a) (1) ▶ **Untersuchen der Lösungsmengen des Gleichungssystem in Abhängigkeit von k** (9BE)

Beim Bestimmen der Lösungsmengen des Gleichungssystems in Abhängigkeit von k ist es vorteilhaft, wenn du dieses Gleichungssystem zum Beispiel auf untere Dreiecksgestalt umformst. Eliminiere dazu in der zweiten Zeile die x_1 - Koordinate und in der dritten Zeile die x_2 - und x_3 - Koordinate.
Beim Umformen des Gleichungssystems auf untere Dreiecksgestalt könntest du so vorgegangen sein:

$$\begin{array}{lrcrcrcr|l}
\text{I} & 5\cdot x_1 & + & 10\cdot x_2 & + & 5\cdot x_3 & = & -5 & :5 \\
\text{II} & -3\cdot x_1 & - & 5\cdot x_2 & - & 2\cdot x_3 & = & 2 & \\
\text{III} & 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & k\cdot x_3 & = & 1 & \\
\hline
\text{I} & x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & x_3 & = & -1 & \\
\text{II} & -3\cdot x_1 & - & 5\cdot x_2 & - & 2\cdot x_3 & = & 2 & +3\cdot\text{I} \\
\text{III} & 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & k\cdot x_3 & = & 1 & \\
\hline
\text{I} & x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & x_3 & = & -1 & -2\cdot\text{II} \\
\text{II} & & & x_2 & + & x_3 & = & -1 & \\
\text{III} & 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & k\cdot x_3 & = & 1 & \\
\hline
\text{I} & x_1 & & & - & x_3 & = & 1 & \\
\text{II} & & & x_2 & + & x_3 & = & -1 & \\
\text{III} & 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & k\cdot x_3 & = & 1 & -2\cdot\text{I} \\
\hline
\text{I} & x_1 & & & - & x_3 & = & 1 & \\
\text{II} & & & x_2 & + & x_3 & = & -1 & \\
\text{III} & & & x_2 & + & (k+2)\cdot x_3 & = & -1 & -1\cdot\text{II} \\
\hline
\text{I} & x_1 & & & - & x_3 & = & 1 & \\
\text{II} & & & x_2 & + & x_3 & = & -1 & \\
\text{III} & & & & & (k+1)\cdot x_3 & = & 0 &
\end{array}$$

Die verschiedenen Lösungsmengen des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von k bestimmst du nun, indem du folgende Fälle unterscheidest:

Fall 1: $k \neq -1$
Betrachtest du die dritte Zeile des Gleichungssystems für $k \neq -1$, so ergibt sich dieser Wert für x_3:

$$\begin{array}{lrl}
\text{III} & (k+1)\cdot x_3 = 0 & \quad | : (k+1) \text{ da } ((k+1) \neq 0) \\
& x_3 = 0 &
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ Die Lösungsmenge des Gleichungssystem ist für diesen Fall eindeutig bestimmt:

$$\begin{array}{ll}
\text{II} & x_2 + 0 = -1 \\
& x_2 = -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & x_1 - 0 = 1 \\
& x_1 = 1
\end{array}$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems für $k \neq -1$ ist:
$\mathbb{L} = \{1; -1; 0\}$

Fall 2: $k = -1$
Betrachtest du die dritte Zeile des Gleichungssystems für $k = -1$, so wird diese zur Nullzeile:

$$\begin{aligned} \text{III} \; (-1+1) \cdot x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist demnach für den Fall $k = 1$ nicht eindeutig bestimmt, sondern entspricht einer Geraden im dreidimensionalen Raum.
Diese Gerade bestimmst du wie folgt:

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{I} & x_1 & & - x_3 & = & 1 \\ \text{II} & & x_2 & + x_3 & = & -1 \end{array}$$

mit $x_3 := t$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{I} \;\; x_1 - t &= 1 && \mid +t \\ x_1 &= 1+t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \;\; x_2 + t &= -1 && \mid -t \\ x_2 &= -1-t \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Der zum Gleichungssystem zugehörige Lösungsvektor lautet: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -1-t \\ t \end{pmatrix}$.

Die zum Gleichungssystem zugehörige Lösungsmenge ist für $k = 1$:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

(2) ▸ **Zeigen, dass die Lösungsmenge wie angegeben beschrieben werden kann**

Die von dir oben bestimmte Lösungsmenge für $k = 1$ entspricht dieser Geraden:

$$h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vergleichst du diese Gerade mit der in der Aufgabenstellung gegeben Gleichung, welche ebenfalls einer Geraden im dreidimensionalen Raum entspricht, so kannst du erkennen, dass diese Geraden sich jeweils in ihrem Aufpunkt unterscheiden. Um nun zu zeigen, dass diese Geraden dennoch identisch sind, beweist du mit Hilfe einer Punktprobe, dass der Aufpunkt der Geraden aus der Aufgabenstellung, auf der von dir bestimmten Geraden h liegt:

$$\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Resultierendes überbesetztes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 2 = 1 + 1\cdot t_{\text{I}} & \Leftrightarrow & t_{\text{I}} = 1\\
\text{II} & -2 = -1 - 1\cdot t_{\text{II}} & \Leftrightarrow & t_{\text{II}} = 1\\
\text{III} & 1 = 1\cdot t_{\text{III}} & \Leftrightarrow & t_{\text{III}} = 1
\end{array}$$

Da der Wert für t ($t_{\text{I}} = t_{\text{II}} = t_{\text{III}}$) einheitlich ist, wurde gezeigt, dass sich die Lösungsmenge des Gleichungssystems für die Parameterbelegung $k=-1$ wie in der Aufgabenstellung beschrieben, darstellen lässt.

b) ▸ **Zeichnen der Geraden g** (8BE)

1. Schritt: Bestimmen der Durchstoßpunkte

Die Durchstoßpunkte der Geraden g durch die Koordinatenebenen bestimmst du, indem du die Gerade mit den verschiedenen Koordinatenebenen schneidest:

(1) Schnittpunkt von g mit der x_1x_2 - Ebene:

Koordinatenform der x_1x_2 - Ebene:
$x_3 = 0$
Gerade g als Vektor zusammengefasst:

$$g:\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+u\\-2-u\\1+u\end{pmatrix}$$

Einsetzen von g in Vektorform in Koordinatengleichung der x_1x_2 - Ebene:
$1+u=0 \Leftrightarrow u=-1$
Koordinaten des Schnittpunkts P_1 von g mit der x_1x_2 - Ebene:

$$\overrightarrow{x_{P_1}}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Gerade g durchstößt die x_1x_2 - Ebene im Punkt P_1 mit den Koordinaten: $P_1(1\,|-1\,|\,0)$.

(2) Schnittpunkt von g mit der x_2x_3 - Ebene:

Koordinatenform der x_2x_3 - Ebene:
$x_1 = 0$

Einsetzen von g in Vektorform in Koordinatengleichung der x_2x_3 - Ebene:

$2+u=0 \iff u=-2$

Koordinaten des Schnittpunkts P_2 von g mit der x_2x_3 - Ebene:

$$\overrightarrow{x_{P_1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Gerade g durchstößt die x_2x_3 - Ebene im Punkt P_2 mit den Koordinaten: $P_2(0\,|\,0\,|-1)$.

Da eine Gerade maximal zwei Durchstoßpunkte mit den Koordinatenebenen besitzen kann, muss nicht untersucht werden, ob g die x_1x_3 - Ebene schneidet.

2. Schritt: Bestimmen der Spurgeraden der Ebene *E*

(1) Spurgeraden von *E* auf der x_1x_2 - Ebene:

Willst du die zur x_1x_2 - Ebene zugehörige Spurgerade s_1 bestimmen, so setzt du den x_3 - Vektoreintrag eines Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt in der Ebene E gleich null.
Es ergibt sich diese Gleichung:

$0=0\cdot s+t\cdot 1 \iff t=0$

Eingesetzt in die Ebenengleichung von E ergibt sich folgende Spurgerade s_1:

$$s_1 = s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Spurgeraden von *E* auf der x_1x_3 - Ebene:

Gehe vor wie in (1). Hier gilt: $x_2=0$.

Resultierende Gleichung:
$0=s\cdot 1+t\cdot 0 \iff s=0$

Eingesetzt in die Ebenengleichung von E ergibt sich folgende Spurgerade s_2:

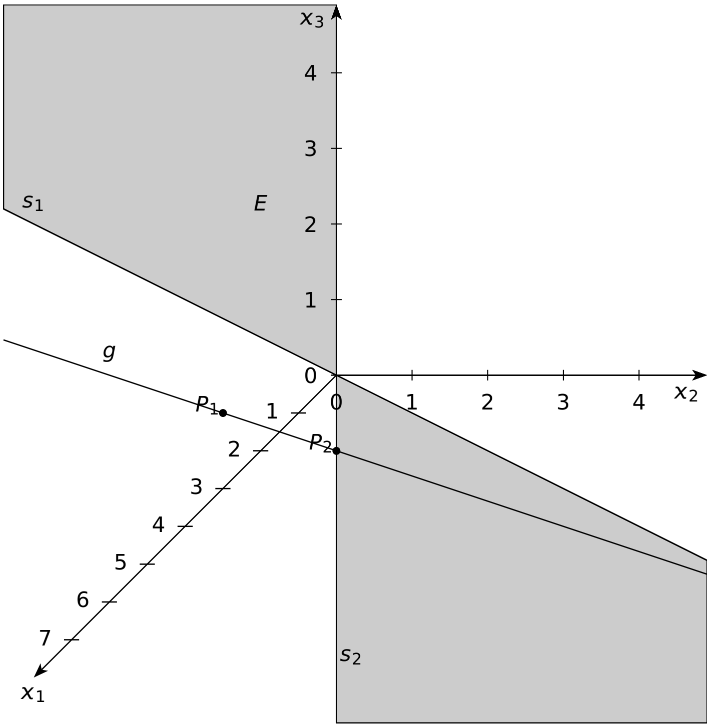
$$s_2 = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Spurgeraden von *E* auf der x_2x_3 - Ebene:

Hier gilt: $x_1=0$.
$\Rightarrow 0=s\cdot 1+t\cdot 0 \iff s=0$

Eingesetzt in die Ebenengleichung von E ergibt sich Spurgerade s_2.

3. Schritt: Zeichnen von *g* und *E* in ein räumliches Koordinatensystem



c.1) (1) ▸ **Nachweisen, dass *S* orthogonale Spieglung an *E* ist** (9 BE)

Gehe schrittweise vor:

1. Schritt: Spiegeln eines beliebigen Punktes *P*

Um allgemein zu zeigen, dass S eine orthogonale Spieglung an der Ebene E ist, wählst du hier einen beliebigen Punkt P:
$P(a\,|\,b\,|\,c)$.

Bestimme nun P' durch Spieglung von $\overrightarrow{OP}$ unter Anwendung der Abbildungsmatrix S:

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot a + b \cdot 1 + 0 \cdot c \\ 1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c \\ 0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Zeigen, dass $\overrightarrow{PP'}$ orthogonal zur Ebene *E* ist

Um zu zeigen, dass S eine orthogonale Spieglung bezüglich der Ebene E ist, zeigst du zuerst, dass $\overrightarrow{PP'}$ orthogonal zu den Richtungsvektoren der Ebene E ist. Bilde dazu den Vektor $\overrightarrow{PP'}$ und zeige, dass das Skalarprodukt dieses Vektors, mit den Richtungsvektoren von E, gleich null ist:

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} b-a \\ a-b \\ c-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ a-b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Skalarprodukte mit den Richtungsvektoren der Ebene E:

$$(1)\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}b-a\\a-b\\0\end{pmatrix}=1\cdot(b-a)+1\cdot(a-b)+0\cdot 0=0$$

$$(2)\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}b-a\\a-b\\0\end{pmatrix}=0\cdot(b-a)+0\cdot(a-b)+1\cdot 0=0$$

alternativ

Alternativ kannst du auch zeigen, dass $\overrightarrow{PP'}$ parallel zum Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene E ist. Bestimme dazu die Koordinatenform der Ebene E:

Berechnen des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ über das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren von E:

$$\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1-0\cdot 0\\0\cdot 0-1\cdot 1\\1\cdot 0-1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Eingesetzt in die allgemeine Koordinatenform, ergibt sich:
$1\cdot x_1-1\cdot x_2+0\cdot x_3=d$.

Bestimme d durch Einsetzten des Aufpunkts von E in die Koordinatenform:
$0-0=d \iff d=0$.

Die Koordinatenform der Ebene E lautet demnach:
$E: x_1-x_2=0$.

Zeigen, dass $\overrightarrow{PP'}$ parallel zum Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene E ist:

$$\overrightarrow{PP'}\begin{pmatrix}(b-a)\\(a-b)\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(b-a)\\-1\cdot(b-a)\\0\end{pmatrix}=(b-a)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\widehat{=}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\overrightarrow{n}.$$

3. Schritt: Zeigen, dass der Mittelpunkt von $\overrightarrow{PP'}$ auf E liegt

Dass S auch eine Spieglung bezüglich E ist, zeigst du, indem du allgemein beweist, dass der Mittelpunkt M von $\overline{PP'}$ auf Ebene E liegt.

Mittelpunkt M von $\overline{PP'}$:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP}')=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a+b\\b+a\\c+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot(a+b)\\\frac{1}{2}\cdot(a+b)\\c\end{pmatrix}$$

Setze die Koordinaten von M in die Koordinatenform der Ebene E ein, um zu zeigen, dass dieser in Ebene E liegt:

$$\begin{aligned}x_1-x_2&=0\\\tfrac{1}{2}\cdot(a+b)-\tfrac{1}{2}\cdot(a+b)&=0\\0&=0\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Da M eingesetzt in die Koordinatenform von E zu einer wahren Aussage führt, wurde gezeigt, dass S eine orthogonale Spieglung zur Ebene E ist.

(2) ▸ **Spiegeln der Geraden g und Ergänzen der Zeichnung**

1. Schritt: Gleichung der gespiegelten Geraden g'

Die Gleichung der gespiegelten Geraden g' bestimmst du, indem du g als Vektor zusammenfasst und anschließend auf diesen Vektor die Abbildungsmatrix S anwendest.

Gerade g als Vektor in Abhängigkeit von u:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+u \\ -2-u \\ 1+u \end{pmatrix}.$$

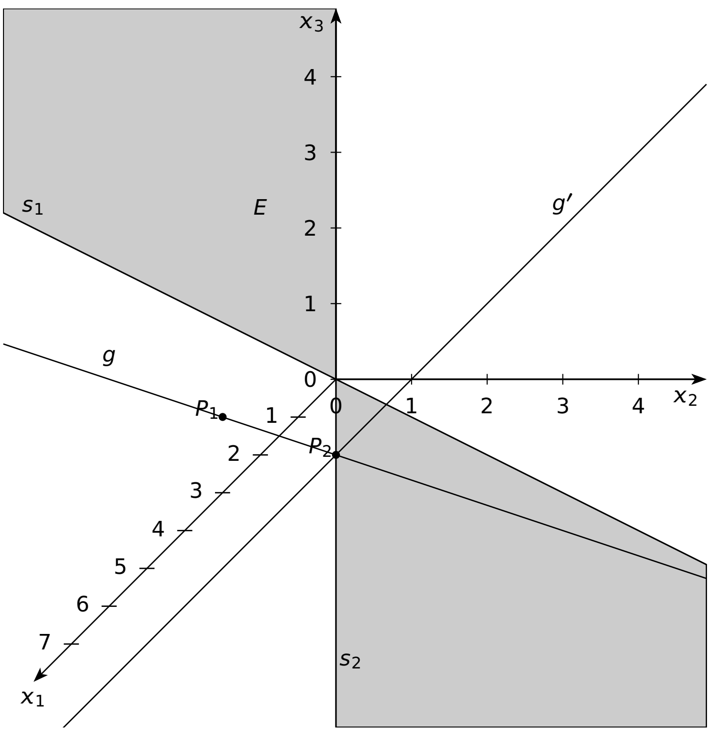
Anwenden der Abbildungsmatrix S auf Gerade g:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2+u \\ -2-u \\ 1+u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot(2+u)+1\cdot(-2-u)+0\cdot(1+u) \\ 1\cdot(2+u)+0\cdot(-2-u)+0\cdot(1+u) \\ 0\cdot(2+u)+0\cdot(-2-u)+1\cdot(1+u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-u \\ 2+u \\ 1+u \end{pmatrix}$$

Gleichung der Geraden g':

$$g': \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -2-u \\ 2+u \\ 1+u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Zeichnen der Geraden g'



c.2)(1) ▶ **Begründen, warum die erste Spalte der Abbildungsmatrix *P* nur Nullen enthält** (4 BE)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass P den Raum in Richtung der x_1 - Richtung in Ebene E projizieren soll. Das heißt, dass die x_1 - Koordinaten der jeweiligen, mit P projizierten Punkte, keinen Einfluss auf deren spätere Position im Raum haben.

$\Longrightarrow$ Enthält die erste Spalte einer Abbildungsmatrix nur Nullen, so wird die x_1 - Koordinate beim späteren Matrizenprodukt in keinem Fall berücksichtigt.

(2) ▶ **Bestimmen der zweiten und dritten Spalte der Abbildungsmatrix *P***

Beim Bestimmen der zweiten und dritten Spalte der Abbildungsmatrix P kann dir die Koordinatenform der Ebene E behilflich sein:

$E: x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = x_2$

Aus der Betrachtung der Koordinatenform der Ebene E kannst du schließen, dass Punkte nur dann auf der Ebene liegen, wenn deren x_1 - und x_2 - Koordinaten übereinstimmen.
Die erste Zeile der Abbildungsmatrix P bestimmt die x_1 - Koordinate des jeweiligen projizierten Punktes. Soll der Punkt nun in E liegen, so muss die x_1 - Koordinate, nach der Projektion, der x_2 - Koordinate des jeweiligen Punktes entsprechen:

$$P: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

Die x_2 - Koordinate hingegen, darf sich nicht verändern:

$$P: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

Der Koordinatenform der Ebene E kannst du des Weiteren entnehmen, dass die x_3 - Koordinate der jeweiligen Punkte, keinen Einfluss darauf haben, ob der betrachtete Punkt in E liegt. Das heißt, die x_3 - Koordinate wird ebenfalls nicht durch P verändert.

Resultierende Abbildungsmatrix P:

$$P: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d.1)(1) ▶ **Allgemeiner Weg, um zu untersuchen, ob Kugel und Ebene gemeinsame Punkte haben** (9BE)

Mögliche Vorgehensweise:

1. Schritt
Bestimmen des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ der betrachteten Ebene.

2. Schritt

Aufstellen einer Geraden:

- Aufpunkt: Mittelpunkt M der Kugel.
- Richtungsvektor: Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene.

3. Schritt

Schneiden von Gerade aus zweitem Schritt und betrachteter Ebene.

4. Schritt

Bestimmen des Abstands zwischen Schnittpunkt von Gerade und Ebene und Mittelpunkt von Kugel.
$\Longrightarrow$ Ist der berechnete Abstand kleiner dem Radius der Kugel, so besitzen Kugel und Ebene gemeinsame Punkte.

(2) ▸ **Untersuchen, ob die angegebene Kugel und *E* gemeinsame Punkte besitzen**

Gehe hier vor, wie in (1) beschrieben:

1. Schritt

Der Normalenvektor von E wurde in einem vorhergegangenen Aufgabenteil bereits bestimmt, dieser war:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt

Aufstellen der Geraden j mit Aufpunkt $M(2\,|\,-2\,|\,1)$ und Richtungsvektor $\overrightarrow{n}$:

$$j : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Schritt

Bestimme den Schnittpunkt zwischen Ebene E und Gerade j, indem du j als Vektor zusammenfasst und diesen Vektor in die Koordinatenform der Ebene E einsetzt:

$$j : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+s \\ -2-s \\ 1 \end{pmatrix}$$

Einsetzten von $\overrightarrow{x}$ in Koordinatenform von E:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ (2+s) - (-2-s) &= 0 \\ 2+s+2+s &= 0 \\ 2 \cdot s + 4 &= 0 \iff s = -2 \end{aligned}$$

Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts S zwischen E und j durch Einsetzten von s in die Geradengleichung von j:

$$\overrightarrow{x_P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Gerade j und Ebene E schneiden sich bei: $S(0\,|\,0\,|\,1)$.

4. Schritt

Bevor du den Abstand zwischen Mittelpunkt M und der Ebene E bestimmen kannst, bildest du einen Vektor aus M und Schnittpunkt S:

$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimme nun über den Betrag des Vektors $\overrightarrow{MS}$ den Abstand zwischen Mittelpunkt M und Ebene E:

$$\left|\overrightarrow{MS}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2,83$$

<u>*alternativ*</u>

Alternativ kann der Abstand zwischen M und E auch über die Hessesche Normalform bestimmt werden. Die Hessesche Normalform der Ebene E ist:

$$d = \overrightarrow{p} \circ \overrightarrow{n_0} = \overrightarrow{p} \circ \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p} \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzten des Ortsvektors von M für $\overrightarrow{p}$:

$$d_M = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (2 \cdot 1 + (-2 \cdot -1) + 1 \cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4 = 2,83$$

$\Longrightarrow$ Da der Abstand zwischen Ebene E und dem Mittelpunkt M der Kugel größer als deren Radius ($r = 1$) ist, besitzen diese keine gemeinsamen Punkte.

d.2) ▶ **Bestimmen der Koordinaten des Mittelpunktes**

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der gesuchte Mittelpunkt der Kugel auf der Geraden g liegt. Darüber hinaus lässt sich feststellen, dass Kugel und Ebene lediglich einen Berührpunkt besitzen.
Da Kugel und Ebene sich berühren, kann darauf geschlossen werden, dass der Abstand vom Mittelpunkt der Kugel zum Berührpunkt gerade dem Radius der Kugel ($r = 1$) entspricht.
Die Koordinaten des gesuchten Mittelpunktes M der Kugel bestimmst du nun, indem du ermittelst, an welchem Punkt der Abstand zwischen Gerade g und Ebene E gerade dem Radius $r = 1$ der Kugel entspricht. Fasse dazu Gerade g wie oben als Vektor zusammen:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+u \\ -2-u \\ 1+u \end{pmatrix}$$

Setze nun diesen von u abhängigen Vektor für $\overrightarrow{p}$ in die Hessesche Normalform der Ebene E ein und setze den resultierenden Term mit $r = 1$ gleich:

$$r = \begin{pmatrix} 2+u \\ -2-u \\ 1+u \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{(2+u)\cdot 1 + (-2-u)\cdot(-1) + (1+u)\cdot 0}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2+u+2+u}{\sqrt{2}} \\ 1 &= \frac{(4+2\cdot u)}{\sqrt{2}} && \mid \cdot\sqrt{2} \\ \sqrt{2} &= 4 + 2\cdot u && \mid -4 \\ \sqrt{2} - 4 &= 2\cdot u && \mid :2 \\ u &= \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \end{aligned}$$

Die Koordinaten des gesuchten Mittelpunkts M bestimmst du nun, indem du den eben bestimmten Wert für u in die Geradengleichung von g einsetzt:

$$\overrightarrow{x_M} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow M\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \,\middle|\, -\frac{1}{\sqrt{2}} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$$