Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (\ln(x))^2 + \ln(x), \quad x \in \mathbb{R}^+$.

1. Im Material sind die Graphen der Funktion f sowie die ihrer ersten beiden Ableitungen f' und f'' abgebildet.

1.1 Geben Sie an, welcher der Graphen A, B bzw. C jeweils zu f, f' bzw. f'' gehört. Begründen Sie dies ohne Rechnung mithilfe der Eigenschaften der drei Graphen. (6BE)

1.2 Bestimmen Sie den Inhalt des schraffierten Flächenstücks $S_1S_2S_3$, verwenden Sie hierbei die Werte $x_1 = \mathrm{e}^{-0{,}5}$, $x_2 = 1$ und $x_3 = \mathrm{e}^{0{,}5}$. (8BE)

2.1 Bestimmen Sie mithilfe partieller Integration (Produktintegration) eine Stammfunktion F der Funktion f. (8BE)
[Zur Kontrolle: $F(x) = x(\ln(x))^2 - x\ln(x) + x$]

2.2 Berechnen Sie den Inhalt des von dem Graphen von f und der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücks. (4BE)

3. Die Funktion f gehört $(k = -1)$ zu der Funktionenschar f_k mit
$f_k(x) = (\ln(x))^2 - k \cdot \ln(x), \quad k \in \mathbb{R}$.
Als Funktionenpaar in dieser Schar werden jeweils die beiden Funktionen bezeichnet, bei denen sich der Parameter k nur im Vorzeichen unterscheidet.

3.1 Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionenschar f_k als Extrempunkte nur Tiefpunkte besitzen und dass die Tiefpunkte eines Funktionenpaares die gleiche y-Koordinate besitzen. (6BE)

3.2 Für $|k| = 1$ und $|k| = 2$ sind die Nullstellen der beiden Funktionenpaare im untenstehenden Kasten gegeben. (2BE)
Zeigen Sie für $|k| = 1$ und $|k| = 2$, dass die beiden Nullstellen einer Funktion eines Funktionenpaares jeweils durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor die Nullstellen der anderen Funktion des Funktionenpaares ergeben.

Nullstellen für zwei Funktionenpaare:

$$\begin{array}{lllll}
|k| = 1: & f_{-1}(x)=0 & \Rightarrow & x = \mathrm{e}^{-1}, & x = 1 \\
 & f_{1}(x)=0 & \Rightarrow & x = 1, & x = \mathrm{e} \\
|k| = 2: & f_{-2}(x)=0 & \Rightarrow & x = \mathrm{e}^{-2}, & x = 1 \\
 & f_{2}(x)=0 & \Rightarrow & x = 1, & x = \mathrm{e}^2
\end{array}$$

3.3 Es lässt sich zeigen, dass die folgenden Beziehungen gelten: (6BE)
$f_1(\mathrm{e}^1 \cdot x) = f_{-1}(x)$ und $f_2(\mathrm{e}^2 \cdot x) = f_{-2}(x)$
Deuten Sie diese Beziehungen geometrisch.

Beweisen Sie die Verallgemeinerung:
$f_k(\mathrm{e}^k \cdot x) = f_{-k}(x)$

Material