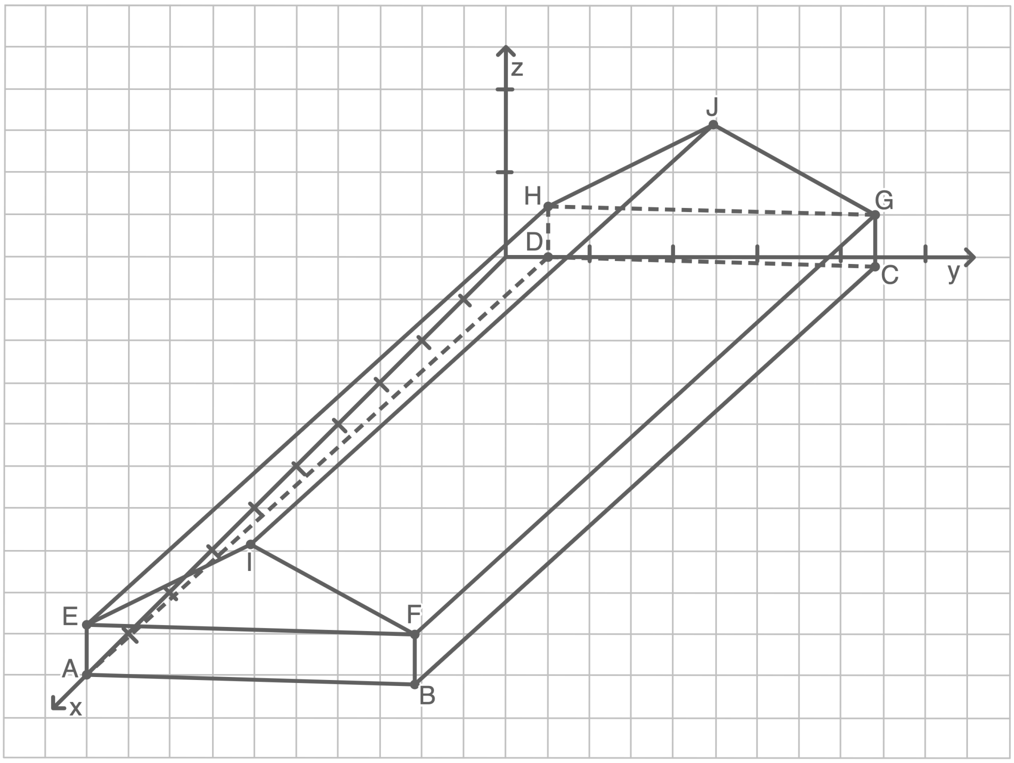
C1.1 - Lineare Algebra/ Analytische Geometrie

Für eine Kirmes soll in einem Dorf ein Festzelt errichtet werden, das aus einem quaderförmigen Unterbau und einem symmetrischen Dach in Form eines dreieckigen Prismas besteht.

Im Modell sind die Eckpunkte $A(50 \mid 0 \mid 0)$, $B(51 \mid 20 \mid 0)$, $C(1 \mid 22,5 \mid 0)$, $F(51 \mid 20 \mid 3)$ des Unterbaus und der Endpunkt $J(0,5 \mid 12,5 \mid 8)$ der waagrecht verlaufenden Dachkante $\overline{IJ}$ vorgegeben.

Die durch die Punkte A, B, F, I, E begrenzte Vorderseite des Festzelts liegt in einer Ebene. Der Erdboden liegt in der xy-Ebene. Alle Einheiten sind in Meter angegeben.



1 1.1 Gib die Koordinaten der Punkte D, E, G und H an.

Beschrifte die Achsen im Material mit der fehlenden Skalierung.

(5 BE)

1.2 Berechne das Gesamtvolumen des Festzelts.

(4 BE)

1.3 Der Eingangsbereich $ABFE$ liegt in der Ebene $K.$

Gib eine Parametergleichung der Ebene K an und bestimme eine Koordinatengleichung dieser Ebene.

[Zur Kontrolle: Eine mögliche Koordinatengleichung ist $K: 20x - y = 1000.$]

(5 BE)

2 Gegeben ist die Ebenenschar $E_a: 20x - y = 2a \; (a \in \mathbb{R})$.

2.1 Zeige, dass die Ebene K aus Aufgabe 1.3 eine Ebene der Schar E_a ist.

Begründe, dass alle Ebenen der Schar E_a parallel zueinander verlaufen.

(3 BE)

2.2 Das Festzelt soll im Inneren einen separaten Bereich erhalten. Dafür wird eine zum Eingangsbereich $ABFE$ parallele Trennwand eingezogen. Im Modell liegt diese Trennwand in einer Ebene der Schar E_a.

Erläutere hierzu die dargestellten Vorgehensweisen in den Zeilen (1) bis (4) und gib die in der Zeile (3) durch Auslassungspunkte gekennzeichneten fehlenden Berechnungen an.

Beschreibe abschließend die Lage der Trennwand.

$(1) \quad g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad T \in g$

$(2) \quad |\overrightarrow{AT}| = 20$

$(3) \quad \ldots \Rightarrow r_1 \approx 1; \; r_2 \approx -1$

$T_2(30|1|0)$

$(4) \quad 20 \cdot 30 - 1 = 2a \Leftrightarrow a = 299,5$

(7 BE)

3 Im Modell steht im Punkt $P(26 \mid 29,25 \mid 0)$ ein $14\,\mathrm{m}$ hoher, vertikal ausgerichteter Kirmesbaum. Die rechte Zeltwand, die durch die Punkte B, C, G und F begrenzt wird, liegt in der Ebene $L: x + 20y = 451$.

3.1 Zu einem bestimmten Zeitpunkt des Festsamstags fällt das Sonnenlicht in Richtung des Vektors $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein.

Prüfe, ob der Schatten der Kirmesbaumspitze zu diesem Zeitpunkt auf die rechte Zeltwand trifft.

(6 BE)

3.2 Im Modell ist im Punkt $Q(25 \mid y \mid z)$ $(y > 0, z > 0)$ der rechten Zeltwand ein punktförmiger Strahler angebracht, der genau in Richtung der Kirmesbaumspitze ausgerichtet ist. Der austretende Lichtstrahl verläuft unter einem Winkel von 57° zur Horizontalen.

Zeige, dass $y = 21,3$ gilt, und bestimme den Wert von z.

(5 BE)

4 Im Festzelt findet am Samstagabend eine Musikveranstaltung statt. Dazu werden vorab von drei Sponsoren A, B und C Freikarten für Sitzplätze in den Kategorien „VIP" (V) und „Normal“ (N) verlost.

In der Kategorie V werden Freikarten für insgesamt 40 Sitzplätze und in der Kategorie N Freikarten für insgesamt 100 Sitzplätze verlost. Alle Freikarten finden Abnehmer.

Die folgende Tabelle gibt für die drei Sponsoren die (prozentualen) Anteile der beiden Kategorien an den jeweils verlosten Freikarten an.

	A	B	C
V	$30\,\%$	$20\,\%$	$40\,\%$
N	$70\,\%$	$80\,\%$	$60\,\%$

4.1 Deute den Wert 40% in der Tabelle im Sachzusammenhang.

Leite unter Angabe der Bedeutung der verwendeten Variablen ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Anzahl der von den drei Sponsoren jeweils verlosten Freikarten her.

Berechne (ohne Betrachtung des Sachzusammenhangs) die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

[zur Kontrolle: Ein mögliches Ergebnis ist $L = \{(120 - 2c \mid 20 + c \mid c) \mid c \in \mathbb{R}\}$.]

(6 BE)

4.2 Ermittle die zulässigen Werte des Parameters c in dem in Aufgabe 4.1 angegebenen Kontrollergebnis, wenn jeder der drei Sponsoren mindestens 20 der 140 Freikarten verlost.

(5 BE)

4.3 Ein Gleichungssystem, das weniger Gleichungen als Variablen besitzt, heißt unterbestimmt. Ein Gleichungssystem, das mehr Gleichungen als Variablen besitzt, heißt überbestimmt.

Beurteile (ohne Betrachtung des Sachzusammenhangs) die folgenden beiden Aussagen:

Aussage I: „Jedes unterbestimmte Gleichungssystem besitzt eine Lösung.“

Aussage II: „Es gibt überbestimmte Gleichungssysteme, die keine eindeutige Lösung besitzen.“

(4 BE)