A1 - Analysis

Aufgaben PLUS Tipps PLUS Lösungen PLUS

1.

1.1 ▶ **Nullstellen berechnen**

Um die Nullstellen der Scharfunktionen zu berechnen, setze den Funktionsterm gleich Null und löse nach x auf. Dann erhältst du die Nullstellen der Scharfunktionen in Abhängigkeit von k.

$$\begin{aligned} 0 &= f_k(x) \\ 0 &= \frac{x+k}{e^x} \quad \mid \cdot e^x \\ 0 &= x+k \quad \mid -k \\ -k &= x \end{aligned}$$

Die Nullstellen der Scharfunktionen f_k liegen bei $x_N = -k$.

▶ **Zugehörige Parameterwerte angeben**

Du weißt aus der Aufgabenstellung, dass die Graphen in Material 1 ganzzahlige Parameterwerte haben. Außerdem weißt du aus der vorigen Aufgabe, dass die Graphen der Scharfunktionen f_k Nullstellen an der Stelle $x_N = -k$ besitzen. Du kannst also die Nullstellen der Graphen in Material 1 ablesen und daraus die Parameterwerte für k folgern.
Du kannst dem Material entnehmen, dass die Graphen nacheinander die Nullstellen $x_N = -3$, -2, -1, 0 und 1 besitzen.
Demnach gehören jeweils die Parameterwerte $k = 3$, 2, 1, 0 und -1 nacheinander zu den Graphen.

1.2 ▶ **Extremstellen berechnen**

Du sollst die Extremstellen der Schar nur anhand der notwendigen Bedingung berechnen. Diese Bedingung lautet:

$$\boxed{f_k'(x_E) = 0}$$

Bilde also die erste Ableitung von f_k mit Hilfe der **Quotientenregel** und setze anschließend den Funktionsterm der ersten Ableitung gleich Null um die Extremstellen zu berechnen.

▶ **1. Schritt: Ableitung bilden**

Da der Funktionsterm von f_k durch einen Bruch dargestellt ist, kannst du hier die Quotientenregel anwenden. Diese lautet:

$$\boxed{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, \quad f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}}$$

In unserem Fall ist demnach:

- $u_k(x) = x+k$
- $v_k(x) = \mathrm{e}^x$
- $u_k'(x) = 1$
- $v_k'(x) = \mathrm{e}^x$

Damit ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= \frac{u_k'(x)\cdot v_k(x) - u_k(x)\cdot v_k'(x)}{(v_k(x))^2} \\ &= \frac{1\cdot \mathrm{e}^x - (x+k)\cdot \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{(1-x-k)\cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} \qquad \text{kürzen} \\ &= \frac{1-x-k}{\mathrm{e}^x} \end{aligned}$$

▶ **2. Schritt: Gleichsetzen**

Setze nun den Funktionsterm der ersten Ableitung von f_k gleich Null und löse nach x auf:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1-x-k}{\mathrm{e}^x} && \mid \cdot \mathrm{e}^x \\ 0 &= 1-x-k && \mid +x \\ x &= 1-k \end{aligned}$$

Die Extremstellen der Scharfunktionen f_k liegen an den Stellen $x_E = 1-k$.

▶ Wendestellen berechnen

Die Wendestellen sollst du ebenfalls nur mit der notwendigen Bedingung berechnen. Die notwendige Bedingung für Wendestellen lautet:

$$\boxed{f_k''(x_W) = 0}$$

Bilde also nun die zweite Ableitung von f_k und setze den Funktionsterm gleich Null. Zum Bilden der Ableitung kannst du wieder die **Quotientenregel** verwenden.

▶ 1. Schritt: Funktionsterm der zweiten Ableitung bilden

In diesem Fall gilt nun:

- $u_k(x) = 1-x-k$
- $v_k(x) = \mathrm{e}^x$
- $u_k'(x) = -1$
- $v_k'(x) = \mathrm{e}^x$

Dies kannst du nun wieder in die Formel einsetzen und erhältst:

$$\begin{aligned} f_k''(x) &= \frac{-1\cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \cdot (1-x-k)}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{(-1-1+x+k)\cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} && \text{kürzen} \\ &= \frac{-2+x+k}{\mathrm{e}^x} \end{aligned}$$

▶ 2. Schritt: Wendestellen bestimmen

Die Wendestellen erhältst du nun durch gleichsetzen des Funktionsterms der zweiten Ableitung von f_k mit Null:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-2+x+k}{\mathrm{e}^x} && \mid \cdot \mathrm{e}^x \\ 0 &= -2+x+k && \mid +2, -k \\ 2-k &= x \end{aligned}$$

Die Wendestellen der Scharfunktionen f_k liegen an den Stellen $x_W = 2-k$.

▶ Zeigen, dass die Extremstelle die Mitte von Null- und Wendestelle ist

Du sollst nun zeigen, dass die Extremstelle jeder Scharfunkion immer genau in der Mitte von Null- und Wendestelle liegt. Dazu kannst du die Mitte der Null- und Wendestellen berechnen und zum Schluss vergleichen, ob dies mit der Extremstelle übereinstimmt.

Die Mitte x_M zwischen zwei Funktionsstellen x_1 und x_2 ergibt sich wie folgt:

$$\boxed{x_M = \tfrac{1}{2}\cdot (x_1 + x_2)}$$

Damit ist die Mitte zwischen der Nullstelle und der Wendestelle jeder Scharfunktion gegeben durch:

$$\begin{aligned} x_M &= \tfrac{1}{2}\cdot (x_N + x_W) && \mid x_N = -k, x_W = 2-k \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot(-k+2-k) \\ &= 1-k \\ &= x_E \end{aligned}$$

Da sich die Mitte der Nullstelle und Wendestelle jeder Scharfunktion mit $x_M = 1-k$ ergibt, liegt die Extremstelle jeder Scharfunktion genau in der Mitte zwischen Null- und Wendestelle.

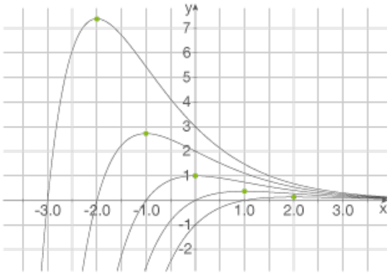
1.3 **▶ Ortskurve der Hochpunkte skizzieren**

Du sollst in Material 1 die Kurve skizzieren, die die Hochpunkte miteinander verbindet. Du kannst dazu wie folgt vorgehen:

- 1. Schritt: Zeichne die Hochpunkte der eingetragenen Graphen ein.
- 2. Schritt: Skizziere die Kurve, die diese verbindet mit Hilfe der eingetragenen Punkte.

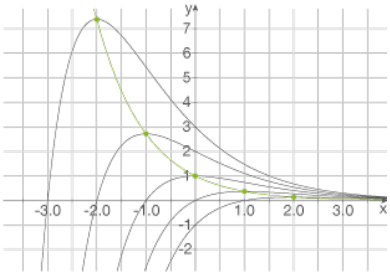
▶ 1. Schritt: Hochpunkte einzeichnen

Du kennst die Parameterwerte k der einzelnen Graphen aus der ersten Aufgabe und weißt, dass der Extrempunkt einer jeden Scharfunktion an der Stelle $x_E = 1-k$ liegt.
Damit weißt du, dass nacheinander an den Stellen $x_E = -2, -1, 0, 1$ und 2 jeweils ein Extrempunkt liegen muss.
Trägst du die Hochpunkte nun nacheinander mit Hilfe der Extremstellen in Material 1 ein, so erhältst du das folgende Schaubild:



▶ 2. Schritt: Ortskurve skizzieren

Anhand der Punkte kannst du nun die Ortskurve der Hochpunkte leichter skizzieren. Dein Schaubild sollte dann ähnlich aussehen wie das folgende:



▶ Funktionsgleichung der Ortskurve angeben

Du sollst nun eine Funkionsgleichung der Kurve angeben, die du eben skizziert hast. Dies ist die Ortskurve der Extrempunkte der Funktionenschar f_k. Sie verbindet alle Extrempunkte miteinander.
Dein Ziel ist es also, die y-Koordinate der Extrempunkte in Abhängigkeit von x darzustellen, aber nicht mehr von k. Dazu kannst du wie folgt vorgehen:

- 1. Schritt: y-Koordinate der Extrempunkte berechnen.
  Falls diese noch von k abhängt:
- 2. Schritt: x-Koordinate nach k umstellen
- 3. Schritt: Umgeformte x-Koordinate in die y-Koordinate einsetzen

▶ 1. Schritt: y-Koordinaten berechnen

Die y-Koordinaten der Extrempunkte, erhältst du durch einsetzen der Extremstellen in die Funktionsgleichung von f_k:

$$\begin{aligned} y_E =&\; f_k(x_E) \qquad {\scriptstyle x_E = 1-k} \\ =&\; f_k(1-k) \\ =&\; \frac{1-k+k}{e^{1-k}} \\ =&\; \frac{1}{e^{1-k}} \end{aligned}$$

▶ **2. Schritt: x-Koordinate nach k umstellen**

$$\begin{aligned} x_E &= 1-k \quad &&\mid +k, -x_E \\ k &= 1-x_E \end{aligned}$$

▶ **3. Schritt: Einsetzen**

$$\begin{aligned} y_E &= \frac{1}{\mathrm{e}^{1-k}} \quad &&k = 1-x_E \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{1-(1-x_E)}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{x_E}} \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung der Ortskurve der Hochpunkte von f_k: $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

1.4 ▶ **Zeigen, dass f_k'' ebenfalls ein Graph der Schar ist**

Um zu zeigen, dass für jede Scharfunktion die zweite Ableitung f_k'' ebenfalls eine Funktion der Schar ist, kannst du zeigen, dass es ein k_0 gibt, sodass:

$$f_k''(x) = \frac{x+k_0}{\mathrm{e}^x} = f_{k_0}$$

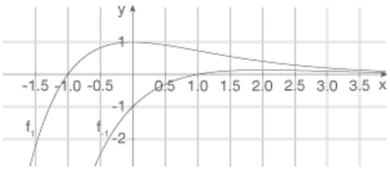
Die Ableitungsfunktion f_k'' hast du bereits im vorigen Aufgabenteil gebildet:

$$f_k'' = \frac{-2+x+k}{\mathrm{e}^x}$$

Du kannst hier sehen, dass mit $k_0 = -2+k$ die obige Gleichung gilt.
Damit ist also $f_k''(x) = f_{k_0}(x) = \dfrac{x+k_0}{\mathrm{e}^x}$ mit $k_0 = -2+k$ und damit ist $f_k'' = f_{k-2}$ für jedes k ebenfalls eine Funktion der Schar f_k.

▶ **Abbildungen ermitteln**

Um zu ermitteln, durch welche Abbildungen der Graph von f_k'' aus dem Graphen von f_k hervorgeht, kannst du dir zur Unterstützung einmal die folgende Skizze anschauen:



Daran kannst du erkennen, dass der Graph von f_{-1} aus dem Graphen von f_1 durch **Verschiebung** um zwei Einheiten nach rechts und einer leichten **Streckung** hervorgeht. Um den Streckungsfaktor genau zu bestimmen, kannst du nun den Funktionsterm von f_k'' in eine Darstellungsweise in Abhängigkeit von f_k bringen:

$$\begin{aligned} f_k''(x) &= \frac{x+k-2}{\mathrm{e}^x} \quad &&\mid \text{Erweitern mit } 1 = \tfrac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{-2}} \\ &= \frac{(x-2)+k}{\mathrm{e}^{x-2}} \cdot \mathrm{e}^{-2} \\ &= f_k(x-2) \cdot \mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

Daran kannst du nun die Verschiebung nach rechts, genauso wie den Streckungsfaktor von e^{-2} erkennen.
Der Graph von f_k'' geht durch eine Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts und eine Streckung um den Faktor e^{-2} aus dem Graphen von f_k hervor.

2.

2.1 ▶ **Stammfunktionenschar berechnen**

Du sollst nun mit Hilfe partieller Integration eine Stammfunktionenschar F_k von f_k berechnen.
Die entsprechende Regel zur **partiellen Integration** bzw. **Produktintegration** lautet:

$$\int u(x)\cdot v(x)\mathrm{d}x = [U(x)\cdot v(x)] - \int U(x)\cdot v'(x)\mathrm{d}x$$

Bringst du die Funktionsgleichung von f_k zunächst von einem Quotienten in die Form eines Produkts, so erhältst du:

$$f_k(x) = \frac{x+k}{\mathrm{e}^x} = (x+k)\cdot\mathrm{e}^{-x}$$

Wähle nun die beiden Faktoren u und v am besten so geschickt, dass im zweiten Faktor v die Integrationsvariable x beim Ableiten wegfällt.
Dabei erscheint die folgende Wahl sinnvoll:

$u(x) = \mathrm{e}^x$ und $v(x) = x+k$

Damit kannst du nun eine Stammfunktionenschar bilden:

$$\begin{aligned}\int(x+k)\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x =&\ [(x+k)\cdot(-1)\cdot\mathrm{e}^{-x}] - \int 1\cdot(-1)\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x && \text{vereinfachen}\\ =&\ [-(x+k)\cdot\mathrm{e}^{-x}] + \int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\\ =&\ [-(x+k)\cdot\mathrm{e}^{-x}] + [(-1)\cdot\mathrm{e}^{-x}] && \text{zusammenfassen}\\ =&\ [(-(x+k)-1)\cdot\mathrm{e}^{-x}]\\ =&\ [-(x+k+1)\cdot\mathrm{e}^{-x}]\end{aligned}$$

Eine Stammfunktionenschar der Funktionenschar f_k lautet $F_k(x) = -(x+k+1)\cdot\mathrm{e}^{-x}$.

2.2 ▶ **Flächeninhalt berechnen**

Um zu überprüfen, ob die Graphen von f_k mit der x-Achse eine Fläche mit endlichem Inhalt einschließen, kannst du den Flächeninhalt unter den Graphen von f_k berechnen.
Dazu benötigst du die **Integrationsgrenzen**. Die untere Grenze hast du durch die Nullstellen der Funktionen $a = -k$ gegeben. Da jede Scharfunktion nur diese eine Nullstelle besitzt, ergibt sich die zweite Grenze mit $b = \infty$.
Gesucht ist also das Integral:

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-k}^{b} f_k(x)\mathrm{d}x$$

Mit Hilfe der Stammfunktionenschar, die du im vorigen Aufgabenteil gebildet hast, kannst du nun zunächst das Integral $\int_{-k}^{b} f_k(x)\mathrm{d}x$ in Abhängigkeit von b berechnen und anschließend den Grenzwert berechnen.

▶ **1. Schritt: Integral berechnen**

$$\begin{aligned}\int_{-k}^{b} f_k(x)\mathrm{d}x =&\ [-(x+k+1)\cdot\mathrm{e}^{-x}]_{-k}^{b} && \text{Einsetzen der Grenzen}\\ =&\ -(b+k+1)\cdot\mathrm{e}^{-b} + (-k+k+1)\cdot\mathrm{e}^{k}\\ =&\ -(b+k+1)\cdot\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{k}\end{aligned}$$

▶ **2. Schritt: Grenzwert berechnen**

Berechne nun den Grenzwert, indem du den Term in mehrere Teilterme zerlegst und diese einzeln betrachtest:

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-k}^{b} f_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left(-(b+k+1)\cdot\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{k}\right)$$

Der Teil e^{k} ist dabei unabhängig von b. Betrachte also zunächst den übrigen Teil des Terms.

Der Faktor $-(b+k+1)$ geht dabei für $b\to\infty$ gegen $-\infty$, während der Faktor e^{-b} gegen 0 geht.
Insgesamt geht daher der Summand $-(b+k+1)\cdot\mathrm{e}^{-b}$ für $b\to\infty$ gegen 0, da der lineare Teil $-(b+k+1)$ weniger stark wächst als der exponentielle e^{-b}.
Der gesamte Term geht daher für $b\to\infty$ gegen e^{k}.
Damit gilt:

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-k}^{b} f_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left(-(b+k+1)\cdot\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{k}\right) = \mathrm{e}^{k}$$

Die Graphen der Schar f_k schließen mit der x-Achse eine Fläche mit endlichem Inhalt ein. Dieser beträgt e^k Flächeneinheiten.

3. ▶ **Funktionsterm von g_k bestimmen**

Um zu zeigen, dass sich der Term für g_k schreiben lässt als:

$$g_k(x)= x\cdot e^{k-x}$$

kannst du den Funktionsterm von g_k anhand der Information aus der Aufgabenstellung aufstellen.

Im Aufgabenteil 1.4 hast du gesehen, dass ein Graph $f(x-r)$ durch **Verschiebung** um r Einheiten nach rechts aus dem Graphen von $f(x)$ hervorgeht.
In diesem Fall, soll nun jeder Graph der Schar f_k soweit verschoben werden, dass die Nullstelle im Ursprung liegt. Da die Nullstellen der Schar bei $x_N=-k$ liegen, muss jeder Graph um k Einheiten nach rechts verschoben werden.
Demnach ergibt sich:

$$g_k(x)= f_k(x-k)= \frac{x-k+k}{e^{x-k}}= \frac{x}{e^{x-k}}= x\cdot e^{k-x}$$

Durch Verschiebung der Graphen von f_k um k Einheiten nach rechts ergibt sich der Graph von g_k und die zugehörige Funktionsgleichung ergibt sich durch $g_k(x)= f_k(x-k)= x\cdot e^{k-x}$.

4.

4.1 ▶ **Aussagen im Sachzusammenhang beschreiben**

Um die Aussagen, die die Graphen darstellen im Sachzusammenhang zu beschreiben, sieh dir dazu zunächst einmal die Graphen genau an und interpretiere die Auffälligkeiten anschließend im Sachzusammenhang. Dabei sollst du nicht auf die Unterschiede zwischen den einzelnen Graphen eingehen, deine Antwort also allgemein für alle dargestellten Hunderassen halten.

Dir sollte auffallen, dass alle Graphen zunächst **sehr stark wachsen**, bis sie ihren **Hochpunkt** erreicht haben, und dann nach und nach wieder **abfallen**, allerdings langsamer als sie zuvor gestiegen sind. Zum Schluss nähern sich alle Graphen **asymptotisch** der x-Achse an.

Übertragen auf den Sachzusammenhang bedeutet das:

- In den ersten Monaten legen die Welpen immer schneller an Gewicht zu.
- Bis sie spätestens im 5. Lebensmonat die höchste Gewichtszunahme erreichen.
- Danach nimmt die Gewichtszunahme immer weiter ab.
- Nach ca. 12 bis 18 Monaten hat sich die Gewichtszunahme weitestgehend dem Wert Null angenähert, sodass die Welpen ihr Endgewicht in etwa erreicht haben.

4.2 ▶ **Funktion für das Wachstum der Schäferhunde bestimmen**

Du hast in der Aufgabenstellung explizit die Information gegeben, dass der Graph der Funktion $w(t)$, die das Wachstum der Schäferhunde annähernd beschreiben soll, den gleichen Hochpunkt besitzen soll wie der Graph S aus Material 3. Dieser Hochpunkt liegt bei $\boldsymbol{H(3\mid 165)}$.

Forme also die Funktion g_k durch ein passend gewähltes k und entsprechende Streckungs- bzw. Stauchungsfaktoren um, sodass sie den Hochpunkt $H(3\mid 165)$ besitzt.
Berechne dazu zunächst die Hochpunkte $G(x_G\mid y_G)$ der Graphen von g_k und bestimme anhand denen das passende k, sodass $y_G=165$ gilt. Bestimme anschließend, wenn nötig, noch einen Stauchungsfaktor um $x_G=3$ zu erhalten

▶ **1. Schritt: Koordinaten der Hochpunkte des Graphen von g_k berechnen**

Hierzu reicht es aus, die Extremstellen mit Hilfe der notwendigen Bedingung zu bestimmen. Bilde dazu die erste Ableitungsfunktion von g_k mit Hilfe der **Produktregel** und setze anschließend gleich Null.
Die Produktregel lautet:

$$\boxed{\begin{aligned} f &= u(x)\cdot v(x)\\ f'(x) &= u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\end{aligned}}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} g_k'(x) &= 1 \cdot \mathrm{e}^{k-x} + x \cdot (-1) \cdot \mathrm{e}^{k-x} \\ &= (1-x) \cdot \mathrm{e}^{k-x} \end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt dann die Extremstelle:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x_G) \cdot \mathrm{e}^{k-x_G} && \mid \cdot \mathrm{e}^{k-x_G} \\ 0 &= 1 - x_G && \mid +x_G \\ x_G &= 1 \end{aligned}$$

Setze nun die Extremstelle x_G in den Funktionsterm von g_k ein, um y_G zu berechnen:

$$g_k(x_G) = g_k(1) = 1 \cdot \mathrm{e}^{k-1} = \mathrm{e}^{k-1}$$

Damit lauten die Koordinaten der Hochpunkte der Graphen von g_k $G(1 \mid \mathrm{e}^{k-1})$

► 2. Schritt: Passendes k berechnen

Du weißt nun, dass der Hochpunkt des Graphen von w die y-Koordinate 165 besitzen soll. Berechne also das passende k durch Gleichsetzen von $y_G = 165$:

$$\begin{aligned} 165 &= \mathrm{e}^{k-1} && \mid \ln \\ \ln(165) &= k-1 && \mid +1 \\ \ln(165)+1 &= k \\ 6,11 &\approx k \end{aligned}$$

Damit der Hochpunkt des Graphen von g_k die y-Koordinate 165 besitzt, muss also $k \approx 6,11$ gelten.

► 3. Schritt: Streckung/Stauchung

Nun liegt der Hochpunkt noch an der Stelle $x_G = 1$ und nicht bei $x = 3$. Um dies zu erreichen, muss der Graph von $g_{6,11}$ in x-Richtung gestreckt werden. Und zwar so, dass der Extrempunkt statt bei $x = 1$ an der Stelle $x = 3$ liegt. Es muss also gelten:

$w(3) = g_{6,11}(1)$

Dies bewirkt der Streckungsfaktor $\frac{1}{3}$ vor dem x.

Damit ist nun insgesamt

$w(x) = g_{6,11}\left(\frac{1}{3} \cdot x\right) = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \mathrm{e}^{6,11-\frac{1}{3} \cdot x}$.