C2.2 - Stochastik

1 Herr und Frau Meier fahren in jedem Jahr über ihren Hochzeitstag am 1. Juli in einen Kurzurlaub auf ihre Lieblingsinsel.

1.1 Aufgrund langjähriger Wetteraufzeichnungen kann man davon ausgehen, dass es sich auf der Insel an diesem Datum mit einer Wahrscheinlichkeit von $70\ \%$ um einen Sommertag (also einen Tag mit einer Tageshöchsttemperatur von mindestens $25^{\circ}\mathrm{C}$) handelt.

Bestimme unter Angabe einer geeigneten Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A : Unter 10 zufällig ausgewählten Hochzeitstagen sind genau 6 Sommertage.

B : Unter 20 zufällig ausgewählten Hochzeitstagen sind mehr Sommertage als Nicht-Sommertage.

C : Bei 20 zufällig ausgewählten Hochzeitstagen weicht die Anzahl der Sommertage um mehr als die (1-fache) Standardabweichung vom zugehörigen Erwartungswert ab.

(9 BE)

1.2 Die Zufallsvariable Y : „Tageshöchsttemperatur auf der Insel am 1. Juli“ kann als normalverteilt mit einem Erwartungswert von $26,3^{\circ}\mathrm{C}$ und einer Standardabweichung von $2,5^{\circ}\mathrm{C}$ angenommen werden.

Ermittle die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

D : Die Tageshöchsttemperatur am 1. Juli weicht um höchstens $1^{\circ}\mathrm{C}$ vom Erwartungswert ab.

E : Die Tageshöchsttemperatur am 1. Juli beträgt mindestens $30^{\circ}\mathrm{C}$.

F : Die Tageshöchsttemperatur am 1. Juli unterschreitet den Erwartungswert um mehr als $2^{\circ}\mathrm{C}$.

(6 BE)

2 Für ein Land wird die Gruppe derjenigen Personen betrachtet, die im Jahr 2022 eine Urlaubsreise unternahmen. $45\ \%$ dieser Personen sind weiblich. Der Anteil derjenigen, die mit ihrer Urlaubsreise zufrieden waren, beträgt unter den weiblichen Personen $80\ \%$; der entsprechende Anteil unter den nicht weiblichen Personen wird mit a bezeichnet.

Aus der betrachteten Gruppe wird eine Person zufällig ausgewählt. Untersucht werden die folgenden Ereignisse:

W : Die Person ist weiblich.

Z : Die Person war mit ihrer Urlaubsreise zufrieden.

2.1 Stelle den Sachzusammenhang in einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm dar.

Bestimme denjenigen Wert von a, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person mit ihrer Urlaubsreise zufrieden war, $77,8\ \%$ beträgt.

(4 BE)

2.2 Weise nach, dass es in der betrachteten Gruppe für $a = 0,7$ weniger weibliche als nicht weibliche Personen geben würde, die mit ihrer Urlaubsreise zufrieden waren.

(2 BE)

2.3 Gib denjenigen Wert von a an, für den W und Z stochastisch unabhängig wären, und begründe deine Angabe, ohne zu rechnen.

(3 BE)

2.4 Die ausgewählte Person war mit ihrer Urlaubsreise nicht zufrieden.

Begründe im Sachzusammenhang, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person weiblich ist, mit zunehmendem Wert von a zunimmt.

(3 BE)

3 Ein großes Reiseunternehmen führt auf seinen Internetseiten ein kostenloses Gewinnspiel durch. Jede Person kann nur einmal an dem Spiel teilnehmen. Als Ergebnis des Spiels wird eine bestimmte Anzahl von Strandkörben angezeigt; diese Anzahl beträgt mindestens 1 und höchstens 5 .

Im Folgenden sind dazu die möglichen Gewinne beschrieben:

- Unter den teilnehmenden Personen, bei denen nur ein Strandkorb angezeigt wird, werden Sachgewinne verlost.
- Die teilnehmenden Personen mit zwei, drei, vier oder fünf Strandkörben erhalten jeweils einen Reisegutschein.

Der folgenden Tabelle können die Werte der Gutscheine sowie die Wahrscheinlichkeiten für diese Gewinne entnommen werden.

Anzahl der Strandkörbe	2	3	4	5
Wert des Gutscheins in €	200	500	1000	10000
Wahrscheinlichkeit	$8 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$

Bei dem Spiel beträgt der Erwartungswert des Gewinns pro Person 43,5 Cent.

3.1 Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dem Spiel nur ein Strandkorb angezeigt wird, um weniger als ein Tausendstel von 1 abweicht.

Bestimme für die Personen mit einem Strandkorb den Erwartungswert des Gewinns pro Person.

(4 BE)

3.2 Es soll davon ausgegangen werden, dass 80000 Personen an dem Spiel teilnehmen werden. Der Erwartungswert der Anzahl der Personen mit zwei Strandkörben wird mit μ bezeichnet.

Ermittle den kleinsten möglichen ganzzahligen Wert von c, für den die Anzahl der Personen mit zwei Strandkörben mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $80\,\%$ im Intervall $[\mu - c;\ \mu + c]$

liegt.

(4 BE)

3.3 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person nach der Teilnahme am Gewinnspiel eine Reise bei dem Reiseunternehmen bucht, wird mit p bezeichnet. Für das Unternehmen wäre eine Verlängerung des Gewinnspiels für $p \geq 2\ \%$ mit Vorteilen verbunden, für $p < 2\ \%$ dagegen mit finanziellen Verlusten.

Die Nullhypothese „p beträgt mindestens $2\ \%$“ soll auf einem Signifikanzniveau von $5\ \%$ getestet werden. Je größer der Umfang der Stichprobe gewählt wird, desto teurer ist die Durchführung des Tests.

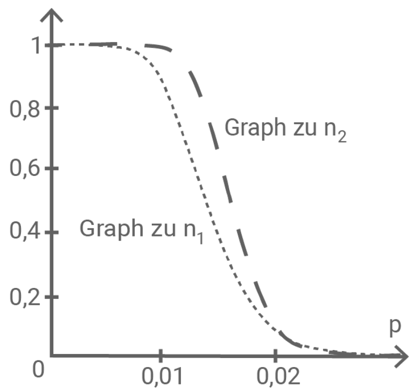
3.3.1 Entwickle zu dem in Aufgabe 3.3 beschriebenen Szenario einen Hypothesentest mit einem Stichprobenumfang von $n = 1000$ und formuliere eine Entscheidungsregel im Sachzusammenhang.

(6 BE)

3.3.2 Bestimme die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, falls der Anteil der Personen, die nach der Teilnahme am Gewinnspiel eine Reise bei dem Reiseunternehmen buchen, tatsächlich nur $p = 1,4\ \%$ beträgt.

(4 BE)

3.3.3 Das Gewinnspiel soll nur dann nicht verlängert werden, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste. Die Abbildung stellt für zwei mögliche Stichprobenumfänge n_1 und n_2 mit $n_1 < n_2$ in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass das Ergebnis des Tests im Ablehnungsbereich liegt.



Gib an, unter welcher Bedingung sich der größere Stichprobenumfang für das Unternehmen lohnen könnte, und begründe deine Angabe unter Verwendung der Abbildung sowie des Fehlers 2. Art.

(5 BE)