B2 - Analysis

1 Gegeben sei die Funktionenschar f_b mit $f_b(t) = \frac{1}{100} \cdot (0,5t^2 + 2t) \cdot b \cdot \mathrm{e}^{-0,02t}, b \in \mathbb{R}, b > 0.$

1.1 Berechne die Nullstellen der Funktionen der Schar.

(3 BE)

1.2 Beschreibe die Bedeutung des Parameters b für die Graphen der Schar.
Berechne alle Extrempunkte der Graphen der Schar.
Die Funktionsgleichung der zweiten Ableitung
$f_b''(t) = \left(\frac{1}{100}\right)^3 \cdot (2t^2 - 392t + 9200) \cdot b \cdot \mathrm{e}^{-0,02t}$
darf ohne Nachweis verwendet werden.

[Zur Kontrolle: Die Hochpunkte der Schar haben die gerundeten Koordinaten $H(98,04 \mid 7,04b)$.]

(8 BE)

1.3 Untersuche das Grenzverhalten der Funktionen der Schar für $t \to +\infty$ und $t \to -\infty$.

(4 BE)

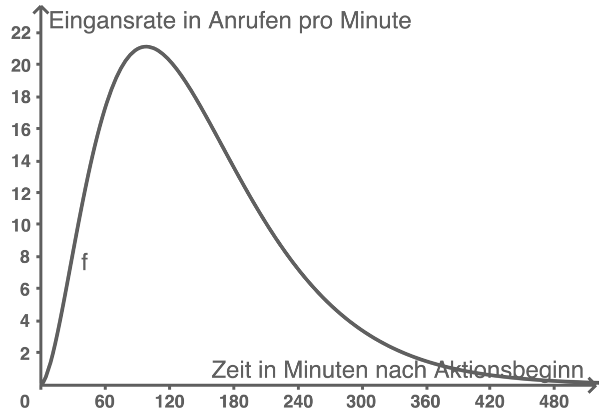
2 Ein hessischer Radiosender startet anlässlich einer Naturkatastrophe eine Spendenaktion. Die Zuschauer haben bei dieser Spendenaktion die Möglichkeit, über eine Spendenhotline telefonisch einen Betrag von 50 € zu spenden. Die Spendenhotline ist für einen Zeitraum von acht Stunden erreichbar.

2.1 Die Eingangsrate (in Anrufen pro Minute) lässt sich in guter Näherung durch eine Funktion der Funktionenschar f_b aus Aufgabe 1 modellieren. Dabei beschreibt t die Zeit in Minuten seit Beginn der Spendenaktion.

2.1.1 Nach einer Stunde beträgt die Eingangsrate 17 Anrufe pro Minute.
Bestimme, gerundet auf zwei Nachkommastellen, den zugehörigen Wert des Parameters b.

(2 BE)

Im Folgenden soll die Eingangsrate (in Anrufen pro Minute) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten seit Beginn der Spendenaktion) durch die Funktion f mit
$f(t) = 0,03 \cdot \left(0,5t^2 + 2t\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,02t} = f_3(t)$
der Funktionenschar aus Aufgabe 1 modelliert werden. Der Graph der Funktion f ist für $t \geq 0$ im Material 1 dargestellt.



Material 1

Graph der Näherungsfunktion f

2.1.2 Vergleiche die Eingangsraten nach zwei Stunden und nach acht Stunden im Sachzusammenhang.

(2 BE)

2.1.3 Ermittle ohne Verwendung des Graphen die maximale Eingangsrate gemäß der vorgenommenen Modellierung.

(2 BE)

2.1.4 Bestimme, gerundet auf zwei Nachkommastellen, den Wert von t, für welchen die Krümmung des Graphen der Funktion f von einer Rechts- in eine Linkskrümmung wechselt.
Erläutere die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang.

(5 BE)

2.1.5 Bestimme die minimale Eingangsrate im Zeitraum $[40;240]$.

(4 BE)

2.2.1 Berechne mithilfe eines geeigneten Formansatzes eine Stammfunktion F von f.
[Zur Kontrolle: $F(t)=(-0,75t^2-78t-3900)\cdot \mathrm{e}^{-0,02t}$ ist die Gleichung einer möglichen Stammfunktion F.]

(6 BE)

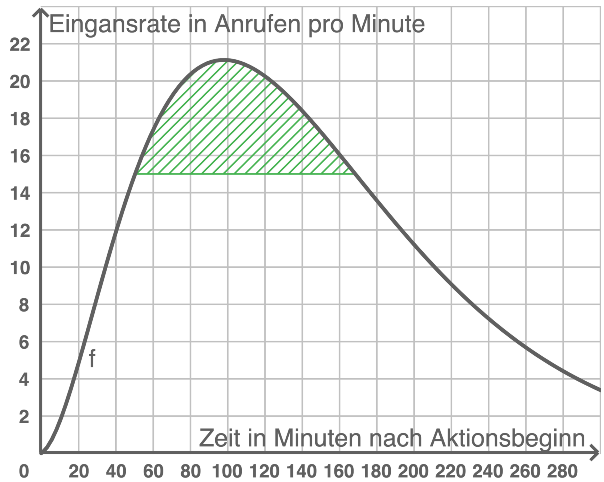
2.2.2 Berechne den Wert des Terms $50\cdot\displaystyle\int_0^{480} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Erläutere die Bedeutungen des Terms und des berechneten Werts im Sachzusammenhang.

(5 BE)

3 Bei der Spendenaktion aus Aufgabe 2 können in der Hotline ohne entstehende Wartezeiten maximal 15 Anrufe pro Minute bearbeitet werden. Wird diese Maximalzahl überschritten, werden die eingehenden Telefonnummern registriert. Sobald wieder freie Apparate zur Verfügung stehen, werden die Anrufer mittels einer automatischen Rückruffunktion kontaktiert. Im Modell wird davon ausgegangen, dass alle

mittels Rückruffunktion kontaktierten Anrufer direkt erreichbar sind.

3.1 Erläutere die Bedeutung der im Material 2 eingezeichneten Fläche im Sachzusammenhang.
Bestimme den Inhalt dieser Fläche.



Material 2

Ausschnitt aus dem Graphen der Näherungsfunktion

(6 BE)

3.2 Ab dem Zeitpunkt $t=50$ (bis zu einem späteren Zeitpunkt) müssen eingehende Telefonnummern registriert werden.
Erläutere den Ansatz in Zeile (1) im Sachzusammenhang und deute das Ergebnis in Zeile (2) im Sachzusammenhang.

$$(1) 15\cdot(k-50)=\int_{50}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ mit } k>50$$

$$(2) \Rightarrow k\approx 260$$

(3 BE)