

A1 - Analysis

Der Stammumfang einer Tanne kann annähernd beschrieben werden durch die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{4}{1 + 20e^{-0,05t}}.$$

Dabei gibt t die Zeit in Jahren seit Beginn des Beobachtungszeitraums an, $f(t)$ den Stammumfang in Metern. Der Graph von f ist im **Material** abgebildet.

- 1.1 Ermittle den Stammumfang der Tanne zu Beginn des Beobachtungszeitraums und begründe ohne Bezugnahme auf den Graphen mithilfe des Funktionsterms, dass gemäß dieser Modellierung der Stammumfang der Tanne nicht mehr als vier Meter betragen kann.

(6 BE)

- 1.2 Zeige, dass für die zweite Ableitung von f gilt:

$$f''(t) = \frac{4e^{-0,05t} (e^{-0,05t} - 0,05)}{(1 + 20e^{-0,05t})^3}$$

$$\left[\text{zur Kontrolle: } f'(t) = \frac{4e^{-0,05t}}{(1 + 20e^{-0,05t})^2} \right]$$

(8 BE)

- 1.3 Berechne den Zeitpunkt des stärksten Wachstums des Stammumfangs. Die Überprüfung der notwendigen Bedingung ist ausreichend. Gib eine Skalierung der Achsen des Koordinatensystems im **Material** an.

(6 BE)

- 1.4 Bestimme den Wert des Integrals $\frac{1}{10} \int_0^{10} f(t) dt$ und deute das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(3 BE)

2. Umgekehrt lässt sich aus dem Stammumfang der Tanne auf die seit Beginn des Beobachtungszeitraums vergangene Zeit schließen.

- 2.1 In einer hessischen Gemeinde ist für das Fällen eines Baumes die Genehmigung durch das Forstamt vorgeschrieben, wenn der Baumstamm einen Umfang von **60 cm** oder mehr besitzt. Berechne, ab welchem Zeitpunkt nach Beginn des Beobachtungszeitraums eine Genehmigung zum Fällen der Tanne eingeholt werden muss.

(6 BE)

- 2.2 Bestimme die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion von f und begründe, warum die Funktion

umkehrbar ist

(6 BE)

3. Die Funktion f beschreibt ein sogenanntes logistisches Wachstum, die obere Schranke $S = 4$ wird als Sättigungsmenge bezeichnet. Bei einem logistischen Wachstum ist die Wachstumsgeschwindigkeit $f'(t)$ proportional zum Produkt aus dem Bestand $f(t)$ und der Differenz zur Sättigungsmenge $(S - f(t))$, d.h., es gilt die Bedingung $f'(t) = c \cdot f(t) \cdot (S - f(t))$ mit dem Proportionalitätsfaktor $c > 0$.

Zeige mithilfe einer geeigneten Rechnung, dass der Proportionalitätsfaktor c den Wert $c = \frac{1}{80}$ annimmt.

(5 BE)

Material

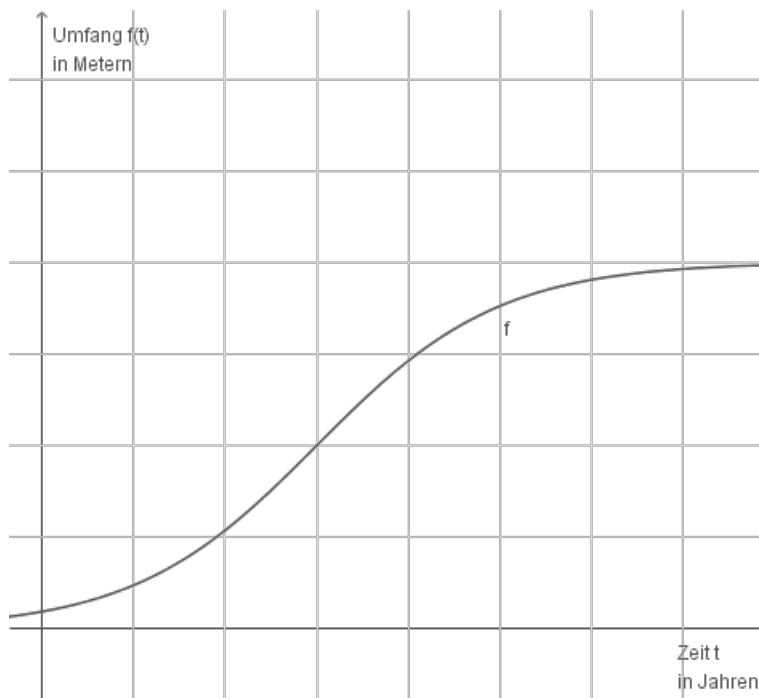


Abb. 1

Bildnachweise [\[nach oben\]](#)

[1] © 2016 – SchulLV.