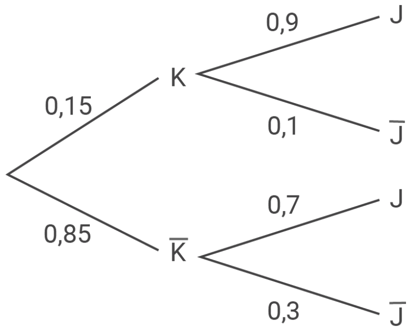
C2.1 - Stochastik

1.1 **Baumdiagramm angeben**



Aussage nachweisen

$$\begin{aligned} P(J) &= 0,15 \cdot 0,9 + 0,85 \cdot 0,7 \\ &= 0,73 \end{aligned}$$

1.2
$$\begin{aligned} P_J(K) &= \frac{P(J \cap K)}{P(J)} \\ &= \frac{0,15 \cdot 0,9}{0,73} \\ &\approx 0,185 \\ &= 18,5\ \% \end{aligned}$$

1.3 **Wahrscheinlichkeiten angeben**

Ablesen aus dem Baumdiagramm ergibt $P_K(J) = 0,9$ und $P_{\overline{K}}(J) = 0,7.$

$P(J)$ ist in Teilaufgabe 1.1 angegeben und folgt mit$P(J) = 0,73.$

Folgerungen erläutern

Die Ungleichung $P_K(J) \neq P_{\overline{K}}(J)$ bedeutet, dass der Anteil der Kinder, die das Joghurtdressing wählen, ungleich dem Anteil der Erwachsenen ist, die das Joghurtdressing wählen.

Würden sowohl Kinder als auch Erwachsene jeweils zum gleichen Anteil das Joghurtdressing wählen, so würde gelten:

$P(J) = P_K(J) = P_{\overline{K}}(J)$

Wenn die Erwachsenen jedoch zu einem höheren bzw. geringeren Anteil als die Kinder das

Joghurtdressing wählen, so wird auch $P(J)$ größer bzw. kleiner als $P_K(J)$.

2.1 **Ereignis 1**

X beschreibt die Anzahl der Personen, die das Olivenölprodukt kennen und wird mit $n=40$ und $p=0,35$ als binomialverteilt betrachtet.

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(X=10) \quad \mid WTR \\ &\approx 0,057 \end{aligned}$$

Ereignis 2

X beschreibt die Anzahl der Personen, die das Olivenölprodukt kennen und wird mit $n=100$ und $p=0,35$ als binomialverteilt betrachtet.

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(29 \leq X \leq 37) \\ &= P(X \leq 37) - P(X \leq 28) \quad \mid WTR \\ &\approx 0.702 - 0.085 \\ &\approx 0,617 \end{aligned}$$

2.2.1 **1. Schritt: Nullhypothese definieren**

Betrachtet wird die Zufallsvariable X, die die Anzahl der befragten Personen beschreibt, die das Produkt kennen. X kann als binomialverteilt mit $n=200$ und p angenommen werden.

Es wird folgende Nullhypothese betrachtet:

H_0 : Der Anteil der Personen, die das Olivenölprodukt kennen, beträgt höchstens $35\,\%$: $p \leq 0,35$

2. Schritt: Ablehnungsbereich bestimmen

Es ist das kleinste k gesucht, sodass folgendes gilt:

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &< 0,05 \\ 1 - P(X \leq (k-1)) &< 0,05 \quad \mid -1 \quad \mid \cdot(-1) \\ P(X \leq (k-1)) &> 0,95 \end{aligned}$$

Systematisches Ausprobieren mit dem WTR liefert:

$P(X \leq 80) \approx 0,939$

$P(X \leq 81) \approx 0,955$

Somit folgt der Ablehnungsbereich mit $\overline{A} = [82;200]$.

3. Schritt: Entscheidungsregel formulieren

Geben mindestens 82 der 200 befragten Besucher an, das Produkt zu kennen, so wird die Nullhypothese abgelehnt und angenommen, dass mehr als $35\,\%$ der Personen das Olivenölprodukt kennen.

2.2.2 X beschreibt die Anzahl der Personen, die das Olivenölprodukt kennen, und ist binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0,45$.

$$P(X \leq 81) \approx 0.113 = 11,3\,\%$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art bei einer tatsächlichen Erhöhung des Anteils der Personen, die das Olivenölprodukt kennen, auf $45\,\%$ beträgt somit ungefähr $11,3\,\%$.

2.2.3 $\mathbf{I}$: Der Fehler 1. Art ist eine irrtümliche Ablehnung der Nullhypothese. $\alpha(p)$ wird somit in Abschnitt C dargestellt.

$\mathbf{II}$: Der Fehler 1. Art wird nicht begangen, wenn die Nullhypothese wahr ist und nicht abgelehnt wird. Dies entspricht Abschnitt A.

$\mathbf{III}$: Beim Fehler 2. Art wird die Nullhypothese nicht abgelehnt obwohl sie nicht wahr ist. $\beta(p)$ wird somit in Abschnitt B dargestellt.

$\mathbf{IV}$: Der Fehler 2. Art wird nicht begangen, wenn die Nullhypothese nicht wahr ist und abgelehnt wird. Dies entspricht Abschnitt D.

3.1.1 **Aufgabenstellung formulieren**

„Es wird ein Karton zufällig ausgewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jede Flasche aus dem Karton mindestens $600\,\mathrm{ml}$ Öl enthält."

Ansatz erläutern

Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Flasche mindestens $600\,\mathrm{ml}$ enthält:

$$1 - 0,015 = 0,985$$

Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle 12 Flaschen aus einem Karton mindestens $600\,\mathrm{ml}$ enthalten:

$$0,985^{12}$$

3.1.2 Das Mittel von mehr als 780 Flaschen entspricht dem Erwartungswert. Hierbei beschreibt n die Anzahl der gelieferten Flaschen.

Es soll gelten:

$$\begin{array}{rcll} \mu & > & 780 & \\ n \cdot 0,985 & > & 780 & \quad \mid : 0,985 \\ n & > & 791,9 & \end{array}$$

Da die Anzahl der Flaschen eine natürliche Zahl sein muss, gilt $n > 792$.

Es werden also mindestens 792 Flaschen geliefert.

3.1.3 X beschreibt die Anzahl der Flaschen in einem Karton, die weniger als $600\,\mathrm{ml}$ enthalten und ist binomialverteilt mit $n = 12$ und $p = 0,015$.

Mit dem *binomcdf*-Befehl folgt:

$$\begin{array}{rcl} P(\text{„ fehlerhaft "}) & = & P(X \geq 2) \\ & = & 1 - P(X \leq 1) \quad \mid WTR \\ & \approx & 0,013 \end{array}$$

Y beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Kartons und ist binomialverteilt mit $n = 150$ und $p = 0,013$.

$3\,\%$ der Kartons entspricht $150 \cdot 0,03 = 4,5$. Da die Anzahl der Kartons eine natürliche Zahl sein muss und mehr als $3\,\%$ fehlerhaft sein sollen, müssen in diesem Fall also mindestens 5 Kartons fehlerhaft sein.

Es gilt also:

$$\begin{array}{rcl} P(Y \geq 5) & = & 1 - P(Y \leq 4) \\ & \approx & 0,05 \end{array}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als $3\,\%$ der Kartons fehlerhaft sind, beträgt somit ca. $5\,\%$.

3.2.1 Z beschreibt die Füllmenge der Flasche in ml und ist normalverteilt mit $\mu = 600,5$ und $\sigma = 0,23$.

Mit dem *normalcdf*-Befehl folgt:

Ereignis A

$$\begin{array}{rcl} P(A) & = & P(Z > 601) \\ & = & 1 - P(Z \leq 601) \quad \mid WTR \\ & \approx & 0,015 \\ & = & 1,5\,\% \end{array}$$

Ereignis B

$$\begin{array}{rcl} P(B) & = & P(600 \leq Z \leq 601) \\ & \approx & 0,970 \\ & = & 97\,\% \end{array}$$

3.2.2 Die verwendete Normalverteilung liefert für die negativen Füllmengen so geringe Wahrscheinlichkeiten, dass diese vernachlässigt werden können.

3.2.3 Graphen skizzieren

Mögliche Graphen für die beiden Vorschläge sind beispielsweise:

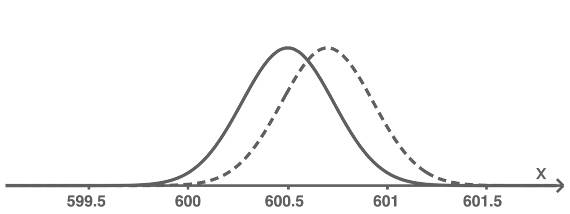


Abbildung 1

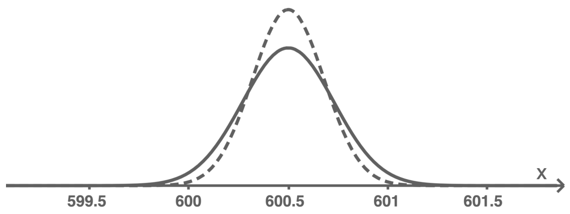


Abbildung 2

Vorschläge begründen

Der Inhalt der Fläche, die für $x \leq 600$ zwischen dem Graphen der Dichtefunktion und der x-Achse eingeschlossen wird, entspricht der Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Flasche weniger als $600\,\text{ml}$ Öl enthält.

Beim ersten Vorschlag wird der Graph der Dichtefunktion auf der x-Achse weiter entlang der positiven x-Achse verschoben, sodass die darunterliegende Fläche für $x \leq 600$ minimiert wird.

Durch das Strecken des Graphen der Dichtefunktion in y-Richtung wird ebenso durch Vorschlag 2 die Fläche für $x \leq 600$ unter dem Graphen reduziert.

Somit erfüllen beide Vorschläge das Ziel, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Flasche weniger als $600\,\text{ml}$ Öl enthält, zu verringern.

3.3 Das Vorgehen beschreibt das stochastische Modell „Ziehen mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge".

Für n verschiedene Motive und n zufällig ausgewählte Flaschen gibt es somit genau n^n mögliche Kombinationen.

Wenn jede Flasche ein unterschiedliches Motiv haben soll, gibt es nach jedem Versehen einer Flasche mit einem Anhänger ein mögliches Motiv weniger für die nächsten Flaschen. Die Anzahl der möglichen Kombinationen entspricht somit $n!$.

Es folgt also:

$$P = \frac{n!}{n^n}$$

Einsetzen verschiedener Werte für n liefert $\dfrac{6!}{6^6} \approx 0,015$ und $\dfrac{7!}{7^7} \approx 0,006$.

Als kleinstmöglicher Wert von n ergibt sich somit 7.