1. **► Einziges lokales Maximum begründen** (6BE)

Dass die Funktion f bei $x = 0$ ein lokales Maximum besitzt, ist im Graphen deutlich zu erkennen. Nun bleibt noch zu begründen, warum dieses das **einzige** Maximum sein kann.
Idee: Zeige, dass der Graph von f für $x > 0$ monoton fallend ist und sich einem festen Grenzwert annähert.

Da der Nachweis ohne die Differentialrechnung, also insbesondere ohne Betrachten der ersten Ableitung, erfolgen soll, müssen die notwendigen Eigenschaften aus dem Funktionsterm von f erkennbar sein.

Zum einen kannst du erkennen, dass $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, weil sowohl der Zähler als auch der Nenner im Funktionsterm stets positiv sind.
Weiterhin ist ersichtlich, dass für größer werdende x auch der **Nenner** im Funktionsterm größer wird. Der Zähler hingegen bleibt konstant. Der Bruch im Funktionsterm und somit die **Funktionswerte** von f werden für größer werdende x also **immer kleiner**.
Damit wissen wir: Für alle $x > 0$ ist der Graph von f monoton fallend.

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{54}{x^2+9} = 0$ ist die x-Achse die waagerechte Asymptote des Graphen von f. Da f nie negative Funktionswerte annimmt, nähert sich der Graph von f der x-Achse **von oben an**.

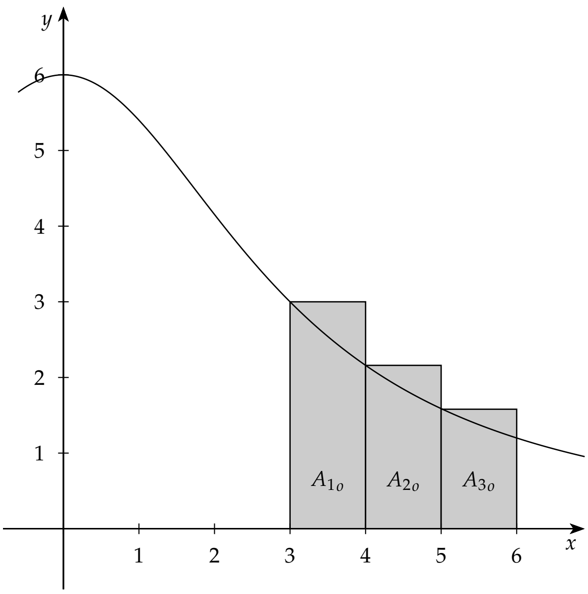
Bisher ist gezeigt, dass es für $x > 0$ keine weiteren Maxima von f geben kann. Nun zum Bereich für $x < 0$: Wegen $f(-x) = \frac{54}{(-x)^2+9} = \frac{54}{x^2+9} = f(x)$ ist der Graph von f **achsensymmetrisch** zur y-Achse.

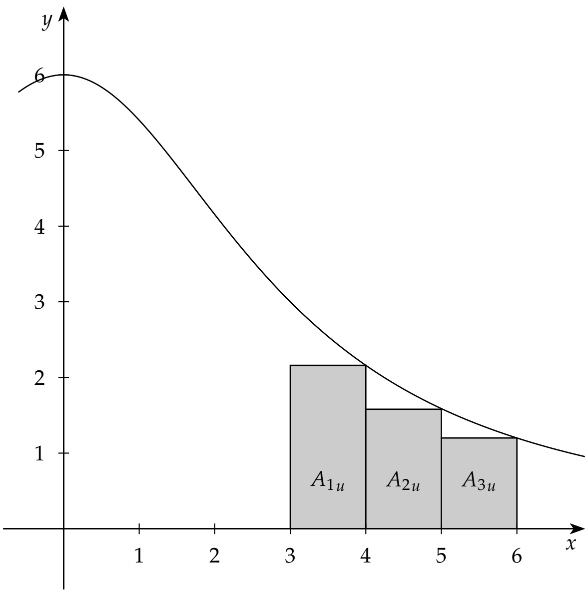
Damit gilt: Bei $x = 0$ besitzt f ein lokales Maximum. Für $x > 0$ und für $x < 0$ ist der Graph von f streng monoton fallend und nähert sich der x-Achse von oben an. f kann also keine weiteren Maxima besitzen.

2. **► Flächeninhalt näherungsweise berechnen** (9BE)

Du musst nur eines der beiden Näherungsverfahren anwenden. Wir stellen hier beide Lösungswege vor.

►► Lösungsweg A: Ober- und Untersummen





1. Schritt: Obersummen berechnen (linke Abb.)

Die einzelnen Streifen besitzen den Flächeninhalt

$A_{1o} = 1 \cdot f(3) = 1 \cdot \frac{54}{18} = 3$

$A_{2o} = 1 \cdot f(4) = 1 \cdot \frac{54}{25} = 2{,}16$

$A_{3o} = 1 \cdot f(5) = 1 \cdot \frac{54}{34} = 1{,}59$

Die gesamte Fläche ist also etwa $3 + 2{,}16 + 1{,}59 = 6{,}75\,\text{FE}$ groß.

2. Schritt: Untersummen berechnen (rechte Abb.)

Die einzelnen Streifen besitzen den Flächeninhalt

$A_{1u} = 1 \cdot f(4) = 1 \cdot \frac{54}{25} = 2{,}16$

$A_{2u} = 1 \cdot f(5) = 1 \cdot \frac{54}{34} = 1{,}59$

$A_{3u} = 1 \cdot f(6) = 1 \cdot \frac{54}{25} = 1{,}2$

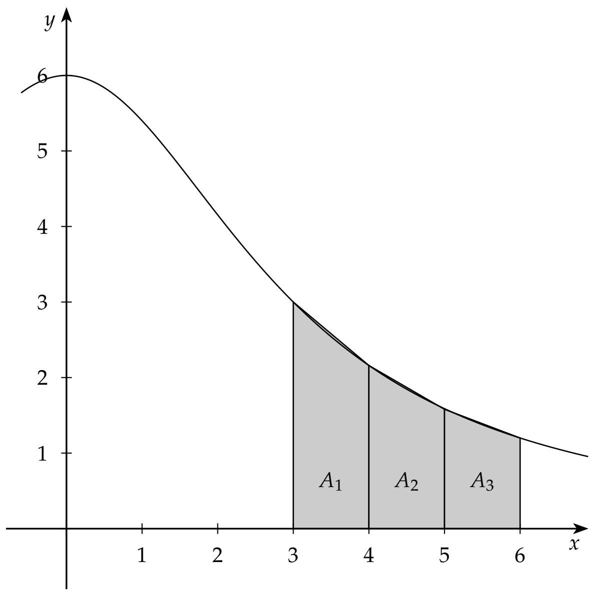
Die gesamte Fläche ist also etwa $2{,}16 + 1{,}59 + 1{,}2 = 4{,}95\,\text{FE}$ groß.

Da die Obersumme größer als der tatsächliche Flächeninhalt und die Untersumme kleiner als der tatsächliche Flächeninhalt ist, bietet es sich an, den **Mittelwert** der beiden Werte zu berechnen und diesen als beste Näherung zu verwenden:

$\frac{1}{2}(A_U + A_O) = \frac{1}{2} \cdot 11{,}7 = 5{,}85$

Der Flächeninhalt beträgt näherungsweise 5,85 FE.

►► Lösungsweg B: Sehnentrapeze



Für den Flächeninhalt eines Trapezes gilt: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$. Dabei sind a und c die beiden **parallelen** Seiten und h die Höhe des Trapezes.

Mit diesen Gedanken gilt für die einzelnen Trapeze:

$$A_1 = \frac{f(3)+f(4)}{2}\cdot 1 = \frac{5{,}16}{2} = 2{,}58$$
$$A_2 = \frac{f(4)+f(5)}{2}\cdot 1 = \frac{3{,}75}{2} = 1{,}875$$
$$A_3 = \frac{f(5)+f(6)}{2}\cdot 1 = \frac{2{,}79}{2} = 1{,}395$$

Für den Inhalt der gesamten Fläche gilt dann:

$$A = 2{,}58 + 1{,}875 + 1{,}395 = 5{,}85$$

► Ergebnis beurteilen und verbessertes Näherungsverfahren erklären

Im ersten Verfahren sind die Stücke, die durch die Obersumme **zuviel** hinzukommen, **größer** als die Stücke, die beider Untersumme fehlen. Somit ist der berechnete Wert **größer** als der tatsächliche Flächeninhalt.

Entsprechend bei der zweiten Methode: die Trapeze stehen jeweils etwas „über". Somit wird der berechnete Wert auch größer sein als der tatsächliche Flächeninhalt.

Je größer die Streifenbreite gewählt wird, des ungenauer wird die Fläche bestimmt. Eine größere Genauigkeit könnte also erreicht werden, wenn die Streifenbreite verringert und die Anzahl der Streifen entsprechend erhöht wird.

3. **► Funktionsgleichung von g bestimmen** (9BE)

Die vollständigen Koordinaten von P und Q lauten $P\,(3 \mid 3)$ und $Q\,(6 \mid 1{,}2)$.

Der Graph von g soll ebenfalls durch diese beiden Punkte verlaufen. Einsetzen der Koordinaten in die Funktionsgleichung von g liefert die beiden Gleichungen:

I $\quad 3 = \frac{a}{3} + \frac{b}{9}$

II $\quad 1{,}2 = \frac{a}{6} + \frac{b}{36}$

Aus I folgt:

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{a}{3} + \frac{b}{9} && \mid \cdot 9 \\ 27 &= 3a + b && \mid -3a \\ 27 - 3a &= b \end{aligned}$$

Setze $b = 27 - 3a$ ein in II:

$$\begin{aligned} 1{,}2 &= \frac{a}{6} + \frac{27-3a}{36} \\ 1{,}2 &= \frac{a}{6} + \frac{9-a}{12} && \mid \cdot 12 \\ 14{,}4 &= 2a + 9 - a \\ 14{,}4 &= a + 9 && \mid -9 \\ 5{,}4 &= a \end{aligned}$$

Damit folgt auch $b = 27 - 3 \cdot 5{,}4 = 10{,}8$ und so die Funktionsgleichung $g(x) = \frac{5{,}4}{x} + \frac{10{,}8}{x^2}$.

▶ Integral berechnen

Du kannst den Funktionsterm von g umschreiben zu $g(x) = 5{,}4 \cdot \dfrac{1}{x} + 10{,}8 \cdot x^{-2}$. Beachte beim Bilden der Stammfunktion, dass $\int \frac{1}{x} = \ln|x|$.

$$\int_3^6 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_3^6 \left(5{,}4 \cdot \frac{1}{x} + 10{,}8 \cdot x^{-2}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_3^6 g(x)\,\mathrm{d}x = \left[5{,}4 \cdot \ln|x| + (-1) \cdot 10{,}8 \cdot x^{-1}\right]_3^6$$

$$\int_3^6 g(x)\,\mathrm{d}x = \left[5{,}4 \cdot \ln|x| - \frac{10{,}8}{x}\right]_3^6$$

$$\int_3^6 g(x)\,\mathrm{d}x = \left(5{,}4 \cdot \ln 6 - \frac{10{,}8}{6}\right) - \left(5{,}4 \cdot \ln 3 - \frac{10{,}8}{3}\right)$$

$$\int_3^6 g(x)\,\mathrm{d}x = 5{,}4 \cdot (\ln 6 - \ln 3) + 1{,}8$$

$$\int_3^6 g(x)\,\mathrm{d}x = 5{,}4 \cdot \left(\ln \tfrac{6}{3}\right) + 1{,}8 = 5{,}4 \ln 2 + 1{,}8 \approx 5{,}54299$$

4.1 **▶ Gleichung begründen** (10BE)

▶▶ Lösungsweg A: Gleichung durch Ableiten begründen

Wenn $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$, so heißt dies auch, dass $(\arctan(x) + C)' = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Leite den Ausdruck $18 \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$ nach dieser Regel ab und zeige, dass sich so der Term von f ergibt. Achtung: Kettenregel!

$$\left(18 \cdot \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C\right)' = 18 \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\left(18 \cdot \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C\right)' = \frac{6}{\frac{x^2}{9} + 1}$$

$$\left(18 \cdot \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C\right)' = \frac{6}{\frac{1}{9}\left(x^2 + 9\right)}$$

$$\left(18 \cdot \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C\right)' = \frac{6 \cdot 9}{x^2 + 9}$$

$$\left(18 \cdot \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C\right)' = \frac{54}{x^2 + 9} = f(x)$$

Damit ist die Gleichung nachgewiesen.

▶▶ Lösungsweg B: Gleichung durch Integrieren begründen

Bilde eine Stammfunktion nach der angegebenen Regel:

$$\int \frac{54}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{9\cdot 6}{9\cdot\left(\frac{x^2}{9}+1\right)}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{54}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{54}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = 6\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Substitution: $\frac{x}{3} =: z$. Dabei ist $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3}$, also $\mathrm{d}x = 3\,\mathrm{d}z$:

$$\int \frac{54}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = 6\cdot\int \frac{1}{z^2+1}\cdot 3\,\mathrm{d}z$$

$$\int \frac{54}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = 18\cdot\int \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

$$\int \frac{54}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = 18\cdot\arctan(z)+C$$

Resubstitution $z = \frac{x}{3}$ liefert das gewünschte

$$\int \frac{54}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = 18\cdot\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

▶ Flächeninhalt berechnen

Du hast eben nachgewiesen, dass F mit $F(x) = 18\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$ eine mögliche Stammfunktion von f ist. Für den Inhalt der Fläche gilt dann:

$$A = \int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_3^6 = 18\arctan\left(\tfrac{6}{3}\right) - 18\arctan\left(\tfrac{3}{3}\right) = 18\left(\arctan(2) - \arctan(1)\right)$$

Achte darauf, dass dein Taschenrechner auf **RAD** eingestellt ist (Bogenmaß):

$$A = \int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 18\left(\arctan(2) - \arctan(1)\right) \approx 5{,}7915$$

Der (echte) Flächeninhalt beträgt etwa 5,7915 FE.

▶ Flächeninhalt mit Näherungswerten vergleichen

Die beiden Näherungsverfahren aus Aufgabe 2. haben mit $A = 5{,}85$ jeweils den gleichen Wert geliefert. Für die prozentuale Abweichung vom echten Flächeninhalt gilt demnach:

$p = \frac{5{,}85}{5{,}7915} \approx 1{,}01$, d.h. eine Abweichung von etwa 1 %.

In Aufgabenteil 3 wurde der Graph von f durch den Graphen von g angenähert. Hier gilt für die Abweichung:

$p = \frac{5{,}54299}{5{,}7915} \approx 0{,}957$, d.h. eine Abweichung von etwas mehr als 4 %.

4.2 **▶ Grenzwerte für $x \to \infty$ vergleichen** (6BE)

1. Schritt: Stammfunktion von g

$$\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{5{,}4\ln|x|}_{\to\infty} - \underbrace{\frac{10{,}8}{x}}_{\to 0}\right) = \infty$$

Für $x \to \infty$ strebt $G(x)$ gegen ∞ und nimmt keinen endlichen Grenzwert an.

2. Schritt: Stammfunktion von f

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(18\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right) = 18 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{1}{3}x\right)$ Faktor $\frac{1}{3}$ vernachlässigen

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(18\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right) = 18 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \arctan\left(x\right)$

Überlegen wir: $\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$ ist die Umkehrfunktion des Tangens. Der Tangens besitzt mit $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ **Polstellen** an den Nullstellen des Cosinus, d.h. z.B. bei $x = \frac{\pi}{2}$.
Da $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$, ist entsprechend $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

Somit gilt weiter:

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(18\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right) = 18 \cdot \frac{\pi}{2} = 9\pi$

Die Stammfunktion F von f nimmt für $x \to \infty$ einen **endlichen** Grenzwert an.