B1 - Analysis

1 Eine Flasche Wasser wird in einem Kühlschrank auf 8 °C abgekühlt. An einem Sommertag wird diese entnommen und in ein Zimmer mit 30 °C Raumtemperatur gestellt. 10 Minuten später hat sich das Wasser bereits auf 21,9 °C erwärmt. Im Modell wird davon ausgegangen, dass sich die Raumtemperatur nicht verändert.

Der Temperaturverlauf der Erwärmung des Wassers kann durch die Funktion w beschrieben werden mit:

$$w(t)=T_R-(T_R-T_0)\cdot \mathrm{e}^{-kt}$$

Dabei bedeutet:

- t : Zeit in Minuten nach Entnahme aus dem Kühlschrank
- $w(t)$: Temperatur des Wassers in °C zum Zeitpunkt t
- T_0 : Temperatur des Wassers in °C zum Zeitpunkt $t=0$
- T_R : Raumtemperatur in °C

1.1 Nenne die Werte für die Parameter T_R und T_0.
Ermittle auf vier Nachkommastellen gerundet den Wert für den Parameter k und gib die zugehörige Funktionsgleichung $w(t)$ an.

[Zur Kontrolle: $k\approx 0,1$]

(4 BE)

Verwende im Folgenden die Funktionsgleichung $w(t)=30-22\cdot \mathrm{e}^{-0,1t}$.

1.2 Berechne, um wie viel Prozent die Temperatur des Wassers in den ersten 10 Minuten nach Entnahme aus dem Kühlschrank zunimmt.

(2 BE)

1.3 Berechne den Wert des Terms $\frac{1}{10}\cdot\int\limits_0^{10} w(t)dt$ und deute das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(4 BE)

1.4 Begründe mithilfe des Funktionsterms, dass gilt: $\lim\limits_{t\to\infty} w(t)=30$

Erläutere diesen Grenzwert im Sachzusammenhang.

(3 BE)

1.5 Berechne, mit welcher Geschwindigkeit sich das Wasser zum Zeitpunkt der Entnahme aus dem Kühlschrank erwärmt, und berechne, wann sich diese Erwärmungsgeschwindigkeit halbiert hat.

Zeige, dass gemäß der Modellierung durch die Funktion w die Erwärmungsgeschwindigkeit im Zeitverlauf abnimmt, jedoch nie null wird.

(9 BE)

1.6 Eine Funktion f beschreibt ein begrenztes Wachstum, wenn die Wachstumsgeschwindigkeit proportional zur Differenz aus Sättigungsgrenze S und dem aktuellen Bestand ist, d.h., wenn $f'(t)=k\cdot(S-f(t))$ gilt.
Zeige unter Verwendung des Kontrollergebnisses für k aus Aufgabe 1.1, dass die Funktion w ein begrenztes Wachstum beschreibt.
Deute den Wert für k im Sachzusammenhang.

(4 BE)

2 Gegeben ist die Funktionenschar f_n mit $f_n(x) = (x+1)^n \cdot \mathrm{e}^x$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $n > 1$ gilt. Im Material sind zwei ausgewählte Graphen der Schar abgebildet.

2.1 Zeige, dass alle Graphen der Schar dieselbe Nullstelle und den denselben y-Achsenabschnitt besitzen, und gib die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.

(3 BE)

2.2 Die Graphen von f_n nähern sich für $x \to -\infty$ der x-Achse an.
Begründe dieses Verhalten anhand des Funktionsterms.

Die beiden im Material abgebildeten Graphen unterscheiden sich bei der Annäherung an die x-Achse.
Erkläre diesen Unterschied anhand des Funktionsterms.

(5 BE)

2.3 Ermittle die Gleichung der Ableitungsfunktion f_n' und zeige, dass gilt:

$$f_n'(x) = (x+1+n) \cdot f_{n-1}(x)$$

(4 BE)

2.4 Berechne die möglichen Extremstellen von f_n. Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist hierbei ausreichend.

Gib die Skalierung der Achsen im Material an.
Bestimme für beide Graphen I und II im Material die zugehörigen Werte des Parameters n.

(6 BE)

2.5 An der Stelle $x = -1$ besitzen die Graphen der Funktionenschar f_n für gerade Werte von n einen Extrempunkt und für ungerade Werte von n einen Sattelpunkt.

Begründe diese Aussage.

(6 BE)

Material