A – Pflichtaufgaben

Analysis (Niveau 1)

1.1 Der Graph G_f, die x-Achse sowie die Geraden mit den Gleichungen $x=-2$ und $x=8$ schließen eine Fläche ein, deren Teil unterhalb der x-Achse einen kleineren Inhalt besitzt als deren Teil oberhalb.

Deshalb ist der Wert des Integrals nicht negativ.

1.2 Ableitungsfunktion bilden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cdot\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{2} \\ &= \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \end{aligned}$$

Für die Steigung der Tangente an G_f im Koordinatenursprung gilt:

$$\begin{aligned} m &= f'(0) \\ &= \cos\left(\frac{1}{2}\cdot 0\right) \\ &= \cos(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Einsetzen der Koordinaten des Koordinatenursprungs sowie der Steigung m in die allgemeine Tangentengleichung liefert:

$$\begin{aligned} y &= m\cdot x+c \\ 0 &= 1\cdot 0+c \\ 0 &= c \end{aligned}$$

Eine Gleichung der Tangente ergibt sich also zu:

$$t: y = 1\cdot x+0 = x$$

Die Gerade mit der Gleichung $y=x$ verläuft also durch alle Punkte, deren x-Koordinate mit ihrer y-Koordinate übereinstimmt, und somit auch durch die Punkte $(-1\mid -1)$ und $(1\mid 1)$.

Somit trifft die Aussage zu.

Analysis (Niveau 1)

2.1 Es soll gelten:

$$\begin{aligned} f_a(1) &= 6 \\ a\cdot 1^3 + a\cdot 1^2 &= 6 \\ 2a &= 6 \qquad \mid :2 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Für $a = 3$ liegt der Punkt $(1 \mid 6)$ folglich auf dem Graphen von f_a.

2.2 **1. Schritt: Nullstellen berechnen**

$$\begin{aligned} f_a(x) &= 0 \\ ax^3 + ax^2 &= 0 \\ ax^2(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt folgen die Nullstellen direkt mit $x_1 = 0$ sowie:

$$\begin{aligned} x_2 + 1 &= 0 \qquad \mid -1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

2. Schritt: Flächeninhalt berechnen

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} f_a(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} \left(ax^3 + ax^2\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}ax^3\right]_{-1}^{0} \\ &= \left(\frac{1}{4}\cdot a\cdot 0^4 + \frac{1}{3}\cdot a\cdot 0^3\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot a\cdot (-1)^4 + \frac{1}{3}\cdot a\cdot (-1)^3\right) \\ &= (0+0) - \left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{3}a\right) \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{12}a\right) \\ &= \frac{1}{12}a\ [\mathrm{FE}] \end{aligned}$$

Der Graph von f_a schließt mit der x-Achse folglich eine Fläche mit einem Inhalt von $\frac{1}{12}a$ Flächeneinheiten ein.

Lineare Algebra / Analytische Geometrie (Niveau 1)

3.1 E_a ist genau dann parallel zur gegebenen Gerade, wenn ein Normalenvektor $\overrightarrow{n_a}$ von E_a orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden steht. Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2a \\ -4 \\ a-2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ 2a \cdot (-1) + (-4) \cdot 0 + (a-2) \cdot 1 &= 0 \\ -2a + a - 2 &= 0 \qquad \mid +2 \\ -a &= 2 \qquad \mid \cdot(-1) \\ a &= -2 \end{aligned}$$

Für $a = -2$ verläuft die Ebene E_a folglich parallel zur gegebenen Geraden.

3.2 Damit die Ebene zur Ebenenschar E_a gehört, muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 2a \\ -4 \\ a-2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die zweite Zeile liefert $k = 0,5.$

Mit der ersten Zeile folgt für den Wert von a :

$$a = 0,5 \cdot 6 = 3$$

Für die dritte Zeile folgt:

$$\begin{aligned} 3 - 2 &= 0,5 \cdot 1 \\ 1 &= 0,5 \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Die Ebene gehört also nicht zur Ebenenschar E_a.

Stochastik (Niveau 1)

4.1 Für die Standardabweichung gilt:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Der Parameter n ist bei beiden Verteilung gleich und entspricht den 100 Drehungen.

Da außerdem jeweils die Wahrscheinlichkeit p und die Gegenwahrscheinlichkeit $(1-p)$ multipliziert werden, wird bei beiden Standardabweichungen die Wahrscheinlichkeit für „Blau“ und für „Gelb“ multipliziert.

Damit haben X und Y folglich die gleiche Standardabweichung.

4.2 Aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X kann der Erwartungswert $\mu = 75$ abgelesen werden.

Es gilt:

$$
\begin{array}{rcll}
\mu &=& n \cdot p & \\
75 &=& 100 \cdot \dfrac{x}{20} & \mid :100 \\
0,75 &=& \dfrac{x}{20} & \mid \cdot 20 \\
15 &=& x &
\end{array}
$$

Das Glücksrad besitzt somit 15 blaue Sektoren.