# C1 - Analytische Geometrie

1.1 Um zu zeigen, dass es sich um ein Rechteck handelt, genügt es, wenn du zeigst, dass $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ gilt und $\overrightarrow{AD}$ senkrecht zu $\overrightarrow{AB}$ ist:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}0\\-12\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

Den Flächeninhalt des Rechtecks berechnest du durch Multiplikation des jeweiligen Betrags der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{16+9}=5,\left|\overrightarrow{AD}\right|=12\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|=5\cdot12=60\,(m^2)$$

1.2 $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-12\\0\end{pmatrix}$ mit $r,s\in\mathbb{R}$ liefert folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lccl}\mathrm{I} & x & = & 2-4r\\ \mathrm{II} & y & = & 6-12s\\ \mathrm{III} & z & = & 3+3r\end{array}$$

Aus $\mathrm{I}$ folgt $r=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ und damit aus $\mathrm{III}$: $z=3-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}\Leftrightarrow E:3x+4z=18$

1.3 Ebene $E$ verläuft parallel zur $y$-Achse. Alternativ kannst du auch sagen, dass die Ebene $E$ senkrecht zur $x$-$z$-Ebene verläuft.

1.4 $\overrightarrow{n_{xy}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$

Es gilt: $\cos(\varphi)=\dfrac{\overrightarrow{n_{xy}}\cdot\overrightarrow{n_E}}{\left|\overrightarrow{n_{xy}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_E}\right|}$

$$\cos(\varphi)=\frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}\right|}=\frac{4}{5}\Rightarrow\varphi\approx37^\circ$$

1.5 $V=(2\,m)^2\cdot\pi\cdot9,6\,m\approx121\,m^3$

$O=\pi\cdot(2\,m)^2+2\cdot\pi\cdot2\,m\cdot9,6\,m\approx133\,m^2$

2.1

Da wegen $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ die beiden Vektoren senkrecht zueinander stehen, ist der Vektor, in dessen Richtung das Sonnenlicht einfällt, ein möglicher Spannvektor der Ebene $F$.

Darüber hinaus ist $P$ ein Element der Ebene $F$:

$P$ in $F$: $3 \cdot 7,2 + 4 \cdot (-3,4) = 8$

Des Weiteren gilt $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Also ist die Ebene $F$ parallel zur Symmetrieachse des Zylinders, der das Silo darstellt.

2.2 Da $S$ die gleiche $x$- und $z$-Koordinate wie $A$ hat und in der Ebene $F$ liegt, gilt für die $y$-Koordinate $3 \cdot 2 + 4y = 8$, also $y = 0,5$ und $S\,(2 \mid 0,5 \mid 3)$.

Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7,2 \\ -3,4 \\ 9,6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}$ verläuft durch die Punkt $P$ und $T$.

Berechnung des Schnittpunkts $T$ von $g$ und $E$:

$$3 \cdot (7,2 - 4u) + 4 \cdot (9,6 - 3u) = 18 \;\Leftrightarrow\; 60 - 24u = 18 \Leftrightarrow u = 1,75$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 7,2 \\ -3,4 \\ 9,6 \end{pmatrix} + 1,75 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 1,85 \\ 4,35 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{ST}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0,2 \\ 1,85 \\ 4,35 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1,8 \\ 1,35 \\ 1,35 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1,8^2 + 1,35^2 + 1,35^2} \approx 2,6\,(m)$$

2.3 Die Breite des Schattens wäre nur dann genauso groß wie der Durchmesser des Silos, wenn das Sonnenlicht parallel zur $x$-$z$-Ebene einfallen würde. Allerdings hat der Sonnenlichtvektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ die $y$-Koordinate $3$, dieser Wert müsste jedoch $0$ sein.

2.4 Hierbei handelt es sich um die Begrenzungsfläche, die parallel zur Ebene $F$ ist und durch den Punkt $P^*$ verläuft.
$P^*$ ist hierbei der Punkt des Zylinders, der dem Punkt $P$ im Abstand $4$ auf dem oberen Rand des Zylinders gegenüberliegt und Punkt der Ebene $H$ ist.

Da $\left|\overrightarrow{n_H}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$, gilt für den Punkt $P^*$:

$$\overrightarrow{p^*} = \begin{pmatrix} 7,2 \\ -3,4 \\ 9,6 \end{pmatrix} - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ -6,6 \\ 9,6 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt: d= 3· 4,8+ 4· (-6,6) =-12

3.1 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Daraus lässt sich folgendes Gleichungssystem ableiten:

$$\begin{array}{llcl} \mathrm{I} & x - \frac{4}{3}z & = & x \\ \mathrm{II} & y + z & = & y \\ \mathrm{III} & 0 & = & z \end{array}$$

$\mathrm{III}$ in $\mathrm{II}$ und $\mathrm{I}$:

$0 = 0$

Also sind die Punkte von $\mathbb{R}^3$, die durch $M$ auf sich selbst abgebildet werden, alle Punkte der $x$-$y$-Ebene.

3.2 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus lässt sich folgendes Gleichungssystem ableiten:

$$\begin{array}{llcl} \mathrm{I} & x - \frac{4}{3}z & = & 0 \\ \mathrm{II} & y + z & = & 0 \\ \mathrm{III} & 0 & = & 0 \end{array}$$

$z = t$ in $\mathrm{II}: y = -t$

$z = t$ in $\mathrm{I}: x = \frac{4}{3}t$

Daraus lässt sich die Ursprungsgerade $g$ ableiten:

$$g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

3.3 Es gilt: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also beschreibt die Matrix $M$ eine Projektion eines jeden Punktes des $\mathbb{R}^3$ in die $x$-$y$-Ebene.