C – Lineare Algebra / Analytische Geometrie

1.1 Parametergleichung angeben

Eine mögliche Parametergleichung, die die Punkte A, B und D enthält, lautet:

$$\begin{aligned} E_1: \quad \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Koordinatengleichung bestimmen

Mit dem Kreuzprodukt zweier Richtungsvektoren der Ebene ergibt sich ein Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ von E_1 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0,5 - (-4) \cdot 5 \\ (-4) \cdot 1 - 2 \cdot 0,5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Einsetzen des gekürzten Normalenvektors sowie der Koordinaten eines Punktes, der in der Ebene liegt, liefert:

$$\begin{aligned} E_1: \quad 2x + 4y - z &= d \qquad \mid A(6 \mid 3 \mid 0) \\ 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 - 0 &= d \\ 24 &= d \end{aligned}$$

Eine Koordinatengleichung der Ebene E_1 ist somit gegeben durch:

$$E_1: \quad 2x + 4y - z = 24$$

1.2 **Punkt C nachweisen**

Punktprobe mit den Koordinaten von C ergibt:

$$\begin{array}{rcl} 2\cdot 2,5+4\cdot 6-5 &=& 24 \\ 24 &=& 24 \end{array}$$

Somit liegt der Punkt C in der Ebene E_1.

Rechteck zeigen

In einem Rechteck müssen die gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang sein und benachbarte Seiten orthogonal zueinander stehen.

Die Längen der Seiten ergeben sich zu:

$$\begin{array}{rcl} |\overrightarrow{AB}| &=& \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\ &=& \sqrt{(-4)^2+2^2+0^2} \\ &=& \sqrt{20} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} |\overrightarrow{BC}| &=& \left|\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \\ &=& \sqrt{(0,5)^2+1^2+5^2} \\ &=& \sqrt{26,25} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} |\overrightarrow{CD}| &=& \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\ &=& \sqrt{(4)^2+(-2)^2+0^2} \\ &=& \sqrt{20} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} |\overrightarrow{AD}| &=& \left|\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \\ &=& \sqrt{(0,5)^2+1^2+5^2} \\ &=& \sqrt{26,25} \end{array}$$

Es gilt somit:

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ und $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$

Zwei Vektoren sind orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt null ist:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} &= (-4 \cdot 0,5) + (2 \cdot 1) + (0 \cdot 5) \\ &= -2 + 2 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} &= (0,5 \cdot 4) + (1 \cdot (-2)) + (5 \cdot 0) \\ &= 2 - 2 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Somit sind die benachbarten Seiten jeweils orthogonal zueinander.

Der Punkt C bildet mit den gegebenen Punkten somit ein Rechteck $ABCD.$

2.1 **Vektor deuten**

Der Vektor $\overrightarrow{v}$ in Zeile (1) beschreibt das gekürzte Ergebnis des Kreuzprodukts der Vektoren $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$ und stellt somit einen Vektor dar, der senkrecht zu beiden Vektoren steht. Somit beschreibt der Vektor $\overrightarrow{v}$ genau den Richtungsvektor der Ebene, der die Richtung der Kante $\overline{CG}$ des rechteckigen oberen Teils der Kletterwand beschreibt.

Vorgehen beschreiben

In Zeile (2) wird die Länge des Vektors $\overrightarrow{CG}$ berechnet, um den Punkt G, den Eckpunkt des oberen Teils der Kletterwand, zu bestimmen.

Da der Flächeninhalt sowie die Seitenlänge $|\overrightarrow{CD}|$ bekannt ist, kann die Formel $A = |\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{CG}|$ nach $|\overrightarrow{CG}|$ umgestellt werden:

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CG}| &= \frac{A}{|\overrightarrow{CD}|} \\ &= \frac{25}{2 \cdot \sqrt{5}} \\ &= 2,5 \cdot \sqrt{5}\ [\mathrm{m}]\end{aligned}$$

Koordinaten berechnen

Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ normieren:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{v_{\text{norm}}} &= \frac{\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{v}\right|} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{14}} \\
&= \begin{pmatrix} 0,27 \\ 0,53 \\ 0,80 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Da der normierte Richtungsvektor eine Länge von $1\,\mathrm{LE}$ hat und die Richtung der Strecke $\overline{CG}$ angibt, folgt:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OC} + 2,5 \cdot \sqrt{5} \cdot \overrightarrow{v_{\text{norm}}} \\
&= \begin{pmatrix} 2,5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + 2,5 \cdot \sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} 0,27 \\ 0,53 \\ 0,80 \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} 4,0 \\ 9,0 \\ 9,5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die auf eine Nachkommastelle gerundeten Koordinaten von G ergeben sich somit zu $G(4 \mid 9 \mid 9,5)$.

2.2

Ein Normalenvektor der Ebene E_2 ist gegeben durch $\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Ein Richtungsvektor der Vertikalen ist beispielsweise $\overrightarrow{r_V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für den gesuchten Winkel gilt:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{\left|\overrightarrow{n_{E_2}} \circ \overrightarrow{r_V}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{E_2}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_V}\right|} \\
\sin(\alpha) &= \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} \\
\sin(\alpha) &= \frac{|3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + (-5) \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} \\
\sin(\alpha) &= \frac{5}{\sqrt{70}} \qquad \Big| \sin^{-1} \\
\alpha &\approx 36,7^\circ
\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen dem oberen Teil der Kletterwand und der Vertikalen beträgt somit $36,7^\circ$.

3.1 Die Höhe der Flugbahn wird durch die z-Koordinate der Parametergleichung beschrieben.

Für diese gilt:

$z_h = 6 + t \cdot 0 + t^2 \cdot 0 = 6$

Somit ist die Höhe unabhängig vom Parameter t und ändert sich folglich nicht.

3.2 **Zeile (1) erläutern**

In Zeile (1) wird der senkrechte Abstand $d(t)$ eines Punktes P, der auf der Flugbahn h liegt, von der Ebene E_2, die den oberen Teil der Kletterwand beschreibt, berechnet.

Für den Vektor $\overrightarrow{p}$ wird hierfür der Ortsvektor eines allgemeinen Punktes auf h und für $\overrightarrow{a}$ der Ortsvektor $\overrightarrow{OD}$ eines Punktes der Ebene E_2 eingesetzt.

Durch den Faktor $\frac{1}{\sqrt{70}}$ wird der Normalenvektor der Ebene E_2 normiert, sodass seine Länge genau 1 beträgt.

Zeile (2) erläutern

In Zeile (2) wird die Bedingung für den minimalen Abstand aus der Aufgabenstellung aufgestellt.

Es wird gefordert, dass der Abstand $d(t)$ mindestens 4 Meter betragen muss, sodass die Drohne auf ihrer Flugbahn stets mindestens 4 Meter von der Kletterwand entfernt bleibt.

Ungleichung begründen

Da der quadratische Term $12t^2$ positiv ist, hat die Funktion $d(t)$ die Form einer nach oben geöffneten Parabel und laut der Aussage in Zeile (4) keinen Schnittpunkt mit der Geraden $d(t) = 4.$ Folglich muss sie vollständig oberhalb der Geraden $d(t) = 4$ verlaufen und es gilt $d(t) > 4$ für alle Werte von $t.$

Die Ungleichung für den 2. Fall ist somit für alle Werte von t erfüllt.

Sachverhalt deuten

Die Bedingung, dass der Abstand zur Kletterwand mindestens 4 Meter betragen muss, wird jederzeit eingehalten. Die Drohne kommt während ihres gesamten Fluges nie zu nah an die Kletterwand heran.