B1 - Analysis

1.1
$$\begin{aligned}\int_0^8 f(t)\ \mathrm{d}t &= \left[3t^4-64t^3+384t^2\right]_0^8\\ &= 3\cdot 8^4-64\cdot 8^3+384\cdot 8^2\\ &= 4096\end{aligned}$$

An diesem Tag betreten gemäß der Modellierung somit 4096 Besucher den Park.

1.2 **Uhrzeit bestimmen**

Ableitungsfunktion f' angeben:

$$f'(t)=36t^2-384t+768$$

Notwendige Bedingung für Extremstellen anwenden:

$$\begin{aligned}f'(t) &= 0\\ 36t^2-384t+768 &= 0 \quad \mid :36\\ t^2-\frac{384}{36}+\frac{768}{36} &= 0\end{aligned}$$

Anwenden der pq-Formel:

$$\begin{aligned}t_{1;2} &= -\left(-\frac{384}{72}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{384}{72}\right)^2-\frac{768}{36}} \quad |WTR\\ t_1 &= \frac{8}{3}\\ t_2 &= 8\end{aligned}$$

Auf die Anwendung der hinreichenden Bedingung für Extremstellen kann verzichtet werden, da die Existenz aus der Aufgabenstellung und aus dem Verlauf des Graphen hervorgeht.

Mit Hilfe von Abbildung 1 lässt sich folgern, dass die Eingangsrate zum Zeitpunkt $t_1=\frac{8}{3}$ maximal ist.

Dies entspricht 2 Stunden und 40 Minuten nach dem Einlass und beschreibt somit die Eingangsrate um 11:40 Uhr.

Aussage prüfen

Durchschnittliche Eingangsrate bestimmen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\cdot\int_0^8 f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{8}\cdot 4096\\ &= 512\end{aligned}$$

Maximale Eingangsrate bestimmen:

$$\begin{aligned}f\left(\frac{8}{3}\right) &= 12\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3-192\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2+768\cdot\frac{8}{3}\\ &\approx 910{,}2\end{aligned}$$

Es gilt: $\dfrac{910{,}2}{512}\approx 1{,}778$

Die maximale Eingangsrate ist somit um ca $77{,}8\,\%$ größer als die durchschnittliche Eingangsrate.

Die Aussage ist folglich wahr.

1.3 Eine Eingansrate von 10 Personen pro Minute entspricht der Eingangsrate von 600 Personen pro Stunde.

Es gilt:

$$\begin{aligned}f(1) &= 12\cdot 1^3-192\cdot 1^2+768\cdot 1\\ &= 588\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(5) &= 12\cdot 5^3-192\cdot 5^2+768\cdot 5\\ &= 540\end{aligned}$$

Aus der Abbildung 1 lässt sich entnehmen, dass für alle $t<1$ bzw. $t>5$ aufgrund des Verlauf des Graphen $f(t)<588$ bzw. $f(t)<540$ gilt.

Somit überschreitet die Eingangsrate nur im angegebenen Zeitraum von 10:00 bis 14:00 den Wert von 600.

Es ist also ausreichend, den zusätzlichen Mitarbeiter in diesem Zeitraum einzubestellen.

2.1 Der Parameter k streckt den Graphen von g_k in y-Richtung. Für größere bzw. kleinere Werte von k werden somit die y-Werte entsprechend größer bzw. kleiner.

Die Graphen von g_k werden durch k nicht in t-Richtung verschoben bzw. gestreckt. Somit bleiben die t-Koordinaten der Schnittpunkte mit der t-Achse sowie der Extrem- und Wendestellen unabhängig von k konstant.

Der Parameter k hat somit keinen Einfluss auf die Schnittstellen mit der t-Achse und verschiebt die Extrem- und Wendepunkte lediglich entlang der y-Achse.

2.2

$$\begin{aligned} g_k(t) &= 0 \\ k\cdot(10t-t^2)\cdot \mathrm{e}^t &= 0 \end{aligned}$$

Es gilt $k>0$ und $\mathrm{e}^t>0$. Mit dem Satz vom Nullprodukt folgen die Nullstellen der Funktionenschar, wenn $10t-t^2=0$ ist.

Da eine quadratische Funktion höchstens zwei Nullstellen hat, kann g_k nicht mehr als die beiden angegebenen Nullstellen haben.

2.3 Mit der Produktregel folgt:

$$\begin{aligned} g_k'(t) &= k\cdot(10-2t)\cdot \mathrm{e}^t + k\cdot(10t-t^2)\cdot \mathrm{e}^t \\ &= k\cdot \mathrm{e}^t\cdot(10-2t+10t-t^2) \\ &= k\cdot \mathrm{e}^t\cdot(10+8t-t^2) \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung folgt nun:

$$\begin{aligned} g_k''(t) &= k\cdot \mathrm{e}^t\cdot(10+8t-t^2) + k\cdot \mathrm{e}^t\cdot(8-2t) \\ &= k\cdot \mathrm{e}^t\cdot(10+8t-t^2+8-2t) \\ &= k\cdot \mathrm{e}^t\cdot(18+6t-t^2) \end{aligned}$$

2.4 **Wendestelle berechnen**

Notwendige Bedingung für Wendestellen prüfen:

$$\begin{aligned} g_k''(t) &= 0 \\ k\cdot \mathrm{e}^t\cdot(18+6t-t^2) &= 0 \end{aligned}$$

Satz vom Nullprodukt anwenden:

Es ist stets $k>0$ und $\mathrm{e}^t>0$, somit folgt:

$$\begin{aligned} -t^2+6t+18 &= 0 \quad \mid \cdot(-1) \\ t^2-6t-18 &= 0 \end{aligned}$$

Anwenden der pq-Formel liefert:

$$
\begin{aligned}
t_{W_{1;2}} &= -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-6)}{2}\right)^2 - (-18)} \\
t_{W_{1;2}} &= 3 \pm \sqrt{27} \\
t_{W_1} &\approx -2,2 \\
t_{W_2} &\approx 8,2
\end{aligned}
$$

Wegen $0 \leq t \leq 10$ wird t_{W_1} ausgeschlossen. Die Wendestelle entspricht somit $t_2 \approx 8,2$.

Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang

Die Wendestelle entspricht der Stelle, an der der Graph der Funktion seine größte Steigung bzw. sein größtes Gefälle annimmt.

Die Wendestelle entspricht somit dem Zeitpunkt, an dem die Ausgangsrate am stärksten zunimmt.

2.5 **1. Schritt: Allgemeine Stammfunktion aufstellen**

Da der Term von g_k zusammengesetzt ist aus einem quadratischen Term und einer e-Funktion, gilt für mögliche Stammfunktionen G_k :

$$G_k(t) = k \cdot (at^2 + bt + c) \cdot \mathrm{e}^t$$

2. Schritt: $G_k(t)$ ableiten

$$
\begin{aligned}
G'_k(t) &= k \cdot (2at + b) \cdot \mathrm{e}^t + k \cdot (at^2 + bt + c) \cdot \mathrm{e}^t \\
&= k \cdot \mathrm{e}^t \cdot (2at + b + at^2 + bt + c) \\
&= k \cdot (at^2 + 2at + bt + b + c) \cdot \mathrm{e}^t
\end{aligned}
$$

Weitere Vereinfachung:

$$G'_k(t) = k \cdot (at^2 + t \cdot (2a + b) + b + c) \cdot \mathrm{e}^t$$

3. Schritt: Koeffizientenvergleich

Es muss $G'_k(t) = g_k(t)$ erfüllt sein. Daraus folgt:

$$at^2 + t \cdot (2a + b) + b + c = 10t - t^2$$

Durch einen Koeffizientenvergleich folgt:

$$a = -1$$

Weiterhin folgt:

$$\begin{array}{rcll} 2a+b &=& 10 & \mid a=-1 \\ -2+b &=& 10 & \mid +2 \\ b &=& 12 & \end{array}$$

Zudem folgt:

$$\begin{array}{rcll} b+c &=& 0 & \mid b=12 \\ 12+c &=& 0 & \mid -12 \\ c &=& -12 & \end{array}$$

4. Schritt: Stammfunktionenschar G_k aufstellen

Koeffizienten in die allgemeine Stammfunktion G_k einsetzen:

$G_k(t) = k \cdot (-t^2 + 12t - 12) \cdot \mathrm{e}^t$

2.6 **Begründung**

In Aufgabenteil 1.1 wurde bereits berechnet, dass am beobachteten Tag die Anzahl der Besucher 4096 beträgt.

Somit müssen innerhalb der 10 Stunden, in denen der Park geöffnet hat, alle 4096 Personen den Park auch wieder verlassen.

Parameter k bestimmen

Für g soll gelten:

$$\begin{array}{rcll} \int_0^{10} g(t)\ \mathrm{d}t &=& 4096 & \\ \left[k \cdot (-t^2 + 12t - 12) \cdot \mathrm{e}^t\right]_0^{10} &=& 4096 & \\ k \cdot (-10^2 + 12 \cdot 10 - 12) \cdot \mathrm{e}^{10} - k \cdot (-0^2 + 12 \cdot 0 - 12) \cdot \mathrm{e}^0 &=& 4096 & \\ k \cdot 8 \cdot \mathrm{e}^{10} - k \cdot (-12) &=& 4096 & \mid :8 \\ k \cdot \mathrm{e}^{10} + k \cdot 1,5 &=& 512 & \mid :8 \\ (\mathrm{e}^{10} + 1,5) \cdot k &=& 512 & \mid :(\mathrm{e}^{10} + 1,5) \\ k &=& \dfrac{512}{\mathrm{e}^{10} + 1,5} & \end{array}$$

2.7 **Geometrische Deutung**

Der Graph von g nähert sich für $t \to -\infty$ asymptotisch der t-Achse an. Für $t < 1$ verläuft der Graph von g bereits so nah an der t-Achse, sodass der Inhalt der Fläche, die der Graph von g mit der t-Achse im

Intervall $[0; 1]$ begrenzt, nahezu 0 ist.

Deutung im Sachzusammenhang

In der ersten Stunde nach Einlass verlassen nahezu keine Besucher den Park.

3.1 Der Graph der Stammfunktion H von h stellt die Besucherzahl dar.

Der Zeitpunkt, an dem sich die meisten Besucher auf dem Gelände befinden, entspricht also der Stelle, an welcher der Graph von H sein Extremum und somit der Graph von$h$ seine Nullstelle annimmt.

Die Nullstelle kann aus der Abbildung 3 abgelesen werden und ist somit etwa durch $t \approx 6,15$ gegeben.

Etwa 6 Stunden und 9 Minuten nach Öffnung des Parks befinden sich folglich am meisten Besucher auf dem Gelände.

Die maximale Besucheranzahl lässt sich folglich durch den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von h und der x-Achse im Intervall $[0; 6,15]$ geometrisch in der Abbildung 3 darstellen.

3.2 Die in (I) definierte Funktion H gibt die Anzahl der Personen an, die zum Zeitpunkt$t$ im Park sind.

Ergebnis (II) beschreibt die durchschnittliche Anzahl der Personen im Park während des beobachteten Tages.

Im Schritt (III) wird die durchschnittliche Aufenthaltsdauer eines Besuchers im Freizeitpark von etwa 5 Stunden und 3 Minuten berechnet.