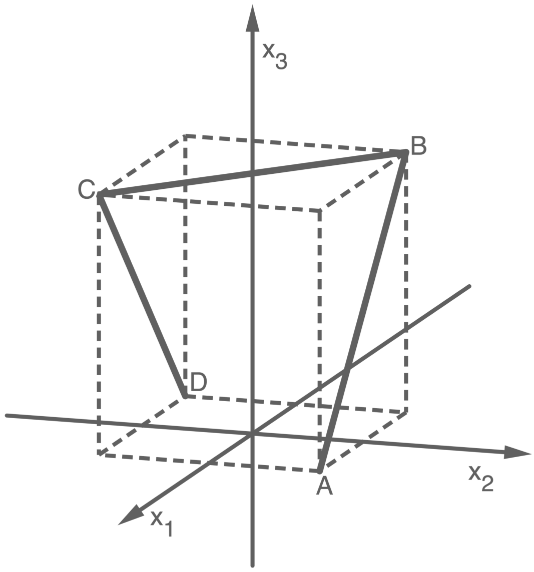
C1.1 - Lineare Algebra/Analytische Geometrie

1 Die Abbildung in Material 1 zeigt das sogenannte Saarpolygon, ein im Inneren begehbares Denkmal zur Erinnerung an den stillgelegten Kohlebergbau im Saarland. Das Saarpolygon kann in einem Koordinatensystem modellhaft durch den Streckenzug dargestellt werden, der aus den drei Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ mit $A(11 \mid 11 \mid 0)$, $B(-11 \mid 11 \mid 28)$, $C(11 \mid -11 \mid 28)$ und $D(-11 \mid -11 \mid 0)$ besteht (Material 2). A, B, C und D sind Eckpunkte eines Quaders. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Material 1



Material 2

1.1 Begründe, dass die Punkte B und C symmetrisch bezüglich der x_3-Achse liegen.

(2 BE)

1.2 Berechne die Länge des Streckenzugs in der Wirklichkeit.

(3 BE)

2 Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C, die Ebene F die Punkte B, C und D.

2.1 Gib eine Gleichung der Ebene E in Parameterform an.
Berechne eine Gleichung von E in Koordinatenform.
[Zur Kontrolle: $14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$ ist eine mögliche Koordinatengleichung der Ebene E.]

(4 BE)

2.2 Berechne die Größe φ des Winkels, unter dem E die x_1-x_2-Ebene schneidet.
Gib einen Term an, mit dem aus φ die Größe des Winkels zwischen den Ebenen E und F berechnet werden kann.

(5 BE)

2.3 Die Ebene E teilt den Quader in zwei Teilkörper. Bestimme den Anteil des Volumens des pyramidenförmigen Teilkörpers am Volumen des Quaders, ohne die Volumina zu berechnen.

(3 BE)

3.1 Das Saarpolygon wird aus verschiedenen Blickrichtungen betrachtet. Die Abbildungen 1 und 2 in Material 3 stellen das Saarpolygon für zwei Blickrichtungen schematisch dar.
Gib zu jeder der beiden Abbildungen 1 und 2 einen möglichen Vektor an, der die zugehörige Blickrichtung beschreibt.
Stelle das Saarpolygon schematisch für eine Betrachtung von oben dar.

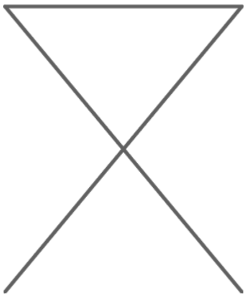


Abb. 1

Abb. 2

Material 3

(4 BE)

3.2 Der Punkt $P(0 \mid 0 \mid h)$ liegt innerhalb des Quaders und hat von den drei Strecken $\overline{AB}, \overline{BC}$ und $\overline{CD}$ den gleichen Abstand.
Das folgende Gleichungssystem liefert den Wert von h :

$$\text{I} \qquad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}, r \in [0;1]$$

$$\text{II} \qquad \overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\text{III} \qquad \left|\overline{PQ}\right| = 28 - h$$

Erläutere die Überlegungen, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von h zugrunde liegen.

(4 BE)

4 Eine Drohne (unbemanntes Luftfahrzeug mit Kamera) fliegt geradlinig. Im Modell liegt ihre Flugbahn auf der Geraden $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Der Parameter t beschreibt die Zeit in Sekunden nach dem Start bei $t = 0$. Der Erdboden liegt im Modell in der x_1-x_2-Ebene.

4.1 Erläutere, warum die Drohne vom Erdboden startet und sich im Steigflug befindet.
Bestimme den Steigungswinkel der Flugbahn.

(5 BE)

4.2 Untersuche rechnerisch, ob die Drohne mit der Seitenkante $\overline{AB}$ des Saarpolygons kollidiert.

(5 BE)

4.3 Zeige rechnerisch, dass die Drohne in einer Sekunde eine Strecke von ungefähr 5,1 Metern zurücklegt, und berechne die Geschwindigkeit der Drohne in der Einheit Kilometer pro Stunde.

(4 BE)

4.4 Die Sonne scheint zu einer bestimmten Uhrzeit in Richtung des Vektors $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

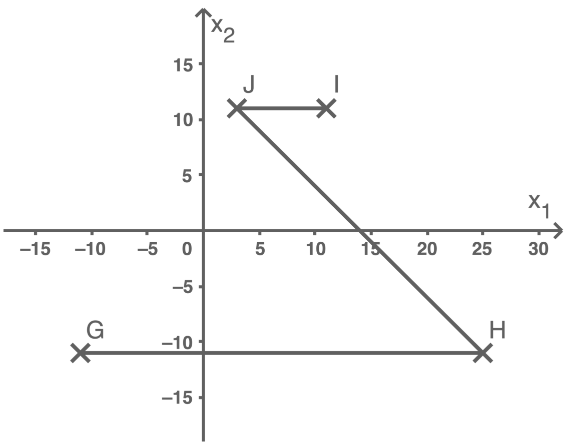
4.4.1 Ermittle die Gleichung der Schattengeraden g', auf welcher sich der Schatten der Drohne in der x_1-x_2-Ebene bewegt.

(4 BE)

4.4.2 Begründe, dass der Schatten der Strecke $\overline{BC}$ des Saarpolygons auf dem Erdboden genau so lang ist wie die Strecke $\overline{BC}$ selbst.

(3 BE)

4.4.3 In der Abbildung in Material 4 sind in der x_1-x_2-Ebene die Eckpunkte eines Trapezes $GHIJ$ sowie der Schatten des Saarpolygons dargestellt.



Material 4

Gib für jeden der Punkte A, B, C, D des Saarpolygons an, welcher der Eckpunkte des Trapezes den zugehörigen Schattenpunkt darstellt.

(4 BE)