1. **▶ Relativen Hochpunkt H nachweisen** (11BE)

Wenn die Graphen von g_2 bei $H\,(0 \mid 2a)$ einen Hochpunkt besitzen, so müssen folgende Kriterien erfüllt sein:

1. Notwendiges Kriterium: $g_a'(0) = 0$
2. Hinreichendes Kriterium: $g_a''(x) < 0$
3. Funktionsgleichung erfüllt: $g_a(0) = 2a$

Bestimme zunächst die ersten beiden Ableitungen von g_a nach der Kettenregel bzw. nach der Produktregel und prüfe dann.

$$\begin{aligned}
g_a'(x) &= 2a \cdot \left(-\frac{2x}{4a^2}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2}} \\
&= -\frac{4ax}{4a^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2}} \\
&= -\frac{x}{a} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2}} \\
g_a''(x) &= \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2}} + \left(-\frac{x}{a}\right) \cdot \left(-\frac{2x}{4a^2}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2}} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2}} \cdot \left(-\frac{1}{a} + \left(-\frac{x}{a}\right) \cdot \left(-\frac{2x}{4a^2}\right)\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2}} \cdot \left(-\frac{1}{a} + \frac{2x^2}{4a^3}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2}} \cdot \left(-\frac{1}{a} + \frac{x^2}{2a^3}\right)
\end{aligned}$$

1. Schritt: Notwendiges Kriterium: $\mathbf{g_a'(0) = 0}$

Berechne $g_a'(0)$:

$$g_a'(0) = -\frac{0}{a} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{0}{4a^2}} = 0 \cdot \mathrm{e}^0 = 0 \cdot 1 = 0$$

2. Schritt: Hinreichendes Kriterium $\mathbf{g_a''(0) < 0}$

Betrachte nun $g_a''(0)$:

$$\begin{aligned}
g_a''(0) &= \mathrm{e}^{-\frac{0}{4a^2}} \cdot \left(-\frac{1}{a} + \frac{0}{2a^3}\right) \\
&= \mathrm{e}^0 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a}
\end{aligned}$$

Es ergibt sich $g_a''(0) = -\frac{1}{a}$. Da in der Aufgabenstellung $a \in \mathbb{R}^+$ und somit $a > 0$ vorausgesetzt wird, ist $g_a''(0) = -\frac{1}{a} < 0$.

3. Schritt: Funktionsgleichung erfüllt: $\mathbf{g_a(0) = 2a}$

Berechne den Funktionswert von g_a an der Stelle $x = 0$:

$$g_a(0) = 2 \cdot a \cdot \mathrm{e}^{-\frac{0}{4a^2}} = 2a \cdot \mathrm{e}^0 = 2a \cdot 1 = 2a$$

Alle drei Kriterien wurden nachgewiesen. Damit ist gezeigt, dass $H\,(0 \mid 2a)$ ein Hochpunkt der Graphen von g_a ist.

▶ Achsensymmetrie zur y-Achse nachweisen

Die Graphen von g_a sind achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn gilt: $g_a(-x) = g_a(x)$:

$$g_a(-x) = 2 \cdot a \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(-x)^2}{4a^2}} = 2 \cdot a \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2}} = g_a(x)$$

Weise die Achsensymmetrie der Graphen von w_a auf die gleiche Weise nach:

$$w_a(-x) = \frac{8a^3}{(-x)^2 + 4a^2} = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} = w_a(x)$$

Damit ist die Achsensymmetrie der Graphen beider Funktionenscharen g_a und w_a nachgewiesen.

▶ Lösungsmenge von $\mathbf{w_a''(x) = 0}$ nachweisen

Bilde zunächst die ersten beiden Ableitungen von w_a nach der Quotientenregel.

$$\begin{aligned}
w_a'(x) &= \frac{0 \cdot (x^2 + 4a^2) - 8a^3 \cdot (2x)}{(x^2 + 4a^2)^2} \\
&= \frac{-16a^3 \cdot x}{(x^2 + 4a^2)^2} \\
w_a''(x) &= \frac{(-16a^3) \cdot (x^2 + 4a^2)^2 - (-16a^3 \cdot x) \cdot 2 \cdot (x^2 + 4a^2) \cdot (2x)}{(x^2 + 4a^2)^4} \\
&= \frac{(-16a^3) \cdot (x^2 + 4a^2)^2 + 64a^3 \cdot x^2 \cdot (x^2 + 4a^2)}{(x^2 + 4a^2)^4} \\
&= \frac{(x^2 + 4a^2) \cdot (-16a^3 \cdot (x^2 + 4a^2) + 64a^3 \cdot x^2)}{(x^2 + 4a^2)^4} \\
&= \frac{-16a^3x^2 - 64a^5 + 64a^3x^2}{(x^2 + 4a^2)^3} \\
&= \frac{48a^3x^2 - 64a^5}{(x^2 + 4a^2)^3}
\end{aligned}$$

Setze nun $w_a''(x) = 0$. Beachte dabei: Ein Bruch wird Null, wenn sein Zähler Null wird:

$$\begin{aligned}
48a^3x^2 - 64a^5 &= 0 && \mid +64a^5 \\
48a^3x^2 &= 64a^5 && \mid : 48a^3 \\
x^2 &= \frac{4}{3}a^2 && \mid \sqrt{}, \quad \text{Anmerkung: } a \in \mathbb{R}^+ \\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{4}{3}a^2} = \pm\frac{2a}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, dass die Gleichung $w_a''(x) = 0$ für jedes a die beiden Lösungen $x_1 = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ und $x_2 = -\frac{2a}{\sqrt{3}}$ besitzt.

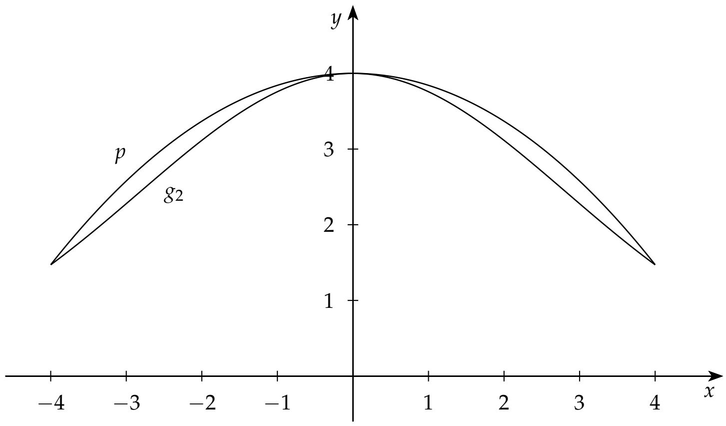
2.1 ▶ Verfahren zur Flächeninhaltsbestimmung erläutern (14BE)

Es gibt verschiedene Methoden zur näherungsweisen Bestimmung des Flächeninhalts. Zum einen gibt es die Möglichkeit, die Funktion g_a im Intervall $[-4; 4]$ durch eine leicht integrierbare Funktion anzunähern; zum anderen bieten sich auch Möglichkeiten an, die eingeschlossene Fläche durch Figuren wie Rechtecke so gut wie möglich zu beschreiben und somit deren Inhalt zu ermitteln.

Im folgenden stellen wir beide Lösungen kurz vor:

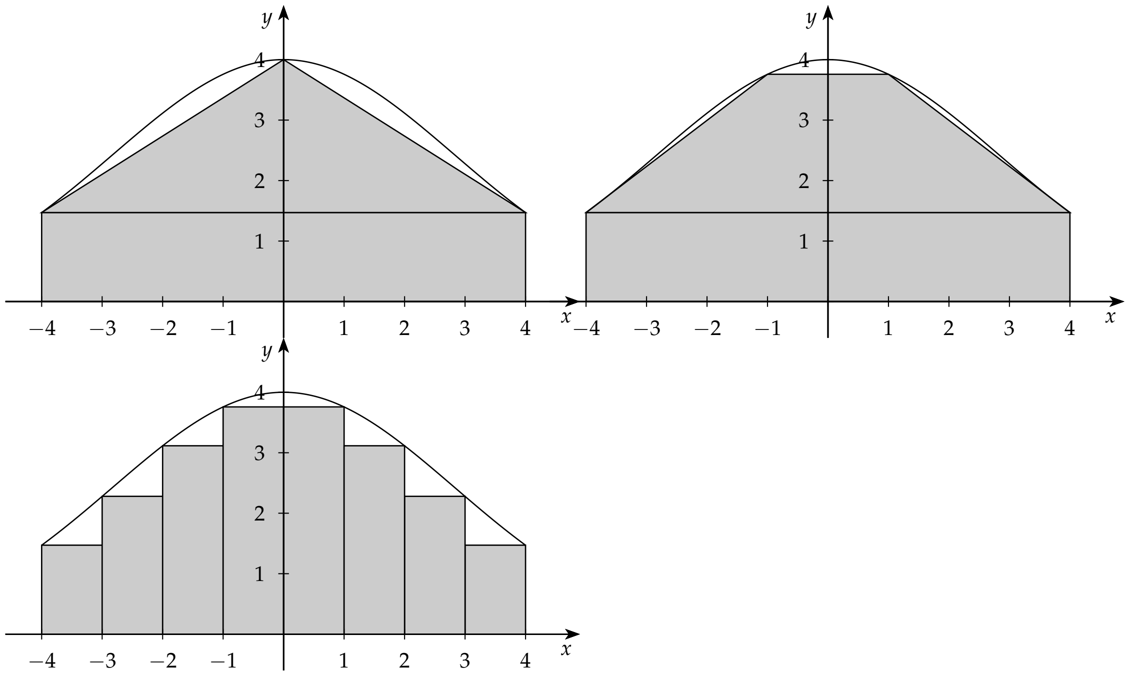
►► Lösungsweg A: Flächeninhalt über Näherungsfunktion ermitteln

Der in Material 1 dargestellte Graph von g_2 lässt sich in etwa durch eine nach unten geöffnete Parabel annähern. Als achsensymmetrische Funktion zweiten Grades hätte diese Parabel p allgemein die Funktionsgleichung $g: y = ax^2 + c$. Wähle z.B. die Punkte $H\,(0 \mid 4)$ und $P\left(4 \mid 4\mathrm{e}^{-1}\right)$ und bestimme durch Einsetzen der Koordinaten dieser Punkte die Parameter a und c. Der Graph einer möglichen Näherungsfunktion wäre somit beispielsweise:



►► Lösungsweg B: Flächeninhalt über Figuren ermitteln

Teile die eingeschlossene Fläche in mehrere Figuren, wie z.B. Rechtecke, Trapeze oder Dreiecke auf. Die Breite der Figuren bestimmst du selbst; ihre Höhe erhältst du über die jeweiligen Funktionswerte von g_2. Mögliche Aufteilungen wären:



2.2 **► Stammfunktion $W_a(x)$ nachweisen**

Wenn W_a eine Stammfunktion von w_a ist, so gilt: $W_a'(x) = w_a(x)$. Weise dies nach. Beachte dabei auch den Hinweis, der in der Aufgabenstellung gegeben ist: $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$. Achte auch darauf, die Kettenregel anzuwenden.

$$\begin{aligned}
W_a'(x) &= 4 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2} \cdot \frac{1}{2a} \\
&= 4a^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{4a^2}} \cdot \frac{1}{2a} \\
&= 4a^2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{\frac{4a^2}{4a^2}+\frac{x^2}{4a^2}} \\
&= 2a \cdot \frac{1}{\frac{4a^2+x^2}{4a^2}} \\
&= 2a \cdot \frac{4a^2}{4a^2+x^2} \\
&= \frac{8a^3}{4a^2+x^2} = w_a(x)
\end{aligned}$$

Damit ist die Stammfunktion nachgewiesen.

3. ▶ **Notwendiges Materialvolumen der Glocke ermitteln** (15BE)

Die Querschnittsfläche der „Glockenwand“ entspricht genau der Schnittfläche der Graphen von $w_{0,5}$, g und der Geraden $y = \frac{1}{10}$. Die Glocke selbst entsteht aus dieser Querschnittsfläche durch **Rotation um die y-Achse**.

Wird allgemein das Volumen eines Rotationskörpers berechnet, der entsteht, wenn eine Funktion f um die y-Achse rotiert, so gilt hierfür die Formel: $V = \pi \cdot \int_a^b (f^{-1}(x))^2 \,\mathrm{d}x$. Es wird also mit der **Umkehrfunktion** gerechnet. Bilde also zunächst die Umkehrfunktionen von $w_{0,5}$ und g.

1. Schritt: Umkehrfunktionen bestimmen

Löse die Funktionsgleichung jeweils nach x auf:

$$\begin{aligned}
w_{0,5}(x) = y &= \frac{8 \cdot (0,5)^3}{x^2 + 4 \cdot (0,5)^2} = \frac{1}{x^2+1} && | \cdot (x^2+1) \\
y \cdot (x^2+1) &= 1 && |: y \\
x^2 + 1 &= \frac{1}{y} && | -1 \\
x^2 &= \frac{1}{y} - 1 && | \sqrt{} \\
x_{1,2} &= \sqrt{\frac{1}{y} - 1}
\end{aligned}$$

Betrachte nur die Lösung, welche einen Graphen beschreibt, der oberhalb der x-Achse verläuft, d.h. $x = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$. Aus ihr ergibt sich die Umkehrfunktion ${w_{0,5}}^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$.

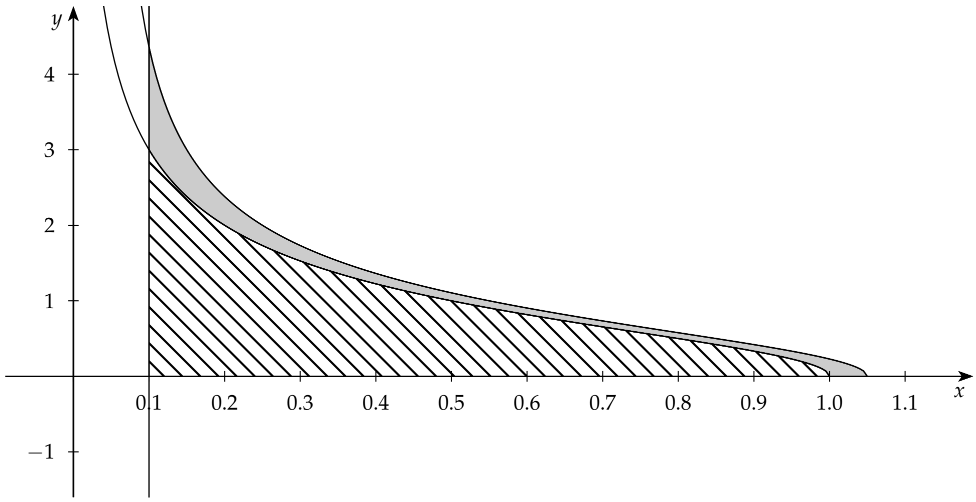
Für $g(x) = w_{0,5}(x) + 0,05$ ergibt sich auf die gleiche Weise:

$$\begin{aligned}
g(x) = y &= \frac{1}{x^2+1} + 0,05 && | -0,05 \\
y - 0,05 &= \frac{1}{x^2+1} && | \cdot (x^2+1) \\
(y - 0,05) \cdot (x^2+1) &= 1 && |: (y-0,05) \\
x^2 + 1 &= \frac{1}{y - 0,05} && | -1
\end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{1}{y-0,05} - 1 \qquad | \sqrt{\ }$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{y-0,05} - 1}$$

Wähle wie oben nur die positive Lösung und erhalte daraus die Umkehrfunktion $g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x-0,05} - 1}$.

Die Gerade $y = 0,1$ an der 1. Winkelhalbierenden gespiegelt ergibt genau die Gerade $x = 0,01$, welche parallel zur y-Achse verläuft. Sieh dir die Graphen der Umkehrfunktionen an:



2. Schritt: Grenzen für die Integration bestimmen

Du erkennst in der Skizze gut die Schnittfläche, die letztendlich rotiert: Berechne zunächst die Maßzahl Fläche, die vom Graphen von g^{-1} und der x-Achse eingeschlossen wird und ziehe dann die Maßzahl der Fläche ab, welche vom Graphen von ${w_{0,5}}^{-1}$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

Als **untere Grenze** für das Integral ergibt sich beide Male $x = 0,1$; als **obere Grenze** dient jeweils die **Nullstelle** von g^{-1} bzw. ${w_{0,5}}^{-1}$. Bestimme die beiden Nullstellen:

$$\begin{aligned} g^{-1} = \sqrt{\frac{1}{x-0,05} - 1} &= 0 && |\ (\ )^2 \\ \frac{1}{x-0,05} - 1 &= 0 && |\ +1 \\ \frac{1}{x-0,05} &= 1 && |\ \cdot(x-0,05) \\ 1 &= x - 0,05 && |\ +0,05 \\ 1,05 &= x \end{aligned}$$

Damit wird die äußere Begrenzung der Schnittfläche vom Graphen von g^{-1} im Intervall $[0,1\,;\,1,05]$ gebildet.

$$\begin{aligned} {w_{0,5}}^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1} &= 0 \quad | \;(\;)^2 \\ \frac{1}{x} - 1 &= 0 \quad | +1 \\ \frac{1}{x} &= 1 \quad | \cdot x \\ 1 &= x \end{aligned}$$

Die innere Begrenzung der Schnittfläche wird gebildet durch den Graphen von ${w_{0,5}}^{-1}$ im Intervall $[0,1\,;\,1]$.

3. Schritt: Volumen des Rotationskörpers berechnen

Für das Volumen des Rotationskörpers ergibt sich nach der Überlegung von oben:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{0,1}^{1,05} (g^{-1}(x))^2 \,\mathrm{d}x - \pi \cdot \int_{0,1}^{1} ({w_{0,5}}^{-1}(x))^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \left(\int_{0,1}^{1,05} (g^{-1}(x))^2 \,\mathrm{d}x - \int_{0,1}^{1} ({w_{0,5}}^{-1}(x))^2 \,\mathrm{d}x \right) \\ &= \pi \cdot \left(\int_{0,1}^{1,05} \left(\sqrt{\frac{1}{x-0,05} - 1} \right)^2 \,\mathrm{d}x - \int_{0,1}^{1} \left(\sqrt{\frac{1}{x} - 1} \right)^2 \,\mathrm{d}x \right) \\ &= \pi \cdot \left(\int_{0,1}^{1,05} \left(\frac{1}{x-0,05} - 1 \right) \,\mathrm{d}x - \int_{0,1}^{1} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \,\mathrm{d}x \right) \\ &= \pi \cdot \left[[\ln(|x-0,05| - x]_{0,1}^{1,05} - [\ln(|x|) - x]_{0,1}^{1} \right] \\ &= \pi \cdot [[(\ln(1) - 1,05) - (\ln(0,05) - 0,1)] - [(\ln(1) - 1) - (\ln(0,1) - 0,1)]] \\ &\approx \pi \cdot [(-1,05 - (-3,0957)) - (-1 - (-2,4026))] \\ &\approx \pi \cdot (2,0457 - 1,4026) = 0,6431 \approx 2,0204 \end{aligned}$$

Das notwendige Materialvolumen beläuft sich auf etwa $2,0204$ VE.