C2.2 - Stochastik

1.1 X_n beschreibt die Anzahl der Sommertage am 1. Juli unter n ausgewählten Hochzeitstagen. X_n kann als binomialverteilt mit $p=0,7$ und n angenommen werden.

Ereignis A :

Mit dem CAS ergibt sich:

$$P(A)=P(X_{10}=6)\approx 0,2=20\,\%$$

Ereignis B :

Mit dem CAS ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} P(B) & = & P(X_{20}>10) \\ & = & 1-P(X\leq 10) \quad \mid WTR \\ & \approx & 1-0,048 \\ & = & 0,952 \\ & = & 95,2\,\% \end{array}$$

Ereignis C :

Erwartungswert μ_{20} berechnen:

$$\begin{array}{lll} \mu_{20} & = & n\cdot p \\ & = & 20\cdot 0,7 \\ & = & 14 \end{array}$$

Standardabweichung σ_{20} bestimmen:

$$\begin{array}{lll} \sigma_{20} & = & \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} \\ & = & \sqrt{20\cdot 0,7\cdot 0,3} \\ & \approx & 2,05 \end{array}$$

Mit dem CAS ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} P(C) & = & P(X_{20}<14-2,05)+P(X_{20}>14+2,05) \\ & = & P(X_{20}\leq 11)+P(X_{20}\geq 17) \\ & = & P(X_{20}\leq 11)+1-P(X_{20}\leq 16) \quad \mid WTR \\ & \approx & 0,113+1-0,893 \\ & = & 0,22 \\ & = & 22\,\% \end{array}$$

1.2 Ereignis D:

$$\begin{array}{lll} P(D) & = & P(25,3 \leq Y \leq 27,3) \\ & = & P(Y \leq 27,3) - P(Y \leq 25,3) \quad \mid WTR \\ & \approx & 0,655 - 0,345 \\ & = & 0,310 \\ & = & 31,0\,\% \end{array}$$

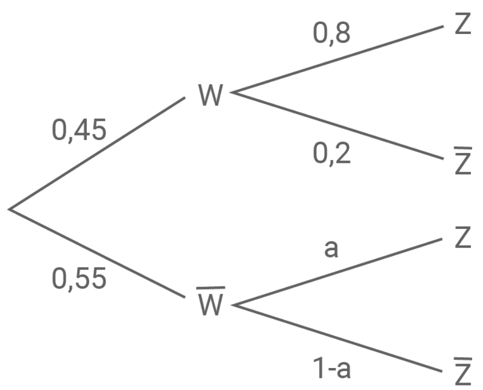
Ereignis E:

$$\begin{array}{lll} P(E) & = & P(Y \geq 30) \\ & = & 1 - P(Y \leq 30) \quad \mid WTR \\ & \approx & 1 - 0,931 \\ & = & 0,069 \\ & = & 6,9\,\% \end{array}$$

Ereignis F:

$$\begin{array}{lll} P(F) & = & P(Y < 26,3 - 2) \\ & = & P(Y < 24,3) \quad \mid WTR \\ & = & 0,212 \\ & = & 21,2\,\% \end{array}$$

2.1 Baumdiagramm beschriften



Wert von a bestimmen

Es soll gelten:

$$
\begin{array}{rcll}
P(Z) &=& 0,778 & \\
P(W\cap Z)+P(\overline{W}\cap Z) &=& 0,778 & \\
0,45\cdot 0,8+0,55\cdot a &=& 0,778 & \quad \mid -0,36 \\
0,55\cdot a &=& 0,418 & \quad \mid :0,55 \\
a &=& 0,76 &
\end{array}
$$

2.2 Für $a=0,7$ gilt:

$$
\begin{array}{rcl}
P(\overline{W}\cap Z) &=& 0,55\cdot 0,7 \\
&=& 0,385
\end{array}
$$

Außerdem gilt:

$$
\begin{array}{rcl}
P(W\cap Z) &=& 0,45\cdot 0,8 \\
&=& 0,36
\end{array}
$$

Wegen $P(\overline{W}\cap Z)>P(W\cap Z)$ folgt, dass es weniger weibliche als nicht weibliche Personen geben würde, die mit ihrer Urlaubsreise zufrieden waren.

2.3 W und Z sind stochastisch unabhängig voneinander, wenn unabhängig vom Geschlecht der betrachteten Person die Wahrscheinlichkeit, dass sie mit ihrer Urlaubsreise zufrieden war, gleich ist.

Somit müsste für nicht weibliche Personen ebenso wie für weibliche Personen die Wahrscheinlichkeit, dass die ausgewählte Person mit der Urlaubsreise zufrieden war, $80\,\%$ betragen.

Der gesuchte Wert von a beträgt somit $0,8.$

2.4 Mit zunehmendem Wert von a steigt die Anzahl der nicht weiblichen Personen, die mit ihrer Urlaubsreise zufrieden waren.

Umso weniger nicht weibliche Personen folglich unzufrieden mit der Urlaubsreise waren, desto größer wird der Anteil der weiblichen Personen an der Gruppe der unzufriedenen Personen.

Somit nimmt die Wahrscheinlichkeit, dass die Person weiblich ist, zu.

3.1 **Abweichung nachweisen**

$$
\begin{array}{rcll}
P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5) &=& 1 & \\
P(1)+8\cdot 10^{-4}+5\cdot 10^{-5}+2\cdot 10^{-5}+3\cdot 10^{-6} &=& 1 & \\
P(1)+0,000873 &=& 1 & \quad \mid -0,000873 \\
P(1) &=& 0,999127 &
\end{array}
$$

Erwartungswert e berechnen

Da der Erwartungswert des Gewinns pro Person 43,5 Cent und somit 0,435 Euro beträgt, folgt:

$$\begin{aligned} 0,435 &= e\cdot 0,999127+200\cdot 8\cdot 10^{-4}+500\cdot 5\cdot 10^{-5}+1000\cdot 2\cdot 10^{-5}+10000\cdot 3\cdot 10^{-6} \\ 0,435 &= e\cdot 0,999127+0,235 \qquad \mid -0,235 \\ 0,2 &= e\cdot 0,999127 \\ 0,2 &\approx e \end{aligned}$$

Der Erwartungswert des Gewinns pro Person für die Personen mit einem Strandkorb beträgt somit etwa 20 Cent.

3.2 X beschreibt die Anzahl der Personen mit zwei Strandkörben und ist binomialverteilt mit $n=80000$ und $p=8\cdot 10^{-4}$.

$\mu = 80000\cdot 8\cdot 10^{-4}=64$

Es soll nun gelten:

$$P(\mu-c\leq X\leq \mu+c) \quad \geq \quad 0,8$$

Systematisches Ausprobieren mit dem WTR liefert:

$$\begin{aligned} P(64-10\leq X\leq 64+10) &= P(X\leq 74)-P(X\leq 53) \\ &\approx 0,903-0,092 \\ &\approx 0,811 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(64-9\leq X\leq 64+9) &\approx P(X\leq 73)-P(X\leq 54) \\ &\approx 0,881-0,115 \\ &\approx 0,766 \end{aligned}$$

Der kleinstmögliche Wert von c, für den die Anzahl der Personen mit zwei Strandkörben mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $80\,\%$ im Intervall $[\mu-c;\mu+c]$ liegt, ist somit gegeben durch $c=10$.

3.3.1 **1. Schritt: Nullhypothese definieren**

p beschreibt hierbei den prozentualen Anteil der Personen, welche nach der Teilnahme am Gewinnspiel eine Reise bei dem Reiseunternehmen buchen.

H_0 : Der Anteil der Personen,welche nach der Teilnahme am Gewinnspiel eine Reise bei dem Reiseunternehmen buchen, beträgt mindestens $2\,\%$: $p\geq 0,02$

H_1 : Der Anteil der Personen, welche nach der Teilnahme am Gewinnspiel eine Reise bei dem Reiseunternehmen buchen, beträgt weniger als $2\,\%$: $p<0,02$

2. Schritt: Ablehnungsbereich bestimmen

X beschreibt die Anzahl der Personen, welche nach der Teilnahme am Gewinnspiel eine Reise bei dem

Reiseunternehmen buchen, und wird entsprechend der Nullhypothese als binomialverteilt mit $n = 1000$ und $p = 0,02$ betrachtet.

Gesucht ist das größte k, für das gerade noch $P(X \leq k) < 0,05$ gilt.

Systematisches Ausprobieren mit dem WTR liefert:

$P(X \leq 13) \approx 0.064$

$P(X \leq 12) \approx 0,038$

Somit folgt der Ablehnungsbereich mit $\overline{A} = [0; 12]$.

3. Schritt: Entscheidungsregel formulieren

Geben höchstens 12 der befragten Personen an, nach der Teilnahme am Gewinnspiel eine Reise bei dem Reiseunternehmen gebucht zu haben, so wird die Nullhypothese verworfen und angenommen, dass eine Verlängerung des Gewinnspiels mit finanziellen Verlusten verbunden ist.

3.3.2 X beschreibt die Anzahl der Personen, welche nach der Teilnahme am Gewinnspiel eine Reise bei dem Reiseunternehmen buchen, und ist binomialverteilt mit $n = 1000$ und $p = 0,014$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 13) &= 1 - P(X \leq 12) \quad \mid WTR \\ &\approx 0,643 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art bei einem tatsächlich niedrigeren Anteil der Personen, welche nach der Teilnahme am Gewinnspiel eine Reise bei dem Reiseunternehmen buchen, von $1,4\,\%$ beträgt somit ungefähr $64,3\,\%$.

3.3.3 Wenn das Unternehmen den Fehler 2. Art begeht, entstehen unnötigerweise Kosten für die Verlängerung des Gewinnspiels, obwohl dieses nicht den gewünschten Effekt hat.
Sind diese Kosten höher als die Kosten für den erhöhten Stichprobenumfang, könnte sich der erhöhte Stichprobenumfang lohnen.