1. ► **Erwartungswert an gedopten Sportlern** (4BE)

Es werden 10% der Sportler untersucht, also 150 von 1500 Sportlern. Die Zufallsvariable Z beschreibe die Anzahl der Sportler, die gedopt haben. Dann ist Z nach $(150; 0,12)$ binomialverteilt. Der Erwartungswert ist:

$E(Z) = n \cdot p = 150 \cdot 0,12 = 18$

Das bedeutet, dass man erwarten kann, dass 18 Sportler von diesen 10% untersuchten gedopt haben. Berechnet man nun die Wahrscheinlichkeit, dass genau 18 Sportler gedopt haben, erhält man:

$P(Z = 18) = \binom{150}{18} \cdot 0,12^{18} \cdot 0,88^{132} \approx 0,099786 = 9,9\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $9,9\%$ haben 18 Sportler von diesen 150 gedopt.

2.1 ► **Wahrscheinlichkeit eines positiven Ergebnisses** (11BE)

Um diese Wahrscheinlichkeit zu berechnen, kann man entweder ein Baumdiagramm aufstellen, oder eine Vier-Felder-Tafel benutzen.

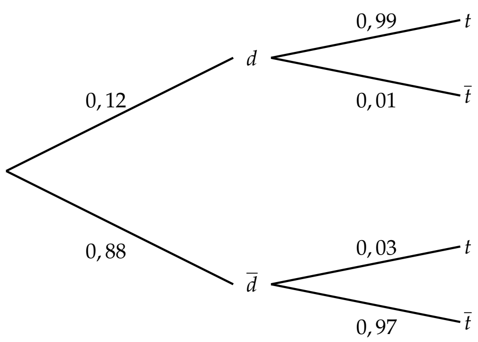
►► **Lösungsweg A**

In dem Baumdiagramm gelten folgende Bezeichnungen:

d : Sportler hat gedopt $\overline{d}$: Sportler hat nicht gedopt

t : Test ist positiv ausgefallen $\overline{t}$: Test ist negativ ausgefallen

Gegeben sind die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sportler dopt, mit 12%, und die Sensitivität des Tests mit 99%, bzw 97%. Daraus ergibt sich folgendes Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test ein positives Ereignis zeigt, berechnet sich über die totale Wahrscheinlichkeit:

$P(t) = 0,12 \cdot 0,99 + 0,88 \cdot 0,03 \approx 0,1452 = 14,52\%$

►► **Lösungsweg B**

	d	$\overline{d}$	Summen
t	$0,1188$	$0,0264$	$0,1452$
$\overline{t}$	$0,0012$	$0,8536$	$0,8548$
Summen	$0,12$	$0,88$	1

Dabei kommt man wie folgt auf die einzelnen Einträge:

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sportler dopt, und positiv getestet wird, ist:

$P(d \cap t) = 0,12 \cdot 0,99 = 0,1188$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sportler nicht dopt, und positiv getestet wird, ist:

$P(\overline{d} \cap t) = 0,88 \cdot 0,03 = 0,0264$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sportler dopt, und negativ getestet wird, ist:

$P(d \cap \overline{t}) = 0,12 \cdot 0,01 = 0,0012$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sportler nicht dopt, und negativ getestet wird, ist:

$P(\overline{d} \cap \overline{t}) = 0,88 \cdot 0,97 = 0,8536$

Um nun herauszufinden, wann ein Sportler positiv getestet wird, addiert man die Teilwahrscheinlichkeiten:

$P(t) = P(d \cap t) + P(\overline{d} \cap t) = 0,1188 + 0,0264 = 0,1452 = 14,52\%$

Somit ergibt sich aus beiden Lösungswegen, dass die Prozentzahl der Sportler, die positiv getestet werden, $14,52\%$ beträgt.

Um nun zu berechnen, wieviele Sportler im Mittel positiv getestet werden, berechnet man den Erwartungswert. Seien Y die Anzahl der Sportler, bei denen der Test positiv ausfällt.

$E(Y) = n \cdot p = 150 \cdot 0,1452 = 21,75$

Man kann somit langfristig damit rechnen, dass 22 Sportler positiv getestet werden.

2.2 ▶ **Wahrscheinlichkeit von $P_t(\overline{d})$**

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv getesteter Sportler zu Unrecht verdächtigt wird, bezeichnen wir mit $P_t(\overline{d})$. Auch hier gibt es zwei unterschiedliche Wege die Wahrscheinlichkeit zu berechnen:

▶▶ **Lösungsweg A: Formel von Bayes**

Mit der Formel von Bayes lässt sich die Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$P_t(\overline{d}) = \frac{P_{\overline{d}(t)} \cdot P(\overline{d})}{P(t)} = \frac{0,03 \cdot 0,88}{0,1452} \approx 0,1818 = 18,18\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $18,18\%$ wird ein positiv getesteter Sportler zu Unrecht verdächtigt.

▶▶ **Lösungsweg B: Vierfeldertafel**

Mit dem Multiplikationssatz und den Ergebnissen aus der Vierfeldertafel ergibt sich:

$$P_t(\overline{d}) = \frac{P(t \cap \overline{d})}{P(t)} = \frac{0,0264}{0,1452} \approx 0,1818 = 18,18\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $18,18\%$ wird ein positiv getesteter Sportler zu Unrecht verdächtigt.

3.1 ▶ **Interpretation der Tabelle** (15BE)

In der Tabelle ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der benötigten Tests angegeben. Es sind nur 2 Fälle möglich:

1. Fall: Der Test der gemischten Urinprobe der n Sportler fällt negativ aus. Dafür ist die Wahrscheinlichkeit $0,88^n$, denn diesmal ist die Wahrscheinlichkeit , dass ein Spieler positiv getestet wird $0,12$, da Spezifität und Sensitivität 1 sind.

2. Fall: Der Test der gemischten Urinprobe fällt positiv aus. Dafür ist die Wahrscheinlichkeit $1 - 0,88^n$. Ist dies der Fall, so müssen alle n Personen einzeln erneut getestet werden. Insgesamt müssen also $n+1$ Tests ausgeführt werden.

3.2 ► **Erwartungswert berechnen**

Der Erwartungswert für die tabellierte Verteilung ist

$$E_n(X) = \frac{1}{n}\left(1 \cdot 0,88^n + (n+1) \cdot (1 - 0,88^n)\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left(0,88^n + n - n \cdot 0,88^n + 1 - 0,88^n\right) = 1 - 0,88^n + \tfrac{1}{n}$$

3.3 ► **Beschriften der Achsen und Ermitteln von n**

Für die x-Achse eignet sich die Beschriftung „Gruppengröße n“, für die y-Achse „mittlere Anzahl der notwendigen Tests pro Person“.

Aus der Zeichnung geht hervor, dass der Graph sein Minimum zwischen 3 und 4 annimmt. Da man hier aber eine natürliche Zahl als Ergebnis haben möchte, die Funktion jedoch stetig ist, muss man die Funktionswerte genau vergleichen, um eine Entscheidung zu treffen.

$E_n(3) = 0,65186 > 0,6503 = E_n(4)$

Damit ist eine Gruppengröße von 4 Personen optimal.