C2 - Stochastik

1.1 Entweder ist ein Ei weiß oder braun, demnach gibt es bei jedem Versuch genau zwei mögliche Ergebnisse. Auf der Hühnerfarm werden viele Eier produziert, deshalb kannst du davon ausgehen, dass sich die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Farbe durch die Entnahme nicht sehr ändert, solange die Anzahl der entnommenen Eier klein ist gegenüber der Gesamtzahl der weißen und braunen Eier. Somit handelt es sich um eine Bernoulli-Kette.

1.2 Die Anzahl der weißen Eier wird durch X beschrieben.

$$P(E_1) = P(X=3) = B_{10;0,3}(3) \approx 0,2668$$

$$P(E_2) = P(X \leq 17) = F_{50;0,3}(17) \approx 0,7822$$

Erwartungswert $E(X) = 100 \cdot 0,3 = 30$

$$P(E_3) = P(27 \leq X \leq 33) = P(X \leq 33) - P(X \leq 26) \ = F_{100;0,3}(33) - F_{100;0,3}(26) \approx 0,5549$$

1.3 Mit diesem Ansatz wird berechnet, wie viele Eier man mindestens entnehmen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$ mindestens ein weißes Ei zu erhalten.

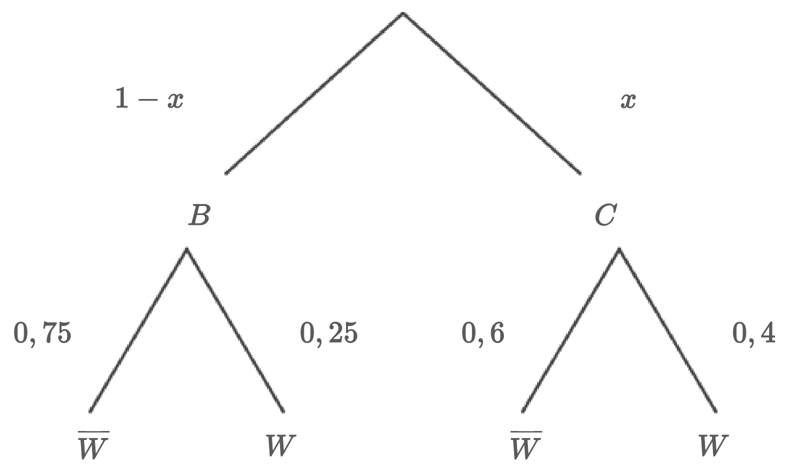
Berechnung von n:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) \geq 0,99 \ \Leftrightarrow \ P(X=0) = 0,7^n \leq 0,01$$

$$n \geq log_{0,7}(0,01) \approx 12,91$$

Also müssen mindestens 13 Eier entnommen werden.

2.1



B: Ei von Farm B
C: Ei von Farm C
W: Ei ist weiß

$x \cdot 0,6 + (1-x) \cdot 0,75 = 0,7$, also folgt $0,15x = 0,05$ und somit $x = P(C) = \frac{1}{3}$

2.2 $$P_W(C)=\frac{P(C\cap W)}{P(W)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0,4}{0,3}=\frac{4}{9}$$

3.1 $H_0: p\leq 0,3,\ H_1: p>0,3$

X: Anzahl weißer Eier
$n=200$

Es wird rechtsseitig getestet.

$$P_{H_0}(X\geq k)=1-P_{H_0}(X\leq k-1)\leq 0,05 \ \Leftrightarrow\ P_{H_0}(X\leq k-1)\geq 0,95 \ \Leftrightarrow\ F_{200;0,3}(k-1)\geq 0,95$$

$F_{200;0,3}(70)\approx 0,9458$
$F_{200;0,3}(71)\approx 0,9604$

Daraus folgt $k-1=71 \Leftrightarrow k=72$.

Der Verwerfungsbereich lautet $V=\{72,\dots,200\}$.

Die Nullhypothese wird dann verworfen, wenn der Betreiber der Farm unter 200 Eiern mindestens 72 weiße findet. Er geht dann davon aus, dass der Anteil der weißen Eier in seiner Produktion größer als $30\,\%$ ist.

3.2 Fehler zweiter Art: Aufgrund der Testergebnisse geht der Betreiber davon aus, dass der Anteil der weißen Eier höchstens $30\,\%$ beträgt, obwohl er in Wirklichkeit größer als $30\,\%$ ist.

X : Anzahl der weißen Eier, $n=200$, $p=0,35$

$$\beta=P(X\leq 71)=F_{200;0,35}(71)\approx 0,5907$$

3.3 Die Wahrscheinlichkeit $\beta(0,35)$ kann an der Stelle $p=0,35$ abgelesen werden.
Die kritische Zahl k erhöht sich, wenn das Signifikanzniveau auf $2\,\%$ erniedrigt wird. Der Verwerfungsbereich wird demnach kleiner und damit die Fehlerwahrscheinlichkeit β für den Fehler zweiter Art für jede Wahrscheinlichkeit $p>0,3$ größer, da der Annahmebereich größer ist. Der Graph verläuft für $p>0,3$ oberhalb des Graphen.

4.1 Die Wahrscheinlichkeiten werden mit dem WTR berechnet.

$P(E_4)=P(49\leq X\leq 56)\approx 0,3785$
$P(E_5)=P(X\geq 50)\approx 0,9599$
$P(E_6)=P(X\leq 51)+P(X\geq 63)\ \approx 0,0668+0,0668=0,1336$

4.2 Mit diesem Ansatz lässt sich unter Verwendung der standardisierten Normalverteilung derjenige Wert a für das Gewicht eines Eies bestimmen, für den gilt, dass höchstens $5\,\%$ aller Eier mindestens das Gewicht a besitzen:

$$1-\Phi\left(\frac{a-57}{4}\right)\leq 0,05$$
$$\Phi\left(\frac{a-57}{4}\right)\geq 0,95$$

$\Phi(1,65) \approx 0,95$, demnach gilt $\dfrac{a-57}{4} \approx 1,65$, also $a \approx 63,6$

64 ist der kleinste ganzzahlige Wert, für den die Ungleichung erfüllt wird.