B1 - Analytische Geometrie

Aufgaben PLUS Tipps PLUS Lösungen PLUS

1.

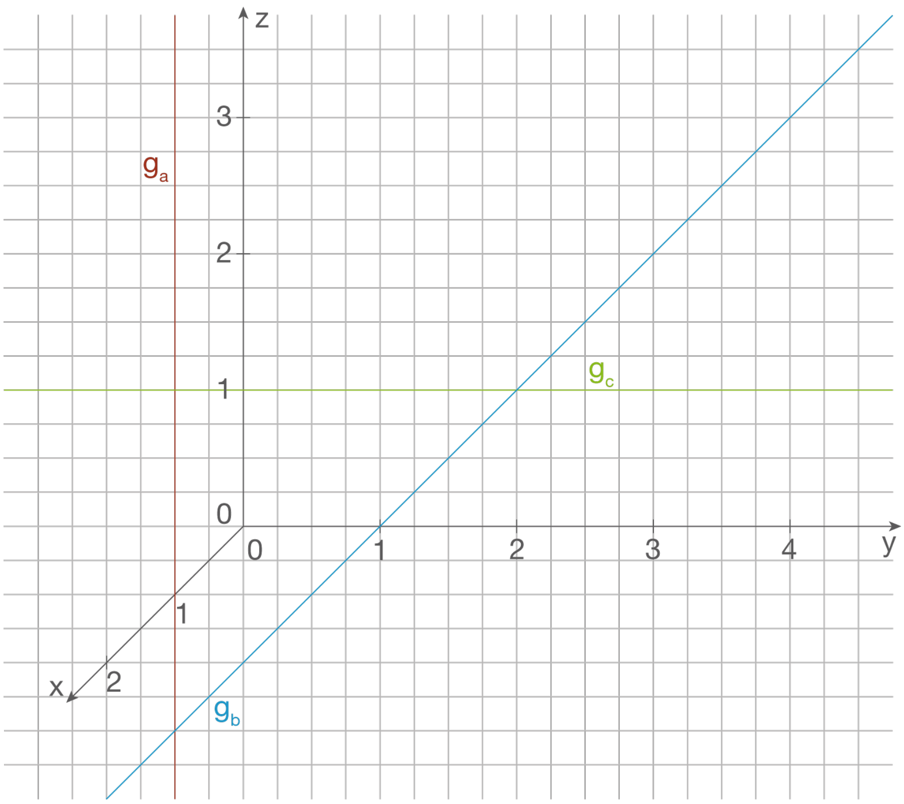
1.1 ▶ **Geraden und Dreiecke in Koordinatensystem einzeichnen**

Du hast drei Geraden g_a, g_b und g_c gegeben. Gleichzeitig stellen die einzelnen Geraden die Koordinaten von den Punkten A_t, B_t und C_t dar, die sich durch unterschiedliche Werte für den Parameter t ändern.

- g_a: $\vec{a}_t = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
- g_b: $\vec{b}_t = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
- g_c: $\vec{c}_t = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

A_t, B_t und C_t bilden Dreiecke Δ_t.
Für diese Aufgabe sollst du die Geraden in das Koordinatensystem aus Material 1 einzeichnen. Dabei stellt bei z.B. g_a der Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ den **Stützvektor** der Geraden g_a dar, seine Koordinaten bilden somit einen Punkt auf der Geraden, von der aus der **Richtungsvektor** $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ die Richtung der Geraden angibt.

Zeichne dir so die drei Geraden in das Koordinatensystem ein.
Weiterhin sollen die Dreiecke Δ_0, Δ_1 und Δ_2 eingezeichnet werden.
Diese bilden sich aus den Punkten A_t, B_t und C_t.
Die Indizes, also 0, 1, 2 geben den Parameter t der Geraden an, der die Punkte bildet.



Um die Punkte zu erhalten, die die Dreiecke bilden, musst du die gegebenen Parameter in die

Geradengleichungen einsetzen. A_t bildet sich aus g_a, B_t aus g_b und C_t aus g_c.
Für Δ_0 ergeben sich so die Punkte:

- $\overrightarrow{OA_0}: \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OB_0}: \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OC_0}: \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Für Δ_1 und Δ_2 ergeben sich nach gleichem Vorgehen:

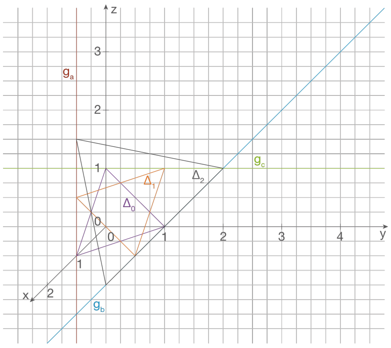
Δ_1:

- $\overrightarrow{OA_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OB_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OC_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Δ_2:

- $\overrightarrow{OA_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OB_2} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OC_2} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

Trage diese Punkte nun in das Koordinatensystem ein, damit du die Dreiecke erhältst.



1.2 ▶ **Dreieck Δ_t auf Gleichseitigkeit untersuchen**

Da in einem gleichseitigen Dreieck alle Seiten gleich lang sind, musst du hier prüfen, ob die Seitenlängen $\left|\overrightarrow{A_tB_t}\right|$, $\left|\overrightarrow{B_tC_t}\right|$ und $\left|\overrightarrow{A_tC_t}\right|$ die gleiche Länge haben, also ihr **Betrag identisch** ist.

Der Betrag eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ berechnet sich mit folgender Formel:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Berechne im **1. Schritt** die Verbindungsvektoren $\left|\overrightarrow{A_tB_t}\right|$, $\left|\overrightarrow{B_tC_t}\right|$ und $\left|\overrightarrow{A_tC_t}\right|$, um dann anschließend im **2. Schritt** deren Beträge berechnen zu können.

▶ **1. Schritt: Verbindungsvektoren berechnen**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_tB_t} = \overrightarrow{b_t} - \overrightarrow{a_t} &= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_tC_t} = \overrightarrow{c_t} - \overrightarrow{a_t} &= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_tC_t} = \overrightarrow{c_t} - \overrightarrow{b_t} &= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

▶ **2. Schritt: Beträge der Verbindungsvektoren berechnen**

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{A_tB_t}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right| &= \sqrt{(-1+t)^2+1^2+(-t)^2}\\ &= \sqrt{1-2t+t^2+1+t^2}\\ &= \sqrt{2t^2-2t+2}\\ \left|\overrightarrow{A_tC_t}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right| &= \sqrt{(-1)^2+t^2+(1-t)^2}\\ &= \sqrt{1+t^2+1-2t+t^2}\\ &= \sqrt{2t^2-2t+2}\\ \left|\overrightarrow{B_tC_t}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right| &= \sqrt{(-t)^2+(-1+t)^2+1^2}\\ &= \sqrt{t^2+1-2t+t^2+1}\\ &= \sqrt{2t^2-2t+2}\end{aligned}$$

Wie du erkennen kannst sind alle Seitenlängen gleichlang. Damit ist bewiesen, dass die Dreiecke Δ_t gleichseitig sind.

1.3 ▶ **Ebenengleichung aufstellen und anschließend auf Eigenschaften untersuchen**

Bei dieser Aufgabe sollst du eine Ebenengleichung aus den Punkten A_t, B_t und C_t in Parameterform aufstellen. Anschließend soll gezeigt werden, dass der gegebene Normalenvektor ein Normalenvektor der Ebene ist. Damit wird dann die Parallelität der Ebenen untersucht. Zum Schluss sollst du den Abstand zweier beliebiger Ebenen berechnen.

Um aus den Punkten eine Ebenengleichung aufzustellen, musst du im **1. Schritt** einen der Punkte als Stützpunkt der Ebene auswählen, um mit diesem und den anderen Punkten dann die Richtungsvektoren berechnen zu können:

$$\boxed{E_t: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA_t} + r\cdot(\overrightarrow{b_t} - \overrightarrow{a_t}) + s\cdot(\overrightarrow{c_t} - \overrightarrow{a_t})}$$

I m **2. Schritt**, wird dann der Normalenvektor der Ebene berechnet und geprüft, ob dieser mit dem Normalenvektor aus der Aufgabe übereinstimmt, bzw. ein Vielfaches davon ist. Berechne dazu das **Kreuzprodukt** aus den Richtungsvektoren.

Anhand des Normalenvektors kann dann im **3. Schritt** gezeigt werden, dass die Ebenen parallel sind. Zwei

Ebenen sind dann parallel, wenn ihre Normalenvektoren Vielfache voneinander sind.
Im **4. Schritt** wird dann mit der **Hesse'schen Normalenform** der Abstand zweier Ebenen berechnet.

▶ 1. Schritt: Ebenengleichung aufstellen

$$E_t: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA_t} + r\cdot(\vec{b_t} - \vec{a_t}) + s\cdot(\vec{c_t} - \vec{a_t}) = \begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1+t\\1\\-t\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\t\\1-t\end{pmatrix}$$

▶ 2. Schritt: Normalenvektor berechnen

Berechne nun das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren, um einen Normalenvektor $\vec{m}$ zu erhalten.

$$\vec{m} = \begin{pmatrix}-1+t\\1\\-t\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\t\\1-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t^2-t+1\\t^2-t+1\\t^2-t+1\end{pmatrix}$$

$$\vec{m} = \vec{n}$$

Der berechnete Normalenvektor ist identisch mit $\vec{n}$ aus der Aufgabe, sodass $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E_t ist.

▶ 3. Schritt: Parallelität beweisen

Die x-,y- und z-Koordinaten des Normalenvektors sind für alle eingesetzten Parameter identisch. Die Normalenvektoren $\vec{n}_t$ sind somit Vielfache voneinander.
Daraus folgt:
Die Ebenen sind parallel.

▶ 4. Schritt: Abstand zweier Ebenen berechnen

Stelle zunächst die Koordinatenform der Ebene E_t auf.

$$\begin{aligned} E_t: \quad & (t^2-t+1)x_1 + (t^2-t+1)x_2 + (t^2-t+1)x_3 &=& \; d \\ & \Longleftrightarrow && \\ & (t^2-t+1)\cdot(x_1+x_2+x_3) &=& \; d \end{aligned}$$

Um d zu erhalten, setzt du nun die Koordinaten eines Punktes, der in der Ebene liegt, in die Koordinatengleichung ein.

Einsetzen von $\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}$ liefert:

$$E_t: \quad (t^2-t+1)\cdot(x_1+x_2+x_3) = t^3+1$$

Berechne nun den Betrag des Normalenvektors $\vec{n}$:

$$|\vec{n}| = \sqrt{3\cdot(t^2-t+1)^2} = \sqrt{3}\cdot(t^2-t+1)$$

Daraus ergibt sich nun die Hesse'sche Normalenform:

$$\begin{aligned} d(E_t, P) &= \left|\frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3-d}{|\vec{n}|}\right| \\ &= \left|\frac{(t^2-t+1)\cdot(x_1+x_2+x_3)-(t^3+1)}{\sqrt{3}\cdot(t^2-t+1)}\right| \end{aligned}$$

Um den Abstand zweier Ebenen E_t und E_{t+k} zu berechnen, musst du jetzt einen Punkt, der auf E_{t+k} liegt, in die HNF von E_t einsetzen. Ein solcher Punkt bildet sich aus den Koordinaten des Stützvektors von E_{t+k}.
Einsetzen von $P(1 \mid 0 \mid t+k)$ ergibt:

$$\begin{aligned} d(E_t,P) &= \left|\frac{(t^2-t+1)\cdot(1+t+k)-(t^3+1)}{\sqrt{3}\cdot(t^2-t+1)}\right| \\ &= \left|\frac{t^2+t^3+kt^2-t-t^2-tk+1+t+k-t^3-1}{\sqrt{3}\cdot(t^2-t+1)}\right| \\ &= \left|\frac{kt^2-tk+k}{\sqrt{3}\cdot(t^2-t+1)}\right| \\ &= \left|\frac{k\cdot(t^2-t+1)}{\sqrt{3}\cdot(t^2-t+1)}\right| \\ d(E_t,P) &= \left|\frac{k}{\sqrt{3}}\right| \end{aligned}$$

Der Abstand zwischen zwei Ebenen E_t und E_{t+k} beträgt $\left|\frac{k}{\sqrt{3}}\right|$ Längeneinheiten.

1.4 ▶ **Rechenschritte im Sachzusammenhang erläutern**

Bei dieser Aufgabe sollst du die Rechenschritte aus Material 2 im Sachzusammenhang erläutern, d.h. erläutern, was genau bei den Schritten berechnet wurde und was damit erreicht wird.

▶ **1. Schritt:**

Im 1. Schritt werden die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ berechnet (siehe auch Aufgabe 1.3).

▶ **2. Schritt:**

Anschließend wird ein Ansatz gestartet, um den Flächeninhalt eines Dreiecks Δ_t abhängig von t zu bestimmen. Das kannst du daran sehen, dass sich der Flächeninhalt eines Dreiecks mit folgender Formel berechnen lässt:

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\cdot|\vec{n}|}$$

Der Normalenvektor ist dabei das Vektorprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$.
Die Formel stammt aus der Definition des Vektorprodukts. **Der Betrag des Kreuzprodukts zweier Vektoren bildet den Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms**.

▶ **3. Schritt:**

Der 3. Schritt zeigt die ausformulierte Form des 2. Schritts. Der Betrag von $\vec{n}$ wird halbiert, um die Fläche des Dreiecks zu berechnen. Da es sich um eine Schar von Dreiecken handelt, stellt dieser Schritt nun die Funktion des Flächeninhalts abhängig von t dar.

▶ **4. Schritt:**

Im 4. Schritt werden die erste und die zweite Ableitung dieser Funktion $A(t)$ gebildet, um die Funktion auf Extremstellen zu untersuchen.

▶ **5. Schritt:**

Hier wird eine Nullstelle der ersten Ableitungsfunktion berechnet.
Das **notwendige Kriterium für Extremstellen** kommt zum Einsatz:

$$\boxed{A'(t)=0}$$

Die Ableitung der Funktion wird dabei mit 0 gleichgesetzt. Die Stelle $t=\frac{1}{2}$ stellt nun die Stelle eines möglichen Extrempunktes dar.

▶ **6. Schritt:**

Da es sich auch um einen Sattelpunkt handeln könnte, wird nun die **hinreichende Bedingung für Extremstellen** überprüft:

$$\boxed{A''(t)\neq 0}$$

Die zweite Ableitung, mit $t=\frac{1}{2}$ eingesetzt, ist größer 0, daher handelt es sich bei dem Extremum um ein Minimum, d.h. beim Parameterwert $t=\frac{1}{2}$ nimmt das Dreieck Δ_t den minimalen Flächeninhalt an.

2.

2.1 ▶ **Volumengleichung beweisen und ein t bestimmen**

A_t, B_t und C_t bilden mit dem Ursprung eine Pyramidenschar, abhängig von t. Das Volumen einer Pyramide mit dreieckiger Grundfläche lässt sich mit der Formel $V(t)=\frac{1}{6}\cdot\left|(\overrightarrow{a_t}\times\overrightarrow{b_t})\cdot\overrightarrow{c_t}\right|$ berechnen.

Um zu zeigen, dass sich das Volumen auch mit der Formel $V(t)=\left|(t^3+1)\right|$ berechnen lässt, stellst du die allgemeine Formel auf die neue Form um, indem du alles die Vektoren einsetzt und soweit vereinfachst bis du das gesuchte Ergebnis erhältst.

Anschließend setzt du für $V(t)$ den Wert $\frac{3}{2}$ ein und stellst nach t um.

▶ **1. Schritt: Volumengleichung beweisen**

$$\begin{aligned}
V(t) &= \frac{1}{6}\cdot\left|(\overrightarrow{a_t}\times\overrightarrow{b_t})\cdot\overrightarrow{c_t}\right| && \text{Einsetzen von } \overrightarrow{a_t},\ \overrightarrow{b_t} \text{ und } \overrightarrow{c_t}\\
&= \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\t\\1\end{pmatrix}\right|\\
&= \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix}t\\t^2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\t\\1\end{pmatrix}\right|\\
&= \frac{1}{6}\cdot\left|(t^3+1)\right|
\end{aligned}$$

Die allgemeine Formel zur Berechnung einer Pyramide mit dreieckiger Grundfläche lässt sich somit auf die Form $V(t)=\left|(t^3+1)\right|$ bringen. Dadurch ist bewiesen, dass die Formel gültig ist.

▶ **2. Schritt: t ermitteln**

Um die Betragsstriche aufzulösen wird eine Fallunterscheidung durchgeführt:

Für $(t^3+1)>0$:

$$\begin{aligned}
V(t) &= \frac{1}{6}\cdot\left|(t^3+1)\right|\\
\frac{3}{2} &= \frac{1}{6}\cdot\left|(t^3+1)\right| && \mid :\tfrac{1}{6}\\
9 &= t^3+1 && \mid -1\\
8 &= t^3 && \mid \sqrt[3]{\ }\\
t_1 &= 2
\end{aligned}$$

Für $(t^3+1)<0$:

$$\begin{aligned}
V(t) &= \frac{1}{6}\cdot\left|(t^3+1)\right|\\
\frac{3}{2} &= \frac{1}{6}\cdot\left|(t^3+1)\right| && \mid :\tfrac{1}{6}\\
9 &= -(t^3+1) && \mid +1\\
10 &= -t^3 && \mid \sqrt[3]{\ }\\
t_2 &= -\sqrt[3]{10}
\end{aligned}$$

Bei den Werten $t_1=2$ und $t_2=-\sqrt[3]{10}$ nimmt das Volumen den Wert $\frac{3}{2}$ an.

2.2 ▶ **Prüfen, wann Pyramide minimales Volumen besitzt**

Material 2 kannst du entnehmen, dass die Grundfläche bei $t=0,5$ den minimalen Flächeninhalt besitzt.

Prüfe, wann das Volumen minimal ist, und vergleiche die beiden Parameterwerte.

Minimales Volumen finden

Die Pyramide hat ein minimales Volumen, wenn die vier Punkte, d.h. die Spitze und die Punkte, die die Grundfläche bilden, in einer Ebene liegen. Dort nimmt es das Volumen von $V = 0$ an.

Die Funktionsgleichung für das Volumen lautet $V(t) = \frac{1}{6} \cdot \left|(t^3 + 1)\right|$.

$V(t)$ geht gegen 0, wenn $(t^3 + 1)$ gegen 0 geht, d.h. für $t = -1$.

Parameter vergleichen

Da laut Material 2 der Flächeninhalt bei $t = 0,5$ minimal ist, ist die Pyramide mit minimaler Grundfläche nicht gleichzeitig die Pyramide mit minimalem Volumen.