1.1 ▶ Menge der gemeinsamen Punkte bestimmen (6 BE)

Die Menge der gemeinsamen Punkte beschreibt die Schnittgerade der beiden Ebenen.

Die Schnittgerade zweier Ebenen berechnest du, indem du ein Gleichungssystem aus den Koordinatengleichungen der Ebenen aufstellst und dann einen Parameter eliminierst.

Da zwei weitere Parameter übrig bleiben, du aber nur noch eine Gleichung besitzt, um diese zu bestimmen, setze einen der Parameter gleich t, um später eine Gerade zu erhalten.

Nun kannst du die restlichen Parameter bestimmen, indem du t einsetzt und dann nach dem jeweiligen Parameter auflöst.

Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

I	$1 = x + 2z$	
II	$1 = y + 3z$	Rechne: 3·I-2·II
IIA	$1 = 3x - 2y$	

Somit erhältst du folgende Gleichung.

$$1 = 3x - 2y$$

Setze nun $x = t$, um y zu bestimmen.

Daraus ergibt sich folgende Gleichung.

$$\begin{aligned} 1 &= 3t - 2y && \mid -3t \\ -3t + 1 &= -2y && \mid \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \\ y &= -\frac{1}{2} + \frac{3t}{2} \end{aligned}$$

Setze nun $x = t$ in I ein, um z zu bestimmen.

$$\begin{aligned} 1 &= t + 2z && \mid -t \\ 1 - t &= 2z && \mid :2 \\ z &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

Somit ergeben sich folgende Werte für die einzelnen Parameter.

$$x = 0 + t; \quad y = -\frac{1}{2} + \frac{3t}{2}; \quad z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$$

Diese Koordinaten kannst du nun zu einer Geradengleichung zusammenfassen.

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 + t \\ -\frac{1}{2} + \frac{3t}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die Menge der gemeinsamen Punkte von E_1 und E_2 wird also über die Gleichung der Geraden g mit

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

beschrieben.

▶ Besondere Lage der Ebenen

Die besondere Lage der Ebenen fragt nach ihrer Lage gegenüber den Koordinatenachsen bzw. gegenüber den Ebenen, die durch die Koordinatenachsen aufgespannt werden.

Allgemein gilt, dass eine Ebene zu der Koordinatenachse parallel verläuft, deren Koordinate nicht in der Koordinatenform der Ebene vertreten ist und sich somit kein Spurpunkt auf dieser Koordinatenachse bilden kann.

Betrachtest du die beiden Gleichungen der Ebenen E_1 und E_2, so kannst du feststellen, dass diese je nur zwei der drei Koordinaten aufweisen, um die Ebene zu beschreiben. Folglich sind beide Ebenen parallel zu einer der Koordinatenachse.

Betrachten wir zunächst die Ebenengleichung der Ebene E_1.

$E_1: x + 2z = 1$

Diese beinhaltet die Koordinaten x und z allerdings nicht y. Nach oben stehender Überlegung verläuft also die Ebene E_1 parallel zur y-Koordinatenachse.

Verfahre genauso mit der Ebene E_2.

$E_2: y + 3 \cdot z = 1$

Hier kannst du erkennen, dass diesmal die x-Koordinate nicht vertreten ist und folglich die Ebene E_2 parallel zur x-Koordinatenachse verläuft.

2.1 **▶ Menge der Punkte, die auf sich selbst abgebildet werden** (6 BE)

Die Menge aller Punkte, die auf sich selbst abgebildet werden kannst du berechnen über folgende Formel.

$A \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$

A beschreibt die Abbildungsmatrix und $\overrightarrow{v}$ den Fixvektor mit den Koordinaten $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Bestimme $\overrightarrow{v}$ wie folgt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 + 0 + 2v_3 \\ 0 + v_2 + 3v_3 \\ 0 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Teile diese Gleichung in drei einzelne Gleichungen auf.

$$\begin{array}{lrcll}
\text{I} & v_1 + 0 + 2v_3 & = & v_1 & \mid -v_1 \\
\text{II} & 0 + v_2 + 3v_3 & = & v_2 & \mid -v_2 \\
\text{III} & 0 & = & v_3 & \\
\hline
\text{I} & v_3 & = & 0 & \\
\text{II} & v_3 & = & 0 & \\
\text{III} & v_3 & = & 0 &
\end{array}$$

Somit ergibt sich $v_3 = 0$. Setze $v_1 = t$ und $v_2 = s$, weil das Gleichungssystem für $v_1 = v_1$ und $v_2 = v_2$ eine wahre Aussage besitzt.

Daraus ergibt sich der folgende Fixvektor $\overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da der Vektor von zwei Parametern abhängig ist, kannst du ihn eine Ebene beschreiben lassen, die dann die folgende Parametergleichung besitzt.

$$V : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Ebene beschreibt die Menge aller Fixpunkte, die durch die Abbildung auf sich selbst abgebildet werden.

▶ **Fixpunkte für B prüfen**

Damit die eben bestimmte Menge der Fixpunkte auch für B gilt, muss gelten $B \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$, wobei gilt

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechne dies wie folgt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot t + 0 \cdot s + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot t + 1 \cdot s + 3 \cdot 0 \\ 0 \cdot t + 0 \cdot s + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit gilt $B \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$, sodass die Fixpunkte auch für B zutreffen.

2.2 ▶ **Menge der Punkte, die auf den Ursrpung abgebildet werden** (6 BE)

Für alle Punkte, die auf den Ursprung abgebildet werden, muss gelten $A \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{o}$ mit

$$\overrightarrow{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen. Löse dieses, um den Vektor

$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ zu bestimmen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + 0 + 2a_3 \\ 0 + a_2 + 3a_3 \\ 0 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{array}{llll} \text{I} & 0 = & a_1 + 0 + 2a_3 & \\ \text{II} & 0 = & 0 + a_2 + 3a_3 & | \text{ Rechne:} 3 \cdot I\text{-}2 \cdot II \\ \text{III} & 0 = & 0 & \\ \hline \text{I} & 0 = & 3a_1 - 2a_2 & \end{array}$$

Setze $a_1 = t$, um die Gleichung lösen zu können.

Damit ergibt sich folgender Wert für a_2.

$$3t - 2a_2 = 0 \quad | -3t \quad | : (-2)$$

$$a_2 = \frac{3t}{2}$$

Somit ergibt sich für a_2 der Wert in Abhängigkeit von mit $a_2 = \dfrac{3t}{2}$

Berechne nun a_3.

$$0 = t + 2a_3 \quad | -t \quad | : 2$$

$$a_3 = -\frac{t}{2}$$

Somit ergibt sich der folgende Vektor $\overrightarrow{a}$.

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{3t}{2} \\ -\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

Diesen kannst du auch als Gerade betrachten.

$$g_2 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Somit liegen alle Punkte, die durch die Abbildung A auf den Ursprung abgebildet werden auf dieser Geraden.

► Zusammenhang zwischen Punktemenge und Schnittmenge von E_1 und E_2

Betrachtest du die eben bestimmte Punktemenge der Punkte, die durch die Abbildung A auf den Ursprung abgebildet wurden, und der Schnittmenge der Ebenen, so fällt auf, dass sie beide als Gerade dargestellt sind.
Untersuche die Richtungsvektoren, um zu prüfen, ob sie parallel oder identisch sind. Gilt $\overrightarrow{r_1} = t \cdot \overrightarrow{r_2}$, musst du prüfen, ob der Punkt, der als Stützvektor von g_1 dient, auf der Schnittgeraden liegt.

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden, die du bereits in den Aufgaben zuvor bestimmt hast, lauten wie folgt.

$$\overrightarrow{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Somit gilt $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2}$. Prüfe nun ob gilt $O \in g$.

Prüfe dazu mittels Punktprobe, ob der Ursprung auf der Schnittgeraden der Ebenen liegt. Trifft dies zu, sind die Geraden identisch.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & 0 = & 0 + 1t_1 & & & \\ \text{II} & 0 = & -\frac{1}{2} + \frac{3t_2}{2} & & \mid +\frac{1}{2} & \mid \cdot\frac{2}{3} \\ \text{III} & 0 = & \frac{1}{2} - \frac{t_3}{2} & \mid -\frac{1}{2} & & \mid \cdot(-2) \end{array}$$

Es muss gelten $t_1 = t_2 = t_3$.

$t_1 = 0$

$t_2 = \frac{1}{3}$

$t_3 = 1$

Somit gilt $t_1 \neq t_2 \neq t_3$, sodass die Geraden zwar parallel, aber nicht identisch sind.

2.3 ► Untersuchen ob A eine Inverse besitzt (2 BE)

Eine Matrix A, die eine Zeile besitzt, die vollständig mit Nullen belegt ist, bezeichnet man als singuläre Matrix. Sie beschreibt ein unterbestimmtes Gleichungssystem und ist nicht invertierbar.

Da die Matrix A eine solche Zeile aufweist, gilt sie auch als singuläre Matrix. Aus oben stehender Bedingung ist sie somit nicht invertierbar.

3.1 ► Zeigen, dass A eine Projektion beschreibt (6 BE)

Nach der Aufgabenstellung gilt als Bedingung für eine Projektion, dass $M^2 = M$. Übertragen auf die gegebene Matrix A bedeutet dies folglich $A^2 = A$.
Dies kannst du auch mit $A \cdot A = A$ beschreiben. Multipliziere die Matrix A mit sich selbst, um die Bedingung zu prüfen.

Du multiplizierst zwei 3x3-Matrizen wie folgt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{31} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{31} \cdot b_{32} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{31} \cdot b_{33} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33} \end{pmatrix}$$

Berechne nun das Produkt $A \cdot A$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit gilt $A^2 = A$, sodass die Matrix A eine Projektion beschreibt.

► Ergebnisse im Zusammenhang auswerten

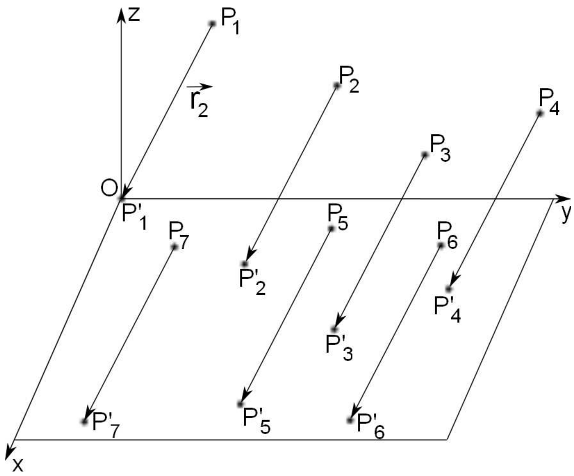
Um die Ergebnisse aus 2.1 und 2.2 im Zusammenhang auswerten zu können, musst du zunächst wissen, was eine Projektion macht.
Allgemein projiziert eine Projektion jeden beliebigen Punkt im Raum entlang eines Vektors auf eine Ebene. Als Bedingung hierfür gilt, dass die Ebene den Ursprung enthält.

Diesen Vektor kannst du anhand der Geraden g_1 bestimmen, da alle Punkte, die auf g_1 liegen, auf den Ursprung abgebildet werden. Da gilt $A^2 = A$, werden sie somit auch auf den Ursprung projiziert.

Betrachte dazu den Richtungsvektor $\overrightarrow{r_2}$ der Geraden g_2. Dieser lautet wie folgt.

$$\overrightarrow{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Es werden alle Punkte entlang dieses Vektors projiziert, da ansonsten nicht die Punkte auf g_2 auf den Ursprung projiziert werden würden. Dies soll das folgende Bild veranschaulichen.



Hier siehst du, dass alle Punkte in Richtung des Vektors $\overrightarrow{r_2}$ und auf die Ebene, in der alle Fixpunkte liegen, projiziert werden.
Folglich beschreibt die Fixebene gleichzeitig die Ebene, in die alle Punkte durch die Projektion mit A projiziert werden.

Die Gerade g_2 gibt aufgrund der Bedingung, dass alle Punkte, die auf dieser Geraden liegen auf den Ursprung abgebildet und nach $A^2 = A$ auch auf den Ursprung projiziert werden müssen, den „Richtungsvektor der Projektion“ an.

3.2 ▶ Beweis der Einheitsmatrix (4 BE)

Die Aufgabe fordert, dass für die Matrix C gilt, dass sie eine Inverse C^{-1} besitzt und gleichzeitig auch $C^2 = C$ eine wahre Aussage ergibt.

Somit ergeben sich zwei Bedingungen die erfüllt werden müssen.

1. $C^2 = C$
2. C soll invertierbar sein

Für Matrizen gilt allgemein: $C = C \cdot E$, wobei E die Einheitsmatrix beschreibt, die wie folgt aufgebaut ist.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verwende zunächst die Gleichung $C^2 = C$, um eine Aussage über C zu treffen. Forme diese zunächst um.

$$\begin{aligned} C^2 &= C \qquad \mid -C \\ C^2 - C &= 0 \\ C \cdot (C - E) &= 0 \end{aligned}$$

Hier kannst du den Satz vom Nullprodukt anwenden, der aussagt, dass ein Produkt immer genau dann Null wird, wenn einer der Faktoren Null wird.

Somit kannst du die beiden Faktoren einzeln Null setzen, sodass sich folgende Gleichungen ergeben.

$C = 0$

$C - E = 0$

$C = 0$ gilt nur, wenn die Matrix C die Nullmatrix ist, die sich wie folgt aufbaut.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese besitzt allerdings nur Zeilen, die nur aus Nullen bestehen, sodass sie nicht invertierbar ist und somit nicht der Aufgabenstellung entspricht. Löse folglich die 2. Gleichung mit $C - E = 0$.

$$\begin{aligned} C - E &= 0 \qquad \mid +E \\ C &= E \end{aligned}$$

Folglich gilt $C = E$. Da wir die Matrix E zu Beginn als Einheitsmatrix festgelegt hatten, ergibt sich somit folgende Matrix C.

$$C = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese besitzt keine Zeilen, die linear abhängig, also Vielfache voneinander sind, und ist somit invertierbar. Für die Einheitsmatrix gilt $E^{-1} = E$, sodass die Punkte durch die invertierte Matrix genau wie durch die Ausgangsmatrix auf sich selbst abgebildet werden.

Somit ist die Matrix C mit der Einheitmatrix identisch. Die Aufgabenstellung ist bewiesen.