C - Stochastik

1.1 Wahrscheinlichkeit ermitteln

Betrachtet wird die Zufallsgröße X, die die Anzahl der Personen beschreibt, welche tatsächlich zum Flug erscheinen. Insgesamt kann X als binomialverteilt mit den Parametern $n=92$ und $p=84\,\%=0,84$ angesehen werden. Es folgt:

$$\begin{array}{rcl} P(X=83) & = & \binom{92}{83}\cdot 0,84^{83}\cdot 0,16^{9} \\ & \approx & 0,0310 \\ & = & 3,1\,\% \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P(X\leq i) & = & \sum\limits_{i=0}^{80}\binom{92}{i}\cdot 0,84^{i}\cdot 0,16^{92-i} \\ & = & F_{92;0,84}(80) \\ & \approx & 0,8189 \\ & = & 81,89\,\% \end{array}$$

1.2 Wahrscheinlichkeit bestimmen

Eine neue Zufallsgröße Y, beschreibt die die Anzahl der Flüge in einer Woche, bei denen mehr Personen erscheinen, als das Flugzeug Sitzplätze hat. Y ist auch binomialverteilt, hier mit $n=8$ und $p=1-0,8189=0,1811$. Es folgt:

$$\begin{array}{rcl} P(Y\geq 1) & = & 1-P(Y=0) \\ & = & 1-\binom{8}{0}\cdot 0,1811^{0}\cdot 0,8189^{8} \\ & = & 1-0,8189^{8} \\ & \approx & 0,7978 \\ & = & 79,78\,\% \end{array}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $79,78\,\%$ erscheinen zu mindestens einem der acht Flüge mehr Personen, als das Flugzeug Sitzplätze besitzt.

1.3 Mindestanzahl der Flüge berechnen

$$
\begin{aligned}
P(Y_n \geq 1) &\geq 0,95 \\
1-P(Y_n = 0) &\geq 0,95 \\
1-\binom{n}{0}\cdot 0,1811^0 \cdot 0,8189^n &\geq 0,95 \\
1-0,8189^n &\geq 0,95 && \mid -1 \\
-0,8189^n &\geq -0,05 && \mid \cdot(-1) \\
0,8189^n &\leq 0,05 && \mid \ln \\
n\cdot \ln(0,8189) &\leq \ln(0,05) && \mid :\ln(0,8189)
\end{aligned}
$$

Da $\ln(0,8189) < 0$ gilt, folgt, dass $n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,8189)} \approx 14,99.$

Es müssen somit mindestens 15 Flüge beobachtet werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ mindestens ein Flug dabei ist, bei dem mehr Personen erscheinen als Sitzplätze vorhanden sind.

2. **Lösungsweg A: Binomialverteilung**

Hier wird die Formel für die Binomialverteilung verwendet. Diese kann verwendet werden, da die Personen laut Aufgabenstellung unabhängig voneinander zum Flug erscheinen. Bei jeder Person ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zu ihrem gebuchten Flug erscheint somit gleich.

Lösungsweg B: DeMoivre-Laplace

Hier wird die Binomialverteilung durch die Standardnormalverteilung approximiert. Umschreiben von $P(X=75)$ als

$$P(X=75) = P(X \leq 75) - P(X \leq 74)$$

und näherungsweise Berechnung der beiden Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq 75)$ und $P(X \leq 74)$ mit Hilfe der Normalverteilung durch Anwendung der Regel von DeMoivre-Laplace.
Die notwendige Standardisierung der Zufallsgröße X geschieht durch das Subtrahieren des Erwartungswerts $\mu = 77,28$ und das Dividieren durch die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\frac{7728}{625}}$.
Der Summand $+0,5$ führt eine Stetigkeitskorrektur durch.
Diese Methode kann nur dann angewendet werden, wenn die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist. Dies ist hier der Fall, da $\sqrt{\frac{7728}{625}} \approx 3,5 > 3$ gilt.

3. **Hypothesentest entwickeln**

1. Schritt: Art des Testes bestimmen

Mit dem Hypothesentest soll überprüft werden, ob die Wahrscheinlichkeit p für einen pünktlichen Flug immernoch mindestens $80\,\%$ beträgt oder gesunken ist. Die Fluggesellschaft geht dabei erstmal von einer unveränderten Wahrscheinlichkeit aus. Es folgt:

Nullhypothese: $H_0:\; p \geq 0,8$ Gegenhypothese: $H_1:\; p < 0,8$

2. Schritt: Zufallsgröße einführen

Die neue Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der pünktlichen Flüge. Y kann als binomialverteilt mit den Parametern $n=1000$ und $p=0,80$ angenommen werden.

3. Schritt: Gleichung aufstellen

Durch Beachten des Signifikanzniveaus wird betrachtet:

$$P(Y\leq k)\leq 0,05$$

Bestimmung von k mit Hilfe der Tabelle auf dem Aufgabenblatt liefert:

$$\begin{array}{rcl} P(Y\leq k) & \leq & 0,05 \\ P(Y\leq 778) & \approx & 0,0459 \\ P(Y\leq 779) & \approx & 0,0539 \\ k & \leq & 778 \end{array}$$

4. Schritt: Entscheidungsregel formulieren

Wenn höchstens 778 pünktliche Flüge beobachtet werden, wird die Nullhypothese $p\geq 0,80$ abgelehnt und die Vermutung, dass die Pünktlichkeit gesunken ist bestätigt. Andernfalls wird die Nullhypothese nicht abgelehnt und es kann nicht von einer verringerten Pünktlichkeit ausgegangen werden.

5. Schritt: Fehler 2. Art im Sachzusammenhang beschreiben

Der Fehler 2. Art bedeutet die Nullhypothese fälschlicherweise zu bestätigen. In diesem Fall wird dieser begangen, wenn mehr als 778 pünktliche Flüge beobachtet werden, obwohl die Pünktlichkeit in Wahrheit doch gesunken ist, da die Fluggesellschaft dann fälschlicherweise davon ausgeht, dass die Pünktlichkeit nicht gesunken ist.

4.1 Standardabweichung nachweisen

Es gilt $P(X\leq k)\approx\Phi\left(\dfrac{k-\mu}{\sigma}\right)$.

Dabei ist Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Somit folgt:

$$
\begin{aligned}
P(X > 110) &= 0,1 \\
1 - P(X \leq 110) &= 0,1 && \mid -1 \\
-P(X \leq 110) &= -0,9 && \mid \cdot(-1) \\
P(X \leq 110) &= 0,9 \\
\Phi\left(\frac{110-\mu}{\sigma}\right) &= 0,9 && \mid \mu = 105 \\
\Phi\left(\frac{110-105}{\sigma}\right) &= 0,9 \\
\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) &= 0,9
\end{aligned}
$$

Die Tabelle zur Normalverteilung aus der Formelsammlung, oder auch der Taschenrechner, liefern:

$\Phi(1,2816) \approx 0,9$

Durch Einsetzen folgt weiter:

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{\sigma} &\approx 1,2816 && \mid :5 \\
\frac{1}{\sigma} &\approx \frac{1,2816}{5} && \mid ^{-1} \\
\sigma &\approx \frac{5}{1,2816} \\
\sigma &\approx 3,90
\end{aligned}
$$

Die Standardabweichung von X beträgt somit $\sigma \approx 3,90$.

4.2 **Sigma-Umgebung angeben**

Einsetzen von $\mu = 105$ und $\sigma = 3,90$ liefert für die σ-Umgebung:

$$
\begin{aligned}
[\mu - \sigma; \mu + \sigma] &= [105 - 3,90; 105 + 3,90] \\
&= [101,10; 108,90]
\end{aligned}
$$

Bedeutung des Werts im Sachzusammenhang beschreiben

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$

$P(101,10 \leq X \leq 108,90) \approx 0,68$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $68\,\%$ beträgt die Flugzeit eines solchen Fluges somit zwischen etwas mehr als 101 und etwas weniger als 109 Minuten.