A2 - Analysis

Aufgaben PLUS Tipps PLUS Lösungen PLUS

1. ▶ **Parameter bestimmen, damit Graphen bestimmte Eigenschaften aufweisen**

Zum Lösen dieser Aufgabe hast du zwei Funktionen gegeben, die den Bogen des Stadions beschreiben:

- $p(x) = a\cdot(x-x_1)\cdot(x+x_1)$
- $c(x) = A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot x\right)$

Der Abstand zwischen beiden Nullstellen beträgt 340. Der Scheitelpunkt liegt bei $y = 103$.
Nun wird die Kurve so verschoben, dass der Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt.
Damit kannst du aus $p(x)$ die Nullstellen x_1 ableiten.
Berechne im **1. Schritt** den Parameter a durch Einsetzen des Scheitelpunkts in $p(x)$.
Eine allgemeine Form der Kosinusfunktion lautet:

$$\boxed{f(x) = A\cdot\cos(\frac{2\pi}{T}(x-c))+d}$$

- A: Amplitude
- T: Periodenlänge
- c: Verschiebung auf der x-Achse
- d: Verschiebung auf der y-Achse

Vergleiche im **2. Schritt** die gegebene Kosinusfunktion mit der allgemeinen Funktion, um die Parameter A und T aus $c(x)$ abzulesen.

▶ **1. Schritt: x_1 und a bestimmen**

Die Werte x_1 im Polynom stellen die Nullstellen von p dar. Durch die Verschiebung entlang der x-Achse, damit S auf der y-Achse liegt, ergeben sich so die Nullstellen $x_1 = \pm170$.
Weiterhin ist bekannt, dass der Scheitelpunkt, also der Hochpunkt der Parabel, an der Stelle $x = 0$ liegt.
Daraus folgt:

$$\begin{aligned} p(0) =&\; a\cdot(0-x_1)(0+x_1) \\ 103 =&\; a\cdot(0-170)(0+170) \\ 103 =&\; a\cdot(-170^2) \\ a \approx&\; -0,003564 \end{aligned}$$

Der Graph, der die Kurve mit den gegebenen Eigenschaften beschreibt, lässt sich durch $p(x) = -0,003564\cdot(x-170)(x+170)$ beschreiben.

▶ **2. Schritt: A und T bestimmen**

Die Amplitude A stellt den **größten Abstand der Funktion von der x-Achse** dar. Die Amplitude stellt somit den y-Wert des Scheitelpunktes dar: $A = 103$
Aus dem Aufgabentext kannst du entnehmen, dass die Bogenspannweite 340 m beträgt. Dies ist gleichbedeutend mit der halben Periodenlänge, da sich die Cosinusfunktion nach einer Periode wiederholt.
D.h. $T = 2\cdot340 = 680$
Der Graph, der die Kurve mit den gegebenen Eigenschaften beschreibt, lässt sich durch $c(x) = 103\cdot(\frac{2\pi}{680}\cdot x)$ beschreiben.

2.

2.1 ▶ **Symmetrie beweisen und Bedeutung von C erläutern**

Hier hast du eine Funktion $k(x)$ gegeben, die du auf eine y-Achsensymmetrie untersuchen sollst.
Eine Funktion ist dann symmetrisch zur y-Achse, wenn sie durch Spiegelung an der y-Achse wieder auf sich selbst abgebildet wird:

$$\boxed{f(x) = f(-x)}$$

Beweise im **1. Schritt** die Symmetrie, indem du negative x-Werte in $k(x)$ einsetzt und prüfst, ob der Funktionsterm identisch mit $k(x)$ ist.

Anschließend wird im **2. Schritt** die Bedeutung von C erläutert. Überlege dir dazu, was für einen Effekt er auf den Graphen k hat.

▶ 1. Schritt: Symmetrie beweisen

$$\begin{aligned} k(-x) &\overset{!}{=} k(x) \\ k(-x) &= C - \frac{1}{2\lambda} \cdot \left(\mathrm{e}^{\lambda\cdot(-x)} + \mathrm{e}^{-\lambda\cdot(-x)}\right) \\ k(-x) &= C - \frac{1}{2\lambda} \cdot \left(\mathrm{e}^{-\lambda\cdot x} + \mathrm{e}^{\lambda\cdot x}\right) \quad = \quad k(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$k(-x)$ hat somit den gleichen Funktionsterm wie $k(x)$. $k(x)$ ist also symmetrisch zur y-Achse.

▶ 2. Schritt: Bedeutung von C erläutern

Eine Veränderung von C bewirkt eine Veränderung des y-Wertes. C verschiebt den Graphen somit entlang der y-Achse.

2.2 ▶ **Koordinaten des Hochpunktes von k bestimmen**

Bei dieser Aufgabe sollst du die Koordinaten des Hochpunkts von k bestimmen. Dazu ist hier die notwendige Bedingung ausreichend:

$$\boxed{k'(x_E) = 0}$$

Bilde dazu im **1. Schritt** die erste Ableitung von $k(x)$ mit der **Kettenregel** und setze anschließend den Funktionsterm der ersten Ableitung gleich Null, um die Maximalstelle zu berechnen. Zum Schluss kannst du mit dieser Extremstelle durch Einsetzen in $k(x)$ die Koordinaten des Hochpunktes bestimmen.

▶ 1. Schritt: Ableitung bilden

Kettenregel:

$$\boxed{f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$$

In Worten: Äußere Ableitung mal innere Ableitung.
In dieser Aufgabe musst du die Kettenregel bei $\mathrm{e}^{\lambda x}$ und $\mathrm{e}^{-\lambda x}$ anwenden. (λx) stellt die innere Funktion dar. (e^{x}) stellt die Äußere dar.

$$\begin{aligned} k(x) &= C - \frac{1}{2\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - \frac{1}{2\lambda} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ k'(x) &= -\frac{1}{2\lambda} \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - \frac{1}{2\lambda} \cdot (-\lambda) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) \end{aligned}$$

▶ 2. Schritt: Gleichsetzen

Setze nun den Funktionsterm der ersten Ableitung von $k(x)$ gleich Null und löse nach x auf:

$$\begin{aligned} k'(x) &= 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$k'(x) = 0$, wenn $\left(\mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = 0$. Dies ist bei $x = 0$ der Fall, da $\mathrm{e}^{0} = 1$.

$(\mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{0}) = 0$

Daraus folgt: $x = 0$ ist Nullstelle der Ableitung und damit liegt an der Stelle $x = 0$ ein Extrempunkt von k, da an einem Extrempunkt die Steigung Null beträgt.

▶ 3. Schritt: Koordinaten des Hochpunktes berechnen

Setze nun $x = 0$ in $k(x)$ ein, um die y-Koordinate des Hochpunktes zu berechnen:

$$\begin{aligned} k(0) &= C - \frac{1}{2\lambda} \cdot \left(\mathrm{e}^{\lambda \cdot 0} + \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 0}\right) \\ &= C - \frac{1}{2\lambda} \cdot 2 \\ &= C - \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Für den Hochpunkt ergeben sich somit die Koordinaten $H\left(0 \mid C - \frac{1}{\lambda}\right)$.

3.

3.1 ▶ **Herleitungsschritte (1) bis (3) erklären**

Bei dieser Aufgabe sollst du mit Hilfe der Kurve in Material 2 die Herleitungsschritte aus Material 3 bis zum 3. Schritt erklären.

- x_0 ist die x-Koordinate von P
- Δx beschreibt die Differenz der x-Werte von P und Q
- $x_0 + \Delta x$ stellt somit die x-Koordinate von Q dar.

Du hast zwei Beispiele gegeben, die dir die Zusammenhänge zwischen der Kurve und der Rechnung näher bringen.

Die Bogenlänge $\overset{\frown}{AQ}$ wird mit $\overset{\frown}{AQ} = L_a(x_0 + \Delta x)$ berechnet, d.h. L_a wird mit der x-Koordinate multipliziert.

Das Gleiche gilt für $\overset{\frown}{AP}$: $\overset{\frown}{AP} = L_a(x_0)$

▶ **1. Schritt:**

Die Länge des Kurvenbogens $\overset{\frown}{PQ}$ ist die Differenz von $\overset{\frown}{AQ}$ und $\overset{\frown}{AP}$.

$\overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{AQ} - \overset{\frown}{AP} = L_a(x_0 + \Delta x) - L_a(x_0)$

▶ **2. Schritt:**

Hier wird die Länge der Strecke von P zu Q berechnet und mit $\overset{\frown}{PQ}$ verglichen.

Die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ lässt sich mit dem **Satz des Pythagoras** berechnen:

$\boxed{\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \overline{PQ}^2}$

Daraus folgt:

$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Diese Strecke stellt eine Sekante dar und kann maximal so groß wie der Bogen $\overset{\frown}{PQ}$ sein.

Somit gilt:

$\left|\overline{PQ}\right| \leq \overset{\frown}{PQ}$

▶ **3. Schritt:**

Im 3. Schritt wird auf beiden Seiten der Gleichung mit Δx dividiert.

Auf der rechten Seite ergibt sich dadurch der **Differenzenquotient** der Funktion L_a.

3.2 ▶ **Behauptung beweisen**

Du hast eine Gleichung gegeben und sollst diese auf Gültigkeit untersuchen.

$k'(x)$ kannst du dem Aufgabenteil 2.2 entnehmen: $k'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$

Weiterhin hast du als Hinweis gegeben, dass du die Ableitungen beider Seiten der Gleichung bestimmen sollst.

$$\int \sqrt{1+(k'(x))^2}\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} \frac{1}{2\lambda}\cdot\left(\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}-\mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}\right)+C \quad \text{Einsetzen von } k'(x)$$

$$\int \sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{\lambda x}-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\right)^2}\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} \frac{1}{2\lambda}\cdot\left(\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}-\mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}\right)+C$$

Die Ableitung des Integrals einer Funktion ist die Funktion selbst.
Bilde nun auf beiden Seiten die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{\lambda x}-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\right)^2} &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}+\mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}\right) && \text{2. binomische Formel anwenden}\\
\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\mathrm{e}^{2\lambda x}-2\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{-\lambda x}+\mathrm{e}^{-2\lambda x}\right)\right)} &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}+\mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}\right) && \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{-\lambda x}=\mathrm{e}^0=1\\
\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\mathrm{e}^{2\lambda x}-2+\mathrm{e}^{-2\lambda x}\right)\right)} &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}+\mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}\right) && \text{Quadrieren}\\
1+\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\mathrm{e}^{2\lambda x}-2+\mathrm{e}^{-2\lambda x}\right)\right) &\stackrel{!}{=} \frac{1}{4}\cdot\left(\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}+\mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}\right)^2 && \text{2. binomische Formel anwenden}\\
1+\frac{1}{4}\cdot\left(\mathrm{e}^{2\lambda x}-2+\mathrm{e}^{-2\lambda x}\right) &\stackrel{!}{=} \frac{1}{4}\cdot\left(\mathrm{e}^{2\lambda\cdot x}+2+\mathrm{e}^{-2\lambda\cdot x}\right)\\
1+\tfrac{1}{4}\cdot\mathrm{e}^{2\lambda x}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\cdot\mathrm{e}^{-2\lambda x} &\stackrel{!}{=} \tfrac{1}{4}\cdot\mathrm{e}^{2\lambda x}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\cdot\mathrm{e}^{-2\lambda x} && |+\tfrac{1}{2}\\
1+\tfrac{1}{4}\cdot\mathrm{e}^{2\lambda x}+\tfrac{1}{4}\cdot\mathrm{e}^{-2\lambda x} &= \tfrac{1}{4}\cdot\mathrm{e}^{2\lambda x}+\tfrac{1}{4}\cdot\mathrm{e}^{-2\lambda x}+1
\end{aligned}$$

Da auf beiden Seiten der Gleichung nun derselbe Ausdruck steht, hast du so gezeigt, dass die Gleichung, mit der du begonnen hast, stimmt.

3.3 ▶ **Länge der zurückgelegten Strecke bestimmen**

Zum Lösen dieser Aufgabe kannst du folgende Beziehungen/Angaben dem Aufgabentext bzw. den vorhergehenden Aufgabenteilen entnehmen:

- $L_a'(x)=\sqrt{1+(f'(x))^2}$
- $\int \sqrt{1+(k'(x))^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\lambda}\cdot\left(\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}-\mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}\right)+C$
- $\lambda=0,00645$
- Die halbe Bogenlänge verläuft von $x_1=0$ bis $x_2=170$

Um die Länge L_a des Bogens zu bestimmen, musst du zunächst $L_a'(x)$ **integrieren**. Dadurch kannst du mit Hilfe der Beziehung aus Aufgabe 3.2 die Intervallgrenzen in die Funktion einsetzen, um schließlich L_a zu berechnen.
Integrieren von $L_a'(x)$ liefert:

$$L_a(x)=\int \sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

Nutze nun die Beziehung aus 3.2:
Die Konstante C wurde in der Aufgabenstellung aus formellen Gründen erwähnt, würde später aber wegfallen und kann somit gleich vernachlässigt werden.

$$\begin{aligned}
L_a(x) &= \int \sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\lambda}\cdot\left(\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}-\mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}\right)
\end{aligned}$$

Setze nun λ sowie die Intervallgrenzen $x_1=0$ und $x_2=170$ in die Gleichung ein:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2\cdot 0,00645}\cdot\left(\mathrm{e}^{0,00645\cdot x}-\mathrm{e}^{-0,00645\cdot x}\right)\right]_0^{170}\\
&=\frac{1}{2\cdot 0,00645}\cdot\left(\mathrm{e}^{0,00645\cdot 170}-\mathrm{e}^{-0,00645\cdot 170}\right)-\frac{1}{2\cdot 0,00645}\cdot\left(\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^0\right)\\
&\approx 206-0\\
&=206
\end{aligned}$$

Die Länge der Strecke beträgt etwa 206 m.