C1 - Stochastik

1

1.1 Es handelt sich hierbei um eine Bernoulli-Kette mit Parametern $n = 10$ und $p = 0,28$.

Die Zufallsvariable X gibt an, wie viele der ersten zehn befragten Personen über das Internet telefonieren. X kann hier als binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0,28$ angenommen werden.

Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Personen das Internet für Telefonate nutzen

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \binom{10}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^{10-3} \\ &= 120 \cdot 0,28^3 \cdot 0,72^7 \\ &\approx 0,2642 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten zehn befragten Personen genau drei Personen über das Internet telefonieren, beträgt somit etwa $26,42\,\%$.

Wahrscheinlichkeit, dass höchstens drei Personen das Internet für Telefonate nutzen

$$\begin{aligned} P(X\leq 3) &= \sum_{k=0}^{3} P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{3} \binom{10}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{10-k} \\ &= \binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{10-0} + \binom{10}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{10-1} \\ &\quad + \binom{10}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{10-2} + \binom{10}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^{10-3} \\ &= 0,72^{10} + 10 \cdot 0,28 \cdot 0,72^9 + 45 \cdot 0,28^2 \cdot 0,72^8 + 120 \cdot 0,28^3 \cdot 0,72^7 \\ &\approx 0,7021 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten zehn befragten Personen höchstens drei Personen über das Internet telefonieren, beträgt somit $70,21\,\%$.

1.2 $$P(E) = \frac{\text{Anzahl der Möglichkeiten, die Treffer und Nieten so anzuordnen, dass Ereignis } E \text{ gilt}}{\text{Anzahl der Möglichkeiten, die Treffer und Nieten anzuordnen}}$$

1. Schritt: Anzahl der Möglichkeiten, die Treffer und Nieten anzuordnen

Laut Aufgabenstellung nutzen zwei von zehn der befragten Personen das Internet für Telefonate. Somit gibt es in dieser Situation zwei Treffer und 8 Nieten.

Hierbei handelt es sich um das Ziehen aus einer ungeordneten Stichprobe ohne Zurücklegen.

Somit gibt es $\binom{10}{2} = 45$ Möglichkeiten, die Treffer und Nieten anzuordnen.

2. Schritt: Anzahl der Möglichkeiten, dass Ereignis E gilt

Die 10 Befragten werden in zwei Gruppen aufgeteilt: Die ersten drei Befragten und die letzten sieben Befragten. Ereignis E gilt genau dann, wenn auf den ersten drei und auf den letzten sieben Plätzen genau ein Treffer ist.

Es handelt sich hierbei wieder um das Ziehen aus einer ungeordneten Stichprobe ohne Zurücklegen.

Es gibt somit $\binom{3}{1} = 3$ Möglichkeiten, einen Treffer auf drei Plätze zu verteilen, sowie $\binom{7}{1} = 7$ Möglichkeiten, einen Treffer auf sieben Plätze zu verteilen.

Zusammen ergibt dies also $3 \cdot 7 = 21$ Möglichkeiten für Ereignis C.

3. Schritt: $P(E)$ berechnen

Durch Einsetzen der bestimmten Werte folgt:

$$P(E) = \frac{21}{45} \approx 0,4667$$

Die Wahrscheinlichkeit für Ereignis C beträgt folglich etwa $46,67\,\%$.

2 **Anteil der 25- bis 54-Jährigen, die das Internet für Telefonate nutzen**

1. $55\,\%$ aller Internetnutzer sind im Alter von 25 bis 54 Jahren
2. $26\,\%$ aller 24- bis 54-jähriger Internetnutzer telefonieren über das Internet

Sei n die Anzahl von Internetnutzern im Jahr 2013. Somit sind $0,55 \cdot n$ Internetnutzer 24 bis 54 Jahre alt.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0,26 \cdot \left(\text{Anzahl 24- bis 54-Jähriger Nutzer}\right) \\ &= 0,26 \cdot (0,55 \cdot n) \\ &= 0,143 \cdot n \end{aligned}$$

Der gesuchte Anteil entspricht folglich $14,3\,\%$.

Anteil der 10- bis 24-Jährigen Internetnutzer

Die Internetnutzer wurden in drei Gruppen nach ihrem Alter aufgeteilt. Der Anteil der 25- bis 54-Jährigen

Nutzer von $55\,\%$ ist bereits bekannt. Sei p der gesuchte Anteil der 10- bis 24-Jährigen Nutzern und und q der Anteil an 55-Jährigen und Älteren.

Zusammen müssen die Anteile der drei Gruppen $100\,\%$ ergeben, also ergibt sich:

$$\begin{aligned} 1 &= p + 0,55 + q \qquad \mid -0,55 - p \\ 0,45 - p &= q \end{aligned}$$

Der Gesamtanteil der Internetnutzer, welche das Internet zum Telefonieren nutzen, ist gerade die Summe der mit den Altersanteilen gewichteten Einzelanteilen, das heißt:

$$0,28 = 0,42 \cdot p + 0,26 \cdot 0,55 + 0,21 \cdot q$$

Durch Einsetzen der Bedingung $q = 0,45 - p$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0,28 &= 0,42 \cdot p + 0,26 \cdot 0,55 + 0,21 \cdot (0,45 - p) \\ 0,28 &= 0,42 \cdot p + 0,143 + 0,0945 - 0,21 \cdot p \\ 0,28 &= 0,21 \cdot p + 0,2375 && \mid -0,2375 \\ 0,0425 &= 0,21 \cdot p && \mid : 0,21 \\ 0,2024 &\approx p \end{aligned}$$

Der Anteil an Internetnutzern im Alter von 10 bis 24 Jahren beträgt somit etwa $20,24\,\%$.

3

3.1 **1. Schritt: Nullhypothese aufstellen**

Da mit dem Hypothesentest untersucht werden soll, ob der Anteil der Internetnutzer, die über das Internet telefonieren, größer als 28 % im Jahr 2013 ist, muss die Nullhypothese hier wie folgt lauten:

$$H_0 : p_0 \leq 0,28$$

Es handelt sich folglich um einen rechtsseitigen Hypothesentest. Die Gegenhypothese H_1 muss demnach wie folgt lauten:

$$H_1 : p_0 > 0,28$$

2. Schritt: Entscheidungsregel formulieren

Die Zufallsvariable Z beschreibt die die Anzahl an Internetnutzern unter den 50 Befragten, welche über das Internet telefonieren. Z ist binomialverteilt mit $p = 0,28$ und $n = 50$.

Mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0,01$ können Annahme- und Ablehnungsbereich bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
P(Z \geq k) &\leq \alpha \\
1-P(Z < k) &\leq 0,01 \\
1-P(Z \leq k-1) &\leq 0,01 \qquad \mid -1 \\
-P(Z \leq k-1) &\leq -0,99 \qquad \mid \cdot(-1) \\
P(Z \leq k-1) &\geq 0,99
\end{aligned}
$$

Mit der Tabelle für die summierte Binomialverteilung aus dem Material ergitb sich:

$$F(50;\ 0,28;\ 22) = 0,9950 > 0,99$$

$$F(50;\ 0,28;\ 21) = 0,9888 < 0,99$$

Da hier also $k-1=22$ gilt, folgt $k=23$.

Somit ergibt sich also:

- Annahmebereich: $A=(0,1,2,\dots,22)$
- Ablehnungsbereich: $\overline{A}=(23,24,\dots,50)$

Benutzen mindestens 23 der 50 befragten Internetnutzer das Internet zum Telefonieren, wird folglich die Nullhypothese abgelehnt. In diesem Fall kann man davon ausgehen, dass der Anteil an Internetnutzern, die das Internet zum Telefonieren nutzen, über $28\,\%$ liegt.

3.2 **β bestimmen und erläutern**

Im Material wird einer Wahrscheinlichkeit p_1 ein Wert β, die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, zugeordnet.

Zu der in der Aufgabenstellung angegebenen Wahrscheinlichkeit von $35\,\%$, kann etwa der Wert $\beta=0,73$ abgelesen werden. Damit liegt die Wahrscheinlichkeit eines Fehler 2. Art hier bei circa $73\,\%$.

Der Fehler 2. Art bedeutet, dass die Nullhypothese H_0 fälschlicherweise beibehalten wird. Zu $73\,\%$ würde also angenommen werden, dass der Anteil nicht gestiegen ist, obwohl er tatsächlich auf $35\,\%$ gestiegen ist.

Zugehörigen Ablehnungsbereich bestimmen

Die Wahrscheinlichkeit von $73\,\%$, einen Fehler 2. Art zu begehen, entspricht in diesem Test gerade der Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese beizubehalten.

Die Nullhypothese wird genau dann beibehalten, wenn für die Zufallsvariable $Z\in A$ gilt:

$$
\begin{aligned}
0,73 &\approx P\left(\text{„Fehler 2. Art"}\right) \\
&= P\left(Z\in A\right) \qquad \mid A=(1,2,\dots,k-1) \\
&= P\left(Z\leq k-1\right)
\end{aligned}
$$

Der Tabelle zur Binomialsummenfunktion für die Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0,35$ kann der Wert $0,7264\,(\approx 0,73)$ für $k-1=19$ abgelesen werden.

Damit folgt $k=20$.

Der zu diesem Test zugehörige Ablehnungsbereich lautet somit $\overline{A} = (20, 21, \ldots, 50)$.