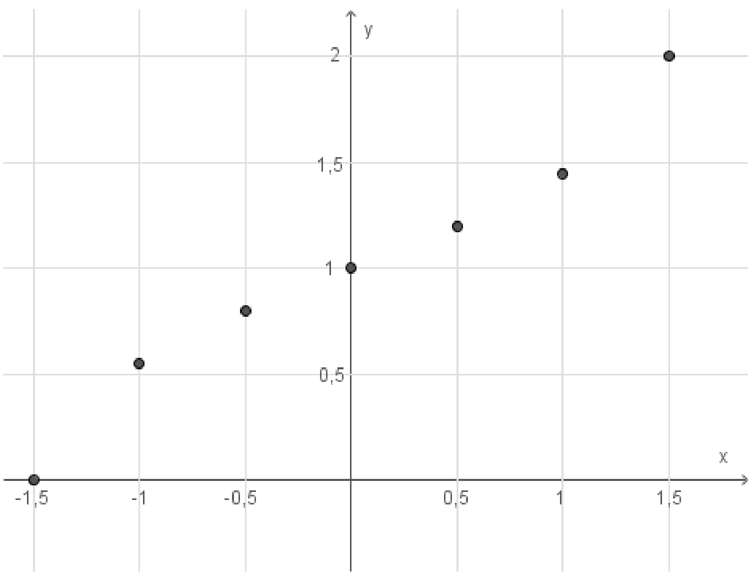

Abb. 1

Material 2

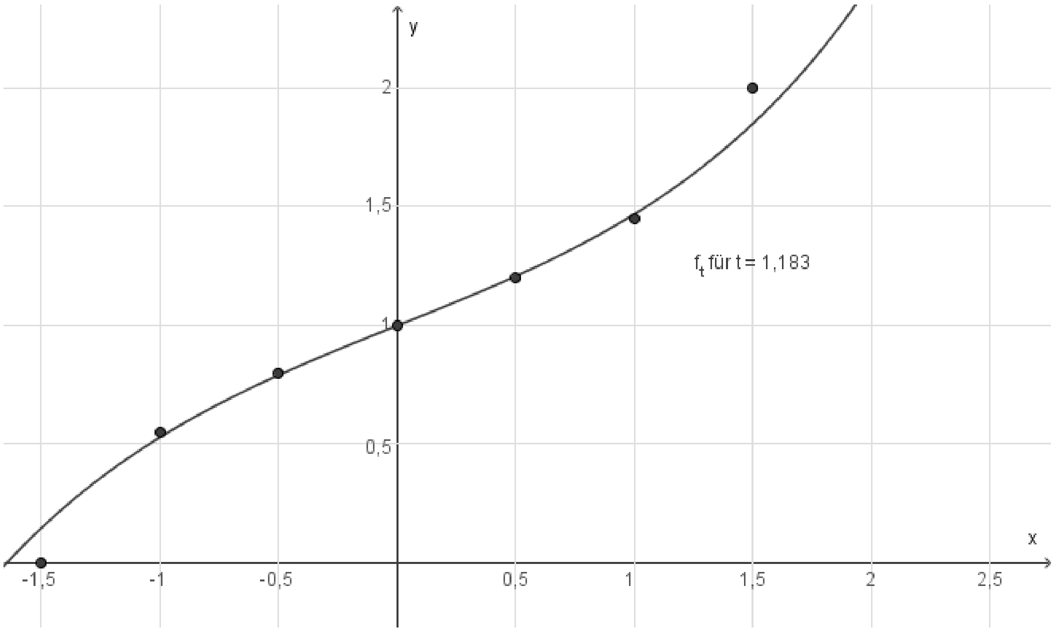

Abb. 2

Material 3

Methode A:
Lässt man den Graphen einer Funktion f für $x_1 \leq x \leq x_2$ um die x-Achse rotieren, dann lässt sich der Flächeninhalt M der Mantelfläche des Rotationskörpers folgendermaßen mithilfe eines Integrals ermitteln:

$M = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ für $f(x) \geq 0$

Methode B:
Der Flächeninhalt M der Mantelfläche eines geraden Kreiskegelstumpfs lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$M = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot s$

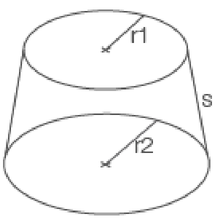

Abb. 3

Bildnachweise [nach oben]

[1]

[2]

[3]