A1 - Analysis

1 In einem Nationalpark soll eine neue Tierart angesiedelt werden. Dafür werden zum Zeitpunkt $t=0$ Tiere ausgewildert, von denen einige bereits trächtig sind. Die mögliche Entwicklung der Geburtenrate dieser Tiere kann durch geeignete Funktionen der drei Funktionsscharen f_a, f_b und f_c modelliert werden. Dabei gibt $f_a(t)$, $f_b(t)$ und $f_c(t)$ jeweils die Geburtenrate in Tiere/Jahr in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren nach der Auswilderung an. Es gilt $a,b,c>0$ sowie $t\geq 0$.

Modell A: $f_a(t)=\dfrac{a}{1+4\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t}}$

Modell B: $f_b(t)=\dfrac{10}{1+b\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t}}$

Modell C: $f_c(t)=10\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-c\cdot t}+10$

In den Abbildungen 1 bis 3 in Material 1 sind jeweils einige Graphen der Funktionsscharen f_a, f_b und f_c dargestellt.

Material 1

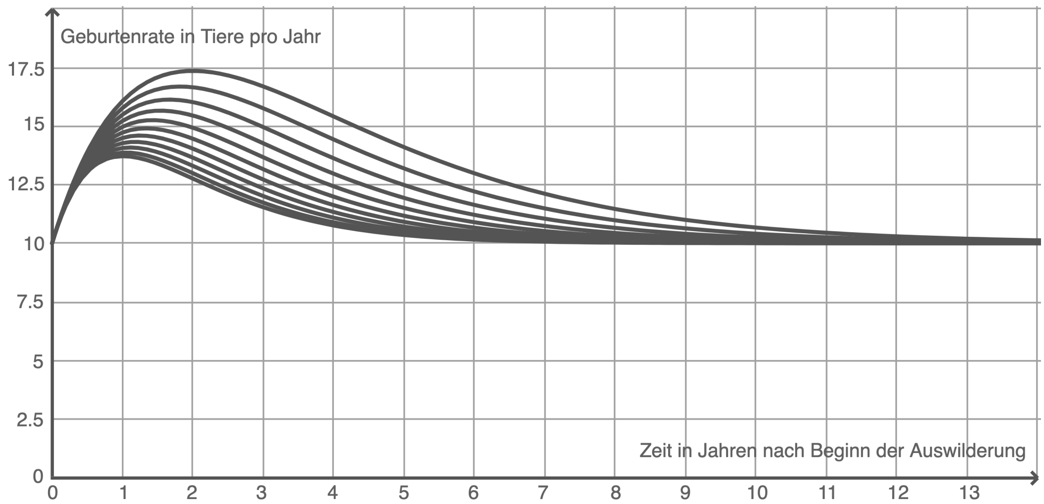

Abb. 1

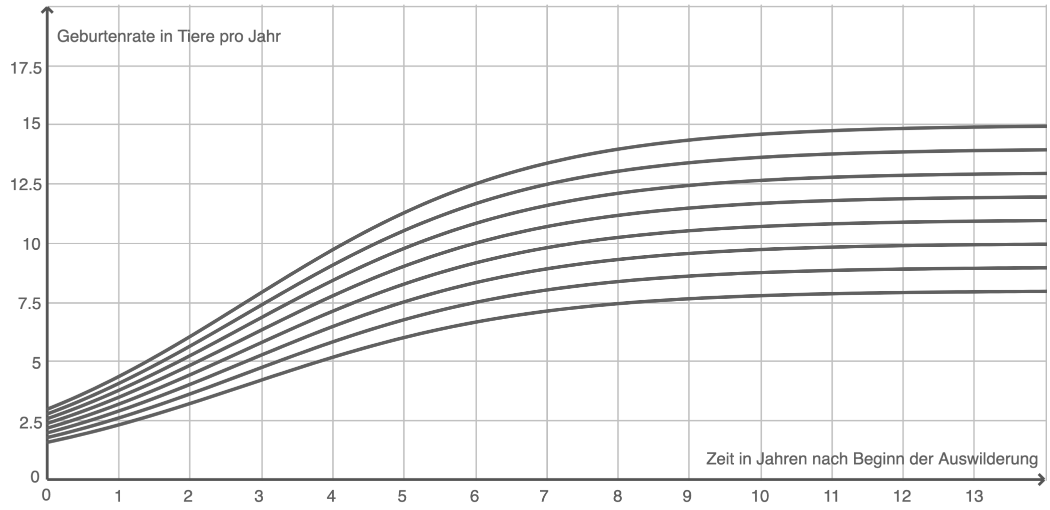

Abb. 2

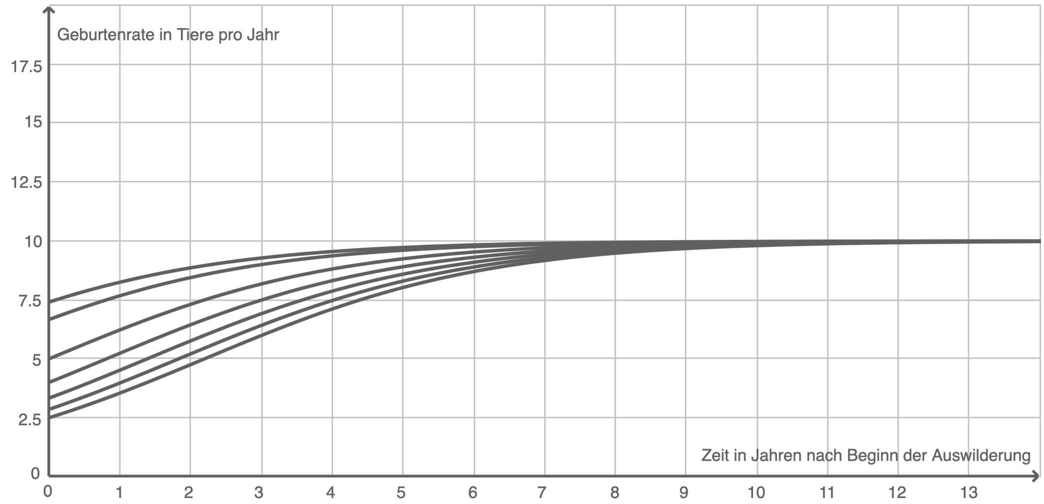

Abb. 3

1.1 Bestimme ohne Verwendung der Graphen für die Modelle A, B und C jeweils die Geburtenrate zum Zeitpunkt der Auswilderung sowie die langfristige Entwicklung der Geburtenrate. Gib für die Abbildungen 1 bis 3 aus Material 1 jeweils an, welchem der drei Modelle A, B und C sie zuzuordnen sind.

(6 BE)

1.2 Beschreibe unter Berücksichtigung deiner Ergebnisse aus Aufgabe 1.1, welchen Einfluss die Scharparameter a, b und c jeweils auf die Geburtenrate zum Zeitpunkt der Auswilderung sowie auf die langfristige Entwicklung der Geburtenrate haben.

(3 BE)

2 Im Folgenden soll für die Modellierung der Geburtenrate das Modell C mit der zugehörigen Funktionsgleichung f_c verwendet werden.
Die Gleichung der ersten Ableitung $f_c'(t) = \mathrm{e}^{-c\cdot t} \cdot (10 - 10 \cdot c \cdot t)$ kann ohne Nachweis verwendet

werden.

2.1 Berechne die Wendepunkte der Schar f_c.

Hinweis: Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist ausreichend.

Beschreibe die Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang.

[Zur Kontrolle: $W\left(\frac{2}{c} \mid \frac{20}{c\cdot e^2}+10\right)$]

(7 BE)

2.2 Die Wendepunkte aller Graphen der Schar liegen auf einer Kurve, der sogenannten Ortskurve. Leite für diese Ortskurve der Wendepunkte die zugehörige Funktionsgleichung her und bestätige, dass alle Wendepunkte auf einer Geraden liegen.

(4 BE)

3 Bei der Betrachtung der Populationsentwicklung ist neben der Geburtenrate auch die Sterberate zu berücksichtigen. Die Population wurde ab dem Zeitpunkt der Auswilderung über 10 Jahre beobachtet. Die Entwicklung der Geburtenrate soll durch die Funktion f_1 der Schar f_c aus Aufgabe 1 mit $f_1(t) = 10\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-t}+10$ modelliert werden, die Entwicklung der Sterberate durch die Funktion s mit $s(t) = 10\cdot t\cdot e^{-2\cdot t}+0,1\cdot t+10.$

Die Graphen der Funktionen f_1 und s sind in Material 2 dargestellt.

Material 2

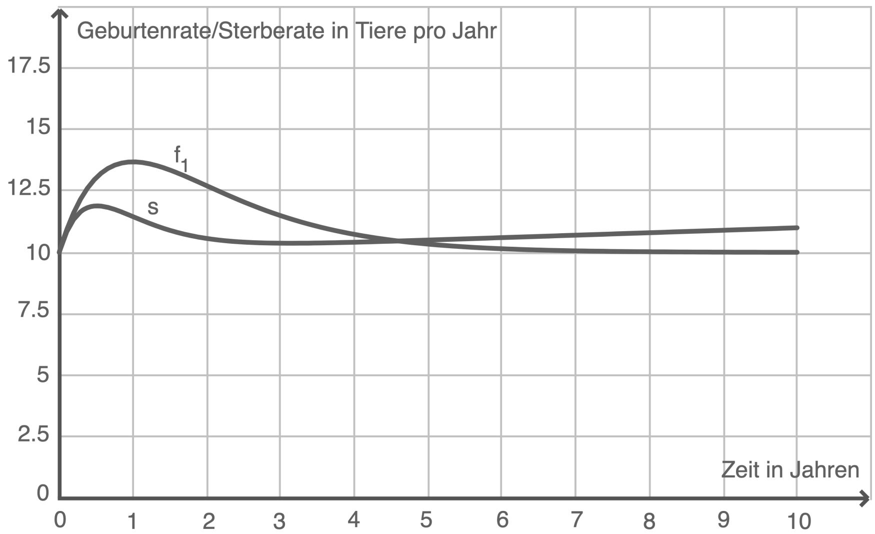

Abb. 4

3.1 Leite mit einer geeigneten Integrationsmethode die Gleichung einer Stammfunktion F_1 der Funktion f_1 her und benenne die von dir verwendete Integrationsmethode.

[Zur Kontrolle: $F_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\cdot(-10\cdot t-10)+10\cdot t$]

(5 BE)

3.2 Berechne die Anzahl der Geburten in den ersten 10 Jahren nach der Auswilderung.

(4 BE)

3.3 Erläutere zunächst ohne Verwendung des Sachzusammenhangs die einzelnen Zeilen der unten dargestellten Rechnung. Deute anschließend den Ansatz in Zeile (1) sowie den Wert t_1 jeweils im Sachzusammenhang.

(1) $d(t) = 10t \cdot \mathrm{e}^{-t} + 10 - \left(10t \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot t} + 0,1 \cdot t + 10\right)$

(2) $d'(t) = \mathrm{e}^{-t} \cdot (10 - 10t) - \left(\mathrm{e}^{-2 \cdot t} \cdot (10 - 20t) + 0,1\right)$

(3) $0 = \mathrm{e}^{-t} \cdot (10 - 10t) - \left(\mathrm{e}^{-2 \cdot t} \cdot (10 - 20t) + 0,1\right) \Rightarrow t_1 \approx 1,4$

(4) $d''(t_1) < 0$

(5 BE)

3.4 Berechne die drei Zeitpunkte, zu denen sich die Größe der Population gemäß der vorgenommenen Modellierung nicht verändert hat.
Hinweis: Ersetze an geeigneter Stelle e^{-t} durch z.

(6 BE)