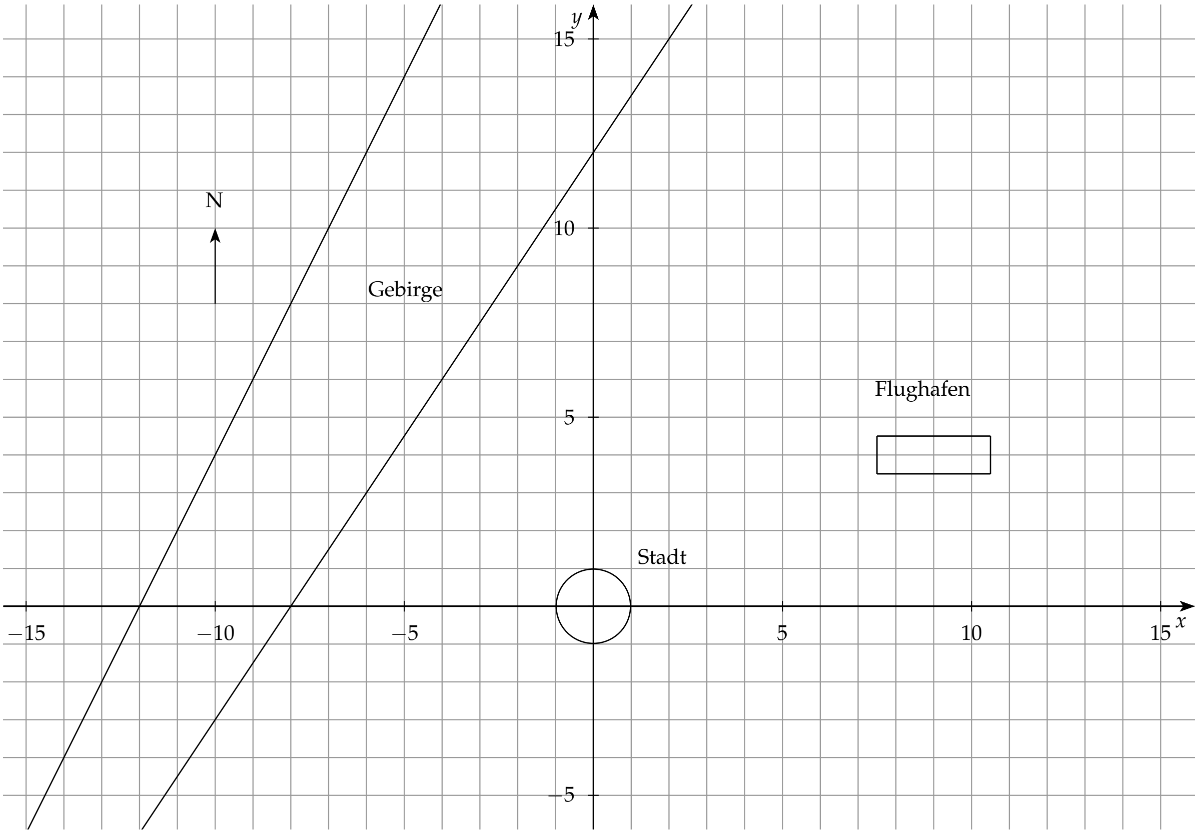
1.1 ► Einzeichnen des Koordinatensystems (11BE)

In dem angegebenen Material ist das Zentrum (also der Mittelpunkt des Kreises) nicht genau auf dem Ursprung. Das Koordinatensystem wird trotzdem so gezeichnet, dass alle angegebenen Punkte auf den entsprechenden Gitterlinien liegen.



1.2 ► Bestimmen des Gebirgsgrates

Um den Gebirgsgrat, also die Schnittgerade der beiden Ebenen zu bestimmen, muss man die E_1 erst noch bilden. Die drei Punkte P_2, P_3 und P_4 liegen in ihr, somit ergibt sich in Parameterdarstellung:

$$E_1: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP_2} + r\overrightarrow{P_2P_3} + s\overrightarrow{P_2P_4} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -6-(-8) \\ 3-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -8-(-8) \\ 3-0 \\ 4-0 \end{pmatrix}$$

$$E_1: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

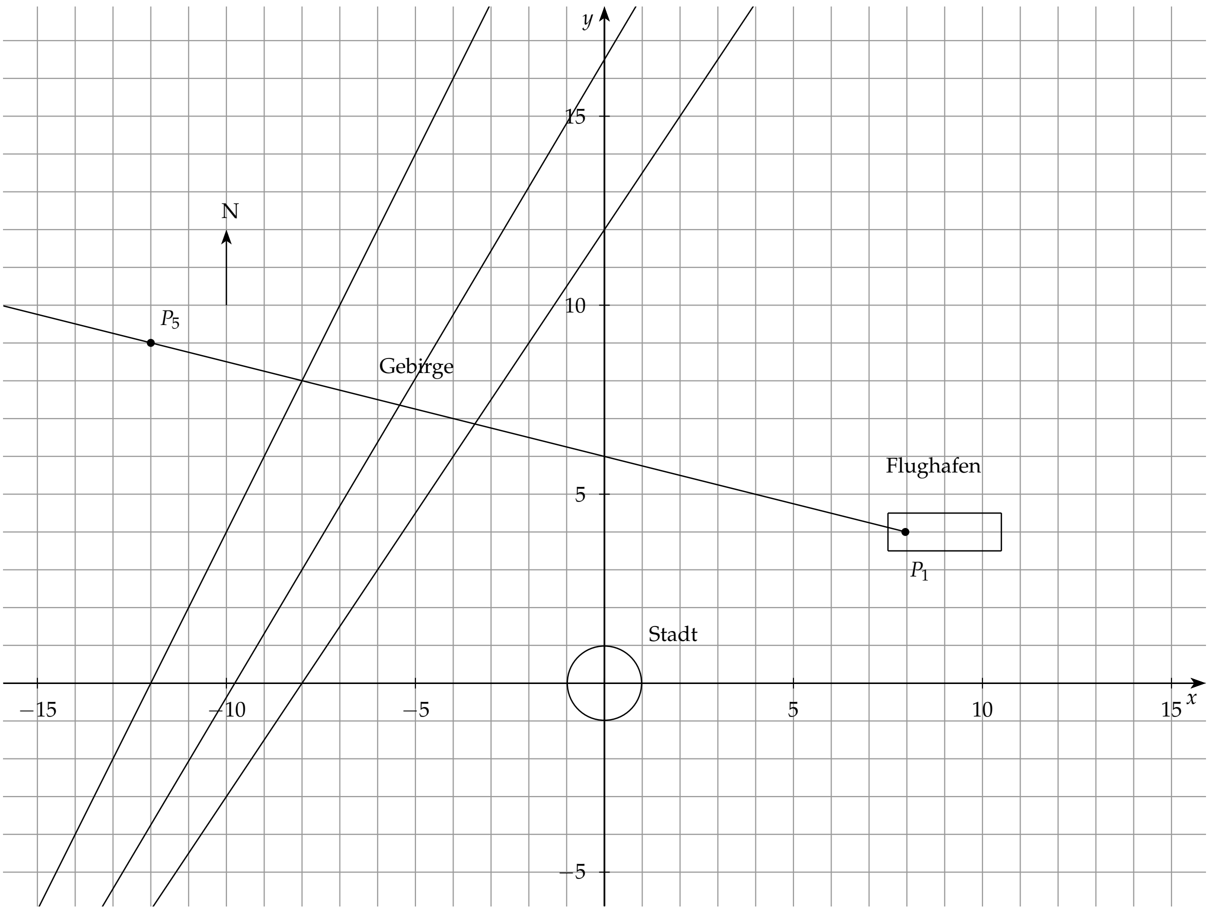
Die zweite Ebene E_2 ist bereits gegeben: $E_2 = 8x - 4y - 5z + 96 = 0$. Setze die Informationen von E_2 in die Ebene E_1 ein:

$$\begin{aligned} 8(-8+2r) - 4(3r+3s) - 5\cdot 4s + 96 &= 0 \\ -64 + 16r - 12r - 12s - 20s + 96 &= 0 \\ 32 + 4r - 32s &= 0 \\ r &= 8s - 8 \end{aligned}$$

Ersetzt man nun r in der Ebene E_1 so erhält man:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix} + (8s-8)\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}16s-16\\24s-24\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-24\\-24\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}16\\27\\4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Das Ergebnis besitzt nur noch einen Stützvektor und einen Richtungsvektor, und beschreibt somit eine Gerade. Für die Projektion muss die z-Koordinate null gesetzt werden. Man erhält damit den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}16\\27\\0\end{pmatrix}$ sodass man die Gerade in das Schaubild einzeichnen kann.



2.1 ▶ **Berechnen der Flugbahn** (11BE)

Es ist bekannt, dass das Ende der Startbahn im Punkt $P_1(8;4;0)$ liegt. Es wird angenommen, dass der Kurs des Flugzeugs geradlinig ist. Somit muss die Gerade berechnet werden, welche durch die Punkte P_1 und $P_5(-12;9;8)$.

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{P_1P_5} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12-8 \\ 9-4 \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Die Projektion des Richtungsvektors lautet $\begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Flugbahn ist in der Abbildung zu Teilaufgabe 1.2 eingezeichnet.

2.2 ► **Berechnen des Abstandes**

Es reicht nicht den Abstand der beiden Geraden zu berechnen, denn es ist noch nicht klar, ob das Flugzeug den Grat überhaupt überfliegt. Allerdings lässt sich anhand der Zeichnung erkennen, dass der Punkt, an dem das Flugzeug über den Gebirgsgrat fliegt, der Schnittpunkt der Projektionen ist. Berechne deswegen zuerst diesen Schnittpunkt:

Die Projektion des Gebirgsgrats wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$g_1: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -24 \\ -24 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 16 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Die Projektion der Flugbahn durch folgende Gleichung:

$$g_2: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Um den Schnittpunkt zu berechnen, setzt man die beiden Geraden gleich:

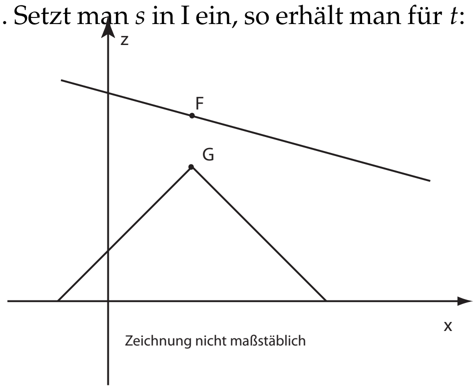
$$\begin{pmatrix} -24 \\ -24 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 16 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & -24+16s = 8-20t & \Rightarrow 16s+20t = 32 \\ \text{II} & -24+27s = 4+5t & \Rightarrow 27s-5t = 28 \end{array}$$

Addiere 4·II+I. Daraus ergibt sich $124s = 144 \Rightarrow s = \frac{36}{31}$. Setzt man s in I ein, so erhält man für t:

$$\begin{aligned} 16 \cdot \frac{36}{31} + 20t &= 32 \\ 20t &= \frac{416}{31} \\ t &= \frac{104}{155} \end{aligned}$$



Damit kann man nun den Schnittpunkt berechnen:

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -24 \\ -24 \end{pmatrix} + \frac{36}{31} \begin{pmatrix} 16 \\ 27 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -5,42 \\ 7,35 \end{pmatrix}$$

Um den Abstand berechnen zu können, muss man nun die Höhe der beiden Punkte auf dem Grat und auf der Flugbahn berechnen. Für den Punkt G auf dem Grat und den Punkt F auf der Flugbahn gilt:

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} -24 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{36}{31} \begin{pmatrix} 16 \\ 27 \\ 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -5,42 \\ 7,35 \\ 4,65 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{104}{155} \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -5,42 \\ 7,35 \\ 5,37 \end{pmatrix}$$

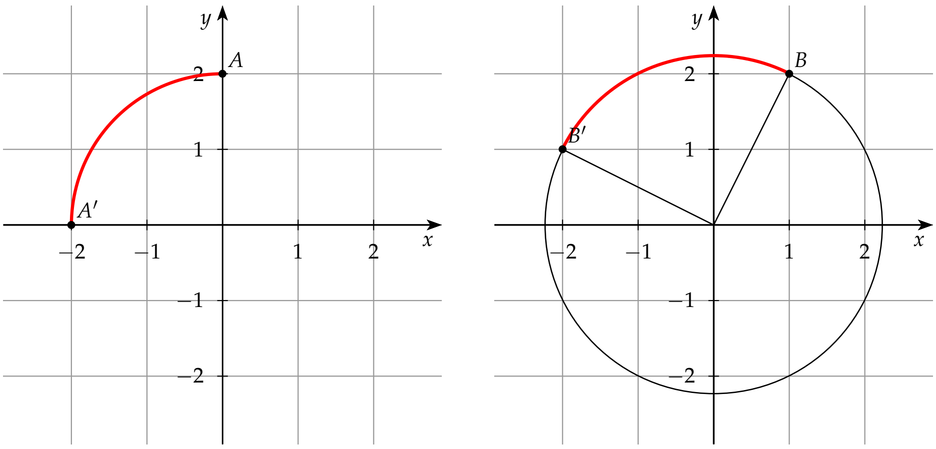
Subtrahiert man nun die z-Koordinaten, welche die Höhe über der x-y-Ebene angeben, so erhält man $5,37 - 4,65 = 0,72$ km. Dies zeigt, dass der Sicherheitsabstand nicht eingehalten wird.

3. ► **Aufstellen der Abbildungsmatrix** (8BE)

In der Aufgabe sind zwei verschiedene lineare Abbildungen beschrieben.

Drehen um $90°$ um die z-Achse:

Um die Drehung besser zu verstehen, machen wir sie uns an zwei Beispielen klar. Wir wollen uns zuerst den Punkt $A(0;2;0)$, und dann den Punkt $(1;2;0)$ anschauen. Die z-Koordinaten brauchen wir nicht zu betrachten, denn diese bleiben bei einer Drehung gleich. Betrachte also die beiden folgenden Bilder mit Ansicht auf die x-y-Ebene:



Hier sieht man nun, dass A auf den Punkt $A'(-2;0;0)$ und B auf den Punkt $B'(-2;1;0)$ projiziert wird. Das bedeutet, ein Punkt $P(x;y;z)$ muss auf den Punkt $P'(x';y';z') = P'(-y;x;z)$ projiziert werden. Dies lässt sich durch folgendes Gleichungssystem darstellen:

$x' = 0 \cdot x - 1 \cdot y + 0 \cdot z$

$y' = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z$

$z' = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z$

Daraus ergibt sich die Abbildungsmatrix $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Verkürzen der Längen um 20%:

Will man die Längen um 20% kürzen, so muss man die Koordinaten mit dem Faktor $0,8$ multiplizieren, denn dann bleibt nur noch 80% der Länge übrig. Man multipliziert also einen Punkt $Q(x;y;z)$ mit der Matrix $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$, denn dann wird Q auf $Q'(0,8x;0,8y;0,8z)$ abgebildet und es gilt:

$\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und

$\left|\overrightarrow{OQ'}\right| = \sqrt{(0,8x)^2+(0,8y)^2+(0,8)z^2} = 0,8\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 0,8\left|\overrightarrow{OQ}\right|$

Damit verkürzt sich die Länge $\left|\overrightarrow{OQ'}\right|$ genau auf $0,8\left|\overrightarrow{OQ}\right|$.

Führt man nun beide Abbildungen hintereinander aus, das heißt, multipliziert man die Matrizen, so ergibt sich:

$$M = S \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0,8 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

► **Berechnen des Punktes P_1'**

Um den Bildpunkt zu berechnen, muss man die Matrix M mit den Koordinaten des Punktes multiplizieren:

$$M \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -0,8 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,2 \\ 6,4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Ende der Startbahn wird also auf den Punkt $P_1'(-3,2; 6,4; 0)$ abgebildet.

Alternative Lösung

Da die z-Koordinate unberücksichtigt gelassen werden kann, kann man die Aufgabe durch die gleichen Rechnungen lösen, aber dabei jeweils die z-Koordinate weglassen. Es ergeben sich dann die Matrizen:

$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$

Für M ergibt sich damit: $M = \begin{pmatrix} 0 & -0,8 \\ 0,8 & 0 \end{pmatrix}$