A1 - Analysis

1 **1. Schritt: Vorgegebene Bedingungen einsetzen**

Aus der ersten Angabe folgt:

$$\begin{aligned} f_{a,b,c}(0) &= 80 \\ a+b\cdot 0^2\cdot \mathrm{e}^{c\cdot 0} &= 80 \\ a &= 80 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Angabe folgt:

$$\begin{aligned} f_{a,b,c}(1) &= 740 \\ a+b\cdot 1^2\cdot \mathrm{e}^{c\cdot 1} &= 740 \quad \mid a=80 \\ 80+b\cdot \mathrm{e}^{c} &= 740 \end{aligned}$$

Aus der dritten Angabe folgt:

$$\begin{aligned} f_{a,b,c}(3) &= 120 \\ a+b\cdot 3^2\cdot \mathrm{e}^{c\cdot 3} &= 120 \quad \mid a=80 \\ 80+9b\cdot \mathrm{e}^{3c} &= 120 \end{aligned}$$

2. Schritt: Gleichungssystem aufstellen

Mit dem Einsetzungsverfahren ergibt sich:

$$\begin{array}{llcll}
\text{II} & 80+b\cdot \mathrm{e}^{c} & = & 740 & \\
\text{III} & 80+9b\cdot \mathrm{e}^{3c} & = & 120 & \\
\hline
\text{II} & 80+b\cdot \mathrm{e}^{c} & = & 740 & \mid -80 \qquad (\text{nach } b \text{ umformen}) \\
 & b\cdot \mathrm{e}^{c} & = & 660 & \mid :\mathrm{e}^{c} \\
 & b & = & \dfrac{660}{\mathrm{e}^{c}} & \\
\text{III} & 80+9\cdot b\cdot \mathrm{e}^{3c} & = & 120 & \\
\hline
\text{IIa} & b & = & \dfrac{660}{\mathrm{e}^{c}} & \\
\text{III} & 80+9\cdot b\cdot \mathrm{e}^{3c} & = & 120 & \mid \text{IIa in III} \\
 & 80+9\cdot \dfrac{660}{\mathrm{e}^{c}}\cdot \mathrm{e}^{3c} & = & 120 & \mid -80 \\
 & 5.940\cdot \mathrm{e}^{2c} & = & 40 & \mid :5.940 \\
 & \mathrm{e}^{2c} & = & \dfrac{2}{297} & \mid \ln \\
 & 2c & = & \ln\left(\dfrac{2}{297}\right) & \mid :2 \\
 & c & = & \dfrac{1}{2}\cdot \ln\left(\dfrac{2}{297}\right) & \\
\hline
\text{IIa} & b & = & \dfrac{660}{\mathrm{e}^{c}} & \mid \text{IIIa in IIa} \\
\text{IIIa} & c & = & \dfrac{1}{2}\cdot \ln\left(\dfrac{2}{297}\right) & \\
\hline
\text{IIb} & b & = & \dfrac{660}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{2}{297}\right)}} & \\
 & & \approx & 8.042,80 & \\
\text{IIIa} & c & = & \dfrac{1}{2}\cdot \ln\left(\dfrac{2}{297}\right) & \\
 & & \approx & -2,50 &
\end{array}$$

Somit sind die gesuchten Parameter $a=80$, $b=8.042,8$ und $c=-2,5$.

Die Funktionsgleichung lautet folglich:

$f_{80;\,8042{,}8;\,-2{,}5}(t)=80+8.042,8\cdot t^2\cdot e^{-2{,}5\cdot t}$.

2

2.1

Mit der Produkt- und Kettenregel können die ersten beiden Ableitungen von $f(t)=100+4600\cdot t^2\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot t}$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f'(t) =&\ 4600 \cdot (2t \cdot \mathrm{e}^{-2t} + t^2 \cdot (-2 \cdot \mathrm{e}^{-2t})) \\ =&\ 4600 \cdot (2t \cdot \mathrm{e}^{-2t} - 2t^2 \cdot \mathrm{e}^{-2t}) \\ =&\ 9200 \cdot \mathrm{e}^{-2t} \cdot (t - t^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(t) =&\ 9200 \cdot ((-2 \cdot \mathrm{e}^{-2t}) \cdot (t - t^2) + \mathrm{e}^{-2t} \cdot (1 - 2t)) \\ =&\ 9200 \cdot \mathrm{e}^{-2t} \cdot (-2t + 2t^2 + 1 - 2t) \\ =&\ 9200 \cdot \mathrm{e}^{-2t} \cdot (2t^2 - 4t + 1) \end{aligned}$$

2.2 Die Zeitpunkte des stärksten Anstiegs beziehungsweise der stärksten Abnahme beschreiben die Wendestellen der Funktion f und somit den Extrempunkten der ersten Ableitung f'.

1. Schritt: Notwendige Bedingung für Wendestellen anwenden

$$\begin{aligned} f''(t) &= 0 \\ 9200 \cdot \mathrm{e}^{-2t} \cdot (2t^2 - 4t + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Da $9200 > 0$ und $\mathrm{e}^{-2t} > 0$ gilt, folgt mit dem Satz vom Nullprodukt:

$$\begin{aligned} 2t^2 - 4t + 1 &= 0 \quad \mid :2 \\ t^2 - 2t + \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Mit der pq-Formel ergibt sich für $p = -2$ und $q = \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} t_{1,2} =&\ -\frac{(-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} \\ t_{1,2} =&\ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}} \\ t_{1,2} =&\ 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Da laut Aufgabenstellug nur die notwendige Bedingung geprüft werden muss, folgen die Wendestelle von f also mit $t_1 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ und $t_2 = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Schritt: Änderungsraten bestimmen

$$\begin{aligned} t_1 :\ f'\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) =&\ 9200 \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \cdot \left(\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \\ =&\ 9200 \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \cdot \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \approx&\ -365,39 \end{aligned}$$

$$t_2: \quad f'\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 9200 \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \cdot \left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$$
$$= 9200 \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\approx 1060,67$$

3. Schritt: Randwerte überprüfen

$$t=0: \quad f'(0) = 9200 \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot 0} \cdot (0-0)$$
$$= 9200 \cdot 1 \cdot 0$$
$$= 0$$

$$t=5: \quad f'(5) = 9200 \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot 5} \cdot \left(5-5^2\right)$$
$$= 9200 \cdot \mathrm{e}^{-10} \cdot (-20)$$
$$\approx -8,35$$

Damit befinden sich am Rand keine Wendestellen.

Die Aktivitätskurve fällt zum Zeitpunkt t_1 mit einer Änderungsrate von $-365,39$ und folglich am stärksten. Zum Zeitpunkt t_2 steigt die Aktivitätskurve mit einer Änderungsrate von $1.060,67$ am stärksten.

2.3

2.3.1 Integrationsmethode angeben

Die Integralgleichung im Material 2 ist von der Form

$$\int u(t) \cdot v'(t)\mathrm{d}t = u(t) \cdot v(t) - \int u'(t) \cdot v(t)\mathrm{d}t$$

mit $u(t) = 4600 \cdot t^2$ und $v(t) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{-2t}$.

Bei der Integration in Material 2 handelt es sich folglich um die Methode der partiellen Integration.

Stammfunktion herleiten

1. Schritt: Integral berechnen

$$\int 4600 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot t}\mathrm{d}t = 4600 \cdot t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{-2t} - \int 4600 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$$
$$= -2300 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-2t} + 2300 \cdot \int \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$$
$$= -2300 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-2t} + 2300 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$
$$= -2300 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-2t} - 1150 \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

2. Schritt: Ergebnis einsetzen

$$\begin{aligned}\int f(t)\,\mathrm{d}t = & \quad 100\cdot t - 2300\cdot t^2\cdot \mathrm{e}^{-2t} + \int 4600\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot t}\mathrm{d}t \\ = & \quad 100\cdot t - 2.300\cdot t^2\cdot \mathrm{e}^{-2t} - 2300\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-2t} - 1150\cdot \mathrm{e}^{-2t} + c \\ = & \quad 100\cdot t - 1.150\cdot \mathrm{e}^{-2t}\cdot \left(2t^2+2t+1\right) + c\end{aligned}$$

Für $c=0$ folgt also eine Stammfunktion F von f mit:

$$F(t) = 100t - 1.150\cdot \mathrm{e}^{-2t}\cdot \left(2t^2+2t+1\right)$$

2.3.2 **Integral bestimmen**

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t = & \quad \frac{1}{3}\int_0^3 \left(100+4600\cdot t^2\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot t}\right)\mathrm{d}t \\ = & \quad \frac{1}{3}\cdot \left[100t - 1150\cdot \mathrm{e}^{-2t}\cdot \left(2t^2+2t+1\right)\right]_0^3 \\ = & \quad \frac{1}{3}\cdot \left[\left(100\cdot 3 - 1150\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot 3}\cdot \left(2\cdot 3^2+2\cdot 3+1\right)\right) - \left(0-1150\cdot \mathrm{e}^0\cdot (0+0+1)\right)\right] \\ = & \quad \frac{1}{3}\cdot \left(\left(300-1150\cdot \mathrm{e}^{-6}\cdot 25\right)+1150\right) \\ = & \quad \frac{1}{3}\cdot \left(1.450 - 28750\cdot \mathrm{e}^{-6}\right) \\ \approx & \quad 459,58\end{aligned}$$

Ergebnis deuten

Nach Aufgabenstellung beschreibt die Funktion f die Enzymaktivität in Units. Dabei steht t für die Tage, die seit dem Infarkt vergangen sind. Das Integral $\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t$ beschreibt damit die gesamte Menge an Enzymaktivität in Units, die 3 Tage nach dem Infarkt insgesamt ausgeschüttet wurde.

Teilt man dies durch 3, so erhält man die durschnittliche Enzymaktivität der ersten 3 Tage in Units pro Tag.

Also lag die durchschnittliche Enzymaktivität während der ersten drei Tage nach dem Infarkt bei 459,58 Units pro Tag.

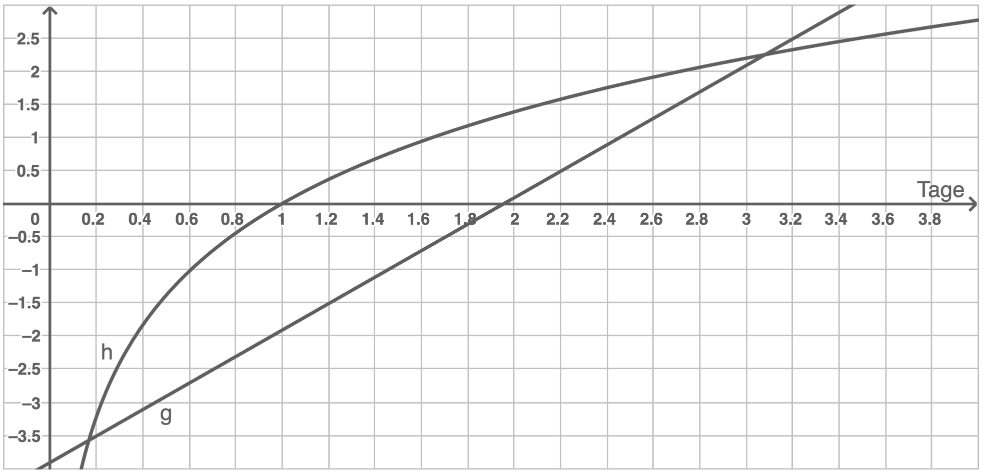
2.4 **Gleichung zeigen**

$$\begin{aligned}100+4600\cdot t^2\cdot \mathrm{e}^{-2t} = & \quad 192 && \mid -100 \\ 4600\cdot t^2\cdot \mathrm{e}^{-2t} = & \quad 92 && \mid :4600 \quad \mid \cdot \mathrm{e}^{2t} \\ t^2 = & \quad \mathrm{e}^{2t}\cdot \frac{1}{50} && \mid \ln \\ \ln\left(t^2\right) = & \quad 2\cdot t + \ln\left(\frac{1}{50}\right) \\ \ln\left(t^2\right) = & \quad 2\cdot t - 3,91202\end{aligned}$$

Darstellung erläutern

Die Darstellung zeigt eine Kurve und eine Gerade, wobei die Gerade die y-Achse bei etwa -3,9 schneidet und eine Steigung von 2 hat. Die Gerade gehört folglich zum Term $g(t)=2t-3,91202.$

Die Kurve hat eine Nullstelle bei $x=1$, und der Graph nähert sich asymptotisch der y-Achse an, besitzt also Eigenschaften der Logarithmusfunktion. Der Graph gehört folglich zur Gleichung $h(t)=\ln\left(t^2\right)$, also zur linken Seite der obigen Gleichung.



Beschriftete Skizze

Zeitspanne untersuchen

Nach Aufgabenstellung wird ein Herzinfarkt diagnostiziert, wenn die Enzymaktivität mindestens 192 beträgt. Also wird zu jedem t mit $0\leq t\leq 5,$ welches die Ungleichung $100+4.600\cdot t^2\cdot \mathrm{e}^{-2t}\geq 192$ erfüllt, die Diagnose Herzinfarkt gestellt.

Diese Ungleichung ist wie oben gezeigt äquivalent zu

$$h(t)=\ln\left(t^2\right)\geq 2t-3,91202=g(t)$$

Aus der Abbildung lässt sich ablesen, dass dies im Intervall $[0,17;3,08]$ gilt.

Die Enzymaktivität ist in diesem Intervall folglich auch größer oder gleich 192.

Die Diagnose eines Herzinfarkts kann also ab etwa 4 Stunden nach dem Infarkt bis etwa 3 Tage nach dem Infarkt gestellt werden.