B2 - Analytische Geometrie

1.1 ▶ **Ebenengleichung in Parameterform aufstellen**

Du sollst in dieser Aufgabe die Ebene L bestimmen, in welcher das Baugrundstück liegt. Hierfür sind die vier Eckpunkte $A(0 \mid 0 \mid 1)$, $B(40 \mid 8 \mid 3)$, $C(35 \mid 32 \mid 5)$ und $D(35 \mid 32 \mid 5)$ des Grundstückes gegeben. Um eine Ebene in Parameterform aufstellen zu können, benötigt man einen **Stützvektor** und von diesem ausgehend zwei **Richtungsvektoren**, die die Ebene aufspannen. Bei dieser Aufgabe ergibt sich:

$$\begin{aligned} L: \quad \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 40-0 \\ 8-0 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 35-0 \\ 32-0 \\ 5-(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 35 \\ 32 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Ebene L kann durch folgende Gleichung in Parameterform beschrieben werden:

$$L: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 35 \\ 32 \\ 6 \end{pmatrix}$$

▶ **Koordinatengleichung angeben**

Einen Normalenvektor für die Koordinatengleichung kannst du mithilfe des Kreuzprodukts der beiden Spannvektoren aus der Parametergleichung berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 35 \\ 32 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \cdot 6 - 4 \cdot 32 \\ 4 \cdot 35 - 40 \cdot 6 \\ 40 \cdot 32 - 8 \cdot 35 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -80 \\ -100 \\ 1.000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diesen kannst du nun zusammen mit den Koordinaten eines Punkts in die allgemeine Koordinatengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} L: \quad n_1x + n_2y + n_3z &= d \\ -80 \cdot 0 - 100 \cdot 0 + 1.000 \cdot (-1) &= d \\ -1.000 &= d \end{aligned}$$

Das liefert folgende Koordinatengleichung:

$$L: \quad -80x - 100y + 1.000z = -1.000$$

1.2 ▶ **Nachweisen, dass es sich um ein Rechteck handelt**

Bei dieser Aufgabe sollst du zeigen, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist. Dafür zeigst du als erstes, dass zwei sich gegenüberliegende Vektoren gleich sind und anschließend überprüfst du mithilfe des Skalarprodukts, ob zwei Vektoren, die sich in einer Ecke des Rechtecks berühren, orthogonal zueinander liegen. Dafür muss das Skalarprodukt dieser zwei Vektoren gleich Null sein. Es reicht aus lediglich zwei gegenüberliegende Vektoren auf Gleichheit zu überprüfen, denn aufgrund der Orthogonalitätsbeziehung müssen die anderen sich gegenüberliegende Seiten dann auch gleich sein.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DC} \\ \begin{pmatrix} 40-0 \\ 8-0 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 35-(-5) \\ 32-24 \\ 5-1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Als nächstes muss noch die Orthogonalität gezeigt werden. Dazu berechnest du das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} (-5)-0 \\ 24-0 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 24 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 24 \\ 2 \end{pmatrix} = 40 \cdot (-5) + 8 \cdot 24 + 4 \cdot 2 = 0$$

Da das Skalarprodukt Null ist liegen die beiden Vektoren orthogonal zueinander und da auch die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind, muss es sich bei dem Viereck $ABCD$ um ein Rechteck handeln.

1.3 ▶ **Vektorlänge berechnen**

In dieser Aufgabe sollst du die Länge der beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{A_0B_0}$ berechnen. Da es sich bei dem Vektor $\overrightarrow{A_0B_0}$ um eine **Projektion** des Vektors $\overrightarrow{AB}$ in die x-y-Ebene handelt, ergibt sich $\overrightarrow{A_0B_0}$ aus $\overrightarrow{AB}$ so, dass man die z-Koordinate des Vektors $\overrightarrow{AB}$ gleich Null setzt.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{40^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{1680} = 4\sqrt{105}$$

$$|\overrightarrow{A_0B_0}| = \sqrt{40^2 + 8^2 + 0^2} = \sqrt{1664} = 8\sqrt{26}$$

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ hat die Länge $4\sqrt{105}$ und der Vektor $\overrightarrow{A_0B_0}$ hat die Länge $8\sqrt{26}$, wodurch man sehen kann, dass sich durch die senkrechte Projektion die Seitenlängen ändern.

2.1 ▶ Koordinaten des Eckpunkts berechnen

Nun sollen die Koordinaten des fehlenden Eckpunkts F der Grundfläche des Hauses berechnet werden. Hierfür berechnest du zuerst den Vektor $\overrightarrow{HG}$ und addierst diesen dann auf den Ortsvektor von E.

$$\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 23-13 \\ 22-12 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{HG} \\ &= \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit lauten die Koordinaten des Punktes $F(30 \mid 15 \mid 0)$.

2.2 ▶ Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen

Bei dieser Aufgabe muss der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{A_0B_0}$ und $\overrightarrow{EF}$ berechnet werden. Für die weiteren Berechnungen heißt der Winkel α.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\overrightarrow{EF} \circ \overrightarrow{A_0B_0}}{|\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{A_0B_0}|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} \\ &= \frac{10 \cdot 40 + 10 \cdot 8 + 0 \cdot 0}{\sqrt{200} \cdot \sqrt{1664}} \\ &= \frac{480}{\sqrt{200} \cdot \sqrt{1664}} \\ &= 0,83 \\ \alpha &= \arccos(0,83) = 33,9^\circ \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Grundfläche des Hauses um $33,9^\circ$ gedreht werden muss.

3.1 ▶ Koordinaten des neuen Punkts berechnen

Hier soll der Punkt $P(10 \mid 5)$ mit dem Winkel $\alpha = 90^\circ$ um den Ursprung gedreht werden. Dies funktioniert mithilfe der Rotationsmatrix R_α. Diese sieht wie folgt aus: $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Für verschiedene Winkel muss man nur das α anpassen.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= R_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= R_{90^\circ} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit lauten die Koordinaten des Punktes $P(-5 \mid 10)$. Nun soll rechnerisch bewiesen werden, dass eine Drehung um 180° einer Verkettung zweier 90°-Drehungen entspricht. Hierfür kannst du wie oben vorgehen. Du stellst die Rotationsmatrix für 180° auf und setzt sie dem Produkt zweier Rotationsmatrizen mit Drehwinkel 90° gleich. Dies musst du solange umformen, bis du eine eindeutig wahre Aussage erhältst.

$$\begin{aligned} R_{180^\circ} &= R_{90^\circ} \cdot R_{90^\circ} \\ \begin{pmatrix} \cos(180^\circ) & -\sin(180^\circ) \\ \sin(180^\circ) & \cos(180^\circ) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.2 ► **Koordinaten des neuen Punkts berechnen mithilfe homogener Koordinaten**

In dieser Aufgabe soll nun der Punkt P wieder um 90° gedreht werden, diesmal allerdings unter der Verwendung homogener Koordinaten. Das Vorgehen für die Umwandlung in homogene Koordinaten ist in der Aufgabenstellung erklärt.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} &= R_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= R_{90^\circ} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) & 0 \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wie du sehen kannst, erhältst du für den neuen Punkt P' die gleichen Koordinaten wie in der Aufgabe zuvor.

3.3 ► **Koordinaten des neuen Punkts berechnen mithilfe homogener Koordinaten**

Du sollst nun zeigen, dass die Multiplikation des Ortsvektors eines Punktes P mit der Matrix T eine Verschiebung um s Einheiten in x-Richtung und t Einheiten in y-Richtung bewirkt.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} &= T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y + s \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + t \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x + s \\ y + t \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nun kannst du sehen, dass die Matrix T eine Verschiebung um s-Einheiten in x-Richtung und t Einheiten in y -Richtung bewirkt.

3.4 ► **Gleichung erläutern**

Zum Schluss sollst du noch die geometrische Bedeutung der gegebenen Gleichung erläutern. Hierfür wirfst du erstmal einen Blick auf die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 23,1421 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 23 \\ 22 \\ 1 \end{pmatrix}}_{D}$$

Teil A der Gleichung ähnelt sehr der Verschiebungsmatrix T. Wenn du einen genaueren Blick darauf wirfst, siehst du, dass es sich hierbei um eine **Verschiebung** um 13 Einheiten in x-Richtung und um 12 Einheiten in y-Richtungen handelt.

Wenn du dir nun Teil B anschaust, erkennst du, dass die letzten Einträge der ersten und zweiten Zeile Null sind. Somit kann es sich um keine Verschiebung handeln, demnach muss es eine **Drehung** sein. Überlegst du dir nun, bei welchem Winkel Cosinus und Sinus den Wert $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ annehmen, stellst du fest, dass dies bei 45° der Fall ist. Dies bedeutet, dass Teil B eine Drehung mit dem Winkel 45° um den Ursprung bewirkt.

Vergleichst du Teil C mit Teil A, sieht man auf den ersten Blick, dass es sich um fast die identische Matrix handelt. Es sind lediglich die letzten Einträge der ersten und zweiten Zeile negativ. Somit bewirkt Teil C eine Verschiebung um -13 Einheiten in x-Richtung und -12 Einheiten in y-Richtung.

Teil D ist der Ortsvektor des Punktes G^*, auf welchen die Verschiebungen und Rotationen angewendet werden.

zusammenfassend wird der Punkt G^* insgesamt um 45° gegen den Uhrzeigersinn um den Rotationsmittelpunkt $H^*(13 \mid 12)$ gedreht.