# B1 - Analytische Geometrie

Aufgaben PLUS Tipps PLUS Lösungen PLUS

Drei Punkte $A_t$, $B_t$ und $C_t$ bewegen sich jeweils entlang einer Geraden:

$$A_t \text{ auf der Geraden } g_a: \quad \vec{a}_t = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$B_t \text{ auf der Geraden } g_b: \quad \vec{b}_t = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ und}$$

$$C_t \text{ auf der Geraden } g_c: \quad \vec{c}_t = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Die Punkte $A_t$, $B_t$ und $C_t$ bilden für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Dreieck $\Delta_t$.

1.

1.1 Zeichnen Sie in das Koordinatensystem (Material 1) die drei Geraden sowie die Dreiecke $\Delta_0$, $\Delta_1$ und $\Delta_2$ ein.

(4P)

1.2 Untersuchen Sie, ob die Dreiecke $\Delta_t$ gleichseitig sind.

(3P)

1.3 Die Punkte $A_t$, $B_t$ und $C_t$ legen für jedes $t$ eine Ebene $E_t$ fest.
Bestimmen Sie eine Ebenengleichung der Ebene $E_t$ in Parameterform.
Zeigen Sie, dass $\vec{n} = \begin{pmatrix}t^2-t+1\\t^2-t+1\\t^2-t+1\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von $E_t$ ist, und begründen Sie damit die Parallelität der Ebenen.
Bestimmen Sie den Abstand zweier beliebiger dieser Ebenen $E_t$ und $E_{t+k}$ mit $k \in \mathbb{R}$.

(11P)

1.4 Erläutern Sie die in Material 2 durchgeführten Rechenschritte und das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(4P)

2. Die Punkte $A_t$, $B_t$ und $C_t$ bilden zusammen mit dem Ursprung eine Schar von Pyramiden in Abhängigkeit von $t$.
Das Volumen einer solchen Pyramide kann mit der Formel
$V(t) = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\vec{a}_t \times \vec{b}_t\right)\cdot\vec{c}_t\right|$ berechnet werden.

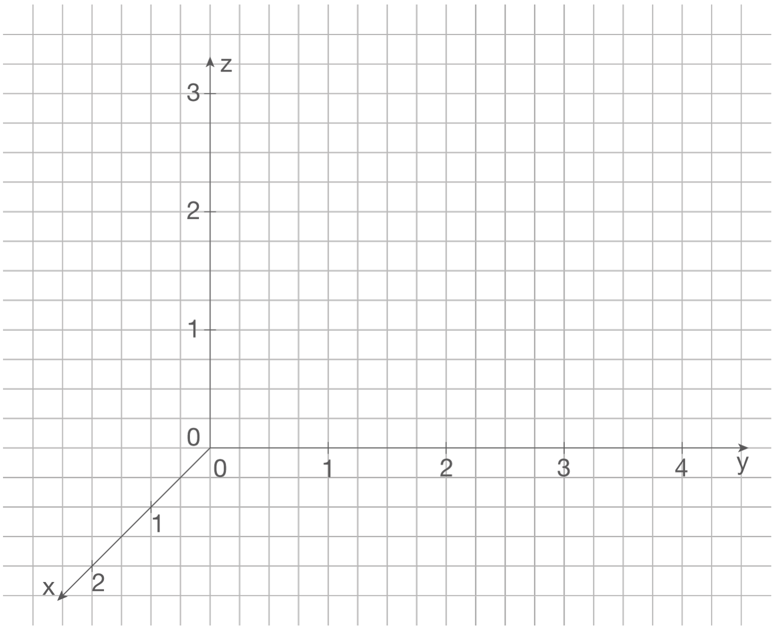
2.1 Zeigen Sie, dass $V(t) = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(t^3+1\right)\right|$ gilt, und bestimmen Sie $t$ so, dass das Volumen $V(t)$ den Wert $\frac{3}{2}$ annimmt.

(4P)

2.2 Untersuchen Sie, ob die Pyramide mit der minimalen Grundfläche auch die Pyramide mit dem minimalen Volumen ist.

(4P)

**Material 1**




**Material 2**

$$(1)\quad \overline{AB} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ -t \end{pmatrix};$$

$$\overline{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad A(t) = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ -t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}\right|$$

$$(3)\quad A(t) = \frac{\sqrt{3}\cdot\left(t^2-t+1\right)}{2}$$

$$(4)\quad A'(t) = \frac{\sqrt{3}\cdot(2\cdot t-1)}{2};$$

$$A''(t) = \sqrt{3}$$

$$(5)\quad \frac{\sqrt{3}\cdot(2\cdot t-1)}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}$$

$$(6)\quad A''\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \quad > 0$$

$\Rightarrow$ Minimum