B1 - Analysis

1.1 Es gilt $\lim\limits_{t\to+\infty} a\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-0,25t}=0$, da der lineare Term langsamer gegen unendlich strebt als die Exponentialfunktion gegen Null.

Für $t\to+\infty$ gilt also $f_a(t)\to 0$.

1.2 **Erste Ableitung ermitteln**

Anwendung der Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{array}{lll} f_a'(t) & = & a\cdot 1\cdot \mathrm{e}^{-0,25t}+a\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-0,25t}\cdot(-0,25) \\ & = & a\cdot \mathrm{e}^{-0,25t}\cdot(1-0,25t) \end{array}$$

Zweite Ableitung bestimmen

$$\begin{array}{lll} f_a''(t) & = & a\cdot \mathrm{e}^{-0,25t}\cdot(-0,25)\cdot(1-0,25t)+a\cdot \mathrm{e}^{-0,25t}\cdot(-0,25) \\ & = & a\cdot \mathrm{e}^{-0,25t}\cdot\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}t\right)+a\cdot \mathrm{e}^{-0,25t}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\ & = & a\cdot \mathrm{e}^{-0,25t}\cdot\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}t-\frac{1}{4}\right) \\ & = & a\cdot\left(\frac{1}{16}t-\frac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{e}^{-0,25t} \end{array}$$

1.3 **1. Schritt: Notwendige Bedingung für Extremstellen anwenden**

$$\begin{array}{rll} f_a'(t) & = & 0 \\ a\cdot \mathrm{e}^{-0,25t}\cdot(1-0,25t) & = & 0 \end{array}$$

Da $a\neq 0$ und $\mathrm{e}^{-0,25t}>0$, folgt $1-0,25t=0$ und somit $t=4$.

2. Schritt: Hinreichende Bedingung für Extremstellen prüfen

$$\begin{array}{lll} f_a''(4) & = & a\cdot\left(\frac{1}{16}\cdot 4-\frac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{e}^{-0,25\cdot 4} \\ & = & a\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot \mathrm{e}^{-1} \\ & = & -\frac{a}{4\mathrm{e}} \end{array}$$

3. Schritt: y-Koordinate ermitteln

$$
\begin{aligned}
f_a(4) &= a\cdot 4\cdot \mathrm{e}^{-0{,}25\cdot 4}\\
&= 4a\cdot \mathrm{e}^{-1}\\
&= \frac{4a}{\mathrm{e}}
\end{aligned}
$$

Art des Extrempunkts bestimmen

Für $a>0$ gilt $f_a''(4)<0$ und somit haben die Graphen f_a ein Hochpunkt.

Für $a<0$ gilt $f_a''(4)>0$ und somit haben die Graphen f_a ein Tiefpunkt.

1.4 Aus dem abgebildeten Graphen lässt sich der Hochpunkt $P(4|4)$ ablesen.

Die y-Koordinate des Hochpunkts wurde in 1.3 bereits abhängig von a berechnet. Durch Einsetzen der $y-$Koordinate von P folgt:

$$
\begin{aligned}
f_a(4) &= \frac{4a}{\mathrm{e}}\\
4 &= \frac{4a}{\mathrm{e}} \qquad |\cdot\mathrm{e} \quad |:4\\
\mathrm{e} &= a
\end{aligned}
$$

Die zugehörige Funktion besitzt somit die folgende Gleichung:

$f_{\mathrm{e}}(t)=\mathrm{e}\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t}$.

Durch Anwendung der Rechenregeln für Exponentialfunktionen ergibt sich:

$\mathrm{e}\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t}=t\cdot \mathrm{e}^{1}\cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t}=t\cdot \mathrm{e}^{1-0{,}25t}$

1.5 Eine Änderung des Krümmungsverhalten bedeutet, dass der Graph von G einen Wendepunkt in $[2;6]$ besitzt. Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist eine Extremstelle in g beziehungsweise eine Nullstelle im Graphen von g'.

Da g für $2\leq t\leq 6$ seinen einzigen Extrempunkt an der Stelle $t=4$ hat, besitzt auch jede Stammfunktion von g für $2\leq t\leq 6$ genau einen Wendepunkt und ändert folglich genau einmal das Krümmungsverhalten.

Die Aussage ist somit korrekt.

1.6 $g(t)=t\cdot \mathrm{e}^{1-0{,}25t}$

Formansatz: $G(t)=(at+b)\cdot \mathrm{e}^{1-0{,}25t}$ und $G'(t)=g(t)$

Produktregel: $G'(t)=u'(t)\cdot v(t)+u(t)\cdot v'(t)$

Aus $g(t)$ ergeben sich:

$u(t) = at + b$ mit $u'(t) = a$

$v(t) = \mathrm{e}^{1-0{,}25t}$ mit $v'(t) = (-0,25) \cdot \mathrm{e}^{1-0{,}25t}$

Eingesetzt in $G'(t)$ folgt:

$$\begin{aligned} G'(t) &= a \cdot \mathrm{e}^{1-0{,}25t} + (at+b) \cdot (-0,25) \cdot \mathrm{e}^{1-0{,}25t} \\ &= (a - 0,25 \cdot (at+b)) \cdot \mathrm{e}^{1-0{,}25t} \\ &= \left(-\frac{1}{4}at - \frac{1}{4}b + a\right) \cdot \mathrm{e}^{1-0{,}25t} \end{aligned}$$

Somit gilt: $\mathrm{I}: -\frac{1}{4}a = 1 \quad \mathrm{II}: -\frac{1}{4}b + a = 0$

Aus I folgt $a = -4$ und aus II folgt $b = -16.$

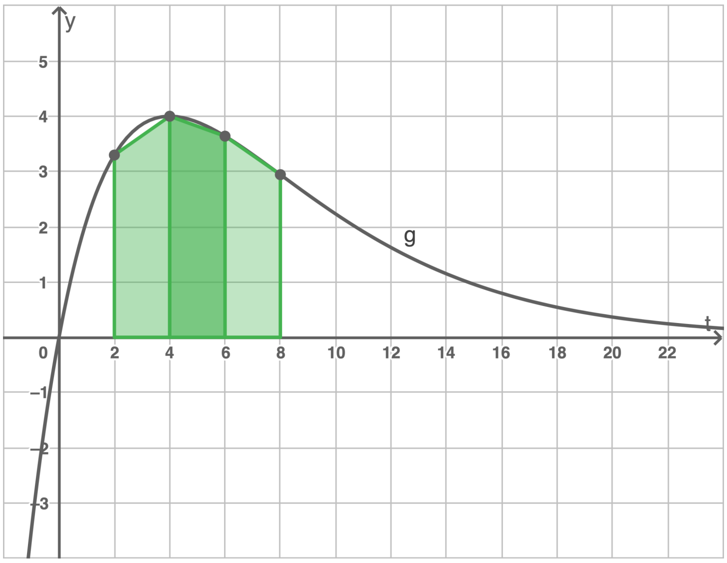
Eine Stammfunktion G ist also :

$$\begin{aligned} G(t) &= (-4t - 16) \cdot \mathrm{e}^{1-0{,}25t} \\ &= -4 \cdot (t+4) \cdot \mathrm{e}^{1-0{,}25t} \end{aligned}$$

1.7 Der Flächeninhalt von g ist genau dann endlich, wenn die Stammfunktion für $t \to \infty$ einen Grenzwert besitzt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g(t)\ \mathrm{d}t &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b g(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[-4 \cdot (t+4) \cdot \mathrm{e}^{1-0{,}25t}\right]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} -4 \cdot (b+4) \cdot \mathrm{e}^{1-0{,}25b} - (-4 \cdot 4 \cdot \mathrm{e}^1) \\ &= 16\mathrm{e} \\ &\approx 43,49 \end{aligned}$$

1.8 Skizze Sehnentrapezverfahren



Näherung Sehnentrapezverfahren

Der Flächeninhalt eines Trapez lässt sich berechnen durch: $A = h \cdot \dfrac{a+c}{2}$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} A_1 &= (4-2) \cdot \frac{g(2)+g(4)}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{2 \cdot \mathrm{e}^{1-0,25 \cdot 2} + 4 \cdot \mathrm{e}^{1-0,25 \cdot 4}}{2} \\ &\approx 7,297 \text{ [FE]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= (6-4) \cdot \frac{g(4)+g(6)}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{4 \cdot \mathrm{e}^{1-0,25 \cdot 4} + 6 \cdot \mathrm{e}^{1-0,25 \cdot 6}}{2} \\ &\approx 7,639 \text{ [FE]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= (8-6) \cdot \frac{g(6)+g(8)}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{6 \cdot \mathrm{e}^{1-0,25 \cdot 6} + 8 \cdot \mathrm{e}^{1-0,25 \cdot 8}}{2} \\ &\approx 6,582 \text{ [FE]} \end{aligned}$$

Gesamter Flächeninhalt:

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 21,518 \text{ [FE]}$

Näherung Kepler'sche Fassregel

$$\begin{aligned}\int_2^8 g(t)\ \mathrm{d}t &\approx \frac{8-2}{6}\left(g(2)+4\cdot g\left(\frac{2+8}{2}\right)+g(b)\right)\\ &= 1\cdot\left(2\cdot \mathrm{e}^{1-0,25\cdot 2}+4\cdot(5\cdot \mathrm{e}^{1-0,25\cdot 5})+8\cdot \mathrm{e}^{1-0,25\cdot 8}\right)\\ &\approx 21,816\ [\mathrm{FE}]\end{aligned}$$

Tatsächlicher Flächeninhalt

$$\begin{aligned}\int_2^8 g(t)\ \mathrm{d}t &= \left[-4\cdot(t+4)\cdot \mathrm{e}^{1-0,25t}\right]_2^8\\ &= -4\cdot(8+4)\cdot \mathrm{e}^{1-0,25\cdot 8}-\left(-4\cdot(2+4)\cdot \mathrm{e}^{1-0,25\cdot 2}\right)\\ &= 21,911\ [\mathrm{FE}]\end{aligned}$$

Die Näherungsansätze durch das Sehnentrapezverfahren und die Kepler'sche Fassregel weichen nur um wenige Dezimalstellen vom tatsächlichen Flächeninhalt ab und sind somit ziemlich genau. Die Kepler'sche Fassregel ist hierbei jedoch genauer als das Sehnentrapezverfahren mit der Streifenbreite 2.

2.1 Das Extremum der Änderungsrate entspricht der Wendestelle von k.

1. Schritt: Erste und zweite Ableitung bestimmen

$$\begin{aligned}k'(t) &= \mathrm{e}^{1-0,25t}+t\cdot(-0,25)\cdot \mathrm{e}^{1-0,25t}\\ &= (1-0,25t)\cdot \mathrm{e}^{1-0,25t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k''(t) &= -0,25\cdot \mathrm{e}^{1-0,25t}+(1-0,25t)\cdot(-0,25)\cdot \mathrm{e}^{1-0,25t}\\ &= -0,25\cdot \mathrm{e}^{1-0,25t}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{t}{16}\right)\cdot \mathrm{e}^{1-0,25t}\\ &= \left(-\frac{1}{2}+\frac{t}{16}\right)\cdot \mathrm{e}^{1-0,25t}\end{aligned}$$

2. Schritt: Notwendige Bedingung für Wendestellen anwenden

$$\begin{aligned}k''(t) &= 0\\ \left(-\frac{1}{2}+\frac{t}{16}\right)\cdot \mathrm{e}^{1-0,25t} &= 0\end{aligned}$$

Da $\mathrm{e}^{1-0,25t} > 0$ ist, folgt:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}+\frac{t}{16} &= 0 \qquad \mid +\tfrac{1}{2}\\ \frac{t}{16} &= \frac{1}{2} \qquad \mid \cdot 16\\ t &= 8\end{aligned}$$

Da gegeben ist, dass ein Extremum der Änderungsrate existiert, ist der Nachweis der hinreichenden Bedingung für Wendestellen nicht mehr nötig.

Folglich weist die Änderungsrate der (Gesamt-)Konzentration des Wirkstoffs im Blut nach 8 Stunden ein Extremum auf.

2.2
$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\cdot\int_0^8 k(t)\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{8}\cdot\left[t-4\cdot(t+4)\cdot \mathrm{e}^{1-0,25t}\right]_0^8\\ &= \frac{1}{8}\cdot\left(8-4\cdot(8+4)\cdot\mathrm{e}^{1-0,25\cdot 8}-\left(0-4\cdot(0+4)\cdot\mathrm{e}^{1-0,25\cdot 0}\right)\right)\\ &\approx 4,229\ \ [\mathrm{mg/l}]\end{aligned}$$

In den ersten 8 Stunden nach Zuführung des zweiten Medikaments liegt somit eine durchschnittliche Konzentration von etwa $4,229\ \ [\mathrm{mg/l}]$ vor.

2.3 Ermitteln des Zeitpunkts, zu welchem die (Gesamt-)Konzentration des Wirkstoffs im Blut den Wert von 2 erreicht und wieder unter diesen Wert fällt:

$$\begin{aligned}k(t) &= 2\\ 1+t\cdot\mathrm{e}^{1-0,25t} &= 2\end{aligned}$$

Mit dem solve-Befehl des WTR folgt:

$t_1 = 0,41$ und $t_2 = 14,77$

Der Zeitraum, in dem die Konzentration also über $2\ \ [\mathrm{mg/l}]$ liegt, beträgt:

$14,77-0,41 = 14,34\ [\mathrm{h}]$

Da eine Konzentration von mehr als $2\ \ [\mathrm{mg/l}]$ über einen Zeitraum von mehr als 14 Stunden erreicht wird, genügt die vorliegende Medikamentengabe den Bedingungen.