B1 - Analytische Geometrie

1.1 ▶ **Die Länge von Vektoren berechnen**

Vom Punkt $A(2\mid 7\mid 4)$ aus wird ein Laserstrahl auf einen Spiegel gesendet. Der Strahl trifft im Punkt $B(3\mid 2\mid -2)$ auf den Spiegel und wird in den Punkt $C(13\mid 4\mid 10)$ reflektiert. Du sollst die Länge der Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ berechnen und zeigen, dass für die beiden Längen gilt: $|\overrightarrow{BC}| = 2\cdot|\overrightarrow{BA}|$.
Bilde zunächst die beiden Vektoren aus den gegeben Punkten.

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}2\\7\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\\6\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}13\\4\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\2\\12\end{pmatrix}$$

Die Länge eines Vektors kann durch Berechnung des Betrags bestimmt werden:

$$\boxed{|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Wende diese Formel nun für die beiden berechneten Vektoren an.

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BA}| &= \sqrt{(-1)^2+5^2+6^2}\\ &= \sqrt{62}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{10^2+2^2+12^2}\\ &= \sqrt{248}\\ &= \sqrt{4\cdot 62}\\ &= 2\cdot\sqrt{62}\\ &= 2\cdot|\overrightarrow{BA}|\end{aligned}$$

Damit hast du gezeigt, dass gilt: $|\overrightarrow{BC}| = 2\cdot|\overrightarrow{BA}|$.

1.2 ▶ **Richtung des Einfallslot und Einfallswinkel berechnen**

Du sollst den Vektor des Einfallslots $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, sowie den Einfallswinkel α des Lichtstrahls berechnen.
Berechne zunächst den Vektor $\overrightarrow{v}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= \begin{pmatrix}-1\\5\\6\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}10\\2\\12\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1\\5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\6\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4\\6\\12\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Da der Vektor $\overrightarrow{v}$ die Richtung des Einfallslots angibt, ist der Einfallswinkel der Winkel zwischen dem Vektor $\overrightarrow{v}$ und dem Vektor des Lichtstrahls $\overrightarrow{BA}$.
Allgemein gilt für einen Winkel ϕ zwischen den Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$:

$$\boxed{\phi = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}\right)}$$

Du gehst nun folgendermaßen vor:

1. Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{BA}$ berechnen
2. Beträge der Vektoren berechnen
3. Einfallswinkel α berechnen

1. Schritt: Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{BA}$ berechnen

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{BA} &= \begin{pmatrix}4\\6\\12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\\6\end{pmatrix}\\ &= 4\cdot(-1)+6\cdot5+12\cdot6\\ &= -4+30+72\\ &= 98\end{aligned}$$

2. Schritt: Beträge der Vektoren berechnen

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{v}| &= \sqrt{4^2+6^2+12^2}\\ &= \sqrt{196}\\ &= 14\end{aligned}$$

Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{BA}$ kann aus der vorigen Aufgaben übernommen werden: $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{62}$.

3. Schritt: Einfallswinkel α berechnen

Den Winkel α berechnest du nun mit deinem Taschenrechner. Setze die berechneten Werte dazu in die allgemeine Formel für die Winkelberechnung ein.

$$\begin{aligned}\alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{v}|\cdot|\overrightarrow{BA}|}\right)\\ &= \cos^{-1}\left(\frac{98}{14\cdot\sqrt{62}}\right)\\ &= 27,25^\circ = 0,48\,\mathrm{rad}\end{aligned}$$

Der Vektor des Einfallslots ist also mit $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}4\\6\\12\end{pmatrix}$ gegeben und der Einfallswinkel ist $\alpha = 27,25^\circ$.

▶ **Koordinatengleichung der Spiegelebene bestimmen**

Du sollst eine Ebenengleichung in Koordinatenform für die Spiegelebene F angeben. Für die Koordinatengleichung benötigst du einen Normalenvektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der Ebene F steht, und einen Stützvektor $\overrightarrow{s}$, der auf einen Punkt auf der Ebene verweist. Dann gilt allgemeim:

$$\boxed{F: n_1\cdot x_1 + n_2\cdot x_2 + n_3\cdot x_3 = d}$$

d wird aus dem Skalarprodukt des Normalenvektors mit dem Stützvektor gebildet.

Da das Einfallslot senkrecht auf der Spiegelebene steht, kann der Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}4\\6\\12\end{pmatrix}$ als Normalenvektor verwendet werden. Als Stützvektor kann der Ortsvektor von B $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ verwendet werden.

Für die Koordinatengleichung der Spiegelebene F kann man also schreiben:

$$\begin{aligned}F: 4x + 6y + 12z &= 3\cdot 4 + 2\cdot 6 + (-2)\cdot 12\\ &= 0\end{aligned}$$

Diese Gleichung kannst du noch mit 2 kürzen und erhältst dann die folgende Ebenengleichung in Koordinatenform:

$F: 2x + 3y + 6z = 0$

1.3 ▶ **Lage einer Geraden in Bezug auf die Ebene E untersuchen**

Du sollst die Gerade g in Bezug auf ihre Lage auf die Eben E untersuchen. Auf E liegen die Punkte A,

B und C. Die Gerade g ist durch die folgende Parametergleichung gegeben:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

Die Ebene, die durch die Punkte A, B und C definiert wird, kann ebenfalls in der Parameterform dargestellt werden:

$$\boxed{E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{w} + r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} \quad \text{mit } r, s \in \mathbb{R}}$$

Dabei ist der Vektor $\overrightarrow{w}$ der Stützvektor. Für diesen kann der Orstvektors eines beliebigen Punktes auf der Ebene gewählt werden. Die Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ sind die Spannvektoren und können durch die Vektoren zwischen dem ersten Punkt und je einem weiteren Punkt auf der Ebene ausgedrückt werden. In diesem Beispiel kannst du $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ setzen.

$$\begin{aligned} E: \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{w} + r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} \\ &= \overrightarrow{b} + r \cdot \overrightarrow{BA} + s \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Um nun die Lage der Geraden g zu der Ebene E zu untersuchen, ist es praktischer die Ebene in der Normalenform darzustellen. Auf diese Weise kannst du nämlich die Koordinaten des allgemeinen Geradenpunktes der Gerade g direkt in die Normalenform einsetzen. Das Ergebnis der daraus entstehenden Gleichung zeigt dir dann, wie die Lage von g zu der Ebene E ist. Für die Normalenform gilt:

$$\boxed{E: (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{w})\overrightarrow{n} = 0}$$

Einen Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ erhältst du aus dem Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren.

$$
\begin{aligned}
E: \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \cdot 12 - 6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 10 - (-1) \cdot 12 \\ -1 \cdot 2 - 5 \cdot 10 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 48 \\ 72 \\ -52 \end{pmatrix} \\
&= 4 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -13 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Der Wert 4 kann in den folgenden Berechnungen vernachlässigt werden, da jedes Vielfache eines Vektors parallel zu diesem verläuft. $\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -13 \end{pmatrix}$ ist also genau so ein Normalenvektor der Ebene E, wie es der Vektor $\begin{pmatrix} 48 \\ 72 \\ -52 \end{pmatrix}$ ist. Die Normalenform der Ebene E lautet somit:

$$
E: \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -13 \end{pmatrix} = 0
$$

Setze nun die Koordinaten des allgemeinen Geradenpunktes in die Normalengleichung von E ein und überprüfst, für welche r die sich ergebende Gleichung erfüllt ist.

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} 3 + 12r \\ 2 + 18r \\ -2 - 13r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -13 \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} 12r \\ 18r \\ -13r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -13 \end{pmatrix} &= 0
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung ist für $r = 0$ erfüllt. Da es nur dieses eine r gibt, das die Gleichung erfüllt, bedeutet das, dass die Gerade g die Ebene E in genau einem Punkt schneidet. Setze nun $r = 0$ in die Parameterform der Geraden g ein und du erhältst den Schnittpunkt.

$$
\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2- \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}
$$

Die Gerade schneidet die Ebene demnach im Punkt B.
Als nächstes musst du untersuchen in welchem Winkel β die Gerade die Ebene schneidet. In diesem

Fall siehst du, dass der Normalenvektor $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}12\\18\\-13\end{pmatrix}$ der Ebene E parallel zum Richtungsvektor $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}12\\18\\-13\end{pmatrix}$ der Geraden g verläuft, da der Normalenvektor ein Vielfaches des Richtungsvektors ist. Die beiden Vektoren sind somit linear abhängig und die Gerade schneidet die Ebene daher senkrecht.

Dies lässt sich auch rechnerisch nachweisen. Setze dazu den Richtungsvektor in die folgende Formel ein:

$$\boxed{\sin\beta=\frac{|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{n}|}}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= \sin^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{n}|}\right)\\
&= \sin^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{n}|}\right)\\
&= \sin^{-1}\left(\frac{\left|\begin{pmatrix}12\\18\\-13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\18\\-13\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{12^2+18^2+13^2}\cdot\sqrt{12^2+18^2+13^2}}\right)\\
&= \sin^{-1}\left(\frac{|(12^2+18^2+13^2)|}{(12^2+18^2+13^2)}\right)\\
&= \sin^{-1}(1)\\
&= 90^\circ
\end{aligned}$$

Du hast gezeigt, dass die Gerade g die Ebene E senkrecht im Punkt B schneidet.

1.4 ▶ **Ebenen und Geraden im Sachzusammenhang untersuchen**

Du sollst die folgenden 4 Zeilen im Sachzusammenhang mit den zuvor vorgestellten Ebenen und Geraden aus den Aufgabenteilen 1.1 bis 1.3 untersuchen:

I	$k: \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$	
II	$H: \quad \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 2x + 3y + 6z = 49$	
III	$2 \cdot (3 + 2t) + 3 \cdot (2 + 3t) + 6 \cdot (-2 + 6t) = 49 \Longleftrightarrow t = 1; \quad D(5 \mid 5 \mid 4)$	
IV	$\overrightarrow{a} + 2 \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad P(8 \mid 3 \mid 4)$	

I

k ist eine Gerade, die in der Parameterform angegeben ist.

Vergleich von k mit g

Vergleichst du k mit g aus Aufgabe 1.3, fällt auf, dass der Punkt $B(3 \mid 2 \mid -2)$ auf beiden Geraden liegt. Es handelt sich also um den Schnittpunkt der beiden Geraden.
Berechne nun das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren der Geraden, um zu überprüfen, ob sie senkrecht zueinander stehen.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -13 \end{pmatrix} = 2 \cdot 12 + 3 \cdot 18 - 6 \cdot 13 = 0$$

Da das Ergebnis des Skalarproduktes Null ist, schneiden sich k und g im Punkt B senkrecht.

Vergleich von k mit E

Da g, wie in Aufgabe 1.3 gezeigt wurde, senkrecht zu der Ebene E steht, muss die Gerade k parallel zu dieser Ebene verlaufen. Da k und E den gemeinsamen Punkt B haben, verläuft k sogar auf der Ebene E.

Vergleich von k mit F

Ein Vergleich mit der Ebene F zeigt, dass der Normalenvektor von F gleich dem Richtungsvektor von k ist. Das zeigt, dass k senkrecht zu F verläuft.

II

H ist eine in der Normalenform und Koordinatenform angegebene Ebene.

Vergleich von H mit F

Betrachte die Koordinatengleichung für die Spiegelebene F:

$F: 2x + 3y + 6z = 0$

Schreibe diese nun in die Normalenform um, da es so in der Regel leichter ist, die Lage der Ebene zu deuten.

$$F: \overrightarrow{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

Vergleichst du nun die Normalenvektoren $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_H} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ der beiden Ebenen H und F, siehst du, dass diese identisch sind. Wenn nun die Normalenvektoren identisch und damit parallel sind, heißt das, dass auch die Ebenen F und H parallel verlaufen.

Außerdem liegt der Punkt A auf der Ebene H, wie der Richtungsvektor $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ von H zeigt.

III

Die angegeben Gleichung ist die Ebenengleichung in Koordinatenform der Ebene H, wenn man für x, y und z die Koordinaten der Geraden k einsetzt. Diese Gleichung ist für $t = 1$ erfüllt.

Vergleich von H mit k

Setzt man $t = 1$ nun in die Parameterform von k ein, erhält man den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene H:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies ist der Punkt D.
Da, wie zuvor gezeigt, H und F parallel sind und g senkrecht zu F verläuft, schneidet g die Ebene H ebenfalls senkrecht in D.

IV

Der Vektor, der aus dem Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ (hier mit $\overrightarrow{a}$ bezeichnet) und dem zweifachen von $\overrightarrow{AD}$ zusammengesetz wird, zeigt auf den Punkt P.

Vergleich von P mit A

Der angegebene Punkt P liegt auf der verlängerten Geraden, die die Punkte A und D verbindet und liegt dementsprechend auch auf der Ebenen H. P liegt dabei vom Punkt D genau so weit entfernt, wie A von D entfernt ist. Dies lässt sich daran ablesen, dass man vom Punkt A zweimal die Strecke $\overline{AD}$ durchläuft, bevor man am Punkt P ist.

Vergleich von $\overrightarrow{BP}$ mit $\overrightarrow{BC}$

Schaue dir nun den Vektor $\overrightarrow{BP}$ an:

$$\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 3-2 \\ 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vergleich diesen Vektor nun mit $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{BP}$ ist also ein Teilvektor von $\overrightarrow{BC}$ und P liegt somit auf dem Strahlweg.

Fasse die Erkenntnisse, die du aus den vier Zeilen gewinnen konntest, zusammen:

- k schneidet g im Punkt B senkrecht
- k verläuft auf der Ebene E
- k verläuft senkrecht zur Ebene F
- auf H liegen die Punkte A und D
- F und H verlaufen parallel zueinander
- k schneidet die Ebene H senkrecht im Punkt D
- P liegt auf dem Strahlweg $\overline{BC}$ des reflektierten Strahls

2.1 ▶ **Zeigen, dass die Gerade in der Ebenenschar liegt**

Durch Drehung der Spiegeleben F um die Gerde g entsteht die Ebenenschar E_a:

$$E_a : (4,5+3a) \cdot x + (4,5a-3) \cdot y + 9a \cdot z = 7,5$$

Du sollst zeigen, dass die Gerade g sowohl in der Ebene F liegt, als auch eine gemeinsame Gerade aller Ebenen der Ebenenschar E_a ist. Du sollst außerdem zeigen, dass F keine Ebene der Ebenenschar E_a ist.
Um zu zeigen, dass g in F liegt, musst du den allgemeinen Geradenpunkt von g aus Aufgabe 1.3 in die Koordinatengleichung von F aus Aufgabe 1.2 einsetzen und überprüfen, ob die daraus entstandene Gleichung für alle r gilt.

$$\begin{aligned} g: \quad \overrightarrow{x} \quad &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -13 \end{pmatrix} \\ F: \quad & 2x + 3y + 6z = 0 \end{aligned}$$

Setze nun g in F ein:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} 2\cdot(3+12r)+3\cdot(2+18r)+6\cdot(-2-13r) \\ &= 6+24r+6+54r-12-78r \\ &= 6+6-12+24r+54r-78r \\ &= 0 \quad \text{für alle r} \end{aligned}$$

Dadurch hast du gezeigt, dass die Gerade g in der Ebene F liegt.
Das gleiche machst du nun mit der Ebenenschar E_a und der Gerade g und überprüfst, für welche a und r die entstandene Gleichung erfüllt ist.

$$\begin{aligned} 7{,}5 &\overset{!}{=} (4{,}5+3a)\cdot(3+12r)+(4{,}5a-3)\cdot(2+18r)+9a\cdot(-2-13r) \\ &= 13{,}5+54r+9a+36ar+9a+81ar-6-54r-18a-117ar \\ &= 13{,}5-6+54r-54r+9a+9a-18a+36ar+81ar-117ar \\ &= 7{,}5 \quad \text{für alle a und r} \end{aligned}$$

Da für alle a und r die obige Gleichung erfüllt ist, ist g eine gemeinsame Gerade aller Ebenen der Ebenenschar E_a.
Als nächstes zeigst du, dass F keine Ebene der Ebenenschar E_a ist. Überprüfe dazu, ob du etwas für a einsetzen kannst, um F zu erhalten.

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 9a & = & 12 & \mid :9 \\ & a & = & \frac{4}{3} & \\ \text{II} & 4{,}5+3a & = & 4 & \mid -4{,}5 \\ & 3a & = & -0{,}5 & \mid :3 \\ & a & = & -\frac{1}{6} & \end{array}$$

Du siehst, dass es keine eindeutige Lösung für a gibt. Die Ebene F ist somit keine Ebene der Ebenenschar E_a.

2.2 ▶ **Spiegelebene ermitteln**

Du sollst aus der Ebenenschar E_a die Ebene ermitteln, die den Lichtstrahl, der von A nach B verläuft, in sich selbst reflektieren würde. D. h. der Lichtstrahl muss senkrecht auf die neue Spiegeleben fallen, da für Reflektionen allgemein gilt:

Einfallswinkel Ausfallswinkel	=

Man benötigt für eine Reflektion in sich selber demnach einen Einfallswinkel von 90° zum Lot bzw. zum Normalenvektor der Spiegelebene. Das ist gegeben, wenn der Richtungsvektor des Strahlweges parallel zu einem Vielfachen des Normalenvektors der Spiegeleben verläuft.
Den Richtungsvektor des Strahls hast du bereits in Aufgabe 1.1 ausgerechnet und lautet

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Der Normalenvektor der Ebenenschar lässt sich aus der Koordinatengleichung ablesen:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 4,5+3a \\ 4,5a-3 \\ 9a \end{pmatrix}$$

Nun musst du ein a finden, für das die lineare Abhängigkeit gegeben ist. Dazu verwendest du folgendes Gleichungssystem:

$$m \cdot \begin{pmatrix} 4,5+3a \\ 4,5a-3 \\ 9a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem kannst du nun lösen:

$$\begin{array}{lllll}
\text{I} & 4,5m+3am & = & -1 & \\
\text{II} & 4,5am-3m & = & 5 & \scriptsize{\mid \cdot -2} \\
\text{III} & 9am & = & 6 & \\
\hline
\text{I} & 4,5m+3am & = & -1 & \\
\text{II'} & -9am+6m & = & -10 & \scriptsize{\mid \text{Rechne: II'} + \text{III} = \text{IV}} \\
\text{III} & 9am & = & 6 & \\
\hline
\text{I} & 4,5m+3am & = & -1 & \\
\text{IV} & 6m & = & -4 &
\end{array}$$

Aus Gleichung IV kannst du m berechnen.

$$m = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Nun setzt du m in Gleichung I ein und berechnest so a.

$$\begin{array}{lllll}
\text{I} & 4,5 \cdot (-\frac{2}{3}) + 3 \cdot (-\frac{2}{3})a & = & -1 & \\
 & -3-2a & = & -1 & \scriptsize{\mid +3} \\
 & -2a & = & 2 & \scriptsize{\mid :(-2)} \\
 & a & = & -1 &
\end{array}$$

Die Spiegelebene $E_{a=-1}$, die den Strahl wieder in sich selbst reflektiert, ist somit gegeben durch

$$E_{a=-1}: \quad 1,5x - 7,5y - 9z = 7,5$$