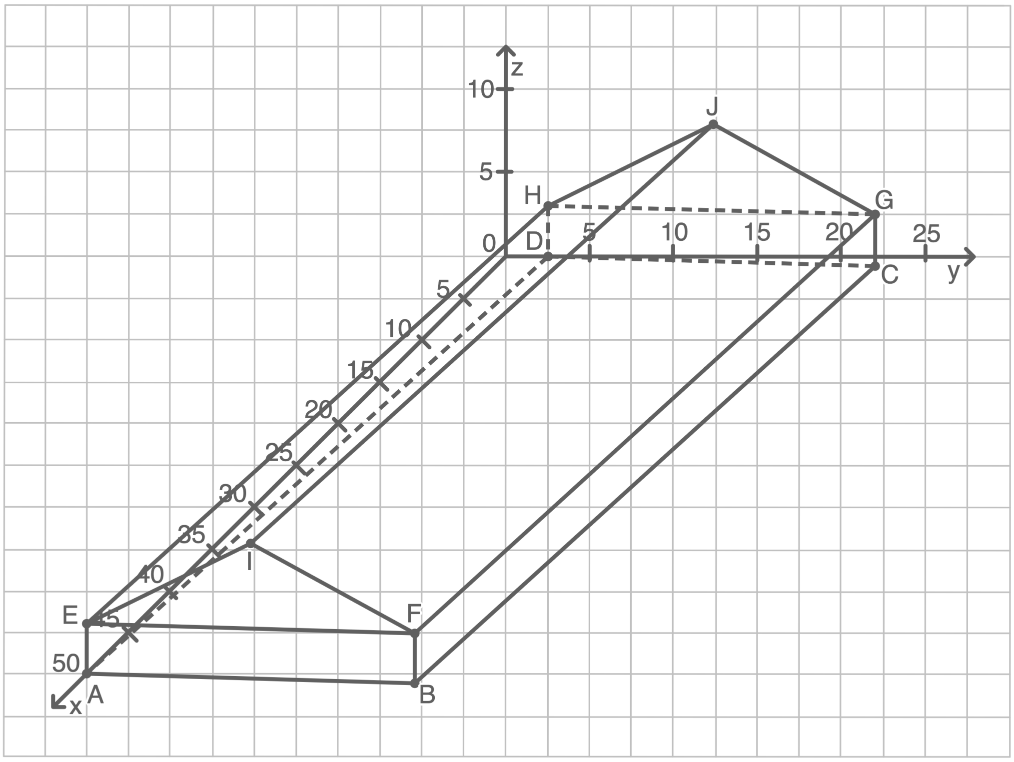
C1 - Lineare Algebra/ Analytische Geometrie

1.1 Koordinaten angeben

$D(0 \mid 2,5 \mid 0), E(50 \mid 0 \mid 3), G(1 \mid 22,5 \mid 3), H(0 \mid 2,5 \mid 3)$

Achsen beschriften



1.2 1. Schritt: Volumen des quaderförmigen Unterbaus berechnen

$$V_U = |\overline{EH}| \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AE}|$$

$$\begin{aligned} \left|\overline{EH}\right| &= \sqrt{(50-0)^2+(0-2,5)^2+(3-3)^2} \\ &= \sqrt{2506,25} \\ &\approx 50,06 \text{ [m]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\overline{AB}\right| &= \sqrt{(51-50)^2+(20-0)^2+(0-0)^2} \\ &= \sqrt{401} \\ &\approx 20,02 \text{ [m]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overline{AE}\right| &= \sqrt{(50-50)^2+(0-0)^2+(3-0)^2}\\ &= \sqrt{9}\\ &= 3\ [\mathrm{m}]\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}V_U &= |\overline{EH}|\cdot|\overline{AB}|\cdot|\overline{AE}|\\ &= 50,06\cdot 20,02\cdot 3\\ &= 3006,6\ [\mathrm{m}^3]\end{aligned}$$

2. Schritt: Volumen des Dachs berechnen

$$V_D = \frac{1}{2}\cdot|\overline{EF}|\cdot h\cdot|\overline{EH}|$$

Die Höhe h des Dachs ergibt sich aus Subtraktion der z-Koordinaten der Punkte J und E mit $h=z_J-z_E=8-3=5\ [\mathrm{m}]$.

Außerdem gilt $|\overline{EF}|=|\overline{AB}|\approx 20,02\ [\mathrm{m}]$.

$$\begin{aligned}V_D &= \frac{1}{2}\cdot 20,02\cdot 5\cdot 50,06\\ &\approx 2505,5\ [\mathrm{m}^3]\end{aligned}$$

3. Schritt: Gesamtvolumen berechnen

$$\begin{aligned}V_{Ges} &= V_U+V_D\\ &= 3006,6+2505,5\\ &= 5512,1\ [\mathrm{m}^3]\end{aligned}$$

1.3 Parametergleichung angeben

$$\begin{aligned}K:\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OA}+s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AE}\\ &= \begin{pmatrix}50\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\20\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ebenengleichung ermitteln

Mittels Kreuzprodukt ergibt sich ein Normalenvektor von K:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n} &= \begin{pmatrix}1\\20\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}20\cdot 3-0\cdot 0\\0\cdot 0-3\cdot 1\\1\cdot 0-0\cdot 20\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}60\\-3\\0\end{pmatrix}\\ &= 3\cdot\begin{pmatrix}20\\-1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Mit $\overrightarrow{OA}$ folgt also:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n}\circ\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{n}\circ\overrightarrow{a}\\ \begin{pmatrix}20\\-1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}20\\-1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}50\\0\\0\end{pmatrix}\\ 20\cdot x+(-1)\cdot y+0\cdot z &= 20\cdot 50-1\cdot 0+0\cdot 0\\ 20x-y &= 1000\end{aligned}$$

Eine mögliche Koordinatengleichung ist somit $K: 20x-y=1000.$

2.1 Es gilt:

$$\begin{aligned}K: 20x-y &= 1000\\ 20x-y &= 2\cdot 500\end{aligned}$$

Somit folgt $K=E_{500}$.

Da die linke Seite der Koordinatengleichung unabhängig von a bei allen Ebenen der Schar gleich ist und somit alle Ebenen der Schar die gleichen Normalenvektoren besitzen, verlaufen diese parallel zueinander.

2.2 **Vorgehensweisen erklären**

(1) Die Gerade g verläuft orthogonal zum Eingangsbereich bzw. zur Ebene K durch den Punkt A. Einer der Eckpunkte der Trennwand wird mit T bezeichnet und liegt auf g.

(2) Der Abstand zwischen A und T soll $20\,\mathrm{LE}$ betragen. Die Trennwand soll also 20 Meter hinter dem Eingangsbereich eingezogen werden.

(3) Für die Werte $r=1$ und $r=-1$ besitzen die Punkte der Gerade g einen Abstand von 20 Metern zum Punkt A im Eingangsbereich. Mit $r_2=-1$ ergeben sich die Koordinaten des Punkts T_2, der innerhalb des Zelts liegt.

(4) Einsetzen der Koordinaten von T_2 in die Ebenenschar E_a liefert die Ebenengleichung $E_{299,5}$.

Fehlende Berechnung angeben

$$\begin{array}{rcll} |\overrightarrow{AT}| &=& 20 & \\ \sqrt{((50+20r)-50)^2+(-1\cdot r-0)^2+(0r-0)^2} &=& 20 & \\ \sqrt{(20r)^2+(-r)^2} &=& 20 & \\ \sqrt{401r^2} &=& 20 & \\ \pm 20r &\approx& 20 & \mid :20 \\ r &\approx& \pm 1 & \end{array}$$

Lage der Trennwand beschreiben

Die Trennwand liegt parallel zum Eingangsbereich $ABFE$, lediglich um 20 Meter entlang der Strecke $\overline{AD}$ in negative x-Richtung und somit in den hinteren Teil des Zeltes verschoben.

3.1 **1. Schritt: Geradengleichung aufstellen**

Die Sonnenstrahlen, die auf die Kirmesbaumspitze $S(26 \mid 29,25 \mid 14)$ treffen, können mit folgender Gleichung beschrieben werden:

$$\begin{array}{rcl} g: \overrightarrow{x} &=& \overrightarrow{OS} + t\cdot\overrightarrow{v} \\ &=& \begin{pmatrix} 26 \\ 29,25 \\ 14 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Schritt: Schnittpunkt mit der Zeltwandebene bestimmen

Einsetzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung L der rechten Zeltwand:

$$\begin{array}{rcll} (26+0t)+20\cdot(29,25-2t) &=& 451 & \\ 611-40t &=& 451 & \mid -611 \\ -40t &=& -160 & \mid :(-40) \\ t &=& 4 & \end{array}$$

Daraus ergibt sich der Schnittpunkt S' der Sonnengerade mit der Zeltwandebene:

$$\overrightarrow{OS'} = \begin{pmatrix} 26 \\ 29,25 \\ 14 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 21,25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da die Koordinaten des Schnittpunkts innerhalb des Rechtecks $BCGF$ liegen, trifft der Schatten der

Kirmesbaumspitze auf die rechte Zeltwand.

3.2 **y-Koordinate nachweisen**

Da der Punkt Q in der Ebene L liegt, gilt:

$$\begin{array}{rcll} L: x+20y &=& 451 & \quad \mid Q(25 \mid y \mid z) \\ 25+20y &=& 451 & \quad \mid -25 \\ 20y &=& 426 & \quad \mid :20 \\ y &=& 21,3 & \end{array}$$

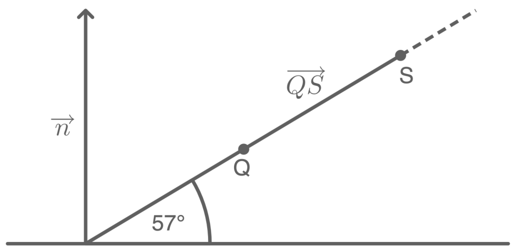
Für den Punkt Q folgt somit die y-Koordinate mit $21,3$.

Wert von z bestimmen

Die Horizontale wird als eine Ebene mit möglichem Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ betrachtet.

$\overrightarrow{QS}$ wird als ein Richtungsvektor $\overrightarrow{r}$ der Geraden, die den von Q ausgehenden Lichtstrahl beschreibt, betrachtet.

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{QS} &=& \begin{pmatrix} 26 \\ 29,25 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 \\ 21,3 \\ z \end{pmatrix} \\ &=& \begin{pmatrix} 1 \\ 7,95 \\ 14-z \end{pmatrix} \end{array}$$



Hilfsskizze (nicht maßstäblich)

Aus der Winkelbeziehung zwischen Gerade und Ebene folgt:

$$\begin{aligned}
\sin(57^\circ) &= \frac{\left|\overrightarrow{r} \circ \overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{r}| \cdot |\overrightarrow{n}|} \\
\sin(57^\circ) &= \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\7,95\\14-z\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\7,95\\14-z\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} \\
\sin(57^\circ) &= \frac{1\cdot 0 + 7,95\cdot 0 + (14-z)\cdot 1}{\sqrt{1^2+7,95^2+(14-z)^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^1}} \\
\sin(57^\circ) &= \frac{14-z}{\sqrt{1^2+7,95^2+(14-z)^2}} && \mid ()^2 \\
(\sin(57^\circ))^2 &= \frac{(14-z)^2}{1^2+7,95^2+(14-z)^2} \\
(\sin(57^\circ))^2 &= \frac{(14-z)^2}{(14-z)^2\cdot\left(\frac{1^2+7,95^2}{(14-z)^2}+1\right)} \\
(\sin(57^\circ))^2 &= \frac{1}{\frac{64,2025}{(14-z)^2}+1} && \mid \cdot \frac{64,2025}{(14-z)^2}+1 \quad \mid : (\sin(57^\circ))^2 \\
\frac{64,2025}{(14-z)^2}+1 &= \frac{1}{(\sin(57^\circ))^2} && \mid -1 \\
\frac{64,2025}{(14-z)^2} &\approx 0,422 && \mid \cdot (14-z)^2 \quad \mid : 0,422 \\
152,14 &\approx (14-z)^2 \\
152,14 &\approx 14^2 - 2\cdot 14\cdot z + z^2 && \mid -152,14 \\
0 &= z^2 - 28z + 43,86
\end{aligned}$$

Mit der pq-Formel folgt nun:

$$\begin{aligned}
z_{1;2} &= -\frac{(-28)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-28)}{2}\right)^2 - 43,86} \\
z_1 &\approx 1,67 \\
z_2 &\approx 26,33
\end{aligned}$$

Da die rechte Zeltwand nur 3 Meter hoch ist, kann z_2 ausgeschlossen werden.

Der Wert von z ist somit bestimmt durch $z \approx 1,67$.

4.1 **Wert deuten**

Der Wert $40\,\%$ beschreibt den Anteil der VIP-Tickets an der Gesamtanzahl der Tickets, die der Sponsor C verlost.

Lineares Gleichungssystem herleiten

Definition der Variablen:

a : Gesamtanzahl der Karten, die Sponsor A verlost

b : Gesamtanzahl der Karten, die Sponsor B verlost

c : Gesamtanzahl der Karten, die Sponsor C verlost

Somit folgt das LGS:

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 0,3\cdot a+0,2\cdot b+0,4\cdot c & = & 40 \\
\text{II} & 0,7\cdot a+0,8\cdot b+0,6\cdot c & = & 100
\end{array}$$

Lösungsmenge berechnen

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 0,3\cdot a+0,2\cdot b+0,4\cdot c & = & 40 \\
\text{II} & 0,7\cdot a+0,8\cdot b+0,6\cdot c & = & 100 \quad |\ 3\cdot\text{II}-7\cdot\text{I} \\
\hline
\text{I} & 0,3\cdot a+0,2\cdot b+0,4\cdot c & = & 40 \\
\text{II} & 1\cdot b-1\cdot c & = & 20
\end{array}$$

Aus II folgt:

$$\begin{array}{rcll}
b-c & = & 20 & |\ +c \\
b & = & 20+c &
\end{array}$$

Einsetzen in I ergibt:

$$\begin{array}{rcll}
0,3\cdot a+0,2\cdot(20+c)+0,4\cdot c & = & 40 & \\
0,3\cdot a+0,2\cdot 20+0,2\cdot c+0,4\cdot c & = & 40 & |\ -4 \\
0,3\cdot a+0,6\cdot c & = & 36 & |\ -0,6\cdot c \\
0,3\cdot a & = & 36-0,6\cdot c & |\ :0,3 \\
a & = & 120-2c &
\end{array}$$

Somit ist ein mögliches Ergebnis des Gleichungssystems gegeben durch $\mathbb{L}=\{(120-2c\mid 20+c\mid c)\mid c\in\mathbb{R}\}$.

4.2 Damit Sponsor C eine passende Anzahl an Karten verlost, muss gelten:

$20\leq c\leq 140$

Für Sponsor A muss gelten:

$$\begin{array}{rcccll} 20 & \leq & 120-2c & \leq & 140 & \quad \mid -120 \\ -100 & \leq & -2c & \leq & 20 & \quad \mid :(-2) \\ 50 & \geq & c & \geq & -10 & \end{array}$$

Für Sponsor B muss gelten:

$$\begin{array}{rcccll} 20 & \leq & 20+c & \leq & 140 & \quad \mid -20 \\ 0 & \leq & c & \leq & 120 & \end{array}$$

Aus allen drei Einschränkungen ergibt sich also $20 \leq c \leq 50$.

4.3 **Aussage** I

Die Aussage ist nicht korrekt. Beispielsweise ist folgendes Gleichungssystem unterbestimmt und besitzt keine Lösung:

$$\begin{array}{llcl} \mathrm{I} & a+b+c & = & 5 \\ \mathrm{II} & a+b+c & = & 1 \end{array}$$

Aussage II

Die Aussage ist korrekt.

Beispielsweise ist folgendes Gleichungssystem überbestimmt, besitzt aber keine eindeutige Lösung:

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & a+b & = & 2 \\ \mathrm{II} & 2a+2b & = & 4 \\ \mathrm{II} & 3a+3b & = & 6 \end{array}$$

Alle drei Gleichungen sind linear abhängig, wodurch das Gleichungssystem keine eindeutige Lösung besitzt.