

C1 - Lineare Algebra/ Analytische Geometrie

Die „Puerta de Europa“ in Madrid besteht aus zwei einander zugeneigten Türmen (Material 1), die jeweils die Form eines Spats aufweisen. Ein Spat ist ein Körper, dessen Oberfläche aus sechs Parallelogrammen besteht, wobei jeweils gegenüberliegende Flächen kongruent und parallel zueinander sind.

Im Modell liegen die Bodenflächen beider Türme in der x - y -Ebene, die den Erdboden beschreibt.

Die Dachflächen liegen in einer Ebene, die parallel zur x - y -Ebene verläuft, die Nord- und Südwälle liegen jeweils in einer Ebene, die parallel zur y - z -Ebene verläuft. Die (positive) x -Achse zeigt in Richtung Süden, die (positive) y -Achse in Richtung Osten.

Die Türme haben jeweils eine Höhe von **114 m**. Der Ostturm hat unter anderem die Eckpunkte $A(1,75 \mid 6 \mid 0)$, $B(1,75 \mid 9,5 \mid 0)$, $D(-1,75 \mid 6 \mid 0)$ und $E(1,75 \mid 2,9 \mid 11,4)$.

Eine Längeneinheit entspricht dabei **10 m**.



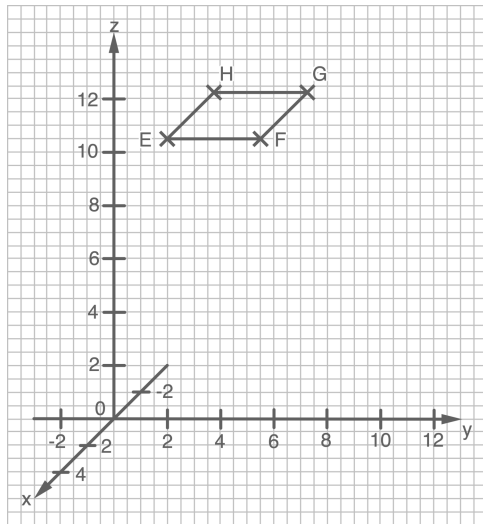
Material 1: Bilder der Puerta de Europa

- 1.1 Die Eckpunkte A , B und D begrenzen gemeinsam mit einem Punkt C die quadratische Bodenfläche des Ostturms. Gib den Eckpunkt C an und bestimme den Flächeninhalt der Bodenfläche des Ostturms.

(4 BE)

- 1.2 Im Koordinatensystem in Material 2 ist die Dachfläche des Ostturms eingezeichnet. Gib die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte **F**, **G** und **H** des Ostturms an. Zeichne den gesamten Ostturm in das Koordinatensystem ein.

(7 BE)



Material 2: Dachfläche des Ostturms

- 1.3 Zeige, dass der Neigungswinkel des Ostturms (in westlicher Richtung) gegenüber der Vertikalen etwa 15° beträgt.

(3 BE)

- 2 Im Modell entspricht der Westturm einer Spiegelung des Ostturms an der x - z -Ebene.

- 2.1 Gib eine Spiegelmatrix **S** an, mit deren Hilfe man für einen beliebigen Punkt **P** des Ostturms mit Hilfe der Gleichung $\overrightarrow{OP'} = S \cdot \overrightarrow{OP}$ den entsprechenden (gespiegelten) Punkt des Westturms ermitteln kann.

(3 BE)

- 2.2 Bestimme die Koordinaten des Punktes **A'** des Westturms und gib an, wie weit die beiden Türme am Boden voneinander entfernt sind.

(4 BE)

- 3 Beide Türme haben jeweils **26** Etagen, die alle die gleiche Höhe besitzen. Um die Etagen eines Turms mit einem Aufzug zu erreichen, wäre ein vertikaler Aufzugschacht notwendig. Zeige, dass es möglich ist, alle Etagen eines Turms mit nur einem am Boden beginnenden durchgängigen Aufzugschacht zu erreichen, der in Nord-Süd-Richtung und in Ost-West-Richtung jeweils **3 m** misst. Die Deckenstärken der Etagen und die Wandstärken der Außenwände sollen hierbei vernachlässigt werden.

(6 BE)

- 4 Vor einigen Jahren plante man, auf dem südlichen Vorplatz der beiden Türme einen Obelisk zu errichten. Ein Obelisk ist ein nach oben schmaler werdender Pfeiler. Der Mittelpunkt P seiner Grundfläche sollte so auf dem Erdboden platziert werden, dass er mit den Mittelpunkten der Bodenflächen der Türme ein gleichseitiges Dreieck bildet. Bestimme die Koordinaten des zur Umsetzung dieser Planung benötigten Punktes P in der x - y -Ebene. (8 BE)
- 5 An einem Tag im März 2021 scheint die Sonne um **13.30** Uhr näherungsweise aus südlicher Richtung auf die Puerta de Europa und den inzwischen im Mittelpunkt P der Grundfläche aus Aufgabe 4 errichteten, **93 m** hohen Obelisk. Die Spitze des Obelisk liegt in vertikaler Richtung genau oberhalb des Punktes P . Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 + 0,2t \\ 0,5t \\ -1,2 + 0,2t \end{pmatrix}$ beschreibt für einen sehr eng begrenzten Zeitraum in guter Näherung die Richtung der Sonnenstrahlen. Der Parameter t steht dabei für die Zeit nach **13.30** Uhr in Stunden. Es gilt $0 \leq t \leq 2$.
- 5.1 Berechne den Winkel, in dem die Sonnenstrahlen um **13.30** Uhr auf den Erdboden treffen und den Schattenpunkt der Spitze des Obelisk auf dem Erdboden zu dieser Uhrzeit.
[Hinweis: Solltest du die Koordinaten des Punktes P in Aufgabe 4 nicht bestimmt haben, verwende stattdessen den Ersatzpunkt $P^*(13,5 \mid 0 \mid 0)$.] (8 BE)
- 5.2 Berechne die Matrix, die den Schattenwurf eines beliebigen Punktes $Q(x \mid y \mid z)$ mit $z \geq 0$ auf die x - y -Ebene für den durch den Definitionsbereich für t gegebenen Zeitraum beschreibt. (7 BE)

Bildnachweise

- [1] No machine-readable author provided. [Manuel González Olachea](#) assumed (based on copyright claims)., [TorresKio](#), [CC BY 3.0](#)