B1 - Analytische Geometrie

1.1 ▶ **Trapezform zeigen**

Bei dem Viereck $GHIJ$ handelt es sich um ein Trapez, wenn zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind. Der Abbildung im Material kannst du entnehmen, dass mit großer Wahrscheinlichkeit die beiden Strecken $\overline{GH}$ und $\overline{JI}$ parallel sind. Überprüfe also, ob die zugehörigen Verbindungsvektoren linear abhängig sind.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GH} &= a\cdot\overrightarrow{JI}\\ \begin{pmatrix}0\\16\\0\end{pmatrix} &= a\cdot\begin{pmatrix}0\\24\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für $a=\frac{2}{3}$ erfüllt. Die beiden Vektoren $\overrightarrow{GH}$ und $\overrightarrow{JI}$ sind also parallel. Die Tribüne ist demnach trapezförmig.

▶ **Gleichschenkligkeit zeigen**

Das Trapez ist gleichschenklig, wenn es achsensymmetrisch ist. Die Symmetrieachse verläuft dann senkrecht zu den beiden parallelen Seiten durch ihre Mittelpunkte. Das Trapez ist also gleichschenklig, wenn $\overrightarrow{M_1M_2}$ senkrecht zu $\overrightarrow{GH}$ und $\overrightarrow{JI}$ ist. Dies ist der Fall, wenn das jeweilige Skalarprodukt Null ist.

1. Schritt: Mittelpunkte bestimmen

Mit der Formel für den Mittelpunkt einer Strecke folgt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_1} &= \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\16\\0\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}-4\\8\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_2} &= \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}-10\\20\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10\\-4\\4\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}-10\\8\\4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. Schritt: Orthogonalität prüfen

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GH} \circ \overrightarrow{M_1M_2} &= \begin{pmatrix}0\\16\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-6\\0\\4\end{pmatrix}\\ &= 0\cdot(-6)+16\cdot 0+0\cdot 4\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JI} \circ \overrightarrow{M_1M_2} &= \begin{pmatrix}0\\24\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-6\\0\\4\end{pmatrix}\\ &= 0\cdot(-6)+24\cdot 0+0\cdot 4\\ &= 0\end{aligned}$$

Das Trapez $GHIJ$ besitzt also die Gerade durch die Punkte M_1 und M_2 als Symmetrieachse und ist damit gleichschenklig. Die Tribüne hat damit insgesamt die Form eines gleichschenkligen Trapezes.

1.2 ▶ **Neigungswinkel berechnen**

Die Spielfeldfläche liegt in der x_1-x_2-Ebene. Ein zugehöriger Normalenvektor ist also $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Die Tribüne liegt in der Ebene $L:\ 2x_1+3x_3=-8,$ ein zugehöriger Normalenvektor ist also $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$.

Einsetzen in die Formel für den Schnittwinkel ϕ zweier Ebenen liefert:

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}\\ \cos\phi &= \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right|}\\ \cos\phi &= \frac{3}{1\cdot\sqrt{2^2+0^2+3^2}}\\ \cos\phi &= \frac{3}{\sqrt{13}} && \mid \cos^{-1}\\ \phi &\approx 33{,}7^\circ\end{aligned}$$

Die Tribüne ist gegenüber dem Spielfeld um ca. $33{,}7^\circ$ geneigt.

1.3 ▶ **Anzahl der Zuschauer berechnen**

1. Schritt: Flächeninhalt der Tribüne berechnen

Die Höhe des Trapezes $GHIJ$ entspricht aufgrund der Gleichschenklichkeit dem Abstand der beiden Mittelpunkte M_1 und M_2. Mit dem Vektorbetrag ergibt sich:

$$\begin{aligned} h &= \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{(-6)^2+0^2+4^2} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

Die Längen der beiden parallelen Seiten des Trapezes können ebenfalls über die Vektorbeträge der zugehörigen Verbindungsvektoren berechnet werden:

$$\begin{aligned} a &= \left|\overrightarrow{GH}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{0^2+16^2+0^2} \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \left|\overrightarrow{JI}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{0^2+24^2+0^2} \\ &= 24 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes liefert:

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot h \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot(16+24)\cdot\sqrt{52} \\ &\approx 144,22 \end{aligned}$$

Die Tribüne ist also ca. $144,22\,\mathrm{m}^2$ groß. Um eine vollbesetzte Tribüne zu zeigen müssten also $144,22\,\mathrm{m}^2 : 0,5\,\mathrm{m}^2 \approx 288$ Zuschauer dargestellt werden.

1.4 ▶ **Abstand berechnen**

Um den Abstand eines Punkts von einer Ebene zu berechnen, kannst du die Hessesche Normalform verwenden. Forme die Ebenengleichung von L also entsprechend um:

$$\begin{aligned} L: \quad \frac{2x_1+3x_3-(-8)}{\sqrt{2^2+0^2+3^2}} &= 0 \\ \frac{2x_1+3x_3+8}{\sqrt{13}} &= 0 \end{aligned}$$

Der Abstand eines Punkts $P(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ zur Ebene L kann also wie folgt berechnet werden:

$$d(P,L)=\frac{|2x_1+3x_3+8|}{\sqrt{13}}$$

Einsetzen der Koordinaten von F liefert:

$$d(F,L)=\frac{|2\cdot(-1)+3\cdot 2,4+8|}{\sqrt{13}}\approx 3,66$$

Die Ebene L und der Punkt F haben einen Abstand von ca. $3,66\,\mathrm{m}$.

1.5 ▶ **Abstand darstellen**

Der Abstand zwischen dem Punkt F und der Ebene L entspricht dem Abstand von F zu dem Punkt P innerhalb der Ebene L mit dem kürzesten Abstand zu F. Dies ist der Punkt, in dem die Gerade, die durch den Punkt F orthogonal zur Ebene L verläuft auf die Ebene L trifft.
Dieser Punkt ist eindeutig, es gibt also nur einen solchen Punkt in der gesamten Ebene L, der den gleichen Abstand zu F besitzt wie die gesamte Ebene L.
Dieser Punkt P liegt im betrachteten Fall außerhalb des Vierecks $GHIJ$, wie sich in der folgenden Abbildung erkennen lässt.

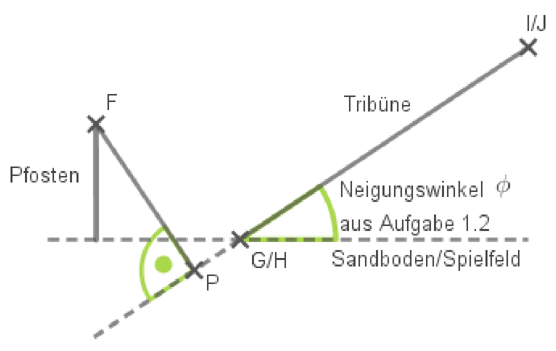

Abb. 1: Querschnitt auf die Tribüne und den Pfosten, frontaler Blick auf die x_1x_3-Ebene

2 ▶ **Berührung überprüfen**

Die Flugbahn des Balls kann näherungsweise durch folgende Gerade beschrieben werden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7,5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Das Netz liegt parallel zur x_1x_3-Ebene. Alle Punkte auf dem Netz haben daher dieselbe x_2-Koordinate wie F, $x_2 = 8$. Setze diese mit der entsprechenden Zeile der Geradengleichung von g gleich:

$$\begin{array}{rcll} 8 &=& 7,5 + s \cdot 4 & \quad \mid -7,5 \\ 0,5 &=& s \cdot 4 & \quad \mid :4 \\ 0,125 &=& s & \end{array}$$

Einsetzen in die Geradengleichung liefert:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7,5 \\ 3 \end{pmatrix} + 0,125 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2,625 \end{pmatrix}$$

Wenn der Ball sich in der Ebene des Netzes befindet, befindet er sich in einer Höhe von $2,625\,\mathrm{m}$. Die Oberkante des Netzes befindet sich aufgrund der x_3-Koordinate von F allerdings in einer Höhe von lediglich $2,4\,\mathrm{m}$. Der Ball berührt das Netz also nicht, sondern fliegt darüber hinweg.

3.1 ▶ **Bewegung in einer Ebene begründen**

Da die x_1-Koordinate der Punkte X_t unabhängig vom Parameter t und damit konstant 3 ist, liegen alle Punkte X_t in der Ebene mit der Gleichung $x_1 = 3$.
Der Ball bewegt sich also in der Ebene mit der Gleichung $x_1 = 3$.

3.2 ▶ **Auftreffen im Spielfeld untersuchen**

Das Spielfeld liegt innerhalb der x_1x_2-Ebene. Berechne also den Schnittpunkt der Flugbahn des Balls mit der x_1x_2-Ebene und prüfe anschließend, ob dieser Punkt innerhalb des Spielfelds liegt.
Damit der Ball auf die x_1x_2-Ebene trifft, muss die x_3-Koordinate von X_t null sein. Gleichsetzen liefert:

$$\begin{array}{rcll} -5t^2 + 4t + 2,8 &=& 0 & \quad \mid :(-5) \\ t^2 - 0,8t - 0,56 &=& 0 & \quad \mid pq\text{-Formel} \\ t_{1/2} &=& -\frac{-0,8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-0,8}{2}\right)^2 + 0,56} & \\ &=& 0,4 \pm \sqrt{0,72} & \\ t_1 &=& 0,4 - \sqrt{0,72} & \\ &\approx& -0,45 < 0 & \\ t_2 &=& 0,4 + \sqrt{0,72} & \\ &\approx& 1,25 & \end{array}$$

Da t_1 negativ ist, ist die einzige im Sachzusammenhang sinnvolle Lösung $t_2 \approx 1,25$. Die Koordinaten des

Balls lauten dann:

$X_{1,25}(3 \mid 14 \mid 0)$

Da das Beachvolleyballfeld insgesamt $8\,\mathrm{m}$ breit und $16\,\mathrm{m}$ lang ist, liegt der Ball damit beim Auftreffen auf dem Boden innerhalb des Spielfelds.

4 ▶ **Transformationsmatrix angeben**

Eine Drehung um die x_3-Achse mit einem Winkel von $\alpha = 90^\circ$ entgegen dem Uhrzeigersinn kann mit folgender Drehmatrix beschrieben werden:

$$D = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Verkleinerung um $30\,\%$ entspricht einer Skalierung auf $70\,\%$, also um den Faktor $0,7$. Diese Skalierung kannst du mit folgender Skalierungsmatrix darstellen:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Insgesamt ergibt sich dadurch folgende Transformationsmatrix:

$$T = S \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Bildnachweise [nach oben]

[1] © 2019 – SchulLV.