

C2.1 - Stochastik

1

1.1 Gleichung erläutern

Mit der Gleichung wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass von **60** Körnern genau **55** keimen.

$\binom{60}{55}$: Anzahl Möglichkeiten, dass von **60** Körnern genau **55** keimen

$0,95^{55}$: Wahrscheinlichkeit, dass **55** Körner mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils **95 %** keimen

$0,05^5$: Wahrscheinlichkeit, dass **5** Körner mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils **5 %** nicht keimen

Wert der Gleichung angeben

$$P(X = 55) \approx 0,1016 = 10,16\%$$

Modell begründen

Das Modell der Binomialverteilung kann in diesem Fall verwendet werden, da es genau zwei mögliche Ereignisse gibt (keimen oder nicht keimen) und sich die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen dieser Ereignisse nicht verändert.

1.2 Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der aufkeimenden Körner. X ist $B_{80; 0,95}$ -verteilt.

$$E_1 : P(X \geq 76) = 1 - P(X \leq 75) \approx 0,6289$$

Der zu erwartende Wert entspricht dem Erwartungswert und beträgt $E(X) = 80 \cdot 0,95 = 76$.

$$E_2 : P(74 \leq X \leq 78) = P(X \leq 78) - P(X \leq 73) = 0,8086$$

1.3

1.3.1 Hypothesentest

Es soll ein linksseitiger Hypothesentest durchgeführt werden:

$$H_0 : p \geq 0,95 \quad H_1 : p < 0,95 \quad \alpha = 0,05$$

Sei X die Anzahl der aufkeimenden Körner. X ist $B_{250; 0,95}$ -verteilt.

Der Ablehnungsbereich wird durch $A = \{0; 1; \dots; g\}$ definiert.

Gesucht ist die größte natürliche Zahl g , sodass Folgendes gilt:

$$P(X \leq g) \leq 0,05$$

Durch systematisches Ausprobieren mit dem Taschenrechner folgt:

$$P(X \leq 232) = 0,0788$$

$$P(X \leq 231) = 0,0474$$

Damit gilt für den Ablehnungsbereich: $A = \{0; \dots; 231\}$.

Entscheidungsregel

Wenn maximal **231** Körner aufkeimen, wird die Nullhypothese abgelehnt. Wenn **232** oder mehr Körner aufkeimen, wird die Nullhypothese nicht abgelehnt.

Fehler 2. Art im Sachzusammenhang beschreiben

Der Fehler 2. Art bedeutet, dass die Nullhypothese fälschlicherweise nicht abgelehnt wird, obwohl die Alternativhypothese korrekt ist.

Im Sachzusammenhang: Es wird fälschlicherweise angenommen, dass die Körner mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als **95 %** aufkeimen, da dies nach der Entscheidungsregel von dem Versuchsergebnis gilt. In Wirklichkeit keimen jedoch weniger als **95 %** auf.

1.3.2 Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art

Aus der Entscheidungsregel ergibt sich folgender Annahmebereich für $H_0 : A = \{232; \dots; 250\}$. Zu ermitteln ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl X der aufgekeimten Körner im Annahmebereich A liegt, obwohl die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Körner aufkeimen, nur **90%** beträgt. Dabei gilt $n = 250$ und $p = 0,9$.

$$P(X \geq 232) = 1 - P(X \leq 231) \approx 0,0808.$$

Fehlerwahrscheinlichkeit reduzieren

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art lässt sich reduzieren, indem die Anzahl der überprüften Körner erhöht wird.

2

- 2.1 Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um ein aufgekeimtes Korn handelt, ist gegeben durch $0,85 \cdot 0,95 + 0,15 \cdot 0,9$. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um ein Korn der Sorte B handelt, wird wie folgt berechnet:

$$\frac{0,15 \cdot 0,9}{0,85 \cdot 0,95 + 0,15 \cdot 0,9} \approx 0,1432$$

- 2.2 Für jede Sorte von Samenkorn wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass ein Korn nicht aufkeimt. Diese Wahrscheinlichkeiten werden dann addiert:

$$0,85 \cdot (1 - 0,95) + 0,15 \cdot (1 - 0,9) = 0,0575$$

2.3 1. Schritt: Zähler interpretieren

Im Zähler wird mit $0,15 \cdot 0,9 \cdot 0,3$ die Wahrscheinlichkeit beschrieben, dass ein zufällig dem Boden entnommenes Korn von der Sorte **B** ist, welches aufgekeimt ist und durch Schnecken angefressen

wurde.

2. Schritt: Nenner interpretieren

Es gilt $0,9425 = (1 - 0,0575)$. Dies entspricht der Gegenwahrscheinlichkeit aus Aufgabe 2.2, also der Wahrscheinlichkeit, dass ein dem Boden zufällig entnommenes Korn gekeimt hat.

Damit wird im Nenner mit $0,9425 \cdot 0,2$ die Wahrscheinlichkeit beschrieben, dass ein zufällig dem Boden entnommenes Korn aufgekeimt ist und durch Schnecken angefressen wurde.

3. Schritt: Gesamtinterpretation

Insgesamt wird berechnet, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein dem Boden zufällig entnommener aufgekeimter und angefressener Sämling von der Sorte **B** ist.

- 3 Es gilt: $\mu = 5 \text{ cm}$ und $\sigma = 1,5 \text{ cm}$.

$$P(A) = P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) \approx 0,5$$

Da die Normalverteilung symmetrisch um den Mittelwert $\mu = 5 \text{ cm}$ ist, gilt:

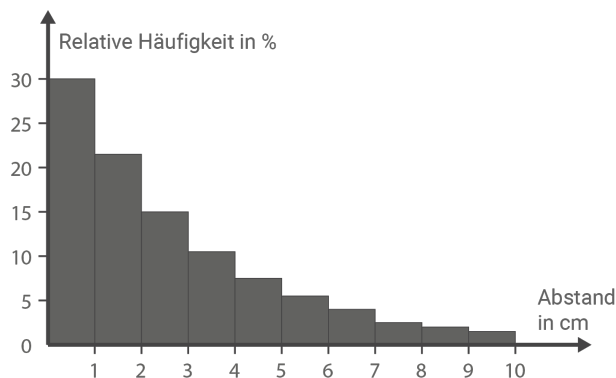
$$P(B) = P(X \geq 7) + P(X \leq 3) = 2 \cdot P(X \leq 3) \approx 0,18$$

Die Wahrscheinlichkeit für Ereignis **A** beträgt **50%** und für Ereignis **B** beträgt sie **18%**.

4

- 4.1 Um die relative Häufigkeit zu berechnen, muss die absolute Häufigkeit durch die Anzahl n aller Häufigkeiten geteilt werden. Es gilt $n = 200$.

Abstand (in cm) im Intervall	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)	[10; ∞)
Relative Häufigkeit in %	30	21,5	15	10,5	7,5	5,5	4	2,5	2	1,5	0



- 4.2 Anhand des Säulendiagramms lässt sich erkennen, dass die Beschreibung des Kornabstands Z einem Ausschnitt einer an der y -Achse gespiegelten Exponentialfunktion entspricht: Abstände, die kleiner als **1 cm** sind, treten am häufigsten auf. Mit Zunahme der Abstände nimmt die relative Häufigkeit monoton ab und nimmt ab einem Abstand von **10 cm** den Wert null an.

Eine allgemeine Funktion dafür wird gerade durch $f(z) = a \cdot e^{-b \cdot z}$, $a, b > 0$ beschrieben.

- 4.3 Da es sich um eine Dichtefunktion handelt, muss die gesamte Fläche unterhalb dieser Funktion der Gesamtwahrscheinlichkeit **100 %**, also **1** entsprechen. Damit muss Folgendes gelten:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} P(0 \leq Z \leq u) &= \frac{a}{b} \\ 1 &= \frac{a}{b} \quad | \cdot b \\ b &= a \end{aligned}$$

Für das Integral im Intervall $[0; 1)$ gilt mit $a = b$:

$$\begin{aligned} P(0 \leq Z \leq 1) &= \frac{a}{b} \cdot (1 - e^{-b}) \quad | \text{Einsetzen} \\ 0,3 &= 1 - e^{-b} \quad | +e^{-b} \quad | -0,3 \\ e^{-b} &= 0,7 \quad | \ln() \quad | \cdot (-1) \\ b &\approx 0,36 \end{aligned}$$

Damit gilt $a = b \approx 0,36$.

- 4.4 Im Sachzusammenhang beschreibt das Ergebnis die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig gemessener Abstand zweier Körner maximal **3 cm** beträgt. Durch Berechnen dieser Wahrscheinlichkeit anhand der Häufigkeitsverteilung im Material folgt:

$$\frac{60}{200} + \frac{43}{200} + \frac{30}{200} = 0,665 = 66,5\%$$

Damit ist der durch die Funktion f berechnete Wert eine gute Näherung an den exakten Wert aus dem Material.