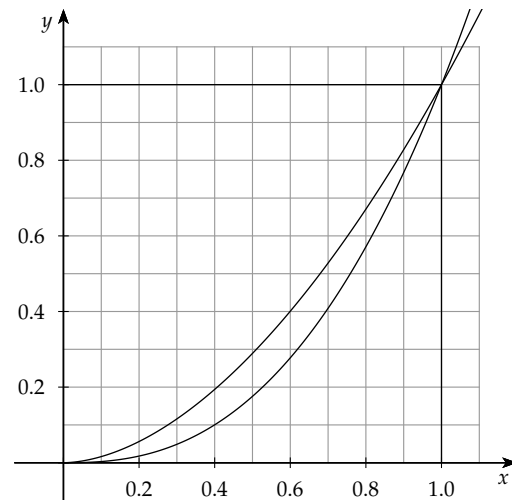


In der Volkswirtschaft wird unter anderem die Verteilung von Vermögen (Einkommen, Steueraufkommen, Grundbesitz etc.) untersucht. Zur anschaulichen Darstellung solcher Verteilung sind LORENZ-Kurven üblich.

Verläuft der Graph einer LORENZ-Funktion zum Beispiel durch den Punkt $(0,4 \mid 0,1)$, so bedeutet dies, dass die ärmeren 40 % der Bevölkerung zusammen über 10 % des gesamten Vermögens verfügen.

Auf der x -Achse ist also der Bevölkerungsanteil nach wachsendem Vermögen geordnet, auf der y -Achse (für den jeweiligen Bevölkerungsanteil) der zugehörige Anteil am gesamten Vermögen aufgetragen.



1. Bestimmen Sie für eine Verteilung, bei der die ärmeren 40 % der Bevölkerung 10 % des Gesamtvermögens besitzen, den Term der LORENZ-Funktion als Potenzfunktion vom Typ x^r . (6BE)
Ermitteln Sie den Vermögensanteil der *reichsten* 20 % der Bevölkerung bei dieser Verteilung.

2. Begründen Sie folgende Eigenschaften aller LORENZ-Funktionen f aus dem Sachzusammenhang: (12BE)
 - Der Definitionsbereich ist $[0; 1]$ und es gilt $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.
 - Sie haben im Inneren des Intervalls $[0; 1]$ keine negativen Funktionswerte.
 - Sie sind im Inneren des Intervalls $[0; 1]$ monoton wachsend und linksgekrümmt.

Weisen Sie nach, dass $b(x) = 2 \cdot 1,5^x - 2$ eine Funktion mit diesen Eigenschaften ist. Beschreiben Sie die LORENZ-Kurve für eine gleichmäßige Vermögensverteilung.

Als Maß für die Ungleichheiten einer Verteilung wird in der Volkswirtschaft der GINI-Koeffizient benutzt. Er berechnet sich als Verhältnis des Inhalts der Fläche zwischen der Diagonalen des Einheitsquadrats und der jeweiligen LORENZ-Kurve zum Flächeninhalt des Dreiecks unter der Diagonalen des Einheitsquadrats.

3. Berechnen Sie aufgrund der obigen Definition die GINI-Koeffizienten für die LORENZ-Funktion $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^8$. (13BE)
Begründen Sie allgemein, welche Werte der GINI-Koeffizienten bei sehr ungleichmäßigen Verteilungen annimmt und welche Werte er überhaupt annehmen kann.
Zeigen Sie, dass der GINI-Koeffizient bei LORENZ-Funktionen vom Typ x^r ($r \geq 1$) immer den Wert $G = \frac{r-1}{r+1}$ hat.

4. Bestimmen Sie den GINI-Koeffizient der Verteilung $b(x) = 2 \cdot 1,5^x - 2$. Berechnen Sie die Werte der Ableitung der LORENZ-Funktion b mit $b(x) = 2 \cdot 1,5^x - 2$ an den Stellen $x = 0,4$ und $x = 0,9$. (9BE)
Beschreiben Sie die inhaltliche Bedeutung dieser Ableitungswerte.