C – Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Gegeben sind die drei Punkte $A(6 \mid 3 \mid 0)$, $B(2 \mid 5 \mid 0)$ und $D(6,5 \mid 4 \mid 5)$. Eine Koordinateneinheit entspricht einem Meter.

1.1 Gib eine Parametergleichung der Ebene E_1 an, welche die Punkte A, B und D enthält.

Bestimme eine zugehörige Koordinatengleichung.

$\left[\text{zur Kontrolle: } E_1 : 2x + 4y - z = 24\right]$

(5 BE)

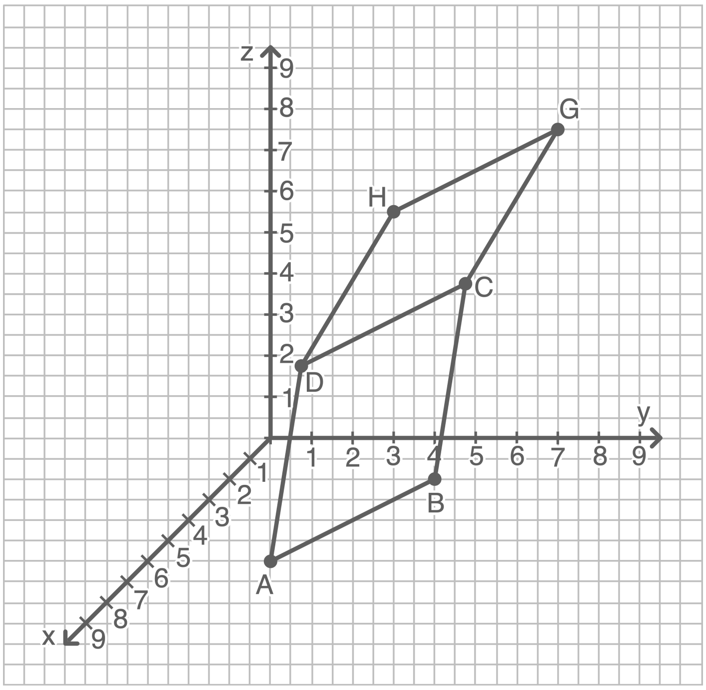
1.2 Zeige, dass der Punkt $C(2,5 \mid 6 \mid 5)$ in der Ebene E_1 liegt und gemeinsam mit den drei gegebenen Punkten ein Rechteck $ABCD$ bildet.

(4 BE)

2 In einem mathematischen Modell stellt das Rechteck $ABCD$ den unteren Teil einer Kletterwand dar.

Der obere Teil der Kletterwand besteht aus einem weiteren Rechteck, das auf die Kante $\overline{CD}$ gesetzt wird, einen Flächeninhalt von $25\,\mathrm{m}^2$ besitzt und nach vorne geneigt ist (Abbildung).

Der obere Teil der Kletterwand liegt in der Ebene $E_2 : \; 3x + 6y - 5z = 18,5.$



Blick auf die Kletterwand von vorne

2.1 Zur Bestimmung des Eckpunktes G des oberen Teils der Kletterwand wird der Ansatz im Kasten betrachtet.

Deute den Vektor $\overrightarrow{v}$ in Zeile (1) geometrisch und beschreibe das Vorgehen in Zeile (2).

Berechne ausgehend von Zeile (2) mit Hilfe des Vektors $\overrightarrow{v}$ die Koordinaten von G auf eine Nachkommastelle gerundet.

$$(1) \quad \overrightarrow{\mathrm{CD}} \times \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}, \text{ also } \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad |\overrightarrow{CD}| = 2 \cdot \sqrt{5}, \text{ also } |\overrightarrow{CG}| = 25 : (2 \cdot \sqrt{5}) = 2,5 \cdot \sqrt{5}$$

(6 BE)

2.2 Bestimme den Winkel zwischen dem oberen Teil der Kletterwand und der Vertikalen.

(3 BE)

3 Die Flugbahn einer Drohne, die für die Fernsehübertragung eines Kletterevents spektakuläre Aufnahmen an der Kletterwand erstellen soll, kann im Modell für $-1 < \mathrm{t} < 1$, $t \in \mathbb{R}$, durch die Gleichung $h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ angegeben werden.

Aus Sicherheitsgründen muss der Abstand der Drohne zur Kletterwand mindestens $4\,\mathrm{m}$ betragen.

3.1 Begründe, dass die Drohne auf der durch h beschriebenen Flugbahn ihre Höhe nicht ändert.

(2 BE)

3.2 Der Abstand eines Punktes P von einer Ebene E kann mit Hilfe der Formel $d = \left|\left(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{n_0}\right|$ ermittelt werden.

Hierbei ist $\overrightarrow{p}$ der Ortsvektor des Punktes P, $\overrightarrow{a}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes A von E und $\overrightarrow{n_0}$ ein Normalenvektor von E mit der Länge 1.

Betrachtet wird folgende Herleitung:

$$(1) \quad d(t) = \left| \left(\begin{pmatrix} 8+t+2t^2 \\ 10+t+t^2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6,5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{70}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \right|$$

$$(2) \quad d(t) \geq 4$$

$$\ldots$$

(3) 1. Fall: $d(t) = 4 \;\Rightarrow\; 12\mathrm{t}^2 + 9\mathrm{t} + 35,5 - 4 \cdot \sqrt{70} = 0$

2. Fall: $d(t) > 4 \;\Rightarrow\; 12t^2 + 9t + 35,5 - 4 \cdot \sqrt{70} > 0$

(4) Die Gleichung für den 1. Fall in Zeile (3) besitzt keine Lösungen.

Erläutere die Ansätze in den Zeilen (1) und (2) im Sachzusammenhang.

Begründe unter Zuhilfenahme der Aussage in Zeile (4), dass die Ungleichung für den 2. Fall in Zeile (3) für alle Werte von t erfüllt ist, und deute diesen Sachverhalt im Sachzusammenhang.

(5 BE)