B2 - Analytische Geometrie

1.1 ▶ **Rechteck nachweisen**

Für ein Rechteck müssen zwei gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sein, sowie zwei benachbarte Seiten im rechten Winkel zueinander stehen.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1,25 \end{pmatrix}$$

Es ist also $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Die gegenüberliegenden Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ sind also parallel und gleichlang. Dadurch sind auch die beiden anderen gegenüberliegenden Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{DA}$ gleichlang und parallel zueinander.
Zu überprüfen bleibt noch die Rechtwinkligkeit. Ist einer der Innenwinkel ein rechter Winkel, sind wegen der bereits gezeigten Eigenschaften auch die übrigen Innenwinkel rechtwinklig.

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1,25 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-6) + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1,25 = 0$$

Die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ schließen also einen rechten Winkel ein. Bei dem Viereck $ABCD$ handelt es sich damit insgesamt um ein Rechteck.

1.2 ▶ **Parametergleichung bestimmen**

Verwende einen der vier Eckpunkte als Stützpunkt und zwei unterschiedliche Verbindungsvektoren als Spannvektoren. Du erhältst beispielsweise:

$$\begin{aligned} E: \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1,25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

▶ **Koordinatengleichung bestimmen**

Einen Normalenvektor von E kannst du mit dem Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren berechnen:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-6\\3\\1,25\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2\cdot 1,25 - 0\cdot 3\\ 0\cdot(-6) - 1\cdot 1,25\\ 1\cdot 3 - 2\cdot(-6)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2,5\\-1,25\\15\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Gemeinsam mit einer Punktprobe ergibt sich:

$$\begin{aligned}E:\ 2,5x - 1,25y + 15z &= d \qquad \mid A(6\mid 0\mid -1) \\ 2,5\cdot 6 - 1,25\cdot 0 + 15\cdot(-1) &= d \\ 0 &= d\end{aligned}$$

Eine Koordinatengleichung von E lautet also:

$$E:\ 2,5x - 1,25y + 15z = 0$$

1.3 ► **Steigungswinkel der Rampe bestimmen**

Ein Normalenvektor der xy-Ebene ist $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Diesen kannst du gemeinsam mit $\vec{n}$ in die Formel für den Schnittwinkel ϕ zweier Ebenen einsetzen:

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \frac{|\vec{n}\circ\vec{n}_1|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}_1|} \\ \cos\phi &= \frac{\left|\begin{pmatrix}2,5\\-1,25\\15\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2,5\\-1,25\\15\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} \\ \cos\phi &= \frac{15}{\sqrt{2,5^2+(-1,25)^2+15^2}\cdot 1} \\ \cos\phi &= \frac{15}{\sqrt{\frac{3.725}{16}}} \qquad \mid \cos^{-1} \\ \phi &\approx 10,6^\circ\end{aligned}$$

Der Steigungswinkel der Rampe gegenüber der xy-Ebene ist ca. $10,6^\circ$ groß.

2.1 ► **Lage des Schattenpunkts überprüfen**

1. Schritt: Geradengleichung für die Lichtstrahlen erstellen

Die Gerade der Lichtstrahlen verläuft durch den Punkt S entlang des Vektors $\overrightarrow{LS}$:

$$\begin{aligned} l: \vec{x} &= \overrightarrow{OL} + t \cdot \overrightarrow{LS} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ -7,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Schritt: Schnittpunkt der Gerade mit der Ebene der Rampe bestimmen

Setze die Geradengleichung mit der Parameterdarstellung der Ebene E gleich:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 6 \\ -7,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1,25 \end{pmatrix} & \quad \left| - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right. \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -7,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} &= r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1,25 \end{pmatrix} & \quad \left| -t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right. \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -7,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} &= r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1,25 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcll} \text{I} & 0 &=& r - 6s + t & \\ \text{II} & -7,5 &=& 2r + 3s - 3t & \\ \text{III} & 4,5 &=& 1,25s + t & \mid -1,25s \\ & 4,5 - 1,25s &=& t & \mid -1,25s \end{array}$$

Die Darstellung für t aus der dritten Gleichung kannst du nun in die ersten beiden Gleichungen einsetzen:

$$\begin{array}{lrcll} \text{I'} & 0 &=& r - 6s + 4,5 - 1,25s & \\ & 0 &=& r - 7,25s + 4,5 & \mid -4,5 \\ & -4,5 &=& r - 7,25s & \\ \text{II'} & -7,5 &=& 2r + 3s - 3 \cdot (4,5 - 1,25s) & \\ & -7,5 &=& 2r + 3s - 13,5 + 3,75s & \\ & 6 &=& 2r + 6,75s & \mid \text{II'} - 2 \cdot \text{I'} \\ \hline \text{II''} & 15 &=& 0 + 21,25s & \mid :21,25 \\ & \frac{12}{17} &=& s & \end{array}$$

Einsetzen von s in I' liefert:

$$\begin{aligned} -4,5 &= r - 7,25s & \quad | \; s = \tfrac{12}{17} \\ -4,5 &= r - 7,25 \cdot \tfrac{12}{17} \\ -4,5 &= r - \tfrac{87}{17} & \quad | + \tfrac{87}{17} \\ \tfrac{21}{34} &= r \end{aligned}$$

Einsetzen in die Darstellung für t ergibt:

$$t = 4,5 - 1,25 \cdot \tfrac{12}{17} = \tfrac{123}{34}$$

3. Schritt: Schattenpunkt einschätzen

Da du in der Parametergleichung von E die beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ als Spannvektoren verwendet hast, kannst du nun den Schattenpunkt S' mit den Parameterwerten von r und s als Linearkombination aus diesen Vektoren darstellen:

$$\overrightarrow{OS'} = \tfrac{21}{34} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{12}{17} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1,25 \end{pmatrix}$$

Da sich der Ortsvektor des Schattenpunkts S' als Linearkombination aus $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ mit $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq s \leq 1$ darstellen lässt, liegt der Punkt S' in dem von A, B und C aufgespannten Rechteck. Der Schattenpunkt der Mastspitze liegt also auf der Rampe.

2.2 ▶ **Bedeutung der Vektoren im Sachzusammenhang beschreiben**

- Der Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -7,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des Punkts L, von dem aus sich das Licht des Schweinwerfers ausbreitet
- Der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -4,5 \\ -1+a \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor eines Punkts P_a, der für $0 \leq a \leq 3,5$ einen Punkt auf dem Mast darstellt.
- Der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -4,5 \\ -1+a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -7,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$ ist demnach für $0 \leq a \leq 3,5$ der Verbindungsvektor zwischen dem Punkt L, von dem aus sich das Licht ausbreitet, und dem Punkt P_a auf dem Mast. Er gibt also die Richtung an, in der die Lichtstrahlen vom Scheinwerfer aus in Richtung eines bestimmten Punkts P_a auf dem Mast fallen.
- Insgesamt beschreiben die Geraden g_a daher jeweils für die Punkte P_a auf dem Mast, den Verlauf des Lichts, das vom Scheinwerfer aus, in diesem Punkt auf den Mast trifft.

3.1 ► **Abbildungsmatrix bestimmen**

Durch die Abbildungsmatrix P soll der Punkt $X(x \mid y \mid z)$ entlang des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ auf die Ebene E projiziert werden. Der dabei entstehende Bildpunkt X' von X ist der Schnittpunkt der Geraden durch X entlang des Vektors $\vec{v}$ mit der Ebene E.
Ermittle die Bildpunkte von $(1 \mid 0 \mid 0)$, $(0 \mid 1 \mid 0)$ und $(0 \mid 0 \mid 1)$ und schließe durch sie auf die Abbildungsmatrix.

1. Schritt: Bildpunkt von $(1 \mid 0 \mid 0)$ bestimmen

Die Gerade, entlang derer der Punkt $(1 \mid 0 \mid 0)$ projiziert wird, kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 2t \\ -0,5t \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Koordinaten in die Koordinatengleichung von E liefert:

$$\begin{array}{rcll} E:\ 2,5x - 1,25y + 15z &=& 0 & \\ 2,5 \cdot (1-t) - 1,25 \cdot 2t + 15 \cdot (-0,5t) &=& 0 & \\ 2,5 - 2,5t - 2,5t - 7,5t &=& 0 & \\ 2,5 - 12,5t &=& 0 & \mid -2,5 \\ -12,5t &=& -2,5 & \mid :(-12,5) \\ t &=& 0,2 & \end{array}$$

Der Bildpunkt von $(1 \mid 0 \mid 0)$ ist also: $(0,8 \mid 0,4 \mid -0,1)$

2. Schritt: Bildpunkt von $(0 \mid 1 \mid 0)$ bestimmen

Die Gerade, entlang derer der Punkt $(0 \mid 1 \mid 0)$ projiziert wird, kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1+2t \\ -0,5t \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Koordinaten in die Koordinatengleichung von E liefert:

$$\begin{aligned}
E:\ 2,5x-1,25y+15z &= 0 \\
2,5\cdot(-t)-1,25\cdot(1+2t)+15\cdot(-0,5t) &= 0 \\
-2,5t-1,25-2,5t-7,5t &= 0 \\
-12,5t-1,25 &= 0 && \mid +1,25 \\
-12,5t &= 1,25 && \mid :(-12,5) \\
t &= -0,1
\end{aligned}$$

Der Bildpunkt von $(0 \mid 1 \mid 0)$ ist also: $(0,1 \mid 0,8 \mid 0,05)$

3. Schritt: Bildpunkt von $(0 \mid 0 \mid 1)$ bestimmen

Die Gerade, entlang derer der Punkt $(0 \mid 0 \mid 1)$ projiziert wird, kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 1-0,5t \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Koordinaten in die Koordinatengleichung von E liefert:

$$\begin{aligned}
E:\ 2,5x-1,25y+15z &= 0 \\
2,5\cdot(-t)-1,25\cdot 2t+15\cdot(1-0,5t) &= 0 \\
-2,5t-2,5t+15-7,5t &= 0 \\
-12,5t+15 &= 0 && \mid -15 \\
-12,5t &= -15 && \mid :(-12,5) \\
t &= 1,2
\end{aligned}$$

Der Bildpunkt von $(0 \mid 0 \mid 1)$ ist also: $(-1,2 \mid 2,4 \mid 0,4)$

4. Schritt: Abbildungsmatrix bestimmen

Betrachte zunächst den ersten Punkt und den zugehörigen Bildpunkt. Dann muss folgende Gleichung erfüllt werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}}_{P} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,4 \\ -0,1 \end{pmatrix}$$

Es müssen also folgende Gleichungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned}
\text{I } p_{11}\cdot 1+p_{12}\cdot 0+p_{13}\cdot 0 &= 0,8\\
p_{11} &= 0,8\\
\text{II } p_{21}\cdot 1+p_{22}\cdot 0+p_{23}\cdot 0 &= 0,4\\
p_{21} &= 0,4\\
\text{III } p_{31}\cdot 1+p_{32}\cdot 0+p_{33}\cdot 0 &= -0,1\\
p_{31} &= -0,1
\end{aligned}$$

Genauso kannst du auch für die übrigen beiden Punkte $(0\mid 1\mid 0)$ und $(0\mid 0\mid 1)$ und die zugehörigen Bildpunkte vorgehen und erhältst dadurch:

$$P=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & -1,2\\ 0,4 & 0,8 & 2,4\\ -0,1 & 0,05 & 0,4 \end{pmatrix}$$

3.2 ▶ **Geometrische Bedeutung dieser Gleichung**

Eine Multiplikation mit P^2 bedeutet eine zweimalige Anwendung der Abbildung. Nachdem die Projektion auf die Rampenebene also einmal durchgeführt wurde wird sie nochmals durchgeführt. Da sich das projizierte Objekt dann bereits in der Rampenebene befindet, sollte eine nochmalige Ausführung der Projektion keine weitere Veränderung bewirken.
Dies ist durch $P^2=P$ gegeben. Die zweimalige und dadurch auch mehrmalige Anwendung der Abbildung führt zu keiner Veränderung im Vergleich zur einmaligen Anwendung. Das Objekt wird also nur einmal auf die Ebene projiziert und dann nicht weiter durch die Abbildung verändert. Befindet sich ein Objekt bereits in der Rampenebene werden seine Koordinaten durch die Projektion nicht verändert. Es wird also auf sich selbst abgebildet.