C2 - Stochastik

1 **Anzahl N_1 berechnen**

$N_1 = (\text{Anzahl der Vorspeisen}) \cdot (\text{Anzahl der Hauptspeisen}) \cdot (\text{Anzahl der Desserts})$

$N_1 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$

Anzahl N_2 berechnen

Laut Aufgabenstellung spielt die Reihenfolge der Speisen keine Rolle. Dadurch ergibt sich:

$$N_2 = \binom{\text{(Gesamtanzahl der Vorspeisen, zur Wahl stehen)}}{\text{(Anzahl der Vorspeisen, die ausgewählt werden sollen)}} \cdot (\text{Anzahl der Desserts})$$

$N_2 = \binom{3}{2} \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$

Anzahl N_3 berechnen

1. Fall: Vorspeise, Hauptspeise, Dessert:

$N_{3a} = (\text{Anzahl der vegetarischen Vorspeisen}) \cdot (\text{Anzahl der vegetarischen Hauptspeisen}) \cdot (\text{Anzahl der vegetarischen Desserts})$

$N_{3a} = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$

2. Fall: Vorspeise 1, Vorspeise 2, Hauptspeise:

Da es nur zwei vegetarische Vorspeisen gibt, ist hier bereits festgelegt, welche Vorspeisen gewählt werden.
$N_{3b} = 1 \cdot (\text{Anzahl der vegetarischen Hauptspeisen})$

$N_{3b} = 1 \cdot 2 = 2$

$N_3 = N_{3a} + N_{3b} = 16 + 2 = 18$

2.1 Bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten kann man genau dann von Bernoulliketten ausgehen, wenn ein Experiment mit nur zwei möglichen Ergebnissen n-mal unabhängig voneinander wiederholt werden kann.

2.2 **Ereignis A**

$P(A) = \binom{10}{4} \cdot 0,3^4 \cdot 0,7^6 \approx 0,2 = 20\,\%$

Ereignis B

X beschreibt die Anzahl der Besucher der Kantine, welche die Spaghetti wählen.

X ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0,2$.

$P(X \leq 8) \approx 0,3 = 30\,\%$

Ereignis C

X beschreibt die Anzahl der Besucher der Kantine, welche das Schnitzel wählen.

X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0,35$.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(X \leq 40) - P(X \leq 29) \\ &\approx 0,75 \\ &= 75\,\% \end{aligned}$$

Ereignis D

X beschreibt die Anzahl der Besucher der Kantine, welche die Lachsröllchen wählen.

Y beschreibt die Anzahl der Besucher der Kantine, welche den kleinen Salat wählen.

X ist binomialverteilt mit $n=4$ und $p=\dfrac{1}{3}$.

Y ist binomialverteilt mit $n=16$ und $p=\dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} P(D) &= P(X=4)\cdot P(Y=5) \\ &\approx 0,0026 \\ &= 0,26\,\% \end{aligned}$$

2.3.1 **Ereignis E**

$P(K)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein vegetarischer Besucher die Käsespätzle wählt. Diese beträgt $50\,\%$.

$P(E)=P(V)\cdot P(\overline{K})=0,3\cdot 0,5=0,15=15\,\%$

Ereignis F

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, die mit dem Satz von Bayes bestimmt wird. Es gilt:

$P_K(V)=\dfrac{P_V(K)\cdot P(V)}{P(K)}$

$P(K)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliger Besucher die Käsespätzle wählt und beträgt $25\,\%$.

Der Anteil der Vegetarier unter den Besuchern, die die Käsespätzle wählen, beträgt

$\dfrac{0,5\cdot 0,3}{0,25}=\dfrac{0,15}{0,25}=0,6.$

Ereignis G

Es gilt:

$$\begin{aligned} P(K) &= 0,25 \\ P(V)\cdot P_V(K)+P(\overline{V})\cdot P_{\overline{V}}(K) &= 0,25 \\ 0,3\cdot 0,5+0,7\cdot P_{\overline{V}}(K) &= 0,25 \end{aligned}$$

Hier gilt außerdem $P_{\overline{V}}(K)=P(G)$ und somit folgt:

$$\begin{aligned} 0,15+0,7\cdot P(G) &= 0,25 \quad && \mid -0,15 \\ 0,7\cdot P(G) &= 0,1 && \mid :0,7 \\ P(G) &= \frac{1}{7} \\ &\approx 0,143 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Besucher, der kein Vegetarier ist, sich für Käsespätzle entscheidet, beträgt $14,3\,\%$.

2.3.2 Bedingung für stochastische Unabhängigkeit:

$P(V\cap K)=P(V)\cdot P(K)$

$P(V \cap K)$ entspricht dem Anteil der Besucher, welche vegetarisch sind und die Käsespätzle wählen. Da die beiden vegetarischen Hauptspeisen bei den Vegetariern gleich beliebt sind, folgt:

$P(V \cap K) = 30\,\% \cdot 0,5 = 15\,\%$

Aus $P(V) = 0,3$ und $P(K) = 0,25$ ergibt sich jedoch:

$P(V) \cdot P(K) = 0,3 \cdot 0,25 = 0,075 = 7,5\,\%$

Da die Bedingung für stochastische Unabhängigkeit somit nicht erfüllt ist, sind die beiden Merkmale V und K stochastisch abhängig voneinander.

3.1 **Rechtsseitiger Hypothesentest**

p beschreibt hierbei den prozentualen Anteil der Besucher der Kantine, weche Vegetarier sind.

H_0 : Der Anteil der Vegetarier beträgt $30\,\%$: $p \leq 0,3$

H_1 : Der Anteil der Vegetarier beträgt mehr als $30\,\%$: $p > 0,3$

Ablehnungsbereich bestimmen

X beschreibt die Anzahl der vegetarischen Besucher der Kantine.

X ist binomialverteilt mit $n = 150$ und $p = 0,3.$

Mit dem WTR ergibt sich:

$P(X \geq 54) = 1 - P(X < 54) \approx 1 - 0,933$

$$\begin{aligned} P(X \geq 55) &= 1 - P(X < 55) \\ &\approx 1 - 0.953 \\ &< 0,05 \end{aligned}$$

Somit folgt der Ablehnungsbereich mit $\overline{A} = [55;150]$

Entscheidungsregel

Geben mindestens 55 der 150 befragten Besucher an, Vegetarier zu sein, so wird die Nullhypothese abgelehnt und angenommen, dass mehr als $30\,\%$ der Besucher vegetarisch sind.

Entscheidung

Da 57 Personen bei der Befragung angeben, Vegetarier zu sein, ist also davon auszugehen, dass der Anteil der Vegetarier gestiegen ist.

3.2 **Fehler 1. Art**

Der Fehler 1. Art ist eine irrtümliche Ablehnung der Nullhypothese.

Es wird also davon ausgegangen, dass der Anteil der Vegetarier gestiegen ist, obwohl dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist.

Mögliche Konsequenzen wären die erhöhte Zubereitung der vegetarischen Speisen sowie eine größere Auswahl an vegetarischen Mahlzeiten.

Fehler 2. Art

Der Fehler 2. Art ist eine irrtümliche Annahme der Nullhypothese.

Beim Fehler 2. Art wird davon ausgegangen, dass sich der Anteil der vegetarischen Besucher nicht erhöht hat, obwohl dieser in Wirklichkeit gestiegen ist.

Mögliche Konsequenzen sind, dass zu wenige vegetarische Speisen produziert und angeboten werden.

3.3 X beschreibt die Anzahl der vegetarischen Besucher der Kantine.

X ist binomialverteilt mit $n = 150$ und $p = 0,4$.

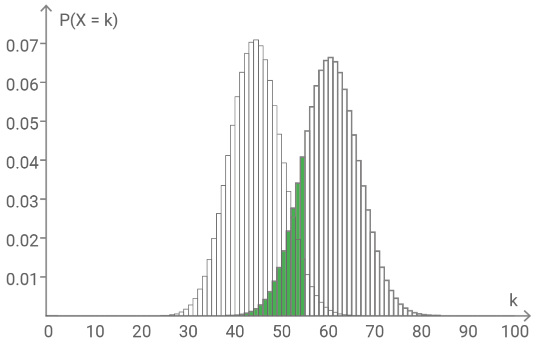
$P(X \leq 54) \approx 0,18 = 18\,\%$

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art bei einer tatsächlichen Erhöhung des Anteils der Vegetarier auf $0,4\,\%$ beträgt somit ungefähr $18\,\%$.

3.4 Da für $p_1 = 0,4$ der Anteil der Vegetarier höher ist als bei $p_0 = 0,3$, liegt das Maximum weiter in positiver Richtung auf der x-Achse.

Der Erwartungswert lässt sich berechnen durch $\mu = 150 \cdot 0,4 = 60$.

Einzeichnen der Fläche, die ein Maß für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art darstellt:



3.5 **Erläuterung des Diagramms**

Je höher der Anteil p der Vegetarier, desto größer wird der Erwartungswert. Mit steigendem Anteil wandert die Verteilung somit auf der x-Achse immer weiter in positive Richtung und entfernt sich zunehmend vom Annahmebereich der Verteilung mit $p_0 = 0,3$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die alternative Hypothese fälschlicherweise angenommen wird, nimmt folglich mit steigendem Anteil p kontinuierlich ab.

Begründung Fehler 1. Art

Der Fehler 1. Art entspricht dem Signifikanzniveau α.

Beträgt dieses nur noch höchstens $4,71\,\%$, so wird der Annahmebereich der Nullhypothese größer. Der Grenzwert des Annahmebereichs wird so berechnet, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit des Bereichs $100\,\% - \alpha$ beträgt. Für ein Signifikanzniveau von höchstens $4,71\,\%$ ergibt sich somit eine Wahrscheinlichkeit von mindestens $95,29\,\%$, dass H_0 beibehalten wird.

Begründung Fehler 2. Art

Der Fehler 2. Art entspricht der irrtümlichen Annahme der Nullhypothese.

Da die Nullhypothese jedoch ebenfalls als $p \leq 0,3$ gewählt wurde, ist diese für $p \leq 0,3$ immer korrekt. Es kann also zu keiner irrtümlichen Annahme kommen.