1.1 ▶ **Begründen, dass die 3 Punkte genau eine Ebene aufspannen** (5 BE)

Drei Punkte spannen immer dann eindeutig eine Ebene auf, wenn sie nicht auf einer Gerade liegen.

Die drei Punkte befinden sich aber auf jeweils einer der Koordinatenachsen. Somit können niemals alle drei Punkte gleichzeitig auf ein und derselben Gerade liegen.

Dies wäre nur für $t = 0$ möglich, dann würden alle Punkte A, B, C im Ursprung liegen und somit keine Ebene aufspannen. Allerdings wird t aus der Definitionsmenge ausgeschlossen.

Folglich spannen die drei Punkte für jedes definierte t eine Ebene auf.

▶ **Koordinatengleichung der Ebenenschar herleiten**

Da sich alle Punkte auf den Koordinatenachsen befinden und somit Spurpunkte sind, kannst du die Achsenabschnittsform nach $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ verwenden.

a, b und c sind hierbei die Koordinaten der Punkte auf der jeweiligen Achse. Multipliziere zum Schluss noch die Gleichung mit $a \cdot b \cdot c$ durch, um auf die Koordinatenform ohne Brüche zu kommen.

Daraus ergibt sich die folgende Form.

$$\frac{x}{t} + \frac{y}{2t} + \frac{z}{3t} = 1 \qquad | \ \cdot(t \cdot 2t \cdot 3t)$$

$$6t^2 \cdot x + 3t^2 \cdot y + 2t^2 \cdot z = 6t^3 \qquad | : (t)^2$$

$$6 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z = 6t$$

Somit ergibt sich die Ebene E mit $E : 6 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z = 6t$.

▶ **Lage der Ebenen zueinander beschreiben**

Die gegenseitige Lage zweier Ebenen kannst du über den Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ erkennen.

Gilt $\overrightarrow{n_1} = t \cdot \overrightarrow{n_2}$, so verlaufen die Ebenen parallel oder sie sind identisch. Ansonsten schneiden sie sich.

Den Normalenvektor kannst du aus der Koordinatenform ablesen, da diese sich wie folgt zusammensetzt.

$$E : n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d$$

Somit beschreiben die Koeffizienten vor den einzelnen Variablen die jeweiligen Koordinaten des Normalenvektors mit $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

Aus der in 1.1 bestimmten Koordinatengleichung der Ebene mit $E: \ 6x + 3y + 2z = 6t$ ergibt sich somit der Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Du kannst erkennen, dass dieser nicht von t abhängig ist, also dieser Normalenvektor für jede Ebene die durch die Punkte A_t, ; B_t und C_t identisch ist.
Folglich gilt $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n_t}$. Weiterhin verändert sich mit dem Wert für t auch die Lage der drei Stützpunkte, sodass alle Ebenen parallel verlaufen.

1.2 ▶ **t für $P \in H_t$** (3 BE)

Um den Parameter t zu bestimmen, setzt du den dir gegebenen Punkt in die Koordinatengleichung ein und löst nach t auf.

Mit $P \in H_t$ ergibt sich somit folgende Gleichung, mit der du dann t bestimmen kannst.

$6 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 6 \cdot t$

$12 - 6 + 6 = 6 \cdot t$

$12 = 6 \cdot t$

$2 = t$

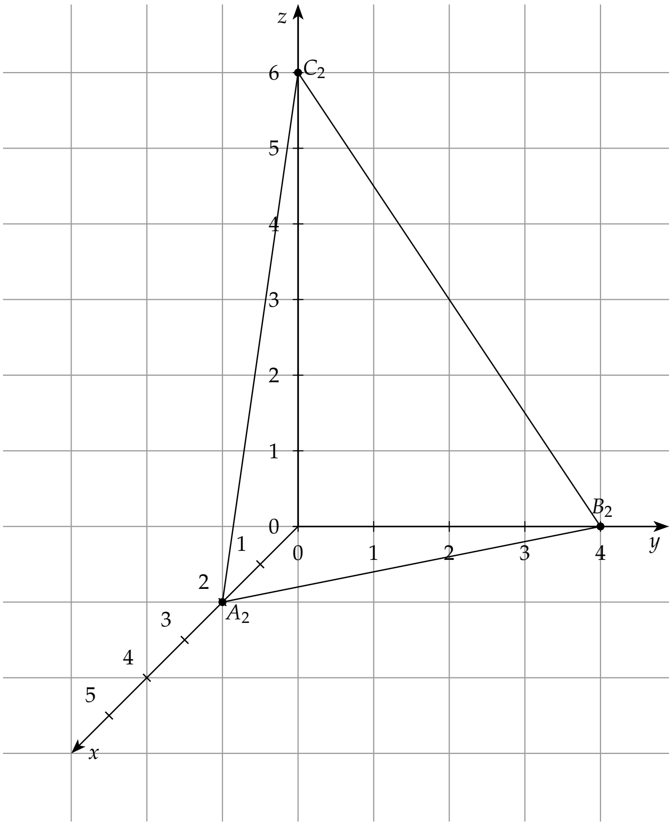
Somit liegt der Punkt P in der Ebene H_2.

▶ **Schaubild zeichnen**

Um das Schaubild zu zeichnen, benötigst du zunächst konkrete Punkte. Setze folglich den eben berechneten Wert von t für t in die Koordinaten der Punkte A, B und C ein.
Da es sich um Spurpunkte handelt, kannst du A auf der x-, B auf der y- und C auf der z-Achse eintragen.

Somit ergeben sich die Punkte $A_2(2 \mid 0 \mid 0)$, $B_2(0 \mid 4 \mid 0)$ und $C_2(0 \mid 0 \mid 6)$.

Trage diese Punkte nun auf den jeweiligen Achsen mit den passenden Koordinaten ein. Verbinde sie anschließend, um eine Darstellung der Ebene zu erhalten.



1.3 ▶ ***t* mittels des Abstandes berechnen** (4 BE)

Den Abstand einer Ebene von einem Punkt P kannst du über die Hess'sche Normalenform bestimmen. Diese lautet für eine Ebene der Form $E: \; n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = e$ wie folgt.

$$d(P,H) = \frac{n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3 - e}{|\overrightarrow{n}|}$$

Aus dieser Gleichung kannst du mittels des gegebenen Abstandes t berechnen, indem du $d(P,H) = 6$ setzt und nach t auflöst.

Setze die Koordinaten des Ursprungs mit $O(0 \mid 0 \mid 0)$ in die Hess'sche Normalenform ein und löse nach t auf.
Daraus ergibt sich folgender Term.

$$\begin{aligned}
d(P,H) &= 6 \\
6 &= \frac{6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot t}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} \\
6 &= \frac{6 \cdot t}{\sqrt{49}} \\
6 &= \frac{6 \cdot t}{7} && \mid \cdot \frac{7}{6} \\
6 \cdot \frac{7}{6} &= t \\
7 &= t
\end{aligned}$$

Somit hat die Ebene H_7 mit $t = 7$ den Abstand 6 vom Ursprung.

2.1 ▶ Formel für den Flächeninhalt herleiten (5 BE)

Die Aufgabe fordert, dass zunächst der Winkel α, sowie die Seitenlängen der Seiten AB und AC berechnet werden.

Den Winkel α kannst du berechnen über $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$.

Die Seitenlängen wiederum kannst du über $|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$ bestimmen.

Berechne zunächst den Winkel $\cos\alpha$ wie folgt.

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{(-t)\cdot(-t) + 0 \cdot 2t + 0 \cdot 3t}{\sqrt{(-t)^2 + (2t)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-t)^2 + 0^2 + (3t)^2}} \\
&= \frac{t^2}{\sqrt{5t^2} \cdot \sqrt{10t^2}} \\
&= \frac{1}{5\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Berechne nun noch die Längen der Seiten AB und AC.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-t)^2 + (2t)^2 + 0^2} = \sqrt{5} \cdot t$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-t)^2 + 0^2 + (3t)^2} = \sqrt{10} \cdot t$$

Setze nun die berechneten Werte in die Ausgangsgleichung ein.

Daraus ergibt sich der Term

$$F(t) = \frac{1}{2} \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{5 \cdot \sqrt{2}}\right)\right) \cdot \sqrt{10} \cdot t \cdot \sqrt{5} \cdot t = \frac{1}{2} \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{5 \cdot \sqrt{2}}\right)\right) \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot t^2.$$

Lasse dir diesen Wert von deinem Taschenrechner berechnen.

Es ergibt sich $\frac{1}{2} \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{5 \cdot \sqrt{2}}\right)\right) \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 7$.

Folglich wird der Flächeninhalt mit der folgenden Formel beschrieben.

$$F(t) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot t^2 = 3{,}5 \cdot t^2$$

Somit wäre die Fragestellung bewiesen.

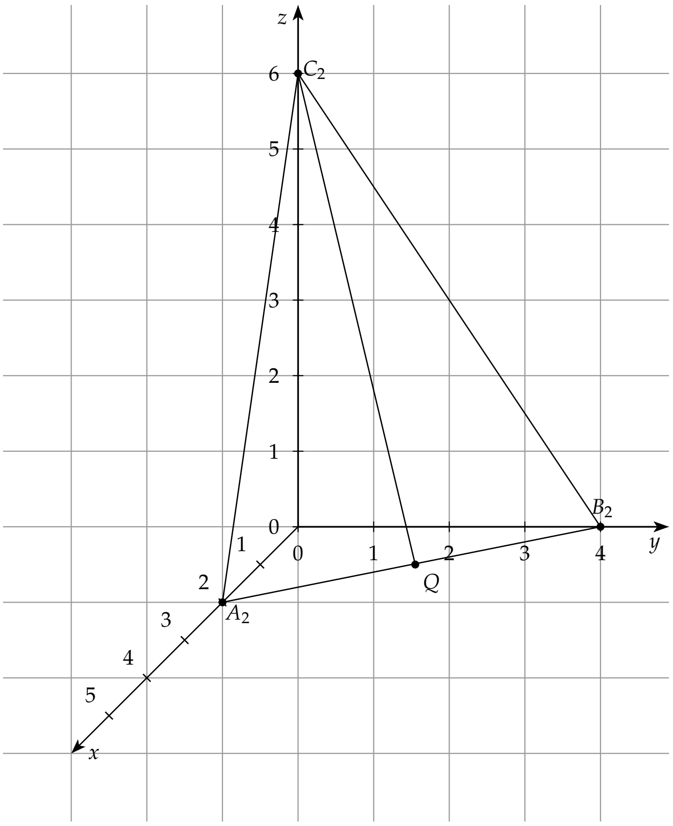
2.2 ▶ Gerade durch C_t bestimmen (5 BE)

Damit die Gerade das Dreieck, wie von der Aufgabenstellung gefordert, in zwei gleich große Teile teilt, muss die Gerade durch C_t und einen Punkt auf der Strecke $\overline{AB}$ laufen.

Den Flächeninhalt des Dreiecks bestimmst du über $F = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

Stelle also zunächst die Gerade AB auf, um einen allgemeinen Punkt Q auf dieser Geraden zu definieren, durch den dann die Gerade C_tQ läuft und diese in Abhängigkeit von t das Dreieck in zwei gleich große Teile teilt.

Die folgende Skizze zeigt, wie das Dreieck geteilt werden könnte.



Der Flächeninhalt von ABC ist in der vorherigen Aufgabe mit $F = 3{,}5t^2$ gegeben.

Stelle die Gerade AB nach $AB: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{AB}$ auf.

$\overrightarrow{AB}$ berechnest du wie folgt.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich die Gerade AB mit $AB: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$

Folglich lautet der allgemeine Punkt $Q(t + k \cdot (-t) \mid k \cdot (2t) \mid 0)$.

Für den Flächeninhalt von A_tQC_t muss gelten $F = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{A_tQ} \times \overrightarrow{A_tC_t}| = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5 \cdot t$

Berechne das Kreuzprodukt wie folgt.

$$\overrightarrow{q} = \overrightarrow{A_tQ} \times \overrightarrow{A_tC_t} = \begin{pmatrix} -tk \\ k \cdot 2t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t^2k \\ 3t^2k \\ 2t^2k \end{pmatrix}$$

Berechne nun den Betrag dieses Vektors, um den Flächeninhalt zu beschreiben.

$$|\overrightarrow{q}| = \sqrt{(6t^2k)^2 + (3t^2k)^2 + (2t^2k)^2} = \sqrt{49t^4k^2} = 7 \cdot t^2 \cdot k$$

Es muss gelten $\frac{1}{2}|\overrightarrow{q}| = \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot t^2$.

Setze das eben berechnete Kreuzprodukt ein.

$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot t^2 k = \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot t^2$

$7k = 3,5$

$k = \frac{1}{2}$

Somit lautet der Punkt $Q(t + 0,5 \cdot (-t) \mid 0,5 \cdot (2t) \mid 0)$ und vereinfacht $Q(0,5t \mid t \mid 0)$.

Stelle nun die Gerade C_tQ wie folgt auf.

$C_t : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{C_t} + s \cdot \overrightarrow{C_tQ}$

$$\overrightarrow{C_tQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OC_t} = \begin{pmatrix} 0,5 \cdot t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \cdot t \\ t \\ -3t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{C_tQ} : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \cdot t \\ t \\ -3t \end{pmatrix}$$

Diese Gerade C_tQ unterteilt somit das Dreieck in zwei gleichgroße Flächen.

3.1 ▶ Matrix bestimmen (5 BE)

Um die Abbildungsmatrix zu bestimmen, stelle zunächst eine allgemeine Matrix M auf, die wie folgt aussieht.

$$M = \begin{pmatrix} m11 & m12 & m13 \\ m21 & m22 & m23 \\ m31 & m32 & m33 \end{pmatrix}$$

Es muss gelten $M \cdot A_1 = A_2$, $M \cdot B_1 = B_2$ und $M \cdot C_1 = C_2$. Multipliziere folglich die 3 Punkte mit der allgemeinen Matrix und stelle die Gleichungen auf, sodass sich ein Gleichungssystem bildet.
Beachte, dass gilt $t_1 = 1$ und $t_2 = 2$

Multipliziere die Punkte mit der Matrix.

$$\begin{pmatrix} m11 & m12 & m13 \\ m21 & m22 & m23 \\ m31 & m32 & m33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot m11 + 0 \cdot m12 + 0 \cdot m13 \\ 1 \cdot m21 + 0 \cdot m22 + 0 \cdot m23 \\ 1 \cdot m31 + 0 \cdot m32 + 0 \cdot m33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m11 \\ m21 \\ m31 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m11 & m12 & m13 \\ m21 & m22 & m23 \\ m31 & m32 & m33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot m11 + 2 \cdot m12 + 0 \cdot m13 \\ 0 \cdot m21 + 2 \cdot m22 + 0 \cdot m23 \\ 0 \cdot m31 + 2 \cdot m32 + 0 \cdot m33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot m12 \\ 2 \cdot m22 \\ 2 \cdot m32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m11 & m12 & m13 \\ m21 & m22 & m23 \\ m31 & m32 & m33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot m11 + 0 \cdot m12 + 3 \cdot m13 \\ 0 \cdot m21 + 0 \cdot m22 + 3 \cdot m23 \\ 0 \cdot m31 + 0 \cdot m32 + 3 \cdot m33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot m13 \\ 3 \cdot m23 \\ 3 \cdot m33 \end{pmatrix}$$

Da gelten muss $M \cdot A_1 = A_2$, $M \cdot B_1 = B_2$ und $M \cdot C_1 = C_2$, setzt du jetzt die jeweiligen neuen Vektoren mit den Bildpunkten gleich.

daraus ergeben sich folgende Gleichungen.

$$\begin{pmatrix} m11 \\ m21 \\ m31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot m12 \\ 2 \cdot m22 \\ 2 \cdot m32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot m13 \\ 3 \cdot m23 \\ 3 \cdot m33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Daraus kannst du ein Gleichungssystem mit neun Gleichungen bilden.

$$\begin{aligned}
2 &= m11 \\
0 &= m12 \\
0 &= m13 \\
0 &= 2 \cdot m21 \\
4 &= 2 \cdot m22 \qquad |:2 \\
0 &= 2 \cdot m23 \\
0 &= 3 \cdot m31 \\
0 &= 3 \cdot m32 \\
6 &= 3 \cdot m33 \qquad |:2 \\
\hline
2 &= m22 \\
2 &= m33
\end{aligned}$$

Diese Werte kannst du nun in die allgemeine Matrix M einsetzen, um die Abbildungsmatrix zu erhalten, die die Punkte aufeinander abbildet. Daraus ergibt sich folgende Matrix.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2 ▶ Begründung des Terms der Matrix N (3 BE)

Die Einheitsmatrix E hat die Form

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich hatte die Matrix aus der Aufgabe zuvor die Form $M = 2 \cdot E$. Dadurch wurden die Punkte A_1, B_1 und C_1 auf ihre Bildpunkte A_2, B_2 und C_2 abgebildet.
Übertrage dies auf die allgemeinen Punkte A_t, B_t und C_t.

Gilt die Aussage für die drei Punkte, die H_t aufspannen, so gilt sie auch für die komplette Ebene H_t.

Multipliziere zunächst die Matrix N aus, sodass du die Form

$$N = \begin{pmatrix} \frac{u}{t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u}{t} \end{pmatrix}$$

erhältst. Bilde nun die Punkte ab.

$$A_u = \begin{pmatrix} \frac{u}{t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u}{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot \frac{u}{t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_u = \begin{pmatrix} \frac{u}{t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u}{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \cdot \frac{u}{t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_u = \begin{pmatrix} \frac{u}{t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u}{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3t \cdot \frac{u}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3u \end{pmatrix}$$

Somit kürzt sich durch den Faktor $\frac{u}{t}$ der Parameter t und wird durch u „ersetzt".
Folglich spannen die Punkte A_u, B_u und C_u jetzt die Ebene H_u auf und nicht mehr H_t