# C1 - Analytische Geometrie

1.1 **Parameterform:**

$$E:\begin{pmatrix}13\\11\\6\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}\quad,\ s,t\in\mathbb{R}$$

Kreuzprodukt der Spannvektoren liefert einen Normalenvektor:

$$\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)-0\cdot(-1)\\0\cdot(-3)-(-2)(-1)\\(-2)(-1)-2\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\8\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$E:-x-y+4z=d$$

**Koordinatenform:**

Setze $P$ in die Koordinatenform ein, um $d$ zu berechnen:

$$-1\cdot13-1\cdot11+4\cdot6=d=0$$

$$E:-x-y+4z=0$$

**Ursprungsprobe:**

$$\begin{aligned}-(0)-(0)+4\cdot(0)&=0\\0&=0\end{aligned}$$

Der Urspring liegt in der Ebene.

1.2 Berechnung des Winkels zwischen zwei Ebenen: $\cos(\alpha)=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\circ\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$

Normalenvektor der Ebene wurde bereits berechnet: $n_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_2}$ steht senkrecht auf der $x$-$y$-Ebene und hat damit nur Werte für $z: n_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{|\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+4^2}\,|\cdot|\,\sqrt{1^2}|} \\
\cos(\alpha) &= \frac{4}{\sqrt{18}} \quad |\cos^{-1} \\
\alpha &\approx 19,47\,^\circ
\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen den beiden Geraden beträgt etwa $19,47\,^\circ$.

2.1 Aufstellen einer Lotgeraden $h$ durch den Mittelpunkt $M$ der Discokugel, welche durch verwenden von $\overrightarrow{n_1}$ als Richtungsvektor senkrecht auf der Ebebe $E$ steht:

$$h:\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}17\\17\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17-s\\17-s\\4+4s\end{pmatrix}\quad, s\in\mathbb{R}$$

Einsetzen des Punktes $P(17-s\mid 17-s\mid 4+4s)$, in Abhängigkeit von $s$, in die Koordinatenform der Ebene $E$, um den Lotpunkt zu berechnen:

$$\begin{aligned}
-17+s-17+s+16+16s &= 0 \\
-18+18s &= 0 \qquad |+18 \\
18s &= 18 \qquad |:18 \\
s &= 1
\end{aligned}$$

$$L:\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}17-1\\17-1\\4+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\16\\8\end{pmatrix}$$

$L(16\mid 16\mid 8)$ ist der nächstgelegene Punkt der Discokugel zur Ebene $E$. Hier beträgt die $z$-Koordinate $8$, allerdings ist die Decke nur $6\,\mathrm{m}$ hoch, sodass dieser Punkt nicht mehr innerhalb der Spiegelfläche liegt.

2.2 Gerade $g$ durch die Punkte $P$ und $Q$:

$$g:\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}13\\11\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13-2s\\11+2s\\6\end{pmatrix}\quad,\quad s\in\mathbb{R}$$

Der Punkt $F_s$, der den kürzeseten Abstand zu $M$ auf der Geraden $g$ besitzt, ist durch

$F_s(13-2s \mid 11+2s \mid 6)$ gegeben.

$$\overrightarrow{MF_s} = \begin{pmatrix} 13-2s-17 \\ 11+2s-17 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s-4 \\ 2s-6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es muss $\overrightarrow{MF_s} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ gelten:

$$\begin{pmatrix} -2s-4 \\ 2s-6 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (-2s-4)(-2)+(2s-6)(2)+0 &= 0 \\ 4s+8+4s-12 &= 0 \\ 8s-4 &= 0 \quad \vert +4 \\ 8s &= 4 \quad \vert :8 \\ s &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$s$ in $F_s$ einsetzen: $F_{\frac{1}{2}}(12 \mid 12 \mid 6)$
Da $0 \leq s \leq 1$ gilt, liegt $F_{\frac{1}{2}}$ zwischen $P$ und $Q$.

$$|\overrightarrow{MF_{\frac{1}{2}}}| = \left| \begin{pmatrix} -2\cdot\frac{1}{2}-4 \\ 2\cdot\frac{1}{2}-6 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-5)^2+(-5)^2+2^2} = \sqrt{25+25+4} = \sqrt{54}$$

Zu beachten ist, dass die Discokugel einen Durchmesser von $0,5\,\mathrm{m}$ hat und somit der Radius von $0,25\,\mathrm{m}$ noch abgezogen werden muss:

$$\sqrt{54}-0,25 \approx 7,1[\mathrm{LE}]$$

Die kürzeste Entfernung der Kugel zum Spiegel beträgt somit etwa $7,1\,\mathrm{m}$.

3.1

$$S \cdot \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$$

Der Ansatz $S \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$ führt zum linearen Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rclll} I & : & \frac{8}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{4}{9}z & = & x & |\cdot 9 \\ & & 8x - y + 4z & = & 9x & |-9x \\ & & -x_1 - y + 4z & = & 0 & \\ II & : & -\frac{1}{9}x + \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z & = & y & |\cdot 9 \\ & & -x + 8y + 4z & = & 9y & |-9y \\ & & -x - y + 4z & = & 0 & \\ III & : & \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{7}{9}z & = & z & |\cdot 9 \\ & & 4x + 4y - 7z & = & 9z & |-9z \\ & & 4x + 4y - 16z & = & 0 & \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem ist unterbestimmt, da $I = II$ ist.
Als Fixpunktmenge erhält man somit eine Ebene $E: -x - y + 4z = 0$

3.2 Die Fixpunktmenge der durch $S$ beschriebenen Abbildung ist die Ebene $E$ aus Aufgabe 1.1. Alle Punkte der Ebene $E$ werden also bei Abbildung mit der Matrix $S$ auf sich selbst abgebildet. Quadriert man die Matrix $S$, erhält man die Einheitsmatrix, die zweimalige Abbildung eines beliebigen Punktes mithilfe der durch die Matrix $S$ beschriebenen Abbildung führt also wieder auf denselben Punkt. $S$ beschreibt also eine Spiegelung an der Ebene $E$ aus Aufgabe 1.1.

4.1 Projetionsstrahl $g: \overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

Projektionsebene $E: y = 0$

$g$ geschnitten mit $E$:

$$\begin{array}{rcll} y - 2t & = & 0 & |-y \,|: (-2) \\ t & = & 0,5y & \end{array}$$

$t$ eingesetzt in $g$ liefert die Projetionsabbildungen:

$$\begin{array}{rclcl} x' & = & x + (0,5y) \cdot 3 & = & x + 1,5y \\ y' & = & y + (0,5y) \cdot (-2) & = & 0 \\ z' & = & z + (0,5y) \cdot (-4) & = & -2y + z \end{array}$$

Dadurch ergibt sich die Abbildungsmatrix $W$:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Ortsvektor des Bildpunktes von $L$ auf der Wandfläche ermitteln:

$$\overrightarrow{OL'} = \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3+0 \\ 0+0+0 \\ 0-4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die $x$-Koordinaten des Bildes an der Wand liegen in dem Intervall $[8;14]$. Die $x$-Koordinate des Bildpunktes von $L$ liegt allerdings bei $7$ und somit außerhalb des Intervalls, sodass der Laserstrahl nicht auf das Bild fällt.

4.3 Durch das lineare Gleichungssystem wird die Menge der Punkte des Raumes berechnet, die auf den Nullvektor abgebildet werden. Als Lösungsmenge erhält man die Geradengleichung einer Ursprungsgerade.

5.1 Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llll} I & : & 0,1x_1 + 0,3x_2 + 0,4x_3 & = & 0,25 \\ II & : & x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \end{array}$$

Mit $x_1, x_2, x_3$ als jeweiliger Anteil der drei Cocktails am neu zu mischenden Cocktail.

5.2 Aufstellen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lllll} I & : & x_1 & = & 0,25 + 0,5s \\ II & : & x_2 & = & 0,75 - 1,5s \\ III & : & x_3 & = & s \end{array}$$

Dabei müssen $x_1, x_2, x_3$ jeweils $\geq 0$ sein, das bedeutet:

$$\begin{array}{llcll} I & : 0,25+0,5s & \geq & 0 & \vert -0,25 \\ & \quad 0,5s & \geq & -0,25 & \vert : 0,5 \\ & \quad s & \geq & -0,5 & \\ II & : 0,75-1,5s & \geq & 0 & \vert -0,75 \\ & \quad -1,5s & \geq & -0,75 & \vert : (-1,5) \\ & \quad s & \leq & 0,5 & \\ III & : s & \geq & 0 & \end{array}$$

Damit liegt $s$ in dem Intervall $[0; 0,5]$.

5.3 **Kosten:**

$3 \cdot (0,25+0,5s)+5 \cdot (0,75-1,5s)+4s = 4,5-2s$

Je größer $s$ ist, desto geringer ist der Preis des neu gemixten Cocktails. Da $s$ in dem Intervall $[0; 0,5]$ liegt, erhält man die geringsten Kosten folglich mit $s = 0,5$.

**Kosten mit $s = 0,5$:**

$4,5 - 2 \cdot 0,5 = 3,5$

Der Preis für den neu gemixten Cocktail beträgt somit $3,50$ €.

Lösen des linearen Gleichungssystems mit $s = 0,5$ :

$$\begin{array}{llcl} I & : x_1 & = & 0,25+0,5 \cdot 0,5 = 0,5 \\ II & : x_2 & = & 0,75-1,5 \cdot 0,5 = 0 \\ III & : x_3 & = & 0,5 \end{array}$$

Daraus folgt, dass der neu gemixte Cocktail aus $50\,\%$ des ersten Cocktails und aus $50\,\%$ des dritten Cocktails besteht, wobei der zweite Cocktail keine Verwendung findet.