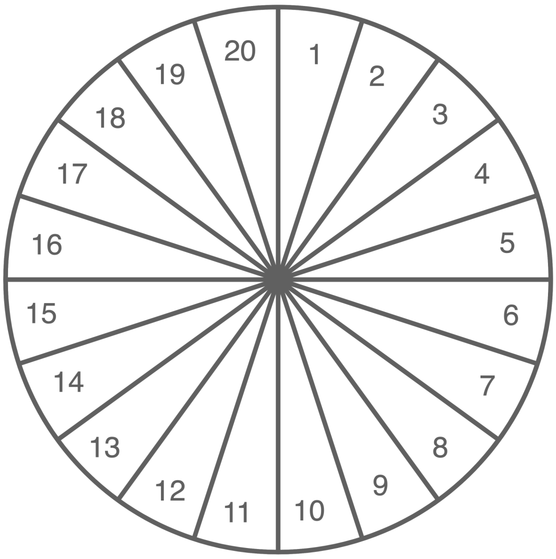
C - Stochastik

Bei einem Spiel werden kleine Pfeile von einer Position hinter einer Wurflinie aus auf eine kreisförmige Scheibe geworfen. Bleibt der Pfeil in einem Feld stecken, wird dem Spieler die dem Feld zugeordnete Punktzahl gutgeschrieben. Die Scheibe ist dabei in 20 gleich große Felder unterteilt, welche die Nummern eins bis 20 tragen (Material 1). Es wird angenommen, dass sich auch bei wiederholten Würfen die Trefferwahrscheinlichkeiten für alle beteiligten Spieler nicht verändern. Darüber hinaus gilt die Annahme, dass die beteiligten Spieler bei jedem Wurf die Scheibe treffen und der Pfeil in einem Feld stecken bleibt.
Für den Spieler L („Laie") gelte die Annahme, dass er unabhängig davon, auf welches Feld er zielt, alle Felder mit der gleichen Wahrscheinlichkeit trifft.



Material 1

Für den Spieler K („Könner") ist für den Fall, dass er auf Feld „20" zielt, ein Ausschnitt aus der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung in der folgenden Tabelle dargestellt.

Feld F	17	18	19	20
P(Feld F wird getroffen)	$\frac{8}{160}$	$\frac{9}{160}$	$\frac{20}{160}$	$\frac{31}{160}$

1.1 Gib sowohl für den Spieler L als auch für den Spieler K die Wahrscheinlichkeit an, dass er beim einmaligen Werfen das Feld „19" oder das Feld „20" trifft, wenn er auf Feld „20" zielt.

(3 BE)

1.2 Erkläre für den Spieler K den folgenden Term und seine einzelnen Bestandteile im Sachzusammenhang und gib das zugehörige Ergebnis an. Geh dabei davon aus, dass der Spieler K auf Feld „20" gezielt hat.

$$\sum_{k=0}^{2}\binom{22}{k}\cdot\left(\frac{31}{160}\right)^{k}\cdot\left(\frac{129}{160}\right)^{22-k}$$

(4 BE)

2.1 Berechne die Anzahl der Würfe, die der Spieler L mindestens benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$ mindestens einmal das Feld „20" zu treffen.

(4 BE)

2.2 Ein dritter Spieler zielt ebenfalls auf Feld „20". Dieser Spieler M („Meister") trifft das Feld „20" mit der Wahrscheinlichkeit p_M.
Erläutere die im folgenden dargestellten Zeilen und deute den Ansatz (I) und das Ergebnis (II) im Sachzusammenhang:

$$(\text{I})\quad 1-(1-p_M)^n\geq 0,99$$

$$(\text{II})\quad n=10\Rightarrow p_M\geq 0,37$$

$$n=5\Rightarrow p_M\geq 0,61$$

(5 BE)

3 Auf der Grundlage der bisherigen Leistungen kann man für den Spieler M von einer Treffsicherheit im Hinblick auf das Feld „20" von $p_M=0,7$ ausgehen.

3.1 Ermittle die 2σ-Umgebung um den Erwartungswert (Material 2) für den Spieler M, wenn die zugehörige Zufallsvariable die Anzahl der Treffer von Feld „20" bei 100 Würfen angibt. Beschreibe die Bedeutung dieser 2σ-Umgebung im Sachzusammenhang.

Material 2
Wenn μ der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariable X ist und σ die zugehörige Standardabweichung, dann gilt (falls $\sigma>3$) für die sogenannte 2σ-Umgebung um den Erwartungswert

$$[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]:P(\mu-2\sigma\leq X\leq\mu+2\sigma)\approx 95,5\%$$

(3 BE)

3.2 Einer der drei Spieler L,K,M wird zufällig ausgewählt. Der Spieler zielt auf das Feld „20" und wirft einen Pfeil. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei dem ausgewählten Spieler um den Spieler M handelt unter der Voraussetzung, dass das Feld „20" getroffen wird.

(3 BE)

3.3 Da der Spieler M mit seiner Treffsicherheit für das Feld „20" unzufrieden war, hat er intensive Trainingswochen hinter sich gebracht. Am Ende dieser Trainingswochen ist er davon überzeugt, sich verbessert zu haben. Um seinen Trainingserfolg zu überprüfen, wirft er 200 Pfeile auf die Scheibe.

3.3.1 Entwickle im Sachzusammenhang eine Entscheidungsregel, mit der der Spieler M anhand der Anzahl der Treffer des Felds „20“ auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ seinen Trainingserfolg überprüfen kann.

(5 BE)

3.3.2 Bestimme ausgehend von deiner Entscheidungsregel aus Aufgabe 3.3.1 die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art für den Fall, dass die tatsächliche Treffsicherheit des Spielers M für das Feld „20“ nun bei $78\,\%$ liegt.

(3 BE)

Binomialsummenfunktion

$$F_{n;p}(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \text{ für } n = 50$$

	A	B	C	D	E	F
1						
2	0,65	0,70	0,75	0,78		
3	125	0,2511	0,0138	0,0001	0,0000	
4	0,3001	0,0200	0,0001	0,0000		
5	0,3531	0,0284	0,0002	0,0000		
6	0,4093	0,0396	0,0004	0,0000		
7	0,4675	0,0542	0,0006	0,0000		
8	0,5266	0,0728	0,0010	0,0000		
9	0,5852	0,0960	0,0017	0,0000		
10	0,6421	0,1242	0,0028	0,0001		
11	0,6961	0,1579	0,0044	0,0001		
12	0,7463	0,1972	0,0068	0,0002		
13	0,7918	0,2421	0,0103	0,0004		
14	0,8323	0,2921	0,0154	0,0007		
15	0,8673	0,3467	0,0226	0,0012		
16	0,8971	0,4047	0,0323	0,0020		
17	0,9217	0,4652	0,0454	0,0032		
18	0,9416	0,5267	0,0625	0,0052		
19	0,9574	0,5877	0,0843	0,0081		
20	0,9695	0,6468	0,1115	0,0124		
21	0,9787	0,7028	0,1445	0,0185		
22	0,9854	0,7545	0,1838	0,0272		
23	0,9903	0,8012	0,2293	0,0391		
24	0,9936	0,8421	0,2808	0,0549		
25	0,9959	0,8772	0,3374	0,0756		
26	0,9975	0,9066	0,3983	0,1018		
27	0,9985	0,9305	0,4621	0,1343		
28	0,9991	0,9494	0,5271	0,1734		
29	0,9995	0,9641	0,5917	0,2193		
30	0,9997	0,9751	0,6542	0,2717		
31	0,9998	0,9831	0,7130	0,3301		
32	0,9999	0,9889	0,7668	0,3933		

	A	B	C	D	E	F
33	1,0000	0,9928	0,8148	0,4597		
34	1,0000	0,9955	0,8562	0,5277		
35	1,0000	0,9973	0,8911	0,5952		
36	1,0000	0,9984	0,9196	0,6604		
37	1,0000	0,9991	0,9422	0,7214		
38	1,0000	0,9995	0,9595	0,7768		
39	1,0000	0,9997	0,9724	0,8257		

	A	B	C	D	E	F
1						
2	0,65	0,70	0,75	0,78		
3	125	0,2511	0,0138	0,0001	0,0000	
4	0,3001	0,0200	0,0001	0,0000		
5	0,3531	0,0284	0,0002	0,0000		
6	0,4093	0,0396	0,0004	0,0000		
7	0,4675	0,0542	0,0006	0,0000		
8	0,5266	0,0728	0,0010	0,0000		
9	0,5852	0,0960	0,0017	0,0000		
10	0,6421	0,1242	0,0028	0,0001		
11	0,6961	0,1579	0,0044	0,0001		
12	0,7463	0,1972	0,0068	0,0002		
13	0,7918	0,2421	0,0103	0,0004		
14	0,8323	0,2921	0,0154	0,0007		
15	0,8673	0,3467	0,0226	0,0012		
16	0,8971	0,4047	0,0323	0,0020		
17	0,9217	0,4652	0,0454	0,0032		
18	0,9416	0,5267	0,0625	0,0052		
19	0,9574	0,5877	0,0843	0,0081		
20	0,9695	0,6468	0,1115	0,0124		
21	0,9787	0,7028	0,1445	0,0185		
22	0,9854	0,7545	0,1838	0,0272		
23	0,9903	0,8012	0,2293	0,0391		
24	0,9936	0,8421	0,2808	0,0549		
25	0,9959	0,8772	0,3374	0,0756		
26	0,9975	0,9066	0,3983	0,1018		
27	0,9985	0,9305	0,4621	0,1343		
28	0,9991	0,9494	0,5271	0,1734		
29	0,9995	0,9641	0,5917	0,2193		
30	0,9997	0,9751	0,6542	0,2717		
31	0,9998	0,9831	0,7130	0,3301		
32	0,9999	0,9889	0,7668	0,3933		
33	1,0000	0,9928	0,8148	0,4597		
34	1,0000	0,9955	0,8562	0,5277		
35	1,0000	0,9973	0,8911	0,5952		
36	1,0000	0,9984	0,9196	0,6604		
37	1,0000	0,9991	0,9422	0,7214		
38	1,0000	0,9995	0,9595	0,7768		
39	1,0000	0,9997	0,9724	0,8257		