1.1 ► Parameter t bestimmen (12BE)

Um den Parameter t zu bestimmen, setze den Punkt $P(1;1;0)$ in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{aligned} t\cdot 1+2\cdot 1+2\cdot 0 &= 3t \\ 2t &= 2 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Somit ist $t=1$ und man erhält die Ebene $E: x+2y+2z=3$.

► Spurpunkte bestimmen und Skizze zeichnen

Berechne den Schnittpunkt mit der x-Achse. Alle Punkte auf der x-Achse haben die Koordinaten $(s;0;0)$. Setze diese Koordinaten in die Ebene E_1 ein:

$$s\cdot 1+2\cdot 0+2\cdot 0=3 \Rightarrow s=3$$

Der Spurpunkt lautet $S_1(3;0;0)$. Die anderen Spurpunkte kannst du analog berechnen:

Schnittpunkt $(0;t;0)$ mit der y-Achse:

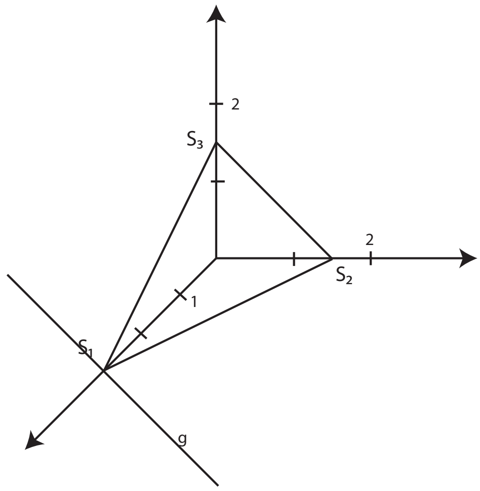
$$1\cdot 0+2\cdot t+2\cdot 0=3 \Rightarrow t=\frac{3}{2}$$

Der Spurpunkt lautet $S_2(0;\frac{3}{2};0)$

Schnittpunkt $(0;0;u)$ mit der z-Achse:

$$1\cdot 0+2\cdot 0+2\cdot u=3 \Rightarrow u=\frac{3}{2}$$

Der Spurpunkt lautet $S_3(0;0;\frac{3}{2})$



1.2 ► Koordinaten der Punkte ermitteln

Um die Koordinaten der Punkte zu ermitteln gibt es mehrere Möglichkeiten

►► Lösungsweg A

Die gesuchten Punkte müssen unabhängig vom Parameter t immer in der Ebene liegen. Dafür bietet sich der Punkt $(3;0;0)$ an, denn dann gilt:

$$t\cdot 3+2\cdot 0+2\cdot 0=3t$$

was eine wahre Aussage ist. Somit liegt dieser Punkt in der Ebene unabhängig von t. Ein weiter Punkt wäre $(3;1;-1)$, denn für ihn gilt:

$$\begin{aligned} t\cdot 3+2\cdot 1+2\cdot(-1) &= 3t \\ 3t+2-2 &= 3t \end{aligned}$$

Auch dies ist eine wahre Aussage, welche übrigens für alle Punkte $(3;k;-k)$ bzw. $(3;-k;k)$ gilt.

►► Lösungsweg B

Um einen Punkt $A(x;y;z)$ zu bestimmen, welcher in allen Ebenen liegt, wähle zuerst zwei unterschiedliche Ebenen:

I: $tx + 2y + 2z = 3t$
II: $sx + 2y + 2z = 3s$

Subtrahiere I−II und du erhältst:
$(t-s)x = 3 \cdot (t-s)$
Da $s \neq t$ ist, folgt, dass $x = 3$ sein muss. Setzt man dies nun in I ein, so erhält man:
$t \cdot 3 + 2y + 2z = 3t$
$y = -z$

Wählt man nun $z = -k$, so erhält man $y = k$ und den allgemeinen Punkt $(3; k; -k)$.

▶ Trägergerade bestimmen

Um die Trägergerade zu ermitteln gibt es mehrere Möglichkeiten.

▶▶ Lösungsweg A

Man kann den Punkt $(3; 0; 0)$ als Stützvektor (Aufpunkt) benutzen, und erhält mit dem Punkt $(3; 1; -1)$ den Richtungsvektor:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 1-0 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Trägergerade hat somit die Form $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

▶▶ Lösungsweg B

Man kann auch anhand der allgemeinen Form des Punktes $(3; k; -k)$ die Geradengleichung ablesen:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Gerade g ist in Teilaufgabe 1.1 eingezeichnet.

▶ Lage der Trägergerade und Abstand zu den Koordinatenebenen

Betrachtet man den Richtungsvektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, so fällt auf, dass dessen x-Koordinate immer null ist. Das bedeutet, dass der Vektor, und damit auch die Gerade parallel zur y-z-Ebene liegt. Die y- und z-Koordinaten lassen darauf schließen, dass die Gerade eine Winkelhalbierende sein muss, denn mit jedem Schritt in y-Richtung geht man einen Schritt in z-Richtung zurück.

Der Abstand der Ebene zur y-z-Ebene ist 3, denn die Gerade geht durch den Punkt $(3; 0; 0)$ und ist parallel zur y-z-Ebene. Daraus lässt sich auch schließen, dass der Abstand zu den beiden anderen Koordinatenebenen null sein muss.

2.1 **▶ Beziehung zwischen s und t bestimmen** (7BE)

Es sind die folgenden Ebenen gegeben:

I: $tx + 2y + 2z = 3t$

II: $sx + 2y + 2z = 3s$

Sollen die beiden Ebenen senkrecht aufeinander stehen, so müssen ihre Normalenvektoren senkrecht aufeinander stehen. Die Normalenvektoren sind:

$\overrightarrow{n_t} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_s} = \begin{pmatrix} s \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$n_t \perp n_s \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} s \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} s \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = ts + 4 + 4 = 0$

$\Rightarrow s = -\frac{8}{t}$ bzw. $t = -\frac{8}{s}$

Für $s,t = 0$ ist die orthogonale Ebene nicht Teil der Ebenenschar.

2.2 ▶ **Gleichung der Orthogonalebene angeben**

Für $t = 0$ liegt die orthogonale Ebene nicht in der Ebenenschar. Die Ebenengleichung lautet: $E_0 : 2x + 2y = 0$

Um die orthogonale Ebene zu berechnen, muss man wie in Teilaufgabe 2.1 den Vektor $\overrightarrow{n_0}$ finden, der senkrecht auf dem Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene steht.

I′: $\overrightarrow{n_0} \perp \overrightarrow{n} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 2n_2 + 2n_3 = 0$

Außerdem soll in dieser Ebene die Trägergerade $g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ enthalten sein. Es gilt nun, dass der Richtungsvektor der Trägergeraden senkrecht zu der gesuchten Ebene steht. Daraus ergibt sich die Gleichung:

II′: $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n_0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow n_2 - n_3 = 0$

Aus I′ folgt: $n_2 = -n_3$

Aus II′ folgt: $n_2 = n_3$

Dies ist nur für $n_2 = n_3 = 0$ erfüllt. Allerdings lässt sich n_1 beliebig wählen. Eine Ebenengleichung wäre somit zum Beispiel:

$F : x = d$

Der Parameter d lässt sich berechnen, in dem man den Punkt $(3; k; -k)$ einsetzt, welcher in der Ebene liegen muss. Daraus ergibt sich $d = 3$ und die Ebenengleichung $F : x = 3$.

3.1 ▶ **Nachweisen der Spiegelung** (11BE)

Um die Spiegelung nachzuweisen gibt es zwei Möglichkeiten:

►► Lösungsweg A

Stellt die Matrix S eine Spiegelung an der Ebene E_0 dar, so müssen zwei Eigenschaften erfüllt sein:

1. Führt man die Spiegelung zweimal aus, so muss sie wieder zur Ursprungssituation zurückführen. Es muss also gelten $S^2 = E$, wobei E die Einheitsmatrix ist.

2. Da S die Spiegelung an E_0 beschreibt, müssen alle Punkte der Ebene E_0 Fixpunkte der Abbildung sein.

Hierbei ist wichtig, dass diese Eigenschaften auch für die Einheitsmatrix E gelten, da aber $S \neq E$ ist dies hier aber nicht der Fall.

Beweis von 1.:

$$S^2 = S \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Beweis von 2.:

Die Punkte der Ebene E_0 sind von der Form $P(x; y; -y)$. Führt man nun an diesen die Spiegelung aus, so ergibt sich:

$$S \cdot \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix}$$

Somit wurde gezeigt, dass die Spiegelung S an der Ebene E_0 spiegelt.

► Spiegelpunkt berechnen

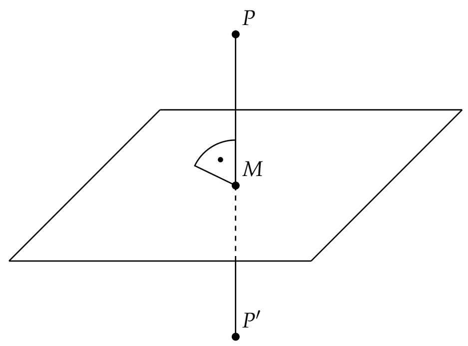
Um den Spiegelpunkt zu berechnen, multipliziere die Spiegelung S mit dem Punkt P

$$S \cdot \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich der Spiegelpunkt $P'(3; 4; -7)$.

►► Lösungsweg B

Um nachzuweisen, dass S die Spiegelung beschreibt, kann man auch ein konkretes Punktepaar benutzen, zum Beispiel den Punkt P und den in Lösungsweg A berechneten Spiegelpunkt P'. Nun muss man zeigen, dass der Vektor $\overrightarrow{PP'}$ senkrecht zur Ebene E_0 steht und dass der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PP'}$ in der Ebene E_0 liegt.



Zeige, dass $\overrightarrow{PP'}$ und der Normalenvektor $\overrightarrow{n_{E_0}}$ linear abhängig sind, denn dann steht $\overrightarrow{PP'}$ senkrecht auf der Ebene E_0.

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{n_{E_0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, was zeigt, dass die beiden Vektoren linear abhängig sind.

Zeige nun, dass der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PP'}$in der Ebene E_0 liegt:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5,5 \\ -5,5 \end{pmatrix}$$

Dieser Punkt liegt in der Ebene E_0, denn es gilt:

$5,5 + (-5,5) = 0$

3.2 ▶ **Bestimmen der Spiegelebene**

Um die Spiegelebene zu bestimmen gibt es zwei verschiedene Lösungswege:

▶▶ **Lösungsweg A**

Bestimme die Fixpunktmenge der Spiegelung:

$$T \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

Damit gilt für die Fixpunkte $x = x, y = z$ und $z = y$. Das bedeutet x ist frei wählbar, und x und y müssen gleich sein. Die Punkte der Ebene haben demnach die Form $(x; y; y)$. Daraus ergibt sich die Ebenengleichung $G : y - z = 0$.

▶▶ **Lösungsweg B**

Wie in Teilaufgabe 3.1 kann man hier auch ein bestimmtes Punktepaar benutzen. Wähle beispielsweise den Punkt $Q(2; 3; 4)$ so ergibt sich der Spiegelpunkt $Q'(2; 4; 3)$, denn es gilt:

$$T \cdot \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Man muss darauf achten, keinen Punkt zu wählen, der in der Spiegelebene liegt, aber das Risiko dafür ist sehr gering.

Berechnet man nun den Mittelpunkt der Strecke $\overline{QQ'}$, so erhält man:

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OQ'}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\overrightarrow{QQ'}$ ist der Normalenvektor der gesuchten Ebene, den Punkt M braucht man, um die Ebene genau festzulegen.

$$\overrightarrow{QQ'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

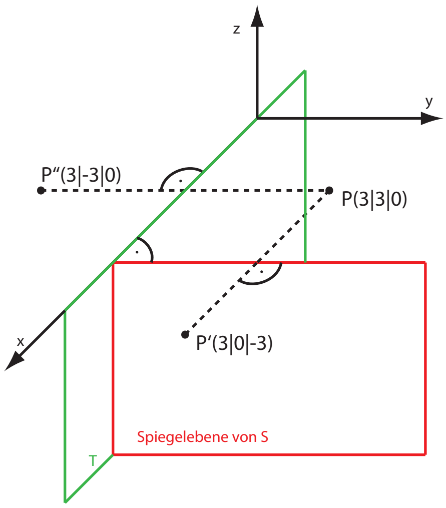
Die Ebenengleichung lautet somit $G : y - z = d$. Setzt man nun M ein, so erhält man $d = 3,5 - 3,5 = 0$. Die Ebene lautet somit $G : y - z = 0$.

3.3 ► **Multiplikation der Matrizen**

$$S \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Obwohl die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ ist, gilt hier $S \cdot T = T \cdot S$. Die Abbildung $S \cdot T$ bildet einen Punkt $(x; y; z)$ auf einen Punkt $(x; -y, -z)$ ab. Das bedeutet, diese Punkte werden an der x-Achse gespiegelt, bzw. um $180°$ um die x-Achse rotiert. Bei S wird die y-Koordinate zur negativen z-Koordinate und die z-Koordinate zur negativen y-Koordinate. Das beschreibt eine Drehung um $90°$ um den Ursprung. Führt man danach noch T aus, so werden y- und z-Koordinate wieder vertauscht, was eine weitere Drehung um $90°$ beschreibt.



An dem Beispielbild kann man sich klar machen, dass es egal ist, ob zuerst S und dann T ausgeführt wird, oder anders herum. S bildet den Punkt P auf den Punkt P' ab, und T bildet den Punkt P' auf den Punkt P'' ab. Die Spiegelung von P zu P'' an der x-Achse ist sehr gut zu erkennen.