1. **► Bestimmen der Möglichkeiten** (7BE)

Es gibt drei unterschiedliche Möglichkeiten, wie die Würfel fallen können:

- Alle drei Würfel zeigen die gleiche Zahl. Dafür gibt es 6 Möglichkeiten.
- 2 Würfel zeigen die gleiche Zahl, einer zeigt eine andere Zahl. Dafür gibt es $6 \cdot 1 \cdot 5$ Möglichkeiten, denn es gibt 6 Möglichkeiten für eine Augenzahl die doppelt da liegt, und 5 Möglichkeiten für die andere Augenzahl. Da die Reihenfolge keine Rolle spielt, sind das alle Möglichkeiten. Sonst müsste man noch zwischen den Reihenfolgen (m, n, n), (n, m, n) und (n, n, m) unterscheiden.
- Alle Würfel zeigen unterschiedliche Zahlen. Das entspricht dem Modell „Ziehen von 3 aus 6 ohne Zurücklegen ohne Beachten der Reihenfolge“. Dafür gibt es die Formel $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$

Insgesamt gibt es also $6 + 30 + 20 = 56$ Möglichkeiten.

2. **► Bestimmen der Wahrscheinlichkeit für keine Sechs** (12BE)

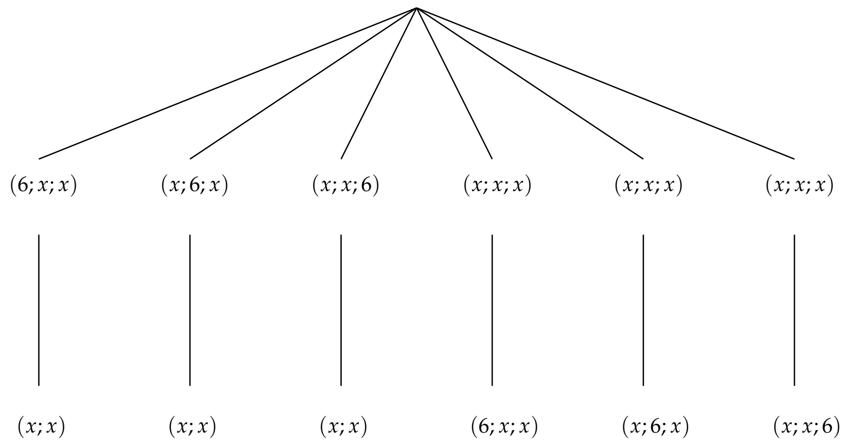
Die Wahrscheinlichkeit, dass beim ersten Wurf keine 6 auftritt ist $\left(\frac{5}{6}\right)^3$. Beim zweiten Wurf bleibt die Wahrscheinlichkeit gleich, ist also erneut $\left(\frac{5}{6}\right)^3$. Somit ergibt sich insgesamt für die Wahrscheinlichkeit, dass keine 6 auftritt:
$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{15625}{46656} \approx 0,3349 = 33,49\%$

► Bestimmen der Wahrscheinlichkeit für genau eine Sechs

Die Wahrscheinlichkeit besteht aus zwei Teilwahrscheinlichkeiten:

1. Im ersten Wurf tritt genau eine 6 auf, im zweiten Wurf keine.
2. Im ersten Wurf tritt keine 6 auf, im zweiten jedoch eine.

Man muss darauf achten, dass im ersten Fall im zweiten Wurf nur noch mit zwei Würfeln weiter gewürfelt wird, denn der Würfel mit der 6 wird zur Seite gelegt.
Man kann nun ein Baumdiagramm erstellen und damit künstlich eine Reihenfolge einführen, anhand derer deutlich wird, dass jeweils drei Äste zu dem gesuchten Ereignis gehören. In dem Baumdiagramm gilt:
6: Es wird genau eine 6 gewürfelt
x: Es wird keine 6 gewürfelt



Die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine Sechs gewürfelt wird, beträgt also:

$$\begin{aligned} P(\text{Eine Sechs wird gewürfelt}) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 3\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5 \\ &= \frac{20625}{46656}\approx 0,4421 = 44,21\% \end{aligned}$$

Hierbei beschreibt der erste Summand die Wahrscheinlichkeit aller Zweige, dass genau eine 6 im ersten Wurf auftritt, und im zweiten Wurf keine 6. Wie man auf die Formel kommt, wird nun an dem Beispiel der linken Zweige erklärt.

Der erste linke Zweig mit $(6; x; x)$ ist hier schon ein eigenes dreistufiges Baumdiagramm in sich selbst, bei welchem die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sechs gewürfelt wird $\frac{1}{6}$ ist, die Wahrscheinlichkeit, dass eine andere Zahl x gewürfelt wird, jeweils $\frac{5}{6}$. Daraus ergeben sich die ersten drei Faktoren $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$ im ersten Summand. Dies wird mit 3 multipliziert da dies für alle 3 Zweige gilt. Für den zweiten Wurf überlegt man sich nach dem gleichen Prinzip, dass die Wahrscheinlichkeit für keine 6 genau $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$ sein muss, und multipliziert diese noch zum ersten Summanden hinzu.

Genauso interpretiert man die rechten 3 Zweige Diagramms, welche von dem zweiten Summanden beschrieben wird, welcher die Wahrscheinlichkeit, dass im ersten Wurf keine 6 auftritt, jedoch im zweiten Wurf schon, beschreibt.

3. ▶ **Bestimmen des Vielfachen v** (11BE)

Die Gewinnerwartung von Gerd beträgt

$E(G) = B - v\cdot B\cdot 0,3349$

Diese Formel gilt, da Gert den Einsatz B in jedem Fall erhält, aber mit einer Wahrscheinlichkeit von 33,49% (Ergebnis aus Aufgabe 1) das v-Fache wieder abgeben muss, falls der Spieler keine Sechs würfelt. Der Fall, dass der Spieler eine Sechs würfelt, interessiert hier nicht, denn dann kann Gert den Einsatz behalten. Die Gewinnerwartung soll nun für Gert positiv sein, das bedeutet man muss folgende Ungleichung lösen:

$$\begin{aligned} B - v\cdot B\cdot 0,3349 &> 0 && |: B; B>0 \\ 1 - v\cdot 0,3349 &> 0 && |-1 \\ -v\cdot 0,3349 &> -1 && |: (-0,3349) \\ v &< \frac{1}{0,3349}\approx 2,99 \end{aligned}$$

Das bedeutet v muss entweder 0, 1 oder 2 sein, damit Gert eine positive Gewinnerwartung hat. Allerdings macht 0 keinen Sinn, denn dann würde der Spieler nie einen Gewinn erhalten, sondern seinen Einsatz immer verlieren. Auch mit $v = 1$ würde Gert wohl keine Mitspieler finden, denn dann bekämen die Mitspieler immer nur genau das zurück, was sie vorher gesetzt hatten. Daher ist eine sinnvolle Lösung $v = 2$, das heißt, gewinnt der Spieler, so bekommt er seinen doppelten Einsatz ausgezahlt.

Die Gewinnerwartung für Gert ist somit, falls er $v = 2$ wählt:

$E(G) = B - 2 \cdot B \cdot 0,3349 = 0,3302B$

Das bedeutet, dass Gert eine Gewinnerwartung von etwa einem Drittel des jeweiligen Einsatzes B hat.