B2 - Analysis

1.1 Die Funktion f_a ist eine Exponentialfunktion, die für alle Werte im Exponenten positiv ist, nie Null wird und somit keine Nullstellen besitzt.

1.2
$$\begin{array}{rcll} f_a'(t) &=& (a-0,6t)\mathrm{e}^{at-0{,}3t^2} & \text{| (Kettenregel)} \\ f_a''(t) &=& -0,6\mathrm{e}^{at-0{,}3t^2}+(a-0,6t)^2\mathrm{e}^{at-0{,}3t^2} & \text{| (Produkt- und Kettenregel)} \\ &=& \mathrm{e}^{at-0{,}3t^2}(-0,6+(a-2\cdot 0,3t)^2) & \\ &=& \mathrm{e}^{at-0{,}3t^2}(a^2-1,2at+0,36t^2-0,6) & \end{array}$$

1.3 **Hinreichende Bedingung für einen Hochpunkt:** $f_a'(t)=0$ und $f_a''(t)<0$

$$\begin{array}{rcll} f_a'(t) &=& 0 & \\ (a-2\cdot 0,3t)\mathrm{e}^{at-0{,}3t^2} &=& 0 & |:(\mathrm{e}^{at-0{,}3t^2})\neq 0 \\ a-2\cdot 0,3t &=& 0 & |-a \\ -2\cdot 0,3t &=& -a & |:(-0,6) \\ t &=& \dfrac{5}{3}a & |:(-0,6) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_a''\left(\dfrac{5}{3}a\right) &=& \mathrm{e}^{a(\frac{5}{3}a)-0{,}3(\frac{5}{3}a)^2}\left(a^2-1,2a\left(\dfrac{5}{3}a\right)+0,36\left(\dfrac{5}{3}a\right)^2-0,6\right) \\ &=& \mathrm{e}^{a(\frac{5}{3}a)-0{,}3(\frac{5}{3}a)^2}\left(a^2-1,2a\left(\dfrac{5}{3}a\right)+0,36\left(\dfrac{5}{3}a\right)^2-0,6\right) \\ &=& \mathrm{e}^{a(\frac{5}{3}a)-0{,}3(\frac{5}{3}a)^2}(a^2-2a^2+a^2-0,6) \\ &=& -0,6\cdot\mathrm{e}^{a(\frac{5}{3}a)-0{,}3(\frac{5}{3}a)^2}<0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_a\left(\dfrac{5}{3}a\right) &=& \mathrm{e}^{a\cdot(\frac{5}{3}a)-0{,}3\cdot(\frac{5}{3}a)^2} \\ &=& \mathrm{e}^{\frac{5}{3}a^2-\frac{5}{6}a^2} \\ &=& \mathrm{e}^{\frac{5}{6}a^2} \end{array}$$

Jeder Graph der Schar f_a hat im Punkt $HP\left(\frac{5}{3}a \mid \mathrm{e}^{\frac{5}{6}a^2}\right)$ einen Hochpunkt.

Funktionsgleichung der Ortskurve der Hochpunkte:

t nach a umformen:

$t=\frac{5}{3}a \Leftrightarrow a=\frac{3}{5}t$

a in y einsetzen:

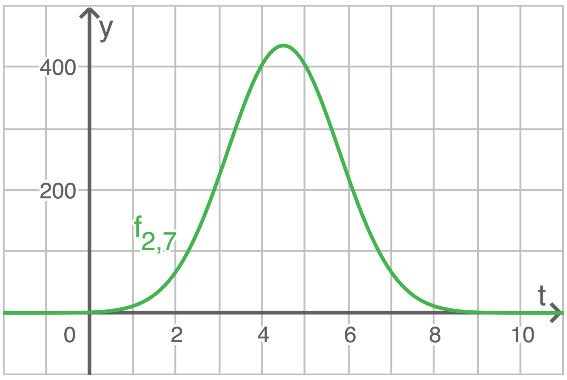
$$y = \mathrm{e}^{\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}t\right)^2} = \mathrm{e}^{\frac{3}{10}t^2}$$

1.4 (1) Es wird der Funktionswert an einer beliebigen Stelle im Abstand h rechts der Extremstelle berechnet.

(2) Es wird der Funktionswert an einer beliebigen Stelle im Abstand h links der Extremstelle berechnet.

(3) Der Funktionswert an einer belieben Stelle im Abstand h rechts der Extremstelle ist gleich dem Funktionswert links der Extremstelle im selben Abstand h. Dadurch wird klar, dass die Graphen der Funktionen der Schar f_a zu einer parallelen zur y-Achse, die durch den Hochpunkt verläuft, symmetrisch sind.

2.1 Einsetzen von $a=2,7$ in $t=\frac{5}{3}a$ und $y=\mathrm{e}^{\frac{5}{6}a^2}$ liefert, dass der höchste Bakterienstand bei $HP\left(4,5 \mid \mathrm{e}^{\frac{5}{6}\cdot 2,7^2}\right)$ liegt, also nach $4,5$ Tagen mit rund 435.000 Bakterien.



2.2 Sinkt $f_{2,7}$ unter den Wert $0,0005$, ist im Modell davon auszugehen, dass keine Bakterien mehr vorhanden sind.

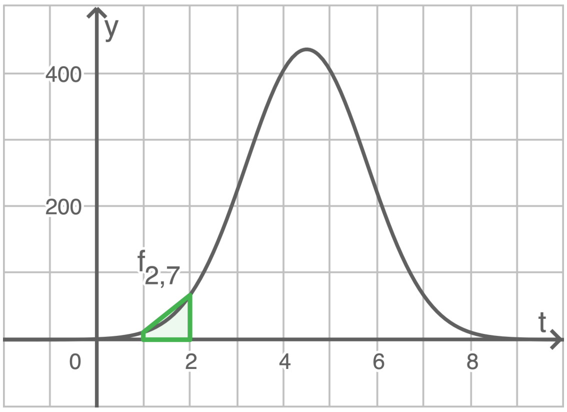
$$f_{2,7}(t)=\mathrm{e}^{2,7\cdot t-0,3\cdot t^2}=0,0005$$

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{e}^{2,7t-0,3t^2} &=& 0,0005 & \mid \ln \\
2,7t-0,3t^2 &=& \ln(0,0005) & \mid -\ln(0,0005) \\
-0,3t^2+2,7t-\ln(0,0005) &=& 0 & \mid :(-0,3) \\
t^2-9t+\frac{10}{3}\cdot\ln(0,0005) &=& 0 & (pq\text{-Formel}) \\
t_{1,2} &=& -\frac{(-9)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{(-9)}{2}\right)^2-\frac{10}{3}\cdot\ln(0,0005)} & \\
t_1 &\approx& 11,25 \quad \text{oder } t_2\approx -2,25 &
\end{array}$$

Da t_2 negativ ist und somit in der Vergangenheit liegt, ergibt diese Lösung im Zusammenhang keinen Sinn.
Es ist davon auszugehen, dass nach rund $11,25$ Tagen (11 Tagen und 6 Stunden) keine Bakterien mehr vorhanden sind.

2.3 **Monotonieverhalten des Graphen von $f_{2,7}$:**
In der Abbildung ist zu erkennen, dass der Graph von $F_{2,7}$ (streng) monoton steigend ist. Dies lässt sich durch die Ableitungsfunktion $f_{2,7}(t)$ von $F_{2,7}(t)$ erklären, die für alle t größer als Null ist.
An der Stelle des Hochpunktes des Graphen von $f_{2,7}$ ist der Graph von $F_{2,7}$ am steilsten und besitzt einen Wendepunkt.

2.4



$$\frac{f_{2,7}(2)+f_{2,7}(1)}{2} \approx \frac{66,69+11,02}{2} \approx 39$$

Die mittlere Anzahl der Bakterien während des zweiten Tages nach Beobachtungsbeginn beträgt ungefähr 39000 Bakterien.

2.5
$$m = \frac{1}{2-1} \cdot \int_1^2 f_{2,7}(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^2 \mathrm{e}^{2,7\cdot t - 0,3\cdot t^2}\ \mathrm{d}t \approx 32$$

Die mittlere Anzahl der Bakterien während des zweiten Tages nach Beobachtungsbeginn beträgt ungefähr 32000 Bakterien.

2.6 Beim Anlegen einer Sekante in einem bestimmten Intervall $[a;b]$ an den Graphen der Funktion, liegt bei einer Linkskrümmung des Graphen die Sekante oberhalb des Graphen, wodurch der Flächeninhalt des Trapezes deutlich höhere Werte, als die genaue Berechnung mithilfe des Integrals liefert.
Bei einer Rechtskrümmung des Graphen liegt die Sekante unterhalb des Graphen, sodass bei der Berechnung des Flächeninhalts kleinere Werte bestimmt werden.
Beim Krümmungswechsel (Wendestelle) liegt die Sekante allerdings teils unterhalb, teils oberhalb des Graphen, sodass hier ein Intervall der Länge 1 existiert, in dem der Näherungswert durch die Trapezfläche exakt denselben Wert annimmmt, wie durch die Berechung des Mittelwerts m für das Intervall. Aus Symmetriegründen des Graphen von $f_{2,7}$, der zwei Wendestellen besitzt, gibt es somit genau zwei solche Intervalle, in denen die beschriebene Eigenschaft zutrifft.

3.1 Der Wert in der Wurzel darf nicht < 0 sein.

$$1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x^2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Der Definitionsbereich der Funktion h ist somit das Intervall $[-1;1]$.

3.2
$$\begin{array}{lll} V &=& \pi\cdot\displaystyle\int_{-1}^{1}(0,5\cdot\sqrt{1-x^2})^2\;\mathrm{d}x \\ &=& 2\pi\cdot\displaystyle\int_{0}^{1}(0,5\cdot\sqrt{1-x^2})^2\;\mathrm{d}x \\ &=& 2\pi\cdot\displaystyle\int_{0}^{1}0,25\cdot(1-x^2)\;\mathrm{d}x \\ &=& 0,5\pi\cdot\left[x-\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &=& 0,5\pi\cdot\left[1-\dfrac{1}{3}\right] \\ &=& \dfrac{\pi}{3} \end{array}$$

$$\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2}{0,01}\approx 209,4$$

Die Tablette enthält etwa $209,4\,\mathrm{mg}$ Antibiotikum.