1.1 ▶ **Bedeutung der Variablen erläutern** (10BE)

Dem Unternehmen stehen als Ressourcen zum einen 33 t Düngemittel zur Verfügung, zum anderen noch 810 Arbeitsstunden. In der Tabelle ist angegeben, welche Menge des Düngemittels für einen ha benötigt werden und wie viel Zeit dies jeweils erfordert. Aus diesen Informationen erhalten die Variablen ihre Bedeutung:

x gibt die Größe der Fläche in ha an, auf der Sorte A angebaut wird; y die Größe der Fläche mit Sorte B und z die Größe der Fläche mit Sorte C.

▶ **Lösung des Gleichungssystems berechnen**

$$\begin{array}{lrcl l}
(1) & 0{,}6x + 0{,}4y + 0{,}5z & = & 33 & \mid \cdot(-5) \\
(2) & 9x + 12y + 15z & = & 810 & \mid :3 \\
\hline
(1)a & -3x - 2y - 2{,}5z & = & -165 & \\
(2)a & 3x + 4y + 5z & = & 270 & \mid \text{Rechne: } (1)+(2) \\
\hline
(1)a & -3x - 2y - 2{,}5z & = & -165 & \\
(2)b & 2y + 2{,}5z & = & 105 &
\end{array}$$

Dies ist ein **unterbestimmtes** Gleichungssystem. Wähle daher z.B. $z = k$.
Aus (2)b folgt: $2y = 105 - 2{,}5k$, also $y = 52{,}5 - 1{,}25k$.
Eingesetzt in (1)a liefert das:

$$\begin{aligned}
-3x - (105 - 2{,}5k) - 2{,}5k &= -165 \\
-3x &= 60 \qquad \mid :(-3) \\
x &= 20
\end{aligned}$$

Als Lösungsvektor erhältst du somit vorerst:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 52{,}5 - 1{,}25k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 52{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die drei Variablen x, y und z beschreiben die Größe der Anbaufläche in Hektar. Logischerweise können sie daher **keine negativen Werte** annehmen.
Für x besteht hier kein Problem. Für y und z hingegen muss k genauer bestimmt werden:

$$\begin{array}{lrl}
(2) & y = 52{,}5 - 1{,}25k \geq 0 & \Rightarrow k \leq 42 \\
(3) & z = k \geq 0 & \Rightarrow k \geq 0
\end{array}$$

Damit gilt für die vollständige Lösung des Gleichungssystems:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 52{,}5 - 1{,}25k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 52{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}25 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq k \leq 42.$$

1.2 ▶ **Anbaufläche in Hektar bestimmen**

Die Anbaufläche x von Sorte A steht mit 20 ha fest. Für die Anbaufläche y von Sorte B soll gelten: $y = 40$. Setze dies ein in die relevante Zeile des Lösungsvektors $y = 52{,}5 - 1{,}25k$:

$$\begin{aligned} y = 52{,}5 - 1{,}25k &= 40 && \mid -52{,}5 \\ -1{,}25k &= -12{,}5 && \mid :(-1{,}25) \\ k &= 10 \end{aligned}$$

Wenn 40 ha der Sorte B angebaut werden sollen, können 20 ha der Sorte A und 10 ha der Sorte C bearbeitet werden.

▶ Maximale und Minimale Gesamt-Anbaufläche bestimmen

Die Gesamtanbaufläche G setzt sich aus den einzelnen Anbauflächen der Sorten A, B und C zusammen:

$$G = x + y + z = 20 + 52{,}5 - 1{,}25k + k = 72{,}5 - 0{,}25k$$

Du erkennst leicht, dass dieser Wert für $k = 0$ sein Maximum und für $k = 42$ sein Minimum annimmt.

Die maximale Gesamt-Anbaufläche liegt demnach bei 72,5 ha; die minimale Gesamt-Anbaufläche bei 62 ha.

2.1 **▶ Spurgeraden bestimmen** (8BE)

Die Spurgeraden der Ebenen E_1 bzw. E_2 in der x-z-Ebene sind genau die **Schnittgeraden** der Ebenen E_1 bzw. E_2 mit der x-z-Ebene. Alle Punkte, die in dieser Ebene liegen, besitzen die y-Koordinate $y = 0$.

1. Schritt: Spurgerade von E_1

Mit $y = 0$ und $z = k$ besitzt die Ebenengleichung die Form

$$0{,}6x + 0{,}5k = 33 \qquad \Rightarrow x = 55 - \tfrac{5}{6}k$$

Damit folgt die Gleichung der Geraden:

$$g_1 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 55 - \frac{5}{6}k \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Spurgerade von E_2

Mit $y = 0$ und $z = k$ besitzt die Ebenengleichung die Form

$$9x + 15k = 810 \qquad \Rightarrow x = 90 - \tfrac{5}{3}k$$

Damit folgt die Gleichung der Geraden:

$$g_2 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 90 - \frac{5}{3}k \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

▶ Schnittpunkt S bestimmen

Du kannst den Schnittpunkt auf zwei Wegen berechnen.

▶▶ Lösungsweg A: Lage des Schnittpunktes aus Teil 1 herleiten

In Aufgabenteil 1 hast du das Gleichungssystem gelöst. Geometrisch interpretiert hast du also die **Schnittgerade** von E_1 und E_2 berechnet. Dabei war $x = 20$ fest. Der Schnittpunkt der Spurgeraden der beiden Ebenen liegt insbesondere auch auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen und hat auch die x-Koordinate $x = 20$.

Einsetzen in eine der beiden Geradengleichungen liefert $x = 55 - \frac{5}{6}k = 20 \;\Rightarrow k = 42$.

Der Schnittpunkt S der Spurgeraden hat die Koordinaten $S\,(20 \mid 0 \mid 42)$.

▶▶ Lösungsweg B: Geradengleichungen gleichsetzen

Du kannst den Schnittpunkt auch „klassisch" durch Gleichsetzen der Geradengleichungen bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 55 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} + \frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$-35 = -k \cdot \frac{5}{6}$$

$$k = 42$$

Einsetzen von $k = 42$ in eine der Gleichungen liefert die Koordinaten von $S\,(20 \mid 0 \mid 42)$.

▶ Koordinaten im Sachzusammenhang deuten

Die Variablen x, y, und z beschreiben die Größe der einzelnen Anbauflächen in ha. Die Koordinaten des Schnittpunktes sagen aus: Wird Sorte B **nicht** angebaut ($y = 0$) und die vorhandenen Ressourcen sollen vollständig ausgeschöpft werden, so können 20 ha der Sorte A und 42 ha der Sorte C bearbeitet werden.

2.2 **▶ Größe der Anbaufläche bestimmen**

Wenn du nur die Spurgerade von E_1 betrachtest, so lässt du die vorhandenen Arbeitsstunden außer Betracht, wie es in der Aufgabe verlangt ist. Betrachte die Gleichung der Spurgerade:

$$g_1 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 55 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie bereits in Teilaufgabe 1 machen die Werte von x und z nur dann Sinn, wenn sie **nicht negativ** sind. Betrachte daher die x- und die z-Koordinate genauer:

$$\begin{aligned} x = 55 - \tfrac{5}{6}k \geq 0 \qquad & \Rightarrow k \leq 66 \\ z = k \geq 0 \qquad & \Rightarrow k \geq 0 \end{aligned}$$

Setze den größten und den kleinsten Wert für k ein in die Geradengleichung von g_1:

Für $k = 0$: $x = 55$ und $z = 0$.
Für $k = 66$: $x = 0$ und $z = 66$.

Werden die Arbeitsstunden nicht berücksichtigt, so können von Sorte A höchstens 55 ha und von Sorte B höchstens 66 ha bearbeitet werden.

3.1 ▶ **Verfahren beschreiben** (12BE)

Die drei Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{d}$ und $\overrightarrow{p}$ sind linear unabhängig, wenn die Gleichung $u \cdot \overrightarrow{a} + v \cdot \overrightarrow{d} + w \cdot \overrightarrow{p}$ nur für $u = v = w$ erfüllt wird. Du kannst also diese Gleichung aufstellen und nach den Parametern u, v und w auflösen.
Anschaulich lässt sich diese Bedingung interpretieren als: Es ist nicht möglich, einen der drei Vektoren als Linearkombination der anderen beiden darzustellen.

▶ **Gleichung bestätigen**

Setze die Vektoren in die Gleichung ein und rechne nach:

$$\overrightarrow{p} = -10 \cdot \overrightarrow{d} + \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{a}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = -10 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p}$$

Damit ist die Gleichung bestätigt. Mit dieser Gleichung wurde auch die lineare Unabhängigkeit der drei Vektoren **widerlegt**: $\overrightarrow{p}$ lässt sich als Linearkombination von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{d}$ darstellen, die drei Vektoren sind also linear abhängig.

3.2 ▶ **Gleichung A erklären und Umformungen beschreiben**

Schritt A

Im Aufgabentext zu Aufgabenteil 3 wurde festgelegt, dass der Vektor $\overrightarrow{p}$ die benötigte Menge an Pflanzenschutzmittel für die drei Sorten angibt. Mit

$$\overrightarrow{p} \circ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6x + 12y + 15z$$

wird eine Gleichung aufgestellt, welche die notwendige Gesamtmenge an Pflanzenschutzmittel angibt, wenn jeweils x ha, y ha und z ha der drei Sorten A, B und C bearbeitet werden.

Schritt B

Im Schritt B wird nun die Gleichung $\overrightarrow{p} = -10 \cdot \overrightarrow{d} + \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{a}$ aus Aufgabenteil 3.1 angewandt und $\overrightarrow{p}$ entsprechend ersetzt.

Schritt C

Der Term (mit Skalarprodukt) wird nach dem Distributivgesetz umgeformt.

Schritt D

Es werden die Werte $\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{x} = 33$ und $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} = 810$ eingesetzt. Diese kannst du im allerersten Eingangstext dieser Aufgabe finden:
$\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{x}$ beschreibt die noch vorhandene Menge an Düngemittel, die sich auf 33 t beläuft.
$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x}$ beschreibt die noch offenen Arbeitsstunden von 810 h.

Das Ergebnis 750 gibt die **maximal benötigte Menge** an Pflanzenschutzmittel an: Wenn alle Ressourcen aufgebraucht werden (Düngemittel und Arbeitsstunden), so werden hierfür **insgesamt** 750 kg Pflanzenschutzmittel benötigt.