C1 - Analytische Geometrie

Der quaderförmige Innenraum einer Diskothek ist $6\,\text{m}$ hoch. An der Decke ist ein dreieckiger Spiegel befestigt. Seine Eckpunkte sind durch $P(13 \mid 11 \mid 6)$, $Q(11 \mid 13 \mid 6)$ und $R(10 \mid 10 \mid 5)$ gegeben.
Der Boden des Raumes liegt in der $x-y-$Ebene. $O(0 \mid 0 \mid 0)$ ist ein Eckpunkt des Bodens.
Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

1.1 Das Dreieck PQR liegt in der Ebene E.
Gib eine Gleichung der Ebene E in Parameterform an und ermittle eine Gleichung von E in Koordinatenform.
Begründe, dass der Koordinatenursprung in der Ebene E liegt.

[zur Kontrolle: $E: -x-y+4z=0$]

(7 BE)

1.2 Bestimme die Größe des Winkels, um den die Spiegelfläche gegenüber der horizontalen Deckenfläche geneigt ist.

(3 BE)

2 Der Punkt $M(17 \mid 17 \mid 4)$ ist der Mittelpunkt einer Diskokugel, die an der Decke befestigt ist.
Die Kugel hat einen Durchmesser von $0,5\,\text{m}$. Im Folgenden soll die kürzeste Entfernung der Kugel zum Spiegel untersucht werden.

2.1 Bestimme den zur Kugel nächstgelegenen Punkt der Ebene E aus Aufgabe 1.1 und prüfe, ob dieser Punkt innerhalb der Spiegelfläche liegt.

(5 BE)

2.2 Die kürzeste Entfernung der Kugel zum Spiegel entspricht dem geringsten Abstand der Kugeloberfläche zur Kante $\overline{PQ}$ des Spiegels.
Berechne diesen Abstand.

(6 BE)

3 Gegeben ist die Matrix S mit

$$S = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -1 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

3.1 Ermittle die Fixpunktmenge der durch die Matrix S beschriebenen Abbildung.

(3 BE)

3.2 Es gilt: $S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Begründe anhand des Ergebnisses aus Aufgabe 3.1 und der vorgegebenen Gleichung geometrisch, dass die Matrix S eine Spiegelung an der Ebene E aus Aufgabe 1.1 beschreibt.

(3 BE)

4 An einer Wand ist ein rechteckiges Bild befestigt.
Die Eckpunkte des Bildes befinden sich in $A(8 \mid 0 \mid 1)$, $B(14 \mid 0 \mid 1)$, $C(14 \mid 0 \mid 3)$ und $D(8 \mid 0 \mid 3)$.

Ein Laserstrahl fällt in Richtung des Vektors $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

4.1 Ermittle die Abbildungsmatrix W, die eine Projektion in Richtung des Laserstrahls auf die Wandfläche, an welcher das Bild befestigt ist, beschreibt.

(5 BE)

4.2 Der Laserstrahl verlässt im Punkt $L(4 \mid 2 \mid 6)$ einen Laserpointer. Untersuche, ob der Laserstrahl auf das Bild fällt.

(4 BE)

4.3 Erläutere (ohne Verwendung einer Rechnung) die geometrische Bedeutung des linearen Gleichungssystems $W \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ sowie die geometrische Bedeutung seiner Lösungsmenge.

(3 BE)

5 An der Bar gibt es alkoholfreie Cocktails. Bisher werden dort drei Cocktails (gleicher Füllmenge) verkauft, aus denen ein neuer Cocktail (gleicher Füllmenge) gemixt werden soll, der genau $25\,\%$ Ananassaft enthält.
Die Anteile an Ananassaft sowie die jeweiligen Kosten zur Herstellung der bisherigen Cocktails sind in folgender Tabelle dargestellt:

	Ananassaft	Kosten
Cocktail 1	$10\,\%$	$3\,€$
Cocktail 2	$30\,\%$	$5\,€$
Cocktail 3	$40\,\%$	$4\,€$

5.1 Gib ein lineares Gleichungssystem an, mit dem ermittelt werden kann, welche Anteile der bisherigen drei Cocktails zur Mischung des neuen Cocktails verwendet werden können.
Erläutere die Bedeutung der von dir verwendeten Variablen.

(3 BE)

5.2 Eine Darstellung aller Lösungen des linearen Gleichungssystems aus Aufgabe 5.1 lautet:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um eine mögliche Mischung herzustellen, müssen alle Variablen nichtnegative Werte annehmen. Ermittle das Intervall, aus dem s unter dieser Bedingung gewählt werden darf.

(3 BE)

5.3 Der neue Cocktail soll mit derjenigen Mischung hergestellt werden, welche die geringsten Kosten verursacht.
Dabei müssen nicht zwingend alle drei bisherigen Cocktails enthalten sein.
Ermittle diese Mischung und deren Kosten.

(5 BE)