B2 - Analysis

1.1 Es muss gelten:

$$\begin{aligned} f_b(t) &= 0 \\ \frac{1}{100}\cdot(0,5t^2+2t)\cdot b\cdot \mathrm{e}^{-0,02t} &= 0 \end{aligned}$$

Da $\mathrm{e}^{-0,02t}>0$ und $b>0$, folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{100}\cdot(0,5t^2+2t) &= 0 \qquad \mid\cdot 100 \\ t\cdot(0,5t+2) &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt ergeben sich nun die Nullstellen $t_1=0$ und $t_2=-4$.

1.2 Bedeutung des Parameters b

Der Parameter streckt (für $b>1$) beziehungsweise staucht (für $0<b<1$) den Graphen der Schar in y-Richtung.

1. Schritt: Ableitung bestimmen

$$\begin{aligned} f_b'(x) &= \frac{b}{100}\cdot\left((t+2)\cdot\mathrm{e}^{-0,02t}+(0,5t^2+2t)\cdot\mathrm{e}^{-0,02t}\cdot(-0,02)\right) \\ &= \frac{b}{100}\cdot\mathrm{e}^{-0,02t}\cdot(t+2-0,01t^2-0,04t) \\ &= \frac{b}{100}\cdot\mathrm{e}^{-0,02t}\cdot(-0,01t^2+0,96t+2) \end{aligned}$$

2. Schritt: Notwendige Bedingung für Extremstellen anwenden

$$\begin{aligned} f_b'(t) &= 0 \\ \frac{b}{100}\cdot\mathrm{e}^{-0,02t}\cdot(-0,01t^2+0,96t+2) &= 0 \end{aligned}$$

Da $\mathrm{e}^{-0,02t}>0$ und $b>0$, folgt:

$$\begin{aligned} -0,01t^2+0,96t+2 &= 0 \qquad \mid\cdot 100 \\ -t^2+96t+200 &= 0 \end{aligned}$$

Anwenden der pq-Formel:

$p=-96$ und $q=-200$

$$\begin{aligned} t_{1/2} &= -\frac{-96}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-96}{2}\right)^2-(-200)} \\ t_{1/2} &= 48\pm\sqrt{2304+200} \\ t_1 &\approx 98,04 \\ t_2 &\approx -2,04 \end{aligned}$$

3. Schritt: Hinreichende Bedingung für Extremstellen prüfen

$$\begin{aligned} f_b''(-2,04) &= \left(\frac{1}{100}\right)^3 \cdot \left(2\cdot(-2)^2 - 392\cdot(-2) + 9200\right)\cdot b\cdot \mathrm{e}^{-0,02\cdot(-2)} \\ &\approx 0,01b \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_b''(98,04) &= \left(\frac{1}{100}\right)^3 \cdot \left(2\cdot 98,04^2 - 392\cdot 98,04 + 9200\right)\cdot \mathrm{e}^{-0,02\cdot 98,04} \\ &\approx -0,001b \\ &< 0 \end{aligned}$$

4. Schritt: Extrempunkte ermitteln

$$\begin{aligned} f_b(-2,04) &= \frac{1}{100}\cdot\left(0,5\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2)\right)\cdot b\cdot \mathrm{e}^{-0,02\cdot(-2)} \\ &\approx -0,02b \end{aligned}$$

Da $b > 0$ und $f_b''(-2) > 0$ gilt, besitzen die Graphen der Schar im Punkt$T(-2| -0,02b)$ einen Tiefpunkt.

$$\begin{aligned} f_b(98,04) &= \frac{1}{100}\cdot\left(0,5\cdot 98,04^2 + 2\cdot 98,04\right)\cdot b\cdot \mathrm{e}^{-0,02\cdot 98,04} \\ &\approx 7,04b \end{aligned}$$

Da $b > 0$ und $f_b''(98,04) < 0$ gilt, besitzen die Graphen der Schar im Punkt$H(98,04 \mid 7,04b)$ einen Hochpunkt.

Wegen $b > 0$ und $f_b''(-2,04) > 0$ besitzen die Graphen der Schar im Punkt$T(-2,04 \mid -0,02b)$ einen Tiefpunkt.

1.3 Es gilt $\lim\limits_{t\to+\infty} f_b(t) = 0,$ da der lineare Term langsamer gegen unendlich strebt als die Exponentialfunktion gegen null.

Für $t \to +\infty$ gilt folglich $f_b(t) \to 0.$

Außerdem gilt $\lim\limits_{t\to-\infty} f_b(t) = +\infty,$ da sowohl der lineare Term als auch die Exponentialfunktion gegen unendlich streben.

Für $t \to -\infty$ gilt folglich $f_b(t) \to +\infty.$

2.1.1

$$\begin{aligned} f_b(60) &= 17 \\ \frac{1}{100}\cdot\left(0,5\cdot 60^2 + 2\cdot 60\right)\cdot b\cdot \mathrm{e}^{-0,02\cdot 60} &= 17 \\ \frac{1}{100}\cdot 1920\cdot b\cdot \mathrm{e}^{-1,2} &= 17 \\ 5,78\cdot b &\approx 17 \quad | : 5,78 \\ b &\approx 2,94 \end{aligned}$$

2.1.2 Nach zwei Stunden ist die Eingansrate der Anrufe pro Minute sehr hoch. Während zu diesem Zeitpunkt etwa 20 bis 21 mal pro Minute angerufen wird, gehen nach acht Stunden nur noch zwischen 0 und einem

Anruf ein.

2.1.3 In 1.2 wurden bereits die Koordinaten des Hochpunkts der Schar in Abhängigkei von b ermittelt.

Durch Einsetzen von $b = 3$ folgt:

$f_3(98,04) = 7,04 \cdot 3 = 21,12$

Die maximale Eingansrate beträgt somit 21,12 Anrufe pro Minute.

2.1.4 Der Wechsel von einer Rechts- in eine Linkskrümmung beschreibt einen Wendepunkt am Graphen von f.

Notwendige Bedingung für Wendestellen anwenden

$$\begin{array}{rcll} f''(t) &=& 0 & \\ \left(\frac{1}{100}\right)^3 \cdot (2t^2 - 392t + 9200) \cdot 3 \cdot \mathrm{e}^{-0,02t} &=& 0 & \quad \mid : \left(\frac{1}{100}\right)^3 \quad \mid : 3 \\ (2t^2 - 392t + 9200) \cdot \mathrm{e}^{-0,02t} &=& 0 & \end{array}$$

Wegen $\mathrm{e}^{-0,02t} > 0$ gilt:

$$\begin{array}{rcll} 2t^2 - 392t + 9200 &=& 0 & \quad \mid : 2 \\ t^2 - 196 + 4600 &=& & \end{array}$$

Mit der pq-Formel ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} t_{1/2} &=& -\left(\frac{196}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{(-196)}{2}\right)^2 - 4600} \\ t_1 &\approx& 27,26 \\ t_2 &\approx& 168,74 \end{array}$$

Aus dem Graphen von f kann abgelesen werden, dass es sich bei$t_2 = 168,74$ um einen Wechsel von einer Rechts- in eine Linkskrümmung handelt.

Bedeutung des Werts von t

Der Wert von t gibt den Zeitpunkt in Minuten seit Beginn der Spendenaktion an, zu welchem die Eingangsrate am stärksten abnimmt.

2.1.5 Da die Eingansrate im Intervall an den Intervallsgrenzen lokale Minima besitzt, müssen die beiden Randwerte verglichen werden:

$$\begin{array}{rcl} f(40) &=& \frac{3}{100} \cdot (0,5 \cdot 40^2 + 2 \cdot 40) \cdot \mathrm{e}^{-0,02 \cdot 40} \\ &\approx& 11,86 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(240) &=& \frac{3}{100} \cdot (0,5 \cdot 240^2 + 2 \cdot 240) \cdot \mathrm{e}^{-0,02 \cdot 240} \\ &\approx& 7,23 \end{array}$$

Die minimale Eingansrate im Zeitraum $[20; 240]$ beträgt somit $7,23$.

2.2.1 $f(t)=\frac{3}{100}\cdot(0,5t^2+2t)\cdot \mathrm{e}^{-0,02t}$

Formansatz: $F(t)=\frac{3}{100}\cdot(at^2+bt+c)\cdot e^{-0,02t}$ und $F'(t)=f(t)$

Produktregel: $F'(t)=u'(t)\cdot v(t)+u(t)\cdot v'(t)$

Aus $f(t)$ ergeben sich:

$u(t)=at^2+bt+c$ mit $u'(t)=2at+b$

$v(t)=\mathrm{e}^{-0,02t}$ mit $v'(t)=(-0,02)\cdot \mathrm{e}^{-0,02t}$

Einsetzen in $F'(t)$:

$$\begin{aligned}F'(t)&=\frac{3}{100}\cdot\left((2at+b)\cdot \mathrm{e}^{-0,02t}+(at^2+bt+c)\cdot(-0,02)\cdot \mathrm{e}^{-0,02t}\right)\\&=\frac{3}{100}\cdot(2at+b-0,02at^2-0,02bt-0,02c)\cdot \mathrm{e}^{-0,02t}\\&=\frac{3}{100}\cdot(-0,02at^2+(-0,02b+2a)\cdot t+b-0,02c)\cdot \mathrm{e}^{-0,02t}\end{aligned}$$

Somit gilt:

$\mathrm{I}: -0,02a=0,5$

$\mathrm{II}: -0,02b+2a=2$

$\mathrm{III}: b-0,02c=0$

Aus I folgt $a=-25$. Durch Einsetzen von a in II ergibt sich $b=-2600$. III führt zu $c=-130000$.

Somit ergibt sich eine Stammfunktion F mit:

$$\begin{aligned}F(t)&=\frac{3}{100}\cdot(-25t^2-2600t-130000)\cdot \mathrm{e}^{-0,02t}\\&=(-0,75t^2-78t-3900)\cdot \mathrm{e}^{-0,02t}\end{aligned}$$

2.2.2 Wert des Terms berechnen

$$\begin{aligned}50\cdot\int_0^{480} f(t)\,\mathrm{d}t&=50\cdot[F(t)]_0^{480}\\&=50\cdot|(F(480)-F(0))|\\&=50\cdot\left|(-0,75\cdot 480^2-78\cdot 480-3900)\cdot \mathrm{e}^{-0,02\cdot 480}-(-0,75\cdot 0^2-78\cdot 0-3900)\cdot \mathrm{e}^{-0,02\cdot 0}\right|\\&\approx 194\,274,83\end{aligned}$$

Term deuten

Der Wert des Integrals entspricht der Anzahl der Anrufe innerhalb der acht Stunden nach Beginn der Spendenaktion. Pro Anruf werden 50 € gespendet, der berechnete Wert des Terms gibt somit also den Gesamtwert des gespendeten Geldes in Euro an.

3.1 **Eingezeichnete Fläche deuten**

Die eingezeichnete Fläche entspricht der Anzahl der Anrufe, welche nicht sofort bearbeitet werden können und erst später durch einen Rückruf kontaktiert werden.

Flächeninhalt bestimmen

Lösungsalternative 1 (mit Hilfe der Funktionsgleichung, der Abbildung und dem WTR):

Durch Ablesen am Graphen von f folgt der Zeitraums, zu welchen mehr als 15 Anrufe eingehen, mit$t_1 \approx 50$ und $t_2 \approx 170$.

Durch Eingabe in den Taschenrechner folgt der Inhalt der Fläche mit:

$$\int_{50}^{170} f(t) - 15 \, \mathrm{d}t = \int_{50}^{170} 0,03 \cdot (0,5 \cdot t^2 + 2t) \cdot \mathrm{e}^{-0,02 \cdot t} - 15 \, \mathrm{d}t \approx 463,2 \; [\text{FE}]$$

Es können folglich 463 Anrufe nicht sofort bearbeitet werden.

Lösungsalternative 2 (mit Hilfe der gegebenen Funktionsgleichung der Stammfunktion und Erschließung mit der Abbildung):

Durch Ablesen am Graphen von f folgt der Zeitraums, zu welchen mehr als 15 Anrufe eingehen mit$t_1 \approx 50$ und $t_2 \approx 170$.

$$\begin{array}{lll} A_1 &=& \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t) \, \mathrm{d}t \\ &=& [F(t)]_{50}^{170} \\ &=& F(170) - F(50) \\ &\approx& 2263,2 \; [\text{FE}] \end{array}$$

Da nur der Flächeninhalt der Fläche, die der Graph von f mit der Geraden g einschließt berechnet werden soll, muss noch der Flächeninhalt der Fläche, die die Gerade mit der x-Achse einschließt subtrahiert werden.

$$\begin{array}{lll} A_2 &=& (170 - 50) \cdot 15 \\ &=& 1800 \; [\text{FE}] \end{array}$$

Daraus folgt $A_F = A_2 - A_1 = 463,2 \; [\text{FE}]$.

Es können folglich 463 Anrufe nicht sofort bearbeitet werden.

3.2 k entspricht der Anzahl der Minuten nach Beginn der Spendenaktion, zu welchem alle Anrufer, welche nicht sofort bearbeitet werden konnten, durch die automatische Rückruffunktion kontaktiert wurden.

Der Ansatz in der ersten Zeile zeigt:

Die Anzahl der Minuten ab dem Zeitpunkt, zu welchem die eingehenden Telefonnummern registriert werden müssen, multipliziert mit 15, der maximalen Anzahl an Anrufen, die pro Minute bearbeitet werden können, muss gleich der gesamten Anzahl der Anrufe ab $t = 50$ bis k sein.

Das Ergebnis in Zeile (2) bedeutet:

260 Minuten nach Beginn der Spendenaktion wurden alle registrierten Telefonnummern zurückgerufen.