B2 - Analytische Geometrie

1

1.1 Koordinaten von C berechnen

Da die Grundfläche laut Aufgabenstellung rechteckig ist, gilt, dass die jeweils gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich lang sind.

Es muss also gelten:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{BC} \\
\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \qquad \mid +\overrightarrow{OB} \\
\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OC} \\
\begin{pmatrix} -40 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix} &= \overrightarrow{OC} \\
\begin{pmatrix} -60 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} &= \overrightarrow{OC}
\end{aligned}$$

Damit folgt der fehlende Eckpunkt mit $C(-60 \mid 80 \mid 0)$.

Rechten Winkel überprüfen

Der Winkel bei A entspricht dem Winkel zwischen den Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$. Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich Null, so stehen diese beiden senkrecht aufeinander und bilden somit einen rechten Winkel.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} &= \begin{pmatrix} -20 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -30 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (-20) \cdot (-30) + 60 \cdot (-10) + 0 \\
&= 600 - 600 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Grundfläche bei A einen rechten Winkel besitzt.

1.2 Parameterform angeben

Aus den Punkten A, B und F in der Hangebene H kann eine Gleichung der Ebene in Parameterform aufgestellt werden. Eine mögliche solche Gleichung in Parameterform ist:

$$H:\ \overrightarrow{x}=\overrightarrow{OA}+s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AF};\ s,t\in\mathbb{R}$$

Die Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{AB}$ wurden bereits in 1.1 berechnet. Der Vektor $\overrightarrow{AF}$ folgt mit:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}\\ &= \begin{pmatrix}-45\\5\\15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-10\\30\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-35\\-25\\15\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Damit lautet eine mögliche Gleichung in Parameterform:

$$H:\ \overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}-10\\30\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-20\\60\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-35\\-25\\15\end{pmatrix};\ s,t\in\mathbb{R}$$

Koordinatenform bestimmen

Mit dem Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren der Ebene H kann ein Normalenvektor $\overrightarrow{n_H}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n_H} &= \begin{pmatrix}-20\\60\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-35\\-25\\15\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}60\cdot 15 & - & 0\\ 0 & - & (-20)\cdot 15\\ (-20)\cdot(-25) & - & (60)\cdot(-35)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}900\\300\\500+2100\end{pmatrix}\\ &= 100\cdot\begin{pmatrix}9\\3\\26\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Eine mögliche Gleichung in Koordinatenform lautet somit beispielsweise:

$H:\ 9x+3y+26z=d$

Da die Ebene durch den Ursprung verläuft, gilt $d=0$. Somit lautet eine Ebenengleichung in Koordinatenform:

$H:\ 9x+3y+26z=0$

1.3 Der Punkt E befindet sich auf der Geraden h, welche durch den Punkt P entlang des Vektors $\overrightarrow{v}$ verläuft. Die Geradengleichung von h lautet somit:

$$\begin{aligned} g: \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot s \\ \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 30 - 21 \cdot s \\ 20 + 15 \cdot s \\ 5 + 2 \cdot s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da der Punkt E auch in der Ebene H liegt, entspricht er dem Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene H.

Dieser kann durch Einsetzen der Geradengleichung g in die Koordinatengleichung von H bestimmt werden:

$$\begin{aligned} 9 \cdot (30 - 21s) + 3 \cdot (20 + 15s) + 26 \cdot (5 + 2s) &= 0 \\ 270 - 189s + 60 + 45s + 130 + 52s &= 0 \\ 460 - 92s &= 0 \quad \mid +92s \\ 460 &= 92s \quad \mid : 92 \\ 5 &= s \end{aligned}$$

Die Koordinaten von E folgen mit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \begin{pmatrix} 30 - 21 \cdot 5 \\ 20 + 15 \cdot 5 \\ 5 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 30 - 105 \\ 20 + 75 \\ 5 + 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -75 \\ 95 \\ 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der gesuchte Punkt ist somit gegeben durch $E(-75 \mid 95 \mid 15)$.

1.4 Der gesuchte Winkel α entspricht dem Winkel zwischen der xy-Ebene und der Ebene J.

Ein Normalenvektor $\overrightarrow{n_{xy}}$ der x-y-Ebene ist beispielsweise $n_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor $\overrightarrow{n_J}$ der Ebene J kann direkt aus der gegebenen Koordinatengleichung abgelesen werden.

Mit der Formel für Schnittwinkel folgt nun:

$$
\begin{array}{rcl}
\cos(\alpha) & = & \dfrac{\left|\overrightarrow{n_J} \circ \overrightarrow{n_{xy}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_J}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{xy}}\right|} \\
\cos(\alpha) & = & \dfrac{\left|\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} \\
\cos(\alpha) & = & \dfrac{2}{\sqrt{14}} \qquad\qquad |\arccos \\
\alpha & = & \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{14}}\right) \\
\alpha & \approx & 57,69^\circ
\end{array}
$$

Der Steigungswinkel beträgt somit etwa $57,69^\circ$ und überschreitet folglich nicht die Bauvorschrift von 60°.

2

2.1 **1. Schritt: Punkt auf der Geraden bestimmen**

Der Beginn der Entwässerungsleitung liegt laut Aufgabenstellung 2 Meter unter dem Mittelpunkt M des Rechtecks und entsprechend auf der Geraden g_E.

Der Mittelpunkt M der Grundfläche kann mit Hilfe der Diagonalen berechnet werden:

$$
\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{OM} & = & \overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \\
 & = & \begin{pmatrix}-10\\30\\0\end{pmatrix} + \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-50\\50\\0\end{pmatrix} \\
 & = & \begin{pmatrix}-10\\30\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-25\\25\\0\end{pmatrix} \\
 & = & \begin{pmatrix}-35\\55\\0\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Nach Aufgabenstellung befindet sich der Punkt P 2 Meter unter dem Mittelpunkt M.

P ist somit gegeben durch:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 55 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Richtung der Geraden bestimmen

Die x- und y-Koordinaten sind bereits durch $\overrightarrow{v_{xy}}$ gegeben. Damit lautet der Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ der Geraden g_E: $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ v_z \end{pmatrix}$; $v_z \in \mathbb{R}$.

Da die Leitung ein gleichmäßiges Gefälle von $2\,\%$ hat, geht die Leitung auf einer Länge von 100 Metern in der xy-Ebene 2 Meter nach unten. Die Länge des Richtungsvektor in der xy-Ebene entspricht dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{v_{xy}}$:

$$\left|\overrightarrow{v_{xy}}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Auf einer Länge von 5 Metern geht die Leitung bei einem Gefälle von $2\,\%$ somit um 0,1 Meter nach unten.

Damit ist ein Richtungsvektor der Geraden gegeben durch $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -0,1 \end{pmatrix}$.

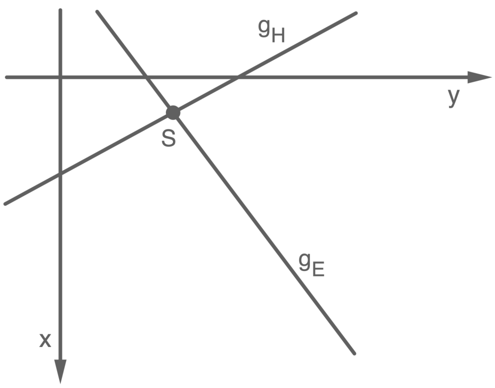
Insgesamt folgt eine Geradngleichung also mit:

$$g_E : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -35 \\ 55 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -0,1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

2.2

1. Schritt: Lage des Fallschachts in der xy-Ebene bestimmen

Da der Fallschacht i n z-Richtung verläuft, hat dieser feste x- und y-Koordinaten. Die Berührungspunkte S_E und S_H der Geraden g_E und g_H mit dem Fallschacht müssen folglich die selben x- und y-Koordinaten besitzen.



Lage der Geraden in der xy-Ebene

Durch Aufstellen eines Gleichungssystems der x- und y-Koordinaten der beiden Geraden lässt sich der Projektionspunkt S ermitteln:

$$\begin{array}{llll}
\text{I} & -35+4s & = 65-2r & \mid +2r+35 \\
\text{II} & 55+3s & = 20+4r & \mid -4r-55 \\
\hline
\text{Ia} & 2r+4s & = 100 & \\
\text{IIa} & -4r+3s & = -35 & \mid +2\cdot \text{Ia} \\
\hline
\text{Ia} & 2r+4s & = 100 & \mid :2 \\
\text{IIb} & 11s & = 165 & \mid :11 \\
\hline
\text{Ib} & r+2s & = 50 & \\
\text{IIc} & s & = 15 &
\end{array}$$

Durch Einsetzen von $s=15$ in Ib folgt $r=20$.

Somit folgen die x- und y-Koordinaten mit:

$$\begin{array}{lccccc}
\text{I} & -35+4\cdot 15 & = & 25 & = & 65-2\cdot 20 \\
\text{II} & 55+3\cdot 15 & = & 100 & = & 20+4\cdot 20
\end{array}$$

Damit lautet der Projektionspunkt $S(25 \mid 100 \mid 0)$.

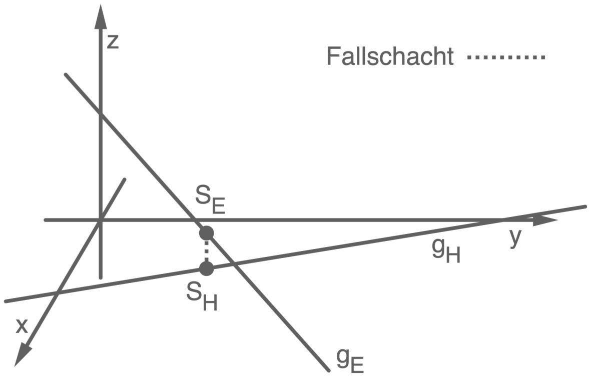
2. Schritt: Berührungspunkte bestimmen

Die z-Koordinaten der Ortsvektoren der Berührungspunkte S_E und S_H mit dem Fallschacht lassen sich durch Wählen eines passenden Werts für die Parameter s und r bestimmen. Diese müssen so gewählt werden, dass die x- und y-Koordinaten mit dem Projektionspunkt S übereinstimmen.

Für $s=15$ und $r=20$ folgt:

$$\overrightarrow{OS_E} = \begin{pmatrix} -35+4\cdot 15 \\ 55+3\cdot 15 \\ -2-0,1\cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 100 \\ -3,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS_H} = \begin{pmatrix} 65-2\cdot 20 \\ 20+4\cdot 20 \\ -3,5-0,01\cdot 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 100 \\ -3,7 \end{pmatrix}$$



3. Schritt: Höhe des Fallschachts berechnen

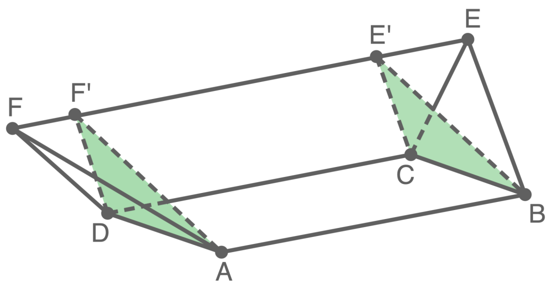
Die Höhe des Fallschachts entspricht der Länge der Verbindungsstrecke $\overrightarrow{S_E S_H}$:

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{S_E S_H}\right| &= \left|\begin{pmatrix}25\\100\\-3,5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}25\\100\\-3,7\end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix}0\\0\\-0,2\end{pmatrix}\right| \\ &= 0,2\ [\mathrm{m}]\end{aligned}$$

Der Fallschacht ist also 0,2 Meter hoch.

3 **Lösungsstrategie**

Der Erdaushub kann in 3 Teilbereiche aufgeteilt und die Volumina der Teilbereiche jeweils einzeln bestimmt werden. Die äußeren Teilbereiche entsprechen hierbei einer Pyramide, der mittlere Teilbereich einem Prisma.



1. Schritt: Aufteilen der Baugrube in drei Teilbereiche

Es können die beiden Punkte E' und F' definiert werden, welche auf der Verbindungsstrecke $\overline{EF}$ liegen und bei Projektion in die x-y-Ebene auf einer Geraden mit B und C beziehungsweise mit A und D liegen.

In der z-Ebene bilden sich so zwei Dreiecke ADF' und BCE'. Diese Dreiecke teilen den Erdaushub in die drei Teilstücke. Die Flächen der Dreiecke sind gleich groß und können wie folgt berechnet werden:

$$A_{\triangle} = A_{BCE'} = A_{ADF'} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|$$

2. Schritt: Volumen V_M des mittleren Teilstücks bestimmen

Die Grund- und Deckfläche des Prismas entsprechen beiden Dreiecksflächen, die parallel und kongruent sind. Das Volumen V_M des mittleren Teilstücks berechnet sich nun mit der Grundläche, also der Fläche des Dreiecks, und der Höhe des Prismas,welche der Grundseite $\overrightarrow{AB}$ beziehungsweise $\overrightarrow{F'E'}$ entspricht:

$$V_M = A_{\triangle} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

3. Schritt: Volumen der äußeren Teilstücke bestimmen

Durch Drehen des Teilstücks am Eckpunkt F auf die Dreiecksfläche ADF' erhält man eine Pyramide mit dem Dreieck als Grundfläche und dem Punkt F' als Spitze. Die Spitze F' liegt über dem Punkt F, somit beträgt die Höhe der Pyramide genau $\left|\overrightarrow{FF'}\right|$.

Für das Volumen V_F einer Pyramide folgt also:

$$V_F = \frac{1}{3} \cdot A_{\triangle} \cdot \left|\overrightarrow{FF'}\right|$$

Analog ergibt sich $V_E = \frac{1}{3} \cdot A_{\triangle} \cdot \left|\overrightarrow{EE'}\right|$.

4. Schritt: Gesamtvolumen V bestimmen

$$\begin{aligned} V &= V_M + V_E + V_F \\ &= A_{\triangle} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| + \frac{1}{3} \cdot A_{\triangle} \cdot \left|\overrightarrow{EE'}\right| + \frac{1}{3} \cdot A_{\triangle} \cdot \left|\overrightarrow{FF'}\right| \\ &= A_{\triangle} \cdot \left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \frac{1}{3} \cdot \left|\overrightarrow{EE'}\right| + \frac{1}{3} \cdot \left|\overrightarrow{FF'}\right|\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \frac{1}{3} \cdot \left|\overrightarrow{EE'}\right| + \frac{1}{3} \cdot \left|\overrightarrow{FF'}\right|\right) \end{aligned}$$