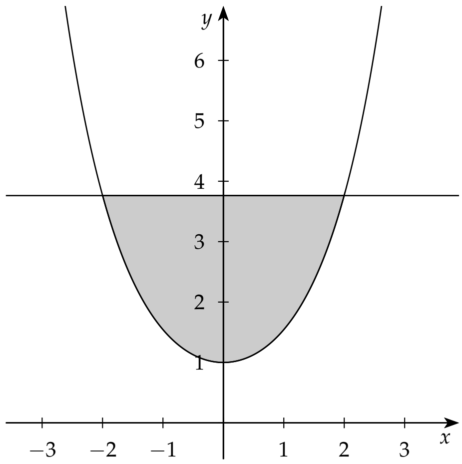
Gegeben sind die Funktionen s und c durch $s(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und $c(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

1.1 Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Gleichungen: (11BE)
(1) $s'(x) = c(x)$ und $c'(x) = s(x)$
(2) $s(-x) = -s(x)$ und $c(-x) = c(x)$
(3) $(c(x))^2 - (s(x))^2 = 1$

1.2 Die Funktionen s und c haben ähnliche Eigenschaften wie die trigonometrischen Funktionen sin und cos. Geben Sie die entsprechenden Gleichungen für die Funktionen sin und cos an. Erläutern Sie die Bedeutung der ersten beiden Gleichungen für die Graphen von sin und cos.

In der Abbildung erkennt man den Graphen von c und eine Parallele p zur x-Achse. Die beiden Schnittstellen von c und p lauten $x_{S_1,S_2} = \pm 2$. Die von c und p eingeschlossene Fläche ist grau gezeichnet.



2. Weisen Sie durch Rechnung nach, dass der Graph von c nur einen Tiefpunkt und keinen Wendepunkt hat. (6BE)
Bemerkung: Den Graphen von c bezeichnet man auch als Kettenlinie, da er den Verlauf einer zwischen zwei Punkten aufgehängten Kette beschreibt. (vgl. Bild)

Quelle: www.wikimedia.org - Eva K

3. Betrachtet wird die Kettenlinie über dem Intervall $[-2; 2]$. (12BE)

3.1 Bestimmen Sie die Gleichung der quadratischen Näherungsparabel g, die an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm 2$ mit der Kettenlinie übereinstimmt.

3.2 Als Qualitätsmaß der Näherungsfunktion g im Intervall $[a; b]$ kann das Integral
$I = \int_a^b (g(x) - c(x))dx$ betrachtet werden.
Berechnen Sie den Wert von I im Intervall $[-2; 2]$ unter Verwendung einer Stammfunktion von $g(x) - c(x)$. Beurteilen Sie allgemein dieses Gütemaß für Näherungsfunktionen.

4. In die graue Fläche der Abbildung soll ein achsenparalleles Rechteck maximalen Inhalts eingeschrieben werden. (11BE)

4.1 Zeigen Sie, dass der Ansatz zur Bestimmung des maximalen Flächeninhalts auf die zweite Nachkommastelle gerundet zu folgender Gleichung führt:
$7{,}52 + \mathrm{e}^{-x}(x-1) - \mathrm{e}^{x}(x+1) = 0$

4.2 Die Gleichung aus 4.1 ist algebraisch nicht lösbar. Mithilfe der Funktion g erhält man folgende Näherung für die Flächeninhaltsfunktion:
$A(x) \approx [3{,}76 - (0{,}69 \cdot x^2 + 1)] \cdot 2 \cdot x$
Bestimmen Sie damit die Größe des maximalen Flächeninhalts und entscheiden Sie, ob der ermittelte Wert eine obere oder untere Grenze im Vergleich zum genauen Wert darstellt.