B2 - Analysis

1.1 **Parameter berechnen**

Gegeben sind die Koordinaten der beiden Punkte $P_1(0 \mid 50)$ und $P_2(18 \mid 568)$.

Einsetzen der Koordinaten von P_1 in $f_1(t)$ liefert:

$$\begin{array}{rcl} f_1(0) &=& 50 \\ a\cdot \mathrm{e}^{k\cdot 0} &=& 50 \\ a &=& 50 \end{array}$$

Mit den Koordinaten von P_2 folgt:

$$\begin{array}{rcll} f_1(18) &=& 568 & \\ 50\cdot \mathrm{e}^{k\cdot 18} &=& 568 & \mid :50 \\ \mathrm{e}^{k\cdot 18} &=& \dfrac{568}{50} & \mid \ln \\ 18k &\approx& 2,43 & \mid :18 \\ k &\approx& 0,135 & \end{array}$$

Begründung

Die Exponentialfunktion strebt mit zunehmenden Werten von t gegen Unendlich. Ein solch enormes und rasch steigendes Wachstum kann durch verschiedene Umweltfaktoren nicht auftreten, da der Lebensraum, die Lebenszeit sowie die Nahrungsquellen der Elche begrenzt sind.

1.2 Die Steigung $m = 76$ bedeutet, dass die Anzahl der Elche jedes Jahr um 76 Elche zunimmt.

1.3.1 Für $t \to +\infty$ verläuft $\mathrm{e}^{6,75-0,135\cdot t} \to 0.$

Somit folgt für den gesamten Funktionsterm:

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{t\to+\infty} f_3(t) &=& 2200 - 50\cdot 0 \\ &=& 2200 \end{array}$$

1.3.2 Kettenregel anwenden:

$$f_3'(t) = -50\cdot \mathrm{e}^{6,75-0,135\cdot t}\cdot(-0,135)$$

Der Zeitpunkt ab dem die Wachstumsrate höchstens 10 Elche pro Jahr beträgt, ergibt sich aus:

$$\begin{array}{rcll} f_3(t) & \leq & 10 & \\ -50\cdot \mathrm{e}^{6,75-0,135\cdot t}\cdot(-0,135) & \leq & 10 & \mid :(-50) \quad \mid :(-0,135) \\ \mathrm{e}^{6,75-0,135\cdot t} & \geq & \dfrac{10}{6,75} & \mid \ln \\ 6,75-0,135\cdot t & \approx & 0,393 & \mid -6,75 \quad \mid :(-0,135) \\ t & \approx & 47,1 & \end{array}$$

Mit Hilfe der Abbildung 2 folgt, dass die Wachstumsrate etwa ab dem 47. Jahr höchstens 10 Elche pro Jahr beträgt.

1.3.3 Mit dem WTR ergibt sich:

$$\frac{1}{18}\cdot\int_{32}^{50} f_3(t)\;\mathrm{d}t \approx 1987$$

In den Jahren 32 bis 50 nach Beginn der Untersuchung beträgt die Anzahl der Elche durchschnittlich 1987.

2.1 Mit der Produktregel ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} g''(t) & = & r\cdot(g'(t)\cdot(2200-g(t))+g(t)\cdot(-g'(t))) \\ & = & r\cdot(g'(t)\cdot 2200-g'(t)\cdot g(t)-g'(t)\cdot g(t)) \\ & = & r\cdot g'(t)\cdot(2200-g(t)-g(t)) \\ & = & r\cdot g'(t)\cdot(2200-2\cdot g(t)) \end{array}$$

2.2 **y-Koordinate des Wendepunktes bestätigen**

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $g''(t)=0$

Einsetzen von $y_w=g(t)=1100$ in $g''(t)$:

$$\begin{array}{rcl} g''(w) & = & r\cdot g'(t)\cdot(2200-2\cdot 1100) \\ & = & r\cdot g'(t)\cdot 0 \\ & = & 0 \end{array}$$

Somit liegt für die y-Koordinate $y_w=1100$ ein Wendepunkt des Graphen vor.

x-Koordinate des Wendepunktes berechnen

Es gilt:

$$
\begin{array}{rcll}
g(t) & = & 1100 & \\
\dfrac{2200}{1+43\cdot \mathrm{e}^{-0,04\cdot \ln(43)\cdot t_w}} & = & 1100 & \mid \cdot \left(1+43\cdot \mathrm{e}^{-0,04\cdot \ln(43)\cdot t_w}\right) \\
2200 & = & 1100+47300\cdot \mathrm{e}^{-0,04\cdot \ln(43)\cdot t_w} & \mid -1100 \\
1100 & = & 47300\cdot \mathrm{e}^{-0,04\cdot \ln(43)\cdot t_w} & \mid :47300 \\
\dfrac{1100}{47300} & = & \mathrm{e}^{-0,04\cdot \ln(43)\cdot t_w} & \mid \ln \\
-3,76 & \approx & -0,04\cdot \ln(43)\cdot t_w & \mid :(-0,04\cdot \ln(43)) \\
25 & \approx & t_w &
\end{array}
$$

Bedeutung im Sachzusammenhang

t_w beschreibt das Jahr nach Beginn der Untersuchung, in welchem die Anzahl der Elche am stärksten zunimmt.

2.3 Aus der Gleichung kann die Punktsymmetrie des Graphen zum Punkt $S(25 \mid g(25))$ gefolgert werden.

3.1 **Geometrische Operationen beschreiben**

Der Faktor 10 streckt den Graphen der Sinusfunktion in y-Richtung und vergrößert somit die Amplitude um das 10-fache.

Der Faktor $0,08\cdot\pi$ streckt den Graphen der Sinusfunktion in x-Richtung und vergrößert somit die Periodenlänge.

Durch Addition von 23 wird der Graph der Sinusfunktion um 23 Einheiten in positive y-Richtung verschoben.

Periodenlänge berechnen

Es gilt:

$$
\begin{array}{rcll}
b & = & 0,08\cdot\pi & \\
\dfrac{2\pi}{p} & = & 0,08\cdot\pi & \mid :\pi \\
\dfrac{2}{p} & = & 0,08 & \mid \cdot p \\
2 & = & 0,08\cdot p & \mid :0,08 \\
25 & \approx & p &
\end{array}
$$

Die Periodenlänge von w beträgt somit 25.

Maximale und minimale Anzahl ermitteln

Da die Sinusfunktion um den Faktor 23 in y-Richtung verschoben ist und die Amplitude 10 besitzt, folgt die maximale Anzahl der Wölfe mit $23 + 10 = 33$ und die minimale Anzahl mit $23 - 10 = 13$.

3.2 **1. Schritt: Ableitungen bestimmen**

$$\begin{aligned} w'(t) &= 10 \cdot \cos(0,08\pi \cdot t) \cdot 0,08\pi \\ &= 0,8\pi \cdot \cos(0,08\pi \cdot t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w''(t) &= 0,8\pi \cdot (-\sin(0,08\pi \cdot t)) \cdot 0,08\pi \\ &= -0,064 \cdot \pi^2 \cdot \sin(0,08 \cdot \pi \cdot t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(t) &= 500 \cdot (-\sin(0,08\pi \cdot t)) \cdot 0,08\pi \\ &= -40\pi \cdot \sin(0,08\pi \cdot t) \end{aligned}$$

2. Schritt: Proportionalität nachweisen

$$\begin{aligned} w''(t) &= c \cdot h'(t) & \\ -0,064 \cdot \pi^2 \cdot \sin(0,08 \cdot \pi \cdot t) &= -c \cdot 40\pi \cdot \sin(0,08\pi \cdot t) & \mid : \pi \sin(0,08 \cdot \pi \cdot t) \\ -0,064 \cdot \pi &= -c \cdot 40 & \mid : (-40) \\ \frac{1}{625} \cdot \pi &= c & \end{aligned}$$

Somit sind die zweite Ableitungsfunktion $w''(t)$ und die erste Ableitungsfunktion $h'(t)$ propotional zueinander mit der Proportionalitätskonstante $c = \frac{1}{625}\pi$.

3.3 **Begründung**

Für die Stellen, an denen ein Hochpunkt von h vorliegt, gilt $h'(t_H) = 0$.

Da $h'(t)$ proportional zu $w''(t)$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} w''(t_H) &= \frac{1}{625}\pi \cdot h'(t_H) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dies entspricht der notwendigen Bedingung für eine Extremstelle bei w'.

Aus der Proportionalität von h' und w'' folgt auch die Proportionalität von h'' und w''', wodurch ebenso die hinreichende Bedingung erfüllt ist.

Wegen $c > 0$ wird außerdem garantiert, dass sich an den Stellen, an denen sich ein Hochpunkt von h befindet, auch ein Hochpunkt und kein Tiefpunkt von w' befindet.

Deutung im Sachzusammenhang

In dem Jahr, in dem die Anzahl der Elche maximal ist, nimmt die Wolfspopulation am stärksten zu.