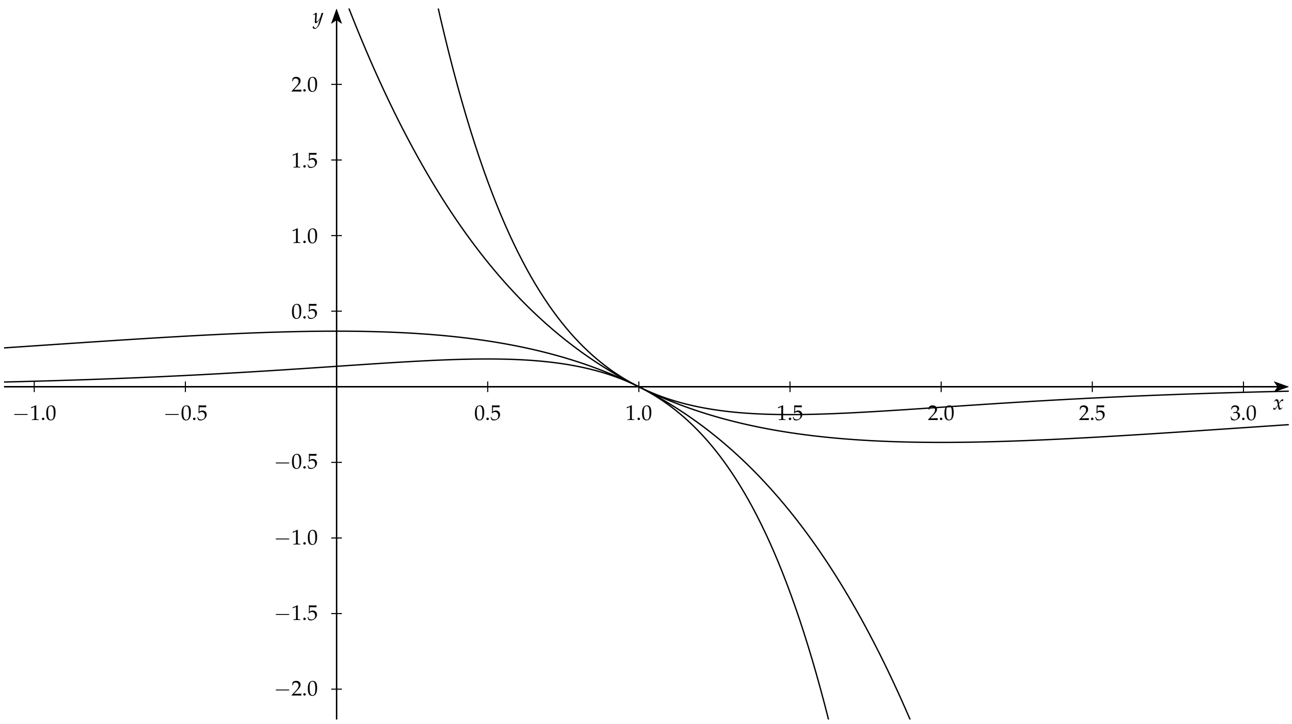
Die Fragen in dieser Aufgabe beziehen sich auf die Funktionenschar f_k mit

$f_k(x) = (1-x)e^{k-kx}, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad k \in \mathbb{R}$



Die Abbildung zeigt vier Kurven dieser Funktionenschar.

a. Bestimmen Sie die erste Ableitung der allgemeinen Scharfunktion f_k unter Angabe der benutzten Regeln und zeigen Sie, dass gilt: (6BE)

$$f_k'(x) = \frac{kx-k-1}{e^{k(x-1)}}$$

b. Berechnen Sie für den Graphen von f_2 die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Extrempunkte und untersuchen Sie sein Verhalten für $x \to^{+}_{-} \infty$. Entscheiden Sie dann begründet, welcher der obigen Graphen zu f_2 gehören kann. (10BE)

c. Untersuchen Sie Lage und Art der Extrempunkte der Scharfunktionen in Abhängigkeit von k. (8BE)

d. Weisen Sie nach, dass sich alle Kurven der Schar in einem Punkt berühren.
Zeigen Sie, dass es keinen weiteren Punkt gibt, durch den mehr als eine Scharkurve verläuft. (8BE)

e. Erläutern Sie die nachfolgend angegebenen Schritte zur Flächeninhaltsberechnung und geben Sie an, wie die entsprechende Flächenmaßzahl ggf. zu bestimmen wäre. Begründen Sie dabei ausführlich das Ergebnis der Grenzwertbildung im letzten Schritt. (8BE)

Erläutern Sie, für welche Werte von k die Schlussweise korrekt ist.

Mit $b > 1$ gilt:

$$\int_1^b (1-x)e^{k(1-x)}dx = \left[\frac{1}{k}e^{k(1-x)}(x-1+\frac{1}{k})\right]_1^b$$

$$= \frac{1}{k}(b-1+\frac{1}{k})e^{k(1-b)} - \frac{1}{k^2}$$

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{k}\left(b-1+\frac{1}{k}\right)e^{k(1-b)} - \frac{1}{k^2}\right) = -\frac{1}{k^2}$$