B2 - Analytische Geometrie

1.
Ein Baugrundstück in Hanglage besitzt die Eckpunkte $A(0 \mid 0 \mid -1)$, $B(40 \mid 8 \mid 3)$, $C(35 \mid 32 \mid 5)$ und $D(-5 \mid 24 \mid 1)$. Modellhaft soll angenommen werden, dass das Grundstück in einer Ebene L liegt.
(Alle Koordinaten sind in Metern angegeben.)

1.1
Gib eine Parameterform der Ebene L an und bestimme eine Koordinatengleichung dieser Ebene.

(5P)

1.2
Zeige durch Rechnung, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

(3P)

1.3
In der Planungsskizze **(Material)** erscheint das Viereck $ABCD$ als Viereck $A_0B_0C_0D_0$, das durch eine senkrechte Projektion in die x-y-Ebene entsteht. Dadurch ändern sich u.a. die Seitenlängen des Vierecks. Bestätige dies rechnerisch beispielhaft an den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{A_0B_0}$.

(3P)

2.
Mithilfe eines Baggers wird eine Baugrube ausgehoben, sodass die rechteckige Grundfläche des Hauses, das auf dem Grundstück gebaut werden soll, freigelegt wird. Diese liegt in der x-y-Ebene und besitzt die Eckpunkte $E(20 \mid 5 \mid 0)$, F, $G(23 \mid 22 \mid 0)$ und $H(13 \mid 12 \mid 0)$ **(Material)**.

2.1
Berechne die Koordinaten des Eckpunktes F.

(2P)

2.2
Berechne den spitzen Winkel, um welchen die Grundfläche des Hauses in der x-y-Ebene gedreht werden müsste, damit die längere Seite der Grundfläche in der Planungsskizze parallel zur Strecke A_0B_0 verläuft.

(3P)

3.
Lineare Abbildungen in der Ebene wie z.B. Spiegelungen an den Koordinatenachsen oder Drehungen um den Koordinatenursprung lassen sich durch 2x2-Matrizen darstellen. Die Verkettung solcher Abbildungen entspricht dann dem Produkt der jeweiligen Matrizen. Lässt man z.B. einen Punkt $P(x \mid y)$ mit dem Drehwinkel α gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung rotieren, so erhält man als Ergebnis den Bildpunkt $P'(x' \mid y')$ durch folgende Gleichung:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit der Rotationsmatrix } R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

3.1
Der Punkt $P(10 \mid 5)$ wird mit dem Drehwinkel $\alpha = 90^\circ$ um den Ursprung gedreht. Berechne die Koordinaten des Bildpunktes P' mit Hilfe der Rotationsmatrix R_{90° und bestätige durch Rechnung, dass

eine Drehung von P um 180°, also die Verkettung zweier 90°-Drehungen, durch das Produkt $R_{90^\circ} \cdot R_{90^\circ}$ beschrieben wird.

(3P)

Da die Verschiebung eines Punktes $P(x \mid y)$ in der x-y-Ebene **nicht** durch eine 2x2-Matrix darstellbar ist, lässt sich auch die Verkettung einer Verschiebung und einer linearen Abbildung in der Ebene nicht als Produkt von 2x2-Matrizen beschreiben. Die Darstellung einer solchen Verkettung als Matrizenprodukt wird jedoch dann möglich, wenn man statt der zweidimensionalen Vektoren und Matrizen die Darstellungsform der sogenannten „homogenen Koordinaten" verwendet, bei der die zweidimensionalen Vektoren und Matrizen folgendermaßen um zusätzliche Koordinaten ergänzt werden:

Aus dem Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wird der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, aus $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ wird $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$

und die 2x2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ einer linearen Abbildung wird zur 3x3-Matrix $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2

Wie in Aufgabe 3.1 wird der Punkt $P(10 \mid 5)$ mit dem Drehwinkel $\alpha = 90^\circ$ um den Ursprung gedreht. Berechne nun die Koordinaten x' und y' des Bildpunktes P' unter Verwendung homogener Koordinaten mit Hilfe der entsprechenden Rotationsmatrix.

(2P)

3.3

Zeige, dass unter Verwendung homogener Koordinaten die Matrix $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Verschiebung eines Punktes $P(x \mid y)$ zum Punkt $P'(x+s \mid y+t)$ in der Ebene beschreibt.

(4P)

3.4

Unter Verwendung der x- und der y-Koordinate des Punktes G erhält man den Punkt $G^*(23 \mid 22)$. Aus dem Ortsvektor des Punktes G^* wird bei Verwendung homogener Koordinaten der Vektor $\begin{pmatrix} 23 \\ 22 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Erläutere die geometrische Bedeutung folgender Gleichung und der darin enthaltenen Teilausdrücke:

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 26,1421 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 22 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(5P)

Material

Planungsskizze

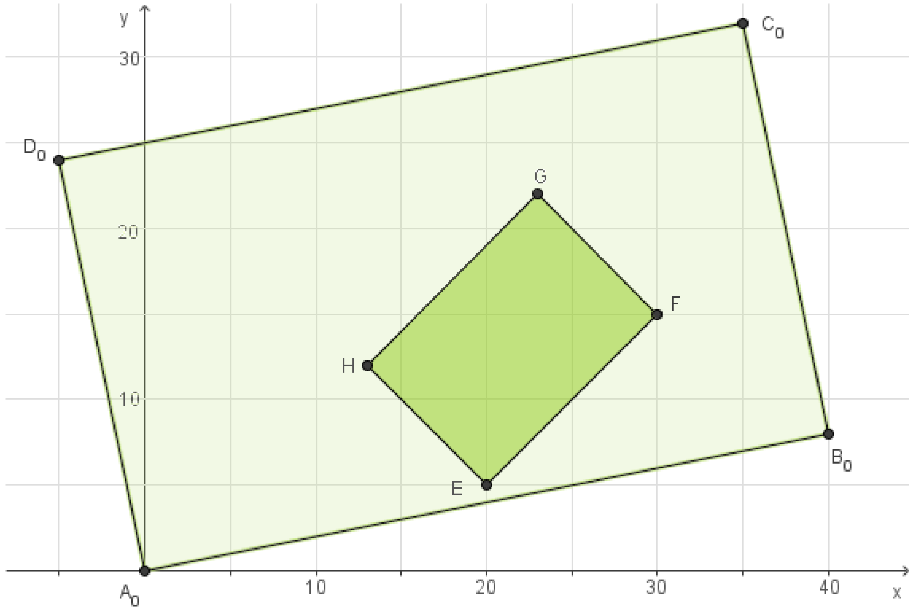

Abb. 1

Hinweis:
Die positive z-Achse zeigt senkrecht zur x-y-Ebene in Richtung des Betrachters.

Bildnachweise [nach oben]

[1]