# B2 - Analysis

## 1.1 Graphen zuordnen

Der Parameter $k$ strecht den Graphen für $k>1$ in $y$-Richtung. Umso größer also $k$, desto höher liegt der Hochpunkt.

Folglich gehört der Graph $C$ zu $f_1$, der Graph $B$ zu $f_{1,5}$ und der Graph $A$ zu $f_2$.

**Verhalten für $t\to\infty$ untersuchen**

Es gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-0,4t}=0$.

Da die e−Funktion im Term dominiert, folgt somit auch $\lim\limits_{t\to\infty} f_k(t)=0$.

## 1.2 Erste Ableitung von $f_k'(t)$ bilden:

$$\begin{aligned} f_k'(t) &= k\cdot\left(t\cdot(-0,4)\cdot \mathrm{e}^{-0,4\cdot t}+1\cdot \mathrm{e}^{-0,4\cdot t}\right)\\ &= k\cdot(-0,4t+1)\cdot \mathrm{e}^{-0,4t}\end{aligned}$$

**1. Schritt: Notwendige Bedingung für Extremstellen anwenden**

$$\begin{aligned} f_k'(t) &= 0\\ k\cdot(-0,4t+1)\cdot \mathrm{e}^{-0,4t} &= 0\end{aligned}$$

Wegen $k>0$ und $\mathrm{e}^{0,4t}>0$ folgt mit dem Satz vom Nullprodukt:

$$\begin{aligned} -0,4\cdot t+1 &= 0 \qquad \mid -1 \quad \mid :(-0,4)\\ t &= 2,5\end{aligned}$$

**2. Schritt: Hinreichende Bedingung für Extremstellen prüfen**

$$\begin{aligned} f_k''(2,5) &= k\cdot\left((-0,4\cdot 2,5+1)\cdot(-0,4)\cdot \mathrm{e}^{-0,4\cdot 2,5}-0,4\cdot \mathrm{e}^{-0,4\cdot 2,5}\right)\\ &= k\cdot(-0,4)\cdot \mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

Wegen $k>0$ gilt $f_k''(2,5)<0$.

Somit besitzen die Graphen der Schar an der Stelle $x=2,5$ einen Hochpunkt.

**3. Schritt: $y$-Koordinate bestimmen**

$f_k(2,5)=2,5\cdot k\cdot \mathrm{e}^{-1}$

Die Hochpunkte besitzen folglich die Koordinaten $H\left(2,5\mid 2,5\cdot k\cdot \mathrm{e}^{-1}\right)$ und liegen somit alle auf einer Parallelen zur $y$-Achse mit der Gleichung $t=2,5$.

1.3 **Ableitungsfunktionenschar $F'_k(t)$ berechnen**

$$\begin{aligned} F'_k(t) &= k\cdot\left(a\cdot \mathrm{e}^{-0,4t}+(a\cdot t+b)\cdot(-0,4)\cdot \mathrm{e}^{-0,4t}\right)\\ &= k\cdot(a-0,4at-0,4b)\cdot \mathrm{e}^{-0,4t}\end{aligned}$$

**Stammfunktionenschar $F_k(t)$ ermitteln**

Gesucht sind die Werte der Parameter $a$ und $b$, für die gilt:

$$k\cdot(a-0,4at-0,4b)\cdot \mathrm{e}^{-0,4t}=k\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-0,4t}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$\begin{aligned} -0,4a &= 1\\ a-0,4b &= 0\end{aligned}$$

Daraus folgen $a=-2,5$ und $b=-6,25$.

Durch Einsetzen der Werte für $a$ und $b$ in den Formansatz ergibt sich eine Stammfunktionenschar $F_k(t)$ mit $F_k(t)=k\cdot(-2,5t-6,25)\cdot \mathrm{e}^{-0,4t}$.

1.4
$$\begin{aligned} \lim_{v\to\infty}\int_0^v f_k(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{v\to\infty}F_k(v)-F_k(0)\\ &= 0-(-6,25\cdot k)\\ &= 6,25\cdot k\end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$\lim_{v\to\infty}F_k(v)=\lim_{v\to\infty}k\cdot(-2,5v-6,25)\cdot \mathrm{e}^{-0,4\cdot v}=0$$

Folglich schließt der Graph von $f_k$ mit der positiven $t$-Achse eine Fläche mit dem endlichen Inhalt $6,25\cdot k$ ein.

2 **Schnittpunkte bestimmen**

$$\begin{aligned} f_k(t) &= g_k(t)\\ k\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-0,4t} &= k^2\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-0,6t} \qquad \mid -(k^2\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-0,6t})\\ k\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-0,4t}-k^2\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-0,6t} &= 0\\ k\cdot t\cdot\left(\mathrm{e}^{-0,4t}-k\cdot \mathrm{e}^{-0,6t}\right) &= 0\end{aligned}$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt:

$t_1=0$ und $\left(\mathrm{e}^{-0,4t_2}-k\cdot \mathrm{e}^{-0,6t_2}\right)=0$

Durch Ausklammern ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-0,6t_2}\cdot\left(\mathrm{e}^{0,2t_2}-k\right) &= 0 && \mid :\mathrm{e}^{-0,6t_2} \quad \mid +k\\
\mathrm{e}^{0,2t_2} &= k && \mid \ln\\
0,2t_2 &= \ln k && \mid :0,2\\
t_2 &= \frac{\ln k}{0,2}
\end{aligned}
$$

$y$-Koordinaten berechnen:

$f_k(0)=0$

$$
\begin{aligned}
f_k\left(\frac{\ln k}{0,2}\right) &= k\cdot\frac{\ln k}{0,2}\mathrm{e}^{-0,4\cdot\frac{\ln k}{0,2}}\\
&= k\cdot\frac{\ln k}{0,2}\cdot\mathrm{e}^{-2\ln k}\\
&= k\cdot\frac{\ln k}{0,2}\cdot\left(\mathrm{e}^{\ln k}\right)^{-2}\\
&= k\cdot\frac{\ln k}{0,2\cdot k^2}\\
&= \frac{\ln k}{0,2\cdot k}
\end{aligned}
$$

Somit besitzen die Schnittpunkte der beiden Graphen die Koordinaten $S_1(0\mid 0)$ und $S_2\left(\frac{\ln k}{0,2}\mid\frac{\ln k}{0,2\cdot k}\right)$.

**Ortskurve bestimmen**

$x$-Koordinate nach $k$ umstellen:

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{\ln k}{0,2} && \mid \cdot 0,2\\
0,2t &= \ln k && \mid \mathrm{e}^{()}\\
\mathrm{e}^{0,2t} &= k
\end{aligned}
$$

$k$ in die $y$-Koordinate einsetzen:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\ln k}{0,2\cdot k}\\
&= \frac{\ln \mathrm{e}^{0,2t}}{0,2\cdot\mathrm{e}^{0,2t}}\\
&= \frac{0,2t}{0,2\cdot\mathrm{e}^{0,2t}}\\
&= t\cdot\mathrm{e}^{-0,2t}
\end{aligned}
$$

Somit folgt die Funktionsgleichung der Ortskurve mit $o(t)=t\cdot\mathrm{e}^{-0,2t}$.

3.1
$$\begin{aligned} A(k) &= \int_0^{10} f_k(t)\ \mathrm{d}t \\ &= [F_k(t)]_0^{10} \\ &= k\cdot\left((-31,25)\cdot \mathrm{e}^{-4}+6,25\right) \\ &\approx 5,678\cdot k \end{aligned}$$

$A(1)\approx 5,678$: Die minimale Ausbeute beträgt etwa $568$ Liter.

$A(3)\approx 17,03$: Die maximale Ausbeute beträgt etwa $1703$ Liter.

3.2 Mit dem WTR ergibt sich:

$$\int_0^{10} f_{2{,}08}(t)\ \mathrm{d}t \approx 11,80948$$

$$\int_0^{10} g_{2{,}08}(t)\ \mathrm{d}t \approx 11,80925$$

Beide Nebelfänger erzielen also eine Ausbeute von etwa $1181$ Liter.

3.3 Zeile $I$

Die Funktionsterme der Scharen $f$ und $g$ werden für $k=2,08$ gleichgesetzt, also die Schnittstellen $t_1$ und $t_2$ berechnet.

Zeile $II$

Es wird die Differenzfunktion der beiden Scharen mit $k=2,08$ gebildet. Die Funktion $u(t)$ gibt somit die momentane Differenz der Sammelrate an.

Zeile $III$

Es wird jeweils der Wert des Integrals der Differenzfunktion zwischen den Schnittpunkten im Intervall $[0;10]$, also zwischen $t_1=0$ und $t_2$ und anschließend zwischen $t_2$ und $t=10$, bestimmt.

Deutung der Ergebnisse im Sachzusammmenhang:

Der Nebelfänger vom Typ II liefert in den ersten $3,66$ Stunden nach $19$ Uhr $215$ Liter mehr Wasser als der Nebelfänger vom Typ I. Anschließend liefert bis $5$ Uhr morgens der Nebelfänger vom Typ I $215$ Liter mehr Wasser als der vom Typ II.

4.1 Die beiden Nebelfänger haben die gleiche Sammelrate in den Punkten, die die Schnittpunkte der Graphen von $f_k$ und $g_k$ bilden. Diese Schnittpunkte liegen auf dem Graphen der Ortskurve $o$ aus Aufgabe 2, da $t^*>0$ gilt. Um die größtmögliche gleiche Sammelrate zu berechnen, müsste man den Graphen der Ortskurve o auf Hochpunkte untersuchen.

Die $x$-Koordinate des Hochpunkts des Graphen von $o$ entspricht dem Zeitpunkt $t^*_{\max}$.

4.2

$$\begin{aligned} t^*_{max} &= 5 \\ \frac{\ln k_{max}}{0,2} &= 5 \qquad \mid \cdot 0,2 \quad \mid \mathrm{e}^{()} \\ k_{max} &= \mathrm{e}^{5\cdot 0,2} \\ k_{max} &\approx 2,72 \end{aligned}$$