1.1 ► **Gültigkeit der Gleichungen nachweisen** (11BE)

Zeige die Gültigkeit durch **Ableiten**:

Gleichungen in (1)

$$s'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^x-(-e^{-x})\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^x+e^{-x}\right) = c(x)$$

$$c'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^x+(-e^{x})\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^x-e^{-x}\right) = s(x)$$

Gleichungen in (2)

$$s(-x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-x}-e^{-(-x)}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-x}-e^{x}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right) = -s(x)$$

$$c(-x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-x}+e^{-(-x)}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-x}+e^{x}\right) = c(x)$$

Gleichung in (3)

$$\begin{aligned}(c(x))^2-(s(x))^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\right)^2-\left(\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\right)^2\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x}+2e^x\cdot e^{-x}+e^{-2x}\right)-\frac{1}{4}\left(e^{2x}-2e^x\cdot e^{-x}+e^{-2x}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x}+2\cdot e^{x-x}+e^{-2x}-e^{2x}+2\cdot e^{x-x}\right)-e^{-2x}\\ &= \frac{1}{4}(2+2) = 1\end{aligned}$$

1.2 ► **Gleichungen für sin und cos angeben**

Für die Funktion sin und cos gelten die Gleichungen:

(1) $(\sin(x))' = \cos(x)$ und $(\cos(x))' = -\sin(x)$

(2) $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$

(3) $(\sin(x))^2+(\cos(x))^2 = 1$

► **Bedeutung erläutern**

Die Gleichungen in (1) sagen aus, dass

- der Graph der cos-Funktion genau das **Steigungsverhalten** der Sinus-Funktion darstellt
- der Graph der $-\sin$-Funktion genau das Steigungsverhalten der Cosinus-Funktion darstellt

Das umfasst z.B.: Der Kosinus besitzt **Nullstellen**, wo der Sinus **Extremstellen** besitzt; weiterhin besitzt der Kosinus **Extremstellen**, wo der Sinus **Wendestellen** besitzt. Zuletzt verläuft der Graph der Kosinusfunktion **oberhalb** der x-Achse, wo der Graph der Sinus-Funktion **steigt** und unterhalb der x-Achse, wo dieser fällt.

Entsprechendes gilt für die Beziehung zwischen sin und $-\cos$.

Die Gleichungen in (2) machen eine Aussage über die **Symmetrie** der Graphen von sin und cos.

Der Graph der Sinus-Funktion verläuft **punktsymmetrisch** zum Ursprung, während der Graph der Kosinus-Funktion **achsensymmetrisch** zur y-Achse verläuft.

2. **▶ Existenz eines einzigen Tiefpunktes nachweisen** (6BE)

Die notwendige Bedingung für einen Tiefpunkt lautet $c'(x) =$, die hinreichende Bedingung lautet $c''(x) > 0$:

$$\begin{aligned} c'(x) = s(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) &= 0 \\ e^x - e^{-x} &= 0 \\ e^x &= e^{-x} \qquad | \ \ln(\ ) \\ x &= -x \\ 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Als einzige **Extremstelle** von c kommt $x = 0$ in Betracht. Untersuche noch $c''(0)$. Dabei ist $c''(x) = s'(x) = c(x)$.
$c''(0) = c(0) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^0 + e^0\right) = \frac{1}{2} \cdot (1+1) = 1 > 0.$

Damit ist nachgewiesen, dass $T\,(0 \mid 1)$ der einzige Tiefpunkt des Graphen von c ist.

▶ Nachweis, dass kein Wendepunkt existiert

Zeige, dass die notwendige Bedingung $c''(x) = 0$ für einen Wendepunkt **keine** Lösung besitzt:

$$\begin{aligned} c''(x) = c(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) &= 0 \\ e^x + e^{-x} &= 0 \end{aligned}$$

Die e-Funktion nimmt **nur** positive Funktionswerte an und wird niemals gleich oder kleiner als Null. Da also $e^x > 0$ und $e^{-x} > 0$, ist auch $e^x + e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Gleichung $c''(x) = 0$ besitzt damit keine Lösung und der Graph von c besitzt keinen Wendepunkt.

3.1 **▶ Gleichung einer Näherungsparabel bestimmen** (12BE)

Die Parabel g soll quadratisch sein. Für die Funktionsgleichung gilt damit zunächst $g(x) = ax^2 + bx + c$. Aufgrund der Achsensymmetrie von c können wir annehmen, dass auch die Näherungsparabel g **achsensymmetrisch** zur y-Achse verläuft und die Funktionsgleichung damit vereinfachen zu $g(x) = ax^2 + c$.

Weiterhin ist bekannt, dass die Parabel an den Stellen $x = 0$ und $x = \pm 2$ mit c in den Funktionswerten übereinstimmen soll, d.h.:

$g(0) = c(0) = 1$ und $g(\pm 2) = c(\pm 2) = \frac{1}{2}\left(e^2 + e^{-2}\right) \approx 3{,}7622.$

Aufgrund der Achsensymmetrie können wir uns z.B. auf den Funktionswert bei $x = 2$ beschränken und $x = -2$ vernachlässigen.

Aus diesen Bedingungen folgen zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & g(0) = 1 = & a \cdot 0 + c \\ \text{II} & g(2) = 3{,}7622 = & a \cdot 4 + c \end{array}$$

Aus I folgt $c = 1$. Eingesetzt in II liefert das:

$$\begin{aligned} 3{,}7622 &= 4a + 1 \\ a &= \tfrac{1}{4} \cdot 2{,}7622 \approx 0{,}69 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Funktionsgleichung $g(x) = 0{,}69 \cdot x^2 + 1$

3.2 ▶ **Wert von I berechnen**

Eine Stammfunktion von $g(x) - c(x) = 0{,}69x^2 + 1 - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$ ist z.B. gegeben durch $\frac{1}{3} \cdot 0{,}69x^3 + x - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + (-\mathrm{e}^{-x})\right) = 0{,}23x^3 + x - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

Für das Integral I folgt dann mit dem Hauptsatz der Integralrechnung:

$$I = \int_{-2}^{2} \left(g(x) - c(x)\right) \, \mathrm{d}x$$

$$= \left[0{,}23x^3 + x - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(0{,}23 \cdot 2^3 + 2 - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}\right)\right) - \left(0{,}23(-2)^3 - 2 - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^2\right)\right)$$

$$= 3{,}84 - 3{,}62686 - \left(-3{,}84 - (-3{,}62686)\right)$$

$$= 0{,}21314 - (-0{,}21314)$$

$$I = 0{,}42628$$

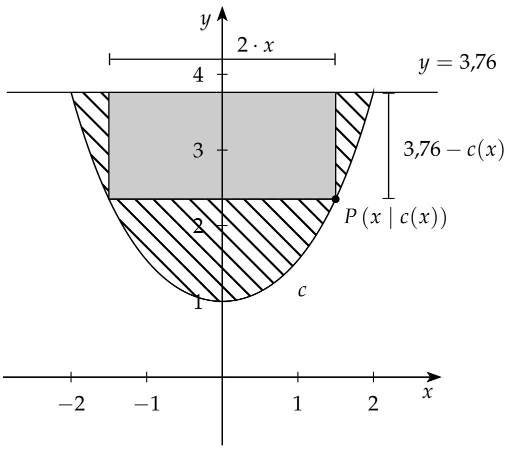
▶ **Gütemaß beurteilen**

Die Idee für dieses Gütemaß ist zunächst gut: Mit dem Integral wird der Inhalt der Fläche bestimmt, welche vom Graphen von c und der Näherungsparabel eingeschlossen wird. Je kleiner dieser Wert ausfällt, desto besser ist Annäherung.

Allerdings ist dieses Gütemaß nicht in allen Fällen aussagekräftig, da die **Orientierung** des Flächeninhalts nicht berücksichtigt wird: Wenn die Näherungsparabel oberhalb des Graphen der Funktion verläuft, so besitzt der Flächeninhalt einen **positiven** Wert, verläuft sie unterhalb des Graphen, so nimmt der Flächeninhalt einen **negativen** Wert an.

In unserem Fall verlief die Näherungsfunktion dauerhaft **oberhalb** des Graphen von c. Wenn sich die Näherungsparabel und der Graph der Funktion aber öfter im Innern des betrachteten Intervalls schneiden, so heben sich die Flächeninhalte gegenseitig auf und das Gütemaß wird **verfälscht**.

4.1 ▶ **Zielfunktion nachweisen** (11BE)



Wenn $P_{1,2}\left(\pm x \mid c(x)\right)$ die unteren beiden Eckpunkte des Rechtecks sind, dann gilt für die **Länge** des Rechtecks: $a = 2x$ und für die **Breite** des Rechtecks: $b = 3{,}76 - c(x)$.

Für den **Flächeninhalt** des Rechtecks folgt dann:

$$\begin{aligned} A(x) &= a \cdot b = 2 \cdot x \cdot (3{,}76 - c(x)) \\ &= 2x \cdot \left(3{,}76 - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)\right) \\ &= 7{,}52x - \left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) \cdot x \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt soll **maximal** werden. Bestimme also das **Maximum** der Funktion A. Mit der notwendigen Bedingung $A'(x) = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= A'(x) = 7{,}52 - \left[\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) \cdot x + \left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) \cdot 1\right] \\ 0 &= 7{,}52 - \left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) \cdot (x+1) \\ 0 &= 7{,}52 - \left(\mathrm{e}^{x}\right) \cdot (x+1) - \left(\mathrm{e}^{-x}\right) \cdot (x+1) \end{aligned}$$

4.2 ▶ **Maximalen Flächeninhalt ermitteln**

Die Funktion A gibt dir den Flächeninhalt des einbeschriebenen Rechtecks in Abhängigkeit von x an. Wie in Aufgabenteil 4.1, erhalten wir den Ansatz für den maximalen Flächeninhalt über die notwendige Bedingung $A'(x) = 0$ für das **Maximum** von A. Bevor du A ableitest bietet es sich an, den Funktionsterm **auszumultiplizieren**:

$$\begin{aligned} A(x) &= \left[3{,}76 - 0{,}69x^2 - 1\right] \cdot 2x \\ &= \left[2{,}76 - 0{,}69x^2\right] \cdot 2x \\ &= 5{,}52x - 1{,}38x^3 \end{aligned}$$

Für die erste Ableitung A' ergibt sich jetzt $A'(x) = 5{,}52 - 4{,}14x^2$.

Mit $A'(x) = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} 5{,}42 - 4{,}14x^2 &= 0 \\ -4{,}14x^2 + 5{,}42 &= 0 \qquad \mid : (-4{,}14) \\ x^2 - \frac{4}{3} &= 0 \\ x_{1,2} &= \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1{,}1547 \end{aligned}$$

Untersuche zuletzt $A''(\pm 1{,}1547)$, wobei $A''(x) = -8{,}28x$.
$A''(-1{,}1547) = -8{,}28 \cdot (-1{,}1547) \approx 9{,}56 > 0$
$A''(1{,}1547) = -8{,}28 \cdot 1{,}1547 \approx -9{,}56 < 0$

Für $x = 1{,}1547$ wird der Flächeninhalt des einbeschriebenen Rechtecks maximal. Er nimmt dann den Wert $A(1{,}1547) \approx 4{,}25$ an.

▶ **Über obere bzw. untere Grenze entscheiden**

Betrachte das Gütemaß der Näherungsfunktion aus Aufgabenteil 2. Das Integral I entspricht dem **bilanzierten Inhalt** der Fläche, welche von der Näherungsparabel und dem Graphen von c eingeschlossen wird. Dieses Integral nimmt einen **positiven** Wert an. Damit folgt, dass die Näherungsparabel insgesamt eher **oberhalb** des Graphen von c verläuft.

Dadurch wird die schraffierte Fläche in Abbildung 2 mit der Näherungsparabel etwas **kleiner**; entsprechend fällt auch der maximale Flächeninhalt des einbeschriebenen Rechtecks **kleiner** aus.

Der eben berechnete maximale Flächeninhalt stellt also die **untere** Grenze im Vergleich zum genau Wert dar.