C1.2 - Lineare Algebra/Analytische Geometrie

1.1 Parallelogramm nachweisen

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FC} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CH}$ und somit auch $|\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{CH}|$ ebenso wie $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FC}$ und $|\overrightarrow{EH}| = |\overrightarrow{FC}|$ gilt, sind die gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang und parallel zueinander.

Das Viereck $EFCH$ ist somit ein Parallelogramm.

Winkel bestimmen

In einem Rechteck müssen alle Winkel 90° betragen, es genügt also, nachzuweisen, dass einer der Innenwinkel kein rechter Winkel ist:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} \circ \overrightarrow{FC} &= \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\\ &= 2\cdot 0 + 0\cdot 3 + (-1)\cdot 2\\ &= -2\end{aligned}$$

Da im Viereck $EFCH$ folglich nicht alle Innenwinkel auch rechte Winkel sind, handelt es sich hierbei um kein Rechteck.

1.2 Parametergleichung angeben

$$\begin{aligned}J: \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OE} + s\cdot\overrightarrow{EF} + t\cdot\overrightarrow{EH}\\ J: \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Koordinatengleichung ermitteln

Bestimmen eines Normalenvektors von J durch das Kreuzprodukt der Spannvektoren:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n_J} &= \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0\cdot(-2)-(-1)\cdot 3\\(-1)\cdot 0-(-2)\cdot 2\\2\cdot 3-0\cdot 0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Eingesetzt in die allgemeine Koordinatengleichung folgt:

$$J: 3\cdot x + 4\cdot y + 6\cdot z = c$$

Koordinaten des Punktes E einsetzen:

$$\begin{aligned}J: 3\cdot 0 + 4\cdot 0 + 6\cdot 3 &= c \\ 18 &= c\end{aligned}$$

Somit ergibt sich folgende Koordinatenform der Ebene J:

$$J: 3x + 4y + 6z = 18$$

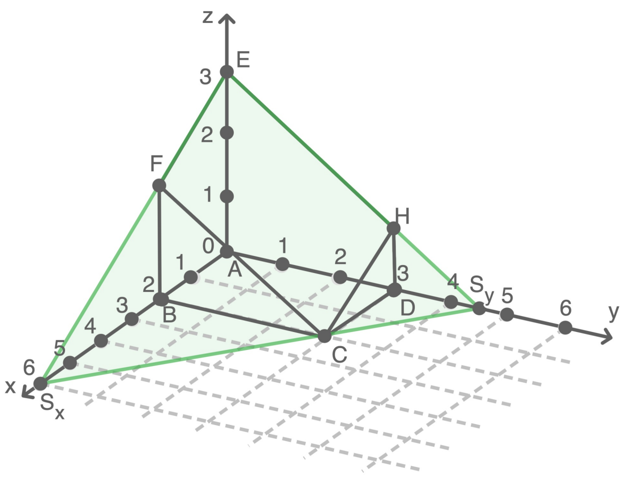
1.3 Der Neigungswinkel φ der beiden Ebenen entspricht dem Winkel zwischen ihren Normalenvektoren. Ein Normalenvektor von J wurde in 1.2 durch $n_J = \begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}$ berechnet, ein Normalenvektor der x-y-Ebene ist $n_{xy} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi) &= \frac{|n_J \circ n_{xy}|}{|n_J| \cdot |n_{xy}|} \\
\cos(\varphi) &= \frac{\left|\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} && \mid \arccos \\
\cos(\varphi) &= \frac{6}{\sqrt{61} \cdot 1} && \mid \arccos \\
\varphi &\approx 39,81^\circ
\end{aligned}$$

Der Neigungswinkel der Ebene J gegenüber der x-y-Ebene beträgt somit ungefähr $39,81^\circ$.

1.4 S_y ist der Spurpunkt der Ebene mit der y-Achse. Die Koordinaten des Punktes sind $(0 \mid y \mid 0)$. Durch eine Punktprobe würde $y = 4,5$ bestimmt werden.

Skizze der Pyramide AS_xS_yE



1.5 1. Schritt: Volumen der Pyramide berechnen

$$\begin{aligned}
V_P &= \frac{1}{3} \cdot A_{AS_xS_y} \cdot h \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4,5}{2} \cdot 3 \\
&= 13,5 \text{ [VE]}
\end{aligned}$$

2. Schritt: Volumen der "abschnittenen" Pyramiden berechnen

Pyramide DCS_yH :

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3} \cdot A_{CDS_y} \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 1,5}{2} \cdot 1 \\ &= 0,5 \text{ [VE]} \end{aligned}$$

Pyramide BS_xCF :

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{3} \cdot A_{BS_xC} \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 \\ &= 4 \text{ [VE]} \end{aligned}$$

3. Schritt: Prozentualen Anteil bestimmen

Der prozentuale Anteil des Körpers K an der Pyramide entspricht also $\dfrac{9}{13,5} = \dfrac{2}{3} = 0,6\overline{6}$ und somit etwa $66,6\,\%$.

1.6 Durch Einsetzen der Komponenten der Geradengleichung in die Koordinatengleichung folgt:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (2t - 2at) + 4 \cdot (3at) + 6 \cdot (3 - t - at) &= 18 \quad ; \\ 6t - 6at + 12at + 18 - 6t - 6at &= 18 \quad ; \\ 18 &= 18 \end{aligned}$$

Somit liegen alle Punkte, die auf den Geraden der Schar liegen und somit auch alle Geraden der Schar in der Ebene J.

1.7 **Wert des Parameters bestimmen**

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2-2a \\ 3a \\ -1-a \end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Zeile ergibt sich:

$$\begin{aligned} 3 &= t \cdot 3 \cdot a \qquad \mid :3 \quad \mid :a \\ \frac{1}{a} &= t \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von t in die erste Zeile folgt:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{a} \cdot (2-2a) \\ 2 &= \frac{2}{a} - 2 && \mid +2 \quad \mid \cdot a \\ 4a &= 2 && \mid :4 \\ a &= 0,5 \end{aligned}$$

Probe durch Lösen der dritten Zeile :

$$\begin{aligned} 0 &= 3 + \frac{1}{a} \cdot (-1-a) \\ 0 &= 3 + \frac{1}{0,5} \cdot (-1-0,5) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit verläuft die Gerade der Schar mit dem Parameter $a = 0,5$ durch den Punkt C.

Begründung

Die Gerade der Schar enthält die Strecke $\overline{EC}$ genau dann, wenn sie die Punkte E und C enthält.

Punkt C liegt wie berechnet auf der Geraden mit dem Parameter $a = 0,5$.

Die Gerade verläuft außerdem durch den Punkt E, da der Ortsvektor $\overrightarrow{OE}$ als Stützvektor der Geraden angegeben ist.

Somit enthält die Gerade der Schar auch die gesamte Strecke $\overline{EC}$.

1.8 **Geraden, die durch E verlaufen, bestimmen**

Der Punkt E ist in allen Geraden der Schar g_a enthalten, da der Vektor $\overrightarrow{OE}$ Stützvektor der Geradengleichungen ist. Zu prüfen ist, für welche a die Punkte F und H in der Geraden der Schar enthalten sind.

1. Schritt: t und a der Geraden, die durch F verlaufen, bestimmen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2-2a \\ 3a \\ -1-a \end{pmatrix} && \mid - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= t \cdot \begin{pmatrix} 2-2a \\ 3a \\ -1-a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus der zweiten Zeile folgt $a = 0$.

Einsetzen in die dritte Zeile ergibt:

$$\begin{array}{rcll} -1 &=& t\cdot(-1-0) & \\ -1 &=& -t & \mid \cdot(-1) \\ 1 &=& t & \end{array}$$

Probe durch Einsetzen in die erste Zeile ergibt:

$$\begin{array}{rcl} 2 &=& 1\cdot(2-2\cdot 0) \\ 2 &=& 2 \end{array}$$

Es ergibt sich $a=0$ und $t=1$.

2. Schritt: t und a der Geraden, die durch H verlaufen, bestimmen

$$\begin{array}{rcll} \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} &=& \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2-2a\\3a\\-1-a\end{pmatrix} & \mid -\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} &=& t\cdot\begin{pmatrix}2-2a\\3a\\-1-a\end{pmatrix} & \end{array}$$

Aus der zweiten Zeile folgt:

$$\begin{array}{rcll} 3 &=& t\cdot 3\cdot a & \mid : 3t \\ \frac{1}{t} &=& a & \end{array}$$

Aus der ersten Zeile folgt:

$$\begin{array}{rcll} 0 &=& t\cdot\left(2-2\cdot\frac{1}{t}\right) & \\ 0 &=& 2t-2 & \mid +2 \mid : 2 \\ 1 &=& t & \end{array}$$

Daraus folgt $a=1$.

Probe durch Einsetzen und Lösen der dritten Zeile ergibt:

$$\begin{array}{rcl} -2 &=& 1\cdot(-1-1) \\ -2 &=& -2 \end{array}$$

Es ergibt sich $a=1$ und $t=1$.

Für alle $0\leq a\leq 1$ haben die zugehörigen Geraden der Schar mehr als einen Punkt mit dem Parallelogramm $EFCH$ gemeinsam.

1.9 (I) Der Vektor $\begin{pmatrix}-6\\4,5\\0\end{pmatrix}$ entspricht dem Vektor $\overrightarrow{S_xS_y}$. Durch das Skalarprodukt mit dem Richtungsvektor der Geradenschar wird der Wert des Parameters a bestimmt, für welchen die zugehörige Gerade orthogonal zur Strecke $\overline{S_xS_y}$ verläuft.

(II) Die zu $\overline{S_xS_y}$ orthogonale Gerade g mit dem berechneten Wert für a wird mit der Geraden, welche die Strecke $\overline{S_xS_y}$ enthält, gleichgesetzt. So kann der Wert von t, für welchen sich die beiden Geraden schneiden, ermittelt werden.

(III) Es wird der Abstand vom Schnittpunkt der beiden Geraden zum Punkt $P(0 \mid 0 \mid 3)$ berechnet.

2.1 Da die Stange senkrecht zur Fläche $EFCH$ und somit zur Ebene J stehen soll, verläuft die Stange entlag $\overrightarrow{n_J}$.

Vektor normieren

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n_{J1}} &= \frac{1}{|\overrightarrow{n_J}|} \cdot \overrightarrow{n_J} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2+6^2}} \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{61}} \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Koordinaten des Endpunkts P berechnen

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OQ} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{61}} \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1,5\\2\\3\end{pmatrix} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{61}} \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix}1,5\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1,15\\1,54\\2,3\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}0,35\\0,46\\0,7\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Endpunkts der Stange, welcher innerhalb des Betonkörpers liegt, sind somit $P(0,35 \mid 0,46 \mid 0,7)$.

2.2
$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{v_S} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OQ} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Der Vektor $\overrightarrow{v_S} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ beschreibt die parallel einfallenden Sonnenstrahlen.

2.3 Geradengleichung des Sonnenstrahls, der auf den Punkt Q einfällt:

$$
\begin{aligned}
g: \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OQ} + t \cdot \overrightarrow{v} \\
g: \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Da der Schattenpunkt Q' auf dem Boden liegt, muss seine z-Koordinate null sein. Diese Bedingung ist für $t = 3$ erfüllt.

Koordinaten von Q' bestimmen:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OQ'} &= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Der Schattenpunkt Q' besitzt somit die Koordinaten $Q'(-3 \mid 2 \mid 0)$.

Schattenpunkt auf der Kante EH bestimmen

Der gesuchte Punkt der Kante $\overline{EH}$, der im Schatten der Stange liegt, ist der Schnittpunkt der Gerade durch E und H und der Schattenebene.

Die Gerade durch E und H lässt sich wie folgt aufstellen:

$$
\begin{aligned}
g_{EH}: \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OE} + r \cdot \overrightarrow{EH} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die Schattenebene kann wie folgt aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} E_S &= \overrightarrow{OQ} + s\cdot\overrightarrow{v} + t\cdot\overrightarrow{n} \\ &= \begin{pmatrix}1,5\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1,5\\0\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der Gleichung der Schattenebene mit der Geradengleichung von g_{EH} ergibt sich:

$$\begin{aligned} g_{EH} &= E_S \\ \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1,5\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1,5\\0\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit dem Taschenrechner folgt:

$$r = \frac{3}{5}, s = \frac{9}{10}, t = -\frac{1}{20}$$

Der Schnittpunkt kann nun wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \frac{3}{5}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0\\1,8\\1,8\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Punkt $S\left(0 \middle| 1,8 \middle| 1,8\right)$ auf der Strecke EH liegt folglich im Schatten der Stange.