B1 - Analysis

1

1.1 Es gilt $v_2(0)=4,5$. Damit kann die Funktion v_2 anhand des $y-$Achsenabschnitts dem Graphen A zugeordnet werden.

Es gilt auch: $v_1(16)\approx 4,99$. Damit lässt sich die Funktion v_1 anhand des zu $t=16$ gehörenden Wertes dem Graphen C zuordnen.

Nach Ausschlussverfahren folgt jetzt: Die Funktion v_3 lässt sich dem Graphen B zuordnen. Außerdem gilt hier $v_3(16)=1,96.$ Damit lässt sich die Funktion v_3 auch dem Graphen B zuordnen.

1.2
$$\int_0^{10} v_1(t)\;\mathrm{d}t = \int_0^{10} 5-5\mathrm{e}^{-0,4t}\;\mathrm{d}t = \left[5t+\frac{25}{2}\mathrm{e}^{-0,4t}\right]_0^{10} \approx 37,73.$$

Damit hat die Fläche einen Flächeninhalt von ca. $37,73\,\mathrm{FE}.$

1.3 Die notwendige Bedingung für Extremstellen wird angewendet.

$$v_2'(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-0,5t}\cdot(t-0,25t^2)+\mathrm{e}^{-0,5t}\cdot(1-0,5t) = \mathrm{e}^{-0,5t}\cdot(0,125t^2-t+1).$$

Da $\mathrm{e}^{-0,5t}\neq 0,$ muss nach dem Satz vom Nullprodukt die quadratische Gleichung $(0,125t^2-t+1)$ den Wert null annehmen. Da quadratische Funktionen maximal zwei Nullstellen haben, hat $v_2'(t)$ maximal zwei Nullstellen. Somit hat $v_2(t)$ maximal zwei Extremstellen.

2

2.1 Da $F_k(t)$ eine Stammfunktion von $f_k(t)$ ist, muss Folgendes gelten:

$$\begin{array}{rcll} f_k(t) &=& F_k'(t) & \\ 3t\cdot\mathrm{e}^{-kt} &=& b\cdot\mathrm{e}^{-kt}-k\cdot(a+bt)\cdot\mathrm{e}^{-kt} & \quad |:\mathrm{e}^{-kt} \\ 3t &=& b-k\cdot a-k\cdot b\cdot t & \end{array}$$

Damit die Gleichung gilt, müssen die Terme, die t enthalten, auf beiden Seiten gleich sein:

$$\begin{array}{rcll} 3t &=& -k\cdot b\cdot t & \quad |:(k\cdot t) \\ \frac{3}{k} &=& -b & \quad |\cdot(-1) \\ -\frac{3}{k} &=& b & \\ b &=& -\frac{3}{k} & \end{array}$$

Mit $b=-\dfrac{3}{k}$ folgt:

$$\begin{aligned} 3t &= -\frac{3}{k} - k\cdot a + 3t && \mid -3t \\ 0 &= -\frac{3}{k} - k\cdot a && \mid +\tfrac{3}{k} \\ \frac{3}{k} &= -k\cdot a && \mid :(-k) \\ -\frac{3}{k^2} &= a \\ a &= -\frac{3}{k^2} \end{aligned}$$

Damit gilt dann für $F_k(t)$:

$$F_k(t) = \left(-\frac{3}{k^2} - \frac{3}{k}\cdot t\right)\cdot \mathrm{e}^{-kt}$$

2.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f_k(t)\;\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to\infty}\left(F_k(x) - F_k(0)\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(F_k(x)\right) - F_k(0)$

Betrachte $\lim\limits_{x\to\infty}\left(F_k(x)\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(F_k(x)\right) = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\underbrace{\left(-\frac{3}{k^2} - \frac{3}{k}\cdot x\right)}_{\to -\infty}\cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-kx}}_{\to 0}}_{\to 0}$$

Da e^{-kx} für $x\to\infty$ und $k>0$ wesentlich schneller gegen 0 verläuft, als $-\frac{3}{k^2} - \frac{3}{k}\cdot x$ gegen ∞, konvergiert der gesamte Term gegen 0.

Damit gilt für das Integral:

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f_k(t)\;\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\left(F_k(x)\right) - F_k(0) = 0 - \left(-\frac{3}{k^2}\right) = \frac{3}{k^2}.$$

2.3 Es gilt:

$$f_k(t) = 3t\cdot \mathrm{e}^{-kt}$$

$$f_k'(t) = 3\cdot \mathrm{e}^{-kt} - 3\cdot t\cdot k\cdot \mathrm{e}^{-kt}$$

$$f_k''(t) = \left(-6k + 3k^2\cdot t\right)\cdot \mathrm{e}^{-kt}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} f_k(t) &= 0 \\ 3t \cdot \mathrm{e}^{-kt} &= 0 \quad \mid :(3\cdot \mathrm{e}^{-kt}) \\ t &= 0 \end{aligned}$$

Damit besitzen die Scharkurven eine von k unabhängige Nullstelle N bei $t=0$.

Hochpunkte

Durch Überprüfen der notwendigen Bedingung für Extremstellen ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_k'(t) &= 0 \\ 3\cdot \mathrm{e}^{-kt} - 3\cdot t\cdot k\cdot \mathrm{e}^{-kt} &= 0 \quad \mid +(3\cdot t\cdot k\cdot \mathrm{e}^{-kt}) \quad \mid :(3\cdot \mathrm{e}^{-kt}) \quad \mid :k \\ \frac{1}{k} &= t \end{aligned}$$

Mit der hinreichenden Bedingung für Extremstellen folgt dann:

$$f_k''\left(\frac{1}{k}\right) = \left(-6k + 3k^2\cdot\frac{1}{k}\right)\cdot \mathrm{e}^{-k\cdot\frac{1}{k}} = -\frac{3k}{\mathrm{e}}$$

Da $k>0$ und $\mathrm{e}>0$ gilt: $\quad f_k''\left(\frac{1}{k}\right) < 0.$

Damit befindet sich bei $H = \left(\frac{1}{k} \,\middle|\, f_k\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \left(\frac{1}{k} \,\middle|\, \frac{3}{\mathrm{e}\cdot k}\right)$ ein Hochpunkt der Scharkurven.

2.4 Es gilt $k>0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{k} \\ k &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

und $t>0$.

Nun wird $k=\frac{1}{t}$ in $y=\frac{3}{\mathrm{e}\cdot k}$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{\mathrm{e}\cdot k} \\ y &= \frac{3}{\mathrm{e}}\cdot t \end{aligned}$$

Somit gilt für die Ortskurve der Hochpunkte:

$$O(t) = \frac{3}{\mathrm{e}}\cdot t \quad \text{für } t>0.$$

3

3.1 Radfahrer A startet direkt mit $4,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, wird für wenige Sekunden schneller und fährt danach mit nahezu konstanter Geschwindigkeit von ungefähr $4,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bis zum Ende durch.

Radfahrer B startet mit $0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, beschleunigt schnell und erreicht nach 5 Sekunden seine Spitzengeschwindigkeit. Danach fällt er stark ab und fährt gegen Ende am langsamsten.

Radfahrer C hingegen startet bei $0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und beschleunigt nicht so schnell wie Radfahrer B. Während des gesamten Verlaufs, steigert er seine Geschwindigkeit, sodass er nach 16 Sekunden mit nahezu konstanter Geschwindigkeit von knapp $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ am schnellsten ist.

3.2 Zu betrachten ist die Fläche, die die einzelnen Graphen mit der $t-$Achse auf dem Intervall $[0;6]$ einschließen. Damit ist sofort ersichtlich, dass Radfahrer C nach 6 Sekunden der Letzte ist.

Um nun den führenden Radfahrer zwischen Fahrer A und Fahrer B zu ermitteln, wird die Fläche betrachtet, die die Graphen A und B einschließen. Beim größeren Teil dieser Fläche befindet sich der Graph A über dem Graphen B. Somit liegt Radfahrer A nach 6 Sekunden in Führung.

3.3 Für die Ableitung von $v_1(t)$ gilt:

$$v_1'(t) = 5\cdot 0,4\cdot \mathrm{e}^{-0,4t} = 2\cdot \mathrm{e}^{-0,4t}$$

$$v_1'(5) = 2\cdot \mathrm{e}^{-2} \approx 0,27$$

Die Beschleunigung des Radfahrers C liegt nach 5 Sekunden bei ca. $0,27\,\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$.

3.4 Aus Aufgabe 2.1 erhält man mit $k=0,2$ die Stammfunktion für $v_3(t)$.

Zurückgelegte Strecke

$$\int_0^{16} v_3(t)\;\mathrm{d}t = \left[(-75-15\cdot t)\cdot \mathrm{e}^{-0,2t}\right]_0^{16} \approx 62,16.$$

Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\frac{1}{16}\cdot\int_0^{16} v_3(t)\;\mathrm{d}t \approx 3,88.$$

Der Radfahrer von v_3 hat nach 16 Sekunden ca. $62,16\,\mathrm{m}$ zurückgelegt und hatte damit eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $3,88\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

3.5 Mithilfe des WTR lassen sich die Schnittstellen bestimmen:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 \approx 8,1$$

Damit lässt sich die Fläche durch das Integral über die Differenz der Funktionen v_3 und v_1 berechnen. Der WTR liefert:

$$\int_0^{8,1} v_3(t) - v_1(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{8,1} \left(3t \cdot \mathrm{e}^{-0,2t} - 5 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0,4t}\right)\right)\ \mathrm{d}t \approx 7,62$$

Der Inhalt der Fläche zwischen v_1 und v_3 beträgt ca. $7,62\ [\mathrm{FE}]$.

Nach ca. $8,1$ Sekunden haben die beiden Radfahrer die gleiche Geschwindigkeit. Da beide gleichzeitig und am gleichen Ort starten, hat Radfahrer B zu diesem Zeitpunkt einen Vorsprung von ungefähr $7,62\,\mathrm{m}$ auf Radfahrer C.

3.6 Ist der Integralwert größer null, dann bedeutet dies im Sachzusammenhang, dass der Radfahrer von v_1 mehr Strecke im betrachteten Zeitraum zurücklegt, als der Radfahrer von v_3. Der Integralwert gibt dann den Vorsprung des Radfahrers von v_1 in Metern an.

Ist der Integralwert kleiner null, dann bedeutet dies im Sachzusammenhang, dass der Radfahrer von v_3 mehr Strecke im betrachteten Zeitraum zurücklegt, als der Radfahrer von v_1. Der Integralwert gibt dann den Vorsprung des Radfahrers von v_3 in Metern an.

Ist der Integralwert gleich null, dann beutet dies im Sachzusammenhang, dass beide Radfahrer im betrachteten Zeitraum genau gleich viel Strecke zurückgelegt haben.