1. **▶ Erläuterung des angegebenen Terms** (8BE)

Ungeachtet des Summenzeichens ist sofort erkennbar, dass der Term die Berechnung einer **Binomialverteilung** darstellt. Die Parameter kann man ebenfalls ablesen: Es ist $n = 1000$, $p = 0{,}0025$ und $q = 1 - p = 0{,}9975$.

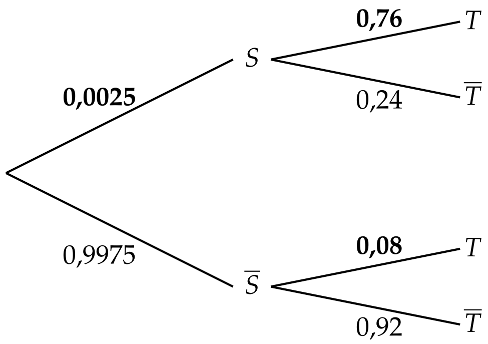
Das Summenzeichen zeigt, dass alle Wahrscheinlichkeiten von $k = 0$ bis $k = 5$ aufsummiert werden, also gilt

$$\sum_{i=0}^{5} \binom{1000}{i} \cdot 0{,}0025^i \cdot 0{,}9975^{1000-i} = P_{0{,}0025}^{1000}(X \leq 5) = 0{,}9582.$$

Im Sachzusammenhang wird hier also die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass unter $n = 1000$ untersuchten Personen in Deutschland höchstens 5 Personen an Schweinegrippe (Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}25\%$) erkrankt sind.

2.1 **▶ Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit positivem Ergebnis auch erkrankt war** (11BE)

Im nebenstehenden Baumdiagramm bedeutet S: „Die Person ist an Schweinegrippe erkrankt“ und T: „Der Test fiel bei dieser Person positiv aus.“ Die fettgedruckten Wahrscheinlichkeiten sind gegeben, die anderen lassen sich daraus berechnen, dass an jeder Abzweigung die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss.

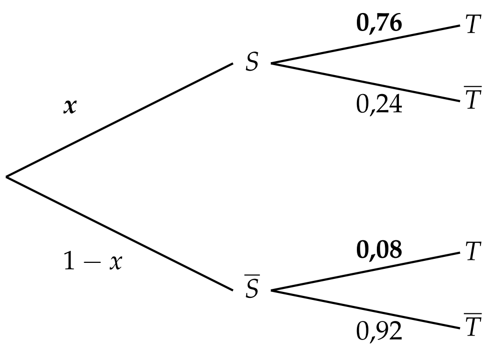


Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person an Schweinegrippe erkrankt ist, unter der **Bedingung**, dass deren Testergebnis positiv war, also die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_T(S)$. Für diese gilt:

$$P_T(S) = \frac{P(S \cap T)}{P(T)} = \frac{P(S \cap T)}{P(S \cap T) + P(\overline{S} \cap T)}$$
$$= \frac{0{,}0025 \cdot 0{,}76}{0{,}0025 \cdot 0{,}76 + 0{,}9975 \cdot 0{,}08} \approx 0{,}023 = 2{,}3\%.$$

2.2 **▶ Begründung für veränderte Werte** (11BE)

Rechts siehst du das Baumdiagramm aus Teilaufgabe 2.1, allerdings wurde jetzt die Wahrscheinlichkeit, an der Schweinegrippe zu erkranken, durch einen Parameter x ersetzt.



Allgemein gilt für die Wahrscheinlichkeit zunächst

$$P_T(S) = \frac{P(S \cap T)}{P(T)} = \frac{P(S \cap T)}{P(S \cap T) + P(\overline{S} \cap T)} = \frac{P(S) \cdot 0{,}76}{P(S) \cdot 0{,}76 + (1 - P(S)) \cdot 0{,}08} = \frac{0{,}76 \cdot P(S)}{0{,}68 \cdot P(S) + 0{,}08}$$

Durch Einsetzen der angenommenen Wahrscheinlichkeiten aus der Tabelle ergeben sich für $P_T(S)$ nun die verschiedenen Werte.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit positivem Test tatsächlich an der Schweinegrippe erkrankt ist, wird mit zunehmender Infektionswahrscheinlichkeit größer. Diese Entwicklung kannst du im Bruch nachvollziehen: Der Zähler wächst **schneller** als der Nenner. Dadurch wird der Bruch mit größer werdendem x auch insgesamt größer.

Im Sachzusammenhang lässt sich die zunehmende Wahrscheinlichkeit so erklären: Wenn die Wahrscheinlichkeit, an Schweinegrippe zu erkranken, steigt, dann gibt es auch mehr Erkrankte. Da der Test an sich unverändert bleibt, ist es daher auch wahrscheinlicher, dass eine Person mit positivem Testergebnis auch tatsächlich an der Schweinegrippe erkrankt ist.

3.1 ▶ **Nachweis der Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Impfdosen ausreichen** (11BE)

Mit der Wahrscheinlichkeit des Instituts kann man davon ausgehen, dass sich

$\mu = n \cdot p = 82.000.000 \cdot 0{,}3048 = 24.993.600$

Personen in Deutschland impfen lassen würden. Damit die Impfdosen ausreichen, dürften sich jedoch maximal 25.000.000 Personen impfen lassen, da pro Person ja zwei Dosen notwendig sind.

Für die Standardabweichung ergibt sich

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{82.000.000 \cdot 0{,}3048 \cdot 0{,}6952} \approx 4168$

Auch hier ist die Verwendung der Normalverteilung wegen $\text{Var}(X) = \sigma^2 > 9$ zulässig. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt bei Annäherung durch die Normalverteilung:

$$\begin{aligned} P(X \leq 25.000.000) &\approx \Phi\left(\frac{25.000.000 + 0{,}5 - 24.993.6000}{4168}\right) \\ &\approx \Phi(1{,}54) = 0{,}9382 \approx 93{,}8\%. \end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit nachgewiesen.

Hinweis: Auch hier ist die Verwendung der Normalverteilung wegen $\text{Var}(X) = \sigma^2 > 9$ zulässig, dies dürfte wegen des sehr großen n jedoch klar sein.

3.2 ▶ **Erklärung des überraschenden Ergebnisses**

Aufgrund der großen Bevölkerung in Deutschland machen auch schon die kleinen Unterschiede im exakten und gerundeten Wert im **Erwartungswert** große Unterschiede. Der Erwartungswert bei der gerundeten Wahrscheinlichkeit ist zudem mit 25.010.000 **größer** als die Anzahl der Personen, die geimpft werden können. (25.000.000). Das Argument der Normalverteilung wird dadurch negativ und bedeutend kleiner als zuvor, weshalb auch die zugehörige Wahrscheinlichkeit enorm abnimmt.

Auch anschaulich ist das klar: Es ist wahrscheinlicher, dass die Impfdosen ausreichen, wenn man davon ausgeht, dass man mehr als benötigt hat (wie in Aufgabe 3.1). Bei der gerundeten Wahrscheinlichkeit muss man allerdings davon ausgehen, dass die Impfdosen nicht mehr ausreichen (wie hier in Aufgabe 3.2).

Alternativ: Deutlich erkennbar ist auch an der Sigma-Umgebung, dass die Wahrscheinlichkeit so stark sinkt. Die Abweichung vom Erwartungswert müsste nun über 2σ betragen, damit die Impfdosen genügen.