# A1 - Analysis

Auf einem See breitet sich eine Algenart aus. Zu Beginn der Beobachtung ist etwa eine Fläche von $0,1\,\mathrm{a}$ des Sees mit Algen bedeckt ($\mathrm{a}$ steht für die Flächeneinheit $\mathrm{Ar}$, $1\,\mathrm{a}$ entspricht einem Flächeninhalt von $100\,\mathrm{m}^2$). Nach zwei Monaten sind bereits $3\,\mathrm{a}$ des Sees mit Algen bedeckt.
Das weitere Wachstum soll prognostiziert werden. Dafür liegen drei unterschiedliche Modelle $A$, $B$ und $C$ vor.

1. Im Modell $A$ wird der Inhalt der mit Algen bedeckten Fläche durch die Funktion $f$ mit den Parametern $r$ und $k$ beschrieben mit $f(t)=r\cdot \mathrm{e}^{k\cdot t}, t\geq 0, r,k>0$.
Dabei gilt:

| | |
|---|---|
| $t:$ | Zeit in Monaten nach Beginn der Beobachtung |
| $f(t):$ | Inhalt der mit Algen bedeckten Fläche in $\mathrm{a}$ |

1.1 Bestimme die zu den oben genannten Werten passenden Parameter $r$ und $k$.

(4 BE)

1.2 Ermittle unter Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabe 1.1 für die Gleichung $f(t)=r\cdot \mathrm{e}^{k\cdot t}=r\cdot(1+p)^t$ den Wert von $p$.
Deute diesen Wert im Sachzusammenhang.

Falls du den Wert des Parameters $k$ in Aufgabe 1.1 nicht bestimmen konntest, verwende als Ersatzwert $k=1,71$.

(3 BE)

2. Modell $B$ prognostiziert ein Wachstum, bei dem die Änderungsrate des Inhalts der mit Algen bedeckten Fläche in Abhängigkeit von der Zeit $t$ näherungsweise durch die Funktion $g$ mit $g(t)=\left(-0,5t^2+t+2\right)\cdot \mathrm{e}^{-0,5t}, t\geq 0$, beschrieben wird.
Dabei gilt:

| | |
|---|---|
| $t:$ | Zeit in Monaten nach Beginn der Beobachtung |
| $f(t):$ | Änderungsrate in $\mathrm{a}$ pro Monat |

2.1 Berechne für $t\geq 0$ die Null- und Extremstellen von $g$. Die zweite Ableitung

$$g''(t)=\left(-0,125t^2+1,25t-1,5\right)\cdot \mathrm{e}^{-0,5t}$$

kann ohne Herleitung verwendet werden.

(11 BE)

2.2 Deute die in Aufgabe 2.1 berechneten Null- und Extremstellen im Sachzusammenhang.

(5 BE)

2.3 In Material 1 ist ein Ansatz zur Ermittlung der Stammfunktionen von $g$ angegeben.
Benenne die verwendete Integrationsmethode und wende die Methode erneut an, um die Herleitung der Stammfunktionen von $g$ zu vervollständigen.

[zur Kontrolle: $G(t)=\left(t^2+2t\right)\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot t}+C$ ]

**Material 1**

$$\begin{aligned}\int \left(-0,5t^2+t+2\right)\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot t}\;\mathrm{d}t &= \left(-0,5t^2+t+2\right)\cdot(-2)\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot t} - \int (-t+1)\cdot(-2)\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot t}\;\mathrm{d}t \\ &= \left(t^2-2t-4\right)\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot t} + \int (-2t+2)\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot t}\;\mathrm{d}t\end{aligned}$$

(5 BE)

2.4 Untersuche, unter welchen Bedingungen Modell $B$ näherungsweise zu den im einleitenden Text beschriebenen Werten passt.

(3 BE)

3. Im Modell $C$ wird der Inhalt der mit Algen bedeckten Fläche durch die Funktion $h$ beschrieben mit

$$h(t)=\frac{0,35}{0,1+3,4\cdot \mathrm{e}^{-2,66\cdot t}}, t\geq 0.$$

Dabei gilt:

$t$ : Zeit in Monaten nach Beginn der Beobachtung

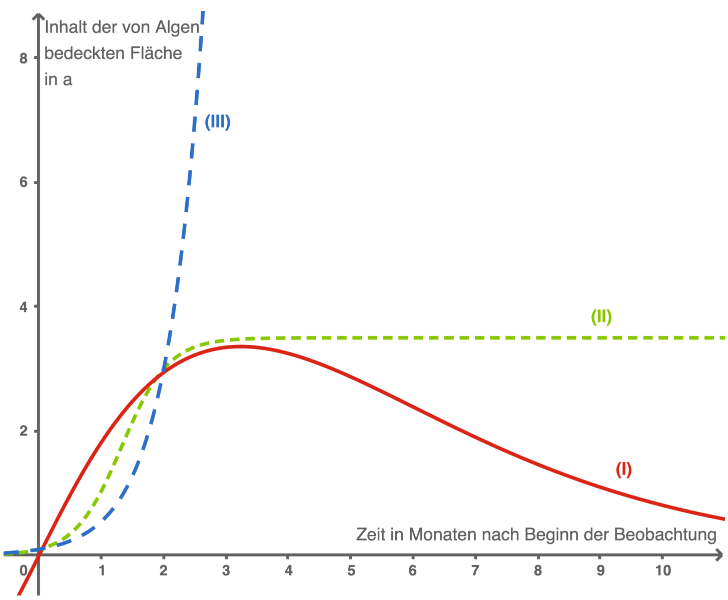
$f(t)$ : Inhalt der mit Algen bedeckten Fläche in \,\text{a}

Bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)$.

Deute diesen Wert im Sachzusammenhang.

(3 BE)

4. Im Material 2 sind drei Graphen $(\mathrm{I})$, $(\mathrm{II})$ und $(\mathrm{III})$ abgebildet, die den Inhalt der mit Algen bedeckten Fläche in Abhängigkeit von der Zeit $t$ über mehrere Monate für die drei Modelle $A$, $B$ und $C$ beschreiben.
Ordne die Graphen den entsprechenden Modellen zu und erörtere im Sachzusammenhang, wie realistisch die drei Modelle sind.




Material 2

(6 BE)