B1 - Analytische Geometrie

1.1 Steigungswinkel berechnen

Die Flugbahn kann als Gerade g modelliert werden, die Horizontale wird durch die x-y-Ebene beschrieben.

Als Richtungsvektor von g ergibt sich:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor der x-y-Ebene ist $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Einsetzen:

$$\begin{array}{rcll}
\sin(\alpha) &=& \dfrac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}\right|} & \\
\sin(\alpha) &=& \dfrac{1}{\sqrt{0^2+0^2+1^2} \cdot \sqrt{8^2+4^2+1^2}} & \\
\sin(\alpha) &=& \dfrac{1}{1 \cdot 9} & \\
\sin(\alpha) &=& \dfrac{1}{9} & \mid \sin^{-1} \\
\alpha &\approx& 6,38^\circ &
\end{array}$$

Der gesuchte Steigungswinkel beträgt ca. $6,38^\circ$.

Koordinaten der Position berechnen

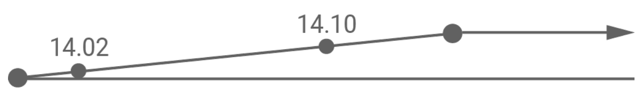
Da das Flugzeug mit konstanter Geschwindigkeit fliegt, legt es bis 14.10 Uhr das fünffache der Strecke $\overline{AB}$ zurück. Es folgt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + 5\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}40\\20\\5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Punkt $P(40 \mid 20 \mid 5)$ stellt die Position des Flugzeuges um 14.10 Uhr dar.

1.2 Positionen einzeichnen

Zwischen Anfangs- und Endpunkt der Steigung liegen 14 Minuten, in denen das Flugzeug, da es mit konstanter Geschwindigkeit fliegt, insgesamt siebenmal die Strecke $\overline{AB}$ zurücklegt. Durch Teilung der Gesamtstrecke in sieben gleichlange Teilstrecken folgt:



1.3 Geschwindigkeit ermitteln

Die Geschwindigkeit des Flugzeuges ist bis 14.14 Uhr konstant.
Berechnung der Strecke $s = \overline{AB}$, welche das Flugzeug in den ersten 2 Minuten zurücklegt:

$$\begin{aligned}s &= \overline{AB}\\ &= \left|\overrightarrow{AB}\right|\\ &= \sqrt{8^2+4^2+1^2}\\ &= 9\ [\mathrm{km}]\end{aligned}$$

Ermittlung der Geschwindigkeit v :

$$\begin{aligned}v &= \frac{s}{t}\\ &= \frac{9\,\mathrm{km}}{2\,\mathrm{min}}\\ &= \frac{270\,\mathrm{km}}{60\,\mathrm{min}}\\ &= \frac{270\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}}\\ &= 270\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\end{aligned}$$

Bis 14.14 Uhr fliegt das Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von $270\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

1.4 Gleichung angeben

1. Schritt: Geradengleichung aufstellen

$$\begin{aligned} g:\ \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OA} + t\cdot\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{x} &= t\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Schritt: Intervall von t bestimmen

Für $t=0$ wird der Startpunkt A beschrieben und für $t=7$ der Endpunkt um 14.14 Uhr. Für die Strecke der Flugbahn folgt:

$$g:\ \overrightarrow{x} = t\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}, 0\leq t\leq 7.$$

2.1 Lösungsansatz I im Sachzusammenhang erläutern

Es handelt sich um den Betrag des Verbindungsvektors zwischen dem Punkt, in dem die Radarstation liegt, und dem allgemeinen Punkt der Geraden g, die die Flugbahn beschreibt. Dieser Vektorbetrag liefert eine Funktion d, die den Abstand des Flugzeugs zur Radarstation in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt. Dieser wird minimal, wenn das notwendige Kriterium für Extremstellen erfüllt ist.

Lösungsansatz II im Sachzusammenhang erläutern

Hier wird mithilfe des Skalarprodukts des Richtungsvektors der Geraden g und dem Verbindungsvektor zwischen Flugzeug und Radarstation überprüft, ob diese orthogonal sind. Wenn das eintritt, ist der Abstand des Flugzeuges zur Radarstation am geringsten.

2.2 Geringste Entfernung bestimmen

Lösungsweg A: Ansatz I

Gesucht ist der Funktionswertwert am Minimum von $d(t)$.

1. Schritt: Ableitungsfunktionen bestimmen

Mithilfe von Ketten- und Produktregel folgt für die Ableitungen von $d(t)=\sqrt{81t^2-286t+325}$:

$$\begin{aligned} d'(t) &= \tfrac{1}{2}\cdot\left(81t^2-286t+325\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2\cdot 81t-286) \\ &= (81t-143)\cdot\left(81t^2-286t+325\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d''(t) &= 81\cdot\left(81t^2-286t+325\right)^{-\frac{1}{2}}+(81t-143)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(81t^2-286t+325\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2\cdot 81t-286) \\ &= 81\cdot\left(81t^2-286t+325\right)^{-\frac{1}{2}}-(81t-143)^2\cdot\left(81t^2-286t+325\right)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

2. Schritt: Notwendiges Kriterium für Extremstellen anwenden

$$\begin{aligned} d'(t) &= 0 \\ (81t-143)\cdot\left(81t^2-286t+325\right)^{-\frac{1}{2}} &= 0 \\ \frac{81t-143}{\left(81t^2-286t+325\right)^{\frac{1}{2}}} &= 0 \qquad \mid\cdot\left(81t^2-286t+325\right)^{\frac{1}{2}} \\ 81t-143 &= 0 \qquad \mid +143 \\ 81t &= 143 \qquad \mid :81 \\ t &= \tfrac{143}{81} \end{aligned}$$

3. Schritt: Hinreichendes Kriterium für Extremstellen überprüfen

$$\begin{aligned} d''\left(\tfrac{143}{81}\right) &= 81\cdot\left(81\left(\tfrac{143}{81}\right)^2-286\left(\tfrac{143}{81}\right)+325\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad -\left(81\left(\tfrac{143}{81}\right)-143\right)^2\cdot\left(81\left(\tfrac{143}{81}\right)^2-286\left(\tfrac{143}{81}\right)+325\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\approx 9,5>0 \end{aligned}$$

Der Abstand des Flugzeugs zur Radarstation ist somit bei $t=\frac{143}{81}$ am geringsten.

4. Schritt: Funktionswert berechnen

$$\begin{aligned} d\left(\tfrac{143}{81}\right) &= \sqrt{81\left(\tfrac{143}{81}\right)^2-286\left(\tfrac{143}{81}\right)+325} \\ &\approx 8,52 \end{aligned}$$

Die geringste Entfernung zwischen Flugzeug und Radarstation beträgt ca. $8,5\,\mathrm{km}$.

Lösungsweg B: Ansatz II

Gesucht ist der Abstand des Lotfußpunktes auf der Geraden zu dem Punkt R der Radarstation.

1. Schritt: Gleichung nach t auflösen

$$
\begin{array}{rcll}
\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}18-8t\\-4t\\-1-t\end{pmatrix} &=& 0 & \\
8\cdot(18-8t)+4\cdot(-4t)+1\cdot(-1-t) &=& 0 & \\
144-64t-16t-1-t &=& 0 & \\
143-81t &=& 0 & \quad \mid +81t \\
143 &=& 81t & \quad \mid :81 \\
\frac{143}{81} &=& t &
\end{array}
$$

2. Schritt: Lotfußpunkt bestimmen

Durch Einsetzen von t in die Gleichung aus 1.4 folgt für den Lotfußpunkt P:

$$
\overrightarrow{OP}=t\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}=\frac{143}{81}\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1144}{81}\\\frac{572}{81}\\\frac{143}{81}\end{pmatrix}
$$

3. Schritt: Abstand berechnen

$$
\begin{array}{rcl}
d &=& \left|\overrightarrow{PR}\right| \\
&=& \left|\begin{pmatrix}\frac{1144}{81}-18\\\frac{572}{81}-0\\\frac{143}{81}+1\end{pmatrix}\right| \\
&=& \sqrt{\left(-\frac{314}{81}\right)^2+\left(\frac{572}{81}\right)^2+\left(\frac{224}{81}\right)^2} \\
&\approx& 8,5
\end{array}
$$

Die geringste Entfernung zwischen Flugzeug und Radarstation beträgt ca. $8,5\,\mathrm{km}$.

3. **1. Schritt: Koordinaten des Punktes bestimmen, in dem sich das Flugzeug um 14.14 Uhr befindet:**

$$
\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{OC} &=& \overrightarrow{OA}+7\cdot\overrightarrow{AB} \\
&=& \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+7\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix} \\
&=& \begin{pmatrix}56\\28\\7\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Um 14.14 Uhr befindet sich das Flugzeug an der Position mit den Koordinaten $C(56\mid 28\mid 7)$.

2. Schritt: Halbgerade aufstellen, die die Flugbahn ab 14.14 Uhr beschreibt:

Da das Flugzeug seine Höhe ab 14.14 Uhr nicht mehr ändert, ergibt sich der neue Richtungsvektor aus dem alten, indem x- und y-Koordinaten gleich bleiben und die z-Koordinate Null wird.
Die Halbgerade für die neue Flugbahn lautet damit:

$$g_c:\ \overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}56\\28\\7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\0\end{pmatrix}\ \text{mit } s\geq 0.$$

3. Schritt: Abstand der Punkte auf der Halbgeraden zur Radarstation mit 70 gleichsetzen:

$$\left|\begin{pmatrix}56\\28\\7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}18\\0\\-1\end{pmatrix}\right|=70$$

Dies ist eine Möglichkeit für den gesuchten rechnerischen Ansatz.

4.1 Koordinaten des Schattenpunkts berechnen

Um 14.02 Uhr befindet sich das Flugzeug im Punkt B. Parallelprojektion auf den Schattenpunkt P' durch Multiplikation mit der Matrix P liefert:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'}&=P\cdot\overrightarrow{OB}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{75}&1&\frac{1}{3}\\\frac{1}{25}&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}8\\-\frac{1}{75}\cdot 8+4+\frac{1}{3}\\\frac{1}{25}\cdot 8\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}8\\-\frac{8}{75}+\frac{300}{75}+\frac{25}{75}\\\frac{1}{25}\cdot 8\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}8\\\frac{317}{75}\\\frac{8}{25}\end{pmatrix}\\&\approx\begin{pmatrix}8\\4,23\\0,32\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Schattenpunkt des Flugzeugs um 14.02 Uhr hat die Koordinaten $P'\left(8\mid\frac{317}{75}\mid\frac{8}{25}\right)\approx P'(8\mid 4,23\mid 0,32)$.

4.2 Fixpunktmenge der Matrix nachweisen

Für einen Fixpunkt $\overrightarrow{x}$ einer von der Matrix P beschriebenen Abbildung muss folgende Gleichung erfüllt sein:

$P\cdot\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x}$

Durch Ausmultiplizieren folgt:

$$\begin{array}{rcl}
P\cdot\overrightarrow{x} &=& \overrightarrow{x} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{75} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{25} & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &=& \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{75}x+y+\frac{1}{3}z \\ \frac{1}{25}x \end{pmatrix} &=& \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{array}$$

Daraus ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcll}
\text{I} & x &=& x & \\
\text{II} & y &=& -\frac{1}{75}x+y+\frac{1}{3}z & \mid -y \\
 & 0 &=& -\frac{1}{75}x+\frac{1}{3}z & \mid \cdot 75 \\
 & 0 &=& -x+25z & \\
\text{III} & z &=& \frac{1}{25}x & \mid -z \\
 & 0 &=& \frac{1}{25}x-z & \mid \cdot(-25) \\
 & 0 &=& -x+25z &
\end{array}$$

Die erste Gleichung ist immer erfüllt. Aus der zweiten und dritten ergibt sich jeweils $0=-x+25z$. Alle Fixpunkte der Matrix P müssen somit die Bedingung $0=-x+25z$ erfüllen. Die Fixpunktemenge wird damit durch die Ebene E mit $E:\ 0=-x+25z$ beschrieben.