B1 - Analysis

1.1 Zuflussrate zum Zeitpunkt $t=0$ in Abhängigkeit vom Parameter k:

$$\begin{aligned} f_k(0) &= 100(k^2\cdot 0+k)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{5}\cdot 0} \\ &= 100k \end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned} f_k'(t) &= 100k^2\cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t}+100(k^2t+k)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t}\cdot\left(-\frac{k}{5}\right) && \mid \text{ Produktregel} \\ &= 100\mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t}\left(k^2+(k^2t+k)\left(-\frac{k}{5}\right)\right) \\ &= 100\mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t}\left(\frac{4}{5}k^2-\frac{k^3}{5}t\right) \\ &= 20\mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t}(4k^2-k^3t) \\ &= 20\mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t}k^2(4-kt) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für Extrema: $f'(k)=0$

$$\begin{aligned} 20\mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t}k^2(4-kt) &= 0 && \mid :\ (20\mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t}k^2)\neq 0 \\ 4-kt &= 0 && \mid -4 \\ -kt &= -4 && \mid :\ (-k),\ \text{da } k\in\mathbb{R}^+ \\ t &= \frac{4}{k} \end{aligned}$$

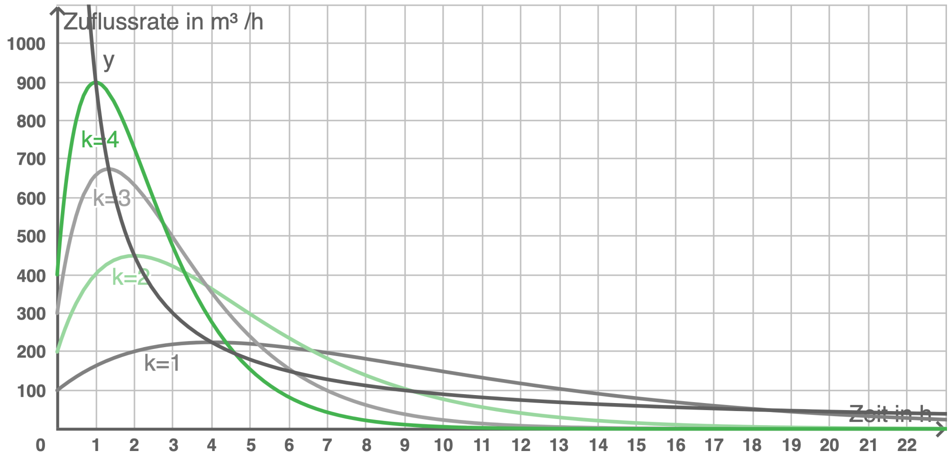
Hinreichende Bedingung für Extrema: $f'(k)=0$ und $f''(k)\neq 0$

$$\begin{aligned} f_k''\left(\frac{4}{k}\right) &= 4k^3\left(k\cdot\frac{4}{k}-9\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{5}\cdot\frac{4}{k}} \\ &= 4k^3(4-9)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{4}{5}} \\ &= -20k^3\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_k\left(\frac{4}{k}\right) &= 100\left(k^2\cdot\frac{4}{k}+k\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{5}\cdot\frac{4}{k}} \\ &= 500k\cdot \mathrm{e}^{-\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

Die Zuflussrate ist nach $t=\dfrac{4}{k}$ Stunden mit $500k\cdot \mathrm{e}^{-\frac{4}{5}}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$ maximal.

1.3 **Einfluss des Parameters k auf Zeitpunkt und Größe der maximalen Zuflussrate:**



Je größer k ist, desto früher ist der Zeitpunkt und desto höher ist die Größe der maximalen Zuflussrate.

Funktionsgleichung der Ortskurve der Hochpunkte
t nach k umformen:

$$t=\frac{4}{k} \Leftrightarrow k=\frac{4}{t}$$

k in $y=500k\cdot \mathrm{e}^{-\frac{4}{5}}$ einsetzen:

$$y \quad = \quad 500\cdot\frac{4}{t}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{4}{5}} \quad = \quad \frac{2000}{t}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{4}{5}} \text{ mit } t>0$$

1.4 **Wendepunkte der Graphen der Funktionsschar f_k:**
Notwendige Bedingung: $f_k''(x)=0$

$$\begin{aligned}
4k^3(kt-9)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{s}t} &= 0 && |:(\mathrm{e}^{-\frac{k}{s}t})\neq 0\\
4k^3(kt-9) &= 0 && |:4k^3\\
kt-9 &= 0 && |+9\\
kt &= 9 && |:t\\
t &= \frac{9}{k} && |k\in\mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_k\left(\frac{9}{k}\right) &= 100(k^2\cdot\frac{9}{k}+k)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{5}\cdot\frac{9}{k}}\\
&= 100(9k+k)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{9}{5}}\\
&= 1000k\cdot \mathrm{e}^{-\frac{9}{5}}
\end{aligned}$$

Die Wendepunkte der Graphen der Funktionsschar f_k liegen bei $W_k\left(\frac{9}{k} \mid 1000k\cdot \mathrm{e}^{-\frac{9}{5}}\right)$.

1.5.1 Mit dem Verfahren (1) wird der genaue Wert für das Fassungsvermögen ermittelt, da durch die Scharfunktionen f_k die Zuflussrate beschrieben wird (und $f_k(t) > 0$ für $t \geq 0$), gibt der mit Hilfe der Stammfunktion F_k von f_k als Grenzwert bestimmte Inhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der positiven t-Achse die Wassermenge an, die insgesamt zufließen kann.
Verfahren (2) ist eine Näherungslösung.

1.5.2
$$\begin{aligned}
F_k'(t) &= 100a\cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t} + 100(at+b)\mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t}(-\tfrac{k}{5})\\
&= 100a\cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t} + 100(at+b)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t}(-\tfrac{k}{5})\\
&= 100\mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t}(a+(at+b)(-\tfrac{k}{5}))\\
&= 100\mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t}(a+(at+b)(-\tfrac{k}{5}))\\
&= 100\mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t}(-\tfrac{ak}{5}t+a-\tfrac{bk}{5})
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich von $F_k'(t)$ und $f_k(t)$:

$$\begin{aligned}
k^2 &= -\frac{ak}{5} && \mid\cdot 5\\
5k^2 &= -ak && \mid : (-k)\\
a &= -5k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-5k-\frac{bk}{5} &= k && \mid +5k\\
-\frac{bk}{5} &= 6k && \mid\cdot(-5)\\
bk &= -30k && \mid : k\\
b &= -30
\end{aligned}$$

Eine mögliche Stammfunktion von f_k ist somit $F_k = 100(-5kt-30)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{5}t}$.

1.5.3 **Verfahren (1):**

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty}[F_k(u)-F_k(0)] &= \lim_{u\to\infty}[100(-5ku-30)\mathrm{e}^{-\frac{k}{5}u}-(-3000)]\\
&= 0+3000\\
&= 3000\ [\mathrm{m}^3]
\end{aligned}$$

Verfahren (2):

Schnittpunkt der Wendetangente mit der y-Achse:
$w_k(0) = 1900k \cdot \mathrm{e}^{-\frac{9}{5}}$

Schnittpunkt der Wendetangente mit der x-Achse, durch $w_k(t) = 0$:

$$\begin{array}{rcll}
100k \cdot (19-kt) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{9}{5}} & = & 0 & \mid : (\mathrm{e}^{-\frac{9}{5}} \neq 0) \\
100k \cdot (19-kt) & = & 0 & \mid : 100k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}^+ \\
19-kt & = & 0 & \mid -19 \\
-kt & = & -19 & \mid : (-k),\ k \in \mathbb{R}^+ \\
t & = & \dfrac{19}{k} &
\end{array}$$

Die Wendetangente bildet mit den beiden Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck. Der Flächeninhalt A lässt sich somit mit $h = 1900k \cdot \mathrm{e}^{-\frac{9}{5}}$ und $g = \dfrac{19}{k}$ berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot 1900k \cdot \mathrm{e}^{-\frac{9}{5}} \cdot \frac{19}{k} = 18050 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{9}{5}} \approx 2983,65\ [\mathrm{m}^3]$$

Mit $\dfrac{18050 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{9}{5}}}{3000} = 0,9945$ weicht die Näherungslösung um etwa $0,55\,\%$ ab.

2.1 **Volumen des Rückhaltebeckens:**

$$\begin{array}{rcl}
V & = & \pi \displaystyle\int_a^b (g(x))^2 \,\mathrm{d}x \\
V & = & \pi \displaystyle\int_0^H (\sqrt{60x})^2 \,\mathrm{d}x \\
 & = & \pi \displaystyle\int_0^H 60x \,\mathrm{d}x \\
 & = & \pi \cdot \left[30x^2\right]_0^H \\
 & = & \pi \cdot 30H^2
\end{array}$$

Höhe H und Durchmesser d bei einem Fassungsvermögen von $3000\,\mathrm{m}^3$:

Höhe H:

$$
\begin{aligned}
\pi \cdot 30H^2 &= 3000 && \mid : 30\pi \\
H^2 &= \frac{100}{\pi} && \mid \sqrt{\ } \\
H &= \sqrt{\frac{100}{\pi}} \\
&\approx 5,64\ [\mathrm{m}]
\end{aligned}
$$

Durchmesser d:

$$
2 \cdot g\left(\sqrt{\frac{100}{\pi}}\right) \quad = \quad 2 \cdot \sqrt{60\sqrt{\frac{100}{\pi}}} \quad \approx \quad 36,8
$$

Bei einem Fassungsvermögen von $3000\,\mathrm{m}^3$ beträgt die Höhe $5,64\,\mathrm{m}$ und der Druchmesser $36,8\,\mathrm{m}$.

2.2.1 Der Wasserstand im Rückhaltebecken liegt nach 50 Stunden nicht unter der Hälfte der Höhe des Beckens, da das Rückhaltebecken oben einen größeren Durchmesser als unten hat. Somit sinkt die Höhe des Wasserstandes bei konstanter Abflussrate zunächst langsamer und dann immer schneller.

2.2.2 Das Volumen nimmt linear ab, da die Abflussrate konstant ist. Die Steigung m ergibt sich aus den Randbedingungen $V(0) = 3000$ und $V(100) = 0$:

$$
m = \frac{0-3000}{100-0} = -30
$$

Der y-Achsenabschnitt ist durch die Regenwassermenge zu Beginn mit $V(0) = 3000$ gegeben.

2.2.3

$$
\begin{aligned}
V(t) &= \pi \cdot 30(h(t))^2 && \mid : 30\pi \\
\frac{V(t)}{30\pi} &= h(t)^2 && \mid \sqrt{\ } \\
h(t) &= \sqrt{\frac{V(t)}{30\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{-30t+3000}{30\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{-t+100}{\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{\pi}(100-t)}
\end{aligned}
$$