# A1 - Analysis

1.1 **Stammumfang zu Beginn berechnen**

$$f(0) = \frac{4}{1+20\mathrm{e}^{-0{,}05\cdot 0}} - 0,05\cdot 0 = \frac{4}{1+20\cdot 1} \approx 0,190$$

Der Stammumfang beträgt zum Beobachtungsbeginn also ungefähr $0,19$ Meter.

**Stammumfang begründen**

Es gilt: $20\mathrm{e}^{-0{,}05t} > 0$, da $\mathrm{e}^{-0{,}05t} > 0$.

Daraus folgt: $1+20\mathrm{e}^{-0{,}05t} > 1$. Also ist $\frac{4}{1+20\mathrm{e}^{-0{,}05t}} < 4$. Somit kann der Stammumfang der Tanne nicht mehr als vier Meter betragen.

1.2 $f(t) = 4\cdot(1+20\cdot\mathrm{e}^{-0{,}05t})^{-1}$

**1. Schritt: Erste Ableitung bilden**

Kettenregel zweimal anwenden:

$$f'(t) = 4\cdot(-1)\cdot(1+20\cdot\mathrm{e}^{-0.05t})^{-2}\cdot 20\mathrm{e}^{-0{,}05t}\cdot(-0,05)$$

$$f'(t) = \frac{4\cdot\mathrm{e}^{-0{,}05t}}{(1+20\mathrm{e}^{-0{,}05t})^2}$$

**2. Schritt: Zweite Ableitung bilden**

$$f''(t) = \frac{4\mathrm{e}^{-0{,}05t}\cdot(-0,05)\cdot(1+20\mathrm{e}^{-0{,}05t})^2 + 4\mathrm{e}^{-0{,}05t}\cdot(-2)\cdot(1+20\mathrm{e}^{-0{,}05t})\cdot 20\mathrm{e}^{-0{,}05t}\cdot(-0,05)}{(1+20\mathrm{e}^{-0{,}05t})^4}$$

$$f''(t) = \frac{4\mathrm{e}^{-0{,}05t}\cdot(-0,05)\cdot(1+20\mathrm{e}^{-0{,}05t}) - 4\mathrm{e}^{-0{,}05t}\cdot 2\cdot 20\mathrm{e}^{-0{,}05t}\cdot(-0,05)}{(1+20\mathrm{e}^{-0{,}05t})^3}$$

$$f''(t) = \frac{4\mathrm{e}^{-0{,}05t}\cdot(\mathrm{e}^{-0{,}05t}-0,05)}{(1+20\mathrm{e}^{-0{,}05t})^3}$$

1.3 **Zeitpunkt des stärksten Wachstums**

Die ursprüngliche Funktion gibt den Umfang des Stammes an, also wird das Wachstum durch die erste Ableitung beschrieben.
Der Zeitpunkt des stärksten Wachstums ergibt sich an der Wendestelle.

Notwendige Bedingung für Wendestellen anwenden:

$$f''(t)=\frac{4\mathrm{e}^{-0,05t}\cdot(\mathrm{e}^{-0,05t}-0,05)}{(1+20\mathrm{e}^{-0,05t})^3}=0$$

Da $(1+20\mathrm{e}^{-0,05t})^3>0$ muss gelten: $4\mathrm{e}^{-0,05t}\cdot(\mathrm{e}^{-0,05t}-0,05)=0$

Satz vom Nullprodukt anwenden:

Es gilt $4\mathrm{e}^{-0,05t}>0$ und $\mathrm{e}^{-0,05t}-0,05=0$

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{e}^{-0,05t}-0,05 &=& 0 & \mid +0,05\\
\mathrm{e}^{-0,05t} &=& 0,05 & \mid \ln(\ )\\
\ln(0,05) &=& -0,05t & \mid \cdot(-20)\\
t &\approx& 59,915 &
\end{array}$$

Das stärkste Wachstum tritt also nach etwa 60 Jahren ein.

Die Achsen müssen so skaliert werden, dass die Funktion gegen $4$ strebt und bei ca. $60$ die größte Steigung hat.

1.4 Den Wert des Integrals wird mit dem Taschenrechner bestimmt.

$$\frac{1}{10}\int_0^{10} f(t)\ \mathrm{d}t\approx 0,234\,[\mathrm{m}]$$

Das Integral selbst gibt ohne Vorfaktor den gesamten Stammumfang in den ersten zehn Jahren an. Da der Wert jedoch durch 10 geteilt wird, ergibt sich der durchschnittlichen Stammumfang pro Jahr in den ersten 10 Jahren.

2.1 **Berechnen des Stammumfangs**

$$\begin{array}{rcll}
0,6 &=& \dfrac{4}{(1+20\mathrm{e}^{-0,05t})} & \mid \cdot(1+20\mathrm{e}^{-0,05t}) \mid \cdot\frac{1}{0,6}\\
\dfrac{20}{3} &=& 1+20\mathrm{e}^{-0,05t} & \mid -1 \mid \cdot\frac{1}{20}\\
\dfrac{17}{60} &=& \mathrm{e}^{-0,05t} & \mid \ln(\ ) \mid \cdot(-20)\\
25,223 &\approx& t &
\end{array}$$

Es muss nach 25,223 Jahren eine Genehmigung zum Fällen eingeholt werden, da der Baum dann $60\ \mathrm{cm}$ Umfang erreicht hat.

2.2 **Bestimmen der Umkehrfunktion**

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{4}{1+20\mathrm{e}^{-0,05t}} && \mid \cdot (1+20\mathrm{e}^{-0,05t}) \\
y\cdot(1+20\mathrm{e}^{-0,05t}) &= 4 && \mid : y \\
1+20\mathrm{e}^{-0,05t} &= \frac{4}{y} && \mid -1 \\
20\mathrm{e}^{-0,05t} &= \frac{4}{y}-1 && \mid : 20 \\
\mathrm{e}^{-0,05t} &= \frac{\frac{4}{y}-1}{20} && \mid \ln(\ ) \\
t &= \frac{\ln\left(\frac{4-y}{20y}\right)}{-0,05}
\end{aligned}
$$

Die Umkehrfunktion lautet:

$$f^{-1} = -20\cdot\ln\left(\frac{4-t}{20t}\right).$$

Die Funktion ist umkehrbar, da sie streng monoton verläuft für $t\to\infty$ und somit jedem Wert von $t$ genau einen Funktionswert zuordnet.

3 Einsetzen:

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= c\cdot f(t)\cdot(S-f(t)) \\
\frac{4\mathrm{e}^{-0,05t}}{(1+20\mathrm{e}^{-0,05t})^2} &= c\cdot\frac{4}{1+20\mathrm{e}^{-0,05t}}\cdot\left(4-\frac{4}{1+20\mathrm{e}^{-0,05t}}\right) && \mid \text{Erweitern} \\
\frac{4\mathrm{e}^{-0,05t}}{(1+20\mathrm{e}^{-0,05t})^2} &= c\cdot\frac{4}{1+20\mathrm{e}^{-0,05t}}\cdot\frac{4+80\mathrm{e}^{-0,05t}-4}{1+20\mathrm{e}^{-0,05t}} && \mid \text{Ausmultiplizieren} \\
\frac{4\mathrm{e}^{-0,05t}}{(1+20\mathrm{e}^{-0,05t})^2} &= c\cdot\frac{4\cdot 80\cdot\mathrm{e}^{-0,05t}}{(1+20\mathrm{e}^{-0,05t})^2} && \mid \text{Linke und rechte Seite kürzen} \\
c &= \frac{1}{80}
\end{aligned}
$$