

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 + 5x_3 &= -5 \\ -3x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 &= 1 \end{aligned}$$

- a. Untersuchen Sie die Lösungsmengen in Abhängigkeit vom Parameter k . Geben Sie in allen Fällen die Lösungsmenge an. (9BE)

Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge für $k = -1$ z.B. durch die Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R} \text{ beschrieben wird.}$$

- b. Die Lösungsmenge für $k = -1$ lässt sich geometrisch als Gerade g im Raum interpretieren. Stellen Sie diese Gerade graphisch mit Hilfe der Durchstoßpunkte durch die Koordinatenebenen dar. Zeichnen Sie zusätzlich die Ebene E mit (8BE)

$$E: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \text{ mit Hilfe der Spurgeraden ein.}$$

Die Lage der Geraden g und der Ebene E bezüglich der drei Koordinatenachsen und die Lage zwischen g und E müssen eindeutig zu erkennen sein.

Wählen Sie nachfolgend entweder die Aufgaben c.1 und c.2 **oder** d.1 und d.2

- c.1 Weisen Sie nach, dass die Matrix $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Spiegelung an der Ebene (9BE)

E ist. Die Gerade g wird an der Ebene E gespiegelt. Zeichnen Sie die gespiegelte Gerade g' ein und bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden.

- c.2 Die Abbildung P soll den Raum in Richtung der 1. Achse auf die Ebene E projizieren. Begründen Sie, dass die erste Spalte der Abbildungsmatrix P nur Nullen enthält und bestimmen Sie die zweite und dritte Spalte der Matrix P . (4BE)

- d.1 Zeigen Sie allgemein einen Weg auf, wie man bei vorgegebenem Mittelpunkt M und Radius r einer Kugel feststellen kann, ob die Kugel gemeinsame Punkte mit einer Ebene hat. Untersuchen Sie anschließend, ob die Kugel mit dem Mittelpunkt $M(2 \mid -2 \mid 1)$ und dem Radius $r = 1$ gemeinsame Punkte mit E hat. (9BE)

- d.2 Eine Kugel mit Radius 1 hat ihren Mittelpunkt M auf der Geraden g und berührt die Ebene E . Bestimmen Sie die Koordinaten eines möglichen Mittelpunktes M . (4BE)