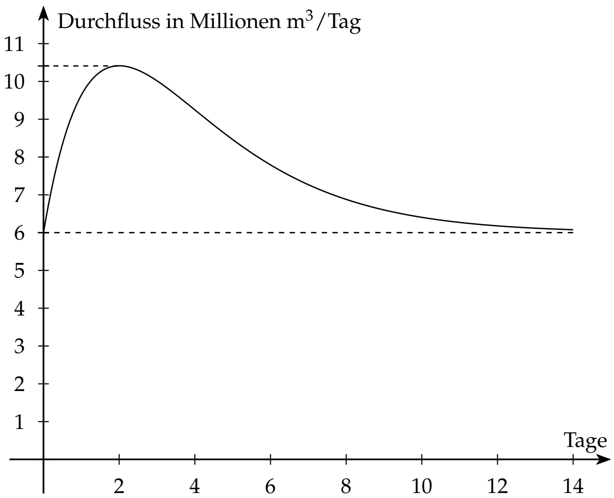
1. ▶ **Skizze eines möglichen Durchflussverlaufs** (6BE)

Die nebenstehende Skizze zeigt einen möglichen Durchflussverlauf. Der Normalstand beträgt 6 Millionen Kubikmeter pro Tag, d.h. der Graph verläuft durch den Punkt $N(0 \mid 6)$. Nach zwei Tagen wird ein Höchststand von 10,4 Millionen Kubikmeter pro Tag erreicht, d.h. der Graph besitzt den Hochpunkt $H(2 \mid 10{,}4)$. Danach strebt der Durchfluss wieder kontinuierlich auf 6 Millionen Kubikmeter täglich. Dies äußert sich im Graph als eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = 6$.



▶ **Beurteilung, inwieweit die Funktionstypen in Frage kommen**

Die Kosinusfunktion ist zur Modellierung ungeeignet:

- Zu Beginn und am Ende der 14 Tage ist der Wasserstand auf dem Normalwert. An diesen Stellen besitzt der Graph der Kosinusfunktion Tiefpunkte. Der Hochpunkt liegt symmetrisch zwischen den Tiefpunkten, also bei $x = 7$. Der höchste Wasserstand würde nicht nach 2, sondern erst nach 7 Tagen eintreten.
- Aufgrund der Periodizität der Kosinusfunktion würde sich das Hochwasser regelmäßig wiederholen, was ebenfalls nicht realistisch ist.

Die Exponentialfunktion ist besser geeignet, erfüllt aber auch nicht alle Kriterien:

- Der Graph der Exponentialfunktion besitzt eine waagerechte Asymptote $y = c$. Mit $c = 6$ wäre also die langsame Annäherung an den Normalwert für $x \to \infty$ gewährleistet.
- Da $\mathrm{e}^{-z} \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$ ist dann aber $f_2(0) \neq 0 + 6$. Zum Zeitpunkt $x = 0$ kann also nicht der Normalwert modelliert werden.

$$f(x) = b \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{b} \cdot x} + c; \quad x \in \mathbb{R}_0^+; \quad b, c, \lambda \in \mathbb{R}^+$$

2.1 ▶ **Bestimmung der Parameter b, c und λ** (10BE)

Die Parameter können mithilfe der Angaben aus dem Einführungstext berechnet werden. Da zu Beginn der Beobachtung ($x = 0$) der Pegel noch seinen Normalstand gehabt haben musste, muss $f(0) = 6$ gelten:

$f(0) = 6 \cdot 0 \cdot \mathrm{e}^0 + c = 6 \quad \Rightarrow \quad c = 6.$

Da nach zwei Tagen mit dem Höchststand außerdem ein Maximalwert erreicht wurde, muss $f'(2) = 0$ gelten. Für die erste Ableitung von f gilt dabei zunächst nach Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = b \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{b} x} + bx \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{b} x} \cdot \left(-\frac{\lambda}{b}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{b}} (b - \lambda x).$$

Wegen $f'(2) = 0$ muss also gelten:

$$f'(2) = \underbrace{e^{-\frac{\lambda}{b}\cdot 2}}_{\neq 0}(b-2\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b - 2\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2\lambda.$$

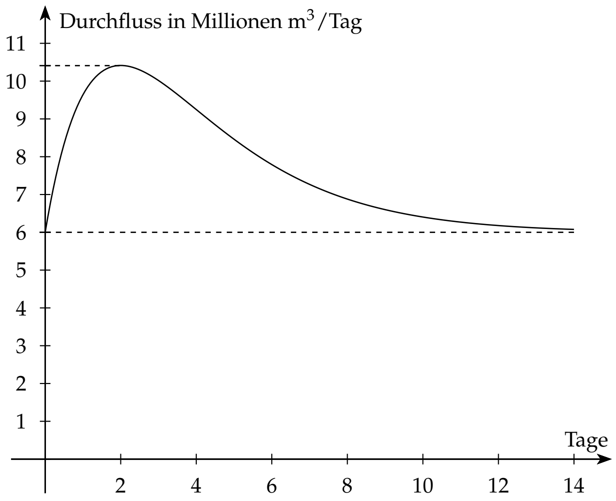
Also gilt $b = 2\lambda$ und damit $\frac{\lambda}{b} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Letztlich gilt an der Maximalstelle noch $f(2) = 10{,}4$, also:

$$f(2) = b \cdot 2 \cdot e^{-0{,}5\cdot 2} + 6 = 10{,}4 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{10{,}4-6}{2e^{-1}} \approx 6.$$

Die gesuchte Funktion ist also $f(x) \approx 6 \cdot x \cdot e^{-0{,}5x} + 6$.

▶ **Zeichnung des Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem**



2.2 ▶ **Nachweis, dass der Durchfluss bei $x = 4$ am stärksten abnimmt** (11BE)

Wenn der Durchfluss bei $x = 4$ am stärksten abnehmen soll, muss die erste Ableitung von f hier ein Minimum besitzen. Der Graph von f muss entsprechend einen **Wendepunkt** mit negativer Steigung aufweisen.

Für die ersten drei Ableitungen von f gilt hierbei nach Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = 6 \cdot e^{-0{,}5x} + 6x \cdot e^{-0{,}5x} \cdot (-0{,}5) = e^{-0{,}5x}(6-3x);$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -3 \cdot e^{-0{,}5x} + (6-3x) \cdot e^{-0{,}5x} \cdot (-0{,}5) \\ &= e^{-0{,}5x}(-3-3+1{,}5x) \\ &= e^{-0{,}5x}(1{,}5x-6); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 1{,}5 \cdot e^{-0{,}5x} + (1{,}5x-6) \cdot e^{-0{,}5x} \cdot (-0{,}5) \\ &= e^{-0{,}5x}(1{,}5-0{,}75x+3) \\ &= e^{-0{,}5x}(4{,}5-0{,}75x). \end{aligned}$$

Aus der notwendigen Bedingung $f''(x) = 0$ für Wendepunkte ergibt sich:

$$f''(x) = \underbrace{e^{-0{,}5x}}_{\neq 0}(1{,}5x-6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}5x - 6 = 0 \quad x = 4.$$

Die hinreichende Bedingung $f'''(4) = e^{-2}(4{,}5-3) = 1{,}5e^{-2} \neq 0$ zeigt, dass es sich hierbei tatsächlich um einen Wendepunkt handelt.

Alternativ: Betrachte den Term der zweiten Ableitung $f''(x) = e^{-0{,}5x} \cdot (1{,}5x-6)$. Da $e^{-0{,}5x}$ niemals Null wird und $(1{,}5x-6)$ ein **linearer** Term ist, kann f'' nur genau eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel besitzen. f' besitzt an dieser Stelle also tatsächlich eine Extremstelle.

Dass die Steigung hier auch ein negatives Extremum, sprich ein Minimum annimmt, lässt sich an
$f'(4) = e^{-2}(6 - 12) = -6e^{-2} < 0$
erkennen.

▶ Erklärung der dargestellten Rechnung

(1) Gesucht ist die Tangente an der Stelle $x = 4$ mit dem Ansatz $y = mx + b$. Sie hat die Steigung $m = f'(4)$.

(2) Die Tangente muss an der Stelle $x = 4$ denselben Funktionswert wie die Funktion haben, das heißt es gilt $f(4) = f'(4) \cdot 4 + b$ und damit $b = f(4) - f'(4) \cdot 4$. Eingesetzt in den Ansatz ergibt sich dann die dargestellte Zeile.

(3) Setzt man nun die exakten Werte $f(4)$ und $f'(4)$ ein, ergibt sich die dargestellte Tangentengleichung.

(4) Nun wird $y = 6$ gesetzt, also der Zeitpunkt gesucht, bei dem die Tangente den Wert $y = 6$ annimmt.

(5) Das Lösen der Gleichung ergibt die gesuchte Stelle $x = 8$.

▶ Erläuterung des Ergebnisses im Sachzusammenhang

Wird statt der Funktion an der Stelle $x = 4$ die Wendetangente betrachtet, so geht man im Modell davon aus, dass ab $x = 4$ nun der Durchfluss durch die Tangente an den Graphen von f beschrieben wird. Nach diesem Modell wird der normale Durchfluss von 6 Millionen Kubikmetern pro Tag schon nach 8 Tagen erreicht, da die Tangente an der Stelle $x = 8$ den Wert 6 annimmt (vgl. Schritt (5)).

Ginge das Hochwasser also weiterhin mit dieser Geschwindigkeit zurück, wäre es bereits nach 8 Tagen zu Ende.

3. **▶ Berechnung des zusätzlich durchgeflossenen Wassers** (8BE)

Der Gesamtdurchfluss im Zeitraum von den betrachteten 14 Tagen wird durch die Funktion f beschrieben. Der zusätzliche Durchfluss ergibt sich, indem wir von diesem Gesamtdurchfluss den normalen Durchfluss von 6 Millionen Kubikmetern pro Tag abziehen.

Das Volumen des Wassers ergibt sich entsprechend, indem der Durchfluss über die 14 Tage hinweg aufsummiert, also integriert wird:

$$V_{zus} = \int_0^{14} (f(x) - 6)\mathrm{d}x = \int_0^{14} 6x \cdot e^{-0,5x}\mathrm{d}x.$$

Um eine Stammfunktion zu finden, wird diese Funktion nun **partiell integriert** (Produktintegration). Wir setzen

$$\begin{array}{lll} u'(x) = e^{-0,5x} & \Rightarrow & u(x) = -2e^{-0,5x} \quad \text{und} \\ v'(x) = 6 & \Leftarrow & v(x) = 6x \end{array}$$

und erhalten damit:

$$\begin{aligned}\int \left(e^{-0,5x} \cdot 6x\right)\,dx &= -2e^{-0,5x} \cdot 6x - \int \left(-2e^{-0,5x} \cdot 6\right)\,dx \\ &= -12x \cdot e^{-0,5x} + \int \left(12e^{-0,5x}\right)\,dx \\ &= -12x \cdot e^{-0,5x} - 24e^{-0,5x} \\ &= e^{-0,5x}(-12x - 24).\end{aligned}$$

Für unser gesuchtes Wasservolumen gilt damit:

$$\begin{aligned}V_{zus} &= \int_0^{14} \left(6x \cdot e^{-0,5x}\right)\,dx = \left[e^{-0,5x}(-12x-24)\right]_0^{14} \\ &= e^{-7}(-168-24) - e^0(0-24) \\ &= -192e^{-7} + 24 \approx 23{,}8 \text{ Millionen Kubikmeter.}\end{aligned}$$

4. ▶ **Beschreibung der Durchflussbestimmung pro Tag** (5BE)

Zu jeder Stunde ist der gemessene Pegelstand gegeben, mithilfe dessen der Durchfluss zu dieser Stunde in m^3 pro **Sekunde** gegeben ist. Die Multiplikation mit 3600 ergibt dann den Gesamtdurchfluss in dieser **Stunde**. Summiert man die Durchflussmengen von diesen 24 Stunden auf, so erhält man den Durchfluss an diesem Standort am gesamten Tag.

▶ **Zusammenhang mit dem bestimmten Integral**

Da durch Interpolation zu allen beliebigen Zeitpunkten der momentane Durchfluss berechenbar ist, kann für den Durchfluss pro Sekunde ein funktionaler Zusammenhang angegeben werden. Die Aufsummierung entspricht dann gerade der Integration dieser Funktion über den Tageszeitraum.