C1 - Lineare Algebra/ Analytische Geometrie

1.1 $C\,(-1,75 \mid 9,5 \mid 0)$

Flächeninhalt bestimmen

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 1,75-1,75 \\ 9,5-6 \\ 0-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3,5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3,5^2} = 3,5\ [\mathrm{LE}]$$

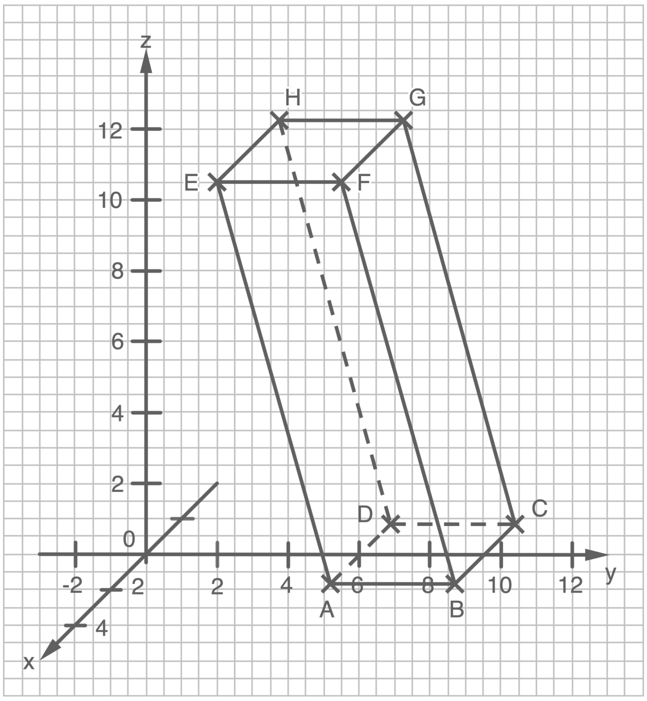
Da es sich um eine quadratische Grundfläche handelt, folgt:

$$F = |\overrightarrow{AB}|^2 = (3,5\ [\mathrm{LE}])^2 = (35\ [\mathrm{m}])^2 = 1225\ [\mathrm{m}^2]$$

1.2 $F(1,75 \mid 6,4 \mid 11,4)$

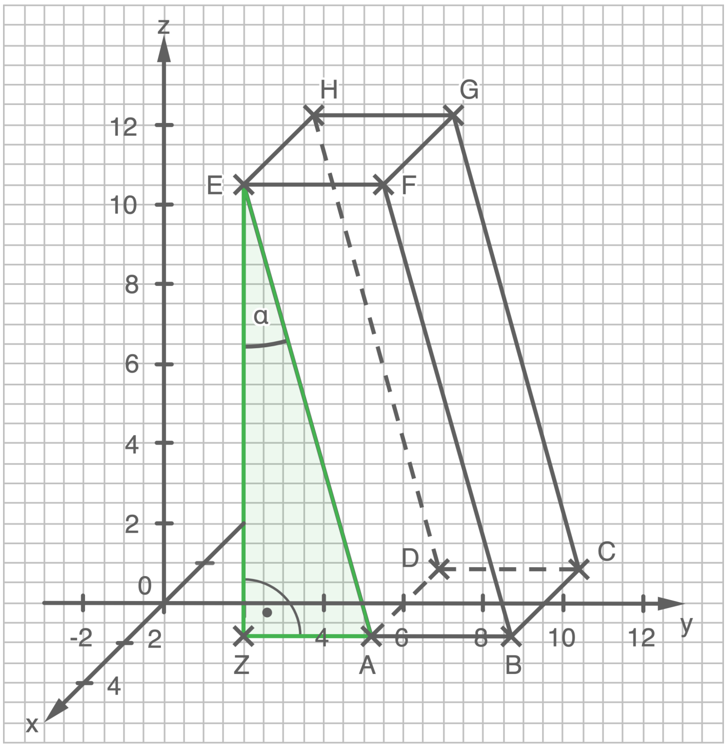
$G(-1,75 \mid 6,4 \mid 11,4)$

$H(-1,75 \mid 2,9 \mid 11,4)$



Skizze des Ostturms

1.3



Hilfsskizze

$|\overline{AE}| = \sqrt{(1,75-1,75)^2+(2,9-6)^2+(11,4-0)^2} \approx 11,81$

Die Länge der Strecke $\overline{EZ}$ entspricht der Höhe des Gebäudes, also $z_E - z_A = 11,4 - 0 = 11,4$.

Mit dem Kosinus folgt:

$$\begin{array}{rcll} \cos(\alpha) &=& \dfrac{|\overline{EZ}|}{|\overline{AE}|} & \\ \cos(\alpha) &=& \dfrac{11,4}{11,81} & \mid \cos^{-1} \\ \alpha &=& 15,14^\circ & \end{array}$$

Der Neigungswinkel des Ostturms beträgt somit bezüglich der Vertikalen etwa 15°.

2.1 Wird ein Punkt $P(x \mid y \mid z)$ an der x-z-Ebene gespiegelt, ergibt sich der Punkt $P'(x \mid -y \mid z)$.

Die Gleichung $\overrightarrow{OP'} = S \cdot \overrightarrow{OP}$ wird durch die Spiegelmatrix $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gelöst, da diese das Vorzeichen der y-Koordinate ändert, während die x- und die z-Koordinate gleich bleiben.

2.2

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,75 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,75 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Kante $\overline{AD}$ parallel zur x-Achse verläuft, entspricht ihr Abstand zur Spiegelebene gerade dem Betrag der y-Koordinate des Punktes $A.$
Die Punkte A und A' liegen in der x -y-Ebene. Ihr Abstand wird wie folgt berechnet:

$$|\overrightarrow{AA'}| = 2 \cdot 6 = 12\,[\text{LE}] = 120\,\text{m}$$

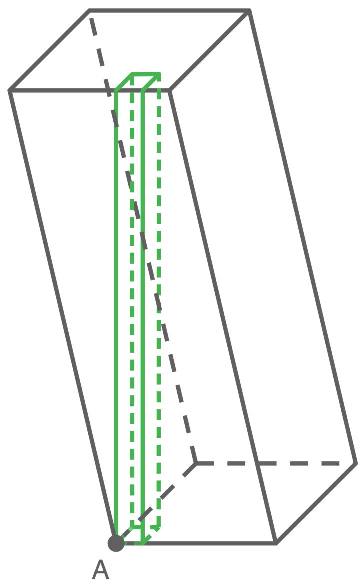
Der Abstand der beiden Türme am Boden beträgt folglich $120\,\text{m}.$

3 Der Aufzugsschacht soll vertikal sein. Der Punkt A wird als ein Eckpunkt gewählt. $3\,\text{m}$ entsprechen $0,3\,\text{LE}.$ Damit ergeben sich die folgenden Koordinaten für die restlichen Eckpunkte des Aufzugsschachts im Boden:

$E_1(1,75 \mid 6 \mid 0)$
$E_2(1,45 \mid 6 \mid 0)$
$E_3(1,45 \mid 6,3 \mid 0)$
$E_4(1,75 \mid 6,3 \mid 0)$

Die Koordinaten des Aufzugsschachts in der Dachfläche liegen $11,4\,\text{LE}$ über der Grundfläche und sind damit gegeben durch:

$E_1^*(1,75 \mid 6 \mid 11,4)$
$E_2^*(1,45 \mid 6 \mid 11,4)$
$E_3^*(1,45 \mid 6,3 \mid 11,4)$
$E_4^*(1,75 \mid 6,3 \mid 11,4)$



Skizze (nicht maßstäblich)

Liegt ein Punkt in der Dachfläche $EFGH,$ so muss für seine Koordinaten Folgendes gelten:

- Für die x-Koordinate: $-1,75 \leq x \leq 1,75$
- Für die y-Koordinate: $2,9 \leq y \leq 6,4$
- Für die z-Koordiante: $z = 11,4$

Die Punkte $E_1^*, E_2^*, E_3^*, E_4^*$ erfüllen diese Eigenschaften und liegen somit in der Dachfläche.

Damit lässt sich ein vertikaler Aufzug in den Turm einbauen, der alle 26 Etagen erreicht.

4 $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1,75 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1,75-1,75 \\ 9,5-1,75 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7,75 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten der Mittelpunkte der Türme lauten folglich:

$M(0 \mid 7,75 \mid 0) \qquad M'(0 \mid -7,75 \mid 0)$

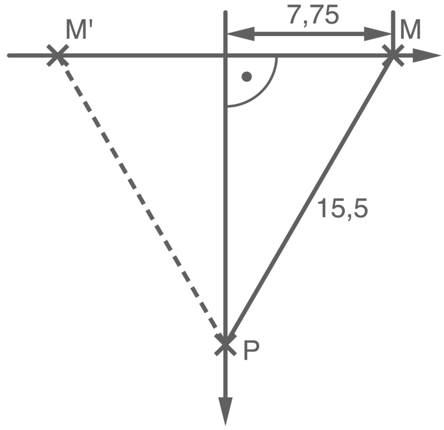
Damit lässt sich die Länge der Seiten des Dreiecks berechnen:

$l = 2 \cdot 7,75 = 15,5\,[\text{LE}]$

Außerdem wird aus der dreidimensionalen Ansicht des Turms ersichtlich, dass der Punkt P auf der x-Achse liegt. Dabei lassen sich die x-Koordinaten durch den Satz des Pythagoras berechnen:

$$\begin{aligned} x^2 + 7,75^2 &= 15,5^2 && \mid -7,75^2 \\ x^2 &= 15,5^2 - 7,75^2 && \mid \sqrt{\ } \\ x &\approx 13,4 \end{aligned}$$

Damit lauten die Koordinaten des Punktes $P\,(13,4 \mid 0 \mid 0)$.



Sicht von oben

5.1 Winkel berechnen

Mit einem Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Bodenfläche und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 + 0,2 \cdot 0 \\ 0,5 \cdot 0 \\ -1,2 + 0,2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1,2 \end{pmatrix}$ der Sonnenstrahlen um 13.30 Uhr folgt:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1,2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1,2 \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{|0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1,2)|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1,2)^2}} \\ &\approx 0,768 \end{aligned}$$

Daraus folgt $\alpha = \sin^{-1}(0,768) \approx 50,17^\circ$.

Koordinaten des Schattenpunkts berechnen

Um die Koordinaten des Schattenpunkts der Spitze zu berechnen, muss die Gerade der Sonnenstrahlen durch die Spitze $S(13,4 \mid 0 \mid 9,3)$ des Obelisken bestimmt werden:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 13,4 \\ 0 \\ 9,3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1,2 \end{pmatrix}$$

Dann entspricht der Schattenpunkt der Spitze gerade dem Schnittpunkt der Geraden g mit der x-y-Ebene, welche durch die Ebenengleichung $E: z = 0$ beschrieben wird.

Durch Einsetzen der Geraden in die Ebenengleichung folgt:

$$\begin{aligned} 9,3 - k \cdot 1,2 &= 0 && \mid +k \cdot 1,2 \\ 9,3 &= k \cdot 1,2 && \mid : 1,2 \\ 7,75 &= k \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $k = 7,75$ in die Geradengleichung g ergibt sich:

$$\overrightarrow{OS'} = \begin{pmatrix} 13,4 \\ 0 \\ 9,3 \end{pmatrix} + 7,75 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,65 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Schattenpunktes der Spitze des Obelisken lauten somit $S'(5,75 \mid 0 \mid 0)$.

5.2 Zunächst wird eine Geradengleichung mit Stützvektor $\overrightarrow{OQ}$ und dem Richtungsvektor der Sonnenstrahlen $\overrightarrow{v}$ aufgestellt:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 + 0,2t \\ 0,5t \\ -1,2 + 0,2t \end{pmatrix}$$

Der Schattenpunkt von Q ergibt sich durch Einsetzen der Geraden in die x-y-Ebene, welche beschrieben wird durch $E: z = 0$.

$$\begin{aligned} z_Q + r \cdot (-1,2 + 0,2t) &= 0 && \mid -z_Q \\ r \cdot (-1,2 + 0,2t) &= -z_Q && \mid : (-1,2 + 0,2t) \\ r &= -\frac{z_Q}{-1,2 + 0,2t} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in g lässt sich der Ortsvektor des Schattenpunkts Q' berechnen:

$$\overrightarrow{OQ'} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} - \frac{z_Q}{-1,2 + 0,2t} \cdot \begin{pmatrix} -1 + 0,2t \\ 0,5t \\ -1,2 + 0,2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Q + \dfrac{1 - 0,2t}{-1,2 + 0,2t} \cdot z_Q \\ y_Q + \dfrac{-0,5t}{-1,2 + 0,2t} \cdot z_Q \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit der Matrix-Vektor-Multiplikation kann $\overrightarrow{OQ'}$ wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{pmatrix} x_Q + \dfrac{1-0,2t}{-1,2+0,2t} \cdot z_Q \\ y_Q + \dfrac{-0,5t}{-1,2+0,2t} \cdot z_Q \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1-0,2t}{-1,2+0,2t} \\ 0 & 1 & \dfrac{-0,5t}{-1,2+0,2t} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=M} \cdot \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix}$$

Damit ist M die gesuchte Abbildungsmatrix.