A2 - Analysis

Gegeben ist die Funktionenschar g_a mit $g_a(x)=\sqrt{a\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1\cdot a} \quad (a,x\in\mathbb{R};a>0;x\geq -0,09)$.
Die Graphen aller Funktionen dieser Schar haben an der Stelle $x=1$ einen Hochpunkt.

1.1 Bestätige durch eine Rechnung, dass für jede Funktion der Schar $x=1$ eine Extremstelle ist.
Hinweis: Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist ausreichend.

(6 BE)

1.2 Berechne, für welchen Wert des Parameters a der Graph der zugehörigen Funktion der Schar durch den Punkt $H(1\mid a)$ verläuft.

(4 BE)

2. Bestimme die Asymptote der Graphen von g_a für $x\to\infty$.

(3 BE)

3. Zeige durch partielle Integration, dass

$$G_a(x)=a\cdot(-x-1)\cdot \mathrm{e}^{-x}+0,1\cdot a\cdot x$$

eine Stammfunktion von $(g_a(x))^2$ ist.

(8 BE)

4. Alle Funktionen der Schar haben genau eine Nullstelle. Zeige unter Verwendung einer Rechnung, dass alle Funktionen der Schar die gleiche Nullstelle haben.
Hinweis: Die Nullstelle muss nicht ermittelt werden.

(4 BE)

5. Eine Firma möchte ein neues Likörglas ähnlich wie das in Material 1 dargestellte produzieren. Es soll einen massiven Stiel erhalten. In Material 2 ist die obere Hälfte der Querschnittsfläche des um 90° nach rechts gekippten Glases (ohne Stiel) abgebildet ($1\,\mathrm{LE}$ entspricht $1\,\mathrm{cm}$). Durch Rotation des Graphen von g_{20} um die x-Achse im Intervall $I=[-0,09;9]$ entsteht der Glaskörper des Likörglases. Die Dicke des Glases ist dabei nicht zu berücksichtigen.

Material 1

5.1 Berechne das Volumen und den maximalen Umfang des Glaskörpers.

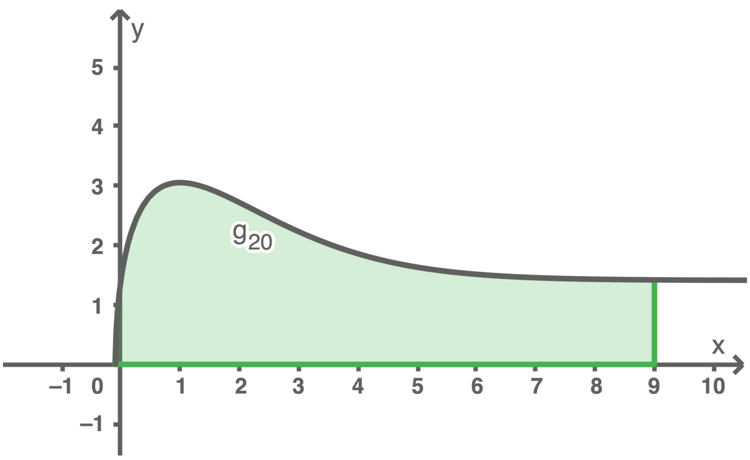
(7 BE)

5.2 Der Hersteller möchte auf dem Glas eine Markierung für die Mengenangabe „$2\,\text{cl}$“ ($20\,\text{cm}^3$) anbringen. Entwickle unter Angabe einer Stammfunktion einen rechnerischen Ansatz zur Ermittlung der Stelle, an der die Markierung angebracht werden muss. Das Ergebnis soll nicht ermittelt werden.

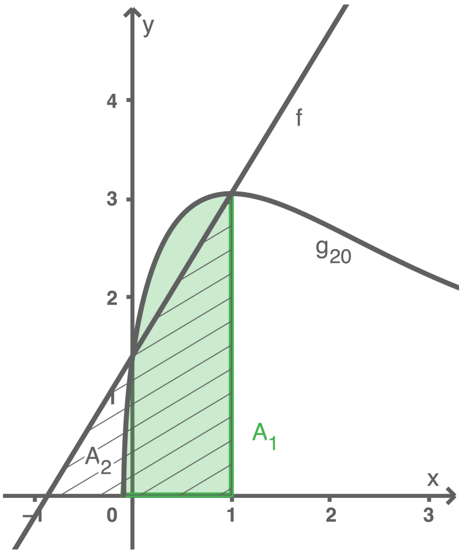
(3 BE)

6. Betrachtet man die Fläche in Material 3, so ergibt sich für die grüne Fläche $A_1 \approx 2,75\,\text{cm}^2$ und für die schraffierte Fläche $A_2 \approx 2,84\,\text{cm}^2$. Bei Rotation der Graphen der zugehörigen Randfunktionen g_{20} und f in den entsprechenden Intervallen um die x-Achse erhält man für die Volumina der zugehörigen Rotationskörper
$V_1 \approx 23,18\,\text{cm}^3 > V_2 \approx 18,22\,\text{cm}^3$,
obwohl $A_1 < A_2$ gilt.
Erkläre dieses Phänomen.

(5 BE)



Material 2



Material 3