Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(t) = \dfrac{a + \ln(t)}{t^2}$ mit $a \in \mathbb{R}$

a. Bestimmen Sie die zweite Ableitung von f_a und zeigen Sie, dass deren Term durch $\dfrac{6\ln(t) + 6a - 5}{t^4}$ dargestellt werden kann. (5BE)

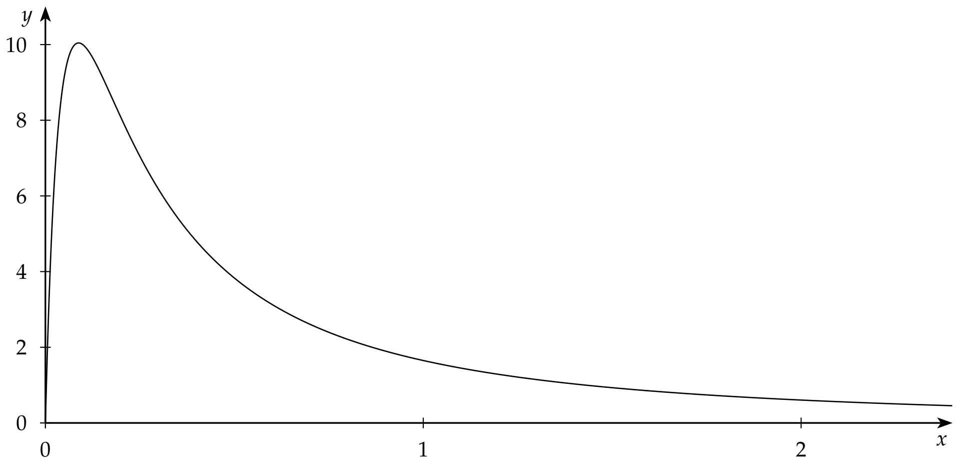
b. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f_a und zeigen Sie damit, dass gilt: (5BE)

$\int f_a(t)dt = \dfrac{-a - 1 - \ln(t)}{t} + C$ mit $C \in \mathbb{R}$

c. Geben Sie den Definitionsbereich für f_a an und begründen Sie das Verhalten von f_a für $t \to \infty$. Untersuchen Sie f_a auf Nullstellen, Extrempunkte und mögliche Wendepunkte (die Wendepunkte nur mit der notwendigen Bedingung). (15BE)

d. Um in der Medizin die Funktion der Lunge zu untersuchen, stellt man die pro Zeit ausgeatmete Luftmenge, den so genannten Fluss (in Litern pro Sekunde), in Abhängigkeit von der Zeit (in Sekunden) fest, während der Patient ausatmet. (15BE)
Beim so genannten Atemstoßtest nach Tiffeneau wird der Patient aufgefordert, nach langsamer, tiefstmöglicher Einatmung schnellstmöglich mit größter Anstrengung die maximale Luftmenge auszuatmen.

Der folgende Graph der Funktion g mit $g(t) = f_2(t + e^{-2}) = \dfrac{2 + \ln(t + e^{-2})}{(t + e^{-2})^2}$ zeigt für einen jungen Patienten den Fluss (in Litern pro Sekunde) während der gesamten Ausatmung, beginnend bei $t_1 = 0$ und endend bei $t_2 = 2,4$ (t in Sekunden).



d.1 Beschreiben Sie kurz den Verlauf der Ausatmung bei diesem Patienten.

d.2 Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme der Tatsache, dass es sich bei g um einen verschobenen Graphen der Funktion f_a handelt, den Zeitpunkt, zu dem der Fluss bei diesem Patienten am stärksten abnahm.

d.3 Das Verhältnis des Volumens, das nach maximaler Einatmung in der ersten Sekunde schnellstmöglich ausgeatmet werden kann, zu dem Volumen, das nach maximaler Einatmung insgesamt ausgeatmet werden kann, sollte bei einem jungen, gesunden Menschen größer als 75 % sein. Überprüfen Sie, ob dies bei diesem Patienten der Fall ist.