C2 - Stochastik

1.1 Diese Befragung kann als Bernoulli-Kette aufgefasst werden, da bei jeder neuen Befragung immer nur zwei Möglichkeiten existieren, denn entweder ist die befragte Person Linkshänder oder nicht. Dabei kann davon ausgegangen werden, dass sich die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Möglichkeiten nicht ändern, da verhältnismäßig die Anzahl der Befragten ziemlich gering zur Gesamtbevölkerung ist und somit die beiden Ausgänge der einzelnen Versuche unabhängig voneinander sind.

1.2 Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: "spätestens bei der dritten befragten Person zum ersten Mal auf einen Linkshänder zu treffen":

$$P(E) = 0,15 + 0,85 \cdot 0,15 + 0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,15 = 0,3859$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E beträgt etwa $38,6\,\%$.

1.3 **Ereignis A:**

X ist binomialverteilt mit $B_{70;0,15}$ und beschreibt die Anzahl der Linkshänder unter den befragten Personen

$$\begin{aligned} P(A) = P(X = 10) &= \binom{70}{10} \cdot 0,15^{10} \cdot 0,85^{60} \\ &\approx 0,1332 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 70 befragten Personen genau 10 Linkshänder befinden, beträgt etwa $13,32\,\%$.

Ereignis B:

Y ist binomialverteilt mit $B_{100;0,85}$ und beschreibt die Anzahl der Rechtshänder unter den befragten Personen

$$E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0,85 = 85$$

$$\begin{aligned} P(B) = P(Y \geq 85) &= 1 - P(Y \leq 84) \\ &= 1 - F_{100;0,85}(84) \\ &\approx 1 - 0,4317 \\ &\approx 0,5683 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 100 befragten Personen mindestens so viele Rechtshänder sind, wie zu erwarten ist, beträgt etwa $56,83\,\%$.

Ereignis C:

Damit sich unter 50 befragten Personen genau zwei Linkshänder befinden, die direkt hintereinander befragt werden, existieren 49 verschiedene Anordnungsmöglichkeiten:

$$P(C) = 49 \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^{48} \approx 0,00045$$

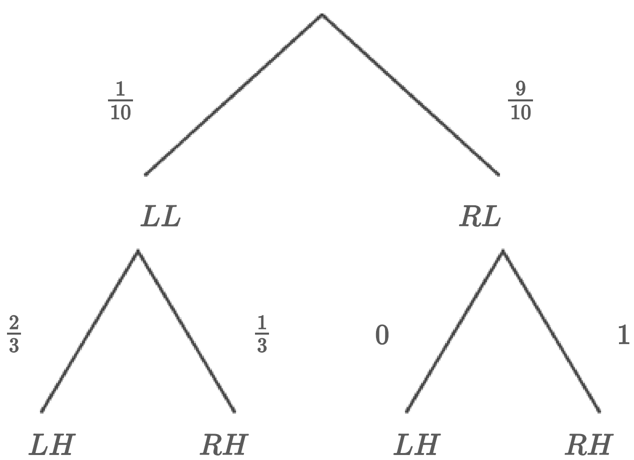
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C beträgt etwa $0,045\,\%$.

1.4
$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &\geq 0,95 && \\ 1 - P(X=0) &\geq 0,95 && \mid -1 \\ -P(X=0) &\geq -0,05 && \mid \cdot (-1) \\ P(X=0) &\leq 0,05 && \\ 0,85^n &\leq 0,05 && \mid \log_{0,85} \\ n &\geq \log_{0,85}(0,05) && \\ n &\approx 18,43 && \end{aligned}$$

Man muss mindestens 19 Personen befragen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ auf mindestens einen Linkshänder zu treffen.

2.1 RL: Rechtslutscher
LL: Linkslutscher
RH: Rechtshänder
LH: Linkshänder

Baumdiagramm:



Vierfeldertafel:

	LH	RH	
LL	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$

RL	0	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$
	$\frac{2}{30}$	$\frac{28}{30}$	1

2.2 $$P_{RH}(LL) = \frac{P(LL \cap RH)}{RH} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{28}{30}} = \frac{1}{28} \approx 0,0357$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kind im Alter von 10 bis 12 Jahren Rechtshänder ist, aber im Mutterleib am linken Daumen gelutscht hat, beträgt etwa $3,57\,\%$.

3.1 $$\begin{array}{rcl} \text{Nullhypothese} & : & H_0 : p = 0,15 \\ \text{Alternative} & : & H_1 : p > 0,15 \end{array}$$

Es handelt sich um einen rechtsseitigen Hypothesentest.
X : Anzahl der linkshänder unter den befragten Personen, $n = 300$

$$\begin{array}{rcll} P_{H_0}(X \geq k) & \leq & 0,025 & \\ 1 - P_{H_0}(X \leq k-1) & \leq & 0,025 & \quad \mid +1 \mid : (-1) \\ P_{H_0}(X \leq k-1) & \geq & 0,975 & \\ F_{300;0,15}(k-1) & \geq & 0,975 & \\ F_{300;0,15}(56) & \approx & 0,9655 & \\ F_{300;0,15}(57) & \approx & 0,9756 & \end{array}$$

Somit gilt: $k - 1 = 57$, also ist $k = 58$.
Der Ablehnungsbereich A ist dadurch $A = \{ 58, \ldots, 300\}$

Befinden sich unter den 300 befragten Personen mindestens 58 Linkshänder, so wird die Nullhypothese verworfen und die Forscher können mit einem Signifikanzniveau von $2,5\,\%$ davon ausgehen, dass der Anteil an Linkshänder in der Bevölkerung höher als $15\,\%$ ist, ansonsten nicht.

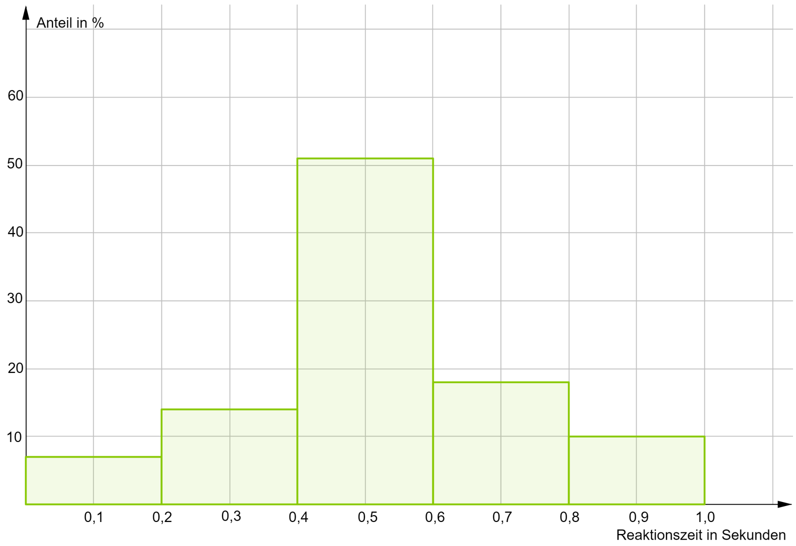
3.2 Ein Fehler 2. Art liegt vor, wenn die Nullhypothese falsch ist, jedoch nicht verworfen wird. In diesem Sachzusammenhalt bedeutet dies, dass die Forscher aus ihren Testergebnissen schließen, dass der Anteil an Linkshänder in der Bevölkerung weiterhin $15\,\%$ beträgt, obwohl er in Wirklichkeit größer ist.

X : Anzahl der Linkshänder unter den befragten Personen, $n = 300$, $p = 0,18$

$$\begin{array}{rcl} \beta & = & P_{p=0,18}(X \leq 57) \\ & = & F_{300;0,18}(57) \\ & \approx & 0,705 \end{array}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa $70,5\,\%$.

4.1



Erwartungswert der gemessenen Reaktionszeiten:
$\mu = 0,1 \cdot 0,07 + 0,3 \cdot 0,14 + 0,5 \cdot 0,51 + 0,7 \cdot 0,18 + 0,9 \cdot 0,1 = 0,52$

Varianz der gemessenen Reaktionszeiten:
$V(x) = (0,1 - 0,52)^2 \cdot 0,07 + (0,3 - 0,52)^2 \cdot 0,14 \quad + (0,5 - 0,52)^2 \cdot 0,51 + (0,7 - 0,52)^2 \cdot 0,18$
$+ (0,9 - 0,52)^2 \cdot 0,1 = 0,0396$

Standardabweichung der gemessenen Reaktionszeiten:
$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0,0396} \approx 0,2$

4.2 Die Zufallsvariable Z kann näherungsweise als normalverteilt angenommen werden, da die Reaktionszeit jedes teilnehmenden Linkshänder jeden Wert in dem Zeitintervall $[0;1]$ annehmen kann. Dabei nimmt Z im Intervall [0,4;0,6] die größten Wahrscheinlichkeitswerte an, bei steigender Entfernung der Werte der Zufallsvariable von diesem Intervall sinken die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten annähernd symmetrisch, sodass annähernd die charakteristische Glockenkurve entsteht.

4.3 Z ist normalverteilt mit $\mu = 0,52$ und $\sigma = 0,2$

Ereignis D:

$P(D) = P(Z \leq 0,45) \approx 0,36$

Ereignis E:

halbe Standardabweichung: $0,1$

$P(E) = P(0,52 - 0,1 \leq Z \leq 0,52 + 0,1) = P(0,42 \leq Z \leq 0,62) \approx 0,38$