1. **► Wahrscheinlichkeiten bestimmen** (6BE)

Ereignis A

Sei X die Anzahl matschiger Äpfel in der Stichprobe. X kann als binomialverteilt angenommen werden, denn

- entweder ein Apfel ist matschig oder nicht
- die Äpfel werden unabhängig von einander matschig
- die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$, dass ein Apfel matschig wird, wird als gleich bleibend angenommen

Die Parameter für die Binomialverteilung sind zunächst $p = 0{,}2$ und $n = 7$. Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$.

$$P(X=2) = \binom{7}{2} \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^5 = 21 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}32768 \approx 0{,}2753$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 27,53 % sind genau 2 der 7 Äpfel matschig.

Ereignis B

Es gilt nun $p = 0{,}2$ und $n = 20$. Gefragt ist nach $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$.

►► Lösungsweg A: Aufsummieren von Hand

$$\begin{aligned} 1 - P(X \leq 1) &= 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - \left(\binom{20}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{19}\right) \\ &= 1 - (0{,}01153 + 0{,}05765) = 0{,}93082 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 93,1 % sind mindestens 2 der 20 Äpfel matschig.

►► Lösungsweg B: Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung

Aus einer Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0{,}2$ folgt $P(X \leq 1) = 0{,}069$ und damit $P(X \geq 2) = 1 - 0{,}069 = 0{,}931$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 93,1 % sind mindestens 2 der 20 Äpfel matschig.

Ereignis C

Jetzt ist $n = 100$ und $p = 0{,}2$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(15 \leq X \leq 25) = P(X \leq 25) - P(X \leq 14)$.

Aus einer Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung für $n = 100$ und $p = 0{,}2$ folgen die Wahrscheinlichkeiten

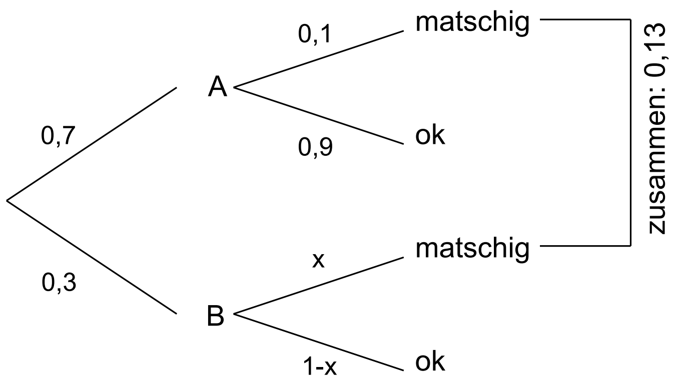
$P(X \leq 25) = 0{,}913$ und $P(X \leq 14) = 0{,}080$.

Damit gilt: $P(15 \leq X \leq 25) = P(X \leq 25) - P(X \leq 14) = 0{,}913 - 0{,}080 = 0{,}833$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 83,3 % sind mindestens 15, aber höchstens 25 der 100 Äpfel matschig.

2. **► Prozentualen Anteil bestimmen** (6BE)

Sei x der noch unbekannte Anteil matschiger Äpfel von Lieferant B. Wir können die Situation zunächst in einem Baumdiagramm darstellen:



Der gesamte Anteil matschiger Äpfel beläuft sich auf 13 %. Nach der Pfadregel gilt:

$0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot x = 0{,}13 \;\Leftrightarrow\; 0{,}3x = 0{,}06 \;\Leftrightarrow\; x = 0{,}2$

Der Anteil matschiger Äpfel bei Lieferant B beträgt 20 %.

Es ist bekannt, dass Lieferant A 70 % der Äpfel liefert und Lieferant B 30 %.

Damit liefert Lieferant A **insgesamt** $0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}07 \mathrel{\widehat{=}} 7\,\%$ matschige Äpfel und Lieferant B $0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06 \mathrel{\widehat{=}} 6\,\%$ matschige Äpfel. **Zahlenmäßig** liefert Lieferant B also **weniger** matschige Äpfel.

3. ▶ **Annahme- und Verwerfungsbereich ermitteln** (12BE)

Getestet wird die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0{,}2$ auf einem Signifikanzniveau von 5 %. Dabei werden 20 zufällig ausgewählte Äpfel untersucht. Die Nullhypothese wird verworfen, wenn **sehr viele** Äpfel matschig sind; gesucht ist demnach eine Zahl k, welche die **obere Grenze** des Annahmebereichs markiert:

$A = \{0; 1; ...; k\}$ und $\overline{A} = \{k+1; k+2; ...; 20\}$.

Sei X wieder die Anzahl matschiger Äpfel in der Stichprobe. Mit der Begründung aus Aufgabenteil 1 kann X bei wahrer Nullhypothese als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 20$ und $p = 0{,}2$.

Das **Signifikanzniveau** gibt uns die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art an, d.h. dafür, dass die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie eigentlich richtig ist. Dies ist dann der Fall, wenn bei wahrer Nullhypothese **mindestens $k+1$** matschige Äpfel in der Stichprobe gefunden werden, d.h.:

$$\begin{aligned} P(X \geq k+1) &< 0{,}05 \\ 1 - P(X \leq k) &< 0{,}05 \\ P(X \leq k) &> 0{,}95 \end{aligned}$$

Gesucht ist nun der **kleinste** Wert, für den diese Ungleichung gilt. Eine Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung für $n = 20$ und $p = 0{,}2$ liefert $k = 7$ und damit

$A = \{0; 1; ...; 7\}$ und $\overline{A} = \{8; 9; ...; 20\}$.

Die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0{,}2$, dass höchstens 20 % der Äpfel matschig sind, wird **verworfen**, wenn mindestens 8 matschige Äpfel in der Stichprobe gefunden werden.

▶ **Fehlerwahrscheinlichkeit berechnen**

Es wird nun von einem tatsächlichen Anteil matschiger Äpfel von 40 % ausgegangen. Die Parameter unserer binomialverteilten Zufallsgröße X ändern sich somit zu $n = 20$ und $p = 0{,}4$. Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ergebnis im **Annahmebereich** der Nullhypothese liegt, d.h. $P(X \leq 7)$.

Aus einer Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung für $n = 20$ und $p = 0{,}4$ folgt: $P(X \leq 7) = 0{,}416$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 41,6 % liegt das Testergebnis im Annahmebereich der Nullhypothese, wenn der tatsächliche Anteil matschiger Äpfel bei 40 % liegt.

Du hast eben die **Wahrscheinlichkeit** für den **Fehler 2. Art** ermittelt: Die Nullhypothese wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 41,6 % **angenommen**, obwohl sie eigentlich falsch ist.

▶ Zusammenhang in Abbildung 1 erläutern

Auf der x-Achse wird der **tatsächliche** Anteil matschiger Äpfel abgetragen; auf der y-Achse die zugehörige Wahrscheinlichkeit für den **Fehler 2. Art**.

Dieser β-Fehler beschreibt, dass die Nullhypothese **angenommen wird**, obwohl der tatsächliche Anteil matschiger Äpfel **größer** als 20 % ist.

Wie in der Abbildung zu sehen ist, nimmt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art ab, je weiter der tatsächliche Anteil matschiger Äpfel von 20 % **abweicht**. Dies macht auch Sinn: Je mehr matschige Äpfel geliefert werden, desto **kleiner** wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Stichprobe höchstens 7 matschige Äpfel gefunden werden.

4. **▶ Ansatz beurteilen** (6BE)

Im Test aus Aufgabenteil 3 wurde die Nullhypothese verworfen, wenn **besonders viele** matschige Äpfel in der Stichprobe gefunden wurden; mit der neuen Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}2$ ändert sich dies: der Signifikanztest wird **linksseitig**, d.h. die Nullhypothese wird verworfen, wenn **besonders wenige** matschige Äpfel gefunden werden.

Gesucht ist also wieder eine Zahl k, welche dieses Mal allerdings die **untere Grenze** des Annahmebereichs markiert, d.h. wir setzen

$\overline{A} = \{0; 1; ..; k-1\}$ und $A = \{k; k+1; ...; 20\}$

Da der Test „unter gleichen Bedingungen“ durchgeführt wird, wird auch hier auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet. Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
P(X \leq k-1) &< 0{,}05 \qquad | \text{ Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung: } k-1=0 \\
k-1 &= 0 \\
k &= 1
\end{aligned}
$$

Mit dem Annahmebereich $A = \{2; 3; ...; 20\}$ wird die Nullhypothese, dass sich **mindestens 20 %** matschige Äpfel in der Lieferung befinden, bereits angenommen, wenn mindestens 2 matschige Äpfel gefunden werden. Es wird also viel schneller davon ausgegangen, dass die Lieferung „schlecht“ ist.

Für den Lieferanten ist dieses Testverfahren sicher nicht akzeptabel: Das Risiko, dass die Lieferung okay ist und dennoch nicht angenommen wird, ist dabei viel zu hoch.

Für die Kunden des Obsthändlers andererseits ist das Testverfahren von Vorteil, denn für sie sinkt die Wahrscheinlichkeit, matschige Äpfel zu kaufen, beträchtlich.