1.1 ► Geradengleichung angeben (10BE)

Mit P als Aufpunkt und dem Vektor $\overrightarrow{PQ_k}$ als Richtungsvektor ergibt sich die Gleichung:

$$g_k : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -k-3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.2 ► Lage der Geraden g_k nachweisen

Die Punkte Q_k lassen sich als „Gerade" auffassen:

$$q_k : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Gerade und ein Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt, spannen eine Ebene eindeutig auf. Die Geraden g_k liegen also in einer Ebene, welche von der Geraden q_k und dem Punkt P aufgespannt wird.
Wir gehen nun so vor: Wir wählen zunächst zwei Punkte $Q_0\,(3 \mid 0 \mid 0)$ und $Q_1\,(3 \mid -1 \mid 0)$ (auch andere Punkte Q_k sind möglich!) und bestimmen eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform, welche von den Punkten P, Q_0 und Q_1 aufgespannt wird. Anschließend zeigen wir, dass alle Geraden g_k in dieser Ebene liegen.

In Parameterform lautet die Gleichung dieser Ebene F:

$$F : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OO} + r \cdot \overrightarrow{PQ_0} + s \cdot \overrightarrow{PQ_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Über das Vektorprodukt der Richtungsvektoren erhalten wir den **Normalenvektor** der Ebene:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 3 & - & 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot 3 & - & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-4) & - & (-3) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatenform der Ebenengleichung lautet also zunächst:

$F : x - z = d$. Einsetzen der Koordinaten von P liefert: $0 - (-3) = 3 = d$ und damit die Gleichung:

$F : x - z = 3$.

Die Geraden g_k liegen alle in der Ebene F, wenn sie die Gleichung von F erfüllen. Einsetzen der Geradengleichung liefert:

$g_k \cap F : 3t - (-3 + 3t) = 3t + 3 - 3t = 3$. Dies ist eine wahre Aussage. Damit ist gezeigt: Alle Geraden g_k liegen in der Ebene $F : x - z = 3$.

2. ► **Gleichungen der Mittelebenen bestimmen** (10BE)

Eine Gerade und eine Ebene verlaufen orthogonal, wenn der **Richtungsvektor** der Geraden und der **Normalenvektor** der Ebene parallel verlaufen. Die Normalenvektoren der Ebenen E lauten also: $\overrightarrow{n}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ -k-3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Weiterhin soll die Ebene durch den **Mittelpunkt** der Strecke $\overline{PQ_k}$ verlaufen. Dieser Mittelpunkt M_k hat die Koordinaten:

$$\overrightarrow{OM_k} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ_k}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3-k \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5-0{,}5k \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

Mit dem Vektor $\overrightarrow{n}_k$ als Normalenvektor und dem Punkt M_k als Aufpunkt erhalten wir die Ebenengleichung:

$$E_k: \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5-0{,}5k \\ -1{,}5 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -k-3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} E_k: 3x + (-k-3)y + 3z - (4{,}5 + (1{,}5-0{,}5k)\cdot(-k-3) - 4{,}5) &= 0 \\ E_k: 3x - (k+3)y + 3z - \left(4{,}5 - 1{,}5k - 4{,}5 + 0{,}5k^2 + 1{,}5k - 4{,}5\right) &= 0 \\ E_k: 3x - (k+3)y + 3z - 0{,}5k^2 + 4{,}5 &= 0 \end{aligned}$$

Gesucht sind nun die Koordinatengleichungen derjenigen Ebenen, die durch den Ursprung verlaufen. Setze also die Koordinaten $O\,(0 \mid 0 \mid 0)$ des Ursprungs ein in die Koordinatengleichung von E und löse nach k auf:

$$\begin{aligned} 3\cdot 0 - (k+3)\cdot 0 + 3\cdot 0 - 0{,}5k^2 + 4{,}5 &= 0 \\ -0{,}5k^2 + 4{,}5 &= 0 \\ k^2 &= 9 \\ k_{1,2} &= \pm 3 \end{aligned}$$

Die Gleichungen der beiden Mittelebenen, welche durch den Ursprung verlaufen, lauten somit:

$E_3: 3x - 6y + 3z = 0$ und $E_{-3}: 3x + 3z = 0$

M3. ► **Koordinaten des Bildpunktes berechnen** (10BE)

Die Berechnung der Koordinaten des Bildpunktes B' geht in drei Schritten vor sich:

1. Aufstellen einer Geraden h, die senkrecht zu E durch B verläuft
2. Schnittpunkt F der Geraden h mit der Ebene E berechnen
3. Die Koordinaten von B' berechnen sich über eine Vektorkette: $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + 2\cdot\overrightarrow{BF}$

1. Schritt: Gleichung von *h* aufstellen

Wähle den Punkt B als Aufpunkt von h. Da h orthogonal zu E verlaufen soll, entspricht der Richtungsvektor von h genau dem Normalenvektor von E:

$$h: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OB} + m \cdot \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Schnittpunkt *F* berechnen

Einsetzen von h in die Koordinatengleichung der Ebene E liefert:

$$\begin{aligned} h \cap E : (6+m) - 2 \cdot (-2m) + m &= 0 \\ 6 + 6m &= 0 \\ m &= -1 \end{aligned}$$

Setze $m = -1$ ein in die Geradengleichung von h und erhalte den Punkt $F\,(5 \mid 2 \mid -1)$.

3. Schritt: Koordinaten von *B′* berechnen

Mit der Vektorkette $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{BF}$ folgt:

$$\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

B' hat die Koordinaten $B'\,(4 \mid 4 \mid -2)$.

▶ Koordinaten von *B′* nachweisen

Multiplikation der Matrix S mit dem Ortsvektor zu Punkt B ergibt:

$$\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 6 \\ \frac{2}{3} \cdot 6 \\ -\frac{1}{3} \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

▶ Geometrische Bedeutung erläutern

Die Matrix S beschreibt die orthogonale Spiegelung eines Punktes an der Ebene E. Einmaliges Anwenden der Matrix erzeugt dabei den **Spiegelpunkt**.

Die Multiplikation eines Ortsvektors mit der Matrix $S \cdot S$ entspricht dem **zweimaligen Anwenden** der Matrix S: Der Punkt wird zuerst orthogonal auf die „andere Seite“ von E gespiegelt und dann wieder zurück auf sich selbst.

K3. **▶ Lage der Kugeln skizzieren** (10BE)

▶ Gleichungen der Kugeln bestimmen

Allgemein lautet die Gleichung einer Kugel $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2+(z-z_M)^2=r^2$. Die beiden Kugeln besitzen beide den Mittelpunkt $P\,(0\mid 3\mid -3)$ und unterscheiden sich nur in ihrem Radius.

Der Radius der Kugel K_1 ist:

$$r_1=\left|\overrightarrow{PQ_3}\right|=\left|\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{3^2+(-6)^2+3^2}=\sqrt{54}.$$

Über die zweite Kugel K_2 ist bekannt, dass die Ebene E ihre **Tangentialebene** ist. Diese befindet sich aber genau in der **Mitte** zwischen P und Q_3 und halbiert die Strecke $\overline{PQ_3}$. Damit besitzt die Kugel K_2 auch den **halben Radius** von K_1, d.h.:
$r_2=\frac{1}{2}\sqrt{54}$.

Aus diesen Informationen erhalten wir die Kugelgleichungen:

$$K_1: x^2+(y-3)^2+(z+3)^2=54 \quad \text{und} \quad K_2: x^2+(y-3)^2+(z+3)^2=13{,}5.$$

▶ Verhältnis der Volumina ermitteln

Wie wir bereits gesehen haben, verhalten sich die **Radien** der Kugeln im Verhältnis $\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{2}$.

Für das Volumen einer Kugel gilt: $V=\frac{4}{3}\cdot\pi r^3$.

Die Kugel K_1 hat also das Volumen $V_1=\frac{4}{3}\cdot\pi {r_1}^3$. Einsetzen von $r_2=\frac{1}{2}r_1$ liefert: $V_2=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\frac{1}{8}r_1=\frac{1}{8}V_1$.

Kugel K_1 besitzt ein 8mal größeres Volumen als Kugel K_2.

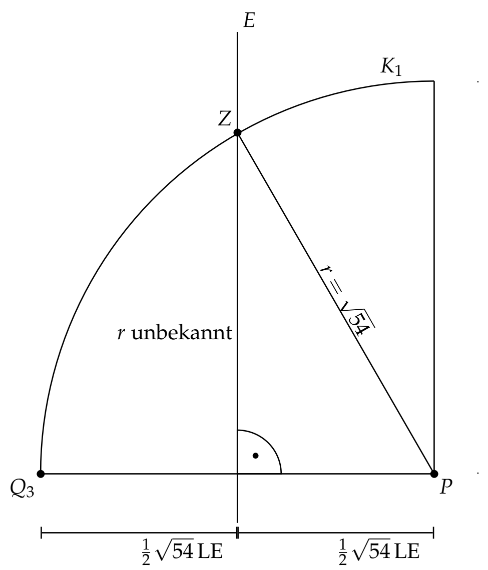
▶ Lage der Mittelpunkte beschreiben

Da die Kugel K_2 **innerhalb** der Kugel K_1 liegt, müssen auch alle Kugeln, welche sowohl K_1 als auch K_2 berühren, sich **innerhalb** von K_1, aber **außerhalb** von K_2 befinden.

Ihre Mittelpunkte liegen daher auf einem **Kreis**, welcher von K_1 und von K_2 den **selben Abstand** hat.

▶ Radius des Schnittkreises bestimmen

Machen wir uns die Lage der einzelnen Objekte noch einmal klar: Die Ebene E ist die Mittelebene der Strecke $\overline{PQ_3}$. P ist der Mittelpunkt der Kugel K_1, die gerade den Radius $r=\overline{PQ_3}=\sqrt{54}$. besitzt.



Wir betrachten zunächst die Ebene, die durch die Gerade durch P und Q_3, sowie durch die **Lotgerade** auf diese Strecke aufgespannt wird, die in der Ebene E liegt.
Diese Lotgerade schneidet die Kugel K_1 in einem Punkt Z. Da der Punkt P der Mittelpunkt der Kugel K_1 ist, hat er vom Punkt Z gerade den Abstand $r = \sqrt{54}$.
Die Lotgerade schneidet die Gerade durch P und Q_3 in ihrem Mittelpunkt. Auf diese Weise erhalten wir ein **rechtwinkliges Dreieck**.

Für den unbekannten Radius des Schnittkreises gilt dann nach dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned}\sqrt{54}^2 &= r^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{54}\right)^2 \\ 54 &= r^2 + 13{,}5 \\ r &\approx 6{,}36\,\text{LE}\end{aligned}$$

Der Radius des Schnittkreises beträgt etwa 6,36 LE.