A1 - Analysis

1.1 ► **Geburtenraten zum Zeitpunkt der Auswilderung bestimmen**

$$\begin{array}{rcl} f_a(0) & = & \dfrac{a}{1+4\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot 0}} \\ & = & \frac{a}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_b(0) & = & \dfrac{10}{1+b\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot 0}} \\ & = & \frac{10}{1+b} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_c(0) & = & 10\cdot 0\cdot \mathrm{e}^{-c\cdot 0}+10 \\ & = & 10 \end{array}$$

Zum Zeitpunkt der Auswilderung beträgt die Geburtenrate im Modell A $\frac{a}{5}$ Tiere pro Jahr, im Modell B $\frac{10}{1+b}$ Tiere pro Jahr und im Modell C 10 Tiere pro Jahr.

► **Langfristige Entwicklung der Geburtenraten bestimmen**

Für $t\to\infty$ gilt für den Nenner des Bruchs des Funktionsterms im Modell A:

$$1+4\cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\overbrace{\to -\infty}^{-0{,}5\cdot t}}}_{\to 0}\to 1$$

Insgesamt gilt daher $f_a(t)\to a$ für $t\to\infty$.

Für Modell B gilt ebenfalls $1+b\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t}\to 1$ und damit $f_b(t)\to 10$ für $t\to\infty$.

Für Modell C gilt:

$$10\cdot \underbrace{t}_{\to\infty}\cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-c\cdot t}}_{\to 0}+10\to 10$$

Insgesamt entwickelt sich die Geburtenrate nach Modell A langfristig zu a Tiere pro Jahr, nach Modell B zu 10 Tiere pro Jahr und nach Modell C zu 10 Tiere pro Jahr.

► **Abbildungen den Modellen zuordnen**

Da im Modell C die Geburtenrate zum Zeitpunkt der Auswilderung unabhängig vom Parameterwert 10 Tiere pro Jahr beträgt, gehört Abbildung 1 zu Modell C.

Die langfristige Entwicklung ist bei Modell B und C unabhängig vom Parameter. Die zweite Abbildung, in dem sich alle Grpahen langfristig dem gleichen Wert annähern ist Abbildung 3. Diese gehört also zu Modell B.

Nach dem Ausschlussverfahren gehört Abbildung 2 also zu Modell A.

© Copyright 2018 – www.SchulLV.de

1.2 ▶ **Einfluss der Parameter beschreiben**

Modell A

In der vorherigen Teilaufgabe hast du bereits bestimmt, dass für Modell A folgendes gilt:
Die Geburtenrate zum Zeitpunkt der Auswilderung beträgt $\frac{a}{5}$ Tiere pro Jahr. Mit einem größeren Wert von a steigt also auch die Geburtenrate zum Zeitpunkt der Auswilderung.
Die langfristige Entwicklung der Geburtenrate ist $a.$ Diese wird also direkt durch den Parameterwert a angegeben, sodass die langfristige Geburtenrate steigt, wenn der Parameterwert von a steigt.

Modell B

In der vorherigen Teilaufgabe hast du bereits bestimmt, dass für Modell B folgendes gilt:
Die Geburtenrate zum Zeitpunkt der Auswilderung beträgt $\frac{10}{1+b}$. Mit steigenden Werten von b sinkt also die Geburtenrate zum Zeitpunkt der Auswilderung im Modell B.
Langfristig entwickelt sich die Geburtenrate in diesem Modell gegen den Wert $10.$ Dieser ist unabhängig vom Parameter $b.$ Der Wert b hat also keinen Einfluss auf die langfristige Entwicklung der Geburtenrate.

Modell C

In der vorherigen Teilaufgabe hast du bereits bestimmt, dass für Modell C folgendes gilt:
Die Geburtenrate zum Zeitpunkt der Auswilderung beträgt 10 und ist daher unabhängig vom Parameterwert $c.$
Langfristig entwickelt sich die Geburtenrate in diesem Modell gegen dern Wert $10.$ Dieser ist unabhängig vom Parameter $c.$ Der Wert c hat also keinen Einfluss auf die langfristige Entwicklung der Geburtenrate.

2.1 ▶ **Wendepunkte berechnen**

Die erste Ableitungsfunktion ist in der Aufgabenstellung schon gegeben. Für das notwendige Kriterium für Wendestellen benötigst du noch die zweite Ableitungsfunktion. Verwende die Produktregel.

$$\begin{array}{rcl} f_c'(t) &=& \mathrm{e}^{-c\cdot t}\cdot(10-10\cdot c\cdot t) \\ f_c''(t) &=& -c\cdot\mathrm{e}^{-c\cdot t}\cdot(10-10\cdot c\cdot t)+\mathrm{e}^{-c\cdot t}\cdot(-10\cdot c) \\ &=& \mathrm{e}^{-c\cdot t}\cdot\left(-10c+10\cdot c^2\cdot t-10\cdot c\right) \\ &=& \mathrm{e}^{-c\cdot t}\cdot\left(-20c+10\cdot c^2\cdot t\right) \end{array}$$

Anwenden des notwendigen Kriteriums liefert:

$$\begin{array}{rcll} f_c''(t) &=& 0 & \\ \mathrm{e}^{-c\cdot t}\cdot\left(-20c+10\cdot c^2\cdot t\right) &=& 0 & \mid :\mathrm{e}^{-c\cdot t}\neq 0 \\ -20c+10\cdot c^2\cdot t &=& 0 & \mid +20c \\ 10\cdot c^2\cdot t &=& 20c & \mid :(10c^2)\neq 0 \\ t &=& \frac{2}{c} & \end{array}$$

Einsetzen in f_c liefert:

$$f_c\left(\frac{2}{c}\right)=10\cdot\frac{2}{c}\cdot\mathrm{e}^{-c\cdot\frac{2}{c}}+10=\frac{20}{c}\cdot\mathrm{e}^{-2}+10=\frac{20}{c\cdot\mathrm{e}^2}+10$$

© Copyright 2018 – www.SchulLV.de

Der Graph von f_c besitzt also einen Wendepunkt, dieser hat die Koordinaten $W\left(\frac{2}{c} \mid \frac{20}{c \cdot \mathrm{e}^2}+10\right)$.

▶ **Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang beschreiben**

Die Wendestelle von f_c ist eine Extremstelle der ersten Ableitungsfunktion f_c', die die Änderungsrate von f_c beschreibt.
Die Wendestelle gibt also den Zeitpunkt an, zu dem die Geburtenrate am stärksten abnimmt oder am stärksten zunimmt. Anhand von Abbildung 1 lässt sich erkennen, dass die Geburtenrate an dieser Stelle abnimmt. Die Wendestelle entspricht also dem Zeitpunkt im Modell C, zu dem die Geburtenrate am stärksten abnimmt.

2.2 ▶ **Funktionsgleichung herleiten**

Forme zunächst die t-Koordinate des Wendepunkts nach c um:

$$\begin{array}{rcll} t &=& \frac{2}{c} & \mid \cdot c \\ t\cdot c &=& 2 & \mid :t \\ c &=& \frac{2}{t} & \end{array}$$

Einsetzen in die y-Koordinate liefert:

$$\begin{array}{rcll} y_W &=& \frac{20}{c\cdot \mathrm{e}^2}+10 & \mid c=\frac{2}{t} \\ &=& \frac{20}{\frac{2}{t}\cdot \mathrm{e}^2}+10 & \\ &=& \frac{10}{\mathrm{e}^2}x+10 & \end{array}$$

Alle Wendepunkte der Schar f_c liegen also auf dem Graphen mit der Gleichung $w(t)=\frac{10}{\mathrm{e}^2}x+10.$ Diese Gleichung beschreibt eine Gerade. Alle Wendepunkte der Schar f_c liegen also auf einer Geraden.

3.1 ▶ **Stammfunktion herleiten**

Verwende die Methode der partiellen Integration:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int f_1(t)\;\mathrm{d}t &=& \displaystyle\int 10\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-t}+10\;\mathrm{d}t \\ &=& \displaystyle\int 10\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-t}\;\mathrm{d}t+\int 10\;\mathrm{d}t \\ &=& \left[10\cdot t\cdot(-1)\cdot \mathrm{e}^{-t}\right]-\displaystyle\int 10\cdot(-1)\cdot \mathrm{e}^{-t}\;\mathrm{d}t+[10t] \\ &=& \left[-10\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-t}+10t\right]+10\cdot\displaystyle\int \mathrm{e}^{-t}\;\mathrm{d}t \\ &=& \left[-10\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-t}+10t-10\cdot \mathrm{e}^{-t}\right] \end{array}$$

Eine Stammfunktion von f_1 ist also F_1 mit
$F_1(t)=-10\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-t}-10\cdot \mathrm{e}^{-t}+10t.$

© Copyright 2018 – www.SchulLV.de

SchulLV

3.2 ▶ **Anzahl der Geburten berechnen**

Da f_1 die Anzahl der Geburten pro Jahr beschreibt, kannst du die Anzahl der Geburten in einem bestimmten Zeitraum mithilfe eines Integrals über f_1 berechnen:

$$\begin{aligned}\int_0^{10} f_1(t)\,\mathrm{d}t &= F_1(10) - F_1(0) \\ &= -10\cdot 10\cdot \mathrm{e}^{-10} - 10\cdot \mathrm{e}^{-10} + 10\cdot 10 - \left(-10\cdot 0\cdot \mathrm{e}^{-0} - 10\cdot \mathrm{e}^{-0} + 10\cdot 0\right) \\ &= -110\cdot \mathrm{e}^{-10} + 110 \\ &\approx 110\end{aligned}$$

In den ersten zehn Jahren nach der Auswilderung finden ca. 110 Geburten statt.

3.3 ▶ **Rechnung erläutern**

Im ersten Schritt wird eine Differenzenfunktion d mit $d(t) = f_1(t) - s(t)$ gebildet. Im zweiten Schritt wird die erste Ableitungsfunktion d' von d mithilfe der Produktregel gebildet und der Funktionsterm so weit wie möglich vereinfacht.
Im dritten Schritt wird das notwendige Kriterium für Extremstellen von d angewendet, indem $d'(t) = 0$ gesetzt wird. Diese Gleichung ergibt eine Lösung $t_1 \approx 1,4$.
Bei t_1 handelt es sich also um eine mögliche Extremstelle von d.
Im vierten Schritt wird diese mögliche Extremstelle von d in die zweite Ableitungsfunktion eingesetzt. Mit dem hinreichenden Kriterium ergibt sich wegen $d''(t_1) < 0$, dass d an der Stelle t_1 ein lokales Maximum annimmt.

▶ **Ansatz im Sachzusammenhang deuten**

Die Differenzenfunktion d im ersten Schritt wird gebildet als Differenz aus der Funktion für die Geburtenrate und der Funktion für die Sterberate. Ist diese positiv, werden mehr Tiere geboren als sterben und die Population wächst. Ist sie negativ, schrumpft die Population, da mehr Tiere sterben als geboren werden. d beschreibt also die Änderungsrate der Größe der betrachteten Population.
Der Wert t_1 gibt daher den Zeitpunkt an, zu dem die Population am stärksten wächst.

3.4 ▶ **Zeitpunkte berechnen**

Die Zeitpunkte, zu denen sich die Größe der Population nicht ändert, werden durch die Nullstellen der Funktion d aus der letzten Teilaufgabe beschrieben.

© Copyright 2018 – www.SchulLV.de

$$
\begin{aligned}
d(t) &= 0 \\
10t\cdot \mathrm{e}^{-t}+10-\left(10t\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot t}+0,1\cdot t+10\right) &= 0 \\
10t\cdot \mathrm{e}^{-t}+10-10t\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot t}-0,1\cdot t-10 &= 0 \\
10t\cdot \mathrm{e}^{-t}-10t\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot t}-0,1\cdot t &= 0 \\
t\cdot\left(10\cdot \mathrm{e}^{-t}-10\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot t}-0,1\right) &= 0 && \mid t_1=0 \\
10\cdot \mathrm{e}^{-t}-10\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot t}-0,1 &= 0 && \mid :(-10) \\
-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2\cdot t}+0,01 &= 0 \\
-\mathrm{e}^{-t}+\left(\mathrm{e}^{-t}\right)^2+0,01 &= 0 \\
\left(\mathrm{e}^{-t}\right)^2-\mathrm{e}^{-t}+0,01 &= 0 && \mid \text{Substitution: } z=\mathrm{e}^{-t} \\
z^2-z+0,01 &= 0 && \mid pq-\text{Formel} \\
z_{1/2} &= -\tfrac{-1}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{-1}{2}\right)^2-0,01} \\
z_{1/2} &= 0,5\pm\sqrt{0,24} && \mid pq-\text{Formel} \\
z_1 &= 0,5+\sqrt{0,24} \\
z_2 &= 0,5-\sqrt{0,24}
\end{aligned}
$$

Resubstitution liefert nun:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \mathrm{e}^{-t_2} \\
0,5+\sqrt{0,24} &= \mathrm{e}^{-t_2} && \mid \ln \\
\ln\left(0,5+\sqrt{0,24}\right) &= -t_2 && \mid \cdot(-1) \\
-\ln\left(0,5+\sqrt{0,24}\right) &= t_2 \\
0,01 &\approx t_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_2 &= \mathrm{e}^{-t_3} \\
0,5-\sqrt{0,24} &= \mathrm{e}^{-t_3} && \mid \ln \\
\ln\left(0,5-\sqrt{0,24}\right) &= -t_3 && \mid \cdot(-1) \\
-\ln\left(0,5-\sqrt{0,24}\right) &= t_3 \\
4,60 &\approx t_3
\end{aligned}
$$

Zum Zeitpunkt der Auswilderung, ca. $0,01$ Jahre danach und ca. $4,60$ Jahre nach der Auswilderung hat sich die Größe der Population gemäß der vorgenommenen Modellierung nicht verändert.

© Copyright 2018 – www.SchulLV.de