a.1) ► **Bestimmen der gesuchten Wahrscheinlichkeit** (13BE)

Ein Tetraeder besitzt vier gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit, eine dieser Seitenflächen zu werfen, beträgt $\frac{1}{4}$. Die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten ist damit gleichverteilt. Im Urnenmodell könnte der Versuch modelliert werden durch 4 Kugeln mit der Aufschrift 0, 3, 3 und 4. Dabei würde es sich um „Ziehen mit Zurücklegen" handeln.

Die Wahrscheinlichkeiten des Werfens der einzelnen Zahlen sind hier:
$P(0) = \frac{1}{4}$
$P(3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
$P(7) = \frac{1}{4}$

Die Wahrscheinlichkeit P_1 beim 4-maligen Werfen zuerst eine „0", dann zweimal eine „3" und zum Schluss eine „7" zu werfen, ergibt sich nun über das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$P_1 = P(0) \cdot P(3) \cdot P(3) \cdot P(7) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

Die Wahrscheinlichkeit beim 4-maligen Werfen zuerst eine „0", dann zweimal eine „3" und zum Schluss eine „7" zu werfen, ist demnach $\frac{1}{64}$.

a.2) ► **Entscheiden, welches Ereignis wahrscheinlicher ist**

Gehe schrittweise vor:

1. Schritt: Wahrscheinlichkeit, beim 6-maligen Werfen, genau 3 Mal eine „3" zu werfen

Betrachtet wird hier eine Zufallsvariable X, welche die Anzahl der geworfenen Dreien beschreibt. Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit:
$n = 6$ und $p = P(3) = \frac{1}{2}$.

Gesucht ist hier die Wahrscheinlichkeit $P_1 = P(X = 3)$, welche sich wie folgt, mit Hilfe der Binomialverteilung, berechnen lässt:

$P_1 = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ mit $n = 6, k = 3$ und $p = P(3) = \frac{1}{2}$

$P_1 = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-3}$
$P_1 = 20 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}^3$
$P_1 = \frac{5}{16} = 0,3125$

2. Schritt: Wahrscheinlichkeit, beim 13-maligen Werfen, höchstens 2 Mal eine „0" zu werfen

Betrachtet wird hier die Zufallsvariable Y, welche die Anzahl der geworfenen Nullen beim 13-maligen Werfen, beschreibt. Y ist eine mit $n = 13$ und $p = P(0) = \frac{1}{4}$ binomialverteilte Zufallsvariable.
Das Ereignis, höchstens zwei Mal, beim 13-maligen Werfen, eine Null zu werfen, setzt sich aus verschiedenen Teilereignissen zusammen. Die Wahrscheinlichkeit $P_2 = P(X \leq 2)$ des betrachteten Ereignisses berechnet sich über die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Teilereignisse.
Die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Teilereignisse sind:
$P(Y = 0), P(Y = 1)$ und $P(Y = 2)$.

Die Wahrscheinlichkeit $P_2 = P(X \leq 2)$ berechnet sich demnach so:

$$P_2 = P(X \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = \sum_{i=0}^{2} P(X = k)$$

Berechne diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe deines Taschenrechners oder der Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung:

$$P_2(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{13}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{13-k}$$

$$P_2(X \leq 2) = 0,3326$$

Da $P_2(X \leq 2) = 0,3326 > 0,3125 = P_1(X = 3)$ gilt, ist es wahrscheinlicher beim 13-maligen Werfen des Tetraederwürfels höchstens 2-mal die Null zu werfen, als beim 6-maligen Werfen genau 3-mal eine Drei zu werfen.

a.3) ▶ **Berechnen, wie oft das Tetraeder mindestens geworfen werden muss**

Betrachtet wird hier die Zufallsvariable X, welche die Anzahl der geworfenen „7“ beschreibt. Da X nur zwei Merkmalsausprägungen besitzt, handelt es sich hier um eine binomialverteilte Zufallsvariable. Da bestimmt werden soll, wie oft der Tetraederwürfel geworfen werden muss, damit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %, mindestens einmal eine „7“ geworfen wird, ist X mit unbekanntem n und $p = 0,25$ verteilt.

Die zum gegebenen Ereignis $P(X \geq 1)$ zugehörige Anzahl n bestimmst du über folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) &> 0,95 && \mid \text{ Bilden des Gegenereignis zu } P(X \geq 1) \\
1 - P(X = 0) &> 0,95 \\
1 - \left(\tbinom{n}{0} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{4}\right)^{n-0}\right) &> 0,95 \\
1 - \left(1 \cdot 1 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^n\right) &> 0,95 && \mid -1 \\
-\left(\left(\tfrac{3}{4}\right)^n\right) &> -0,05 && \mid : (-1) \\
\left(\tfrac{3}{4}\right)^n &< 0,05 && \mid \ln(\;) \\
n \cdot \ln\left(\tfrac{3}{4}\right) &< \ln(0,05) && \mid : \ln\left(\tfrac{3}{4}\right) \text{ (Achtung, Divisor ist negativ!)} \\
n &> \ln(0,05) : \ln\left(\tfrac{3}{4}\right) \\
n &> 10,41
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Der Tetraederwürfel muss mindestens 11-mal geworfen werden, damit die Wahrscheinlichkeit, eine „7“ zu werfen, 95 % beträgt.

b.1) ► **Berechnen des erwarteten Gewinns** (9BE)

1. Schritt: Bestimmen der Auszahlungen der Teilereignisse

Bevor du bestimmen kannst, wie hoch der erwartete Gewinn pro Spiel ist, berechnest du die einzelnen Auszahlungen zu den verschiedenen Teilereignissen:

(1) Ereignis: „0“ wird geworfen:

Wird eine Null geworfen, so sind zwei Dreien und die Sieben sichtbar. Die Auszahlung A_0 ist demnach:
$A_0 = 3 + 3 + 7 = 13$

(2) Ereignis: „3“ wird geworfen:

Wird eine Drei geworfen, so ist eine Drei, die Sieben und die Null sichtbar. Die Auszahlung A_3 ist demnach:
$A_3 = 0 + 3 + 7 = 10$

(3) Ereignis: „7“ wird geworfen:

Wird eine Sieben geworfen, so sind zwei Dreien und die Null sichtbar. Die Auszahlung A_7 ist demnach:
$A_7 = 0 + 3 + 3 = 6$

2. Schritt: Berechnen des erwarteten Gewinns

Den erwarteten Gewinn F bestimmst du über den Erwartungswert des Spiels. Multipliziere dazu die Auszahlungen zu den einzelnen Teilereignissen, mit der Wahrscheinlichkeit für diese Teilereignisse und bilde die Summe dieser Produkte. Hast du die Summe der Produkte gebildet, so subtrahierst du diese Summe von der anfänglichen Auszahlung an Donald:

$$G = P(0) \cdot (10 - A_0) + P(3) \cdot (10 - A_3) + P(7) \cdot (10 - A_7)$$
$$G = \frac{1}{4} \cdot (10 - 13) + \frac{1}{2} \cdot (10 - 10) + \frac{1}{4} \cdot (10 - 6)$$
$$G = -\frac{3}{4} + 1$$
$$G = 0{,}25$$

Der erwartete Gewinn pro Spiel beträgt $0{,}25$ Taler.

b.2) ► **Bestimmen des Würfels so, dass dieser fair ist**

Ist ein Spiel fair, so ist der Erwartungswert des Spiels gleich Null. Bestimme also hier eine Zahl x, für welche der Erwartungswert E des Spiels gleich Null ist. Mit dieser Zahl x müsste dann Donald eine der zwei Dreier - Flächen des Tetraeders überkleben, damit das Spiel fair wäre. Das heißt, die Zahl x ersetzt eine der Dreien auf dem Würfel.
Berechne dazu, wie im Aufgabenteil zuvor, die erwarteten Auszahlungen der einzelnen Ereignisse, in Abhängigkeit von x:

(1) Ereignis: „0“ wird geworfen:

Wird eine Null geworfen, so ist eine Drei, x und die Sieben sichtbar. Die Auszahlung A_0 ist demnach:
$A_0 = 3 + x + 7 = 10 + x$

(2) Ereignis: „3“ wird geworfen:

Wird eine Drei geworfen, so ist x, die Sieben und die Null sichtbar. Die Auszahlung A_3 ist demnach:
$A_3 = x + 7 + 0 = 7 + x$

(3) Ereignis: „7“ wird geworfen:

Wird eine Sieben geworfen, so ist die Drei, die Null und x sichtbar. Die Auszahlung A_7 ist demnach:
$A_7 = 0 + 3 + x = 3 + x$

(4) Ereignis: „x“ wird geworfen:

Wird x geworfen, so ist die Drei, die Null und die Sieben sichtbar. Die Auszahlung A_x ist demnach:
$A_x = 0 + 3 + 7 = 10$

Stelle nun wie im vorherigen Aufgabenteil den Term für den Erwartungswert E auf. Setzte diesen anschließend gleich Null, um zu bestimmen, mit welcher Zahl eine der Dreier - Flächen überklebt werden müsste, damit das Spiel fair ist:

$$E = P(0) \cdot (10 - A_0) + P(3) \cdot (10 - A_3) + P(7) \cdot (10 - A_7) + P(x) \cdot (10 - A_x)$$
$$E = \tfrac{1}{4} \cdot (10 - (10 + x)) + \tfrac{1}{4} \cdot (10 - (7 + x)) + \tfrac{1}{4} \cdot (10 - (3 + x)) + \tfrac{1}{4} \cdot (10 - 10) \qquad | \text{ Nullsetzen}$$
$$0 = -\tfrac{1}{4} \cdot x + \tfrac{1}{4} \cdot (3 - x) + \tfrac{1}{4} \cdot (7 - x))$$
$$0 = -\tfrac{3}{4} \cdot x + \tfrac{10}{4} \;\Leftrightarrow\; x = \tfrac{10}{3} = 3{,}3\overline{3}$$

Damit das Spiel fair wäre, müsste Donald eine der zwei Dreier - Flächen mit der Zahl $3{,}3\overline{3}$ überkleben.

c.) (1) ▶ **Erläutern der Bedeutung der Aussage** (3BE)

Die in der Aussage der Neffen beschriebene Wahrscheinlichkeit, entspricht einer Irrtumswahrscheinlichkeit. Im Test, welchen die Neffen Donald Ducks durchgeführt haben, wurde ein Signifikanzniveau überprüft.
$\Longrightarrow$ Die Neffen Donald Ducks haben einen Signifikanztest durchgeführt.

(2) ▶ **Überprüfen der Aussage der Neffen**

Die Neffen behaupten, dass der Glücks - Tetraeder ihres Onkels die Lage auf der „0“ bevorzugt. Führe einen Signifikanztest durch, um die Aussage der Neffen auf Richtigkeit zu überprüfen. Auch hierbei handelt es sich bei der Testgröße um eine binomialverteilte Zufallsvariable X, welche die Anzahl der beschreibt.

Stelle dazu zuerst die Nullhypothese des Tests auf:

Bisher wurde angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit, eine Null zu würfeln, $p_0 = 0{,}25$ ist. Mit dieser Annahme lässt sich die Nullhypothese des Signifikanztests definieren. Mit dem Signifikanztest will hier gezeigt werden, dass der Glücks - Tetraeder die Lage auf der Null bevorzugt, was bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer Null größer als angenommen ist.
$\Longrightarrow$ Es handelt es sich hier um einen rechtsseitigen Signifikanztest.
Das heißt, die Nullhypothese muss so aussehen:

$H_0 : p \leq 0{,}25$

Um die Aussage der Neffen nun zu überprüfen, bestimmst du den Ablehnungsbereich des Signifikanztests. Liegt 33 in diesem Bereich, so haben die Neffen Recht und der Glücks - Tetraeder bevorzugt die Lage „0". Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis aus dem Ablehnungsbereich eintritt, soll höchstens 0,05 (Irrtumswahrscheinlichkeit) betragen. Deshalb bestimmst du den Ablehnungsbereich, indem du folgende Ungleichung löst:
$P(X \geq k) \leq 0,05$.
Dabei beschreibt k die untere Grenze des Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{k, k+1, ..., n\}$.
$P(X \geq k) \leq 0,05 \;\Leftrightarrow\; 1 - P(X \leq k-1) \leq 0,05 \;\Leftrightarrow\; P(X \leq k-1) \leq 0,95$.

Bestimme k nun mit Hilfe der Tabelle der kumulierten Binomialverteilung. Mit n = 100 und p = 0,25 ergibt sich:
$k - 1 = 32 \Leftrightarrow k = 33 \Longrightarrow \overline{A} = \{33, 34, ..., 100\}$.

$\Longrightarrow$ Da „33" im Ablehnungsbereich $\overline{A}$ liegt, haben die Neffen Ducks Recht behalten mit ihrer Behauptung.

d.) (1) ▶ **Angeben einer möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilung** (5BE)

Beim Lösen dieser Aufgabe gibt es mehrere Vorgehensweisen. Im Folgenden wird eine mögliche Vorgehensweise näher beschrieben:

Deine Aufgabe ist es hier, eine mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilung, unter Berücksichtigung der Ergebnisse des Signifikanztests aus Aufgabenteil c, für das Werfen des Glücks - Tetraeder zu entwickeln.
Im Test wird der Würfel insgesamt 100 - mal geworfen, dabei tritt die „0" insgesamt 33 - mal auf. Hieraus könntest du für die Wahrscheinlichkeit der „0" schließen:
$P(0) = \dfrac{33}{100} \approx \dfrac{1}{3}$.

Da für die anderen Zahlen keine weiteren Aussagen getroffen wurden, könntest du hier vereinfachend annehmen, dass deren Erscheinen gleichwahrscheinlich ist. Wichtig dabei ist, dass sich die Einzelwahrscheinlichkeiten zu 1 addieren.

$P(3) = 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$
$P(7) = \frac{2}{9}$.

(2) ▶ **Zeigen, dass Donalds Verlusterwartungen plausibel sind**

Um zu zeigen, dass Donalds Verlusterwartungen, unter Berücksichtigung der von dir entwickelten Wahrscheinlichkeitsverteilung, plausibel sind, berechnest du den Erwartungswert E des Spiels. Gehe dabei vor wie im Aufgabenteil b dieser Teilaufgabe. Ist der Erwartungswert negativ, so hast du gezeigt, dass Donalds Verlusterwartungen plausibel sind:

1. Schritt: Bestimmen der Auszahlungen

(1) Auszahlung: „0" ist verdeckt
$A_0 = 2 \cdot 3 + 7 = 13$

(2) Auszahlung: „3" ist verdeckt
$A_3 = 0 + 3 + 7 = 10$

(3) Auszahlung: „7" ist verdeckt
$A_3 = 0 + 3 + 3 = 6$

2. Schritt: Berechnen des Erwartungswert

$E = P(0) \cdot (10 - A_0) + P(3) \cdot (10 - A_3) + P(7) \cdot (10 - A_7)$
$E = \frac{1}{3} \cdot (10 - 13) + \frac{4}{9} \cdot (10 - 10) + \frac{2}{9} \cdot (10 - 6)$
$E = -1 + \frac{8}{9}$
$E = -\frac{1}{9}$

Da der Erwartungswert des Spiels mit der neuen Wahrscheinlichkeitsverteilung negativ ist, sind Donalds Verlusterwartungen plausibel.