C - Stochastik

1.1 Spieler L trifft alle Felder mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er das Feld „19“ oder das Feld „20“ trifft, beträgt also:

$$P_L(19;20) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 10\,\%$$

Spieler K trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{20}{160}$ das Feld „19“ und mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{31}{160}$ das Feld „20“, wenn er auf das Feld „20“ zielt. Mit der Pfadadditionsregel folgt daher:

$$P_K(19;20) = \frac{20}{160} + \frac{31}{160} = \frac{51}{160} = 31,875\,\%$$

1.2 **Term erläutern**

In dem Term $\sum\limits_{k=0}^{2}\binom{22}{k}\cdot\left(\frac{31}{160}\right)^k\cdot\left(\frac{129}{160}\right)^{22-k}$ werden die Einzelwahrscheinlichkeiten $\binom{22}{k}\cdot\left(\frac{31}{160}\right)^k\cdot\left(\frac{129}{160}\right)^{22-k}$ für $k=0$, $k=1$ und $k=2$ aufaddiert.

Dies sind die Wahrscheinlichkeiten $P(X=k)$ einer binomialverteilten Zufallsgröße X, bei der die Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{31}{160}$ beträgt und ein Stichprobenumfang von $n = 22$ betrachtet wird.

Im Sachzusammenhang wird mit dem Term also die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass der Spieler K in 22 Versuchen höchstens zweimal das Feld „20“ trifft, wenn er auf das Feld „20“ zielt.

Ergebnis angeben

Mit dem Taschenrechner können die einzelnen Wahrscheinlichkeiten berechnet werden.

Es folgt:

$$\sum_{k=0}^{2}\binom{22}{k}\cdot\left(\frac{31}{160}\right)^k\cdot\left(\frac{129}{160}\right)^{22-k} \approx 0,1719 = 17,19\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $17,19\,\%$ trifft Spieler K in 22 Versuchen, in denen er auf das Feld „20“ zielt, höchstens zweimal das Feld „20“.

2.1 Die Zufallsgröße X_n beschreibt, wie oft Spieler L bei n Versuchen das Feld 20 trifft. Diese kann als binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = \frac{1}{20} = 0,05$ angenommen werden.

$$\begin{array}{rcll} P(X_n\geq 1) & \geq & 0,99 & \\ 1-P(X_n=0) & \geq & 0,99 & \mid -1 \\ -P(X_n=0) & \geq & -0,01 & \mid \cdot(-1) \\ P(X_n=0) & \leq & 0,01 & \\ \binom{n}{0}\cdot 0,05^0\cdot 0,95^n & \leq & 0,01 & \\ 0,95^n & \leq & 0,01 & \mid \ln \\ n\cdot\ln(0,95) & \leq & \ln(0,01) & \mid :\ln(0,95)<0 \\ n & \geq & 90 & \end{array}$$

Der Spieler L muss folglich mindestens 90 mal Werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$ mindestens einmal das Feld „20“ zu treffen.

2.2 Ansatz I erläutern

p_M beschreibt die Trefferwahrscheinlichkeit von Spieler M. Der Term $(1-p_M)$ bezeichnet also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Spieler M bei einem Wurf, bei dem er auf das Feld „20“ zielt, nicht trifft.

Der Term $(1-p_M)^n$ gibt also die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Spieler M von n Versuchen, das Feld „20“ zu treffen, kein einziges mal das Feld „20“ trifft.

Der Term $1-(1-p_M)^n$ gibt folglich die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass Spieler M bei n Versuchen nicht n mal nicht trifft, dass er also von n Versuchen höchstens $n-1$ mal nicht trifft bzw. mindestens einmal trifft.

Der Ansatz wurde also so gewählt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Spieler M von n Versuchen mindestens einmal das Feld „20“ trifft, mindestens $99\,\%$ beträgt.

Ergebnis deuten

In Zeile (II) sind dann für $n=10$ und $n=5$ die erforderlichen Trefferwahrscheinlichkeiten angegeben.

Damit also Spieler M in zehn Versuchen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$ mindestens einmal das Feld „20“ trifft, muss die Trefferwahrscheinlichkeit von Spieler M mindestens $0,37=37\,\%$ betragen.

Damit er in fünf Versuchen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$ mindestens einmal das Feld „20“ trifft, muss die Trefferwahrscheinlichkeit von Spieler M mindestens $0,61=61\,\%$ betragen.

3.1 2σ-Umgebung ermitteln

Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Treffer von Feld „20“ von Spieler M bei 100 Würfen.

Y ist binomialverteilt mit $n=100$ und $p=0,7$.

$$\begin{aligned}\mu &= n\cdot p\\ &= 100\cdot 0,7\\ &= 70\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{n\cdot p\cdot (1-p)}\\ &= \sqrt{100\cdot 0,7\cdot 0,3}\\ &= \sqrt{21} > 3\end{aligned}$$

Einsetzen in die Angaben aus Material 2 liefert dann wegen $\sigma > 3$:

$$[70-2\cdot\sqrt{21}; 70+2\cdot\sqrt{21}] \approx [61;79]$$

Bedeutung beschreiben

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $95,5\,\%$ weicht die Anzahl der Treffer von Spieler M in 100 Versuchen maximal um neun vom Erwartungswert von 70 ab.

Oder: Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $95,5\,\%$ beträgt die Anzahl der Treffer von Spieler M in 100 Versuchen mindestens 61 und höchstens 79.

3.2 Mit dem Satz von Bayes kann die Wahrscheinlichkeit $P_{20}(M)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}P_{20}(M) &= \frac{P_M(20)\cdot P(M)}{P(20)}\\ &= \frac{0,7\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot P_L(20)+\frac{1}{3}\cdot P_K(20)+\frac{1}{3}\cdot P_M(20)}\\ &= \frac{0,7\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot 0,05+\frac{1}{3}\cdot\frac{31}{160}+\frac{1}{3}\cdot 0,7}\\ &\approx 0,7417\\ &= 74,17\,\%\end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $74,17\,\%$ handelt es sich bei dem zufällig ausgewählten Spieler, der das Feld „20“ trifft, um Spieler M.

3.3.1 Die Zufallsgröße Z beschreibt die Anzahl der Treffer des Feldes „20“ von Spieler M bei 200 Würfen.

Diese wird als binomialverteilt mit $n=200$ und p entsprechend der Nullhypothese angenommen:

$$H_0:\ p=0,7$$

Die Alternativhypothese lautet entsprechend:

$$H_1:\ p>0,7$$

Es soll gelten:

$$\begin{aligned} P(Z\geq k) &\leq 0,05 \\ 1-P(Z\leq k-1) &\leq 0,05 \quad \mid -1 \\ -P(Z\leq k-1) &\leq -0,95 \quad \mid \cdot(-1) \\ P(Z\leq k-1) &\geq 0,95 \end{aligned}$$

In der Tabelle für die Binomialsummenfunktion kann nun der entsprechend kleinste Wert für $k-1$ gesucht werden. Dieser folgt mit:

$k-1\geq 151$

Somit muss gelten: $k\geq 152$

Es kann also folgende Entscheidungsregel definiert werden:

Trifft Spieler M von den 200 Pfeilen mindestens $152,$ so kann er davon ausgehen, dass das Training erfolgreich war und sich seine Trefferwahrscheinlichkeit erhöht hat. Trifft er weniger als 152 Pfeile, so kann er nicht von einer verbesserten Trefferquote ausgehen.

3.3.2 Der Fehler zweiter Art wird begangen, wenn die Nullhypothese fälschlicherweise nicht abgelehnt wird, obwohl die Alternativhypothese gilt.

Zu Betrachten ist also wieder die Zufallsgröße Z aus Aufgabe 3.3.1 für $n=200.$ Es wird angenommen, dass diese in Wirklichkeit entsprechend der Alternativhypothese mit $p=0,78$ binomialverteilt ist.

Der Fehler zweiter Art wird begangen, wenn $Z\leq 151$ ist.

Mit der Tabelle zur Binomialsummenfunktion folgt:

$$\begin{aligned} P(Z\leq 151) &\approx 0,2193 \\ &= 21,93\,\% \end{aligned}$$

Für den Fall, dass die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit von Spieler M auf $78\,\%$ gestiegen ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art etwa $21,93\,\%.$