B2 - Analytische Geometrie

Aufgaben PLUS   Tipps PLUS   Lösungen PLUS

1.

1.1 ▶ **Koordinaten der Punkte berechnen und Würfel zeichnen**

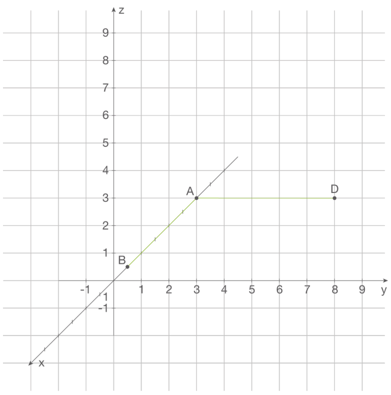
Bei dieser Aufgabe sollst du zunächst die Punkte A, B und C in ein Koordinatensystem einzeichnen. Dadurch erfährst du, in welche Richtung sich der Würfel ausbildet.

- $A(-4\,|\,1\,|\,1)$
- $B(1\,|\,1\,|\,1)$
- $C(-4\,|\,6\,|\,1)$

Anschließend sollst du, anhand der gegebenen Punkte, die Koordinaten der übrigen Eckpunkte des Würfels angeben, um diesen dann zeichnen zu können.
Zeichne im **1. Schritt** die Punkte A, B und C in das Koordinatensystem ein.
Die Seitenlängen in einem Würfel sind alle gleichlang. Damit kannst du im **2. Schritt** die Koordinaten der Eckpunkte bestimmen, um im **3. Schritt** den Würfel zeichnen zu können.

- E, F, G und H bilden die obere Würfelfläche.
- E liegt „über“, A, F „über“, B, G „über“, C und H „über“, D

▶ **1. Schritt: Punkte einzeichnen**



Du kannst, erkennen, dass die Strecke $\overline{BA}$ eine der Seiten der Würfelgrundfläche darstellt, genauso wie du Strecke $\overline{AD}$.
Daran, dass die Punkte A und D in den x- und z-Koordinaten übereinstimmen und in der y-Koordinate um einen Summanden von 5 voneinander abweichen, kannst du erkennen, dass die Seitenlänge des Würfels 5 LE beträgt.
Da die Seiten eines Würfels immer gleich lang sind kannst du nun die Koordinaten der anderen Punkte berechnen.
C bildet den 4. Punkt der Grundfläche. Er hat die gleichen x- und z-Koordinaten wie B. Nur seine y-Koordinate unterscheidet sich von B um 5 LE.
Bestimme:

- E aus A.
- F aus B.
- G aus C.
- H aus D.

▶ **2. Schritt: Koordinaten der Eckpunkte bestimmen**

Für C folgt: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C(1\,|\,6\,|\,1)$

Die Punkte, die direkt über den Eckpunkten der Grundfläche liegen unterscheiden sich nur in ihrer z-Koordinate.
Somit gilt:

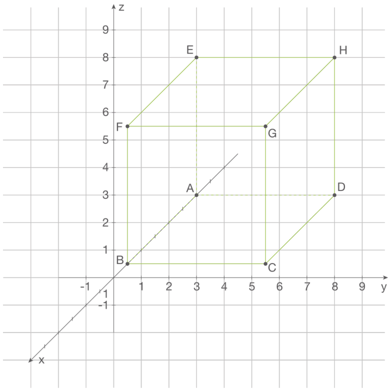
$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E(-4 \mid 1 \mid 6)$$

Nach gleichem Vorgehen folgt für die Punkte F, G und H:

- $F(1 \mid 1 \mid 6)$
- $G(1 \mid 6 \mid 6)$
- $H(-4 \mid 6 \mid 6)$

▶ 3. Schritt: Würfel zeichnen

Zeichne nun den Würfel in das Koordinatensystem ein:



1.2 ▶ **Koordinaten des Bildpunktes berechnen**

Hier hast du die Koordinaten einer punktförmigen Lichtquelle $L(-40 \mid 23 \mid 26)$ gegeben, von der aus ein Bildpunkt, durch $(-4 \mid 1 \mid 6)$, auf die xy-Ebene projiziert wird. Dabei stellt der Lichtstrahl eine Gerade durch L sowie den Eckpunkt $E(-4 \mid 1 \mid 6)$ (siehe Aufgabe 1.1) dar.
Der Bildpunkt E' ist der Schnittpunkt der Geraden mit der xy-Ebene.
Die Gleichung der xy-Ebene lautet $z = 0$.
Stelle zunächst im **1. Schritt** eine Geradengleichung auf.
Wähle den Ortsvektor eines der beiden Punkte als Stützvektor der Geraden und den Verbindungsvektor der Punkte als Richtungsvektor.
Berechne anschließend im **2. Schritt** die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden mit der xy-Ebene, um die Koordinaten des Bildpunkts E' zu erhalten.

▶ 1. Schritt: Geradengleichung aufstellen

Die Gerade verläuft durch die Punkte E und L.

$$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OE} + r \cdot \overrightarrow{LE} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ -22 \\ -20 \end{pmatrix}$$

▶ 2. Schritt: Schnittpunkt der Geraden mit $z = 0$

Aus der Geradengleichung kannst du die z-Koordinate der Geraden ablesen: $z = 6 - 20r$
Setze diese nun in die Ebenengleichung der xy-Ebene ein, um den Parameter r zu bestimmen:

$$\begin{aligned} z &= 0 && \text{Einsetzen von } z = 6 - 20r \\ 6 - 20r &= 0 \\ r &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

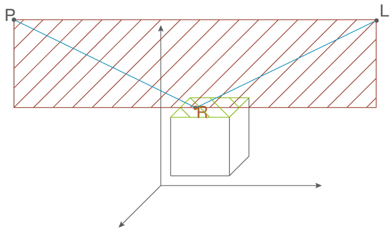
Wenn du r nun in die Geradengleichung einsetzt, erhältst du den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene, d.h. den Bildpunkt E'.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE'} &= \begin{pmatrix}-4\\1\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}36\\-22\\-20\end{pmatrix} \quad \text{Einsetzen von } r = \frac{3}{10}\\ &= \begin{pmatrix}6,8\\-5,6\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Bildpunkt hat somit die Koordinaten $E'(6,8 \mid -5,6 \mid 0)$

1.3.1 ▶ **Bedingung I beweisen**

Hier hast du zwei Punkte $P(20 \mid -7 \mid 16)$ und $R(0 \mid 3 \mid 6)$ gegeben. P stellt die Position eines Betrachters dar, der die Reflexion R von L auf der Würfeloberseite erkennt.
Die Ebene E_1 durch P und L steht senkrecht zur Würfeloberseite.
Schematisch kannst du dir das wie folgt vorstellen:



Du sollst nun beweisen, dass R auf der Schnittgeraden zwischen der Ebene E_1 und der Würfeloberseite liegt.
Stelle zunächst im **1. Schritt** die Ebenengleichungen E_1 und der Ebene E_2, in der die Würfeloberseite E_2 liegt, auf.
Für E_1 kannst du wie folgt vorgehen:

- Wähle einen der Punkte P und L als Basisvektor der Ebenen und den Verbindungsvektor $\overrightarrow{PL}$ bzw. $\overrightarrow{LP}$ als einen der Richtungsvektoren.
- Den zweiten Richtungsvektor kannst du erhalten, indem du dir klar machst, was die Information der **orthogonalen** Ebene E_1 auf der Würfeloberseiten bedeutet: Da der Würfel eben im Raum steht, liegt auch die Würfeloberseite eben im Raum. D.h. ihr Normalenvektor zeigt in Richtung der z-Achse. Und weil E_1 nun **senkrecht** zu der Würfeloberseite liegt, schließt sie somit den Normalenvektor von der Würfeloberseiten als Richtungsvektor ein.
- Die Ebene E_2 der Würfeloberseiten liegt um $z = 6$ verschoben parallel zur xy-Ebene.

Im **2. Schritt** kannst du nun die Gleichung der Schnittgeraden bestimmen, indem du die z-Koordinaten von E_1 in E_2 einsetzt. Stelle nach einem Parameter um und setze die Gleichung in E_1 ein, um die Schnittgerade zu erhalten.
In einer **Punktprobe** im **3. Schritt** kannst du nun prüfen, ob R auf der Schnittgeraden liegt.

▶ **1. Schritt: Ebenengleichungen aufstellen**

Wähle $\overrightarrow{OP}$ als Basisvektor von E_1.
Ein Richtungsvektor ist der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PL}$:

$$\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}-40\\23\\26\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}20\\-7\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-60\\30\\10\end{pmatrix}$$

Der zweite Richtungsvektor ist ein Normalenvektor von E_2. Da E_2 parallel zur xy-Ebene liegt, zeigt der Normalenvektor in Richtung der z-Achse.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Daraus folgt für die Ebene

$$E_1: \quad E_1: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PL} + s \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}20\\-7\\16\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-60\\30\\10\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

▶ 2. Schritt: Gleichung der Schnittgeraden bestimmen

Aus der Ebenengleichung von E_1 kannst du ihre z-Koordinaten ablesen:

$z = 16 + r \cdot 10 + s \cdot 1$

Setze dies nun in E_2 ein:

$$\begin{aligned} z &= 6 && \text{Einsetzen von } z = 16 + r\cdot 10 + s \cdot 1 \\ 16 + r \cdot 10 + s \cdot 1 &= 6 \\ 10r &= -10 - s \\ r &= -1 - \frac{1}{10}s \end{aligned}$$

Dieses setzt du nun wiederum in E_1 ein, um die Gleichung der Schnittgeraden zu erhalten:

$$\begin{aligned} g: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 20 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} + \left(-1 - \frac{1}{10}s\right) \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ -30 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 80 \\ -37 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

▶ 3. Schritt: Prüfen, ob R in g liegt

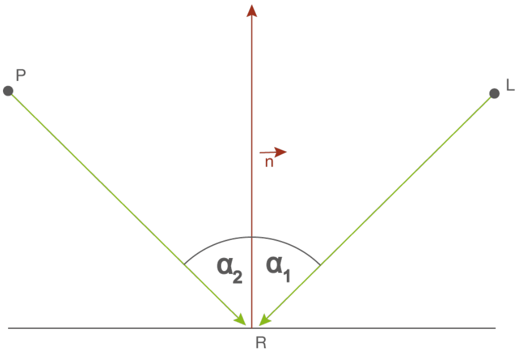
Der Beweis erfolgt durch eine **Punktprobe**.
Setze g mit R gleich. Falls ein Parameter bestimmt werden kann, der für alle Koordinaten die Gleichung erfüllt, liegt R auf g:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \begin{pmatrix} 80 \\ -37 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 80 \\ -37 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} && \mid - \begin{pmatrix} 80 \\ -37 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -80 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} &= s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -80 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} &= -\frac{40}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es existiert somit ein s, das die Gleichung erfüllt. R liegt auf g.

1.3.2 ▶ **Bedingung II beweisen**

Bei dieser Aufgabe sollst du prüfen, ob der Winkel zwischen dem Einfallsvektor $\overrightarrow{LR}$ und $\vec{n}$ identisch mit dem Ausfallsvektor $\overrightarrow{PR}$ und $\vec{n}$ ist.
Der Lichtstrahl wird exakt in die Richtung des Punktes P reflektiert. Falls dem nicht so wäre, würde die Reflexion nicht beobachtet werden können.



Zum Lösen dieser Aufgabe kannst du folgende Informationen dem Aufgabentext bzw. den vorigen Aufgaben entnehmen:

- $L(-40 \mid 23 \mid 26)$
- $P(20 \mid -7 \mid 16)$
- $R(0 \mid 3 \mid 6)$
- $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechne im **1. Schritt** die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{LR}$.
Anschließend kannst du mit der Formel zur Winkelberechnung zwischen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Winkel berechnen und beweisen, dass diese identisch sind.
Die Formel dazu lautet:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$$

▶ 1. Schritt: Verbindungsvektoren berechnen

$$\overrightarrow{LR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40 \\ 23 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Nach gleichem Vorgehen ergibt sich für $\overrightarrow{PR}$:

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

▶ 2. Schritt: Winkel zwischen den Vektoren bestimmen

Nun soll bewiesen werden, dass der Winkel zwischen $\overrightarrow{LR}$ und $\vec{n}$ identisch ist mit dem Winkel zwischen $\overrightarrow{PR}$ und $\vec{n}$.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(s. Aufgabe 1.3.1)}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &\overset{!}{=} \alpha_2 \\
\cos(\alpha_1) &\overset{!}{=} \cos(\alpha_2) \\
\frac{\overrightarrow{LR}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{LR}|\cdot|\vec{n}|} &\overset{!}{=} \frac{\overrightarrow{PR}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{PR}|\cdot|\vec{n}|} \\
\frac{\begin{pmatrix}40\\-20\\-20\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}40\\-20\\-20\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} &\overset{!}{=} \frac{\begin{pmatrix}-20\\10\\-10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-20\\10\\-10\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} \\
\frac{-20}{\sqrt{2400}} &\overset{!}{=} \frac{-10}{\sqrt{600}} \\
\frac{-20}{10\sqrt{24}} &\overset{!}{=} \frac{-10}{10\sqrt{6}} \\
\frac{-2}{2\sqrt{6}} &\overset{!}{=} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\
-\frac{1}{\sqrt{6}} &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Damit ist bewiesen, dass der Winkel zwischen $\overrightarrow{LR}$ und $\vec{n}$ identisch mit dem Winkel zwischen $\overrightarrow{PR}$ und $\vec{n}$ ist.

2.

2.1 ▶ **Abbildungsmatrix T bestimmen**

Eine Abbildungsmatrix hilft dabei, dreidimensionale Koordinaten in zweidimensionale zu überführen.

Allgemein gilt:

Die y—Achse im dreidimensionalen Koordinatensystem stellt die x-Achse im zweidimensionalen dar. D.h. der Vektor $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ wird zu $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Weiterhin stellt die z-Achse im dreidimensionalen die y-Achse im zweidimensionalen dar. D.h. $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Du hast einen Vektor $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ mit drei Koordinaten gegeben und sollst diesen in einen Vektor $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ mit zwei Koordinaten überführen.

D.h. die Abbildungsmatrix aus der du durch **Matrix-Vektor-Multiplikation** den zweidimensionalen Vektor erhalten sollst muss 3 Spalten und 2 Zeilen aufweisen:

$$\begin{pmatrix}c & d & e\\f & g & h\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Das kommt aus der **Matrix-Vektor-Multiplikation**, die nach folgendem Schema erfolgt:

$$\boxed{c\cdot x + d\cdot y + e\cdot z = a \quad \text{bzw.} \quad f\cdot x + g\cdot y + h\cdot z = b}$$

Nun kannst du drei Informationen dem Aufgabentext bzw. Material 2 entnehmen:

Information 1:

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ wird zu $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} c & d & e \\ f & g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\begin{array}{rlcl} c\cdot 0+d\cdot 1+e\cdot 0= & 1 & \Rightarrow & d=1 \\ f\cdot 0+g\cdot 1+h\cdot 0= & 0 & \Rightarrow & g=0 \end{array}$$

Information 2:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} c & 1 & e \\ f & 0 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rlcl} c\cdot 0+1\cdot 0+e\cdot 1= & 0 & \Rightarrow & e=0 \\ f\cdot 0+0\cdot 0+h\cdot 1= & 1 & \Rightarrow & h=1 \end{array}$$

Information 3:

$\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird zu $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ f & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rlcl} c\cdot(-4)+1\cdot 6+0\cdot 1= & 8 & \Rightarrow & c=-\frac{1}{2} \\ f\cdot(-4)+0\cdot 6+1\cdot 1= & 3 & \Rightarrow & f=-\frac{1}{2} \end{array}$$

Insgesamt folgt somit für die Abbildungsmatrix T:

$$T=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 ▶ **Geometrische Wirkung erläutern**

Bei dieser Aufgabe hast du eine Matrix F gegeben, die durch Kombination (Multiplikation) mit der Abbildungsmatrix T, eine geometrische Wirkung auf den durch T abgebildeten Körper ausübt.
Es gibt mehrere Arten von geometrische Wirkungen, die durch Matrizen ausgelöst werden können: z.B.:

Drehung, Scherung, Skalierung sowie Verschiebung

Wenn du nun eine bestimmte Matrix F mit einer Abbildungsmatrix T verknüpfst kannst du prüfen, wie sich die neuen Einträge von T', bei dieser Aufgabe M genannt, verändert haben, um ihre geometrische Wirkung herauszufinden.
Matrix F enthält trigonometrische Ausdrücke, sodass diese, bei einer Verknüpfung mit T, die Koordinaten von T um einen Winkel α um die z-Achse rotieren lassen und dementsprechend verändern.
Die Rotationsachse z kannst du daran erkennen, dass die z-Einheit unverändert bleibt.

$$\begin{aligned} M= & \; T\cdot F \\ = & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos\alpha+\sin\alpha & \frac{1}{2}\sin\alpha+\cos\alpha & 0 \\ -\frac{1}{2}\cos\alpha & \frac{1}{2}\sin\alpha & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hier werden, durch die Matrix M, zwei geometrische Abbildungen, die nacheinander ablaufen, in einem Schritt durchgeführt.

- Die Matrix T projiziert vom Dreidimensionalen ins Zweidimensionale
- F lässt die Abbildung rotieren

Die Abbildung, die durch T dargestellt wird, wird zunächst um den Winkel α um die z-Achse rotiert und anschließend vom Dreidimensionalen ins Zweidimensionale projiziert.