

B1 - Analysis

1 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(t) = a \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t}$, $a \neq 0$.

1.1 Untersuche das Verhalten der Graphen der Schar für $t \rightarrow +\infty$.

(2 BE)

1.2 Ermittle die erste Ableitung der Funktionenschar f_a und zeige, dass für die zweite Ableitung gilt:

$$f_a(t)'' = a \cdot \left(\frac{1}{16}t - \frac{1}{2} \right) \cdot e^{-0,25 \cdot t}$$

(6 BE)

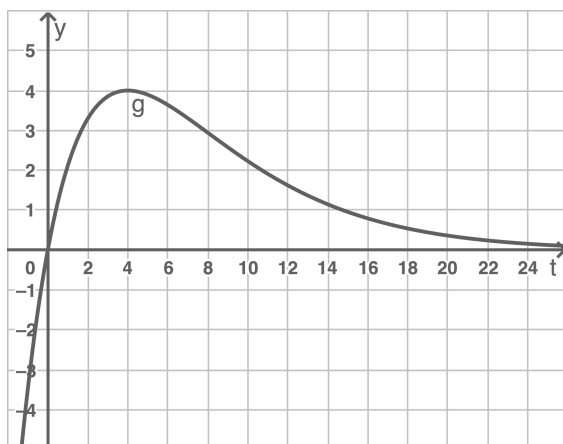
1.3 Berechne die Koordinaten des Extrempunktes der Graphen der Funktionenschar f_a .

Untersuche in Abhängigkeit vom Parameter a , welche Art von Extrempunkt vorliegt.

[Zur Kontrolle: Die Extremstelle liegt bei $t = 4$.]

(6 BE)

1.4 Material 1 zeigt einen Graphen der Schar. Bestimme den zugehörigen Wert von a . Zeige, dass die zugehörige Funktionsgleichung auch in der Form $g(t) = t \cdot e^{1-0,25 \cdot t}$ dargestellt werden kann.



Material 1

(3 BE)

1.5 Beurteile mithilfe von Material 1 die folgende Aussage:

Für $2 \leq t \leq 6$ ändert sich beim Graphen jeder Stammfunktion G von g genau einmal das Krümmungsverhalten.

(2 BE)

1.6 Ermittle mithilfe eines geeigneten Formansatzes eine Stammfunktion G von g .

[Zur Kontrolle: $G(t) = -4 \cdot (t + 4) \cdot e^{1-0,25 \cdot t}$ ist die Funktionsgleichung einer möglichen Stammfunktion von g .]

(5 BE)

- 1.7 Zeige, dass der Inhalt der Fläche, die der Graph von g im Intervall $t \geq 0$ mit der t -Achse einschließt, endlich ist. Ermittle den Inhalt dieser Fläche.

(5 BE)

- 1.8 Der Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion g mit der t -Achse im Intervall $[2; 8]$ einschließt, kann durch zwei unterschiedliche Verfahren näherungsweise bestimmt werden.

I. Sehnentrapezverfahren mit der Streifenbreite 2 (Material 2)

II. Kepler'sche Fassregel (Material 3)

Skizziere den Näherungsansatz zum Sehnentrapezverfahren (I) in Material 1.

Ermittle jeweils den Näherungswert (auf drei Nachkommastellen gerundet) und beurteile die Güte der Näherungen durch Vergleich mit dem tatsächlichen Flächeninhalt.

Material 2:

Beim Sehnentrapezverfahren wird der Inhalt einer Fläche, die in einem Intervall vom Graphen der Funktion g und der t -Achse eingeschlossen wird, durch den Flächeninhalt mehrerer trapezförmiger Streifen gleicher Streifenbreite angenähert. Für einen Streifen im Intervall $[a; b]$ gilt: Der Graph von g wird durch eine Sehne zwischen den Punkten $P(a | g(a))$ und $Q(b | g(b))$ ersetzt. Die Flächeninhalte der jeweils entstehenden Trapeze werden berechnet und addiert.

Material 3:

Die Keplersche Fassregel (nach Johannes Kepler) ist eine Methode zur näherungsweisen Berechnung von Integralen. Zur Berechnung wird folgende Gleichung verwendet:

$$\int_a^b g(t) dt \approx \frac{b-a}{6} \left(g(a) + 4 \cdot g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right)$$

(9 BE)

- 2 Ein Patient erhält nach einer Operation ein Medikament per Infusion. Diese ist so eingestellt, dass die Konzentration des Wirkstoffs im Blut in mg/l über die Zeit t in Stunden konstant ist. Der Verlauf der Konzentration kann mit der Funktion h mit $h(t) = 1$ beschrieben werden. Um die Wirkung des Medikaments zu erhöhen, erhält der Patient das Medikament zusätzlich noch einmal durch eine intravenöse Injektion. Der Verlauf der durch diese Injektion verursachten Konzentration des Wirkstoffs im Blut kann mit der Funktion g mit $g(t) = t \cdot e^{1-0,25 \cdot t}$ (aus Aufgabe 1.4) beschrieben werden. Die Funktion k mit $k(t) = 1 + t \cdot e^{1-0,25 \cdot t}$ gibt somit für die ersten 24 Stunden t in Stunden) den Verlauf der (Gesamt-)Konzentration des Wirkstoffs im Blut in mg/l an. Dabei ist $t = 0$ der Zeitpunkt, zu dem die intravenöse Injektion des Medikaments erfolgt.

- 2.1 Zu einem bestimmten Zeitpunkt weist die Änderungsrate der (Gesamt-)Konzentration des Wirkstoffs im Blut ein Extremum auf.

Bestimme diesen Zeitpunkt.

Hinweis: Eine Randwertbetrachtung ist nicht erforderlich.

(3 BE)

2.2 Berechne die durchschnittliche Konzentration, die in den ersten **8 h** nach Zuführung der zweiten Dosis des Medikaments vorliegt.

(4 BE)

2.3 Die Wirkstoffmenge, die mindestens im Blut vorhanden sein muss, damit das Medikament wirkt, bezeichnet man als therapeutische Konzentration.

Bei dem hier betrachteten Verlauf der Krankheit liegt die therapeutische Konzentration bei **2 mg/l**. Diese muss für einen Zeitraum von mindestens **14 h** erreicht werden.

Entscheide begründet, ob die vorliegende Medikamentengabe den Bedingungen genügt.

(5 BE)