

B2 - Analysis

Mediziner und Biologen untersuchen die Auswirkungen von Antibiotika auf das Wachstum von Bakterienbeständen. Bakterien vermehren sich exponentiell. Fügt man diesen Bakterien ein Antibiotikum hinzu, wird das Wachstum des Bakterienbestands gehemmt. Das Antibiotikum bewirkt, dass die Bakterien absterben und der Bakterienbestand sich schlussendlich wieder dem Wert null annähert; man spricht in diesem Zusammenhang auch von vergiftetem Wachstum.

Mit den Funktionen der Schar f_a mit $f_a(t) = e^{a \cdot t - 0,3 \cdot t^2}$, $t \geq 0, a \geq 0$, kann der Bakterienbestand in einem Organismus dargestellt werden, wobei t die Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn und $f_a(t)$ die Anzahl der Bakterien in Tausend angibt.

- 1.1 Begründe, dass die Funktionen der Schar f_a keine Nullstellen besitzen.

(2 BE)

- 1.2 Gib die erste Ableitungsfunktion der Funktion f_a an und zeige, dass für die zweite Ableitungsfunktion gilt:

$$f_a''(t) = e^{a \cdot t - 0,3 \cdot t^2} \cdot (a^2 - 1,2a \cdot t + 0,36t^2 - 0,6)$$

Gib jeweils die verwendeten Ableitungsregeln an.

(7 BE)

- 1.3 Bestätige, dass jeder Graph der Schar f_a einen Hochpunkt im Punkt $HP\left(\frac{5}{3}a \mid e^{\frac{5}{6}a^2}\right)$ hat, und berechne die Funktionsgleichung der Ortskurve der Hochpunkte.

(8 BE)

- 1.4 Erkläre für $h > 0$ die Aussagen der Zeilen (1) bis (3) und deute das Ergebnis in Zeile (3) geometrisch.

$$(1) f_a\left(\frac{5}{3}a + h\right) = e^{\frac{5}{6}a^2 - 0,3h^2}$$

$$(2) f_a\left(\frac{5}{3}a - h\right) = e^{\frac{5}{6}a^2 - 0,3h^2}$$

$$(3) \Rightarrow f_a\left(\frac{5}{3}a + h\right) = f_a\left(\frac{5}{3}a - h\right)$$

(5 BE)

- 2 Die Mediziner und Biologen analysieren unter Laborbedingungen einen Bakterienbestand, der durch die Funktion f_a mit $a = 2,7$ beschrieben werden kann.
- 2.1 Bestimme, wann in diesem Fall der höchste Bakterienbestand vorliegt und wie hoch dieser ist. Zeichne die Skalierung des Koordinatensystems in die Abbildung 1 ein.

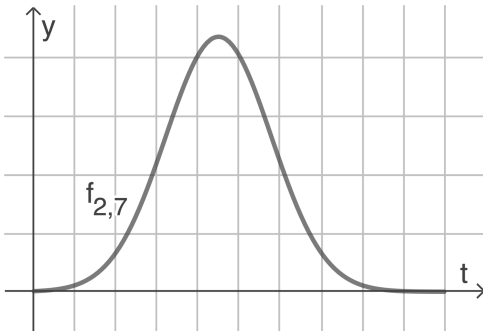


Abbildung 1

(3 BE)

- 2.2 Formuliere unter Bezug auf den Sachzusammenhang einen geeigneten Ansatz zur Berechnung des Zeitpunkts, ab dem man (bei Modellierung mit der Funktion $f_{2,7}$) davon ausgehen kann, dass keine Bakterien mehr vorhanden sind.

Berechne diesen Zeitpunkt und erläutere das Ergebnis.

(4 BE)

- 2.3 In Abbildung 2 ist der Graph einer möglichen Stammfunktion $F_{2,7}$ von $f_{2,7}$ dargestellt. Beschreibe und begründe das Monotonieverhalten des Graphen von $F_{2,7}$ und erläutere die Bedeutung des Hochpunkts des Graphen von $f_{2,7}$ für den Graphen von $F_{2,7}$.

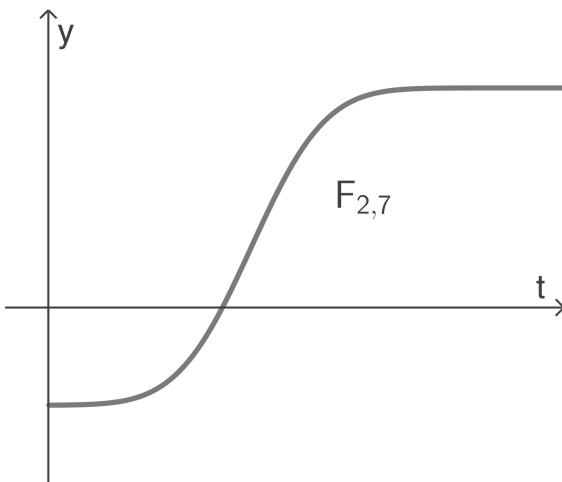


Abbildung 2

(4 BE)

Der Mittelwert m der Funktionswerte $g(x)$ einer Funktion g im Intervall $[a; b]$ kann durch die Formel

$$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b g(x) \, dx \text{ berechnet werden.}$$

Für die Integration von $f_{2,7}$ muss auf Näherungsverfahren zurückgegriffen werden.

- 2.4 Eine Näherung für den Mittelwert der Anzahl an Bakterien während des zweiten Tages benutzt die Berechnung einer einzigen Trapezfläche, wie für den Graphen einer anderen Funktion als Beispiel in Abbildung 3 dargestellt.

Zeichne die entsprechende Trapezfläche in die Abbildung ein und berechne mithilfe der Trapezfläche einen

Näherungswert für die mittlere Anzahl an Bakterien während des zweiten Tages nach Beobachtungsbeginn.

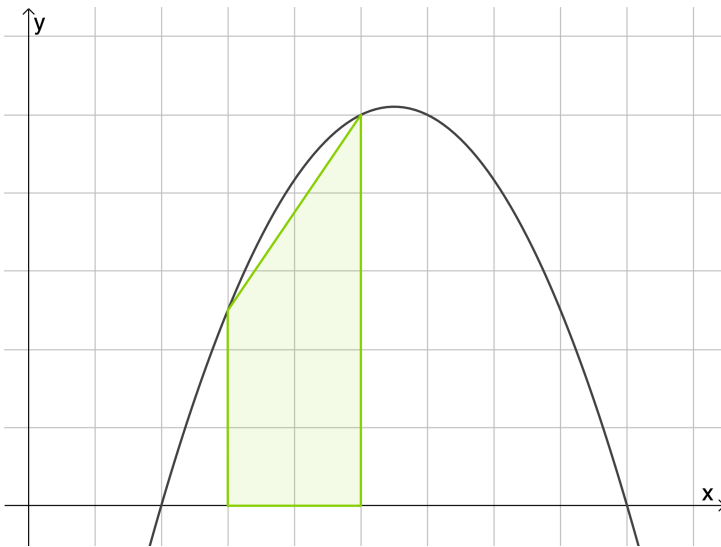


Abb. 3

(3 BE)

- 2.5 Bestimme (numerisch mithilfe des Taschenrechners) die mittlere Anzahl an Bakterien während des zweiten Tages nach Beobachtungsbeginn.

(2 BE)

- 2.6 Begründe für die Funktion $f_{2,7}$, dass es genau zwei Intervalle $[a; b]$ der Länge $b - a = 1$ gibt, in denen der Näherungswert durch die Trapezfläche gleich dem exakten Wert für den Mittelwert m für das jeweilige Intervall ist.

Hinweis: Die Intervalle enthalten jeweils eine Wendestelle.

(4 BE)

- 3 Ein Arzneimittel wird als Tablette produziert und enthält neben dem Antibiotikum weitere Inhaltsstoffe. Die Tablette ist ein rotationssymmetrischer Körper. Die obere Randkurve der Querschnittsfläche der Tablette kann durch den Graphen der Funktion h mit $h(x) = 0,5 \cdot \sqrt{1 - x^2}$ beschrieben werden. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Zentimeter.

- 3.1 Zeige, dass der Definitionsbereich der Funktion h das Intervall $[-1; 1]$ ist.

(2 BE)

- 3.2 In $0,01 \text{ cm}^3$ einer Tablette befinden sich 2 mg des Antibiotikums. Berechne, wie viel mg des Antibiotikums eine Tablette enthält.

(6 BE)