B1 - Analytische Geometrie

1

1.1 Rechteck nachweisen

Das Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Rechteck, wenn die jeweils gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind, parallel zueinander sind und die anliegenden Seiten senkrecht aufeinander stehen.

Die Verbindungsvektoren der Eckpunkte müssen also folgende Bedingungen erfüllen:

1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2. $\overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{AB} = 0$

1. Schritt: Gleichheit zeigen

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} \\ &= \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2,8 \\ 2,1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1,8 \\ 2,1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \\ &= \begin{pmatrix} 5,5 \\ 2,8 \\ 2,1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1,8 \\ 2,1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= \begin{pmatrix} 5,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \\
&= \begin{pmatrix} 5,5 \\ 2,8 \\ 2,1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2,8 \\ 2,1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Schritt: Orthogonalität zeigen

Es reicht zu zeigen, dass $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{AB}$ senkrecht aufeinander stehen, da wir bereits $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ gezeigt haben.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1,8 \\ 2,1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 \cdot 5 + 1,8 \cdot 0 + 2,1 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

Flächeninhalt F_{ABCD} prüfen

$$\begin{aligned}
F_{ABCD} &= \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \\
&= \sqrt{0 + 1,8^2 + 2,1^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0 + 0} \\
&= \sqrt{7,65} \cdot 5 \\
&\approx 13,83 \\
&> 13,5
\end{aligned}$$

Der geforderte Mindestflächeninhalt von $13,5\,m^2$ wird folglich nicht unterschritten.

1.2 Die Richtung, in der die Sonnenstrahlen senkrecht auf die Kollektorfläche treffen, ist durch die Normalenvektoren der Ebene, welche durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufgespannt wird, gegeben.

Ein solcher Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ kann mit Hilfe des Vektorprodukts bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \\ &= \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1,8\\2,1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0-0\\0-2,1\cdot 5\\5\cdot 1,8-0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0\\-10,5\\9\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Da die Sonnenstrahlen von oben auf die Kollektorfläche auftreffen, muss der Vektor also nach unten zeigen. Die z-Koordinate muss folglich negativ sein.

Durch Umkehren der Vorzeichen erhält man also:

$$(-1)\cdot\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}0\\10,5\\-9\end{pmatrix}$$

Somit treffen die Sonnenstrahlen in der Richtung $\begin{pmatrix}0\\10,5\\-9\end{pmatrix}$ senkrecht auf die Kollektorfläche auf.

1.3 Der Neigungswinkel der Kollektorfläche gegenüber dem Dach entspricht dem Winkel zwischen dem Vektor $\overrightarrow{AD}$ und der y-Achse. Der Richtungsvektor der y-Achse ist durch $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ gegeben.

Mit der Formel für Schnittwinkel folgt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\overrightarrow{AD} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1,8 \\ 2,1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1,8 \\ 2,1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1,8}{\sqrt{7,65 \cdot 1}}$$

$$\cos(\alpha) \approx 0,65 \qquad |\arccos$$

$$\alpha \approx 49,46$$

Der Neigungswinkel beträgt somit etwa $49,46^\circ$ und überschreitet folglich die empfohlene Grenze von 50° nicht.

2

2.1 Aus dem Material 2 können folgende Bedingungen für die Lage des Punktes D' abgelesen werden:

$$(1) \quad \overrightarrow{DD'} \parallel \overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{DD'} = c \cdot \overrightarrow{v};\ c \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{AD'} \perp \overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AD'} \circ \overrightarrow{v} = 0$$

Der Punkt D' kann durch den dazugehörigen Ortsvektor $\overrightarrow{OD'} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ definiert werden.

1. Schritt: Gleichungssystem zu I aufstellen

Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{DD'}$ ist gegeben durch:

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} d_1 - 0,5 \\ d_2 - 2,8 \\ d_3 - 2,1 \end{pmatrix}$$

Die erste Bedingung kann nun wie folgt in ein Gleichungssystem umgeschrieben und gelöst werden:

$$\begin{array}{llll} \text{I} & d_1 - 0,5 & = 0 & \mid +0,5 \\ \text{II} & d_2 - 2,8 & = c \cdot 25 & \\ \text{III} & d_3 - 2,1 & = c \cdot (-7) & \mid :(-7) \\ \hline \text{Ia} & d_1 & = 0,5 & \\ \text{II} & d_2 - 2,8 & = c \cdot 25 & \\ \text{IIIa} & -\frac{1}{7} \cdot d_3 + 0,3 & = c & \end{array}$$

Aus Ia kann direkt $d_1 = 0,5$ abgelesen werden.

Durch Einsetzen von IIIa in II ergibt sich:

$$\begin{array}{rll} d_2 - 2,8 & = c \cdot 25 & \mid c = 0,3 - \frac{1}{7} \cdot d_3 \\ d_2 - 2,8 & = \left(-\frac{1}{7} \cdot d_3 + 0,3\right) \cdot 25 & \\ d_2 - 2,8 & = -\frac{25}{7} \cdot d_3 + 7,5 & \mid +2,8 \\ d_2 & = 10,3 - \frac{25}{7} \cdot d_3 & \end{array}$$

Damit gilt für den Ortsvektor des Punktes D': $\overrightarrow{OD'} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 10,3 - \frac{25}{7} \cdot d_3 \\ d_3 \end{pmatrix}$

2. Schritt: Gleichung zu II aufstellen

Für den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AD'}$ gilt:

$$\begin{array}{rl} \overrightarrow{AD'} & = \overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OA} \\ & = \begin{pmatrix} 0,5 - 0,5 \\ \left(10,3 - \frac{25}{7} \cdot d_3\right) - 1 \\ d_3 - 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 0 \\ 9,3 - \frac{25}{7} \cdot d_3 \\ d_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die zweite Bedingung kann nun wie folgt als Gleichung formuliert und gelöst werden:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AD'} \circ \overrightarrow{v} &= 0 \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 9,3 - \frac{25}{7} \cdot d_3 \\ d_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ -7 \end{pmatrix} &= 0 \\
0 + 25 \cdot \left(9,3 - \frac{25}{7} \cdot d_3\right) - 7 \cdot d_3 &= 0 \\
232,5 - \frac{625}{7} \cdot d_3 - 7 \cdot d_3 &= 0 \qquad \mid -232,5 \\
\left(-\frac{625}{7} - 7\right) \cdot d_3 &= -232,5 \\
-\frac{674}{7} \cdot d_3 &= -232,5 \qquad \mid \cdot \left(-\frac{7}{674}\right) \\
d_3 &= \frac{3.255}{1.348} \\
&\approx 2,41
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen in die Koordinaten von D' ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
d_2 &= 10,3 - \frac{25}{7} \cdot d_3 \\
&= 10,3 - \frac{25}{7} \cdot \frac{3.255}{1.348} \\
&\approx 1,68
\end{aligned}
$$

Der gesuchte Punkt ist somit $D'(0,5 \mid 1,68 \mid 2,41)$.

2.2 **Flächeninhalt F_{eff} bestimmen**

$$
\begin{aligned}
F_{eff} &= \left|\overrightarrow{AD'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0,68 \\ 2,41 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{0,68^2 + 2,41^2} \cdot 5 \\
&\approx 12,52\ [\mathrm{m}^2]
\end{aligned}
$$

In dem in Aufgabe 2.1 beschriebenen Fall ist der Flächeninhalt der effizienten Kollektorfläche folglich $12,52\,\mathrm{m}^2$.

Prozentsatz der maximalen Leistung bestimmen

Die maximale Leistung wird genau dann erreicht, wenn die Sonnenstrahlen senkrecht auf der

Kollektorfläche stehen. Die Leistung ist hierbei proportional zum Flächeninhalt der Kollektorfläche.

Den gesuchte Prozentsatz p kann also anhand von den Flächeninhalten F_{eff} und F_{ABCD} ermittelt werden:

$$p = \frac{F_{eff}}{F_{ABCD}} = \frac{12,52}{13,83} = 0,9053$$

In dem in Aufgabe 2.1 beschriebenen Fall kann also $90,53\,\%$ der maximalen Leistung erzielt werden.

3

3.1 Da nach eine Projektionsmatrix M gesucht ist, welche beliebige Punkte $P(x \mid y \mid z)$ in die xy -Ebene projiziert,muss für einen beliebigen Punkt $P(x \mid y \mid z)$ mit Schattenpunkt $P'(a \mid b \mid 0)$ also gelten:

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}; \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Der Schattenpunkt eines beliebigen Punktes $P(x \mid y \mid z)$ entspricht dem Schnittpunkt der xy-Ebene mit der Geraden $g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{v};\ \lambda \in \mathbb{R}$ eines Sonnenstrahls durch den Punkt P .

1. Schritt: Allgemeinen Schattenpunkt P' berechnen

Die x-y-Ebene ist gegeben durch die Ebenengleichung $E: \overrightarrow{x} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{R}.$

Durch Gleichsetzen der Geraden- und die Ebenengleichung folgt:

$$\overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overline{v} \quad = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ -7 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es kann direkt $x = a$ abgelesen werden. Die x-Koordinate bleibt also durch die Projektion unverändert.

Aus der dritten Zeile ergibt sich folgende Gleichung:

$$
\begin{aligned}
z+\lambda\cdot(-7) &= 0 \quad & \scriptstyle\mid -z \\
\lambda\cdot(-7) &= -z \quad & \scriptstyle\mid :(-7) \\
\lambda &= \frac{z}{7}
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen von $\lambda = \dfrac{z}{7}$ in die Gleichung für die y-Koordinate folgt:

$$
\begin{aligned}
y+\lambda\cdot 25 &= b \quad & \scriptstyle\mid \lambda=\frac{z}{7} \\
y+z\cdot\frac{25}{7} &= b
\end{aligned}
$$

Damit gilt für einen Schattenpunkt $P'(a\mid b\mid 0)$ eines beliebigen Punktes $P(x\mid y\mid z)$:

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} a\\ b\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ y+z\cdot\frac{25}{7}\\ 0\end{pmatrix}$$

2. Schritt: Projektionsmatrix M bestimmen

Durch Einsetzen des oben berechneten Schnittpunkt in die Bedingung für die Projektionsmatrix M ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a\\ b\\ 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x\\ y+z\cdot\frac{25}{7}\\ 0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z\\ 0\cdot x+1\cdot y+\frac{25}{7}\cdot z\\ 0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{25}{7}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Somit hat die gesuchte Projektionsmatrix M die Form:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{25}{7}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

3.2 Schattenpunkte berechnen

Die Schattenpunkte der Eckpunkte können mit dem Matrix-Vektor-Produkt der Projektionsmatrix M und den Ortsvektoren der Eckpunkte bestimmt werden.

Da A und B keine Schatten werfen, weil sie bereits auf dem Dach liegen, reicht es, die Punkte D

und C zu betrachten.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC_S} &= M\cdot\overrightarrow{OC}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{25}{7}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5,5\\ 2,8\\ 2,1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}5,5\\ 2,8+2,1\cdot\frac{25}{7}\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}5,5\\ 10,3\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OD_S} &= M\cdot\overrightarrow{OD}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{25}{7}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,5\\ 2,8\\ 2,1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0,5\\ 10,3\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit sind $C_S\,(5,5\mid 10,3\mid 0)$ und $D_S\,(0,5\mid 10,3\mid 0)$ die Schattenpunkte von C und D.

Entscheidung treffen

Die Dachfläche ist in y-Richtung 9 Meter lang. Die Schattenpunkte haben jedoch einen y-Wert von 10,3 und liegen somit hinter dem Ende des Daches. Der Schatten liegt folglich nicht ganz auf der Dachfläche.