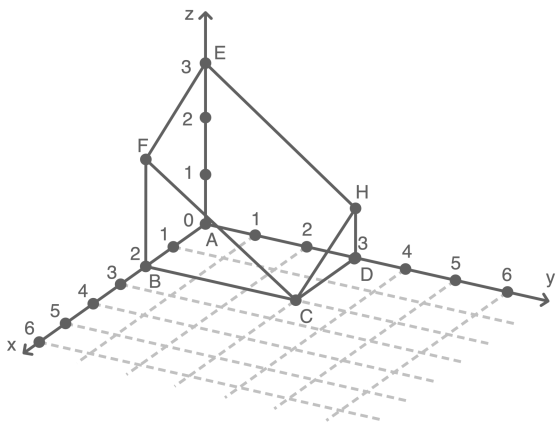
C1.2 - Lineare Algebra/Analytische Geometrie

1 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(2 \mid 0 \mid 0)$, $C(2 \mid 3 \mid 0)$, $D(0 \mid 3 \mid 0)$, $E(0 \mid 0 \mid 3)$, $F(2 \mid 0 \mid 2)$ und $H(0 \mid 3 \mid 1)$ die Eckpunkte eines Körpers K mit rechteckiger Grundfläche (Material). Alle diesen Körper K begrenzende Flächen sind eben.



Material

1.1 Zeige, dass das Viereck $EFCH$ ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

(4 BE)

1.2 Gib eine Parametergleichung der Ebene J an, in der die Fläche $EFCH$ liegt.
Bestimme eine zugehörige Koordinatengleichung.
[Zur Kontrolle: Eine mögliche Koordinatengleichung lautet $J: 3x + 4y + 6z = 18$.]

(5 BE)

1.3 Berechne den Neigungswinkel der Ebene J gegenüber der x-y-Ebene.

(3 BE)

1.4 Ein Schnittpunkt der Ebene J mit den Koordinatenachsen ist der Punkt E. Die anderen beiden Schnittpunkte haben die Koordinaten $S_x(6 \mid 0 \mid 0)$ und $S_y(0 \mid 4,5 \mid 0)$.
Beschreibe, wie man die Koordinaten des Punktes S_y berechnen kann.
Zeichne die Punkte S_x und S_y sowie die Kanten der Pyramide AS_xS_yE in das Material ein.

(4 BE)

1.5 Der Körper K ist ein Teilkörper der Pyramide AS_xS_yE. Berechne den prozentualen Anteil des Volumens des Körpers K am Volumen der Pyramide AS_xS_yE.

(5 BE)

Gegeben ist die Geradenschar

$$g_a: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ mit } a \in \mathbb{R}.$$

1.6 Zeige rechnerisch, dass alle Geraden der Schar in der Ebene J liegen.

(3 BE)

1.7 Berechne den Wert des Parameters a, für den die zugehörige Gerade der Schar durch den Punkt C verläuft.
Begründe, dass für den berechneten Wert des Parameters a die zugehörige Gerade der Schar die gesamte Strecke $\overline{EC}$ enthält.
[Zur Kontrolle: $a = 0,5$]

(4 BE)

1.8 Bestimme alle Werte des Parameters a, für welche die zugehörigen Geraden der Schar mehr als einen Punkt mit dem Parallelogramm $EFCH$ gemeinsam haben.

(4 BE)

1.9 Erläutere die Ansätze und deren geometrische Bedeutungen in den Zeilen I und II und gib die geometrische Bedeutung des Ergebnisses in Zeile III an.

$$\mathrm{I} \quad \begin{pmatrix} 2 - 2 \cdot a \\ 3 \cdot a \\ -1 - a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4,5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{8}{17}$$

$$\mathrm{II} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{8}{17} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4,5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \frac{51}{25}$$

$$\mathrm{III} \quad d = \left| \frac{51}{25} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{8}{17} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \begin{pmatrix} 2,16 \\ 2,88 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{21,96} \approx 4,69$$

(6 BE)

2 Ein Künstler will eine auf ebenem Boden stehende Betoninstallation herstellen, die als Sonnenuhr fungiert. Der Betonkörper entspricht dabei dem oben beschriebenen Körper K.
Die Sonnenuhr besteht neben dem Betonkörper aus einer massiven Stange, die einen Schatten auf den Betonkörper bzw. auf den Boden wirft. Die Stange wird im Folgenden als Strecke modelliert.
Der ebene Boden wird durch die x-y-Ebene dargestellt; eine Einheit entspricht einem Meter.

2.1 Die Stange ist insgesamt $3\,\mathrm{m}$ lang und wird senkrecht zur Fläche $EFCH$ im Betonkörper verankert, ein Teil der Stange steckt also im Betonkörper. Die Stange endet im Modell im Punkt $Q(1,5 \mid 2 \mid 3)$

außerhalb des Betonkörpers.
Berechne die Koordinaten des anderen Endpunktes der Stange, der innerhalb des Betonkörpers liegt.

(5 BE)

2.2 Zu einem bestimmten Zeitpunkt fällt der Schatten des Punktes Q auf den Punkt H.
Ermittle einen Vektor, der zum betrachteten Zeitpunkt die Richtung der parallel einfallenden Sonnenstrahlen beschreibt.

(1 BE)

2.3 Zu einem anderen Zeitpunkt kann die Richtung der parallel einfallenden Sonnenstrahlen durch den Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Der Schatten des Punktes Q fällt nun auf den Boden.
Berechne die Koordinaten des Schattenpunktes Q'.
Bestimme die Koordinaten des Punktes der Kante $\overline{EH}$, der im Schatten der Stange liegt.

(6 BE)