A2 - Analysis

1.1 Extremstelle bestätigen

Es gilt $g_a(x) = \sqrt{a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1\cdot a} = (a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1\cdot a)^{\frac{1}{2}}$.

1. Schritt: Ableitung bilden

Mit Ketten- und Produktregel folgt für $g_a(x)$:

$$\begin{aligned} g_a'(x) &= \frac{1}{2}\cdot (a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1\cdot a)^{-\frac{1}{2}}\cdot (a\cdot x\cdot (-1)\cdot \mathrm{e}^{-x}+a\cdot \mathrm{e}^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{\sqrt{a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1\cdot a}}\cdot (-x+1)\cdot a\cdot \mathrm{e}^{-x} \\ &= \frac{(-x+1)\cdot a\cdot \mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1\cdot a}} \end{aligned}$$

2. Schritt: Notwendige Bedingung für Extremstellen anwenden

$$\begin{aligned} g_a'(x) &= 0 \\ \frac{(-x+1)\cdot a\cdot \mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1\cdot a}} &= 0 \quad \mid \cdot 2\sqrt{a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1\cdot a} \\ (-x+1)\cdot a\cdot \mathrm{e}^{-x} &= 0 \quad \mid :(a\cdot \mathrm{e}^{-x}) \end{aligned}$$

Da $a\cdot \mathrm{e}^{-x}\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, folgt mit dem Satz vom Nullprodukt:

$$\begin{aligned} -x+1 &= 0 \quad \mid +x \\ 1 &= x \end{aligned}$$

$x=1$ erfüllt die notwendige Bedingung für Extremstellen und ist unabhängig von a. Da laut Aufgabenstellung auf den Nachweis der hinreichenden Bedingung verzichtet werden kann, ist $x=1$ für jedes $a\in\mathbb{R}$ mit $a>0$ eine Extremstelle von g_a.

1.2 Parameterwert bestimmen

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $H(1\mid a)$ in die Funktionsgleichung von g_a liefert:

$$\begin{array}{rcll} g_a(1) & = & a & \\ \sqrt{a\cdot 1\cdot \mathrm{e}^{-1}+0,1\cdot a} & = & a & \\ \sqrt{a\cdot\left(\mathrm{e}^{-1}+0,1\right)} & = & a & \mid{}^2 \\ a\cdot\left(\mathrm{e}^{-1}+0,1\right) & = & a^2 & \mid -a^2 \\ a\cdot\left(\mathrm{e}^{-1}+0,1\right)-a^2 & = & 0 & \\ a\cdot\left(\mathrm{e}^{-1}+0,1-a\right) & = & 0 & \end{array}$$

Anwendung des Satzes vom Nullprodukt liefert $a_1=0$ und:

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{e}^{-1}+0,1-a & = & 0 & \mid +a \\ \mathrm{e}^{-1}+0,1 & = & a_2 & \\ 0,47 & \approx & a_2 & \end{array}$$

Da $a>0$ gefordert ist, ist der gesuchte Wert $a\approx 0,47.$

2. **Asymptote bestimmen**

Die Berechnung des Grenzwertes $\lim\limits_{x\to\infty} g_a(x)$ liefert:

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to\infty} g_a(x) & = & \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1\cdot a} \\ & = & \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{a}\cdot\sqrt{x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1} \\ & = & \sqrt{a}\cdot \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1} \end{array}$$

Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot \mathrm{e}^{-x}\right)=0,$ da der lineare Term langsamer gegen unendlich strebt als die Exponentialfunktion gegen Null. Somit folgt:

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to\infty} g_a(x) & = & \sqrt{a}\cdot\sqrt{0+0,1} \\ & = & \sqrt{0,1a} \end{array}$$

Die Graphen von g_a nähern sich für $x\to\infty$ der Asymptote $y=\sqrt{0,1a}$ an.

3. **Stammfunktion nachweisen**

Durch die Verwendung von partieller Integration wird eine Stammfunktion von $\left(g_a(x)\right)^2$ wie folgt bestimmt:

$$\int_a^b \left(f(x)\cdot g'(x)\right)\,\mathrm{d}x=\left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
\int \left(g_a(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x &= \int \left(\sqrt{a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1\cdot a}\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1\cdot a\right) \,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}\right) \,\mathrm{d}x + \int \left(0,1\cdot a\right) \,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}\right) \,\mathrm{d}x + 0,1\cdot a\cdot x \\
&= a\cdot x\cdot (-1)\cdot \mathrm{e}^{-x} - \int \left(a\cdot (-1)\cdot \mathrm{e}^{-x}\right) \,\mathrm{d}x + 0,1\cdot a\cdot x \\
&= -a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x} + \int \left(a\cdot \mathrm{e}^{-x}\right) \,\mathrm{d}x + 0,1\cdot a\cdot x \\
&= -a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x} + a\cdot(-1)\cdot \mathrm{e}^{-x} + 0,1\cdot a\cdot x + C \\
&= a\cdot(-x-1)\cdot \mathrm{e}^{-x} + 0,1\cdot a\cdot x + C
\end{aligned}
$$

Mit $C=0$ folgt, dass $G_a(x) = a\cdot(-x-1)\cdot \mathrm{e}^{-x} + 0,1\cdot a\cdot x$ eine Stammfunktion von $\left(g_a(x)\right)^2$ ist.

4. **Nachweisen, dass alle Funktionen der Schar die gleiche Nullstelle haben**

$$
\begin{aligned}
g_a(x) &= 0 \\
\sqrt{a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1\cdot a} &= 0 \qquad \mid\ ^2 \\
a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1\cdot a &= 0
\end{aligned}
$$

Da $a>0$, darf auf beiden Seiten durch a geteilt werden und es folgt:

$$
x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1 = 0
$$

Diese Gleichung hängt nicht mehr von a ab und hat laut Aufgabenstellung genau eine Lösung. Somit haben alle Funktionen g_a die gleiche Nullstelle.

5.1 **Volumen des Glaskörpers berechnen**

Das Volumen V eines solchen Rotationskörpers im Intervall $[a;b]$ wird mit folgender Formel berechnet:

$$
V = \pi\cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x
$$

Die Berechnung des Volumens mit den Ergebnissen aus den vorherigen Aufgabenteilen, wie z.B. einer Stammfunktion von g_{20}, liefert:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_{-0,09}^{9} \left(g_{20}(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \left[20 \cdot (-x-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} + 0,1 \cdot 20 \cdot x\right]_{-0,09}^{9} \\
&= \pi \cdot \left[(-20x-20) \cdot \mathrm{e}^{-x} + 2 \cdot x\right]_{-0,09}^{9} \\
&= \pi \cdot \left((-20 \cdot 9 - 20) \cdot \mathrm{e}^{-9} + 2 \cdot 9 - \left((-20 \cdot (-0,09) - 20) \cdot \mathrm{e}^{-(-0,09)} + 2 \cdot (-0,09)\right)\right) \\
&= \pi \cdot \left(-200 \cdot \mathrm{e}^{-9} + 18 - \left(-18,2 \cdot \mathrm{e}^{0,09} - 0,18\right)\right) \\
&= \pi \cdot \left(-200 \cdot \mathrm{e}^{-9} + 18 + 18,2 \cdot \mathrm{e}^{0,09} + 0,18\right) \\
&= \pi \cdot \left(-200 \cdot \mathrm{e}^{-9} + 18,2 \cdot \mathrm{e}^{0,09} + 18,18\right) \\
&\approx 119,6 \text{ [VE]}
\end{aligned}$$

Der Glaskörper hat ein Volumen von ca. $119,6\,\mathrm{cm}^3$.

Maximalen Umfang des Glaskörpers berechnen

g_{20} stellt den Radius des Glaskörpers dar. An der Stelle an der der Funktionswert von g_{20} sein Maximum annimmt, ist der Umfang des Glaskörpers am größten. Die Bestimmung des Funktionswertes r an der Extremstelle $x = 1$ liefert:

$$\begin{aligned}
r &= g_{20}(1) \\
&= \sqrt{20 \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^{-1} + 0,1 \cdot 20} \\
&= \sqrt{20 \cdot \mathrm{e}^{-1} + 2}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung für den Umfang:

$$\begin{aligned}
U &= 2 \cdot \pi \cdot r \\
&= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{20 \cdot \mathrm{e}^{-1} + 2} \\
&\approx 19,22\,[\mathrm{cm}]
\end{aligned}$$

Der maximale Umfang des Glaskörpers beträgt ca. $19,22\,\mathrm{cm}$.

5.2 Rechnerischen Ansatz entwickeln

Ist das Glas bis zur Stelle t gefüllt, wird das entsprechende Volumen mit Hilfe eines Rotationsvolumens wie in Aufgabe 5.1 berechnet.

Es gilt also $V = 20\ \mathrm{cm}^3$, sodass folgt:

$$
\begin{aligned}
V &= 20 \\
\pi \cdot \int_{-0,09}^{t} \left(g_{20}(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x &= 20 \\
\pi \cdot \left[20 \cdot (-x-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} + 0,1 \cdot 20 \cdot x\right]_{-0,09}^{t} &= 20 \\
\pi \cdot \left[20 \cdot (-x-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} + 2 \cdot x\right]_{-0,09}^{t} &= 20
\end{aligned}
$$

6. **Phänomen erklären**

Bei der Berechnung des Rotationsvolumens wird, anders als bei der Berechnung des Flächeninhalts, über den quadrierten Funktionsterm integriert.

Die Erklärung lautet demnach:

Große Abweichungen der Funktionswerte nach oben haben einen größeren Einfluss auf das Volumen als auf den Flächeninhalt.
Die Fläche, die nur in A_1 und nicht in A_2 liegt, ist im Bereich $0 \leq x \leq 1$ deutlich über dem Graphen von f. Im Ausgleich dafür schließt der Graph von f im Bereich von ungefähr $-0,9 \leq x \leq -0,09$ mit der x-Achse eine Fläche im positiven y-Bereich ein, welche größer als die vorherige ist. Da diese Fläche im Vergleich zur ersten Fläche deutlich näher an der x-Achse liegt, hat sie einen kleineren Einfluss auf das Rotationsvolumen und es folgt $V_1 > V_2$.