B2 - Analytische Geometrie

1.1 Koordinaten angeben

1. Schritt: Koordinaten von B und D angeben

$B(0 \mid 12 \mid 0)$

$D(6 \mid 0 \mid 0)$

2. Schritt: z_{D_1} berechnen

Das Gefälle der Kante $\overline{D_1A_1}$ gegnüber der x-y-Ebene beträgt $1,5\,\%$. und das Dreieck D_1DA_1 besitzt einen rechten Winkel bei D.
Ein Gefälle von $1,5\,\%$ bedeutet eine vertikale Differenz von $1,5\,\mathrm{LE}$ auf einer horizontalen Strecke der Länge $100\,\mathrm{LE}$. Die Strecke $\overline{DA_1}$ besitzt eine Länge von $12\,\mathrm{LE}$, somit muss die vertikale Differenz hier $0,18\,\mathrm{LE}$ betragen, da pro Längeneinheit ein Gefälle von $0,015\,\mathrm{LE}$ in vertikale Richtung erfolgt.
Es folgt damit für D_1 :

$D_1(6 \mid 0 \mid 0,18)$

1.2 Lage der Oberfläche zeigen

Die Oberfläche ist eben und wird von den vier Eckpunkten A_1, B_1, C_1 und D_1 begrenzt. Mit Hilfe von Punktproben zeigen, dass die vier Eckpunkte in der Ebene liegen:

1. Schritt: A_1 einsetzen

$$\begin{array}{rcl} T:\; 3x+3y+200z &=& 54 \\ 3\cdot 6+3\cdot 12+200\cdot 0 &=& 54 \\ 18+36 &=& 54 \\ 54 &=& 54 \end{array}$$

A_1 liegt in T.

2. Schritt: B_1 einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} T:\; 3x+3y+200z &=& 54 \\ 3\cdot 0+3\cdot 12+200\cdot 0,09 &=& 54 \\ 36+18 &=& 54 \\ 54 &=& 54 \end{array}$$

B_1 liegt in T.

3. Schritt: C_1 einsetzen:

$$\begin{aligned} T:\ 3x+3y+200z &= 54 \\ 3\cdot 0+3\cdot 0+200\cdot 0,27 &= 54 \\ 54 &= 54 \end{aligned}$$

C_1 liegt in T.

4. Schritt: D_1 einsetzen:

$$\begin{aligned} T:\ 3x+3y+200z &= 54 \\ 3\cdot 6+3\cdot 0+200\cdot 0,18 &= 54 \\ 18+36 &= 54 \\ 54 &= 54 \end{aligned}$$

D_1 liegt ebenfalls in T. Somit liegt die komplette Oberfläche der Terasse in T.

1.3

Ein Normalenvektor der x-y-Ebene ist $\overrightarrow{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Einen Normalenvektor von T wird aus der Ebenengleichung abgelesen: $\overrightarrow{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 200 \end{pmatrix}$.

Es folgt für den Schnittwinkel der Ebenen:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\left|\overrightarrow{n}_1 \circ \overrightarrow{n}_2\right|}{\left|\overrightarrow{n}_1\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}_2\right|} \\ \cos(\alpha) &= \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 200 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 200 \end{pmatrix}\right|} \\ \cos(\alpha) &= \frac{200}{1\cdot\sqrt{3^2+3^2+200^2}} \\ \cos(\alpha) &= \frac{200}{\sqrt{40.018}} \quad\quad \mid \cos^{-1} \\ \alpha &\approx 1,215^\circ \end{aligned}$$

Mithilfe des Tangens wird aus diesem die Prozentangabe des Gefälles bestimmt:

$\tan(\alpha) \approx 0,0212 = 2,12\,\% > 2\,\%$

Damit ist die Bedingung erfüllt.

2.1 Bohrungspunkt bestimmen

Der Punkt G, in dem gebohrt werden soll, liegt in der Terrassenoberfläche, also in der Ebene T und vertikal unter dem Punkt P_1, das heißt er besitzt die gleiche x- und y-Koordinate wie dieser.
Einsetzen der x- und y-Koordinaten von $P_1(3 \mid 1 \mid 2,4)$ in die Ebenengleichung von T und auflösen nach z liefert:

$$\begin{array}{rcll}
T:\ 3x+3y+200z &=& 54 & \\
3\cdot 3+3\cdot 1+200z &=& 54 & \\
12+200z &=& 54 & \mid -12 \\
200z &=& 42 & \mid :200 \\
z &=& 0,21 &
\end{array}$$

Somit ergeben sich die Koordinaten $G(3 \mid 1 \mid 0,21)$.

2.2 Koordinaten des Verankerungspunkts untersuchen

Die Hauswand liegt in der y-z-Ebene. Ein Normalenvektor dieser ist $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Als Richtungsvektor der Geraden kann $\overrightarrow{P_1S_1}$ verwendet werden. Da S_1 vertikal über dem Punkt H_1 liegt hat S_1 die gleichen x- und y-Koordinaten wie dieser: $S_1(0 \mid 1 \mid z_{S_1})$.

Für den Richtungsvektor folgt damit:

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ z_{S_1} - 2,4 \end{pmatrix}$$

Einsetzen und nach z_{S_1} umformen liefert:

$$\begin{aligned}
\sin(60^\circ) &= \frac{\left|\overrightarrow{n}\circ\overrightarrow{r}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{r}\right|} \\
\sin(60^\circ) &= \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-3\\0\\z_{S_1}-2,4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-3\\0\\z_{S_1}-2,4\end{pmatrix}\right|} \\
\sin(60^\circ) &= \frac{3}{1\cdot\sqrt{(-3)^2+0^2+(z_{S_1}-2,4)^2}} \\
\sin(60^\circ) &= \frac{3}{\sqrt{9+(z_{S_1}-2,4)^2}} && \mid\cdot\frac{\sqrt{9+(z_{S_1}-2,4)^2}}{\sin(60^\circ)} \\
\sqrt{9+(z_{S_1}-2,4)^2} &= \frac{3}{\sin(60^\circ)} && \mid{}^2 \\
9+(z_{S_1}-2,4)^2 &= \frac{9}{(\sin(60^\circ))^2} \\
9+z_{S_1}^2-4,8z_{S_1}+5,76 &= \frac{9}{(\sin(60^\circ))^2} && \mid-\frac{9}{(\sin(60^\circ))^2} \\
z_{S_1}^2-4,8z_{S_1}+14,76-\frac{9}{(\sin(60^\circ))^2} &= 0
\end{aligned}$$

Mithilfe der pq-Formel folgt:

$$\begin{aligned}
z_{1/2} &= -\frac{-4,8}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-4,8}{2}\right)^2-\left(14,76-\frac{9}{(\sin(60^\circ))^2}\right)} \\
&= 2,4\pm\sqrt{5,76-14,76+\frac{9}{(\sin(60^\circ))^2}} \\
&= 2,4\pm\sqrt{-9+\frac{9}{(\sin(60^\circ))^2}} \\
&= 2,4\pm\sqrt{3} \\
z_1 &\approx 4,132 \\
z_2 &\approx 0,67
\end{aligned}$$

Die z-Koordinate von S_1 muss größer sein als die von H_1, da S_1 vertikal über H_1 liegt. z_1 ist somit die für den Sachverhalt richtige Lösung.

Es gilt: $S_1(0\mid 1\mid 4,132)$.

3.1 Abbildungsmatrix bestimmen

Bei einer Projektion aller Punkte auf T_1, die parallel zur z-Achse durchgeführt wird, bleiben die x- und y-Koordinaten der Punkte erhalten, es ändern sich nur die z-Koordinaten so, dass die Punkte in T_1 liegen.

1. Schritt: Ebenengleichung von T_1 aufstellen

T_1 liegt parallel zu T und besitzt somit den gleichen Normalenvektor. Einsetzen der Koordinaten von C für die Bestimmung der rechten Seite von T_1 liefert:

$$3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 200 \cdot 0 = 0$$

Die Ebenengleichung lautet $T_1: \; 3x + 3y + 200z = 0$.

2. Schritt: Projektionsgleichung aufstellen

Es soll $M \cdot \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}'$ gelten, das heißt:

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Wie oben beschrieben gilt $x' = x$ und $y' = y$. Auflösen der Ebenengleichung von T_1 nach z' liefert:

$$\begin{array}{rcll} T_1: \; 3x' + 3y'; +200z' & = & 0 & \\ 3x + 3y + 200z' & = & 0 & \quad \mid -3x - 3y \\ 200z' & = & -3x - 3y & \quad \mid : 200 \\ z' & = & -0,015x - 0,015y & \end{array}$$

Durch Einsetzen in die Projektionsgleichung folgt:

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -0,015x - 0,015y \end{pmatrix}$$

3. Schritt: Einträge der Matrix bestimmen

Die x- bzw. y-Werte sollen jeweils auf sich selbst abgebildet werden, somit folgt für die ersten beiden Zeilen von M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Die letzte Zeile muss $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ auf $-0,015x - 0,015y$ abbilden. Ausmultiplizieren liefert:

$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = -0,015x - 0,015y$

Durch Koeffizientenvergleich folgt $a = -0,015$, $b = -0,015$ und $c = 0$. M ist damit gegeben durch:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,015 & -0,015 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2 **Abbildung darstellen**

Die im Aufgabenteil zuvor bestimmte Abbildungsmatrix M wird nun verwendet, um die gesuchte Abbildung der Form $\overrightarrow{x}' = M \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{k}$ zu benennen.

Da die Ebene T parallel zur Ebene T_1 steht, müssen die Punkte nach der Abbildung auf die Ebene T_1 nur noch mit Hilfe des Vektors $\overrightarrow{k}$ verschoben werden. Da T_1 und T die gleichen x- und y-Werte besitzen, findet diese Verschiebung entlang der z-Achse statt.

Da der Punkt C in T_1 vertikal unter dem Punkt C_1 der Ebene T liegt, folgt durch Vergleich der Koordinaten der beiden Punkte und der Parallelität der Ebenen, dass T aus T_1 durch eine Verschiebung um $0,27\,\mathrm{LE}$ in z-Richtung entsteht. Insgesamt ergibt sich damit folgende Gleichung:

$$\overrightarrow{x}' = M \cdot \overrightarrow{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,27 \end{pmatrix}$$