1. **► Term der LORENZ-Funktion bestimmen** (6BE)

Der Graph der LORENZ-Funktion soll durch den Punkt $(0{,}4 \mid 0{,}1)$ verlaufen; der Funktionsterm soll die Form x^r besitzen. Setze also die Koordinaten des Punktes in die Funktionsgleichung ein und löse nach r auf:

$$\begin{aligned} 0{,}1 &= 0{,}4^r && \mid \ln(\,) \\ \ln(0{,}1) &= r \cdot \ln(0{,}4) \\ r &= \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}4)} \approx 2{,}5129 \end{aligned}$$

Damit folgt der Term der LORENZ-Funktion $x^{2{,}5129}$.

► Vermögensanteil berechnen

Betrachte zunächst den Vermögensanteil der **ärmsten** 80 % der Bevölkerung; Setze dazu $x = 0{,}8$ in den Funktionsterm ein:

$0{,}8^{2{,}5129} \approx 0{,}5708$

Die ärmsten 80 % der Bevölkerung besitzen zusammen etwa 57,08 % des Vermögens. Damit besitzen die **reichsten** 20 % den Rest, nämlich 42,92 % des Vermögens.

2. **► Eigenschaften begründen** (12BE)

1. Schritt: Definitionsbereich, Anfangs- und Endpunkt

Der Definitionsbereich entspricht der Menge der Zahlen, die für x eingesetzt werden dürfen. x stellt dabei immer einen **Bevölkerungsanteil** dar und kann somit nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Die Werte Paare $(0 \mid 0)$ und $(1 \mid 1)$ sind klar: **Null** Prozent der Bevölkerung verfügt über **Null** Prozent des Vermögens, während **100** Prozent der Bevölkerung gemeinsam über **100** Prozent des Vermögens verfügt.

2. Schritt: Keine negativen Funktionswerte

Die Funktionswerte der LORENZ-Funktion geben den **Vermögensanteil** an, welchen ein bestimmter Bevölkerungsanteil besitzt. Dieser Vermögensanteil bewegt sich **immer** zwischen 0 und 1; damit können die Funktionswerte nicht negativ werden.

3. Schritt: Monotonie und Krümmungsverhalten

Auf der x-Achse werden die Bevölkerungsanteile in **aufsteigender** Reihenfolge abgetragen; auf der y-Achse die zugehörigen Vermögensanteile. Je größer der Bevölkerungsanteil, desto größer ist auch der zugehörige Vermögensanteil, deshalb sind die Kurven monoton wachsend.

Das Krümmungsverhalten gibt immer Aufschluss über das Verhalten der **Änderungsrate**. Da wir uns auf der x-Achse von den „ärmeren“ zu den „reicheren“ bewegen, steigen die Vermögensanteile immer schneller an. Damit sind alle LORENZ-Kurven linksgekrümmt.

► Eigenschaften nachweisen

1. Schritt: Definitionsbereich, Anfangs- und Endpunkt

Alle $x \in [0;1]$ dürfen eingesetzt werden; damit ist der Definitionsbereich gezeigt. Auch die Funktionswerte

$b(0) = 2 \cdot 1{,}5^0 - 2 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$ und $b(1) = 2 \cdot 1{,}5^1 - 2 = 3 - 2 = 1$

sind schnell gezeigt.

2. Schritt: Keine negativen Funktionswerte

Es gilt: $1{,}5^x \geq 1$ für $x \geq 0$. Damit ist $2 \cdot 1{,}5^x \geq 2$ und somit $b(x) = 2 \cdot 1{,}5^x - 2 \geq 0$ für alle $x \geq 0$.

3. Schritt: Monotonie und Krümmungsverhalten

b ist monoton wachsend und linksgekrümmt, wenn $b'(x) \geq 0$ und $b''(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$.

Umschreiben des Funktionsterms führt zu $b(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{\ln(1,5^x)} - 2 = 2\mathrm{e}^{x \cdot \ln(1,5)} - 2$.

Dann gilt:

$b'(x) = 2 \cdot \ln(1{,}5) \cdot \mathrm{e}^{x \ln(1,5)} = 2\ln(1{,}5) \cdot 1{,}5^x \geq 0$ für alle x

$b''(x) = 2 \cdot \ln(1{,}5)^2 \cdot \mathrm{e}^{x \ln(1,5)} = 2\ln(1{,}5)^2 \cdot 1{,}5^x \geq 0$ für alle x

► LORENZ-Kurve für gleichmäßige Verteilung

Das Vermögen wäre gleichmäßig verteilt, wenn die ärmsten 10 % der Bevölkerung über 10 % der Vermögens verfügen würden; die ärmsten 20 % über 20 %, usw.

Deshalb liegt die Vermutung nahe, dass eine gleichmäßige Verteilung in Form der Gerade $f(x) = x$ dargestellt wird.

3. **► GINI-Koeffizienten berechnen** (13BE)

1. Schritt: Definition übersetzen

Versuchen wir zunächst, die im Text gegebene Definition des GINI-Koeffizienten in Mathematik zu übersetzen. Die „Diagonale des Einheitsquadrats“ ist zunächst eine **Strecke**, welche durch die Punkte $(0 \mid 0)$ und $(0 \mid 1)$ verläuft. Diese Strecke liegt auf der Geraden $y = x$.

Der Inhalt der „Fläche zwischen der Diagonalen des Einheitsquadrats und der jeweiligen LORENZ-Kurve“ entspricht dem Inhalt der **Schnittfläche** der Geraden $y = x$ und des Graphen der LORENZ-Funktion. In unseren zwei Beispielen kann dieser Inhalt über das **Integral** $\int\limits_0^1 (x - f(x))\ \mathrm{d}x$ bzw. $\int\limits_0^1 (x - g(x))\ \mathrm{d}x$ berechnet werden.

Der Flächeninhalt des Dreiecks unter der Diagonalen des Einheitsquadrats ist zuletzt schnell bestimmt. Dieses Dreieck besitzt im Ursprung einen rechten Winkel; beide Katheten haben die Kantenlänge 1. Für den Flächeninhalt gilt folglich: $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

2. Schritt: GINI-Koeffizient von f berechnen

Nach den obigen Überlegungen gilt für den GINI-Koeffizienten G_f der Funktion f:

$$
\begin{aligned}
G_f &= \int\limits_0^1 (x - f(x))\ \mathrm{d}x\ :\ \frac{1}{2} = \int\limits_0^1 \left(x - x^3\right)\ \mathrm{d}x\ \cdot 2 \\
&= 2 \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right]_0^1 \\
&= 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - 0\right] \\
&= 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5
\end{aligned}
$$

3. Schritt: GINI-Koeffizient von g berechnen

$$
\begin{aligned}
G_g &= \int_0^1 (x - g(x))\ \mathrm{d}x\ :\ \frac{1}{2}\\
&= \int_0^1 \left(x - x^8\right)\ \mathrm{d}x\ \cdot 2 = 2\cdot\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{9}x^9\right]_0^1\\
&= 2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\right) - 0\right]\\
&= 2\cdot\frac{7}{18} = \frac{7}{9} \approx 0{,}78
\end{aligned}
$$

▶ GINI-Koeffizienten vergleichen und beschreiben

Es ist deutlich zu erkennen, dass der GINI-Koeffizient von g größer ist als der von f. Die Frage ist nun: Was sagt diese Koeffizient aus? In Aufgabenteil 2 hast du beschrieben, dass eine **gleichmäßige** Vermögensverteilung durch die Funktion $h(x) = x$ beschrieben werden würde.

In diesem Falle wäre der GINI-Koeffizient gerade **Null**, weil der Ausdruck im Argument des Integrals $\int_0^1 (x - h(x))\ \mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x)\,\mathrm{d}x = 0$ sein würde.

Wir können also sagen: Je **kleiner** der GINI-Koeffizient, desto **gleichmäßiger** ist das Gesamtvermögen in der Bevölkerung verteilt. Somit stellt Funktion f eine gleichmäßigere Vermögensverteilung dar als Funktion g.

Je ungleichmäßiger das Gesamtvermögen verteilt ist, desto **größer** wird die Fläche, die zwischen der Diagonalen und der LORENZ-Kurve eingeschlossen wird. Aufgrund der Forderungen aus Teilaufgabe 2 kann sich der Graph immer nur innerhalb des Dreiecks unterhalb der Diagonalen bewegen. Die Fläche nimmt somit **höchstens** den Inhalt $\frac{1}{2}$ an.

Auch der GINI-Koeffizient würde dann den Wert 1 annehmen. Er bewegt sich also **immer** zwischen 0 und 1.

▶ Allgemeinen GINI-Koeffizienten nachweisen

Nach der Überlegung von oben gilt für diesen GINI-Koeffizienten:

$$
\begin{aligned}
G &= \int_0^1 (x - x^r)\ \mathrm{d}x\ \cdot 2 = 2\cdot\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{r+1}x^{r+1}\right]_0^1\\
&= 2\cdot\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r+1}\right) - 0\right]\\
&= 2\cdot\left(\frac{r+1}{2(r+1)} - \frac{2}{2(r+1)}\right)\\
&= \cancel{2}\cdot\frac{r+1-2}{\cancel{2}1} = \frac{r-1}{r+1}
\end{aligned}
$$

4. **▶ GINI-Koeffizienten bestimmen** (9BE)

Wir wollen in einem ersten Schritt eine **Stammfunktion** von b ermitteln. Dazu bietet es sich an, den Funktionsterm von b zunächst umzuschreiben.

$b(x) = 2\cdot 1{,}5^x - 2 = 2\cdot \mathrm{e}^{\ln(1{,}5^x)} - 2 = 2\cdot\mathrm{e}^{x\cdot\ln(1{,}5)} - 2$

Für eine Stammfunktion gilt nun (lineare Substitution):

$B(x) = 2\cdot\dfrac{1}{\ln(1{,}5)}\cdot\mathrm{e}^{x\cdot\ln(1{,}5)} - 2x$

Somit ergibt sich für den GINI-Koeffizienten:

$$G_b = \int_0^1 (x - b(x))\,dx \;:\; \frac{1}{2} = \int_0^1 (x - 2\cdot 1{,}5^x - 2)\,dx \;\cdot 2$$
$$= 2\cdot\left[\frac{1}{2}x^2 - \left(\frac{2}{\ln(1{,}5)}\cdot e^{x\cdot\ln(1{,}5)} - 2x\right)\right]_0^1$$
$$= 2\cdot\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{\ln(1{,}5)}\cdot e^{x\cdot\ln(1{,}5)} + 2x\right]_0^1$$
$$= 2\cdot\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\ln(1{,}5)}\cdot e^{\ln(1{,}5)} + 2\right) - \left(0 - \frac{2}{\ln(1{,}5)}\cdot e^0\right)\right]$$
$$= 2\cdot\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\ln(1{,}5)}\cdot 1{,}5 + \frac{2}{\ln(1{,}5)}\right)$$
$$= 2\cdot\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\ln(1{,}5)}\cdot 0{,}5\right)$$
$$= 5 - \frac{2}{\ln(1{,}5)} \approx 0{,}0673$$

► Werte der Ableitung berechnen (7BE)

In Teilaufgabe 2 haben wir bereits den Term der ersten Ableitung von b ermittelt, nämlich $b'(x) = 2\ln(1{,}5)\cdot 1{,}5^x$.

An den Stellen 0,4 und 0,9 nimmt die Ableitung die Werte an:

$b'(0{,}4) = 2\cdot\ln(1{,}5)\cdot 1{,}5^{0{,}4} \approx 0{,}9537,\;\; b'(0{,}9) = 2\cdot\ln(1{,}5)\cdot 1{,}5^{0{,}9} \approx 1{,}1681$

Auf der x-Achse werden die Bevölkerungsanteile in Prozent abgetragen, auf der y-Achse den Vermögensanteil, den dieser Bevölkerungsanteil besitzt.

Die Ableitung ist die **Änderungsrate** der Vermögensanteile und beschreibt den **Vermögenszuwachs in Prozent**. Grafisch können wir uns die Situation (näherungsweise) so veranschaulichen: