1. **► Graph der Ableitungsfunktion identifizieren** (9BE)

Die Funktion f_a ist nur für $-a \leq x \leq a$ definiert. Dabei sind $f_a(-a) = f_a(a) = 0$. Graph 3 muss somit den Graphen einer Funktion f_a darstellen.

Der Graph der Ableitungsfunktion f_a' muss **unterhalb** der x-Achse verlaufen, wo der Graph von f_a fällt und **oberhalb** der x-Achse verlaufen, wo der Graph von f_a steigt.

Damit ist Graph 1 der Graph der Ableitungsfunktion f_a'.

► Parameterwert angeben

Im Funktionsterm von f_a kannst du leicht erkennen, dass $f_a(-a) = f_a(a) = 0$. Graph 3 schneidet die x-Achse bei $x = -2$ und $x = 2$. Damit folgt der Parameterwert $a = 2$.

► Auswirkungen des Parameters beschreiben

Da die Funktion f_a bei $x_{1,2} = \pm a$ Nullstellen besitzt, beeinflusst der Parameter a die Lage der Schnittpunkte des Graphen von f_a mit der x-Achse.

Wegen $f_a(0) = \sqrt{a^2 - 0} = a$ beeinflusst der Parameter a auch den Schnittpunkt des Graphen von a mit der y-Achse, nämlich $S_a\left(0 \mid a\right)$.

Da durch den Graphen von f_a ein Halbkreis dargestellt wird, lässt sich der Parameter a auch als **Radius** des Halbkreises interpretieren.

2. **► Erste Ableitung bestimmen** (9BE)

Leite f_a nach der **Kettenregel** ab. Schreibe den Funktionsterm von f_a vorher um:

$$f_a(x) = \sqrt{a^2 - x^2} = \left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f_a'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$f_a'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$f_a'(x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

► Symmetrieverhalten der Graphen nachweisen

Mit einem Blick auf die Graphen in Abbildung 1 liegt die Vermutung nahe, dass der Graph von f_a **achsensymmetrisch** zur y-Achse ist und dass der Graph von f_a' **punktsymmetrisch** zum Ursprung verläuft.

1. Schritt: Achsensymmetrie des Graphen von f_a

Der Graph von f_a ist achsensymmetrisch zur y-Achse, falls gilt: $f_a(-x) = f_a(x)$:

$$f_a(-x) = \sqrt{a^2 - (-x)^2} = \sqrt{a^2 - x^2} = f_a(x)$$

Damit ist die Achsensymmetrie des Graphen nachgewiesen.

2. Schritt: Punktsymmetrie des Graphen von f_a'

Der Graph von f_a' ist punktsymmetrisch zum Ursprung, falls gilt: $f_a(-x) = -f_a(x)$:

$$f_a'(-x) = -\frac{-x}{\sqrt{a^2 - (-x)^2}} = -\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = -f_a'(x)$$

Damit ist die Punktsymmetrie des Graphen nachgewiesen.

▶ Definitionsbereiche angeben

1. Schritt: Definitionsbereich von f_a

Die Wurzelfunktion ist **nicht für** negative Argumente definiert, also nur für $x \in \mathbb{R}$ mit $a^2 - x^2 \geq 0$:

$$a^2 - x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \geq x^2 \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$$

Der Definitionsbereich D_a von f_a lautet $D_a = [-a; a]$.

2. Schritt: Definitionsbereich von f_a'

Der Definitionsbereich von f_a' ist aufgrund der Wurzel im Nenner **höchstens** so groß wie der von f_a. Da f_a' aber eine gebrochene Funktion ist, gilt als zusätzliche Bedingung, dass der Nenner niemals Null werden darf. Dies ist für $x = \pm a$ der Fall.
Für den Definitionsbereich D_a' von f_a' gilt also $D_a' =]-a; a[$.

3. ▶ **Koordinaten von P bestimmen** (10BE)

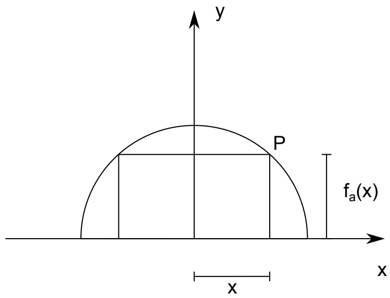
Alle Punkte, die auf einem Halbkreis mit Radius a um den Ursprung liegen, haben vom Ursprung genau den **Abstand** a. Für alle Punkte $P\,(x \mid y)$ gilt dann also:

$$\begin{aligned} d(P;O) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} &= a \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= a && \mid (\ )^2 \\ x^2 + y^2 &= a^2 && \mid -x^2 \\ y^2 &= a^2 - x^2 && \mid \sqrt{\ } \\ y &= \sqrt{a^2 - x^2} = f_a(x) \end{aligned}$$

Der Halbkreis mit Radius a um den Ursprung ist gerade der Graph der Funktion f_a.

Die Koordinaten von P sollen nun so bestimmt werden, dass der Flächeninhalt des einbeschriebenen Rechtecks maximal wird.

Aufgrund der Achsensymmetrie sind die beiden „Teilrechtecke“ links und rechts von der y-Achse gleich groß. Für den Flächeninhalt des Rechtecks gilt also $A = 2 \cdot x \cdot f_a(x)$



Dabei ist x genau die x-Koordinate des Punktes P. Als Zielfunktion dieses Extremwertproblems ergibt sich also:

$$A_a(x) = 2x \cdot f_a(x) = 2x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

Die Funktion A_a gibt dir in Abhängigkeit vom Radius a den Flächeninhalt des Rechtecks an. Gesucht ist der Wert für x, für den dieser Flächeninhalt **maximal** wird, also das **Maximum** von A_a.
Bilde zunächst die ersten beiden Ableitung nach der Produktregel und der Quotientenregel:

$$A_a'(x) = 2\sqrt{a^2-x^2} - 2x \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\left(\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$$

$$A_a''(x) = 2 \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{2x \cdot \sqrt{a^2-x^2} + x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}\right)$$

$$A_a''(x) = 2 \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{2x \cdot \sqrt{a^2-x^2}}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2} - \frac{x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}\right)$$

$$A_a''(x) = 2 \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{x^3}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3}\right)$$

$$A_a''(x) = 2 \cdot \left(-\frac{3x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{x^3}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3}\right)$$

Mit der notwendigen Bedingung für ein Extremum $A_a'(x) = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
A_a'(x) = 2\left(\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) &= 0 && \mid :2 \\
\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} &= 0 && \mid +\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
\sqrt{a^2-x^2} &= \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} && \mid \cdot\sqrt{a^2-x^2} \\
a^2 - x^2 &= x^2 && \mid +x^2 \\
2x^2 &= a^2 && \mid :2 \\
x^2 &= \frac{1}{2}a^2 && \mid \sqrt{\ } \\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot a
\end{aligned}$$

Aufgrund der Achsensymmetrie genügt es, wenn du dich auf die **positive** Lösung beschränkst. Es bleibt zu prüfen, ob für $x = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot a$ wirklich ein **Maximum** vorliegt. Das ist dann der Fall, wenn $A_a''(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot a) < 0$:

$$A_a''\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot a\right) = 2 \cdot \left(-\frac{3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot a}{\sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a^2}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{8}}a^3}{\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a^2}\right)^3}\right)$$

$$A_a''\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot a\right) = 2 \cdot \left(-\frac{3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot a}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot a} - \frac{\frac{1}{\sqrt{8}}a^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot a\right)^3}\right)$$

$$A_a''\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot a\right) = 2 \cdot \left(-3 - \frac{\frac{1}{\sqrt{8}}a^3}{\sqrt{\frac{1}{8}} \cdot a^3}\right)$$

$$A_a''\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot a\right) = 2 \cdot (-3 - 1) = -8 < 0$$

Damit ist gezeigt, dass der Flächeninhalt für $x = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$ sein Maximum annimmt.

Der Punkt $P\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot a \mid f_a\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot a\right)\right)$ hat dann die vollständigen Koordinaten $P\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot a \mid \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot a\right)$.

Für den maximalen Flächeninhalt $A_a\left(\sqrt{\frac{a^2}{2}}\right)$ ergibt sich:

$$A_a\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot a\right) = 2\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot a\cdot\sqrt{a^2-\tfrac{1}{2}a^2} = 2\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot a\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot a = 2\cdot\tfrac{1}{2}a^2 = a^2.$$

4.1 ► Umformungsschritte erklären (12BE)

Zeile 1: 1. Schritt: Substitution

x wird substituiert durch $x=\sin z$. Dabei gilt: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\cos z$, also $\mathrm{d}x=\cos(z)\mathrm{d}z$.

Auch die „alten“ Integrationsgrenzen 0 und 1 werden angepasst. Untere Grenze: $\sin^{-1}(0)=0$, obere Grenze: $\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}$.

Zeile 1: 2. Schritt: Sinus und Kosinus umformen

Da $\sin^2 z+\cos^2 z=1$, gilt $\sqrt{1-\sin^2 z}\cdot\cos z=\sqrt{\cos^2 z}\cdot\cos z=\cos z\cdot\cos z=\cos^2 z$.

Zeile 2: 1. Schritt: Partielle Integration

Allgemein sagt die Regel zur partiellen Integration:

$$\int_a^b u'(z)\cdot v(z)\,\mathrm{d}z = [u(z)\cdot v(z)]_a^b - \int_a^b u(z)\cdot v'(z)\,\mathrm{d}z$$

In unserem Fall gilt:

$$\begin{aligned} u'(z)&=\cos(z) &&\Longrightarrow && u(z)=\sin z\\ v(z)&=\cos(z) &&\Longrightarrow && v'(z)=-\sin z \end{aligned}$$

Einsetzen in die Formel liefert:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 z\,\mathrm{d}z &= [\sin(z)\cdot\cos(z)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(z)\cdot(-\sin(z))\,\mathrm{d}z\\
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 z\,\mathrm{d}z &= [\sin(z)\cdot\cos(z)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(z)\,\mathrm{d}z && \mid \sin^2(z)=1-\cos^2(z)\\
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 z\,\mathrm{d}z &= [\sin(z)\cdot\cos(z)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2(z))\,\mathrm{d}z\\
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 z\,\mathrm{d}z &= [\sin(z)\cdot\cos(z)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}z - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(z))\,\mathrm{d}z && \mid +\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(z)\\
2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 z\,\mathrm{d}z &= [\sin(z)\cdot\cos(z)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

4.2 ► Wert des Integrals berechnen

Aus der Umformung aus 4.1 folgt:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z\,\mathrm{d}z$$

Dabei ist $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left([\sin(z)\cdot\cos(z)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}z \right)$

Damit ergibt sich:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left([\sin(z)\cdot\cos(z)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}z \right)$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left([\sin(z)\cdot\cos(z)]_0^{\frac{\pi}{2}} + [z]_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\left[\sin(\tfrac{\pi}{2})\cdot\cos(\tfrac{\pi}{2})\right] - [\sin(0)\cdot\cos(0)] + \left[\tfrac{\pi}{2}\right] - 0 \right)$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\left[\sin(\tfrac{\pi}{2})\cdot 0\right] - [0\cdot\cos(0)] + \left[\tfrac{\pi}{2}\right] \right)$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

▶ Geometrische Interpretation

Betrachte zunächst den Term $k(x) = \sqrt{1-x^2}$. Der Graph zu diesem Funktionsterm ist ein **Halbkreis** mit Radius 1.

Mit dem Wert des Integrals $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ wird der Inhalt der Fläche berechnet, die vom Graphen von k und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird. Genauer gesagt liegt diese Fläche im 1. Quadranten des Koordinatensystems und hat die Form eines **Viertelkreises**.

Somit wird mit $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ der Flächeninhalt eines Viertelkreises mit Radius 1 berechnet.