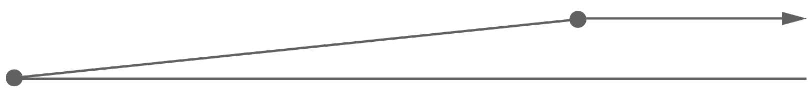
B1 - Analytische Geometrie

Eine Radarstation bewacht die Bewegung eines Flugzeugs. Die Bewegung kann modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden, dessen x-y-Ebene die Horizontale beschreibt; eine Längeneinheit entspricht einem Kilometer in der Realität. Der Standort der Radarstation wird durch den Punkt $R(18 \mid 0 \mid -1)$ beschrieben.
Zu Beginn der Beobachtung um 14.00 Uhr wird die Position des Flugzeugs durch den Punkt $A(0 \mid 0 \mid 0)$ beschrieben. Anschließend bewegt sich das Flugzeug im Modell entlang einer Geraden durch den Punkt $B(8 \mid 4 \mid 1)$, der die Position um 14.02 Uhr darstellt. Ab 14.14 Uhr fliegt das Flugzeug in gleicher Himmelsrichtung horizontal weiter; im Modell bleibt es dabei in der Ebene, die die Punkte A und B enthält und zur x-y-Ebene senkrecht steht. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass das Flugzeug von 14.00 Uhr bis 14.14 Uhr mit konstanter Geschwindigkeit fliegt.

1.1 Berechne für die Zeit bis 14.14 Uhr den Steigungswinkel der Flugbahn gegenüber der Horizontalen. Gib die Koordinaten des Punkts an, der die Position des Flugzeugs um 14.10 Uhr darstellt.

(4 BE)

1.2 Die folgende Abbildung zeigt schematisch die Flugbahn des Flugzeugs sowie die Horizontale. Skizziere die Positionen des Flugzeugs zu den Zeitpunkten 14.02 Uhr und 14.10 Uhr in das Material.



(2 BE)

1.3 Ermittle für die Zeit bis 14.14 Uhr die Geschwindigkeit des Flugzeugs in Kilometer pro Stunde.

(2 BE)

1.4 Gib eine Gleichung der Strecke an, die die Flugbahn von 14.00 Uhr bis 14.14 Uhr beschreibt.

(2 BE)

2. Zu einem bestimmten Zeitpunkt zwischen 14.00 Uhr und 14.14 Uhr ist die Entfernung des Flugzeugs von der Radarstation am geringsten. Die bis dahin seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit soll in Minuten bestimmt werden. Dafür werden zwei verschiedene Lösungsansätze I und II betrachtet:

$$\mathrm{I} \qquad \begin{aligned} d(t) &= \left|\begin{pmatrix} 18-8t \\ -4t \\ -1-t \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{81t^2 - 286t + 325} \\ d'(t) &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \mathrm{II} \qquad \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 18-8t \\ -4t \\ -1-t \end{pmatrix} = 0$$

2.1 Erläutere die beiden Lösungsansätze im Sachzusammenhang.

(4 BE)

2.2 Berechne die geringste Entfernung des Flugzeugs von der Radarstation, indem du einen der beiden Ansätze bis zur Lösung fortsetzt.

(4 BE)

3. Ist das Flugzeug mehr als $70\,\mathrm{km}$ von der Radarstation entfernt, so kann es von dieser nicht mehr erfasst werden. Die Position, an der das Flugzeug nach 14.14 Uhr den Erfassungsbereich der Radarstation verlässt, wird im Modell durch einen Punkt dargestellt.
Entwickle einen rechnerischen Ansatz zur Ermittlung der Koordinaten dieses Punkts.

(4 BE)

4. Das Flugzeug überfliegt eine geneigte Hangfläche, die in der Ebene E mit $E:\ -x+25z=0$ liegt. Durch das Sonnenlicht wirft das Flugzeug um 14.02 Uhr einen Schatten auf die Hangfläche. Diese Parallelprojektion wird durch folgende Matrix beschrieben:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{75} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{25} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.1 Berechne mithilfe der Matrix P den Schattenpunkt des Flugzeugs um 14.02 Uhr.

(3 BE)

4.2 Zeige rechnerisch, dass die Ebene E die Fixpunktmenge der durch die Matrix P beschriebenen Abbildung ist.

(5 BE)