A - Hilfsmittelfreier Teil

Analysis - Niveau 1

1.1 Die Funktion lautet $f(x) = \sqrt{9-x^2}$. Für die reellen Zahlen ist eine Wurzel nur dann definiert, wenn der Radikand größer oder gleich 0 ist. In diesem Fall muss also gelten:

$$\begin{array}{rcll} 9-x^2 & \geq & 0 & \quad \mid +x^2 \\ 9 & \geq & x^2 & \quad \mid \sqrt{} \\ \pm 3 & \geq & x & \end{array}$$

Somit kann f nur für $x \in [-3;3]$ definiert sein.

1.2 Der durch $f(x)$ definierte Halbkreis hat einen Radius von $3\,\mathrm{LE}$. Rotiert dieser nun um die x-Achse, entsteht eine Kugel um den Ursprung mit dem Radius $3\,\mathrm{LE}$. Damit gilt für das Volumen:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 \approx 113,1\,[\mathrm{VE}]$$

Lineare Algebra / Analytische Geometrie – Niveau 1

2.1 Einsetzen der Koordinaten von D in E ergibt:

$$4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = -12 + 12 = 0$$

Somit liegt der Punkt D ebenfalls in der Ebene E.

2.2 Ein Viereck ist genau dann eine Raute, wenn alle vier Seiten gleich lang sind:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + a^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + a^2}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + a^2 + 4^2} = \sqrt{25 + a^2}$$

$$|\overrightarrow{CD}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -a \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + (-a)^2 + 4^2} = \sqrt{25 + a^2}$$

$$|\overrightarrow{DA}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -a \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-a)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + a^2}$$

Da alle Seiten leich lang sind, folgt, dass das Viereck eine Raute ist.

2.3 Damit das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist, müssen die benachbarten Seiten senkrecht zueinander sein. Durch die Eigenschaften einer Raute reicht es jedoch, zwei Seiten zu überprüfen.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} &= 0 \\ -9 + a^2 - 16 &= 0 \\ a^2 &= 25 \\ a &= \pm 5 \end{aligned}$$

Somit ist das Viereck $ABCD$ für die Werte $a = \pm 5$ ein Quadrat.

Stochastik – Niveau 1

3.1 Die Wahrscheinlichkeit setzt sich aus den beiden Eregnissen *"Ist gezinkt und wird als gezinkt eingestuft"* und *"Ist nicht gezinkt aber wird als gezinkt eingestuft"* zusammen.

$$0,05 \cdot 0,95 + 0,95 \cdot 0,05 = 0,095 = 9,5\,\%$$

Damit wird ein gezogener Würfel mit einer Wahrscheinlichkeit von $9,5\,\%$ als gezinkt eingestuft.

3.2 Bezeichnung der Ereignisse:

F : Der Würfel ist fair.
G : Der Würfel wird als gezinkt eingestuft.

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_G(F)$.

Mit Teilaufgabe 3.1 gilt:

$$P_G(F) = \frac{P(G \cap F)}{P(G)} = \frac{0,95 \cdot 0,05}{0,095} = 0,5 = 50\,\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffener Würfel, der als gezinkt eingestuft wird, fair ist, beträgt 50%.

Lineare Algebra/Analytische Geometrie – Niveau 2

4.1
$$\begin{array}{llllll} \text{I} & x & +3y & +2z & =39 & \\ \text{II} & 2x & +2y & +z & =30 & \mid -2\cdot\text{I} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrl} \text{I} & x & +3y & +2z & = 39 \\ \text{II}' & & -4y & -3z & = -48 \end{array}$$

Da das Gleichungssystem 3 Variablen aber nur 2 Zeilen beinhaltet, wird die Lösungsmenge anhand einer Unbekannten berechnet.

Für $z = c$ folgt:

$$\begin{array}{rcll} -4y - 3c &=& -48 & \quad | +3c \\ -4y &=& -48 + 3c & \quad | : (-4) \\ y &=& \dfrac{-48+3c}{-4} & \\ &=& 12 - 0,75c & \end{array}$$

Einsetzen von y in I :

$$\begin{array}{rcll} x + 3 \cdot (12 - 0,75c) + 2c &=& 39 & \\ x + 36 - 0,25c &=& 39 & \quad | -36 \quad | +0,25c \\ x &=& 3 + 0,25c & \end{array}$$

Damit gilt für die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{(3 + 0,25c \mid 12 - 0,75c \mid c) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

4.2 Da die Preise größer als null und ganzzahlig sein müssen, folgt aus den Preisen x und y, dass c den Wert $4, 8$ oder 12 haben muss.

Für $c = 4$ gilt: $x = z$ ist Widerspruch zu $x < z$.

Für $c = 8$ gilt: $x = 5, y = 6, z = 8$.

Für $c = 12$ gilt: $x = 6$ und $y = 3$ ist Widerspruch zu $x \leq y$.

Die Preise der Pizzen lassen sich folglich für den Wert $c = 8$ eindeutig bestimmen.