A2 - Analysis

1.1 ▶ **Funktion berechnen**

Mit den beiden Werten aus der Tabelle für $t = 1$ und $t = 10$ ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 3,2 & = & f(1) \\
& 3,2 & = & a \cdot \mathrm{e}^{k \cdot 1} \\
& 3,2 & = & a \cdot \mathrm{e}^{k} \\
\text{II} & 7,3 & = & f(10) \\
& 7,3 & = & a \cdot \mathrm{e}^{k \cdot 10}
\end{array}$$

Löse beispielsweise die erste Gleichung nach a auf:

$$\begin{array}{rcll}
3,2 & = & a \cdot \mathrm{e}^{k} & \mid : \mathrm{e}^k \\
\frac{3,2}{\mathrm{e}^k} & = & a &
\end{array}$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert:

$$\begin{array}{rcll}
7,3 & = & a \cdot \mathrm{e}^{k \cdot 10} & \mid a = \frac{3,2}{\mathrm{e}^k} \\
7,3 & = & \frac{3,2}{\mathrm{e}^k} \cdot \mathrm{e}^{k \cdot 10} & \\
7,3 & = & \frac{3,2}{\mathrm{e}^k} \cdot \left(\mathrm{e}^k\right)^{10} & \\
7,3 & = & 3,2 \cdot \left(\mathrm{e}^k\right)^{9} & \\
7,3 & = & 3,2 \cdot \mathrm{e}^{9k} & \mid : 3,2 \\
\frac{7,3}{3,2} & = & \mathrm{e}^{9k} & \mid \ln \\
\ln\left(\frac{7,3}{3,2}\right) & = & 9k & \mid : 9 \\
\frac{1}{9} \cdot \ln\left(\frac{7,3}{3,2}\right) & = & k & \\
0,092 & \approx & k &
\end{array}$$

Einsetzen in a liefert:

$$\begin{array}{rcll}
a & = & \dfrac{3,2}{\mathrm{e}^k} & \mid k \approx 0,092 \\
& = & \dfrac{3,2}{\mathrm{e}^{0,092}} & \\
& \approx & 2,919 &
\end{array}$$

Eine Gleichung der Funktion f lautet also $f(t) = 2,919 \cdot \mathrm{e}^{0,092 \cdot t}$.

▶ **Modellierung prüfen**

Berechne die jeweilige Abweichung zwischen Modellwert und den Daten:

$$\begin{aligned}\frac{3,5-f(2)}{3,5} &= \frac{3,5-2,919\cdot \mathrm{e}^{0,092\cdot 2}}{3,5} \\ &\approx -0,002 \\ &= -0,2\,\% \\ \frac{4,1-f(4)}{4,1} &= \frac{4,1-2,919\cdot \mathrm{e}^{0,092\cdot 4}}{4,1} \\ &\approx -0,029 \\ &= -2,9\,\%\end{aligned}$$

Die größte Abweichung der Daten von den im Modell ermittelten Werten beträgt ca. $2,9\,\%$ und ist damit geringer als $3\,\%$. Die Modellierung mit der Funktion f kann daher als gut bezeichnet werden.

1.2.1 ▶ **Sättigungsgrenze begründen**

Für $t\to\infty$ gilt für den Nenner des Funktionsterms von g :

$$\underbrace{1+5,72\cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-0,12\cdot t}}_{\to 0}}_{\to 1}$$

Für den gesamten Funktionsterm gilt daher $g(t)\to 19,4$ für $t\to\infty$. Die Sättigungsgrenze der Funktion g ist also $19,4$.
Die Größe der Larven ist also auf $19,4\,\mathrm{mm}$ begrenzt. Mit der Zeit nähert sich die Größe zwar immer weiter dem Wert an, wird ihn aber niemals erreichen oder überschreiten. Die Larven können nach diesem Modell also nicht größer als $19,4\,\mathrm{mm}$ werden.

▶ **Bessere Eignung begründen**

Bei der Funktion f handelt es sich um eine reine Exponentialfunktion. Es gilt $f(t)\to\infty$ für $t\to\infty$. Die Larven würden bei diesem Modell also unendlich weiter wachsen ohne Begrenzung. Beim Modell mit der Funktion g ist das Wachstum der Larve begrenzt. Dieses ist daher für große Werte von t besser geeignet als die Funktion f.

1.2.2 ▶ **Gültigkeit nachweisen**

Mit der Produktregel und der Eigenschaft I folgt:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \tfrac{0,12}{19,4}\cdot g(t)\cdot(19,4-g(t)) \\[1em] g''(t) &= \tfrac{0,12}{19,4}\cdot\left(g'(t)\cdot(19,4-g(t))+g(t)\cdot(-g'(t))\right) \\ &= \tfrac{0,12}{19,4}\cdot\left(g'(t)\cdot(19,4-g(t))-g(t)\cdot g'(t)\right) \\ &= \tfrac{0,12}{19,4}\cdot g'(t)\cdot(19,4-g(t)-g(t)) \\ &= \tfrac{0,12}{19,4}\cdot g'(t)\cdot(19,4-2\cdot g(t)) \end{aligned}$$

1.2.3 ▶ **Zeitpunkt berechnen**

Die Wachstumsrate der Larve wird durch die Funktion g' beschrieben. Der Zeitpunkt, zu dem die Larve am stärksten wächst, wird also durch die Stelle t beschrieben, in der g' ihr Maximum annimmt.

Mithilfe von g'' und dem notwendigen Kriterium für Extremstellen folgt:

$$\begin{array}{rcll} g''(t) &=& 0 & \\ \tfrac{0,12}{19,4}\cdot g'(t)\cdot(19,4-2\cdot g(t)) &=& 0 & \mid :\left(\tfrac{0,12}{19,4}\cdot g'(t)\right)\neq 0 \text{ wegen II} \\ 19,4-2\cdot g(t) &=& 0 & \mid -19,4 \\ -2\cdot g(t) &=& -19,4 & \mid :(-2) \\ g(t) &=& 9,7 & \\ \dfrac{19,4}{1+5,72\cdot \mathrm{e}^{-0,12\cdot t}} &=& 9,7 & \mid \cdot\left(1+5,72\cdot \mathrm{e}^{-0,12\cdot t}\right) \\ 19,4 &=& 9,7\cdot\left(1+5,72\cdot \mathrm{e}^{-0,12\cdot t}\right) & \mid :9,7 \\ 2 &=& 1+5,72\cdot \mathrm{e}^{-0,12\cdot t} & \mid -1 \\ 1 &=& 5,72\cdot \mathrm{e}^{-0,12\cdot t} & \mid :5,72 \\ \tfrac{1}{5,72} &=& \mathrm{e}^{-0,12\cdot t} & \mid \ln \\ \ln\left(\tfrac{1}{5,72}\right) &=& -0,12\cdot t\mathrm{e}^{-0,12\cdot t} & \mid :(-0,12) \\ 14,53 &\approx& t & \end{array}$$

Da laut Aufgabenstellung weder die Überprüfung des hinreichenden Kriteriums noch eine Randwertbetrachtung erforderlich ist, wächst die Larve ca. $14,53$ Tage nach dem Schlüpfen am schnellsten.

▶ **Sättigungsgrenze nachweisen**

$$\begin{aligned} g(14,53) &= \frac{19,4}{1+5,72\cdot \mathrm{e}^{-0,12\cdot 14,53}} \\ &\approx 9,70 \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt, zu dem die Larve am schnellsten wächst, hat sie also eine Größe von ca. $9,70\,\mathrm{mm}$ und damit die Hälfte der Sättigungsgrenze erreicht.

2.1 ▶ **Zusammenhang der Graphen beschreiben**

- Durch den Summanden $+0,25$ im Argument des Sinus, wird der Graph von k im Vergleich zu dem von s um $0,25$ Einheiten nach links verschoben.
- Durch den Faktor $b = \frac{2}{9}\pi$ innerhalb des Arguments wird die Periode p verändert. Der Zusammenhang ist wie folgt:

$$\begin{array}{rcll} b &=& \frac{2\pi}{p} & \mid b = \frac{2}{9}\pi \\ \frac{2}{9}\pi &=& \frac{2\pi}{p} & \mid \cdot p \\ \frac{2}{9}\pi \cdot p &=& 2\pi & \mid : \left(\frac{2}{9}\pi\right) \\ p &=& 9 & \end{array}$$

  Die Periode p von k wird also im Vergleich zu der Periode 2π von s vergrößert, der Graph wird also entlang der t-Achse gestreckt.
- Der Faktor $249,975$ vor dem Sinus-Term streckt den Graphen im Vergleich zur allgemeinen Sinusfunktion entlang der y-Achse.
- Durch den Summanden $250,025$ wird der Graph im Vergleich zur allgemeinen Sinusfunktion entlang der y-Achse um $250,025$ Einheiten nach oben verschoben.

2.2 ▶ **Rechenansatz im Sachzusammenhang erläutern**

Die Funktion k beschreibt die maximale Larvendichte eines jeden Kalenderjahrees in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren nach Beobachtungsbeginn. Ab einer Larvendichte von mehr als 100 Larven pro kg Zweige wird der Befall sichtbar.

In Zeile I wird der Funktionsterm für die maximale Larvendichte mit 100 gleichgesetzt. Der Ansatz dient also der Bestimmung der Zeitpunkte, zu denen der Befall sichtbar bzw. nicht mehr sichtbar wird.

▶ **Zeitpunkt begründen**

Die Ergebnisse aus Schritt III stellen die Zeitpunkte dar, zu denen der Befall sichtbar bzw. nicht mehr sichtbar wird. Das Jahr 2018 entspricht dem Wert $t = 29$, das Jahr 2022 entspricht dem Wert $t = 33$.
Betrachte die Lösungen aus dem dritten Schritt für $n = 2$ und $n = 3$:

- $n = 2: \quad t_1 \approx -1,172 + 9 \cdot 2 = 16,828$ und $t_2 \approx 5,172 + 9 \cdot 2 = 23,172$
- $n = 3: \quad t_1 \approx -1,172 + 9 \cdot 3 = 25,821$ und $t_2 \approx 5,172 + 9 \cdot 3 = 32,172$

$t_2 \approx 32,172$ ist der erste Zeitpunkt nach dem Jahr 2018, also nach $t = 29$, zu dem die Larvendichte die Grenze 100 passiert.
Der Abbildung in Material 1 kannst du entnehmen, dass der Graph von k an dieser Stelle fällt, die Larvendichte zu diesem Zeitpunkt also abnimmt. Dies ist also der Zeitpunkt, zu dem der Befall nach 2018 zum ersten mal

nicht sichtbar wird. Dieser Zeitpunkt $t \approx 32,172$ liegt im $33.$ Jahr nach Beobachtungsbeginn und damit im Jahr 2022.

2.3 ▶ **Strategien erläutern**

(I) Bei der ersten Methode werden die einzelnen Jahreswerte für $t = 29,\ \ t = 30,\ \ \dots,$ jeweils stellvertretend für das gesamte Jahr 2018, 2019,..., verwendet und deren Mittelwert gebildet.

(II) Bei der zweiten Strategie wird der Mittelwert aller Funktionswerte von k im betrachteten Intervall inklusive einer Stetigkeitskorrektur gebildet. Dieser bezieht auch die Bewegung innerhalb der Jahre mit ein, nicht nur zu den ganzzahligen t-Werten.

▶ **Wert bestimmen und vergleichen**

$$
\begin{aligned}
d_{\mathrm{II}} &= \tfrac{1}{20} \cdot \int_{28{,}5}^{48{,}5} k(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{20} \cdot \int_{28{,}5}^{48{,}5} \left(249,975 \cdot \sin\left(\frac{2}{9}\pi \cdot (t+0,25)\right) + 250,025\right)\ \mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{20} \cdot \left[-\frac{249,975}{\frac{2}{9}\pi} \cdot \cos\left(\tfrac{2}{9}\pi \cdot (t+0,25)\right) + 250,025 \cdot t\right]_{28{,}5}^{48{,}5} \\
&= \tfrac{1}{20} \cdot \left[-\tfrac{89.991}{80}\pi \cdot \cos\left(\tfrac{2}{9}\pi \cdot (t+0,25)\right) + 250,025 \cdot t\right]_{28{,}5}^{48{,}5} \\
&= \tfrac{1}{20} \cdot \Big[-\tfrac{89.991}{80}\pi \cdot \cos\left(\tfrac{2}{9}\pi \cdot (48,5+0,25)\right) + 250,025 \cdot 48,5 \\
&\quad - \left(-\tfrac{89.991}{80}\pi \cdot \cos\left(\tfrac{2}{9}\pi \cdot (28,5+0,25)\right) + 250,025 \cdot 28,5\right)\Big] \\
&\approx 269,56
\end{aligned}
$$

Die beiden Werte $d_{\mathrm{I}} \approx 272,10$ und $d_{\mathrm{II}} \approx 269,56$ weichen nur geringfügig voneinander ab. Mit beiden Strategien ergibt sich für die Jahre von 2018 bis 2037 also eine zu erwartende durchschnittliche maximale Larvendichte pro Jahr von ca. 270 Larven pro kg Zweige.