1. **▶ Gesamtanteil der Frauen an den Lehrkräften bestimmen** (10 P)

Gesucht ist der Gesamtanteil der Frauen an den Lehrkräften. Im Aufgabentext ist angegeben, dass

- 55 % der Gymnasiallehrkräfte weiblich sind und es insgesamt 12.115 Gymnasiallehrkräfte gibt.
- 91 % der Grundschullehrkräfte weiblich sind und es insgesamt 17.037 Grundschullehrkräfte gibt.
- 62 % der Lehrkräfte in den anderen Schulformen weiblich sind.
- es in Hessen insgesamt 60.357 Lehrerinnen und Lehrer gibt.

Mit diesen Informationen kannst du nun den Anteil der Lehrerinnen an den Lehrkräften in Hessen berechnen. Bestimme dazu zunächst die Anzahl der Lehrerinnen an den einzelnen Schulformen:

Für das Gymnasium ergibt sich für die Zahl Z_{Gy} der Lehrerinnen:

$Z_{Gy} = 0,55 \cdot 12.115 \approx 6.663$

Für die Grundschule folgt analog:

$Z_{Gr} = 0,91 \cdot 17.037 \approx 15.504$

An der anderen Schulformen gibt es insgesamt

$60.357 - 17.037 - 12.115 = 31.205$

Lehrkräfte. Für die Zahl der Lehrerinnen ergibt sich hier:

$Z_{AS} = 0,62 \cdot 31.205 \approx 19.347$

Für den Gesamtanteil w der Lehrerinnen in Hessen ergibt sich dann:

$$w = \frac{Z_{AS} + Z_{Gr} + Z_{Gy}}{60.357} = \frac{41.514}{60.357} \approx 0,688 = 68,8\,\%$$

Der Anteil der Frauen an den Lehrkräften in Hessen beträgt demnach etwa 68,8 %.

▶ Wahrscheinlichkeit für eine Grundschullehrerin bestimmen

Nun ist die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht, dass eine Lehrerin aus der Gruppe der Lehrkräfte eine Grundschullehrerin ist. Du weißt, dass es sich bei der Lehrkraft um eine Lehrerin handelt. Von diesen gibt es in Hessen insgesamt 41.514 Stück, wobei sich ihre Gesamtzahl n wie folgt zusammensetzt:

$n = Z_{AS} + Z_{Gr} + Z_{Gy} = 41.514$

Davon sind $Z_{Gr} = 15.504$ an einer Grundschule beschäftigt. Die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass eine Lehrerin aus Hessen Grundschullehrerin ist, beträgt demnach:

$$p = \frac{Z_{Gr}}{n} = \frac{15.504}{41.514} \approx 37,3\,\%.$$

Man trifft also mit 37,3 % Wahrscheinlichkeit auf eine Grundschullehrerin.

2. ► **Ansätze richtig zuordnen und Zuordnung begründen** (9 P)

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E, mit:

„Aus 8 zufällig ausgewählten Personen sind genau 5 Frauen und 3 Männer.“

Betrachte nacheinander die drei Ansätze und prüfe, ob sie eine exakte, eine genäherte oder eine falsche Lösung darstellen. Beachte dabei, dass bei Auswahl der Personen für die Befragung, diese sich dann nicht mehr in der Stichprobe von 577 Frauen und 346 Männer befinden. Das sich die Anzahl der Lehrkräfte nach „ziehen“ eines männlichen oder weiblichen Lehrers verringert, muss es sich hier um ein „Ziehen ohne Zurücklegen“ handeln, was du beim Lösen dieser Aufgabe besonders beachten musst.

Ansatz A: Hypergeometrische Verteilung

Der Ansatz A stellt eine hypergeometrische Verteilung dar. Im Detail bedeutet der Term

$$P(E) = \frac{\binom{577}{5} \cdot \binom{346}{3}}{\binom{923}{8}}$$

Folgendes: Die Binomialkoeffizienten $\binom{X}{Y}$ geben an, wie mögliche Kombinationen es gibt, Y Elemente aus einer Menge mit X Elementen auszuwählen. Das heißt: Es gibt $\binom{577}{5}$ Möglichkeiten 5 Frauen aus dem Frauenteil und $\binom{346}{3}$ Möglichkeiten 3 Männer aus dem männlichen Teil der Lehrkräfte auszuwählen. Dies sind die Anzahlen der „günstigen Kombinationen“. Miteinander multipliziert ergeben sie die Gesamtzahl der günstigen Kombinationen für das Ereignis E. Geteilt durch die Gesamtzahl aller möglichen Kombinationen $\binom{923}{8}$ ergibt sich die genaue Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 8 zufällig ausgewählten Lehrkräften genau 5 männlich und 3 weiblich sind.

Der Ansatz ist also richtig und exakt, weil er berücksichtigt, dass hier ein Zufallsexperiment der Form „Ziehen ohne Zurücklegen“ vorliegt.

Ansatz B: Nur ein Pfad

Der zweite Ansatz wählt einen Pfad aus dem Baumdiagramm aus, in dem 5 Frauen und 3 Männer gezogen werden. Nach der Pfadregel werden die Wahrscheinlichkeiten für jede Stufe multipliziert. Allerdings gibt es mehrere Pfade, die insgesamt auf 5 Frauen und 3 Männer in der Summe führen.

Genauer sind dies so viele Pfade wie es Reihenfolgen gibt, 5 Frauen und 3 Männer auszuwählen. Diese Zahl kannst du mit den Binomialkoeffizienten ermitteln:

$$\binom{8}{5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

Da bei diesem Ansatz nur einer der 56 möglichen Pfade berücksichtigt wird, was bedeutet das die Reihenfolge nicht beachtet wird, ist dieser Ansatz offensichtlich falsch.

Ansatz C: Binomialverteilung

Im dritten Ansatz wird angenommen, dass sich die Wahrscheinlichkeit, beim Auswählen eine Frau zu treffen, nicht ändert, auch wenn man bereits mehrere Frauen ausgewählt hat. Dann lässt sich die Wahrscheinlichkeit, bei 8 Personen auf 5 Frauen zu stoßen, mithilfe der Binomialverteilung bestimmen.

Allerdings liegt bei Ereignis E ein „Ziehen ohne zurücklegen" vor. Da aber das Verhältnis der gezogenen Elemente $n = 8$ zur Gesamtzahl der Elemente $N = 923$ kleiner als etwa 5 % ist, kann man näherungsweise eine Binomialverteilung annehmen. In diesem Fall ist mit

$$\frac{n}{N} = \frac{8}{923} \approx 0,9\,\%$$

eine solche Näherung zulässig. Das heißt der dritte Ansatz über die Binomialverteilung ist möglich und entspricht der Näherungslösung für den behandelten Sachverhalt.

3.1 ▶ **Fehler 2. Art definieren und Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler ausrechnen** (4 P)

Ein Fehler 2. Art liegt vor, wenn die Nullhypothese tatsächlich falsch ist, aber dennoch angenommen wird. In unserem Fall bedeutet das: Der Anteil der männlichen Studienanfänger liegt in Wirklichkeit bei $\frac{1}{6}$, dennoch werden in der Stichprobe **weniger als 8** männliche Lehramtstudenten gefunden. Wenn dieser Fall eintritt, dann ist nach Festlegung der Agentur die Nullhypothese nicht bestätigt.

Bei wahrer Nullhypothese lässt sich die Anzahl der Männer unter allen Studienanfängern näherungsweise durch ein binomialverteilte Zufallsvariable beschreiben. Sei diese Zufallsvariable Y, so ist diese mit den Parametern $n = 50$ und $p = \frac{1}{6}$ verteilt.

Unter Voraussetzung einer wahren Nullhypothese und einer Verteilung nach Zufallsvariable Y, ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art also $P(Y \leq 7)$.

Betrachte die Tabelle im Anhang für die Binomialsummenfunktion für $n = 50$ und sieh dir die Spalte für $p = \frac{1}{6}$ an: Du kannst ihr den Wert $P(Y \leq 7) = 0,3911$ entnehmen.

Das bedeutet: Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art und irrtümlicherweise davon auszugehen, dass sich die Zahl der männlichen Studenten nicht erhöht hat, ist mit 39,11 % recht hoch.

3.2 ▶ **Hypothesentest entwickeln** (7 P)

Sei X die Zufallsvariable, welche die Anzahl der Studenten beschreibt, die zu Beginn des neuen Semesters mit dem Studium des Grundschullehramts beginnen.

Getestet wird die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0,1$. Dabei werden 225 Studentinnen und Studenten befragt. X kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 225$. Bei wahrer Nullhypothese ist $p = 0,1$.

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn **sehr viele** der Befragten angeben, männlich zu sein. Als untere Grenze des Ablehnungsbereichs können wir also k mit $\overline{A} = \{k, k+1, ..., n\}$ setzen.

Das Signifikanzniveau von 5 % gibt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art an, also dafür, dass die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt wird. Dies ist dann der Fall, wenn $P(X \geq k) < 0{,}05$ ist für $p = 0{,}1$.

Da n sehr groß ist, bietet sich eine Näherung durch die Normalverteilung an. Dabei erhalten wir

$\mu = n \cdot p = 225 \cdot 0{,}1 = 22{,}5$

und

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{22{,}5 \cdot 0{,}9} = 4,5.$

Mit $\sigma > 3$ ist die Laplace-Bedingung erfüllt und eine Näherung durch die Normalverteilung ist zulässig.

Zurück zu unserem Wert für k:

$$\begin{aligned} P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1) = 1 - \Phi\left(\frac{k-1+0{,}5-22{,}5}{4{,}5}\right) &\leq 0{,}05 && \mid -1 \\ -\Phi\left(\frac{k-23}{4{,}5}\right) &\leq -0{,}95 && \mid \cdot(-1) \\ \Phi\left(\frac{k-23}{4{,}5}\right) &\geq 0{,}95 \end{aligned}$$

Die Tabelle zur Standardnormalverteilung liefert $\Phi\,(1{,}65) = 0{,}95$, also:

$$\begin{aligned} \frac{k-23}{4{,}5} &\geq 1{,}65 && \mid \cdot 4{,}5 \\ k - 23 &\geq 7{,}425 && \mid +23 \\ k &\geq 30{,}425 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{31, 32, ..., 225\}$. Wenn mindestens 31 der 225 Befragten angeben, männlich zu sein, dann wird die Nullhypothese abgelehnt und die Behauptung der Agentur ist bestätigt.