C1.1 - Lineare Algebra/Analytische Geometrie

1.1 Sowohl die x_1-Koordinaten als auch die x_2-Koordinaten von B und C unterscheiden sich nur in ihren Vorzeichen, die x_3-Koordinaten stimmen überein. Somit sind die beiden Punkte symmetrisch zur x_3-Achse.

1.2 **Länge der Strecke $\overline{AB}$:**

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-11\\11\\28\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11\\11\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-22\\0\\28\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} |\overrightarrow{AB}| &=& \sqrt{(-22)^2+0^2+28^2} \\ &\approx& 35,6\,[\mathrm{m}] \end{array}$$

Länge der Strecke $\overline{BC}$:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}11\\-11\\28\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-11\\11\\28\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}22\\-22\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} |\overrightarrow{BC}| &=& \sqrt{22^2+(-22)^2+0^2} \\ &\approx& 31,1\,[\mathrm{m}] \end{array}$$

Länge der Strecke $\overline{CD}$:

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}-11\\-11\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11\\-11\\28\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-22\\0\\-28\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} |\overrightarrow{CD}| &=& \sqrt{(-22)^2+0^2+(-28)^2} \\ &\approx& 35,6\,[\mathrm{m}] \end{array}$$

Die Gesamtlänge des Streckenzugs beträgt somit $35,6\,\mathrm{m} + 31,1\,\mathrm{m} + 35,6\,\mathrm{m} = 102,3\,\mathrm{m}$.

2.1 **Ebenengleichung in Parameterform**

$$\begin{array}{rcl} E: \overrightarrow{x} &=& \overrightarrow{OA} + t\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC} \\ E: \overrightarrow{x} &=& \begin{pmatrix}11\\11\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-22\\0\\28\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-22\\28\end{pmatrix} \end{array}$$

Ebenengleichung in Koordinatenform

Mit dem Kreuzprodukt lässt sich ein Normalenvektor von E berechnen. Das Kreuzprodukt ergibt sich mit:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 616 \\ 616 \\ 484 \end{pmatrix} = 44 \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Als Normalenvektor kann also der gekürzte Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$ verwendet werden.

Einsetzen in die allgemeine Ebenengleichung in Koordinatenform und Durchführen einer Punktprobe beispielsweise mit A ergibt:

$$\begin{array}{rrcll} E: & 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 & = & c & \quad \scriptsize A(11 \mid 11 \mid 0) \text{ einsetzen} \\ & 14 \cdot 11 + 14 \cdot 11 + 11 \cdot 0 & = & c & \\ & 308 & = & c & \end{array}$$

Eine Gleichung von E in Koordinatenform lautet also:

$$E: \quad 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$$

2.2 Der Winkel zwischen den beiden Ebenen ist der Betrag des Winkels zwischen zwei Normalenvektoren der Ebenen.

Ein Normalenvektor der Ebene E ist $\begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$ und ein Normalenvektor der x_1x_2- Ebene ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Winkel beträgt:

$$\begin{array}{rcll} \cos\varphi & = & \dfrac{\left| \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} & \\ \cos\varphi & \approx & \dfrac{11}{22,65} & \quad \scriptsize \mid \arccos \\ \varphi & = & \arccos\left(\dfrac{11}{22,65}\right) & \\ \varphi & \approx & 60,94^\circ & \end{array}$$

Die Ebene E schneidet die x_1x_2- Ebene folglich im Winkel $\varphi \approx 60,94^\circ$.

Da die Ebene E bezüglich der x_3- Achse symmetrisch zur Ebene F ist, schneidet auch die Ebene F die x_1x_2- Ebene mit dem Winkel φ.

Die Größe des Winkels α zwischen der Ebene E und der Ebene F lässt sich somit durch folgenden Term berechnen:

$$\alpha = 180^\circ - 2 \cdot \varphi$$

2.3 **Verhältnis der Volumina**

Wird die Seitenfläche des Quaders, die A und C enthält, als Grundfläche, deren Flächeninhalt mit G und die Länge der zugehörigen Höhe des Quaders mit h bezeichnet, so hat der pyramidenförmige Teilkörper eine Grundfläche von $\dfrac{G}{2}$ und eine Höhe von h.

Somit hat er folgendes Volumen:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{G}{2} \cdot h = \frac{1}{6} \cdot G \cdot h.$$

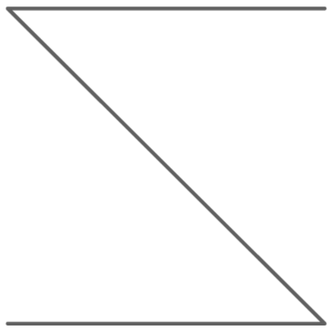
Folglich hat der andere Teilkörper ein Volumen von $\dfrac{5}{6} \cdot G \cdot h$.

Damit beträgt das gesuchte Verhältnis $1:5$.

3.1 Die erste Abbildung zeigt eine seitliche Ansicht, also beispielsweise $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die zweite Abbildung zeigt eine seitliche Ansicht aus der Richtung einer Ecke, also beispielsweise $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Betrachtung von oben



3.2 I Q ist ein Punkt auf der Strecke $\overline{AB}$.

II $\overline{PQ}$ ist senkrecht zu $\overline{AB}$, also ist $\left|\overline{PQ}\right|$ der Abstand von P zu $\overline{AB}$.

III Dieser Abstand stimmt mit $28-h$, dem Abstand von P zu $\overline{BC}$, überein.

4.1 **Erläuterung**

Für den Start bei $t=0$ gilt:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die x_3-Koordinate des Startpunkt null ist, startet die Drohne vom Erdboden aus.

Wegen der positiven x_3-Koordinate des Richtungsvektors befindet sich die Drohne im Steigflug.

Steigungswinkel α bestimmen

Es muss der Winkel zwischen der Geraden g und der x_1x_2-Ebene bestimmt werden.

Ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} \\ \sin(\alpha) &= \frac{4}{\sqrt{26}} \qquad\qquad \mid \arcsin \\ \alpha &\approx 51,67^\circ \end{aligned}$$

Der Steigungswinkel der Flugbahn beträgt somit etwa $51,67^\circ$.

4.2 Die Seitenkante $\overline{AB}$ kann durch eine Geradengleichung beschrieben werden:

$$\begin{aligned} g_{AB}: \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Um zu untersuchen, ob die Drohne mit der Seitenkante $\overline{AB}$ kollidiert, muss die Gerade g der Flugbahn mit der Geraden g_{AB} geschnitten werden.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8-3t \\ -10+t \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-22s \\ 11 \\ 28s \end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Zeile folgt: $t = 21$.

Durch Einsetzen von t in die dritte Zeile folgt $4 \cdot 21 = 28 \cdot r$ und somit $r = 3$.

Die beiden Geraden schneiden sich, jedoch ist $r = 3$ und somit liegt der Schnittpunkt der beiden Geraden nicht auf $\overline{AB}$.

Die Drohne kollidiert also nicht mit der Seitenkante $\overline{AB}$.

4.3 **Zurückgelegte Strecke S in einer Sekunde**

$$S = \left| 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{26} \approx 5,1\ [\mathrm{m}]$$

Die Drohne legt folglich in einer Sekunde ungefähr $5,1\,\mathrm{m}$ zurück.

Geschwindigkeit berechnen

$$5,1 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0,0051 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Eine Stunde entspricht 3600 Sekunden:

$$0,0051 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \cdot 3600 = 18,36 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Die Geschwindigkeit der Drohne beträgt somit $18,36 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

4.4.1 Da die Drohne vom Erdboden aus startet, liegt der Startpunkt der Drohne ebenfalls auf der Schattengerade g'.

$$g' = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der Parameter a muss so bestimmt werden, dass die x_3-Koordinate abhängig von t immer null wird:

$$\begin{aligned} 0+4t-2a &= 0 \quad &|+2a \\ 4t &= 2a \quad &|:2 \\ 2t &= a \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Schattengerade g' :

$$\begin{aligned} g': \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -3+2 \\ 1+0 \\ 4-4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.4.2 Da die Strecke $\overline{BC}$ parallel zur x_1x_2-Ebene ist, wird diese lediglich in x_1 und x_3 Richtung verschoben, die Länge der Strecke bleibt jedoch gleich.

4.4.3 Da sich die Punkte A und D auf dem Erdboden befinden, entsprechen sie ihren Schattenpunkte.

Durch Vergleichen der Schattenpunkte mit der Abbildung aus Material 3 ergibt sich der Schattenpunkt I für A und der Schattenpunkt G für D.

Da die Schattenstrecke $\overline{IJ}$ somit zur Strecke $\overline{AB}$ gehört, folgt für Punkt B der Schattenpunkt J und analog der Schattenpunkt H für C.