A2 - Analysis

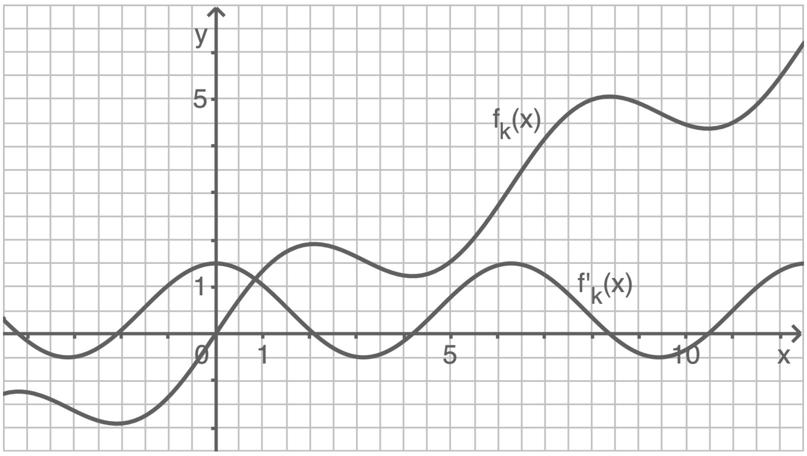
1

1.1 **Erste Ableitung angeben**

$f_k(x) = \sin(x) + k \cdot x;\;\; k \in \mathbb{R}$

$f_k'(x) = \cos(x) + k;\;\; k \in \mathbb{R}$

Graphen beschriften



Parameter k bestimmen

Der Parameter k kann durch eine Punktprobe mit einem Punkt auf dem Graphen von f_k oder f_k' bestimmt werden.

Aus der Abbildung kann beispielsweise der Punkt $P(0 \mid 1,5)$ entnommen werden.

$$\begin{aligned} f_k'(0) &= 1,5 \\ cos(0) + k &= 1,5 \\ 1 + k &= 1,5 \qquad \mid -1 \\ k &= 0,5 \end{aligned}$$

1.2 **1. Schritt: Notwendige Bedingung untersuchen**

Die notwendige Bedingung besagt, dass für eine Extremstelle der Funktionsterm der Ableitung gleich Null ist. Hierbei handelt es sich grafisch um eine Nullstelle der ersten Ableitung.

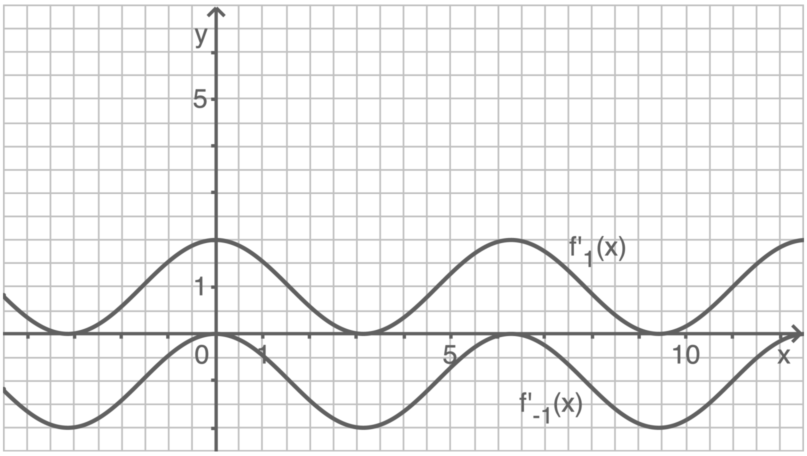
Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= 0 \\ \cos(x) + k &= 0 \qquad \mid -k \\ \cos(x) &= -k \end{aligned}$$

Da der Cosinus nur Werte von -1 bis 1 annimmmt, besitzt die Ableitung somit für $k > 1$ und $k < -1$ keine Nullstellen. k muss also im Intervall $[-1, 1]$ liegen.

2. Schritt: Hinreichende Bedingung prüfen

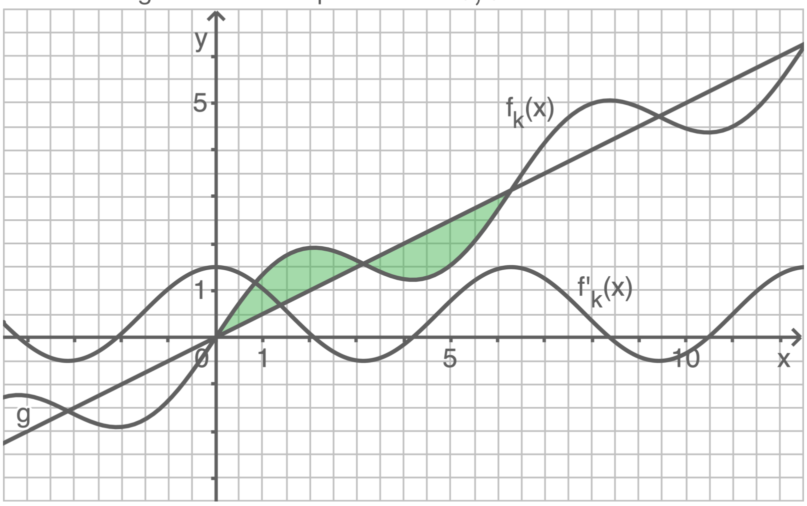
Die hinreichende Bedingung besagt, dass die zweite Ableitung an der potentiellen Extremstelle ungleich Null ist. Damit ist die Steigung der Ableitung an den Nullstellen ungleich Null und es findet ein Vorzeichenwechsel statt.



Wie in der Skizze erkennbar, findet im Fall $k = 1$ und $k = -1$ kein Vorzeichenwechsel statt, da dort der Cosinus die x-Achse nur berührt und nicht schneidet.

Die Funktionenschar f_k besitzt folglich nur für $k \in (-1, 1)$ Extremstellen.

1.3 Aus Aufgabe 1.1 folgt $k = 0,5$ und somit $y = 0,5x$.
Die Intervallgrenze 2π entspricht etwa $6,3$.



1.4 Die Größe eines Flächenstücks entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktionenschar f_k und der Geraden $y = k \cdot x$.

1. Schritt: Schnittpunkte berechnen

$$\begin{aligned} f_k(x) &= k\cdot x \\ \sin(x)+k\cdot x &= k\cdot x \qquad {\scriptstyle \mid -k\cdot x} \\ \sin(x) &= 0 \end{aligned}$$

Aufgrund der Eigenschaften der Sinus-Funktion gilt $\sin(x)=0$ für alle $x=z\cdot\pi$ mit $z\in\mathbb{Z}$. Die Schnittpunkte sind dementsprechend alle ganzzahlige Vielfache von π.

2. Schritt: Flächeninhalte berechnen

Die Flächenstücke sind durch zwei aufeinander folgende Schnittpunkte begrenzt. Ist $z\cdot\pi$ ein Schnittpunkt, so ist der nächste Schnittpunkt $(z+1)\cdot\pi$.

Der Flächeninhalt eines Flächenstücks lässt sich also wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} A = &\left|\int_{z\cdot\pi}^{(z+1)\cdot\pi}(f_k(x)-k\cdot x)\,\mathrm{d}x\right| \\ = &\left|\int_{z\cdot\pi}^{(z+1)\cdot\pi}((\sin(x)+k\cdot x)-k\cdot x)\,\mathrm{d}x\right| \\ = &\left|\int_{z\cdot\pi}^{(z+1)\cdot\pi}\sin(x)\mathrm{d}x\right| \\ = &\left|[-\cos(x)]_{z\cdot\pi}^{(z+1)\cdot\pi}\right| \\ = &\ 2 \end{aligned}$$

Der Betrag der Fläche des Cosinus ist auf jedem Intervall $[z\cdot\pi; (z+1)\cdot\pi]$ gleich 2.

Der Flächeninhalt A eines Flächenstücks ist somit immer gleich groß und unabhängig vom Parameter k.

2

Parameter bestimmen

Da um 4 Uhr morgens die tiefste Temperatur von $16^\circ C$ gemessen wird, ist der Punkt $T(4\mid 16)$ Tiefpunkt von g.

Da a und c konstant sind, nimmt die Funktion g genau dann ihr Minimum/Maximum an, wenn der Sinus minimal/maximal ist.

Das Minimum des Sinus ist -1, somit ergibt sich:

$$\sin\left(\frac{1}{12}\pi\cdot(4-b)\right)=-1$$

(Alternativ kann hier auch das Maximum 1 angenommen werden, der alternative Lösungsweg ist am Ende der Lösung zu finden.)

Außerdem erhalten wir für $g(4)$ eine zweite Bedingung:

$$\begin{aligned} g(4) &= 16 \\ a\cdot\left(\sin\left(\frac{1}{12}\pi\cdot(4-b)\right)\right)+c &= 16 \\ a\cdot(-1)+c &= 16 \\ (-a)+c &= 16 \end{aligned}$$

Die dritte Bedingung lautet, dass zu einem unbekannten Zeitpunkt t_u die Temperatur ihren Maximalwert annimmt, der Sinus also sein Maximum/Minimum annimmt.

Das Maximum der Sinusfunktion ist 1. Somit folgt:

$$\begin{aligned} g(t_u) &= 26 \\ a\cdot\left(\sin\left(\frac{1}{12}\pi\cdot(t_u-b)\right)\right)+c &= 26 \\ a\cdot 1+c &= 26 \\ a+c &= 26 \end{aligned}$$

Aus den drei Bedingungen ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & \sin\left(\frac{1}{12}\cdot\pi\cdot(4-b)\right) & = & -1 \\ \text{II} & (-a)+c & = & 16 \\ \text{III} & a+c & = & 26 \end{array}$$

1. Schritt: Bedingung I auflösen

Die Gleichung $\sin(z)=-1$ ist beispielsweise für $z=-\frac{1}{2}\pi$ erfüllt.

Durch Substitution ergibt sich:

$$\begin{array}{rll} \sin\left(\frac{1}{12}\pi\cdot(4-b)\right)= & -1 & \mid z=\frac{1}{12}\pi\cdot(4-b) \\ \sin(z)= & -1 & \\ z= & -\frac{1}{2}\pi & \mid z=\frac{1}{12}\pi\cdot(4-b) \\ \frac{1}{12}\pi\cdot(4-b)= & -\frac{1}{2}\pi & \mid\cdot\frac{12}{\pi} \\ 4-b= & -6 & \mid -4 \\ -b= & -10 & \mid\cdot(-1) \\ b= & 10 & \end{array}$$

(Da die Sinusfunktion periodisch verläuft, können auch andere Werte für z gewählt werden. Für beispielsweise $z=\frac{3}{2}\pi$ folgt $b=-14$. Dies verändert nichts an den folgenden Rechnungen.)

2. Schritt: Bedingung II und III auflösen

Das lineare Gleichungssystem kann mit dem Einsetzungsverfahren gelöst werden:

$$\begin{array}{llcllll}
\mathrm{II} & (-a) & + & c & = & 16 & \\
\mathrm{III} & a & + & c & = & 26 & \mid \mathrm{IIIa} = \mathrm{II} + \mathrm{III} \\
\hline
\mathrm{II} & (-a) & + & c & = & 16 & \\
\mathrm{IIIa} & & & 2c & = & 42 & \mid :2 \\
\hline
\mathrm{II} & (-a) & + & c & = & 16 & \mid \text{IIIb in II einsetzen} \\
\mathrm{IIIb} & & & c & = & 21 & \\
\hline
\mathrm{IIa} & (-a) & + & 21 & = & 16 & \mid -21 \\
 & (-a) & & & = & -5 & \mid \cdot(-1) \\
 & a & & & = & 5 & \\
\mathrm{IIIb} & & & c & = & 21 &
\end{array}$$

Damit sind die Parameter beispielsweise durch $a=5$, $b=10$ beziehungsweise $b=-14$ und $c=21$ gegeben.

Eine mögliche Funktionsgleichung lautet folglich:

$$g(t)=5\cdot\sin\left(\frac{1}{12}\pi\cdot(t-10)\right)+21$$

Alternativer Lösungsweg

Wird anfangs der Sinus gleich 1 gewählt, so folgt beispielsweise $b=-2$. Des Weiteren ändert sich das Vorzeichen von a in den Gleichungen II und III . Es ergibt sich also $a=-5$. Der Parameter c ändert sich nicht.

Parameter deuten

Der Verlauf der Temperatur ist periodisch und schwankt um den Mittelwert $21°C$. Dieser Mittelwert wird durch den Parameter $c=21$ bestimmt.

Die Schwankung zwischen dem Temperaturtiefpunkt von $16°C$ und der höchsten Temperatur von $26°C$ beträgt $10°C$. Die Amplitude beträgt also $5°C$ und wird folglich durch den Parameter $a=5$ bestimmt.

Die Funktion g hat eine Periodenlänge von 24 Stunden und würde ohne zeitliche Verschiebung das

Maximum nach 6 Stunden und das Minimum nach 18 Stunden annehmen. Der Parameter $b=10$ beziehungsweise $b=-14$ gibt hier die zeitliche Verschiebung an, so dass g das Minimum zum Zeitpunkt $t=4$ annimmt.

Die Funktion g beschreibt also den periodischen Verlauf der Tagestemperatur um den Mittelwert c mit einer maximalen Abweichung nach unten beziehungsweise oben von a und einer zeitlichen Verschiebung um b.

3

3.1 **1. Schritt: Ableitungen berechnen**

Mit der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} h(t) &= -6\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t+\frac{\pi}{12}\right)+0,4t+10,5 \\ h'(t) &= -6\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t+\frac{\pi}{12}\right)\cdot\frac{\pi}{12}\right)+0,4 \\ &= \left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t+\frac{\pi}{12}\right)+0,4 \\ h''(t) &= \left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t+\frac{\pi}{12}\right)\cdot\frac{\pi}{12}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{24}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t+\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

2. Schritt: Notwendige Bedingung für Extremstellen anwenden

$$\begin{aligned} h'(t) &= 0 \\ \left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t+\frac{\pi}{12}\right)+0,4 &= 0 \qquad \mid -0,4 \\ \left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t+\frac{\pi}{12}\right) &= -0,4 \qquad \mid :\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t+\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{4}{5\pi} \end{aligned}$$

Durch Substitution mit $z=\frac{\pi}{12}\cdot t+\frac{\pi}{12}$ ergibt sich folgende Gleichung: $\cos(z)=\frac{4}{5\pi}$.

Diese besitzt auf dem Intervall $[0,2\pi]$ zwei Lösungen z_1 und z_2:

z_1 kann durch $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5\pi}\right)$ mit deinem Taschenrechner berechnet werden. Es ergibt sich $z_1=1,3133$.

Wegen den Eigenschaften der Cosinusfunktion gilt außerdem: $\cos(z)=\cos(2\pi-z)$.

Es ergibt sich also z_2 mit:

$z_2 = 2\pi - z_1 = 4,9699$

Durch Resubstitution mit $t = \frac{12}{\pi} \cdot \left(z - \frac{\pi}{12}\right)$ folgen die möglichen Extremstellen:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{12}{\pi} \cdot \left(z_1 - \frac{\pi}{12}\right) \\ &= \frac{12}{\pi} \cdot \left(1,3133 - \frac{\pi}{12}\right) \\ &= 4,02 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{12}{\pi} \cdot \left(z_2 - \frac{\pi}{12}\right) \\ &= \frac{12}{\pi} \cdot \left(4,9699 - \frac{\pi}{12}\right) \\ &= 17,98 \end{aligned}$$

3. Schritt: Hinreichende Bedingung für Extremstellen prüfen

$$\begin{aligned} h''(t_1) &= \frac{\pi^2}{24} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 4,02 + \frac{\pi}{12}\right) \\ &= 0,4 \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(t_2) &= \frac{\pi^2}{24} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 17,98 + \frac{\pi}{12}\right) \\ &= -0,4 \\ &< 0 \end{aligned}$$

Etwa um 4 Uhr morgens ist somit die Temperatur minimal und um circa 18 Uhr ist die Temperatur maximal.

3.2 **1. Schritt: Temperaturen T_0, T_6, T_{12}, T_{18} berechnen**

Mithilfe der Funktion h und dem Zusammenhang $T_t = h(t)$ lassen sich die Temperaturen T_t zu den „synoptischen Stunden“ bestimmen:

$$\begin{aligned} T_0 &= h(0) \\ &= -6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 0 + \frac{\pi}{12}\right) + 0,4 \cdot 0 + 10,5 \\ &= -6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + 10,5 \\ &\approx 8,95 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_6 &= -6\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot 6+\frac{\pi}{12}\right)+0,4\cdot 6+10,5\\
&\approx 7,1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{12} &= -6\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot 12+\frac{\pi}{12}\right)+0,4\cdot 12+10,5\\
&\approx 16,85
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{18} &= -6\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot 18+\frac{\pi}{12}\right)+0,4\cdot 18+10,5\\
&\approx 23,5
\end{aligned}
$$

2. Schritt: Mittlere Tagestemperatur berechnen

$$
\begin{aligned}
T_L &= \frac{1}{4}\cdot(T_0+T_6+T_{12}+T_{18})\\
&= \frac{1}{4}\cdot(8,95+7,1+16,85+23,5)\\
&= \frac{1}{4}\cdot 56,4\\
&\approx 14,1
\end{aligned}
$$

Die mittlere Tagestemperatur T_L beträgt somit etwa $14,1°C$.

3.3 **Mittlere Tagestemperatur berechnen**

Stammfunktion H bestimmen:

$$
\begin{aligned}
H(t) = &\int\left(-6\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t+\frac{\pi}{12}\right)+0,4t+10,5\right)\mathrm{d}t\\
&= -6\cdot\int\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t+\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{d}t+\int 0,4\cdot t\mathrm{d}t+\int 10,5\mathrm{d}t\\
&= -6\cdot\frac{12}{\pi}\cdot\left(-\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t+\frac{\pi}{12}\right)\right)+0,2\cdot t^2+10,5\cdot t\\
&= \frac{72}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t+\frac{\pi}{12}\right)+0,2\cdot t^2+10,5\cdot t
\end{aligned}
$$

Mithilfe der Formel aus der Aufgabenstellung folgt nun:

$$
\begin{aligned}
\overline{T} &= \frac{1}{24}\cdot\int_0^{24} h(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{24}\cdot\left[\frac{72}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t+\frac{\pi}{12}\right)+0,2\cdot t^2+10,5\cdot t\right]_0^{24} \\
&= \frac{1}{24}\cdot\left[\left(\frac{72}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{25\pi}{12}\right)+0,2\cdot 24^2+10,5\cdot 24\right)-\left(\frac{72}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+0\right)\right] \\
&= \frac{1}{24}\cdot\left[\frac{72}{\pi}\cdot\left(\cos\left(\frac{25\pi}{12}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)+115,2+252\right] \\
&= \frac{1}{24}\cdot\left[\frac{72}{\pi}\cdot 0+367,2\right] \\
&= \frac{1}{24}\cdot 367,2 \\
&= 15,3
\end{aligned}
$$

Die mittlere Tagestemperatur $\overline{T}$ beträgt somit $15,3°C$.

Prozentuale Abweichung ΔT berechnen

$$
\begin{aligned}
\Delta T &= \frac{\overline{T}-T_L}{\overline{T}} \\
&= \frac{15,3-14,1}{15,3} \\
&= \frac{1,2}{15,3} \\
&= 7,84\%
\end{aligned}
$$