B2 - Analysis

1 Gegeben ist die Funktionenschar $f_{a;k}$ mit $f_{a;k}(x)=a\cdot x^2\cdot \mathrm{e}^{-k\cdot x}, a>0, k>0.$

1.1 Zeige, dass sich der Term der ersten Ableitung der Funktionenschar $f_{a;k}$ in der Form $f'_{a;k}(x)=a\cdot x\cdot(2-k\cdot x)\cdot \mathrm{e}^{-k\cdot x}$ darstellen lässt, und gib die verwendeten Ableitungsregeln an.

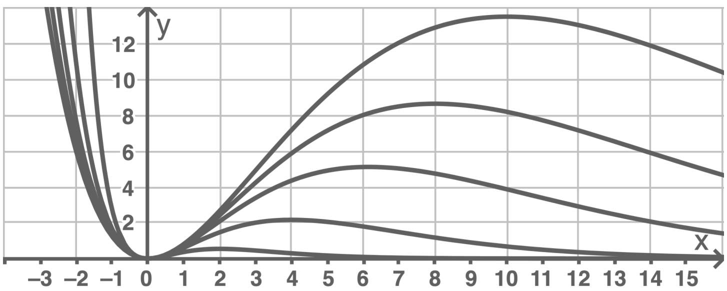
(5 BE)

1.2 Bestätige, dass jeder Graph der Schar $f_{a;k}$ einen Tiefpunkt in $T(0\mid 0)$ und einen Hochpunkt in $H\left(\dfrac{2}{k}\,\middle|\,\dfrac{4a}{k^2\cdot \mathrm{e}^2}\right)$ hat, wobei die zweite Ableitung
$f''_{a;k}(x)=a\cdot\left(k^2\cdot x^2-4\cdot k\cdot x+2\right)\cdot \mathrm{e}^{-k\cdot x}$
ohne Nachweis verwendet werden darf. Begründe, dass für einen festen Wert von k alle Hochpunkte auf einer Parallelen zur $y-$Achse liegen.

(7 BE)

1.3 Für einen festen Wert von a liegen alle Hochpunkte auf einer Parabel mit der Gleichung $p_a(x)=\dfrac{a}{\mathrm{e}^2}\cdot x^2$. Leite diese Gleichung her und skizziere die Parabel für $a=1$ in der Abbildung in Material 1.

(5 BE)



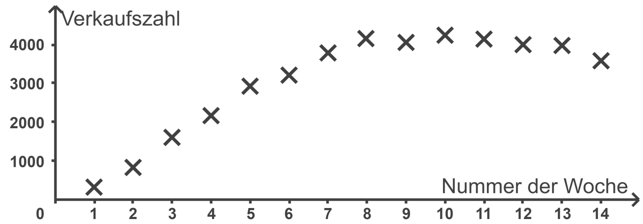
Material 1: Funktionenschar

1.4 Berechne die Werte der Parameter a und k für diejenige Funktion der Schar $f_{a;k}$, deren Graph bei $x=10$ seinen Hochpunkt hat, und die an der Stelle $x=2$ den Funktionswert 828 annimmt.

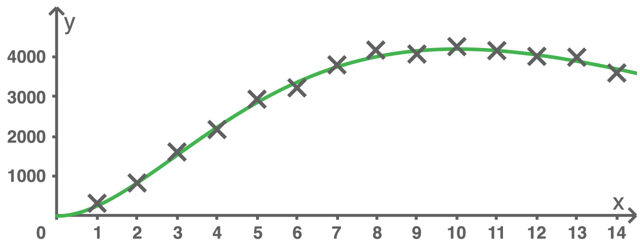
(3 BE)

2 Ein Sportartikelhersteller bringt ein neues Modell eines Laufschuhs auf den Markt. Die Wochen nach Verkaufsstart werden durchnummeriert und es wird für jede Woche die Anzahl der verkauften Paare des neuen Modells ermittelt. Seit Verkaufsstart sind 14 Wochen vergangen. Die Kreuze in Material 2 zeigen die Verkaufszahlen für den genannten Zeitraum.
Eine gute Modellierung des Verlaufs der Verkaufszahlen liefert die Scharfunktion $f_{309;0,2}$ mit $f_{309;0,2}(x)=309\cdot x^2\cdot \mathrm{e}^{-0,2\cdot x}$, deren Graph in Material 3 eingezeichnet ist.
Nach den ersten 14 Wochen liegen insgesamt noch etwa 36000 Schuhpaare des neuen Modells auf Lager und der Hersteller möchte wissen, ob diese reichen werden, oder ob weitere Schuhe produziert

werden müssen. Um diese Frage zu beantworten, soll eine auf der Integralrechnung basierende Methode entwickelt werden, die es ermöglicht, die Verkaufszahlen näherungsweise zu berechnen und Prognosen für die Zukunft zu erstellen.



Material 2: Verkaufszahlen in den ersten 14 Wochen



Material 3: Modellierung der Verkaufszahlen mit der Funktion $f_{309;0,2}$

2.1 In der 1. Woche wurden 288, in der 2. Woche 828, in der 3. Woche 1612 und in der 4. Woche 2164 Schuhpaare des neuen Modells verkauft, also 4892 Schuhpaare insgesamt.
Hierfür liefert die Summe $f_{309;0,2}(1) + f_{309;0,2}(2) + f_{309;0,2}(3) + f_{309;0,2}(4)$ einen guten Näherungswert. Bestimme diese Summe und zeige, dass die prozentuale Abweichung dieses Näherungswertes von der tatsächlichen Verkaufszahl weniger als $1,5\,\%$ beträgt.

(3 BE)

2.2 Die Summe der vier Funktionswerte aus Aufgabe 2.1 lässt sich als Gesamtflächeninhalt von vier Rechtecken darstellen. Diese vier Rechtecke sind in der Abbildung A und B in Material 4 jeweils zusammen mit dem Graphen der Funktion $f_{309;0,2}$ dargestellt.
Der Flächeninhalt der vier Rechtecke – und somit auch die Anzahl der in den ersten vier Wochen verkauften Schuhpaare – lässt sich durch den Inhalt einer Fläche unter dem Graphen von $f_{309;0,2}$ sehr gut approximieren.

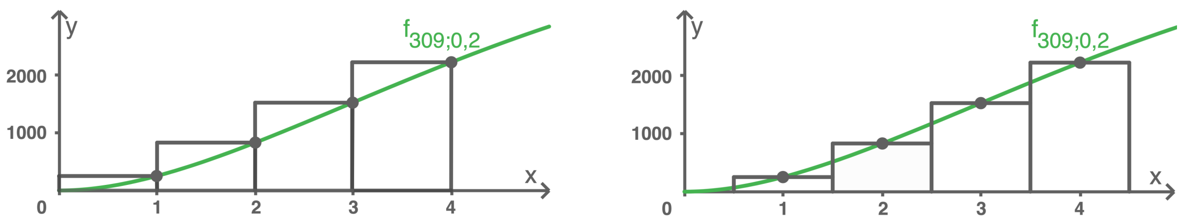


Abbildung A Abbildung B

Material 4: Darstellung der Funktionswerte von $f_{309;0,2}$ als Rechteckflächen

2.2.1

Bestimme die Werte der beiden Integrale $\int_{0,5}^{4,5} f_{309;0,2}(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_{0}^{4} f_{309;0,2}(x)\,\mathrm{d}x$.

(2 BE)

2.2.2 Begründe anschaulich mithilfe von Material 4, warum das Integral $\int_{0,5}^{4,5} f_{309;0,2}(x)\,\mathrm{d}x$ eine sehr gute, das Integral $\int_{0}^{4} f_{309;0,2}(x)\,\mathrm{d}x$ hingegen eine weniger gute Approximation für die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke darstellt.

(3 BE)

2.3 Berechne mithilfe des Formansatzes $F_{309;0,2}(x)= \left(c_2 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_0\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,2\cdot x}$ eine Stammfunktion von $f_{309;0,2}$.

$\left[\text{mögliches Ergebnis: } F_{309;0,2}(x) = \left(-1545x^2 - 15450x - 77250\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,2\cdot x}\right]$

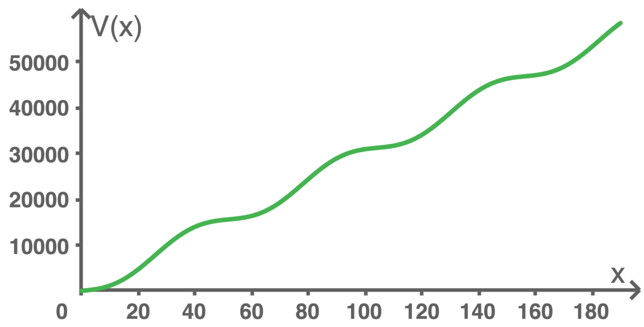
(7 BE)

2.4 Bestätige, dass gilt $\lim\limits_{u\to\infty} \int_{14,5}^{u} f_{309;0,2}(x)\,\mathrm{d}x \approx 34451$, und deute das Ergebnis im Sachzusammenhang unter Berücksichtigung der vom Sportartikelhersteller aufgeworfenen Frage.

(5 BE)

3 Ein Sommerschuh wird seit vielen Jahren erfolgreich verkauft, wobei die Verkaufszahlen saisonalen Schwankungen unterliegen. Die Wochen nach dem Verkaufsstart des Schuhs werden analog zu Aufgabe 2 durchnummeriert. Am Ende jeder Woche wird die Gesamtzahl der bis dahin verkauften Schuhpaare ermittelt.

Die Gesamtverkaufszahlen für den Sommerschuh werden in sehr guter Näherung durch die Funktion V mit $V(x) = 300x - 2000 \cdot \sin(0,1205 \cdot x)$ modelliert, deren Graph in Material 5 dargestellt ist.



Material 5: Gesamtverkaufszahlen des Sommerschuhs seit Verkaufsstart

3.1 Berechne die Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion V'.

Begründe, dass $59 \leq V'(x) \leq 541$ gilt, und erläutere die Bedeutung der Grenzen 59 und 541 des Wertebereiches von V' im Sachzusammenhang.

(6 BE)

3.2 Bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot V(x)\right)$ und deute das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(4 BE)