

Gegeben sind der feste Punkt  $P(0 \mid 3 \mid -3)$  und der von einem Parameter  $k \in \mathbb{R}$  abhängige Punkt  $Q_k(3 \mid -k \mid 0)$ .

1.1 Geben Sie eine Gleichung der Geraden  $g_k$  durch  $P$  und  $Q_k$  an. (10BE)

1.2 Zeigen Sie, dass alle Geraden  $g_k$  in einer Ebene liegen, und geben Sie deren Koordinatengleichung an.

2. Die Ebene  $E$ , die orthogonal zu der Strecke  $\overline{PQ_k}$  ist und durch deren Mittelpunkt geht, heißt Mittelebene. (10BE)

Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Mittelebenen, die durch den Ursprung verlaufen.

Wählen Sie nachfolgend **entweder** die Aufgabe M3 **oder** die Aufgabe K3.

M3. (Variante Matrix). (10BE)

Die Mittelebene  $E$  aus Aufgabe 2 hat für  $k = 3$  die Gleichung  $x - 2y + z = 0$ .

Der Punkt  $B(6 \mid 0 \mid 0)$  wird (orthogonal) an  $E$  gespiegelt.

- Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes.

- Zeigen Sie, dass sich dieser auch durch Multiplikation mit der Matrix

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ berechnen lässt.}$$

- Die Matrix  $S$  erfüllt die Bedingung  $S \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Erläutern Sie, welche geometrische Bedeutung diese Eigenschaft für die durch  $S$  beschriebene Abbildung hat.

**oder**

K3. (Variante Kegel) (10BE)

Die Mittelebene  $E$  aus Aufgabe 2 hat für  $k = 3$  die Gleichung  $x - 2y + z = 0$ .

Zwei Kugeln  $K_1$  und  $K_2$  haben denselben Mittelpunkt  $P$ ,  $K_1$  habe den Radius  $r_1 = |\overrightarrow{PQ_3}|$ ,  $K_2$  die Mittelebene  $E$  als Tangentialebene.

- Skizzieren Sie die Lage der Kugeln und bestimmen Sie deren Gleichungen.

- Wie verhalten sich ihre Volumina zueinander? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Beschreiben Sie, wo die Mittelpunkte aller Kugeln liegen, die zugleich  $K_1$  und  $K_2$  berühren.

- Bestimmen Sie den Radius des Kreises, der Schnittmenge von  $E$  und  $K_1$  ist.