B1 - Analysis

Ein Freizeitpark öffnet an einem bestimmten Tag für seine Besucher um 9:00 Uhr und schließt um 19:00 Uhr, wobei der letzte Einlass um 17:00 Uhr erfolgt. Eingang und Ausgang erfolgen voneinander getrennt an unterschiedlichen Seiten des Parks.

1 Die Eingangsrate (in Personen pro Stunde) beim Betreten des Parks lässt sich in sehr guter Näherung durch die Funktion f mit $f(t)=12t^3-192t^2+768t$ und $0\leq t\leq 8$ modellieren, wobei t die Zeit in Stunden nach Öffnung des Parks angibt.

Der Graph von f ist in der Abbildung 1 dargestellt.

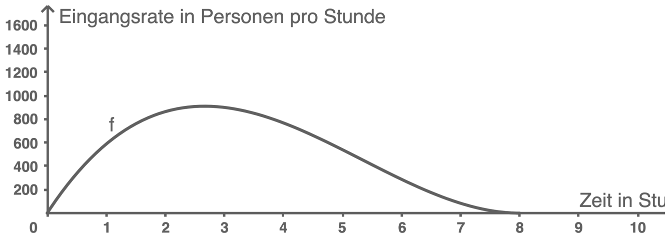

Abbildung 1

1.1 Berechne die Anzahl der Besucher, die gemäß der Modellierung mit der Funktion f an diesem Tag den Park betreten.

[zur Kontrolle: Die Anzahl der Besucher beträgt 4096.]

(3 BE)

1.2 Bestimme unter Angabe der Ableitungsfunktion f' die Uhrzeit (in Stunden und Minuten), zu der die Eingangsrate maximal ist.

Prüfe, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

„Im Zeitraum von 9 Uhr bis 17 Uhr ist die maximale Eingangsrate um mehr als $75\,\%$ *größer als die durchschnittliche Eingangsrate."*

(9 BE)

1.3 Damit es keine Wartezeiten am Eingang gibt, muss zu den Zeiten, an denen die Eingangsrate mindestens 10 Personen pro Minute beträgt, ein zusätzlicher Mitarbeiter zur Verfügung stehen.

Prüfe, ob es ausreichend ist, den zusätzlichen Mitarbeiter im Zeitraum von 10:00 Uhr bis 14:00 Uhr einzubestellen.

(3 BE)

2 Die Ausgangsrate (in Personen pro Stunde) beim Verlassen des Parks lässt sich für $0\leq t\leq 10$ in sehr guter Näherung durch die Funktion g modellieren, deren Graph in Abbildung 2 dargestellt ist. Dabei gibt t wie in Aufgabe 1 die Zeit in Stunden nach Öffnung des Parks an.

Die Funktion g gehört zur Funktionenschar g_k mit $g_k(t)=k\cdot\left(10t-t^2\right)\cdot \mathrm{e}^t$, wobei $k>0$ ist.

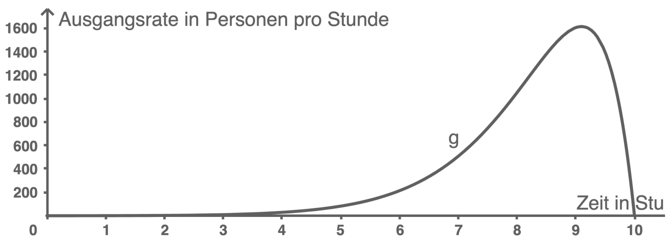

Abbildung 2

2.1 Beschreibe ohne Verwendung einer Rechnung den Einfluss des Parameters k auf den Verlauf der Graphen von g_k sowie auf die Lage der Schnittpunkte mit der t-Achse, der Extrempunkte und der Wendepunkte der Graphen.

(3 BE)

2.2 g_k besitzt die Nullstellen $t_1=0$ und $t_2=10.$

Begründe anhand des Funktionsterms ohne Rechnung, dass g_k nicht mehr als diese zwei Nullstellen haben kann.

(2 BE)

2.3 Berechne die erste Ableitung der Funktionenschar g_k und zeige, dass für die zweite Ableitung gilt:

$$g_k''(t) = k \cdot \left(18 + 6t - t^2\right) \cdot \mathrm{e}^t$$

(4 BE)

2.4 Berechne die Wendestelle von g_k im Intervall $0 \leq t \leq 10$, wobei die Untersuchung der notwendigen Bedingung genügt.

Beschreibe die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang.

(5 BE)

2.5 Berechne mit Hilfe eines geeigneten Formansatzes eine Stammfunktionenschar G_k von g_k.

[zur Kontrolle: $G_k(t) = k \cdot \left(-t^2 + 12t - 12\right) \cdot \mathrm{e}^t$]

(7 BE)

2.6 Es gilt $\displaystyle\int_0^{10} g(t)\ \mathrm{d}t = 4096.$

Begründe im Sachzusammenhang, warum diese Gleichung eine sinnvolle Bedingung darstellt.

Zeige rechnerisch, dass für die Funktion g der Schar g_k gilt: $k = \dfrac{512}{\mathrm{e}^{10} + 1{,}5}$

(4 BE)

2.7 Für alle Werte u mit $0 \leq u \leq 1$ gilt $\displaystyle\int_u^{10} g(t)\ \mathrm{d}t \approx 4096.$

Deute diese Aussage geometrisch mit Bezug auf den Graphen in der Abbildung 2 und erläutere, was dies im Sachzusammenhang bedeutet.

(3 BE)

3 Betrachtet wird die Funktion h mit

$$h(t) = \begin{cases} f(t) - g(t) & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 8 \\ -g(t) & \text{für} \quad 8 < t \leq 10 \end{cases}.$$

Dabei entsprechen f und g den Funktionen aus dem in Aufgabe 1 und 2 beschriebenen Sachzusammenhang. Der Graph von h ist in Abbildung 3 dargestellt.

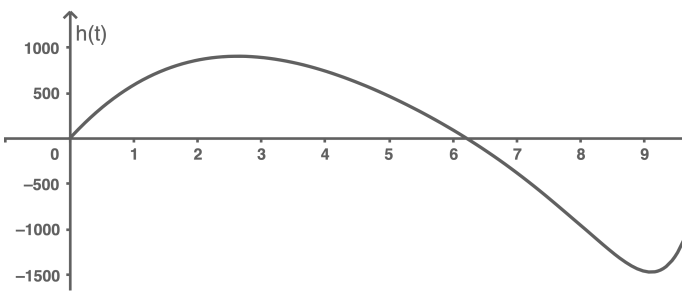

Abbildung 3

3.1 Ermittle den Zeitpunkt t, an dem sich die meisten Besucher gleichzeitig auf dem Parkgelände befinden.

Beschreibe, wie sich die maximale Besucherzahl auf dem Gelände geometrisch in der Abbildung 3 darstellen lässt.

(4 BE)

3.2 Erläutere die Bedeutung der in (I) definierten Funktion H im Sachzusammenhang.

Deute die Ergebnisse in (II) und (III) im Sachzusammenhang.

(I) $\quad H(t)=\int_0^t h(x)\,\mathrm{d}x$

(II) $\quad \frac{1}{10}\int_0^{10} H(t)\,\mathrm{d}t \approx 2068$

(III) $\quad \frac{2068\cdot 10}{4096}$ Stunden $\approx$ 5,05 Stunden $=$ 5 Stunden 3 Minuten

(3 BE)