

C2.1 - Stochastik

- 1 Bei der Aussaat von Raps können Landwirte aus verschiedenen Sorten mit jeweils spezifischen Eigenschaften wählen.
Zunächst wird der Fall betrachtet, dass ein Landwirt Saatgut einer Sorte **A** ausgebracht hat, die unter den vorliegenden Bedingungen mit einer Wahrscheinlichkeit von **95 %** keimt.
 - 1.1 Es werden dem Boden zufällig einige Körner entnommen und untersucht, ob diese gekeimt haben. Erläutere die untenstehende Gleichung sowie die einzelnen Faktoren des Terms auf der rechten Seite der Gleichung in diesem Sachzusammenhang. Gib den zugehörigen Zahlenwert an.

$$P(X = 55) = \binom{60}{55} \cdot 0,95^{55} \cdot 0,05^5$$
 Begründe, warum das zugrunde gelegte mathematische Modell hier angewendet werden kann. (5 BE)
 - 1.2 Bestimme die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
 E_1 : Unter **80** dem Boden zufällig entnommenen Körnern haben höchstens **4** nicht gekeimt.
 E_2 : Unter **80** dem Boden zufällig entnommenen Körnern weicht die Anzahl der gekeimten Körner höchstens um **2** vom zu erwartenden Wert ab. (5 BE)
 - 1.3 Der Landwirt vermutet, dass der Anteil der Samenkörner der Sorte **A**, die unter den vorliegenden Bedingungen keimen, niedriger ist als **95 %**.
 - 1.3.1 Entwickle einen Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von **5 %**, mit dem bei **250** zufällig dem Boden entnommenen Körnern die Vermutung überprüft werden könnte. Formuliere im Sachzusammenhang eine Entscheidungsregel.
Beschreibe den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang. (8 BE)
 - 1.3.2 Bestimme mithilfe deiner Entscheidungsregel aus Aufgabe 1.3.1 die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art für den Fall, dass der Anteil der Körner, die gekeimt haben, tatsächlich nur **90 %** beträgt.
Beschreibe, wie die Fehlerwahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art reduziert werden könnte, obwohl das Signifikanzniveau weiterhin eingehalten werden soll. (4 BE)
- 2 Betrachtet wird nun der Fall, dass der Landwirt sich für unterschiedliche Sorten entscheidet. Er sät auf **85 %** seiner für Raps vorgesehenen Fläche Samenkörner der Sorte **A** aus Aufgabe 1. Auf der restlichen für Raps vorhergesehenen Fläche sät er Samenkörner der Sorte **B**, die unter den vorliegenden Bedingungen mit einer Wahrscheinlichkeit von **90 %** keimen.
Die verwendeten Mengen an Saatgut sind hierbei proportional zur Größe der genutzten Flächen.
 - 2.1 Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein nach der Aussaat dem Boden zufällig entnommenes Korn,

welches gekeimt hat, ein Korn der Sorte **B** ist.

(4 BE)

- 2.2 Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein nach der Aussaat dem Boden zufällig entnommenes Korn nicht gekeimt hat, **5,75 %** beträgt.

(2 BE)

- 2.3 Eine junge Pflanze, die aus einem Samenkorn durch Keimung entsteht, wird als Sämling bezeichnet. In manchen Jahren werden diese von Schnecken angefressen. Der Landwirt stellt fest, dass insgesamt **20 %** aller Rapssämlinge angefressen wurden und insbesondere, dass **30 %** der Rapssämlinge der Sorte **B** angefressen wurden.

Erläutere im Sachzusammenhang, was im Folgenden berechnet wird:

$$\frac{0,15 \cdot 0,9 \cdot 0,3}{0,9425 \cdot 0,2}$$

(4 BE)

- 3 Bei der Aussaat von Raps gibt es die Varianten Drillsaat und Einzelkornsaat. Bei letzterer erhofft man sich neben einer Reduzierung der benötigten Menge an Saatgut durch eine gleichmäßige Verteilung des Saatguts auf das Feld besonders gute Erträge. Die Körner werden einzeln durch eine Maschine in Reihen auf dem Feld abgelegt. Im Untersuchungsbericht eines Modellversuchs wird festgestellt, dass die Zufallsgröße **Y**: „Abstand zwischen zwei benachbarten Körnern innerhalb einer Reihe“ normalverteilt ist. Ferner habe man ermittelt, dass der Mittelwert **5 cm** und die Standardabweichung **1,5 cm** beträgt.

Bestimme jeweils, mit welcher Wahrscheinlichkeit für einen zufällig ausgewählten und gemessenen Abstand zweier benachbarter Körner gemäß dieses Untersuchungsberichts Folgendes gilt:

A : Der Abstand weicht um maximal **1 cm** vom Mittelwert ab.

B : Der Abstand weicht um mindestens **2 cm** vom Mittelwert ab.

(5 BE)

4

Abstand (in cm) im Intervall	Absolute Häufigkeit
[0; 1)	60
[1; 2)	43
[2; 3)	30
[3; 4)	21
[4; 5)	15
[5; 6)	11
[6; 7)	8
[7; 8)	5

Bei einer genaueren Untersuchung der Resultate einer Drillsaatmaschine, welche die Körner ungenauer und im Mittel näher beieinander ablegt, hat man die im Material dargestellten Beobachtungen zu den Abständen benachbarter Körner gemacht. Es wird die Zufallsvariable **Z** : „Abstand zwischen zwei benachbarten Körnern innerhalb einer Reihe“ betrachtet.

$[8; 9)$	4
$[9; 10)$	3
$[10; \infty)$	0

Material 1: Häufigkeitsverteilung von Kornabständen bei Drillsaat ($n = 200$)

- 4.1 Stelle die Daten aus dem Material unter Verwendung der zugehörigen relativen Häufigkeiten in Form eines Säulendiagramms dar.

(4 BE)

- 4.2 Erläutere anhand der Daten, warum zur Beschreibung der Verteilung des Kornabstands Z eine Exponentialfunktion f der Form $f(z) = a \cdot e^{-b \cdot z}$, $a, b > 0$, für $z \geq 0$ als Dichtefunktion geeignet ist.

(2 BE)

- 4.3 Es gilt $P(0 \leq Z \leq u) = \int_0^u f(z) dz = \frac{a}{b} \cdot (1 - e^{-b \cdot u})$ und somit $\lim_{u \rightarrow \infty} (P(0 \leq Z \leq u)) = \frac{a}{b}$.

Begründe, dass hieraus $a = b$ folgt und bestätige mithilfe der relativen Häufigkeit für das Intervall $[0; 1)$, dass $a = b \approx 0,365$ gilt.

(4 BE)

- 4.4 Die Verteilung des Kornabstands Z wird nun für $z \geq 0$ durch die Dichtefunktion f mit $f(z) = 0,365 \cdot e^{-0,365 \cdot z}$ modelliert. Es gilt beispielsweise $P(0 \leq Z \leq 3) = \int_0^3 f(z) dz \approx 66,55 \%$.

Erläutere die Bedeutung dieses Ergebnisses im Sachzusammenhang und prüfe, ob dieser Wert in guter Näherung mit der Häufigkeitsverteilung im Material übereinstimmt.

(3 BE)