A2 - Analysis

1 Ende April eines jeden Jahres fangen die ersten Larven an aus den Eiern zu schlüpfen. In dieser Zeit beginnt die Larvenphase, in der sich die Larven von den Nadeln der Lärchen ernähren, bis sie sich zu verpuppen beginnen. Der Lärchenwickler zählt zu den Forstschädlingen. Er ruft besonders schwere Schäden bei der in den Alpen verbreiteten Europäischen Lärche hervor.

1.1 Die Größe einer Larve in mm lässt sich in den ersten Lebenstagen durch eine Exponentialfunktion f der Form $f(t)=a\cdot \mathrm{e}^{k\cdot t}$ (t : Zeit in Tagen nach dem Schlüpfen) mit $a,k>0$ modellieren. Berechne mithilfe der Daten für $t=1$ und $t=10$ der folgenden Tabelle die zugehörige Funktion f.
Die Modellierung kann als gut bezeichnet werden, wenn die Abweichung der Daten von den im Modell ermittelten Werten maximal $3\,\%$ beträgt.
Prüfe anhand der übrigen Daten, ob die Modellierung als gut bezeichnet werden kann.

t (in Tagen)	1	2	4	10
Larvengröße (in mm)	$3,2$	$3,5$	$4,1$	$7,3$

(7 BE)

1.2 Alternativ lässt sich die Größe einer Larve in mm mithilfe der Funktion g mit $g(t)=\dfrac{19,4}{1+5,72\cdot \mathrm{e}^{-0,12\cdot t}}$ (t : Zeit in Tagen nach dem Schlüpfen) modellieren.
Für die Funktion g gilt:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I} & g'(t) & = \dfrac{0,12}{19,4}\cdot g(t)\cdot(19,4-g(t)) \text{ und} \\ \mathrm{II} & g'(t) & > 0 \text{ für alle } t\geq 0 \end{array}$$

1.2.1 Begründe anhand des Funktionsterms, dass die sogenannte Sättigungsgrenze $S=\lim_{t\to\infty} g(t)$ der Funktion g den Wert $19,4$ annimmt, und deute diesen Wert im Sachzusammenhang. Begründe, warum die Funktion g die Größe einer Larve für große Werte von t besser beschreibt als die Funktion f.

(4 BE)

1.2.2 Zeige unter Verwendung der Eigenschaft (I), dass gilt:

$$g''(t)=\frac{0,12}{19,4}\cdot g'(t)\cdot(19,4-2\cdot g(t))$$

(4 BE)

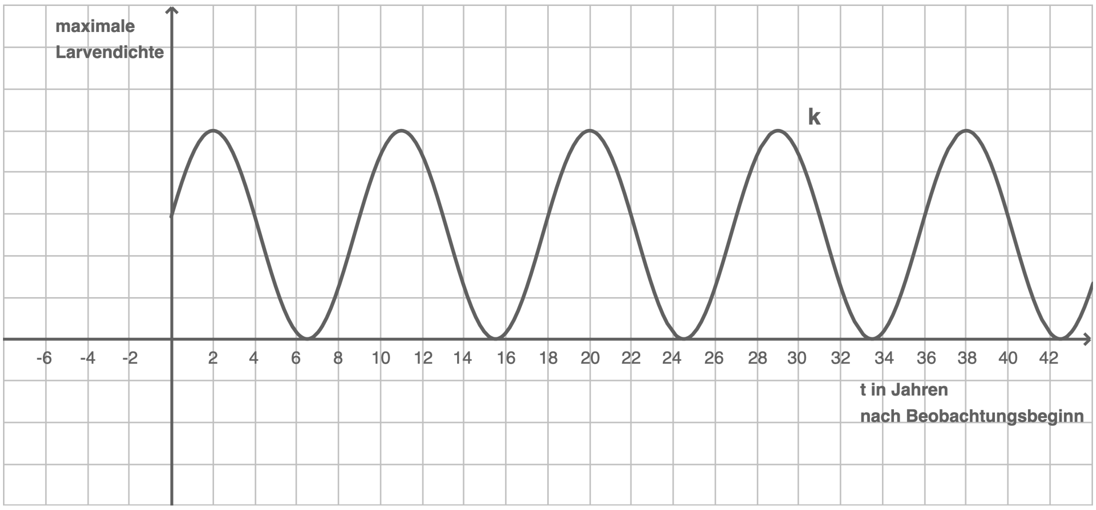
1.2.3 Zeige unter Verwendung des Terms von $g''(t)$ aus Aufgabe 1.2.2 und der Eigenschaft (II), dass zu dem Zeitpunkt innerhalb des betrachteten Intervalls, an dem die Larve am stärksten wächst, die Hälfte der Sättigungsgrenze aus Aufgabe 1.2.1 erreicht wird.
Berechne diesen Zeitpunkt.
Hinweise: Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist ausreichend. Eine Randwertbetrachtung ist nicht erforderlich.

(7 BE)

2 In gewissen Regionen in den Alpen traten die Massenvermehrungen des Lärchenwicklers seit Beobachtungsbeginn im Jahr 1989 $(t=0)$ mit erstaunlicher Regelmäßigkeit alle 9 Jahre auf. Die maximale Larvendichte (Anzahl der Larven pro kg Zweige) eines jeden Kalenderjahres in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren nach Beobachtungsbeginn kann mit der Funktion k mit

$$k(t)=249,975\cdot\sin\left(\frac{2}{9}\pi\cdot(t+0,25)\right)+250,025 \ (t\in\mathbb{R}_0^+)$$

näherungsweise modelliert werden. Jahreszeitlich bedingte Schwankungen werden bei dieser Modellierung nicht berücksichtigt. Der Graph von k ist in Material 1 dargestellt.



Material 1

2.1 Beschreibe, wie der Graph von k aus dem Graphen der allgemeinen Sinusfunktion s mit $s(t)=\sin(t)$ hervorgeht, und bestätige rechnerisch, dass k die Periode 9 hat.

(5 BE)

2.2 Ein Befall wird erst sichtbar, wenn der Wert der maximalen Larvendichte größer als 100 ist.
Erläutere den Rechenansatz in der Zeile (I) des Kastens im Sachzusammenhang und zeige mithilfe des Ergebnisses in Zeile (III), dass der Befall ab dem Jahr 2022 erstmals nach 2018 wieder nicht mehr sichtbar ist.

I	$k(t)=100$
II	$\sin\left(\frac{2}{9}\pi\cdot(t+0,25)\right)=\dfrac{-150,025}{249,975}$
III	$t_1\approx-1,172+9\cdot n \ \vee \ t_2\approx 5,172+9\cdot n;\ n\in\mathbb{N}$

(7 BE)

2.3 Um die zu erwartende durchschnittliche maximale Larvendichte pro Jahr im Zeitraum von 2018 bis einschließlich 2037 zu berechnen, werden zwei Strategien verfolgt:

(I) Bestimmung von d_{I} wie in Material 2 angegeben.

(II) Bestimmung von d_{II} unter Verwendung der Funktion k und dem Ansatz $d_{\text{II}} = \frac{1}{20}\displaystyle\int_{28{,}5}^{48{,}5} k(t)\;\mathrm{d}t.$

Erläutere die beiden Strategien.
Bestimme d_{II} unter Verwendung der Funktion k und dem Ansatz und vergleiche diesen Wert mit d_{I}.

Material 2

t	29	30	31	$\dots$	46	47	48
$k(t)$	500	$441{,}52$	$293{,}43$	$\dots$	$441{,}52$	500	$441{,}52$

$$d_{\text{I}} = \frac{500 + 441{,}52 + 293{,}42 + \dots + 441{,}52 + 500 + 441{,}52}{20} \approx 272{,}10$$

(6 BE)