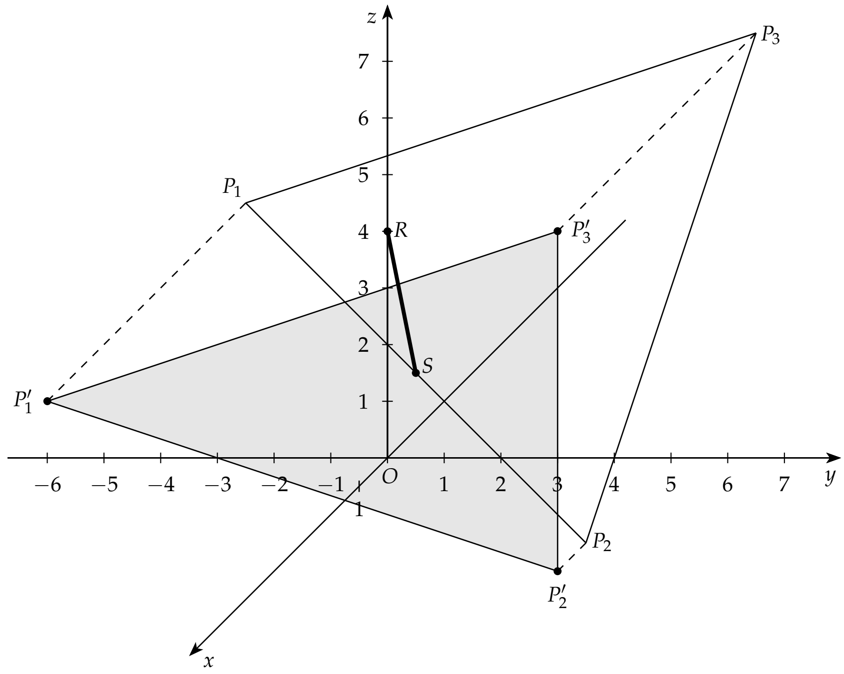
$P_1(5\,|\,0\,|\,7)$; $P_2(5\,|\,6\,|\,1)$; $P_3(-1\,|\,6\,|\,7)$

1. **▶ Zeichnung des Sonnensegels in ein geeignetes Koordinatensystem** (8BE)

Hinweis: In der nebenstehenden Zeichnung ist bereits der Schatten aus Teilaufgabe 3 sowie der Rollweg des Softballs aus Teilaufgabe 4 eingezeichnet.



▶ Ermittlung einer Gleichung der Sonnensegelebene

Die Sonnensegelebene E wird durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 eindeutig festgelegt. In Parameterform lautet ihre Gleichung also zunächst:

$$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + r\cdot\overrightarrow{P_1P_2} + s\cdot\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\6\\-6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix};\quad r,s\in\mathbb{R}.$$

Ein Normalenvektor von E ergibt sich über das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren von E, die zuvor noch jeweils mit 6 gekürzt werden können:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 0-(-1)\cdot 1\\(-1)\cdot(-1)-0\cdot 0\\0\cdot 1-1\cdot(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

In Normalenform lautet also die gesuchte Ebenengleichung:

$$E\colon \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix}\right] = 0.$$

Die Koordinatenform dieser Ebene lautet $E: x+y+z=12$.

2. **▶ Nachweis, dass das Sonnensegel ein gleichseitiges Dreieck ist** (2BE)

Das Sonnensegel stellt ein gleichseitiges Dreieck dar, wenn alle drei Seiten gleich lang sind. Die Seitenlängen lassen sich über die Beträge der zugehörigen Vektoren berechnen:

$$\overline{P_1P_2} = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \left|\begin{pmatrix}0\\6\\-6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+6^2+(-6)^2} = \sqrt{72} = 6\cdot\sqrt{2};$$

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$$\overline{P_1P_3} = |\overrightarrow{P_1P_3}| = \left|\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2+6^2+0^2} = \sqrt{72}6 \cdot \sqrt{2};$$

$$\overline{P_2P_3} = |\overrightarrow{P_2P_3}| = \left|\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2+0^2+6^2} = \sqrt{72}6 \cdot \sqrt{2}.$$

Somit sind alle drei Seiten des Segels gleich lang, das Segel hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks.

3. ▶ **Überprüfung, ob der Gegenstand im Schatten des Segels liegt** (9BE)

Die Sonnenstrahlen fallen senkrecht auf das Sonnensegel. Sie verlaufen also in Richtung des Normalenvektors $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ der Ebene E, in der das Sonnensegel enthalten ist.

Bestimme zunächst die Schattenpunkte $P_1{}'$, $P_2{}'$ und $P_3{}'$.

Die Sonnenstrahlen, die durch Punkt P_1 verlaufen, kannst du mit einer Geraden g_1 modellieren:

$$g_1 : \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + r \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}.$$

Der Schattenpunkt P_1' ist der Schnittpunkt der Geraden g_1 mit der x-y-Koordinatenebene und besitzt damit die z-Koordinate $z = 0$:

$7 + 1 \cdot r = 0 \;\Leftrightarrow\; 7 = -r \;\Leftrightarrow\; r = -7.$

Setze $r = -7$ ein in die Geradengleichung von g_1 und erhalte den Punkt $P_1'\,(-2 \mid -7 \mid 0)$.

Für die Punkte P_2 und P_3 erhältst du analog die Geradengleichungen

$$g_2 : \vec{x} = \overrightarrow{OP_2} + s \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}.$$

und

$$g_3 : \vec{x} = \overrightarrow{OP_3} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\6\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Der Schnittpunkt von g_2 mit der x-y-Koordinatenebene ergibt sich für $s = -1$, der von g_3 für $t = -7$. Damit folgen die Punkte $P_2'\,(4 \mid 5 \mid 0)$ und $P_3'\,(-8 \mid -1 \mid 0)$.

Der Schatten ist in der obigen Zeichnung eingezeichnet (nicht verlangt!).

Es soll nun untersucht werden, ob der Punkt $Q(-4\,|\,0\,|\,0)$ noch innerhalb des Schattens liegt. Q liegt auf der x-Achse. Wie du im Schaubild erkennen kannst, wird der Schatten in Richtung von Q durch die Strecke $P_2'P_3'$ begrenzt. Berechne den Schnittpunkt dieser Strecke mit der x-Achse:

$$g_{P_2'P_3'} : \vec{x} = \overrightarrow{OP_2'} + k \cdot \overrightarrow{P_2'P_3'} = \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}-12\\-6\\0\end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Der Schnittpunkt S_x dieser Geraden mit der x-Achse hat die Koordinaten $(x \mid 0 \mid 0)$. Einsetzen liefert:

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} k = \frac{5}{6} \\ 0 = 0 \end{array}$$

Setze $k = \frac{5}{6}$ ein in die Gleichung der Geraden $g_{P_2'P_3'}$ und erhalte die Koordinaten des Punktes $S_x\,(-6 \mid 0 \mid 0)$.

Bis zum Punkt $S_2\,(-6 \mid 0 \mid 0)$ liegt die x-Achse vollständig im Schatten. Also liegt auch der Punkt $Q\,(-4 \mid 0 \mid 0)$ innerhalb des Schattens des Segels.

4. ► **Nachweis des Richtungsvektors der Geraden g** (11BE)

Die Gerade g liegt laut Aufgabentext in der Ebene E aus Teilaufgabe 1 und der beschriebenen Ebene F und stellt damit die **Schnittgerade** dieser beiden Ebenen dar.

Für die Ebene E gilt zunächst in Koordinatenform:

$$E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right] = x + y + z - 12 = 0.$$

Die Ebene F enthält laut Aufgabentext den Normalenvektor von E. Da sie außerdem senkrecht auf der x-y-Ebene steht, ist der Richtungsvektor der z-Achse ein weiterer Richtungsvektor von F. Mit dem Auftreffpunkt $R(4 \mid 2 \mid 6)$ des Softballs als Aufpunkt gilt für F also in Parameterform:

$$F\colon \vec{x} = \overrightarrow{OR} + r \cdot \vec{n}_E + s \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir F in die Gleichung von E ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} E \cap F\colon (4 + r) + (2 + r) + (6 + r + s) - 12 &= 0 \\ 3r + s &= 0 \\ s &= -3r \end{aligned}$$

Setzen wir nun wiederum $s = -3r$ in die Parameterform von F ein, so ergibt sich die Gleichung der gesuchten Geraden g:

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist damit Richtungsvektor von g.

► **Berechnung des Punktes S, an dem der Ball das Segel verlässt**

Der Verlasspunkt S ist der Schnittpunkt der Bahngeraden g des Balls mit der Kante des Segels, an der der Ball das Segel voraussichtlich verlassen wird. Anhand der Zeichnung lässt sich erkennen, dass dies wohl die Kante $h = \overline{P_1P_2}$ sein wird. Für sie gilt in Parameterform:

$$h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Durch Gleichsetzen lässt sich diese Kante mit der Geraden g schneiden:

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$$g = h \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & 4 + r = 5 \\ \text{(II)} & 2 + r = 6t \\ \text{(III)} & 6 - 2r = 7 - 6t \end{array}$$

Aus (I) folgt $r = 1$. Einsetzen in (II) ergibt:

$$2 + 1 = 6t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}.$$

Wegen $6 - 2 \cdot 1 = 7 - 6 \cdot \frac{1}{2}$ erfüllen diese Parameter auch die dritte Gleichung, das LGS ist damit lösbar und die beiden Geraden haben einen Schnittpunkt. Setzen wir beispielsweise $r = 1$ in die Geradengleichung von g ein oder $t = 0{,}5$ in die Geradengleichung von h, so erhalten wir seinen Ortsvektor

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(5\,|\,3\,|\,4).$$

<u>*Bemerkung:*</u> Da der Punkt S für einen Wert t mit $0 \leq t \leq 1$ auf der Geraden h liegt, liegt er tatsächlich auch innerhalb der Strecke $\overline{P_1P_2}$.

Der Weg des Softballs auf dem Segel, also die Strecke $\overline{RS}$ ist bereits in der Zeichnung aus Teilaufgabe 1 eingezeichnet.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.