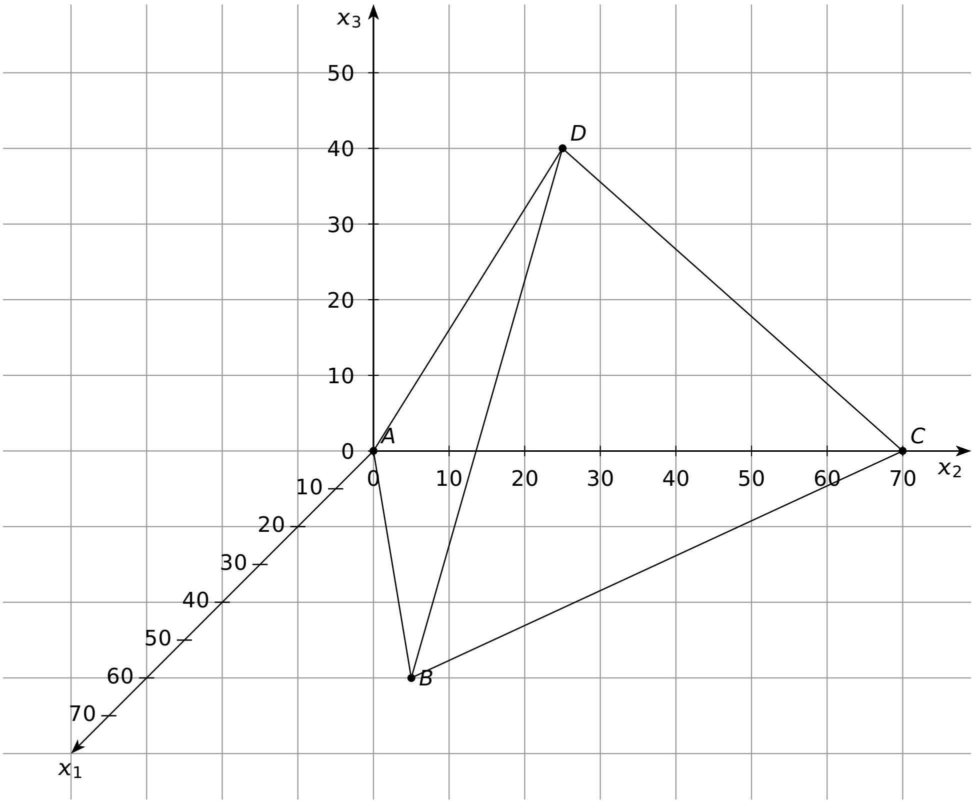
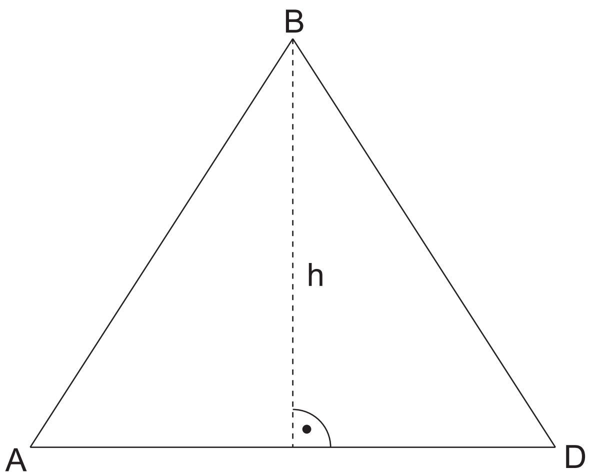
a) ▸ **Zeichnen der Pyramide und Einteilen des Koordinatensystems** (4BE)



b) ▸ **Überprüfen der Bedingung** (8BE)

Die Kante $\overline{AD}$ und Punkt B liegt in folgendem Dreieck:



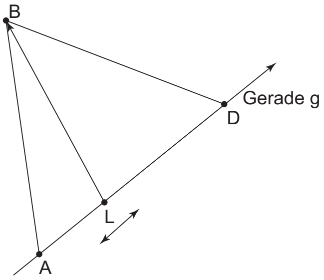
Den Abstand zwischen Kante $\overline{AD}$ und Punkt B bestimmst du, indem du die Länge der Strecke h bestimmst.

1. Schritt: Bestimmen des Lotfußpunktes

Die Länge der Höhe h bestimmst du, indem du von Punkt B aus ein Lot auf die Seite $\overline{AD}$ fällst. Fasse dazu die Gerade g, auf welcher die Strecke $\overline{AD}$ liegt, wie folgt als einen Vektor zusammen:

$$g:\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}20-0\\35-0\\50-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\cdot t\\35\cdot t\\50\cdot t\end{pmatrix}$$

Den Lotfußpunkt L ermittelst du nun, indem du untersuchst, an welchem Punkt auf Gerade g das Skalarprodukt zwischen dem oben bestimmten Vektor zu Gerade g und dem Vektor zwischen Punkt B und Gerade g gleich null ist:



$$0=\begin{pmatrix}20\cdot t\\35\cdot t\\50\cdot t\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}20\cdot t-60\\35\cdot t-35\\50\cdot t-0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
0&=20\cdot t\cdot(20\cdot t-60)+35\cdot t\cdot(35\cdot t-35)+50\cdot t\cdot(50\cdot t-0)\\
0&=400\cdot t^2-1200\cdot t+1225\cdot t^2-1225\cdot t+2500\cdot t^2\\
0&=4125\cdot t^2-2425\cdot t\\
0&=t\cdot(4125\cdot t-2425) && \mid t_1=0\\
0&=4125\cdot t-2425 && \mid +2425\\
2425&=4125\cdot t && \mid :4125\\
t_2&=\tfrac{97}{165}\approx 0,5879
\end{aligned}$$

Da $t_1=0$ eingesetzt in die Gleichung von g, gerade dem Aufpunkt A der Gerade g entsprechen würde, ist diese Lösung der Gleichung für die weitere Rechnung nicht zu betrachten.
Die Koordinaten des Lotfußpunktes L berechnest du, indem du t_2 in g einsetzt:

$$\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+0,5879\cdot\begin{pmatrix}20\\35\\50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11,76\\20,58\\29,4\end{pmatrix}$$

Die Koordinaten von L sind demnach: $L(11,76\,|\,20,58\,|\,29,4)$.

2. Schritt: Länge der Strecke *h*

Strecke h bestimmst du nun, indem du den Vektor zwischen L und B bildest:

$$h=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OL}=\begin{pmatrix}60-11,76\\35-20,58\\0-29,4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}48,24\\14,42\\-29,4\end{pmatrix}.$$

Die Länge der Strecke h berechnest du über den Betrag des zugehörigen, oben bestimmten, Vektors:

$$|h| = \left|\begin{pmatrix} 48,24 \\ 14,42 \\ -29,4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(48,24)^2 + (14,42)^2 + (-29,4)^2} = \sqrt{3399,39} = 58,304\,\text{LE}.$$

Nach der Bedingung des Pharaos, darf der Abstand zwischen Kante $\overline{AD}$ und Punkt B höchstens 1 % von 58 LE abweichen. Ob der von dir bestimmt Abstand innerhalb der vorgegebenen Toleranz liegt, bestimmst du über folgenden Quotienten:

$$\text{Abweichung} = \frac{58,304\,\text{LE}}{58\,\text{LE}} = 1,0052$$

Da die Abweichung nur 0,52 % beträgt, erfüllt die vorgegebene Planung die Bedingung des Pharaos.

c) ▶ **Bestimmen des Inhalts der Schattenfläche und Beschreiben der Vorgehensweise** (8BE)

1. Schritt: Bestimmen der relevanten Pyramidenkanten

Fallen die Sonnenstrahlen auf die Pyramide, so wird die Pyramidenspitze D in die x_1x_2 - Ebene projiziert. Mit Hilfe der Lage der projizierten Pyramidenspitze D' kannst du bestimmen, welche Kanten der Pyramide für den Schattenwurf maßgeblich sind. Definiere dazu eine Gerade g, welche die Lage der projizierten Pyramidenspitze in Abhängigkeit des Vektors $\overrightarrow{v}$ der Sonnenstrahlen beschreibt. Ermittle den Schnittpunkt dieser Geraden mit der x_1x_2 - Ebene um die relevanten Kanten der Pyramide zu bestimmen:

$$\text{Gerade } g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

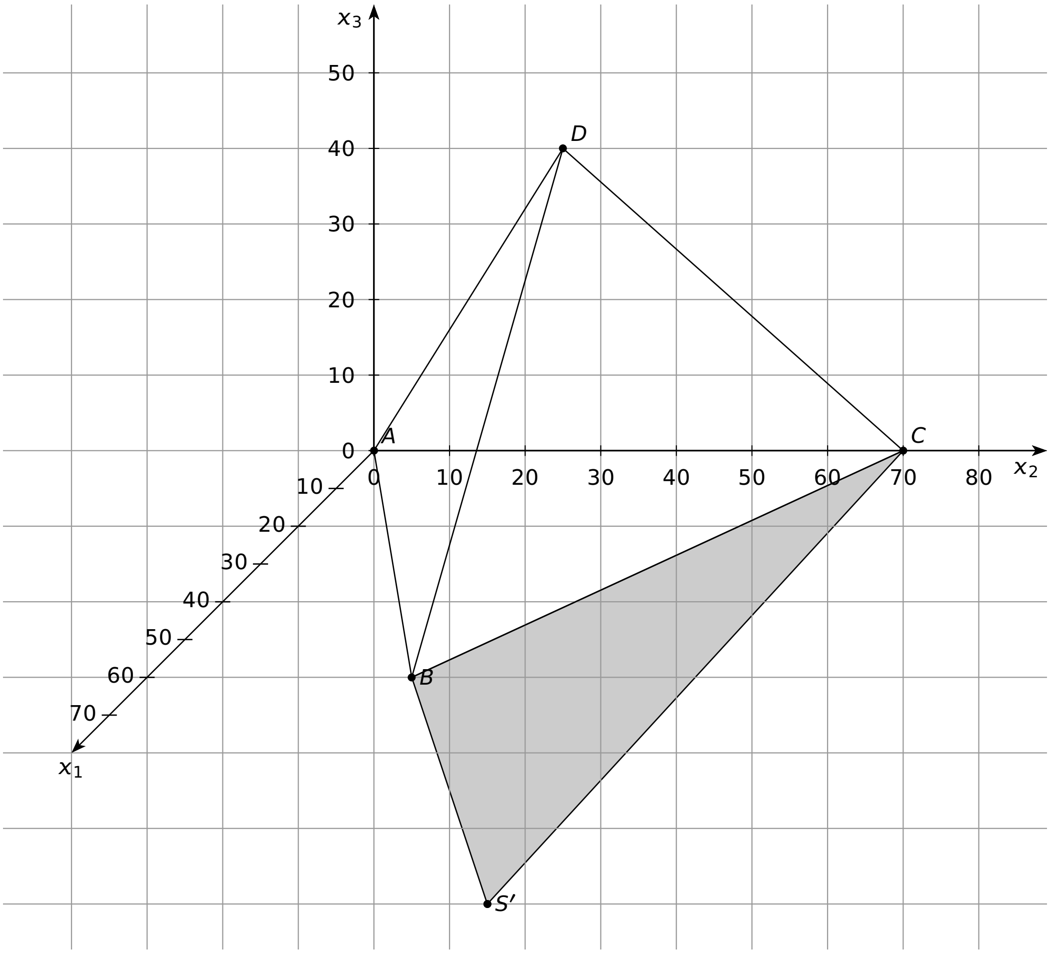
Schnittpunkt S' von g mit der x_1x_2 - Ebene:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Resultierendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llr}
\text{I} & a = 20 + r \cdot 10 & \\
\text{II} & b = 35 + r \cdot 4 & \\
\text{III} & 0 = 50 + r \cdot (-5) & \mid +5 \cdot r \\
\hline
\text{III} & 5 \cdot r = 50 & \mid :5 \\
 & r = 10 & r = 10 \text{ in I} \\
\hline
\text{I} & a = 20 + 10 \cdot 10 & \\
 & a = 120 & r = 10 \text{ in II} \\
\hline
\text{II} & b = 35 + 10 \cdot 4 & \\
 & b = 75 &
\end{array}$$

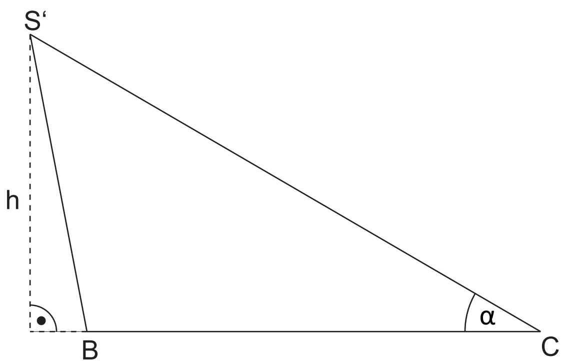
Schnittpunkt S' der Geraden g mit der x_1x_2 - Ebene liegt bei $S'(120|75|0)$.
Die für die Schattenfläche relevanten Kanten bestimmst du nun, indem du $S'(120|75|0)$ in die Skizze aus Aufgabenteil a einträgst und durch die Position von S' die relevanten Kanten bestimmst:



Der Skizze kannst du entnehmen, dass die Kanten $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$ maßgeblich für die Schattenwurf der Pyramide verantwortlich sind.

2. Schritt: Bestimmen des Inhalts der Schattenfläche

Der Schattenpunkt S' bildet mit der Pyramidenseite $\overline{BC}$ folgendes Dreieck:



Bevor du den Flächeninhalt A des oben skizzierten Dreiecks BSC zu berechnen kannst, ermittelst du die Länge der Höhe h des Dreiecks BSC. Die Höhe h berechnest du mit Hilfe einer Winkelbeziehung. Berechne dazu den Winkel α zwischen den Vektoren $\overrightarrow{CS'}$ und $\overrightarrow{CB}$ über die entsprechende Formel:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CB}\circ\overrightarrow{CS'}}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CS'}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}60-0\\35-70\\0-0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}120-0\\75-70\\0-0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}60-0\\35-70\\0-0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}120-0\\75-70\\0-0\end{pmatrix}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}60\\-35\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}120\\5\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}60\\-35\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}120\\5\\0\end{pmatrix}\right|}$$

$$\cos\alpha = \frac{(60\cdot120)+(5\cdot(-35))}{\sqrt{60^2+(-35)^2}\cdot\sqrt{120^2+5^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{7.025}{8.342,7} \qquad |\ \arccos$$

$$\alpha = 32,64^\circ$$

Berechne die Länge der Höhe h des Dreiecks nun über folgende Winkelbeziehung:

$$\sin\alpha = \frac{h}{|\overrightarrow{CS'}|}$$

$$\sin 32,54^\circ = \frac{h}{\sqrt{120^2+5^2}}$$

$$0,539 = \frac{h}{120,1\,\text{LE}} \qquad |\ \cdot 120,1\,\text{LE}$$

$$h = 64,78\,\text{LE}$$

Den Flächeninhalt A des Dreiecks BSC berechnest du nun über die Flächenformel für allgemeine Dreiecke:

$$A = \tfrac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot h = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{60^2+35^2}\cdot 64,78 = 2249,48\,\text{FE}$$

Der Inhalt der Schattenfläche, welche die Pyramide in der x_1x_2 - Ebene erzeugt, ist 2249,48 FE.

d) ▶ **Überprüfen, ob es für den Pharao möglich ist die Spitze des Berges zu sehen** (7BE)

Willst du überprüfen, ob der Pharao von seinem Lieblingplatz aus die Spitze des Berges sehen kann, so untersuchst du, ob sich dabei die Seitenflächen der Pyramide in seinem Blickfeld befinden. Definiere dazu zuerst die Blickrichtung des Pharaos als Gerade h. Diese Gerade verläuft durch den Punkt seines Lieblingsplatzes bei $L(120\,|\,75\,|\,0)$ und die Spitze des Berges bei $S(-480\,|\,-15\,|\,300)$:

$$h:\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}120\\75\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-480-120\\-15-75\\300-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120\\75\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-600\\-90\\300\end{pmatrix}.$$

Ob sich die Pyramide im Blickfeld des Pharaos befindet überprüfst du nun, indem du untersuchst, ob h eine der Seitenflächen der Pyramide schneidet. Die relevanten Seitenflächen der Pyramide sind dabei ABD und BCD.

1. Schneiden von h mit der Ebene ABD

Definiere die Seitenfläche ABD als Ebene E_1 mit Aufpunkt B und den Richtungsvektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BD}$:

$$E_1:\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}60\\35\\0\end{pmatrix}+q\cdot\begin{pmatrix}0-60\\0-35\\0-0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}20-60\\35-35\\50-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\35\\0\end{pmatrix}+q\cdot\begin{pmatrix}-60\\-35\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-40\\0\\50\end{pmatrix}$$

Schnittpunkt von E_1 und Gerade h:

1. Schritt: Ebene E_1 in Koordinatenform

Kreuzprodukt der Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix}-60\\-35\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-40\\0\\50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-35\cdot 50 & - & 0\cdot 0\\ 0\cdot(-40) & - & (-60)\cdot 50\\ (-60)\cdot 0 & - & (-35)\cdot(-40)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1750\\3000\\-1400\end{pmatrix}\widehat{=}\begin{pmatrix}-35\\60\\-28\end{pmatrix}$$

Koordinatenform der Ebene E_1:
$n_1\cdot x_1+n_2\cdot x_2+n_3\cdot x_3=d \iff -35\cdot x_1+60\cdot x_2+(-28)\cdot x_3=d$

Bestimmen von d durch Einsetzen des Aufpunkts der Ebene E_1:
$-35\cdot 60+60\cdot 35+-28\cdot 0=d \iff d=0$

$\Longrightarrow$ Koordinatenform der Ebene: $E_1: -35\cdot x_1+60\cdot x_2-28\cdot x_3=0$

2. Schritt: Gerade h als Vektor und Einsetzen in Koordinatenform von E_1

Gerade h als Vektor:

$$h:\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}120\\75\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-600\\-90\\300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120-600\cdot s\\75-90\cdot s\\300\cdot s\end{pmatrix}$$

Einsetzen der Geraden h als Vektor in Koordinatenform der Ebene E_1:

$$-35\cdot(120-600\cdot s)+60\cdot(75-90\cdot s)-28\cdot 300\cdot s=0$$
$$-4.200+21.000\cdot s+4.500-5.400\cdot s-8400\cdot s=0$$
$$300+7.200\cdot s=0 \Leftrightarrow s=-\frac{1}{24}$$

3. Schritt: Koordinaten den Schnittpunkts P_1

Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkt P_1 durch Einsetzen des eben bestimmen s in die Geradengleichung von h:

$$\overrightarrow{x_{P_1}}=\begin{pmatrix}120\\75\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix}-600\\-90\\300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}145\\78,75\\-12,5\end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Schnittpunkts P_1 sind: $P_1(145\,|\,78,75\,|\,-12,5)$.

Du kannst erkennen, dass der Schnittpunkt eine negative x_3-Koordinate besitzt. In dem Bereich, in dem die Pyramide sich befindet, sind alle x_3-Koordinaten positiv. Da die x_3-Koordinaten der Gerade durch die Punkte L und S aber in Richtung des Punktes L im größer werden, bedeutet das, dass dieser Schnittpunkt noch **hinter** dem Pharao liegt.

Die Seitenfläche ABD der Pyramide versperrt dem Pharao also nicht die Sicht.

2. Schneiden von h mit der Ebene BCD

Definiere auch hier die Seitenfläche BCD als Ebene E_2 mit Aufpunkt B und den Richtungsvektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BD}$:

$$E_2:\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}60\\35\\0\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}0-60\\70-35\\0-0\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}20-60\\35-35\\50-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\35\\0\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}-60\\35\\0\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}-40\\0\\50\end{pmatrix}$$

Schnittpunkt von E_2 und Gerade h:

1. Schritt: Ebene E_2 in Koordinatenform Kreuzprodukt der Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix}-60\\35\\0\end{pmatrix}\times\cdot\begin{pmatrix}-40\\0\\50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\cdot 50 & - & 0\cdot 0\\0\cdot(-40) & - & (-60)\cdot 50\\(-60)\cdot 0 & - & 35\cdot(-40)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1750\\3000\\1400\end{pmatrix}\widehat{=}\begin{pmatrix}35\\60\\28\end{pmatrix}$$

Koordinatenform der Ebene E_2:
$n_1\cdot x_1+n_2\cdot x_2+n_3\cdot x_3=d \Leftrightarrow 35\cdot x_1+60\cdot x_2+28\cdot x_3=d$

Bestimmen von d durch Einsetzen des Aufpunkts der Ebene E_2:
$35\cdot 60+60\cdot 35+28\cdot 0=d \Leftrightarrow d=4200$

$\Longrightarrow$ Koordinatenform der Ebene: $E_2:\ 35\cdot x_1+60\cdot x_2+28\cdot x_3=4200$

2. Schritt: Einsetzen der Geraden *h* als Vektor in Koordinatenform von E_2

Einsetzen der Geraden h als Vektor in Koordinatenform der Ebene E_2:

$$\begin{aligned} 35\cdot(120-600\cdot s)+60\cdot(75-90\cdot s)+28\cdot 300\cdot s &= 4.200 \\ 4.200-21.000\cdot s+4.500-5.400\cdot s+8400\cdot s &= 4.200 \\ 8.700-18.000\cdot s &= 4.200 \qquad |-8.700 \\ -18.000\cdot s &= -4.500 \;\Leftrightarrow\; s=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

3. Schritt: Koordinaten den Schnittpunkts P_2

Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkt P_2 durch Einsetzen des eben bestimmen s in die Geradengleichung von h:

$$\overrightarrow{x_{P_2}} = \begin{pmatrix} 120 \\ 75 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -600 \\ -90 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 52,5 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Schnittpunkts P_2 sind: $P_2(-30\,|\,52,5\,|\,75)$.

Betrachte nun wieder die Koordinaten des Schnittpunktes: seine x_3-Koordinate beträgt 75. Die Spitze D der Pyramide liegt aber in einer Höhe von 50. Also liegt der Schnittpunkt **oberhalb** der Pyramide. Damit folgt, dass auch die Seite BCD sich nicht im Blickfeld des Pharaos befindet.

e) ▶ **Erläutern der Vorgehensweise zur Bestimmung des Punktes** (3BE)

Bevor du damit beginnst, eine mögliche Vorgehensweise zu beschreiben, sollte du dir folgendes klar gemacht haben:

- Im Punkt L kann der Pharao die Spitze S des Berges noch sehen.
- Im Punkt B kann er sie nicht mehr sehen.

Deine Aufgabe ist es hier, jenen Punkt auf $\overline{BL}$ zu bestimmen, von welchem der Pharao die Spitze des Berges gerade noch sehen kann.
Die Vorgehensweise zur Bestimmung dieses Punktes könnte wie folgt lauten:

1. Schritt:

Lege eine Gerade durch die Punkte B und L:

$$j:\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Bestimme einen beliebigen Punkt X auf der Geraden durch B und L:

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 60+60\cdot t \\ 35+40\cdot t \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Schritt:

Modelliere den Blick des Pharaos auf die Spitze des Berges als Gerade k durch den Punkt X und S.

4. Schritt:

Berechne den Schnittpunkt von k mit den Ebenen der Seitenflächen der Pyramide (siehe Aufgabenteil d), um zu überprüfen, ob der Pharao die Spitze des Berges noch sehen kann. Nachdem dieser Schnittpunkt bestimmt wurde, überlegst du dir, welche x_3 - Koordinate dieser mindestens haben muss, damit dieser gerade noch über der Ebene liegt.
Aufgrund dieser Überlegung stellst du eine Gleichung auf, mit welcher du einen Wert für Parameter t (Punkt X) bestimmst. Setzt du diesen Wert für t später in Gerade k ein, so erhältst du jene Gerade, welchen den Blick, bei dem der Pharao die Spitze des Berges gerade noch sehn kann, beschreibt.

5. Schritt:

Schneide die eben bestimmte Gerade mit der Gerade durch B und L. Der Schnittpunkt dieser Geraden entspricht gerade dem Punkt, von welchem der Pharao die Spitze des Berges gerade noch sehen kann.