C2 - Stochastik

Aufgaben PLUS Tipps PLUS Lösungen PLUS

1.

1.1 ▶ Wahrscheinlichkeit p berechnen

Aus der Aufgabenstellung hast du die Information gegeben, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Gepäckstück von zwei aufeinanderfolgenden nicht das Ziel Frankfurt hat, $93,75\,\%$ beträgt.
Anhand dieser Information kannst du eine Gleichung in Abhängigkeit von p aufstellen und diese nach p lösen.
Hier kannst du mit dem **Gegenereignis** arbeiten.
Das Ereignis, dass unter zwei aufeinanderfolgenden Gepäckstücken mindestens eines nicht nach Frankfurt geht, entspricht genau dem Gegenereignis davon, dass von diesen beiden Gepäckstücken beide das Ziel Frankfurt haben.
Das bedeutet:

$$\begin{aligned} 0,9375 =&\ P(\text{„Mindestens eins hat nicht das Ziel Frankfurt“}) \\ =&\ 1 - P(\text{„Beide haben das Ziel Frankfurt“}) \end{aligned}$$

$P(\text{„Beide haben das Ziel Frankfurt“})$ kannst du dabei mit Hilfe der **Pfadmultiplikationsregel** berechnen.
So ergibt sich:

$$P(\text{„Beide haben das Ziel Frankfurt“}) = p \cdot p = p^2.$$

Dadurch hast du nun eine Gleichung in Abhängigkeit von p gegeben, die du nach p lösen kannst:

$$\begin{aligned} 0,9375 =&\ 1 - P(\text{„Beide haben das Ziel Frankfurt“}) \\ 0,9375 =&\ 1 - p^2 && \mid -1 \\ -0,0625 =&\ -p^2 && \mid \cdot(-1) \\ 0,0625 =&\ p^2 && \mid \sqrt{\ } \\ 0,25 =&\ p \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück das Ziel Frankfurt hat, beträgt $p = 0,25$.

1.2 ▶ Wahrscheinlichkeit berechnen

Du sollst nun die Wahrscheinlichkeit für genau drei Gepäckstücke mit Richtung Frankfurt unter 10 aufeinanderfolgenden Gepäckstücken berechnen.
Hierzu kannst du eine Zufallsvariable X definieren, die die zufällige Anzahl der Gepäckstücke mit Ziel Frankfurt beschreibt.
Dir sollte auffallen, dass X als binomialverteilt mit den Parametern $n = 10$ und $p = 0,25$ angenommen werden kann, da jedes Gepäckstück die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, das Ziel Frankfurt zu haben und hier nur die beiden Möglichkeiten „Frankfurt“, und „nicht Frankfurt“, betrachtet werden.
Du suchst hier also $P(X = 3)$.
Diese kannst du mit Hilfe der Formel für die Binomialverteilung berechnen. Diese lautet:

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

Setze in diese Formel $k = 3$ und die übrigen Parameter ein:

$$\begin{aligned} P(X = 3) =&\ \binom{10}{3} \cdot 0,25^3 \cdot (1 - 0,25)^{10-3} \\ \approx&\ 0,2503 \\ =&\ 25,03\,\% \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $25,03\,\%$ haben unter 10 aufeinanderfolgenden Gepäckstücken genau 3 das Ziel Frankfurt.

1.3 ▶ Richtige Wahrscheinlichkeit begründen

Die richtige der beiden Möglichkeiten kannst du auswählen, indem du selbst die Wahrscheinlichkeit dafür berechnest, dass von 10 aufeinanderfolgenden Gepäckstücken keines das Ziel Frankfurt hat.
p ist dabei wieder die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gepäckstück das Ziel Frankfurt hat.
In der vorherigen Aufgabe hast du gesehen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein Gepäckstück unter 10 aufeinanderfolgenden das Ziel Frankfurt hat, der Wahrscheinlichkeit $P(X = 0)$ entspricht und du hier mit der Formel für die **Binomialverteilung** arbeiten kannst, da X als binomialverteilt mit den Parametern

$n=10$ und unbekanntem p angenommen werden kann.
Mit der Formel ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(X=0) = &\ \binom{10}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^{10} \\ = &\ 1\cdot 1\cdot(1-p)^{10} \\ = &\ (1-p)^{10} \end{aligned}$$

Mit der Formel für die Binomialverteilung ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 10 aufeinanderfolgenden Gepäckstücken keines das Ziel Frankfurt hat, $(1-p)^{10}$ beträgt. Damit beschreibt $P_1=(1-p)^{10}$ die passende Wahrscheinlichkeit.

► Ereignis beschreiben, das zu P_2 gehört

Du sollst nun beschreiben, zu welchem Ereignis die folgende Wahrscheinlichkeit gehört:

$$P_2 = 1-p^{10}$$

Dir sollte hier etwas auffallen: Der Teil $1-$ bedeutet, dass P_2 die Wahrscheinlichkeit eines **Gegenereignisses** beschreibt, und zwar des Ereignisses, dessen Wahrscheinlichkeit p^{10} ist. Daher kannst du zunächst den Teil p^{10} betrachten und dir überlegen, zu welchem Ereignis diese Wahrscheinlichkeit gehört.

► 1. Schritt: Ereignis zu der Wahrscheinlichkeit p^{10} beschreiben

Im ersten Aufgabenteil hast du schon gesehen, dass p^2 die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass von 2 aufeinanderfolgenden Gepäckstücken genau 2 das Ziel Frankfurt haben. Analog dazu, ist p^{10} die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 10 aufeinanderfolgenden Gepäckstücken genau 10 das Ziel Frankfurt haben. Dies kannst du auch wieder mit Hilfe der Formel für die Binomialverteilung der Zufallsvariablen X nachprüfen:

$$\begin{aligned} P(X=10) = &\ \binom{10}{10}\cdot p^{10}\cdot(1-p)^{0} \\ = &\ 1\cdot p^{10}\cdot 1 \\ = &\ p^{10} \end{aligned}$$

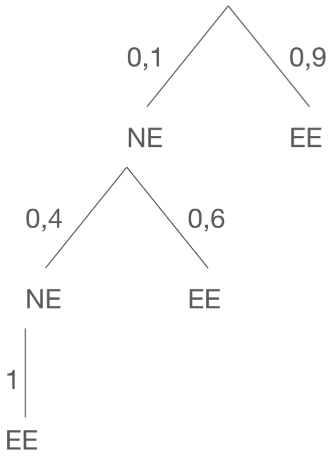
► 2. Schritt: Gesamtereignis beschreiben

Die Wahrscheinlichkeit P_2 beschreibt also die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses dazu, dass von 10 aufeinanderfolgenden Gepäckstücken genau 10 das Ziel Frankfurt haben. Dies entspricht dem Ereignis, dass **nicht** 10 der 10 aufeinanderfolgenden Gepäckstücke das Ziel Frankfurt haben. Da es unter 10 Gepäckstücken nicht mehr als 10 mit dem Ziel Frankfurt geben kann, ist dies also das Ereignis, dass weniger als 10 der 10 aufeinanderfolgenden Gepäckstücke das Ziel Frankfurt haben.
Insgesamt ist P_2 also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 10 aufeinanderfolgenden Gepäckstücken höchstens 9 Stück das Ziel Frankfurt haben, bzw. dass mindestens eines ein anderes Ziel hat.

2.

2.1 **► Sachverhalt im Baumdiagramm darstellen**

Überlege dir zunächst wie viele Ebenen das Baumdiagramm haben muss und wie viele Äste pro Ebene:
Insgesamt kann das Gepäckstück höchstens 3 Kontrollen durchlaufen. Es gibt also drei Ebenen. In jeder Kontrolle, gibt es nur die beiden Möglichkeiten „Eindeutiges Ergebnis“ (EE) und „nicht eindeutiges Ergebnis“ (NE), wobei im letzten Schritt immer ein eindeutiges Ergebnis festgestellt werden kann.
Insgesamt sollte dein Baumdiagramm dann ähnlich aussehen wie das folgende:



2.2 ▶ **Erwartete Dauer der Gepäckkontrolle berechnen**

Die erwartete Dauer der Kontrolle eines Gepäckstücks $(E(Dauer))$ ergibt sich ähnlich wie bei der Berechnung des Notendurchschnitts einer Klassenarbeit durch die Wahrscheinlichkeiten aller Möglichkeiten multipliziert mit der jeweiligen Dauer. Insgesamt sind die folgenden Zeiten möglich:

- Nach der ersten Kontrolle liegt bereits ein eindeutiges Ergebnis vor: 10 Sekunden
- Das eindeutige Ergebnis erscheint nach der zweiten Kontrolle: $10+30+10$ Sekunden $=50$ Sekunden
- Das Gepäckstück muss alle drei Kontrollen durchlaufen: $10+30+10+30+5\cdot 60$ Sekunden $=380$ Sekunden

Damit ergibt sich die Formel:

$$\boxed{E(Dauer)=10\cdot p_{10}+50\cdot p_{50}+380\cdot p_{380}}$$

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zeiten kannst du dem Baumdiagramm mit Hilfe der **Pfadregeln** entnehmen:

- $p_{10}=0,9$
- $p_{50}=0,1\cdot 0,6=0,06$
- $p_{380}=0,1\cdot 0,4\cdot 1=0,04$

Damit erhältst du dann:

$$E(Dauer)=10\cdot 0,9+50\cdot 0,06+380\cdot 0,04=27,2$$

Die zu erwartende durchschnittliche Dauer einer Gepäckkontrolle beträgt 27,2 Sekunden.

3. ▶ **Entscheidungsregel für den Hypothesentest bestimmen**

Du sollst die Entscheidungsregel für einen Hypothesentest formulieren, den die Fluggesellschaft durchführt. Aus der Aussage aus der Aufgabenstellung, dass die Fluggesellschaft skeptisch ist, kannst du die Nullhypothese ablesen:

Nullhypothese: $p_0\geq 0,01$

Diese Hypothese wird nur dann abgelehnt, wenn die Anzahl der falschsortierten Gepäckstücke signifikant zu klein ist.
Aus der Irrtumswahrscheinlichkeit ergibt sich: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der falschsortierten Gepäckstücke (Z) zu klein ist, obwohl eigentlich die Nullhypothese gilt, soll höchstens $0,025$ betragen.
Du suchst also das größte k, sodass folgende Ungleichung gilt:

$$P(Z\leq k)\leq 0,025$$

Weil Z als binomialverteilt angenommen werden kann, mit den Parametern $p=0,01$ und $n=3.000$ kannst du hierbei mit der **Normalverteilung** als Näherung arbeiten.
Die Formel dazu lautet:

$$\boxed{P(X\leq k)=\Phi\left(\frac{k+0,5-\mu}{\sigma}\right)}$$

Aus dieser Formel kennst du bereits die folgenden Größen bzw. kannst sie mit den folgenden Formeln berechnen:

- $P(Z \leq k) = 0,025$
- $\mu = p \cdot n$
- $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Mit Hilfe der Tabelle für die Normalverteilung aus deiner Formelsammlung, kannst du die Gleichung nach k lösen, nachdem du die fehlenden Werte μ und σ berechnet hast.

▶ 1. Schritt: Fehlende Werte berechnen

p wird hier als $p = 0,01$ angenommen und $n = 3.000$. Damit kannst du nun μ und σ berechnen:

$$\begin{aligned} \mu =&\ p \cdot n \\ =&\ 0,01 \cdot 3.000 \\ =&\ 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma =&\ \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \\ =&\ \sqrt{3.000 \cdot 0,01 \cdot 0,99} \\ \approx&\ 5,45 \end{aligned}$$

▶ 2. Schritt: Gleichung aufstellen und lösen

Nun kennst du alle Werte aus der obigen Formel, bis auf das k. Setzt du diese ein, so erhältst du folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} 0,025 =&\ \Phi\left(\frac{k+0,5-30}{5,45}\right) \\ =&\ \Phi\left(\frac{k-29,5}{5,45}\right) \end{aligned}$$

Finde nun in der Tabelle für die Standardnormalverteilung ein k_0 für das gilt:

$$\Phi\left(k_0\right) \approx 0,025 \text{ dann ist } k_0 = \frac{k+0,5-30}{5,45}$$

Du findest, dass $k_0 = -1,96$ gilt.
Nun kannst du nach k auflösen:

$$\begin{aligned} -1,96 =&\ \frac{k-29,5}{5,45} \quad &|\cdot 5,45 \\ -10,682 =&\ k-29,5 \quad &|+29,5 \\ 18,818 =&\ k \end{aligned}$$

Da die Forderung nur für kleinere, nicht aber für größere k erfüllt ist und nur ganzzahlige k Sinn ergeben im Sachzusammenhang, runde ab, so ergibt sich:
Es dürfen höchstens 18 Gepäckstücke im Test falschsortiert werden, damit die Fluggesellschaft ihre Nullhypothese ablehnt und dem Hersteller des Geräts vertraut.

▶ Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art berechnen

Du sollst nun die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art berechnen, wenn tatsächlich eine Fehlerquote von nur $0,5\,\%$ gilt. Der **Fehler 2. Art** beschreibt im Allgemeinen den Fehler, die Nullhypothese p_0 anzunehmen, obwohl tatsächlich eine andere Wahrscheinlichkeit p_1 gilt. In unserem Fall kann dies genau dann passieren, wenn die Anzahl der falschsortierten Gepäckstücke in der Stichprobe mindestens $k = 19$ ist, die Hypothese, dass $p \geq 0,01$ ist also angenommen wird, obwohl eigentlich die Wahrscheinlichkeit $p = 0,005$ aus der Aufgabenstellung gilt. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art ist also die Wahrscheinlichkeit für $Z_{0,005} \geq 19$, wobei $Z_{0,005}$ in diesem Fall binomialverteilt mit den Parametern $n = 3.000$ und $p = 0,005$ ist.
Diese Wahrscheinlichkeit kannst du wieder mit der **Standardnormalverteilung** als Näherung berechnen. Die Formel von oben kannst du wieder anwenden, wenn du den Ausdruck umformst:

$$P(Z_{0,005} \geq 19) = 1 - P(Z_{0,005} < 19) = 1 - P(Z_{0,005} \leq 18)$$

Da sich nun aber der Parameter p geändert hat, musst du zunächst noch einmal die Werte μ und σ berechnen. Anschließend kannst du in die Formel einsetzen und mit Hilfe der Tabelle die Wahrscheinlichkeit $P(Z_{0,005} \leq 18)$ berechnen.

▶ 1. Schritt: Fehlende Werte berechnen

Die entsprechenden Formeln dazu kennst du bereits, setze nun ein:

$$\begin{aligned}\mu =&\ n\cdot p\\ =&\ 3.000\cdot 0,005\\ =&\ 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma =&\ \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}\\ =&\ \sqrt{3.000\cdot 0,005\cdot 0,995}\\ \approx&\ 3,86\end{aligned}$$

▶ 2. Schritt: Einsetzen und Berechnen

Du kannst nun zuerst $P(Z_{0,005}\leq 18)$ berechnen:

$$\begin{aligned}P(Z_{0,005}\leq 18) =&\ \Phi\left(\frac{18+0,5-15}{3,86}\right)\\ =&\ \Phi(0,907) \qquad \textit{Tabelle}\\ \approx&\ 0,8186\end{aligned}$$

Damit kannst du nun die eigentlich gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$\begin{aligned}P(Z_{0,005}\geq 19) =&\ 1-P(Z_{0,005}\leq 18)\\ =&\ 1-0,8186\\ =&\ 0,1814\\ =&\ 18,14\,\%\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art beträgt ca. $18,14\,\%$, wenn eigentlich eine Fehlerquote von $p=0,5\,\%$ gilt.