1. **▶ Koordinatengleichung der Hangebene bestimmen** (6BE)

Die Punkte $A$, $B$, $C$ und $D$ liegen auf dem Hang. In der Aufgabenstellung sind die Koordinaten von $A$, $B$ und $D$ gegeben. Für die Ebenengleichung des Hangs in Parameterform gilt zunächst:

$$E_{\text{Hang}}: \vec{x} = \overrightarrow{OD} + r \cdot \overrightarrow{DA} + s \cdot \overrightarrow{DC} = r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Über das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren kannst du den **Normalenvektor** der Ebene bestimmen:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & - & (-16) \\ (-16) & - & (-16) \\ 64 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 64 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Unsere Koordinatengleichung hat zunächst die Form $E_{\text{Hang}}: 1 \cdot x + 4 \cdot z = d$.

Setze die Koordinaten eines Punktes ein, der in der Ebene liegt; der Einfachheit halber bietet sich Punkt $D$ an:

$1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 = d$

Die Koordinatengleichung der Hangebene lautet $E: x + 4z = 0$.

**▶ Winkel berechnen**

Der Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf die Hangebene treffen, entspricht dem **Schnittwinkel** von $\vec{c}$ mit der Ebene $E_{\text{Hang}}$:

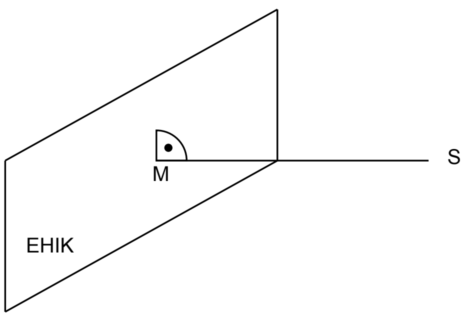
$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \circ \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-13|}{\sqrt{1+16} \cdot \sqrt{1+9+9}} = \frac{13}{\sqrt{323}} \approx 0{,}7233$$

Damit folgt $\alpha = \sin^{-1}(0{,}7233) \approx 46{,}3\,°$.

2. **▶ Nächsten Punkt zur Mastspitze ermitteln** (9BE)

Der Mast steht im Punkt $L\,(4 \mid -8 \mid -1)$ und er ist 26 m hoch. Da 1 LE im Koordinatensystem auch 1 m entspricht, befindet sich die Mastspitze im Punkt $S\,(4 \mid -8 \mid 25)$.

Gesucht ist der Punkt $M$ in der Dachfläche ($EHIK$), der den **kleinsten Abstand** zum Punkt $S$ besitzt. Der **Verbindungsvektor** $\overrightarrow{MS}$ muss also **senkrecht** auf der Ebene $E_{EHIK}$ stehen. Dafür benötigen wir den Normalenvektor der Ebene.




Für die Ebenengleichung in Parameterform gilt:

$$E_{EHIK}: \vec{x} = \overrightarrow{OE} + k \cdot \overrightarrow{EH} + l \cdot \overrightarrow{EK} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Den Normalenvektor erhalten wir wieder über das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & - & 0 \\ 0 & - & (-32) \\ (-32) & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 32 \\ -32 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Gerade

$$m: \vec{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 25 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

verläuft senkrecht zu $E_{EHIK}$ durch den Punkt $S$. Der **Schnittpunkt** dieser Gerade mit der Ebene $E_{EHIK}$ ist genau unser gesuchter Punkt $M$. Bestimme zur besseren Berechnung des Schnittpunktes die Koordinatengleichung der Ebene $E_{EHIK}$.

Bisher lautet sie $E_{EHIK}: y - z = d$. Einsetzen der Koordinaten eines Punktes der Ebene, z.B. $E$, liefert: $0 - 4 = -4 = d$, und somit $E_{EHIK}: y - z = -4$.

Für den Schnittpunkt $M$ gilt dann:

$$\begin{aligned} m \cap E_{EHIK}: (-8+t) - (25-t) &= -4 \\ -33 + 2t &= -4 \\ t &= 14{,}5 \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Geradengleichung von $m$ ergibt sich der Punkt $M\,(4 \mid 6{,}5 \mid 10{,}5)$.

Das Problem an diesem Punkt $M$ ist, dass er die $z$-Koordinate $z = 10{,}5$ besitzt; das **Dach** besitzt seine obere Kante allerdings in einer Höhe von $z = 8$. Der Punkt $M$ liegt somit zwar in der **Ebene** $E_{EHIK}$, aber nicht mehr in der Dachfläche $EHIK$.

Nun, wie gehen wir vor? Die **Dachkante** $\overline{KI}$ ist der Teil des Daches, der dem Punkt $M$ am nächsten liegt. Der Punkt $M^*$ der **Dachkante** und damit auch der Dachfläche mit **kleinsten** Abstand zu Punkt $M$ ist dann auch der Punkt der Dachfläche mit dem kleinsten Abstand der Mastspitze $S$. $I$ hat dabei die Koordinaten $I\,(0 \mid 4 \mid 8)$.

Die Dachkante $IK$ liegt auf der Geraden $g_{IK}: \vec{x} = \overrightarrow{OI} + l \cdot \overrightarrow{IK}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und verläuft damit parallel zur $x$-Achse.

Aufgrund dieser besonderen Lage der Dachkante $\overline{IK}$ im Koordinatensystem hat der Punkt $M^*$, der dem Punkt $M$ am nächsten liegt, auch die $x$-Koordinate $x = 4$ und besitzt damit die Koordinaten $M^*\,(4 \mid 4 \mid 8)$.

### 3.1 ▶ Schattenpunkt $S'$ bestimmen (6BE)

Die Sonnenstrahlen fallen in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein. Die Gerade

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OS} + r \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 25 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

beschreibt den Verlauf der Sonnenstrahlen, welche durch die Mastspitze $S$ verlaufen. Der Schattenpunkt der Mastspitze auf der Hangebene $E_{\text{Hang}}$ entspricht nun genau dem **Schnittpunkt** der Geraden $g$ mit der Hangebene:

$$\begin{aligned} g \cap E_{\text{Hang}} : (4-r) + 4 \cdot (25 - 3r) &= 0 \\ 104 - 13r &= 0 \\ r &= 8 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Geradengleichung von $g$ liefert den Schattenpunkt $S'\,(-4 \mid 16 \mid 1)$.

3.2 ▶ **Abstand berechnen**

Der Punkt $C$ hat die Koordinaten $C\,(0 \mid 8 \mid 0)$. Der Abstand der Punkt $S'$ und $C$ ist genau der **Betrag** des Vektors $\overrightarrow{CS'}$.

$$\left|\overrightarrow{CS'}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+64+1} = \sqrt{81} = 9$$

Der Abstand des Schattenpunkts $S'$ von der Hausecke $C$ ist 9 m.

▶ **Über kürzeste Entfernung entscheiden**

Nein, dies ist nicht die kürzeste Entfernung. Da der Abstand eines Punktes zu einer Strecke immer **senkrecht** zur Strecke gemessen wird, liegt der Punkt mit der **kürzesten** Entfernung zu $S'$ auf der Höhe $z = 1$.

K4.1 ▶ **Nachweis, dass Dachfläche beschädigt werden kann** (9BE)

Der Mast endet im Punkt $S\,(4 \mid -8 \mid 25)$, das abgebrochene Stück ist also 12,5 m lang. Berechne den **Abstand** des Punktes $Z$ von der Dachfläche $EHIK$ und zeige, dass dieser Abstand **kleiner** als 12,5 m ist.

In Aufgabenteil 2 haben wir bereits eine Koordinatengleichung der Ebene $E_{EHIK}$ ermittelt, nämlich $E_{EHIK} : y - z = -4$. Den Abstand eines Punktes von einer Ebene berechnen wir immer mit der Hesseschen Normalenform der Ebene:

$$E_{EHIK}{}^* : \frac{|y - z + 4|}{|\vec{n}|} = \frac{|y - z + 4|}{\sqrt{2}} = d(P; E_{EHIK}).$$

Einsetzen der Koordinaten von $Z$ liefert den Abstand:

$$d(Z; E_{EHIK}) = \frac{|-8 - 12{,}5 + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{|-16{,}5|}{\sqrt{2}} = \frac{16{,}5}{\sqrt{2}} \approx 11{,}6673 < 12{,}5.$$

Der Mast kann die nur 11,6673 m entfernte Dachfläche erreichen und somit auch beschädigen.

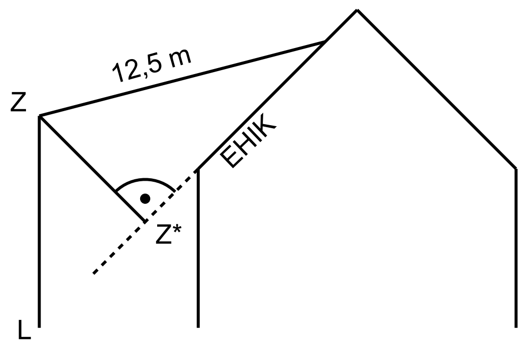
### K4.2▶ Lage der Punkte auf einem Kreis begründen

Der abgebrochene Teil des Masts kann theoretisch in alle Richtungen „schlagen"; da er 12,5 m lang ist, kann er damit alle Punkte treffen, die sich in oder auf der Kugel mit Mittelpunkt $Z$ und Radius $r = 12{,}5$ befinden.

Ein Teil dieser Punkte liegt auf der ebenen Dachfläche $EHIK$; genauer gesagt liegen diese Punkte genau auf dem **Schnittkreis** der Kugel um $Z$ und der Dachfläche $EHIK$.

### K4.3▶ Radius und Mittelpunkt des Kreises berechnen

Es gibt einen Punkt $Z^*$ in der Ebene $E_{EHIK}: y - z = -4$, welcher den kleinsten Abstand von Punkt $Z$ hat. Dieser Punkt ist der **Mittelpunkt** unseres Kreises.
Die Strecke $\overline{ZZ^*}$ bildet gemeinsam mit der Länge 12,5 m des abgebrochenen Mastes und dem **Radius** des Kreises ein rechtwinkliges Dreieck. So können wir später mit dem Satz des Pythagoras den Radius berechnen.




**1. Schritt: Punkt $Z^*$ ermitteln**

$Z^*$ hat den kürzesten Abstand von Punkt $Z$ und liegt in der Ebene $E_{EHIK}$. Ähnlich wie in Teilaufgabe 2 können wir $Z^*$ mit Hilfe des Normalenvektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ermitteln.

Die Gerade

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OZ} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

verläuft senkrecht zur Ebene $E_{EHIK}$ und geht durch den Punkt $Z$. Der **Schnittpunkt** von $g$ mit der Ebene ist genau der Punkt $Z^*$, den wir suchen.

$$\begin{aligned} m \cap E_{EHIK}: (-8 + t) - (12{,}5 - t) &= -4 \\ -20{,}5 + 2t &= -4 \\ t &= 8{,}25 \end{aligned}$$

Setze $r = 8{,}25$ wieder ein in die Geradengleichung von $g$ und es ergibt sich der Punkt $Z^*\,(4 \mid 0{,}25 \mid 4{,}25)$.

Dies ist der **Mittelpunkt** des Kreises.

**2. Schritt: Radius $r$ berechnen**

Wie bereits angedeutet können wir den Radius über den **Satz des Pythagoras** berechnen. Betrachte dazu das rechtwinklige Dreieck aus der Abbildung, die wir am Anfang der Aufgabe zeigen: $(12{,}5)^2 = |\overrightarrow{ZZ^*}|^2 + r^2$.

Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{ZZ^*}$ ist dabei gerade der **kürzeste Abstand** des Punktes $Z$ zur Ebene $E_{EHIK}$; diesen haben wir bereits in Aufgabenteil K4.1 berechnet: $|\overrightarrow{ZZ^*}| \approx 11{,}6673$.

Damit folgt für den Radius:

$$\begin{aligned}(12{,}5)^2 &= (11{,}6673)^2 + r^2\\ 156{,}25 &= 136{,}125 + r^2\\ r &= \sqrt{20{,}125} \approx 4{,}486\end{aligned}$$

M4.1 ▶ **Aussage überprüfen** (9BE)

Den Bildpunkt von Punkt $S$ haben wir in Aufgabenteil 3.1 bereits berechnet und erhielten $S'\,(-4 \mid 16 \mid 1)$.

Wende die Matrix $M$ auf Punkt $S$ an und zeige, dass die beiden Bildpunkte übereinstimmen:

$$M \cdot \overrightarrow{OS} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 0 & -4 \\ 3 & 13 & 12 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 \cdot 4 & + & 0 \cdot (-8) & + & (-4) \cdot 25 \\ 3 \cdot 4 & + & 13 \cdot (-8) & + & 12 \cdot 25 \\ (-3) \cdot 4 & + & 0 \cdot (-8) & + & 1 \cdot 25 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -52 \\ 208 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten der Punkte stimmen überein.

Nun zum Schattenpunkt von $B$. Aus der Abbildung in der Aufgabenstellung geht hervor, dass $B$ bereits in der Hangebene liegt. $M$ müsste den Punkt also eigentlich auf sich selbst abbilden:

$$M \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 0 & -4 \\ 3 & 13 & 12 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 \cdot 8 & + & 0 \cdot 8 & + & (-4) \cdot (-2) \\ 3 \cdot 8 & + & 13 \cdot 8 & + & 12 \cdot (-2) \\ (-3) \cdot 8 & + & 0 \cdot 8 & + & 1 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 104 \\ 104 \\ -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Beide Aussagen sind wahr.

M4.2 ▶ **Nachweis, dass ale Punkte auf die Hangebene abgebildet werden**

Betrachte einen beliebigen Punkt $P(x \mid y \mid z)$ im Raum. Wenn er auf die Hangebene abgebildet wird, so müssen die Koordinaten des Spiegelpunktes $P'$ die Ebenengleichung $E_{\text{Hang}} : x + 4z = 0$ (s. Aufgabenteil 1) erfüllen.

Berechne zunächst die Koordinaten des Spiegelpunktes und prüfe dann die Ebenengleichung nach.

$$M\cdot\overrightarrow{OP}=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}12&0&-4\\3&13&12\\-3&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}12\cdot x&+&0\cdot y&+&(-4)\cdot z\\3\cdot x&+&13\cdot y&+&12\cdot z\\(-3)\cdot x&+&0\cdot y&+&1\cdot z\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}12x-4z\\3x+13y+12z\\-3x+z\end{pmatrix}$$

Setze die Koordinaten des Bildpunktes in die Koordinatengleichung der Hangebene ein:

$\frac{1}{13}(12x-4z)+4\cdot\frac{1}{13}(-3x+z)=\frac{12}{13}x-\frac{4}{13}z-\frac{12}{13}x+\frac{4}{13}z=0$

Damit ist gezeigt, dass die Bildpunkte aller Punkte im Raum in der Hangebene liegen.

M4.3 ▶ **Bedeutung der Eigenschaft erläutern**

Wenn du die Matrix $M$ auf einen Punkt $P$ anwendest, so projizierst du diesen Punkt in die Hangebene. Die Anwendung der Matrix $M^2$ würde bedeuten, die Projektion **noch einmal** vorzunehmen. Da aber schon alle Bildpunkte in der Hangebene liegen, werden sie jeweils auf sich selbst abgebildet.

Alle **Bildpunkte** sind somit automatisch **Fixpunkte** der Matrix $M$, da sie wieder auf sich selbst abgebildet werden.