B2 - Analytische Geometrie

Aufgaben PLUS   Tipps PLUS   Lösungen PLUS

1. Ein Bildschirmschoner zeigt einen sich drehenden Würfel, der sich in einem (auf dem Monitor nicht sichtbaren) dreidimensionalen Koordinatensystem bewegt. Für die Animation des Würfels und die Darstellung der Beleuchtungsverhältnisse sind verschiedene Berechnungen nötig.
Einige dieser Berechnungen sollen im Folgenden an einem einfachen Beispiel durchgeführt werden. Zum Anfangszeitpunkt besitzen die Punkte A, B, und D der Grundfläche die folgenden Koordinaten: $A(-4 \mid 1 \mid 1)$, $B(1 \mid 1 \mid 1)$ und $D(-4 \mid 6 \mid 1)$.

1.1 Zeichnen Sie die Punkte A, B und D in ein selbst erstelltes Koordinatensystem ein, wie es in Material 1 dargestellt ist. Geben Sie die Koordinaten der übrigen Eckpunkte des Würfels an und zeichnen Sie das Bild des Würfels.

(4P)

1.2 Im Punkt $L(-40 \mid 23 \mid 26)$ befindet sich eine punktförmige Lichtquelle, durch die ein Schatten des Würfels der xy-Ebene entsteht. Dabei wird unter anderem der Eckpunkt $(-4 \mid 1 \mid 6)$ in die xy-Ebene projiziert. Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes.

(5P)

1.3 Ein Beobachter im Punkt $P(20 \mid -7 \mid 16)$ sieht die Reflexion der punktförmigen Lichtquelle L aus Aufgabe 1.2 im Punkt $R(0 \mid 3 \mid 6)$ auf der Würfeloberseite.
Um die Position des Punktes R auf der Oberseite des Würfels zu bestimmen, benötigt man eine Ebene E_1 durch P und L, die senkrecht zur Oberseite des Würfels steht. Der Punkt R erfüllt dann die beiden folgenden Bedingungen:

1. R liegt auf der Schnittgeraden g der Ebene E_1 mit der Würfeloberseite.
2. Der Einfallswinkel zwischen dem einfallenden Lichtbündel und dem Normalenvektor der Würfeloberseite im Punkt R ist gleich dem Ausfallswinkel zwischen dem reflektierten Lichtbündel und diesem Normalenvektor.

1.3.1 Zeigen Sie, dass R Bedingung I erfüllt.

(7P)

1.3.2 Zeigen Sie, dass R Bedingung II erfüllt.

(6P)

2. Da bei der Berechnung der folgenden Animation des Würfels die entstehenden Koordinaten schwer einzuzeichnen sind, wird das 3-D-Koordinatensystem in ein „deckungsgleiches" 2-D-Koordinatensystem abgebildet (Material 2) und die dann berechneten zweidimensionalen Koordinaten eingezeichnet. Die Abbildungsmatrix T überführt die Koordinaten aus dem dreidimensionalen in den zweidimensionalen Raum.

2.1 Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix T.

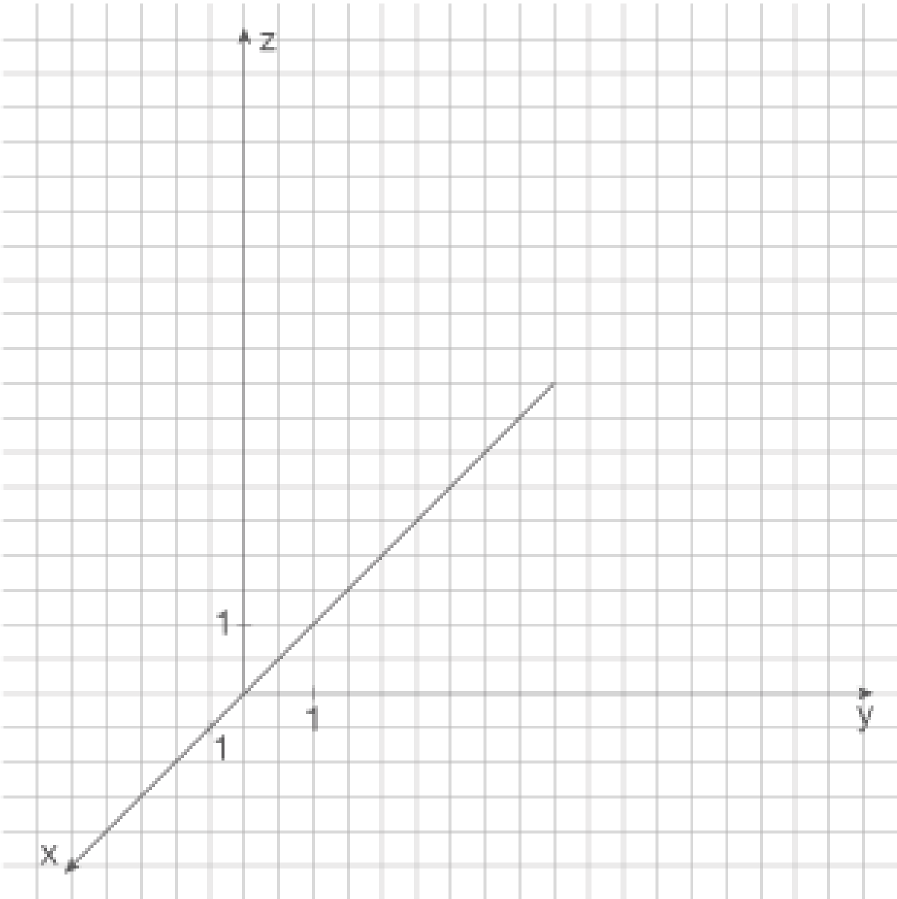
(4P)

2.2 Gegeben sei die Matrix $F = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Erläutern Sie die geometrische Wirkung der Abbildung, die durch die Matrix $M = T \cdot F$ beschrieben wird.

(4P)

Material 1



Material 2

Über das 3-D-Koordinatensystem wird ein 2-D-Koordinatensystem so gelegt, dass die Koordinatenursprünge übereinstimmen und die x-Achse des 2-D-Koordinatensystems sich mit der y-Achse des 3-D-Koordinatensystems deckt. Die y-Achse des 2-D-Koordinatensystems deckt sich mit der z-Achse des 3-D-Koordinatensystems. Aus den dreidimensionalen Einheitsvektoren ergeben sich neue zweidimensionale Vektoren. Beispiel: Der Einheitsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ geht in den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ über.

Punkte können jetzt mit den Koordinaten des 2-D-Koordinatensystems angegeben werden.
Beispiel: Aus dem Punkt $D(-4 \mid 6 \mid 1)$ wird der Punkt $D'(8 \mid 3)$.