A1 - Analysis

1.1 Parameterwerte bestimmen

Es gilt $f(t)=r\cdot \mathrm{e}^{k\cdot t}$ und der Aufgabentext liefert $f(0)=0,1$ und $f(2)=3$. Einsetzen ergibt:

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & f(0) & = & 0,1 \\
& r\cdot \mathrm{e}^{k\cdot 0} & = & 0,1 \\
& r & = & 0,1 \\
\text{II} & f(2) & = & 3 \\
& r\cdot \mathrm{e}^{k\cdot 2} & = & 3
\end{array}$$

I in II einsetzen und nach k auflösen:

$$\begin{array}{rcll}
0,1\cdot \mathrm{e}^{k\cdot 2} & = & 3 & \mid :0,1 \\
\mathrm{e}^{k\cdot 2} & = & 30 & \mid \ln \\
k\cdot 2 & = & \ln(30) & \mid :2 \\
k & = & \dfrac{\ln(30)}{2} & \\
k & \approx & 1,7 &
\end{array}$$

Aus den gegebenen Funktionswerten ergeben sich also $r=0,1$ und $k\approx 1,7$.

1.2 Wert von p ermitteln

$$\begin{array}{rcll}
r\cdot (1+p)^t & = & r\cdot \mathrm{e}^{k\cdot t} & \\
0,1\cdot (1+p)^t & = & 0,1\cdot \mathrm{e}^{1,7\cdot t} & \mid :0,1 \\
(1+p)^t & = & \mathrm{e}^{1,7\cdot t} & \\
(1+p)^t & = & \left(\mathrm{e}^{1,7}\right)^t & \mid \sqrt[t]{} \\
1+p & = & \mathrm{e}^{1,7} & \mid -1 \\
p & = & \mathrm{e}^{1,7}-1 & \\
p & \approx & 4,5 &
\end{array}$$

Mit den in Aufgabe 1.1 berechneten Parameterwerten ergibt sich $p\approx 4,5$.

Wert im Sachzusammenhang deuten

$f(t)=r\cdot (1+p)^t$ stellt exponentielles Wachstum dar. p gibt die Wachstumsrate an, also den Prozentsatz, um den die betrachtete Größe pro Zeiteinheit zunimmt.

Im Sachzusammenhang beschreibt p die Wachstumsrate des Flächeninhalts der mit Algen bedeckten

Fläche des Sees. Pro Monat nimmt der Inhalt der mit Algen bedeckten Fläche also um ca. $450\,\%$ zu.

2.1 **Nullstellen berechnen**

$g(t)=0$ setzen und die Gleichung nach t auflösen:

$$\begin{array}{rcl} g(t) &=& 0 \\ \left(-0,5t^2+t+2\right)\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot t} &=& 0 \end{array}$$

Da $\mathrm{e}^{-0,5\cdot t}\neq 0$ für alle $t\in\mathbb{R}$, folgt mit dem Satz vom Nullprodukt:

$$\begin{array}{rcll} -0,5t^2+t+2 &=& 0 & \quad\mid :(-0,5) \\ t^2-2t-4 &=& 0 & \end{array}$$

pq-Formel anwenden:

$$\begin{array}{rcl} t_{1/2} &=& -\frac{-2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2-(-4)} \\ &=& 1\pm\sqrt{5} \\ t_1 &\approx& 3,24 \\ t_2 &\approx& -1,24 \end{array}$$

Da $t\geq 0$ vorgegeben ist, ist die einzige Nullstelle von g im betrachteten Bereich $t_1\approx 3,24.$

Extremstellen berechnen

1. Schritt: Ableitungen bilden

Mit Produkt- und Kettenregel folgt für die Ableitungen von $g(t)=\left(-0,5t^2+t+2\right)\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot t}$:

$$\begin{array}{rcl} g'(t) &=& (2\cdot(-0,5)t+1+0)\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot t}+\left(-0,5t^2+t+2\right)\cdot(-0,5)\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot t} \\ &=& (-t+1)\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot t}+\left(0,25t^2-0,5t-1\right)\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot t} \\ &=& \left(-t+1+0,25t^2-0,5t-1\right)\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot t} \\ &=& \left(0,25t^2-1,5t\right)\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot t} \\ g''(t) &=& \left(-0,125t^2+1,25t-1,5\right)\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot t} \end{array}$$

Die zweite Ableitung wird hier nicht genauer berechnet, da sie nach Aufgabenstellung ohne Herleitung verwendet werden darf.

2. Schritt: Notwendiges Kriterium für Extremstellen anwenden

$$\begin{array}{rcll} g'(t) &=& 0 & \\ \left(0,25t^2-1,5t\right)\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot t} &=& 0 & \quad\mid :\mathrm{e}^{-0,5\cdot t} \end{array}$$

Da $\mathrm{e}^{-0,5\cdot t} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, folgt mit dem Satz vom Nullprodukt:

$$\begin{aligned} 0,25t^2 - 1,5t &= 0 \\ t \cdot (0,25t - 1,5) &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem Satz des Nullprodukts folgt $t_1 = 0$ und:

$$\begin{aligned} 0,25t - 1,5 &= 0 \qquad \mid +1,5 \\ 0,25t &= 1,5 \qquad \mid :0,25 \\ t_2 &= 6 \end{aligned}$$

3. Schritt: Hinreichendes Kriterium für Extremstellen anwenden

$$\begin{aligned} g''(t_1) &= g''(0) \\ &= \left(-0,125 \cdot 0^2 + 1,25 \cdot 0 - 1,5\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot 0} \\ &= -1,5 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(t_2) &= g''(6) \\ &= \left(-0,125 \cdot 6^2 + 1,25 \cdot 6 - 1,5\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot 6} \\ &= 1,5 \cdot \mathrm{e}^{-3} \\ &\approx 0,07 > 0 \end{aligned}$$

An der Stelle $t_1 = 0$ befindet sich ein Maximum und an der Stelle $t_2 = 6$ ein Minimum.

2.2 **Nullstellen im Sachzusammenhang deuten**

Die Funktion g beschreibt die Änderungsrate des Flächeninhalts der mit Algen bedeckten Fläche. Für $g(t) = 0$, ändert sich der Flächeninhalt der mit Algen bedeckten Fläche zum Zeitpunkt t nicht. Dies ist ein notwendiges Kriterium für eine Extremstelle einer Stammfunktion G von g, die den Flächeninhalt der mit Algen bedeckten Fläche zum Zeitpunkt t beschreibt.
Der Flächeninhalt der mit Algen bedeckten Fläche kann hier also sein Maximum bzw. Minimum annehmen.

Bei dem Modell B ist das bei $t = 2,34$ der Fall, also nach $2,34$ Monaten. Zu diesem Zeitpunkt könnte der Flächeninhalt sein Maximum bzw. Minimum erreicht haben.

Extremstellen im Sachzusammenhang deuten

Zum Zeitpunkt $t_1 = 0$ nimmt g ein Maximum an. Hier ist die Änderungsrate des Flächeninhalts der mit Algen bedeckten Fläche also am größten, die Algen breiten sich zu diesem Zeitpunkt am schnellsten aus.
Zum Zeitpunkt $t_2 = 6$ nimmt g ein Minimum an. Hier ist die Änderungsrate des Flächeninhalts der mit Algen bedeckten Fläche also am kleinsten, die Algen breiten sich zu diesem Zeitpunkt am langsamsten aus oder reduzieren ihren Bestand sogar.

Nach Modell B breitet sich die Algenart zu Beobachtungsbeginn am schnellsten aus. 6 Monate nach

Beobachtungsbeginn ist das Algenwachstum dagegen am langsamsten.

2.3 Integrationsmethode benennen

Der Funktionsterm von g setzt sich aus zwei Faktoren zusammen. Zur Bestimmung der Stammfunktionen solcher Funktionen wird häufig die partielle Integration verwendet:

$$\int_a^b \left(f(x)\cdot g'(x)\right)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

Herleitung der Stammfunktion vervollständigen

Anwenden der obigen Formel auf $\left(t^2-2t-4\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t} + \displaystyle\int (-2t+2)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t}\,\mathrm{d}t$ und Zusammenfassen der einzelnen Summanden liefert:

$$\begin{aligned}
& \left(t^2-2t-4\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t} + \int (-2t+2)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t}\,\mathrm{d}t \\
= & \left(t^2-2t-4\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t} + (-2t+2)\cdot(-2)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t} - \int (-2)\cdot(-2)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t}\,\mathrm{d}t \\
= & \left(t^2-2t-4+4t-4\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t} - \int 4\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t}\,\mathrm{d}t \\
= & \left(t^2+2t-8\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t} - 4\cdot(-2)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t} + C \\
= & \left(t^2+2t-8+8\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t} + C \\
= & \left(t^2+2t\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t} + C
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also für die Stammfunktionen von g :

$$G(t) = \left(t^2+2t\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t} + C$$

2.4 Bedingungen untersuchen

Zu Modell B ist die Funktion g gegeben, die die Änderungsrate des Inhalts der mit Algen bedeckten Fläche beschreibt. In Aufgabe 2.3 wurde bereits die Gleichung der allgemeinen Stammfunktion G von g bestimmt.

G beschreibt also den Flächeninhalt zum Zeitpunkt t. Nun wird C so gewählt, dass G näherungsweise die Bedingungen aus dem Aufgabentext erfüllt.

Werte aus Aufgabe 1.1 in $G(t)$ einsetzen und nach C auflösen:

$$\begin{aligned}
G(0) &= 0{,}1 \\
\left(0^2+2\cdot 0\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot 0} + C &= 0{,}1 \\
C &= 0{,}1
\end{aligned}$$

Nun ist G gegeben durch $G(t) = (t^2+2\cdot t)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot t} + 0{,}1$. Es soll auch $G(2) = 3$ gelten. Probe:

$$\begin{aligned} G(2) &= \left(2^2+2\cdot 2\right)\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot 2}+0,1 \\ &= 8\cdot \mathrm{e}^{-1}+0,1 \\ &\approx 3,04 \\ &\approx 3 \end{aligned}$$

Mit $C=0,1$ passt Modell B also näherungsweise zu den im einleitenden Text beschriebenen Werten.

3. **Grenzwert bestimmen**

Für den Nenner gilt:

$$\begin{aligned} \lim\limits_{t\to+\infty}\left(0,1+3,4\cdot \mathrm{e}^{-2,66\cdot t}\right) &= 0,1+\lim\limits_{t\to+\infty}\left(3,4\cdot \mathrm{e}^{-2,66\cdot t}\right) \\ &= 0,1+3,4\cdot \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\left(\mathrm{e}^{2,66\cdot t}\right)^{-1}\right) \\ &= 0,1+3,4\cdot \underbrace{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{2,66\cdot t}}}_{=0} \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \lim\limits_{t\to+\infty} h(t) &= \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{0,35}{0,1+3,4\cdot \mathrm{e}^{-2,66\cdot t}} \\ &= \frac{0,35}{\lim\limits_{t\to+\infty}\left(0,1+3,4\cdot \mathrm{e}^{-2,66\cdot t}\right)} \\ &= \frac{0,35}{0,1} \\ &= 3,5 \end{aligned}$$

Grenzwert im Sachzusammenhang deuten

Die Funktion h beschreibt im Modell C den Inhalt der mit Algen bedeckten Fläche des Sees. Der Grenzwert beschreibt die Entwicklung auf lange Sicht.

Auf lange Sicht werden nach Modell C ca. $3,5\,\mathrm{a}$ des Sees mit der Algenart bedeckt sein.

4. **Graphen zuordnen**

1. Schritt: Alle Funktionsgleichungen zusammenstellen:

A: $f(t)=0,1\cdot \mathrm{e}^{1,7\cdot t}$

B: $G(t)=\left(t^2+2t\right)\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot t}+0,1$

$C\colon h(t)=\dfrac{0,35}{0,1+3,4\cdot \mathrm{e}^{-2,66\cdot t}}$

2. Schritt: Graphen zuordnen

Die drei Graphen unterscheiden sich in den Grenzwerten für $t\to +\infty$.
Für $h(t)$ ist dieser gegeben als $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)=3,5.$

Der zur Funktion h und damit zum Modell C gehörige Graph ist daher (II).

Für f und G ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} f(t) &= \lim_{t\to+\infty}\left(0,1\cdot \mathrm{e}^{1,7\cdot t}\right)\\
&= +\infty\\
\lim_{t\to+\infty} G(t) &= \lim_{t\to+\infty}\left(\left(t^2+2t\right)\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot t}+0,1\right)\\
&= 0,1+\lim_{t\to+\infty}\left(\underbrace{\left(t^2+2t\right)}_{\to+\infty}\cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-0,5\cdot t}}_{\to 0}\right)\\
&= 0,1
\end{aligned}$$

Somit folgt mithilfe von Material 2, dass Graph (III) zu f, also Modell A, gehört und Graph (I) zu G bzw. Modell B.

Eignung erörtern

Im Modell A würde sich die Algenart unbegrenzt ausbreiten. Der See hat allerdings eine begrenzte Größe, so dass sich die Algen nicht unendlich weit ausbreiten können. Modell A ist daher nur bis zu einem gewissen Punkt realistisch, auf lange Sicht aber nicht.

Im Modell B würde der Flächeninhalt der mit Algen bedeckten Fläche bis zu einem Wert von ca. $3,5\,\mathrm{a}$ ansteigen und dann bis zu einem Wert von ca. $0,1\mathrm{a}$ abnehmen. Dies könnte zum Beispiel durch den erhöhten Nährstoffverbrauch bei einem großen Bestand oder beispielsweise niedrigeres Nährstoffangebot im Winter erklärt werden, wodurch sich die Fläche verringert.
Modell B kann also durchaus realistisch sein.

In Modell C steigt der Flächeninhalt bis zu einem Wert von ca. $3,5\,\mathrm{a}$ und bleibt dann näherungsweise bei diesem. Das könnte einerseits an der begrenzten Fläche des Sees oder auch an dem begrenzten Nahrungsangebot liegen, das eventuell für in etwa diesen Bestand auf Dauer ausreicht.
Somit könnte auch Modell C realistisch sein.