B2 - Analysis

1 Wissenschaftler untersuchen auf einer Insel über einen großen Zeitraum hinweg eine Elchpopulation. Die Entwicklung der Anzahl der Elche innerhalb der ersten 50 Jahre ist in Abbildung 1 dargestellt.

Im Folgenden wird die Anzahl der Elche in verschiedenen Zeiträumen durch die Funktionen f_1, f_2 und f_3 modelliert.

Dabei bezeichnet t die Zeit in Jahren nach Beginn der Untersuchung zum Zeitpunkt $t=0$, $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ jeweils die Anzahl der Elche.

Die Graphen der drei Funktionen sind abschnittweise in Abbildung 2 dargestellt.

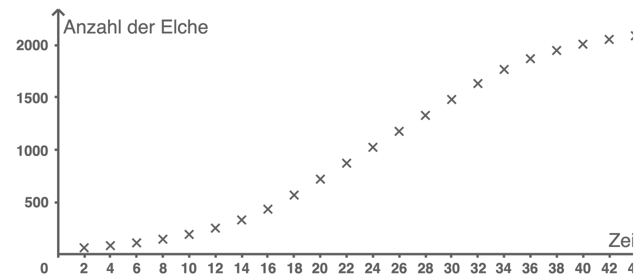

Abbildung 1

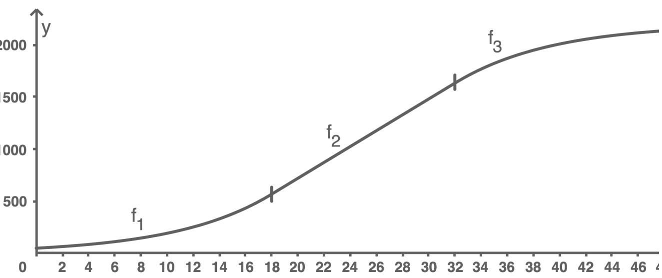

Abbildung 2

1.1 Zu Beginn der Untersuchung sind 50 Elche vorhanden, nach 18 Jahren 568 Elche. Die Anzahl der Elche wird in den ersten 18 Jahren durch eine Exponentialfunktion f_1 mit $f_1(t) = a \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t}$ modelliert.

Berechne die Parameter a und k.

Begründe, warum die Funktion f_1 nicht zur langfristigen Beschreibung der Anzahl der Elche geeignet ist.

(6 BE)

1.2 Im Intervall $18 < \mathrm{t} < 32$ soll die Anzahl der Elche durch eine lineare Funktion f_2 mit $f_2(t) = 76 \cdot t - 800$ modelliert werden.

Beschreibe die Bedeutung der Steigung $m = 76$ im Sachzusammenhang.

(2 BE)

1.3 Ab dem Zeitpunkt $t = 32$ wird die Funktion f_3 mit $f_3(t) = 2200 - 50 \cdot \mathrm{e}^{6{,}75 - 0{,}135 \cdot t}$ zur Modellierung der Anzahl der Elche verwendet.

1.3.1 Untersuche das Grenzwertverhalten von f_3 für $t \to +\infty$ anhand des Funktionsterms.

(3 BE)

1.3.2 Berechne mit Hilfe der Funktion f_3 den Zeitpunkt, ab dem die Wachstumsrate höchstens 10 Elche pro Jahr beträgt.

(5 BE)

1.3.3 Berechne den Wert des Integrals $\frac{1}{18} \cdot \int_{32}^{50} f_3(t)\,\mathrm{d}t$ und deute das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(6 BE)

2 Die Anzahl der Elche soll im Folgenden durch die Funktion g mit $g(t)=\dfrac{2200}{1+43\cdot \mathrm{e}^{-0{,}04\cdot \ln(43)\cdot t}}$ modelliert werden. Hierbei bezeichnet t die Zeit in Jahren nach Beginn der Untersuchung aus Aufgabe 1, $g(t)$ die Anzahl der Elche. Der Graph von g ist in Abbildung 3 dargestellt.

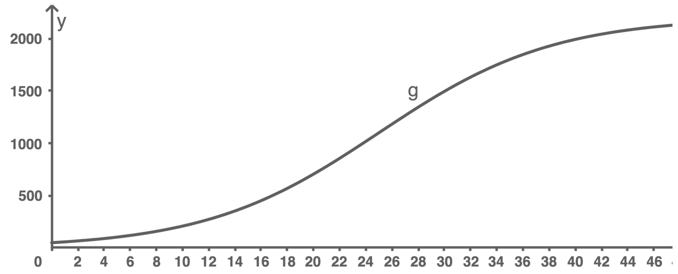

Abbildung 3

Für den Zusammenhang zwischen der Funktion g und der Ableitungsfunktion g' gilt $g'(t)=r\cdot g(t)\cdot(2200-g(t))$, wobei r eine positive Konstante ist.

2.1 Zeige mit Hilfe der Produktregel, dass $g''(t)=r\cdot g'(t)\cdot(2200-2\cdot g(t))$ gilt.

(3 BE)

2.2 Bestätige unter Bezugnahme auf die Gleichung aus Aufgabe 2.1 nur unter Verwendung der notwendigen Bedingung, dass für die y-Koordinate $y_w=1100$ ein Wendepunkt des Graphen von g vorliegt, und berechne den zugehörigen Zeitpunkt t_w.

Beschreibe die Bedeutung von t_w im Sachzusammenhang.

(8 BE)

2.3 Für alle $u>0$ gilt $g(25)-g(25-u)=g(25+u)-g(25)$.

Gib an, welche Symmetrieeigenschaft des Graphen von g man aus dieser Gleichung folgern kann.

(2 BE)

3 50 Jahre nach Beginn der Untersuchung aus Aufgabe 1 ist in einem strengen Winter das Wasser zwischen Festland und Insel teilweise zugefroren, sodass 23 Wölfe auf die Insel gelangen.

Die Anzahl der Elche bzw. Wölfe lässt sich in guter Näherung durch die Funktionen h bzw. w modellieren mit:

$$h(t)=500\cdot\cos(0,08\pi\cdot t)+1650$$

$$w(t)=10\cdot\sin(0,08\pi\cdot t)+23$$

Hierbei bezeichnet t mit $50\leq t\leq 100$ die Zeit in Jahren nach Beginn der Untersuchung, $h(t)$ bzw. $w(t)$ die Anzahl der Elche bzw. Wölfe.

3.1 Beschreibe, durch welche geometrischen Operationen der Graph von w aus dem Graphen der allgemeinen Sinusfunktion s mit $s(t)=\sin(t)$ hervorgeht.

Ermittle die Periodenlänge von w sowie die maximale und minimale Anzahl der Wölfe.

(6 BE)

3.2 Zeige, dass die zweite Ableitungsfunktion w'' und die erste Ableitungsfunktion h' proportional zueinander sind, dass also gilt $w''(t)=c\cdot h'(t)$, und berechne die Proportionalitätskonstante $c>0$.

(5 BE)

3.3 Begründe, dass sich an den Stellen, an denen ein Hochpunkt von h vorliegt, auch ein Hochpunkt von w' befindet.

Deute diese Aussage im Sachzusammenhang.

(4 BE)