A2 - Analysis

1.1 Aus Material 1 ergibt sich: Der Graph der gesuchten ganzrationalen Funktion hat in der Nähe der Stelle $\mathrm{x_w} = 0$ einen Wendepunkt. Daher muss die notwendige Bedingung $f''(x_w) = 0$ erfüllt sein. Also muss die zweite Ableitung mindestens ersten Grades sein, die erste Ableitung daher mindestens zweiten Grades, also die Funktion selbst mindestens dritten Grades.

1.2 Allgemeinen Funktionsterm einer Funktion dritten Grades aufstellen:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Aus der Aufgabenstellung resultieren folgende Bedingungen:

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & f''(0) & = & 0 \\ \mathrm{II} & f(0) & = & 1 \\ \mathrm{III} & f(0,5) & = & 1,2 \\ \mathrm{IV} & f(1,5) & = & 2 \end{array}$$

Zweite Ableitung von f bilden:

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Aus Gleichung I folgt:

$$\begin{array}{rcll} f''(0) & = & 6a \cdot 0 + 2b & \\ 0 & = & 2b & \mid :2 \\ 0 & = & b & \end{array}$$

Aus Gleichung II folgt nun:

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & a \cdot 0^3 + c \cdot 0 + d \\ 1 & = & d \end{array}$$

Bedingung aus Gleichung III in den Funktionsterm einsetzten und nach a auflösen:

$$\begin{array}{rcll} f(0,5) & = & a \cdot 0,5^3 + c \cdot 0,5 + 1 & \\ 1,2 & = & \frac{1}{8}a + 0,5c + 1 & \mid -1 \\ 0,2 & = & \frac{1}{8}a + 0,5c & \mid -0,5c \\ 0,2 - 0,5c & = & \frac{1}{8}a & \mid \cdot 8 \\ 1,6 - 4c & = & a & \end{array}$$

Die berechneten Werte a, b, d in den Funktionsterm einsetzen:

Daraus folgt ein Funktionsterm in Abhängigkeit von c:

$$f_c(x) = (1,6 - 4c)x^3 + cx + 1$$

Nun wird die Bedingung aus Gleichung IV in den Funktionsterm eingesetzt, um c zu berechnen.

$$\begin{array}{rcll} f_c(1,5) & = & (1,6-4c)\cdot 1,5^3 + 1,5c + 1 & \\ 2 & = & 5,4 - 13,5c + 1,5c + 1 & \\ 2 & = & 6,4 - 12c & \mid -6,4 \\ -4,4 & = & -12c & \mid :-12 \\ \dfrac{11}{30} & = & c & \end{array}$$

Den Wert für a berechnen:

$$\begin{array}{rcl} a & = & 1,6 - 4\cdot\dfrac{11}{30} \\ a & = & \dfrac{2}{15} \end{array}$$

Daraus folgt: $f(x) = \dfrac{2}{15}x^3 + \dfrac{11}{30}x + 1$

2. **Volumenintegral berechnen**

Die allgemeine Form des Volumenintegrals bei Rotation um die x-Achse im Intervall $[a;b]$ ist beschrieben durch die Gleichung:

$$V(x) = \pi\int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$$

Den Funktionsterm $g(x)$ und die Grenzen $a=-1,5$ und $b=1,5$ in die Gleichung einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} V(x) & = & \pi\displaystyle\int_{-1,5}^{1,5}(0,16x^3+0,34x+1)^2\,\mathrm{d}x \\ V(x) & = & \pi\displaystyle\int_{-1,5}^{1,5}(0,16^2x^6 + 2\cdot 0,34\cdot 0,16x^4 + 2\cdot 0,16x^3 + 0,34^2x^2 + 2\cdot 0,34x + 1)\,\mathrm{d}x \\ V(x) & = & \pi\cdot\left[\dfrac{1}{7}\cdot 0,16^2x^7 + \dfrac{1}{5}\cdot 0,34\cdot 0,32x^5 + 0,08x^4 + \dfrac{1}{3}\cdot 0,34^2x^3 + 0,34x^2 + x\right]_{-1,5}^{1,5} \\ & \approx & 11,673\,\left[\mathrm{cm}^3\right] \end{array}$$

3.1 **1. Schritt: Funktionsterm von $f_{1,183}(x)$aufstellen**

$$f_{1,183}(x) = \frac{\mathrm{e}^{1,183x} - \mathrm{e}^{-1,183x}}{5,915}$$

2. Schritt: $f_{1,183}(1)$ berechnen

$$\begin{aligned} f_{1,183}(1) &= \frac{\mathrm{e}^{1,183} - \mathrm{e}^{-1,183}}{5,915} + 1 \\ &= 1,500049654 \\ &\approx 1,5 \end{aligned}$$

3.2 Für eine Funktion, die punktsymmetrisch ist, gilt im Allgemeinen :

$$f(-x) = -f(x)$$

Funktionsterm der Scharen aufstellen, welche um eine Einheit in Richtung der negativen y-Achse verschoben sind und $-x$ in den Funktionsterm einsetzen:

$$g_t(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-tx} - \mathrm{e}^{tx}}{5t}$$

Umformen, bis die Bedingung der Punktsymmetrie gezeigt ist:

$$\begin{aligned} g_t(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-tx} - \mathrm{e}^{tx}}{5t} \\ &= \frac{-(-\mathrm{e}^{-tx}) + (-\mathrm{e}^{tx})}{5t} \\ &= \frac{(-\mathrm{e}^{tx}) - (-\mathrm{e}^{-tx})}{5t} \\ &= \frac{-1 \cdot (\mathrm{e}^{tx} - \mathrm{e}^{-tx})}{5t} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{tx} - \mathrm{e}^{-tx}}{5t} \\ &= -g_t(x) \end{aligned}$$

Die Graphen der Funktionsschar f_t sind punktsymmetrisch bezüglich des Punktes $(0 \mid 1)$.

3.3 **1. Schritt: Koordinaten des Wendepunktes bestimmen**

Die erste und zweite Ableitung bilden:

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= \frac{t\mathrm{e}^{tx} + t\mathrm{e}^{-tx}}{5t} \\ f_t''(x) &= \frac{t^2\mathrm{e}^{tx} - t^2\mathrm{e}^{-tx}}{5t} \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für Wendestellen anwenden:

$$\begin{aligned} f_t''(x) &= 0 \\ \frac{t^2\mathrm{e}^{tx} - t^2\mathrm{e}^{-tx}}{5t} &= 0 \\ \frac{t^2\left(\mathrm{e}^{tx} - \mathrm{e}^{-tx}\right)}{5t} &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn gilt: $t^2\left(\mathrm{e}^{tx} - \mathrm{e}^{-tx}\right) = 0$.

Da laut Aufgabenstellung $t^2 \neq 0$ sein muss, muss Folgendes gelten:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tx} - \mathrm{e}^{-tx} &= 0 && \mid +\mathrm{e}^{-tx} \\ \mathrm{e}^{tx} &= \mathrm{e}^{-tx} && \mid \ln() \\ tx &= -tx \end{aligned}$$

Es gilt $t \neq 0$. Daraus folgt: $x = 0$.

Mit $f_t(0) = 1$ folgen die Koordinaten des Wendepunktes jeder Schar mit $(0 \mid 1)$.

2. Schritt: Krümmungsverhalten untersuchen

Dritte Ableitung bestimmen:

$$f_t'''(x) = \frac{t^3\mathrm{e}^{tx} + t^3\mathrm{e}^{-tx}}{5t}$$

Steigung an der Wendestelle bestimmen:

$$\begin{aligned} f_t'''(0) &= \frac{t^3 \cdot 1 + t^3 \cdot 1}{5t} \\ &= \frac{2 \cdot t^3}{5t} \\ &= \frac{2}{5}t^2 \end{aligned}$$

Da $t^2 > 0$ ist, gilt: $f_t'''(0) > 0$

Somit erfolgt im Punkt $(0 \mid 1)$ ein Wechsel von einer Rechts- in eine Linkskrümmung.

4.1 Um zu zeigen, dass beide Methoden auf das gleiche Ergebnis führen, wird die Flächeninhaltsberechnung mit beiden Methoden durchgeführt und anschließend das Ergebnis verglichen.

1. Schritt: Funktionsgleichung $k(x)$ aufstellen

Die allgemeine Form der Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion ersten Grades lautet

$k(x) = ax + b$

Den Punkt $(0 \mid 1)$ in die Funktionsgleichung einsetzen und nach b auflösen:

$$\begin{array}{rcl} 1 &=& a \cdot 0 + b \\ 1 &=& b \end{array}$$

Den Punkt$(1 \mid 1,5)$ in die Funktionsgleichung einsetzen

$$\begin{array}{rcll} 1,5 &=& a \cdot 1 + b & |\text{setze } b = 1 \text{ ein} \\ 1,5 &=& a + 1 & | -1 \\ 0,5 &=& a & \end{array}$$

Daraus folgt:

$k(x) = 0,5x + 1$

2. Schritt: Mantelfläche nach Methode A berechnen

$$M_A = 2\pi \cdot \int_0^1 k(x)\sqrt{1 + (k'(x))^2}\ \mathrm{d}x$$

Erste Ableitung von k aufstellen:

$k'(x) = 0,5$

Mantelfläche M mit Methode A berechnen:

$$\begin{array}{rcl} M &=& 2\pi \cdot \int_0^1 (0,5x + 1)\sqrt{1 + 0,5^2}\ \mathrm{d}x \\ &=& 8,781\ [\mathrm{cm}^2] \end{array}$$

3. Schritt: Mantelfläche nach Methode B berechnen

$M = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot\ s$

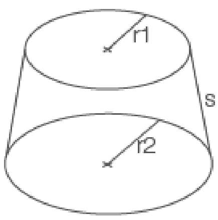

Abb. 1: Kegelstumpf

Für den Kegelstumpf aus dieser Aufgabe sind die Werte für die beiden Radien die y-Werte der beiden Punkte $(0 \mid 1)$ und $(1 \mid 1,5)$.

$$\begin{aligned} r_1 &= 1\,[\mathrm{cm}] \\ r_2 &= 1,5\,[\mathrm{cm}] \end{aligned}$$

Die Länge der Mantellinie s ist gleich dem Abstand der Punkte $(0 \mid 1)$ und $(1 \mid 1,5)$.

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(1-0)^2+(1,5-1)^2} \\ &= \sqrt{(1)^2+(0,5)^2} \\ &= \sqrt{1+0,5^2}\,[\mathrm{cm}] \end{aligned}$$

r_1 , r_2 und s in die Gleichung der Methode B einsetzen:

$$\begin{aligned} M_B &= \pi\cdot(1+1,5)\cdot\sqrt{1+0,5^2} \\ &= \pi\cdot 2,5\cdot\sqrt{1+0,5^2} \\ &= 8,781\,[\mathrm{cm}^2] \end{aligned}$$

Daraus folgt: Die Berechnug mit den verschiedenen Methoden führt zum gleichen Ergebnis.

4.2 Mantelfläche bestimmen, indem in die Formel der Methode A $g(x)$ und $g'(x)$ eingesetzt wird :

Erste Ableitung von g bilden:

$$g'(x) = 3\cdot 0,16x^2+0,34$$

$g(x)$ und $g'(x)$ in die Formel einsetzen:

$$\begin{aligned} M &= 2\pi\cdot\int_0^1 g(x)\sqrt{1+(g'(x))^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\cdot\int_0^1 (0,16x^3+0,34x+1)\sqrt{1+(3\cdot 0,16x^2+0,34)^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Durch Berechnung des Integrals mit Hilfe des Taschenrechners wird das Ergebnis $M = 8,613\,[\mathrm{cm}^2]$ geliefert.
Das hier berechnete Ergebnis ist also ein um 0,168 geringerer Wert als das Ergebnis aus Aufgabe 4.1.