1.1 ► Koordinatengleichung der Ebene f bestimmen (6P)

Gesucht ist die Koordinatengleichung der Ebene F, die durch die Parametergleichung

$$F: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Du kannst daraus eine Koordinatengleichung ermitteln, indem du zunächst den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene berechnest. Dieser zeigt senkrecht auf die Ebene.

Den Normalenvektor $\vec{n}$ erhältst du, indem du das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren aus der Parametergleichung bildest:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 4-2 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nun gibt es zwei mögliche Verfahren, mit denen du zur Lösung kommst:

►► Lösungsweg A: Ebenengleichung in Normalenform

Das Skalarprodukt von $\vec{n}$ mit jedem Vektor, der in der Ebene liegt, ist Null. Einen solchen beliebigen Vektor erhältst du, wenn du einen Ortsvektor $\vec{x}$ von dem Ortsvektor eines Punktes abziehst, der in der Ebene liegt, zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Ausmultipliziert ergibt sich aus der Ebenengleichung der Ebene F in Normalenform die Koordinatengleichung der Ebene F.

Setze $\vec{n}$ ein und vereinfache:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) &= 0 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) &= 0 \\ -6-2-6+2x+y-2z &= 0 \\ 2x+y-2z &= 14 \end{aligned}$$

Die Koordinatengleichung der Ebene F lautet damit: $F: \ 2x+y-2z=14$.

►► **Lösungsweg B: Skalarprodukt**

In der Koordinatengleichung bilden die Koeffizienten vor x, y und z die Koordinaten des Normalenvektors. Allgemein ergibt die Formel für die Koordinatengleichung also ein Skalarprodukt der Form

$\vec{n} \circ \vec{x} = k,$

wobei k eine reelle Konstante und $\vec{x}$ ein beliebiger Ortsvektor ist. Setze nun $\vec{n}$ ein und vereinfache:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k$$

$$2x + y - 2z = k$$

Um die Konstante k zu bestimmen, kannst die Koordinaten eines Punktes einsetzen, der in der Ebene liegt, etwa den Aufpunkt der Ebene H in der Parametergleichung:

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= k \\ 2 \cdot 3 + 2 - 2 \cdot (-3) &= k \\ k &= 14 \end{aligned}$$

Die Koordinatengleichung der Ebene F lautet damit: $F: \; 2x + y - 2z = 14$.

► **Zugehörigkeit zur Schar zeigen**

Ein Koeffizientenvergleich mit E_t zeigt. Der Faktor 2 vor x entspricht dem Faktor $1 + t$. Daraus folgt:

$t = 1$

Einsetzen in E_t liefert:

$(1 + 1) \cdot x + 1 \cdot y - 2z = 14 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x + y - 2z = 14$

Also ist F eine Ebene der Schar E_t für $t = 1$.

1.2 ► **Lagebeziehung von E_3 und F untersuchen** (6P)

Zwei Ebenen im dreidimensionalen Raum können in insgesamt drei Lagebeziehungen zueinander stehen:

- Sie sind identisch, liegen also ineinander.
- Sie sind parallel, haben also keine gemeinsamen Punkte.
- Sie schneiden sich und besitzen eine Schnittgerade.

Im ersten Fall gibt es unendlich viel Schnittpunkte zwischen den Ebenen und die die Menge der gemeinsamen Punkte gleich der Menge aller Punkte in einer der Ebenen. Im zweiten Fall gibt es keine Schnittpunkte zwischen den Ebenen, die Menge der gemeinsamen Punkte ist also leer. Im dritten Fall liegen alle gemeinsamen Punkte bzw. die Schnittpunkte auf der Schnittgeraden, die es dann zu bestimmen gilt.

Um zu prüfen, welcher Fall eintritt, kannst du das unterbestimmte Gleichungssystem der zwei Koordinatengleichungen von E_3 und F lösen und erhältst so eine Aussage über die Lagebeziehung:

Hat das LGS keine Lösung, so sind die Ebenen parallel. Ergibt sich eine wahre Aussage für alle x, y und z, so sind die Ebenen identisch. Erhältst du eine Lösung mit einem Parameter so hast du eine Geradengleichung gefunden und kannst so die Menge aller gemeinsamen Punkte angeben.

Die Koordinatengleichung für E_3 ergibt sich mit $t = 3$ zu:

$E_3:\ (1+3)x + 3y - 2z = 14$

Das LGS lautet damit:

(1) $\qquad 4x + 3y - 2z = 14$

(2) $\qquad 2x + y - 2z = 14$

Gleichsetzen von (1) und (2) ergibt:

(3) $\qquad 4x + 3y - 2z = 2x + y - 2z$

(3) $\qquad y = -x$

(4): (3) in (1) $\qquad 4x - 3x - 2z = 14$

(4) $\qquad z = \frac{1}{2}x - 7$

Du erhältst eine Lösung mit einem Parameter. Wähle $x = v$. Dann ergeben sich die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von E_3 und F durch Einsetzen in (3) und (4):

$x = v,\ y = -x = -v$ und $z = \dfrac{1}{2}x - 7 = \dfrac{1}{2}v - 7.$

E_3 und F schneiden sich also in den Punkten P, für die gilt:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} v \\ -v \\ \frac{1}{2}v - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die beiden Ebenen sind weder identisch noch parallel, sie schneiden sich also in einer Schnittgeraden, die die Parametergleichung oben erfüllt. Die Menge M der gemeinsamen Punkte ist damit:

$$M = \left\{ P \;\middle|\; \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ v \in \mathbb{R} \right\}$$

2. ▶ **Zwei Ebenen der Schar ermitteln, die sich unter 90° schneiden** (7P)

Schließen zwei Ebenen einen rechten Winkel ein, so ist das Skalarprodukt ihrer Normalenvektoren gleich Null. Für die Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ der zwei Ebenen E_{t_1} und E_{t_2} muss also gelten:

$\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = 0$

Die Normalenvektoren dieser Ebenen kannst du direkt aus den Koordinatengleichungen ablesen. Die Koordinaten der Normalenvektoren entsprechen gerade den Koeffizienten vor x, y und z. Gesucht sind dann die zwei Parameter t_1 und t_2 der beiden Ebenen E_{t_1} und E_{t_2}. Du erhältst damit:

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 1+t_1 \\ t_1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1+t_2 \\ t_2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Bedingung für Orthogonalität liefert:

$$\begin{aligned} \vec{n_1} \circ \vec{n_2} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 1+t_1 \\ t_1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1+t_2 \\ t_2 \\ -2 \end{pmatrix} &= 0 \\ (1+t_1)(1+t_2) + t_1 t_2 + 4 &= 0 \\ 5 + t_1 + t_2 + 2t_1 t_2 &= 0 \end{aligned}$$

Du kannst erkennen: Es gibt zwei Unbekannte aber nur eine Bedingung. Es gibt also unendlich viele Paare von Ebenen aus E_t, die den Winkel 90° einschließen. Du kannst also einen Parameter frei wählen, etwa $t_1 = 0$. Daraus ergibt sich für t_2:

$$\begin{aligned} 5 + 0 + t_2 + 2 \cdot 0 \cdot t_2 &= 0 \\ t_2 &= -5 \end{aligned}$$

Zwei Ebenen der Schar, die den Winkel 90° einschließen, sind damit E_0 und E_{-5}. Allgemein stehen alle Ebenen senkrecht aufeinander, die die Gleichung $5 + t_1 + t_2 + 2t_1 t_2 = 0$ erfüllen.

3.1 ▶ Die Ebenen F_M und F_N bestimmen (6P)

Um die Ebenen F_M und F_N im $\mathbb{R}^4$ in Parameterform zu bestimmen, kannst du die Parametergleichung von F jeweils mithilfe von M und N in den vierdimensionalen Raum abbilden. Du kannst dabei F als Vektor in Abhängigkeit von den Parametern v und w darstellen:

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+v+2w \\ 2+2v \\ -3+2v+2w \end{pmatrix}$$

Jetzt kannst du $\vec{x}$ durch Matrix-Vektor-Multiplikation mit M und N auf einen Vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^4$ abbilden:

$$F_M: \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3+v+2w \\ 2+2v \\ -3+2v+2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+v+2w \\ 2+2v \\ 3+v+2w+2+2v \\ -3+2v+2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+v+2w \\ 2+2v \\ 5+3v+2w \\ -3+2v+2w \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad F_M: \; \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$F_N: \; \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3+v+2w \\ 2+2v \\ -3+2v+2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2v \\ 3+v+2w \\ 3+v+2w \\ -3+2v+2w \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad F_N: \; \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.2 ▶ LGS für die Lagebeziehung aufstellen und Lagebeziehung ermitteln und bewerten (5P)

Zwei Ebenen im $\mathbb{R}^4$ können in insgesamt vier Lagebeziehungen zueinander stehen:

- Sie sind identisch, liegen also aufeinander.
- Sie sind parallel, haben also keine gemeinsamen Punkte.
- Sie schneiden sich und besitzen einen Schnittpunkt.
- Sie schneiden sich nicht und verlaufen nicht parallel, sind also windschief.

Im ersten Fall ist die Menge der gemeinsamen Punkte gleich der Menge aller Punkte in einer der Ebenen. Im zweiten und im vierten Fall ist diese Menge leer. Im dritten Fall gibt es einen gemeinsamen Punkt im $\mathbb{R}^4$.

Um zu prüfen, welcher Fall eintritt, kannst du das Gleichungssystem der zwei Parametergleichungen von F_M und F_N lösen und erhältst so eine Aussage über die Lagebeziehung:

Hat das LGS keine Lösung, so sind die Ebenen parallel. Ergibt sich eine wahre Aussage für alle vier Koordinaten, so sind die Ebenen identisch. Erhältst du eine Lösung, ist dies der Schnittpunkt.

Gleichsetzen der Parametergleichungen ergibt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jede Zeile kann nun als Gleichung betrachtet werden. Es folgt das Gleichungssystem aus vier Gleichungen mit den Unbekannten r, s, t und u:

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 4 + r + s & = & 2 + 2u \\
\text{II} & 4 + 2s & = & 5 + t + u \\
\text{III} & 8 + r + 3s & = & 5 + t + u \\
\text{IV} & -1 + r + 2s & = & -1 + t + 2u
\end{array}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist angegeben mit $r = -2$, $s = -2$, $t = -4$ und $u = -1$.

Es gibt also einen eindeutigen Punkt S im $\mathbb{R}^4$, indem sich die beiden Ebenen schneiden. Diesen kannst du durch Einsetzen in eine der Parametergleichungen ermitteln:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2-2 \\ 4+0-4 \\ 8-2-6 \\ -1-2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

F_M und F_N schneiden sich also im Punkt $S(0 \mid 0 \mid 0 \mid -7)$.

Warum schneiden sich zwei „Ebenen“ in nur einem Punkt? Dies ist möglich, weil wir uns im $\mathbb{R}^4$ befinden und das Gleichungssystem, das es zu lösen gilt, um die Lagebeziehung zu ermitteln, vollständig bestimmt ist. Eine Entsprechung im $\mathbb{R}^3$ gibt es nicht: Geraden liefern überbestimmte und Ebenen liefern unterbestimmte Gleichungssysteme.