1.1 ▶ Graphen den Funktionen zuordnen (6 BE)

Für alle Funktionen f gilt an ihren Extremstellen $f'(x) = 0$. Somit hat die Ableitungsfunktion immer an der Stelle eine Nullstelle, an der die Funktion selbst eine Extremstelle hat. Da wir hier die Funktion f, sowie ihre beiden Ableitungen f' und f'' gegeben haben, kannst du dich folglich anhand der Maxima oder den Nullstellen orientieren.

Weist eine Funktion eine Nullstelle auf, die keinem Extremum nach oben genannter Bedingung zugeordnet werden kann, so handelt es sich hierbei um f. Weist allerdings ein Graph ein Extremum auf, das keiner Nullstelle zugeordnet werden kann, so ist dieser Graph der Graph von f''.

- Für alle Funktionen $f^{(t)}(x)$ gilt an ihren Extremstellen $f^{(t+1)}(x) = 0$
- Ordne Nullstellen Extrema zu, die dieselbe x-Koordinate besitzen
- eine nicht zugeordnete Nullstelle: Graph von f
- ein nicht zugeordnetes Extremum: Graph von f''
- sowohl Nullstelle als auch Extremum, das zugeordnet werden kann: f'

Betrachten wir nun unter dem Augenmerk dieser Bedingungen die Graphen, so ergibt sich, dass sich an der Stelle x_1 ein Schnittpunkt von C mit der x-Achse befindet, der einem Hochpunkt von A zugeordnet werden kann.

An der Stelle x_2 befindet sich ein Schnittpunkt mit der x-Achse von A, dem allerdings kein Extremum zugeordnet werden kann. Folglich muss es sich hierbei um den Graphen von f handeln.

Der Graph B weist an der Stelle x_3 einen Schnittpunkt mit der x-Achse auf, der dem Hochpunkt von C zugeordnet werden kann. Somit kann C sowohl ein Schnittpunkt mit der x-Achse, der ein Extremum beschreibt, als auch ein Hochpunkt, der durch eine Nullstelle beschrieben wird, zugeordnet werden, sodass C der Graph von f' ist.

Folglich muss B der Graph von f'' sein.

1.2 ▶ Inhalt des Flächenstücks bestimmen (8 BE)

Da du in der vorherigen Aufgabe bereits die Graphen den einzelnen Funktionen zugeordnet hast, kannst du nun die Aussage treffen, dass die Fläche vom Graphen der 1. Ableitung und dem Graphen der 2. Ableitung der Funktion f eingeschlossen wird.

Teile die Fläche in Teilflächen auf, die jeweils nur von einer Funktion abhängig sind. Untersuche dazu die Nullstellen sowie Schnittstellen der Funktionen.

Allgemein lautet die Formel zur Berechnung eines Integrals unter der Ableitung einer Funktion, das dann den Flächeninhalt der Fläche beschreibt, wie folgt.

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

Ähnlich gilt dies für die 2. Ableitung.

$$\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x = f'(b) - f'(a)$$

Somit benötigst du nur f und die 1. Ableitung f', um das Integral zu berechnen, über das du dann die Fläche beschreiben kannst.

Betrachte das gegebene Schaubild, um die dir gegebenen Werte sinnvoll einzusetzen.
Man kann sehen, dass bei $x = \mathrm{e}^{-0,5}$ eine Nullstelle von f' vorliegt. An der Stelle $x = 1$ schneiden sich die Graphen der Funktionen dann. Für $1 \leq x \leq \mathrm{e}^{0,5}$ beeinflusst dann nur die 2. Ableitung die Fläche unter der Kurve.

Somit resultieren deine beiden Teilflächen, die du über folgende Integrale beschreiben kannst.

$$I_1 = \int_{\mathrm{e}^{-0,5}}^{1} f'(x)\mathrm{d}x = f(1) - f(\mathrm{e}^{-0,5})$$

$$I_2 = \int_{1}^{\mathrm{e}^{0,5}} f''(x)\mathrm{d}x = f'(\mathrm{e}^{0,5}) - f'(1)$$

Leite f einmal ab, um die Integrale berechnen zu können. Achte dabei darauf, dass eine Verkettung der Logarithmus-Funktion vorliegt.

$$f(x) = (\ln(x))^2 + \ln(x)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

Berechne nun die beiden Integrale

$$\begin{aligned} I_1 &= f(1) - f(\mathrm{e}^{-0,5}) \\ &= (\ln(1))^2 + \ln(1) - ((\ln(\mathrm{e}^{-0,5}))^2 + \ln(\mathrm{e}^{-0,5})) = 0^2 + 0 - ((-0,5)^2 - 0,5 \cdot 1) = 0,25 \end{aligned}$$

$$I_2 = f'(\mathrm{e}^{0,5}) - f'(1) = 2 \cdot \ln(\mathrm{e}^{0,5})\frac{1}{\mathrm{e}^{0,5}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{0,5}} - \left(2 \cdot \ln(1) \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \approx 1,213 - 1 = 0,213$$

$$I_{ges} = I_1 + I_2 = 0,25 + 0,213 = 0,463$$

2.1 ▶ Stammfunktion F bestimmen (8 BE)

Allgemein gilt für Logarithmus-Funktionen: $\int (\ln(x))\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x$.

Da es sich beim Term der Funktion um eine Summe handelt, kannst du die beiden Summanden einzeln integrieren.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left((\ln(x))^2\right) \mathrm{d}x + \int (\ln(x))\, \mathrm{d}x \\ &= \int (\ln(x) \cdot \ln(x))\, \mathrm{d}x + \int (\ln(x))\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\int (\ln(x) \cdot \ln(x))\, \mathrm{d}x = \ln(x) \cdot (x \cdot \ln(x) - x) - \int (\ln(x) - 1)\, \mathrm{d}x$$

$$\int (\ln(x) - 1)\, \mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x - x = x \cdot \ln(x) - 2 \cdot x$$

$$\begin{aligned} \int (\ln(x) \cdot \ln(x))\, \mathrm{d}x &= \ln(x) \cdot (x \cdot \ln(x) - x) - (x \cdot \ln(x) - 2x) \\ &= x \cdot (\ln(x))^2 - \ln(x) \cdot x - \ln(x) \cdot x + 2 \cdot x \\ &= x \cdot (\ln(x))^2 - 2 \cdot \ln(x) \cdot x + 2 \cdot x \end{aligned}$$

$$\int (\ln(x))\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x$$

Fasse die beiden Terme nun wieder in einen Funktionsterm zusammen, der dann wie folgt aussieht.

$$\begin{aligned} F(x) &= x \cdot (\ln(x))^2 - 2 \cdot \ln(x) \cdot x + 2 \cdot x + x \cdot \ln(x) - x \\ &= x \cdot (\ln(x))^2 - 2 \cdot \ln(x) \cdot x + 2 \cdot x + x \cdot \ln(x) - x \\ &= x \cdot (\ln(x))^2 - \ln(x) \cdot x + x \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Stammfunktion F der Funktion f mit folgender Funktionsgleichung.

$$F(x) = x \cdot (\ln(x))^2 - \ln(x) \cdot x + x$$

2.2 ▶ **Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse** (4 BE)

Um eine Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse zu bestimmen, benötigst du die Nullstellen der zur Kurve gehörigen Funktion. Eine Nullstelle ist bereits gegeben mit $x_2 = 1$.

Um weitere Nullstellen zu berechnen, setze $f(x) = 0$.

Daraus ergibt sich folgende Gleichung.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ (\ln(x))^2 + \ln(x) &= 0 \qquad \text{Klammere } \ln(x) \text{ aus} \\ \ln(x) \cdot (\ln(x) + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Wende nun den Satz vom Nullprodukt an, der aussagt, dass ein Produkt immer dann Null wird, wenn einer der Faktoren Null wird. Setze folglich $\ln(x) = 0$ und $\ln(x) + 1 = 0$.

Zunächst gilt: $\ln(1) = 0$ und damit $x_1 = 1$. Diese Nullstelle ist bereits bekannt.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \ln(x) + 1 &= 0 \qquad \mid -1 \\ \ln(x) &= -1 \\ e^{\ln(x)} &= e^{-1} \\ x &= e^{-1} \end{aligned}$$

Somit ergeben sich die Nullstellen als Grenzen des Integrals bei $x_a = e^{-1}$ und $x_b = 1$.

Berechne das Integral wie folgt.

$$\int_{e^{-1}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = F(1) - F(e^{-1})$$

$$\begin{aligned} F(1) - F(e^{-1}) &= 1 \cdot (\ln(1))^2 - \ln(1) \cdot 1 + 1 - (e^{-1} \cdot (\ln(e^{-1}))^2 - \ln(e^{-1}) \cdot e^{-1} + e^{-1}) \\ &= 1 - (e^{-1} \cdot 1 + e^{-1} + e^{-1}) \\ &= 1 - 3 \cdot e^{-1} \end{aligned}$$

$$1 - 3 \cdot e^{-1} \approx -0,104$$

Das Integral liefert einen negativen Wert, da die eingeschlossene Fläche unterhalb der x-Achse liegt, wie du dem Material entnehmen kannst.

In diesem Fall sprechen wir von einem negativ orientierten Flächeninhalt, der durch das Integral beschrieben wird und den Inhalt $A \approx 0,104$ besitzt.

3.1 ▶ Funktion f_k hat nur ein Minimum (6 BE)

Zunächst einmal gilt es zu klären, worum es sich bei einem Funktionenpaar handelt. Die Aufgabenstellung sagt aus, dass zwei Funktionen dann als Paar gelten, wenn sich die Parameter k nur im Vorzeichen unterscheiden.
Ein allgemeines Funktionenpaar wäre demnach beispielsweise f_{-k} und f_k.

Um zu prüfen, ob die Tiefpunkte an den Stellen x_k und x_{-k} dieselbe y-Koordinate haben, muss folglich gelten $f_k(x_k) = f_{-k}(x_{-k})$. Die Stellen x_k und x_{-k} beschreiben jeweils die Stellen der Minima der einzelnen Funktionen.

Bestimme die Minima von f_k und f_{-k}, indem du sie 2 mal ableitest, um sie dann auf die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ und die hinreichende Bedingung $f''(x) > 0$ zu prüfen.

Leite zunächst f_{-k} ab.

$$f_{-k}(x) = (\ln(x))^2 + k \cdot \ln(x)$$

$$f'_{-k}(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} + \frac{k}{x} = \frac{1}{x} \cdot (2 \cdot \ln(x) + k)$$

$$f''_{-k}(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot (2\ln(x) + k) + \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x}$$

$$f''_{-k}(x) = \frac{2}{x^2} - 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{k}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot (2 - 2 \cdot \ln(x) - k)$$

In einem weiteren Schritt kannst du nun f_k ableiten.

$$f_k(x) = (\ln(x))^2 - k \cdot \ln(x)$$

$$f'_k(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} - \frac{k}{x} = \frac{1}{x} \cdot (2 \cdot \ln(x) - k)$$

$$f''_k(x) = \frac{2}{x^2} - 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{k}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot (2 - 2 \cdot \ln(x) + k)$$

Setze nun $f'_{-k}(x) = 0$ und anschließend $f'_k(x) = 0$.

$$f'_{-k}(x) = 0$$

$$\frac{1}{x} \cdot (2 \cdot \ln(x) + k) = 0$$

Wende hier den Satz vom Nullprodukt an, um einzeln die Faktoren $\frac{1}{x} = 0$ und $2 \cdot \ln(x) + k = 0$ zu prüfen.

Es gilt: $\frac{1}{x} \neq 0$

Dies liegt daran, dass ein Bruch immer dann 0 wird, wenn sein Zähler 0 ist. Da aber gilt $1 \neq 0$, wird dieser Term nie 0.

Setze $2 \cdot \ln(x) + k = 0$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \ln(x) + k &= 0 \qquad | \ -k \\ 2 \cdot \ln(x) &= -k \qquad | :2 \\ \ln(x) &= -\frac{k}{2} \\ x &= \mathrm{e}^{-\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

Setze diesen Wert für x in die 2. Ableitung von f_{-k} ein.

$$f''_{-k}(\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}}) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}}}^{2} \cdot (2 - 2 \cdot \ln(\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}}) + k)$$

Vereinfache diesen Term. Es gilt $\ln(\mathrm{e}^x) = x$

$$f''_{-k}(\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}}) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-k}} \cdot (2 - 2 \cdot (-\frac{k}{2})) - k) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-k}} \cdot (2 + k - k) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-k}} \cdot 2$$

Da der e-Term niemals kleiner 0 werden kann, gilt somit für alle $-k$:

$$f''_{-k}(x) > 0$$

Führe die selbe Prozedur mit f'_k durch. Hier musst du nur den Term $2 \cdot \ln(x) - k = 0$ setzen.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \ln(x) - k &= 0 \qquad | \ +k \\ 2 \cdot \ln(x) &= +k \qquad | :2 \\ \ln(x) &= \frac{k}{2} \\ x &= \mathrm{e}^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

$$f''_{k}(\mathrm{e}^{\frac{k}{2}}) = \frac{1}{\mathrm{e}^{k}} \cdot (2 - 2 \cdot (\frac{k}{2})) + k) = \frac{1}{\mathrm{e}^{k}} \cdot (2 - k + k) = \frac{1}{\mathrm{e}^{k}} \cdot 2$$

Es gilt wie oben, dass der e-Term niemals kleiner 0 wird. Folglich gilt auch für alle k:

$$f''_k(x) > 0$$

Folglich gibt es für jeden Parameter k in der Funktion nur Minima, da sowohl $f''_k(x) > 0$ als auch $f''_{-k}(x) > 0$ gilt.

▶ Tiefpunkte der Graphen eines Paares haben dieselbe y-Koordinate

Allgemein berechnen sich Funktionswerte an einer Stelle x_k über $f(x_k) = y$, wobei y die gesuchte y-Koordinate ist.

Setze die beiden oben berechneten Werte für x in die Funktionsgleichung von f_k und f_{-k} ein.

Daraus ergeben sich folgende Gleichungen.

$$\begin{aligned} f_k(\mathrm{e}^{\frac{k}{2}}) &= \left(\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{k}{2}}\right)\right)^2 - k \cdot \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{k}{2}}\right) \\ &= \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{2} \\ &= \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} = -\frac{k^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{-k}(e^{-\frac{k}{2}}) &= \left(\ln\left(e^{-\frac{k}{2}}\right)\right)^2 + k\cdot\ln\left(e^{-\frac{k}{2}}\right) \\ &= \left(-\frac{k}{2}\right)^2 - k\cdot\frac{k}{2} \\ &= \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} = -\frac{k^2}{4} \end{aligned}$$

Somit gilt $f_{-k}(e^{-\frac{k}{2}}) = f_k(e^{\frac{k}{2}})$, sodass die Aufgabenstellung bewiesen ist.

3.2 ▶ Multiplikation der Nullstellen (2 BE)

Die Aufgabenstellung gibt vor, dass die zwei Nullstellen, die eine Funktion der Funktionenschar aufweist, durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor die Nullstellen des Funktionenpartners entsprechen.
Folglich soll gelten $x_{11}\cdot t_1 = x_{-11}$ und $x_{12}\cdot t_2 = x_{-12}$. x_{11} und x_{-11} und x_{12} und x_{-12} beschreiben die Nullstellen der Funktion f und f_{-1}.

Nach der Aufgabenstellung sollen die Nullstellen mit einem geeigneten Faktor multipliziert werden. Somit muss gelten $t_1 = t_2$.

Berechne t_1 und t_2 für f_1 und f_{-1} wie folgt.

$e^{-1}\cdot t = 1 \Longrightarrow t = e$

$1\cdot t = e \Longrightarrow t = e$

Somit gilt $t_1 = t_2$, sodass die Nullstellen von f_{-1} durch Multiplikation mit dem Parameter $t = e$ die Nullstellen von f_1 ergeben. Prüfe dies auf dieselbe Weise für die Nullstellen von f_2 und f_{-2}.

$e^{-2}\cdot t_3 = 1 \Longrightarrow t_4 = e^2$

$1\cdot t_3 = e^2 \Longrightarrow t_4 = e^2$

Es gilt $t_3 = t_4$, sodass die Nullstellen von f_{-2} durch Multiplikation mit $t = e^2$ die Nullstellen von f_2 ergeben.

3.3 ▶ Beziehung geometrisch deuten (6 BE)

Laut der Aufgabenstellung soll gelten $f_1(e^1\cdot x) = f_{-1}(x)$ und $f_2(e^2\cdot x) = f_{-2}(x)$.

Zunächst kannst du erkennen: das **Argument** der ersten Funktion ist jeweils mit dem Faktor e^k multipliziert. Die Veränderung eines Funktionsterms von $f(x)$ zu $f(k\cdot x)$ äußert sich im Graphen der Funktion durch eine **Streckung** bzw. **Stauchung** in x-Richtung. Du kennst dieses Phänomen z.B. von den trigonometrischen Funktionen her, wo auf diese Weise die Periode der Funktionen beeinflusst wird.
Eine geometrische Deutung der Beziehung lautet also: wird der Graph der Funktion f_1 um Faktor e^1 in x-Richtung gestreckt, so ergibt sich der Graph der Funktion f_{-1}.
Ebenso gilt nach der zweiten Gleichung: der Graph der Funktion f_{-2} ergibt sich aus dem Graphen von f_2 durch Stauchung um Faktor e^{-2} in x-Richtung.

► Verallgemeinerung beweisen

Laut der Aufgabenstellung soll gelten $f_k(\mathrm{e}^k \cdot x) = f_{-k}(x)$. Setze die Terme die beiden Funktionen gleich, indem du die allgemeinen Parameter k einsetzt und dann die Gleichung auflöst. Es muss sich eine wahre Aussage ergeben.

Daraus resultiert folgende Gleichung, die du dann vereinfachen kannst.

$$\left(\ln\left(\mathrm{e}^k \cdot x\right)\right)^2 - k \cdot \ln(\mathrm{e}^k \cdot x) = (\ln(x))^2 + k \cdot \ln(x)$$

Wende die Logarithmusregeln an, um die Produkte innerhalb der Logarithmen auseinander zu ziehen.

$$\left(\ln\left(\mathrm{e}^k\right) + \ln(x)\right)^2 - k \cdot \ln(\mathrm{e}^k) - k \cdot \ln(x) = (\ln(x))^2 + k \cdot \ln(x)$$

Es gilt $\ln\left(\mathrm{e}^k\right) = k$.

$$(k + \ln(x))^2 - k \cdot k - k \cdot \ln(x) = (\ln(x))^2 + k \cdot \ln(x)$$

Multipliziere die Klammern aus.

$$k^2 + 2 \cdot k \ln(x) + \ln(x)^2 - k \cdot k - k \cdot \ln(x) = (\ln(x))^2 + k \cdot \ln(x)$$

Fasse die Werte zusammen.

$$2 \cdot k \cdot \ln(x) + \ln(x)^2 - k \cdot \ln(x) = (\ln(x))^2 + k \cdot \ln(x)$$

$$k \cdot \ln(x) + \ln(x)^2 = (\ln(x))^2 + k \cdot \ln(x)$$

Wende das Kommutativgesetz der Addition an. Es gilt $\ln(x)^2 = (\ln(x))^2$.

$$(\ln(x))^2 + k \cdot \ln(x) = (\ln(x))^2 + k \cdot \ln(x)$$

Hierbei handelt es sich um eine wahre Aussage. Die Verallgemeinerung ist bewiesen.