1. ▶ **Binomialverteilung begründen** (7BE)

- Es gibt nur zwei mögliche Ausgänge: Entweder eine Person kennt die Nachrichtensendung oder nicht
- Die einzelnen Personen antworten **unabhängig voneinander**
- Die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}25$ wird von Versuch zu Versuch als gleichbleibend angenommen.

▶ **Wahrscheinlichkeiten bestimmen**

Sei X die Anzahl der Personen in der Stichprobe, die die Sendung **nicht** kennen. X kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 20$ und $p = 0{,}75$.

1. Ereignis A

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 14)$:

$P(X = 14) = \binom{20}{14} \cdot (0{,}75)^{14} \cdot (0{,}25)^6 = 0{,}1686.$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 16,86 % kennen genau 14 der 20 Personen die Sendung nicht.

2. Ereignis B

Sei Y die Anzahl der Personen in der Stichprobe, die die Sendung **kennen**. Y ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}25$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 10)$. Aus einer Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung für $n = 20$ und $p = 0{,}25$ folgt $P(X \leq 10) = 0{,}996$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 99,6 % kennen höchstens 10 der 20 Personen die Sendung.

3. Ereignis C

Diese Wahrscheinlichkeit kannst du über die **Pfadregel** berechnen. Wenn nur der achte und der zwölfte Befragte die Sendung kennen, so kennen alle anderen Personen die Sendung **nicht**:

$P(C) = (0{,}75)^7 \cdot 0{,}25 \cdot (0{,}75)^3 \cdot 0{,}25 \cdot (0{,}75)^8 = 0{,}75^{18} \cdot (0{,}25)^2 = 0{,}000352 = 0{,}0352\,\%.$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,0352 % kennen nur der achte und der zwölfte Befragte die Sendung.

2. ▶ **Mindestzahl der Personen berechnen** (4BE)

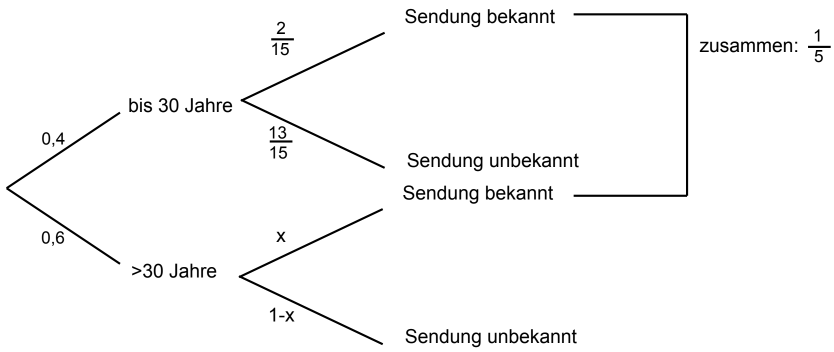
Mit der gleichen Begründung wie in 1. kannst du von einem binomialverteilten Zufallsexperiment ausgehen. Sei X die Anzahl der Personen in der Stichprobe, welche die Frühausgabe der Nachrichtensendung kennen. X ist binomialverteilt mit n unbekannt und $p = 0{,}02$. n soll unter der Voraussetzung berechnet werden, dass $P(X \geq 1) > 0{,}9$:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) &> 0{,}9 && \mid\ n \text{ unbekannt}, p = 0{,}02 \\
1 - \binom{n}{0} \cdot (0{,}02)^0 \cdot (0{,}98)^n &> 0{,}9 \\
1 - 0{,}98^n &> 0{,}9 && \mid\ -1 \ \mid \cdot(-1) \\
0{,}98^n &< 0{,}1 && \mid\ \ln(\ ) \\
n \cdot \ln(0{,}98) &< \ln(0{,}1 && \mid\ :\ln(0{,}98) \quad \text{Achtung: } \ln(0{,}98) < 0 \\
n &> \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}98)} \approx 113{,}97
\end{aligned}$$

Der Reporter muss mindestens 114 Personen befragen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens eine positive Antwort erhält.

3. **► Anteil der 30-jährigen berechnen** (7BE)

Mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten kannst du die Situation z.B. in einem Baumdiagramm darstellen. Die Pfadwahrscheinlichkeiten sind dabei entweder direkt vorgegeben, oder sie ergeben sich leicht über das Gegenereignis.



Der Anteil der Personen, die die Sendung kennen setzt sich zusammen aus

- dem Anteil der unter 30-jährigen, die die Sendung kennen
- dem Anteil der über 30-jährigen, die die Sendung kennen

Nach der Pfadregel gilt:

$$0{,}4 \cdot \frac{2}{15} + 0{,}6 \cdot x = 0{,}2$$
$$\frac{4}{75} + 0{,}6x = 0{,}2$$
$$0{,}6x = \frac{1}{5} - \frac{4}{75} = \frac{11}{75}$$
$$x = 0{,}2\overline{4}$$

Der Anteil der über 30-jährigen, die die Sendung kennen, liegt bei 24,44 %.

► Wahrscheinlichkeit für das Alter berechnen

Sei D das Ereignis „Eine Person ist über Dreißig" und S das Ereignis „Eine Person kennt die Nachrichtensendung". Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person höchstens 30 Jahre alt ist, **unter der Bedingung** dass sie die Sendung nicht kennt. Dies ist genau die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P_{\overline{S}}(\overline{D})$:

$$\begin{aligned} P_{\overline{S}}(\overline{D}) &= \frac{\overline{S} \cap \overline{D}}{\overline{S}} \\ &= \frac{0{,}4 \cdot \frac{13}{15}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{26}{75}}{\frac{4}{5}} \\ &= \frac{26}{75} \cdot \frac{5}{4} = \frac{13}{15} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{13}{30} = 0{,}4\overline{3} \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 43,33 % ist die Person höchstens 30 Jahre alt.

4. ▶ **Entscheidungsverfahren entwickeln** (12BE)

Zunächst stellt sich die Frage, ob wir einen **einseitigen** oder einen **zweiseitigen** Hypothesentest durchführen wollen. Aus dem Aufgabentext geht hervor, dass der Sender zusätzliche Sendezeit für eine Sendung schaffen will, deren Bekanntheitsgrad größer als 20 % ist. Dabei wird getestet, ob der Bekanntheitsgrad einer Sendung bei 20 % liegt. Da den Sender nur interessiert, ob der Bekanntheitsgrad **größer** als 20 % ist, genügt hier ein **einseitiger** Hypothesentest.

Die Hypothesen, die gegeneinander getestet werden, sind dann $H_0 : p_0 \leq 0{,}2$ und $H_1 : p_1 > 0{,}2$.

Die Nullhypothese H_0 wird dabei abgelehnt, falls **besonders viele** der Befragten angeben, die Sendung zu kennen. Dies führt zu einem **Ablehnungsbereich** $\overline{A} = \{k; k+1; ...; 1.000\}$ und zu einem entsprechenden **Annahmebereich** $A = \{0; 1; ...; k-1\}$.

Sei X die Anzahl der Personen in der Stichprobe, die die Sendung kennen. X kann bei wahrer Nullhypothese als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 1.000$ und $p = 0{,}2$. Aufgrund des großen Stichprobenumfangs macht es Sinn, die Binomialverteilung durch die Normalverteilung anzunähern.

$\mu = n \cdot p = 1.000 \cdot 0{,}2 = 200$ und $p = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0{,}8} \approx 12{,}65$.

Da $\sigma = 12{,}65 > 3$, ist eine Annäherung durch die Normalverteilung zulässig.

Wir erhalten damit eine normalverteilte Zufallsgröße Z mit $\mu = 200$ und $\sigma = 12{,}65$.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit soll bei 5 % liegen. Das heißt, dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art (Nullhypothese ist wahr, aber wird abgelehnt), bei höchstens 5 % liegen soll:

$$\begin{aligned}
\alpha = P(X \in \overline{A}) &\leq 0{,}05 \\
P(X \geq k) &\leq 0{,}05 \\
1 - P(X \leq k-1) &\leq 0{,}05 \\
P(X \leq k-1) &\geq 0{,}95
\end{aligned}$$

Aus einer Tabelle zur Standardnormalverteilung folgt $P(1{,}65) \geq 0{,}95$ und damit:

$$\begin{aligned}
\frac{k - 1 + 0{,}5 - \mu}{\sigma} &\geq 1{,}65 \\
\frac{k - 200{,}5}{12{,}65} &\geq 1{,}65 \\
k - 200{,}5 &\geq 20{,}8725 \\
k &\geq 221{,}373 \approx 221
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir den **Annahmebereich** $A = \{0; 1; ..; 220\}$ und den **Ablehnungsbereich** $\overline{A} = \{221; 222; ..; 1.000\}$.

Wenn mindestens 221 der Befragten angeben, die Sendung zu kennen, so wird die Nullhypothese verworfen.