A - Hilfsmittelfreier Teil

Analysis - Niveau 1

1.1 $f_2 : x \mapsto x^4 - 2x^2$

Da alle Exponenten der Funktion f_2 gerade sind, gilt $f_2(x) = f_2(-x)$.

Somit ist f_2 symmetrisch bezüglich der y-Achse.

1.2 $f_k'(x) = 4x^3 + 3 \cdot (2-k) \cdot x^2 - 2 \cdot k \cdot x$

$f_k''(x) = 12x^2 + 6 \cdot (2-k) \cdot x - 2k$

Notwendige Bedingung für Wendestellen anwenden

$$\begin{array}{rcll} f_k''(1) &=& 0 & \\ 12 \cdot 1^2 + 6 \cdot (2-k) \cdot 1 - 2k &=& 0 & \\ 12 + 12 - 6k - 2k &=& 0 & \mid +8k \\ 24 &=& 8k & \mid :8 \\ 3 &=& k & \end{array}$$

Da vorausgesetzt ist, dass an der Stelle $x = 1$ für einen Wert von k eine Wendestelle vorliegt, ist das Nachweisen der hinreichenden Bedingung für eine Wendestelle nicht mehr nötig.

Für $k = 3$ besitzt f_k an der Stelle $x = 1$ eine Wendestelle.

Stochastik - Niveau 1

2.1 Für den Fall, dass Paula mindestens zwei rote Gummibärchen isst, gibt es 4 Möglichkeiten:

r : rotes Gummibärchen

g : grünes Gummibärchen

$$P(rrg) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

$$P(rgr) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

$$P(grr) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

$$P(rrr) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

Somit ergibt sich für das Ereignis folgende Wahrscheinlichkeit:

$$4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

2.2 Ereignis 1: Orangenes Gummibärchen wird zuerst gezogen

$$P(E1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n-1}$$

Ereignis 2: Orangenes Gummibärchen wird als zweites gezogen

$$P(E2) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$$

Anzahl n der Gummibärchen bestimmen:

$$\begin{array}{rcll}
0,2 &=& P(E1)+P(E2) & \\
0,2 &=& \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n-1} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} & \\
0,2 &=& \frac{1}{n} + \frac{1}{n} & \\
0,2 &=& \frac{2}{n} & \quad \mid \cdot n \quad \mid :0,2 \\
n &=& 10 &
\end{array}$$

Es befinden sich somit 10 Gummibärchen im Behälter.

Lineare Algebra / Analytische Geometrie - Niveau 1

3.1 **1. Schritt: Einen Normalenvektor von E bestimmen**

Ein Normalenvektor von E ist gegeben durch $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Punkt aus E ermitteln

Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ liegt in der Ebene E.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Schritt: M in E einsetzen

$$\begin{aligned} E: 6 \cdot x_1 + 8 \cdot x_3 &= c \\ 6 \cdot 4 + 8 \cdot 7 &= c \\ 80 &= c \end{aligned}$$

Eine Gleichung für E ist somit gegeben durch:

$E: 6x_1 + 8x_3 = 80$

3.2
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{PQ} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Koordinaten von R sind somit gegeben durch $(-2 \mid 2 \mid -1)$.

Analysis - Niveau 2

4 Gleichung einer quadratischen Funktion:

$g(x) = ax^2 + bx + c$

Aus dem Schnittpunkt mit der Gerade y folgt, dass die Gerade ebenfalls durch den Punkt $(0 \mid 1)$ verläuft.

$$\begin{aligned} g(0) &= 1 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= 1 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Der Schnittwinkel von 90° weist auf Orthogonalität hin. Für den Punkt $(0 \mid 1)$ gilt also:

$$g'(0) = -\frac{1}{m_y} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$$

Für die Ableitung gilt:

$$g'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$$

Somit gilt:

$$\begin{array}{rcl} g'(0) & = & -4 \\ 2 \cdot a \cdot 0 + b & = & -4 \\ b & = & -4 \end{array}$$

Extrempunkt bestimmen:

Notwendige Bedingung für einen Extrempunkt anwenden:

$$\begin{array}{rcll} g'(x) & = & 0 & \\ 2 \cdot a \cdot x - 4 & = & 0 & \quad \mid +4 \\ 2 \cdot a \cdot x & = & 4 & \quad \mid :2a \\ x & = & \frac{2}{a} & \end{array}$$

Da bereits vorausgesetzt ist, dass ein Extrempunkt existiert, ist das Prüfen der hinreichenden Bedingung hier nicht mehr nötig.

$$\begin{array}{rcll} g\left(\frac{2}{a}\right) & = & \frac{2}{a} & \\ a \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{2}{a}\right) + 1 & = & \frac{2}{a} & \\ a \cdot \frac{4}{a^2} - \frac{8}{a} + 1 & = & \frac{2}{a} & \\ -\frac{4}{a} + 1 & = & \frac{2}{a} & \quad \mid \cdot a \\ -4 + a & = & 2 & \quad \mid +4 \\ a & = & 6 & \end{array}$$

Somit folgt: $g(x) = 6x^2 - 4x + 1$