B2 – Analysis

1.1 Für jeden Wert von a ist der Funktionsterm von f_a ein Polynom, welches nur ungerade Exponenten von x besitzt und somit symmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

1.2 **1. Schritt: Ableitungen bestimmen**

$$\begin{aligned} f'_{a;b}(x) &= 3ax^2 - b \\ f''_{a;b}(x) &= 6ax \end{aligned}$$

2. Schritt: Notwendige Bedingung für Extremstellen überprüfen

$$\begin{aligned} f'_{a;b}\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) &= 3a \cdot \left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^2 - b \\ &= 3a \cdot \frac{b}{3a} - b \\ &= b - b \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Schritt: Hinreichende Bedingung für Extremstellen überprüfen

Wegen $a \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$f''_{a;b}\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) = 6a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}} > 0$$

Der Graph von $f_{a;b}$ besitzt somit einen Tiefpunkt mit der x-Koordinate $\sqrt{\frac{b}{3a}}$.

Begründung

Da der Graph von $f_{a;b}$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist, liegt an der Stelle $x = -\sqrt{\frac{b}{3a}}$ ein Hochpunkt vor.

Wegen $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$-\sqrt{\frac{b}{3a}} < 0 < \sqrt{\frac{b}{3a}}$$

Somit besitzt der Hochpunkt immer eine kleinere x-Koordinate als der Tiefpunkt.

1.3 Da die Funktion eine Nullstelle bei $x=3$ hat, muss gelten:

$$\begin{aligned} f_{a;b}(3) &= 0 \\ a\cdot 3^3 - b\cdot 3 &= 0 \\ 27a-3b &= 0 \qquad \mid +3b \\ 27a &= 3b \qquad \mid :3 \\ 9a &= b \end{aligned}$$

Der Graph der Funktion verläuft für $0\leq x\leq 3$ im vierten Quadranten. Da die mit der x-Achse eingeschlossene Fläche in diesem Intervall unterhalb der x-Achse verläuft, ist der orientierte Flächeninhalt negativ.

Es soll also gelten:

$$\begin{aligned} \int_0^3 f_{a;b}(x)\,\mathrm{d}x &= -40,5 \\ \left[\frac{1}{4}ax^4-\frac{1}{2}bx^2\right]_0^3 &= -40,5 \qquad \mid b=9a \\ \left[\frac{1}{4}ax^4-\frac{1}{2}\cdot 9a\cdot x^2\right]_0^3 &= -40,5 \\ 20,25a-40,5a &= -40,5 \\ -20,25a &= -40,5 \qquad \mid :(-20,25) \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Die zugehörigen Werte der Parameter folgen also mit $a=2$ und $b=9\cdot 2=18.$

1.4 **1. Schritt: Tangentengleichung aufstellen**

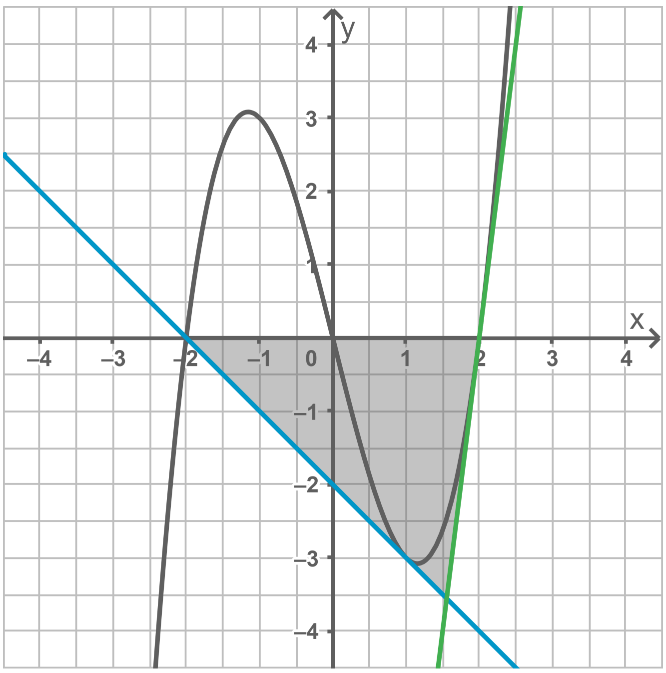
Für die erste Ableitung von f gilt:

$$f'(x)=3x^2-4$$

Für die Steigung m der in grün eingezeichneten Tangente im Punkt $(2\mid 0)$ folgt somit:

$$\begin{aligned} m &= f'(2) \\ &= 3\cdot 2^2-4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Einsetzen von m und der Koordinaten von A in die allgemeine Tangentengleichung liefert:



Hilfsskizze

$$
\begin{aligned}
t: \quad y &= m \cdot x + c \\
0 &= 8 \cdot 2 + c \qquad \mid -16 \\
-16 &= c
\end{aligned}
$$

Eine Gleichung der Tangente ist somit gegeben
durch $t: y = 8x - 16.$

2. Schritt: Schnittpunkt berechnen

Gleichsetzen der Tangentengleichung und der Gleichung der Geraden g liefert:

$$
\begin{aligned}
8x - 16 &= -x - 2 \qquad \mid +16 \quad \mid +x \\
9x &= 14 \qquad \mid :9 \\
x &= \frac{14}{9}
\end{aligned}
$$

Einsetzen in $y = -x - 2$ liefert:

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{14}{9} - 2 \\
&= -\frac{32}{9}
\end{aligned}
$$

Der Schnittpunkt besitzt somit die Koordinaten $S\left(\frac{14}{9} \,\middle|\, -\frac{32}{9}\right)$.

3. Schritt: Flächeninhalt berechnen

Die Dreiecksseite, die auf der x-Achse liegt, entspricht der Grundseite des Dreiecks und besitzt eine Länge von $2 - (-2) = 4$ [LE].

Die y-Koordinate des Schnittpunkts gibt die Höhe h des Dreiecks an.

Es gilt also:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{32}{9} \\
&= \frac{64}{9} \\
&\approx 7,11 \text{ [FE]}
\end{aligned}
$$

1.5 Für einen Punkt P auf dem Graphen von f mit den allgemeinen Koordinaten $(x \mid f(x))$ besitzt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von P mit dem Koordinatenursprung die Koordinaten $\left(\frac{x}{2} \,\middle|\, \frac{f(x)}{2}\right)$.

Gleichsetzen von $h\left(\frac{x}{2}\right)$ mit $\frac{f(x)}{2}$ liefert:

$$
\begin{aligned}
h\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{f(x)}{2} \\
4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3 - 4\cdot\frac{x}{2} &= \frac{x^3-4x}{2} \\
\frac{1}{2}x^3 - 2x &= \frac{1}{2}x^3 - 2x
\end{aligned}
$$

Da die beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen, ist die Aussage folglich richtig.

2.1 Die zeitliche Differenz zwischen 8:30 Uhr und 10:00 Uhr beträgt 1,5 Stunden.

Für die im Mittel pro Stunde eingegangenen Lesebestätigungen in diesem Zeitfenster folgt somit:

$$\frac{4364-1701}{1,5} \approx 1775$$

2.2 **Wert berechnen**

$$
\begin{aligned}
k(2) &= u(2) \\
&= 100\cdot 2^3 - 900\cdot 2^2 + 2300\cdot 2 \\
&= 1800
\end{aligned}
$$

Ergebnis interpretieren

Nach dem Modell beträgt die momentane Änderungsrate der Anzahl der seit 7:00 Uhr eingegangenen Lesebestätigungen um 9:00 Uhr $1800\ \frac{1}{\mathrm{h}}$.

2.3 Aus dem Funktionsterm von v können die Nullstellen bei $x=8$ und $x=18$ abgelesen werden. An der Stelle $x=8$ liegt folglich ein Vorzeichenwechsel von plus nach minus vor.

Somit würden die Änderungsraten nach 15:00 Uhr negative Werte annehmen, was im Sachzusammenhang keinen Sinn ergibt.

2.4 **Anzahl der Lesebestätigungen berechnen**

10:00 Uhr entspricht 3 Stunden nach 7:00 Uhr und 15:00 Uhr entspricht analog 8 Stunden.

Es gilt also:

$$\begin{aligned}
\int_3^8 k(x)\;\mathrm{d}x &= \int_3^8 v(x)\;\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{20}{3}x^3 - \frac{520}{2}x^2 + 2880x\right]_3^8 \\
&= \left(\frac{20}{3}\cdot 8^3 - 260\cdot 8^2 + 2880\cdot 8\right) - \left(\frac{20}{3}\cdot 3^3 - 260\cdot 3^2 + 2880\cdot 3\right) \\
&\approx 3333
\end{aligned}$$

Prozentuale Abweichung ermitteln

Mit den Werten aus der Tabelle folgt für die gesuchte prozentuale Abweichung:

$$\frac{3333-(7572-4364)}{7572-4364} \approx 3,9\,\%$$