### 1.1 ► Koordinatengleichung der Hangebene bestimmen (6P)

Gesucht ist die Koordinatengleichung der Ebene $H$, die durch die Parametergleichung

$$H:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Du kannst daraus eine Koordinatengleichung ermitteln, indem du zunächst den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene berechnest. Dieser zeigt senkrecht auf die Ebene.

Den Normalenvektor $\vec{n}$ erhältst du, indem du das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren aus der Parametergleichung bildest:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ -1-(-3) \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nun gibt es zwei mögliche Verfahren, mit denen du zur Lösung kommst:

**►► Lösungsweg A: Ebenengleichung in Normalenform**

Das Skalarprodukt von $\vec{n}$ mit jedem Vektor, der in der Ebene liegt, ist Null. Einen solchen beliebigen Vektor erhältst du, wenn du einen Ortsvektor $\vec{x}$ von dem Ortsvektor eines Punktes abziehst, der in der Ebene liegt, zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\vec{n} \cdot \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Ausmultipliziert ergibt sich aus dieser Ebenengleichung in Normalenform eine Ebenengleichung in Koordinatenform der Ebene $H$.

Setze $\vec{n}$ ein und vereinfache:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) &= 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) &= 0 \\ -2+2-8+x+y+2z &= 0 \\ x+y+2z &= 8 \end{aligned}$$

Eine Ebenengleichung in Koordinatenform der Ebene $H$ lautet damit: $H:\ x+y+2z = 8$.

**▶▶ Lösungsweg B: Skalarprodukt**

In der Koordinatengleichung bilden die Koeffizienten vor $x$, $y$ und $z$ die Koordinaten des Normalenvektors. Allgemein ergibt die Formel für die Koordinatengleichung also ein Skalarprodukt der Form

$$\vec{n} \circ \vec{x} = k,$$

wobei $k$ eine reelle Konstante und $\vec{x}$ ein beliebiger Ortsvektor ist. Setze nun $\vec{n}$ ein und vereinfache:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= k\\ x+y+2z &= k\end{aligned}$$

Um die Konstante $k$ zu bestimmen, kannst die Koordinaten eines Punktes einsetzen, der in der Ebene liegt, etwa den Aufpunkt der Ebene $H$ in der Parametergleichung:

$$\begin{aligned} x+y+2z &= k\\ 2+(-2)+2\cdot(4) &= k\\ k &= 8\end{aligned}$$

Eine Ebenengleichung in Koordinatenform der Ebene $H$ lautet damit: $H:\ x+y+2z=8$.

**▶ Neigungswinkel bestimmen**

Um nun den Neigungswinkel des Hangs zu bestimmen, kannst du den Winkel bestimmen, den die $x$-$y$-Ebene mit $H$ einschließt. Dieser Winkel ist äquivalent zu dem Winkel $\varphi$, den die Normalenvektoren $\vec{n}$ und $\vec{m}$ der beiden Ebenen einschließen. Für diesen gilt:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}\circ\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}$$

Den Normalenvektor von $H$ hast du bereits bestimmt. Der Normalenvektor der $x$-$y$-Ebene zeigt senkrecht darauf, also genau in $z$-Richtung. Der zugehörige Normalenvektor $\vec{m}$ ist damit:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Für den Winkel $\varphi$ folgt daraus:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi = 35{,}26^\circ$$

Der Neigungswinkel des Hangs beträgt also $35{,}26^\circ$.

## 1.2 ▶ Hangebene und Maibaum skizzieren (4P)

Du kannst den Hang in einem Koordinatensystem darstellen, indem du die Spurpunkte der Ebene $H$ bestimmst, einträgst und verbindest. Spurpunkte sind diejenigen Punkte der Ebene, in denen $H$ eine der Achsen des Koordinatensystems schneidet. Für den Spurpunkt auf der $x$-Achse sind demnach die $y$- und die $z$-Koordinaten gleich Null. Die Koordinaten dieser Punkte sind demnach allgemein:

$S_1(x \mid 0 \mid 0)$, $S_2(0 \mid y \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid z)$.

Auch diese Punkte müssen, da sie in $H$ liegen, die Koordinatengleichung von $H$ erfüllen. Daraus folgt:

Es ergeben sich die Spurpunkte $S_1$, $S_2$ und $S_3$ zu:

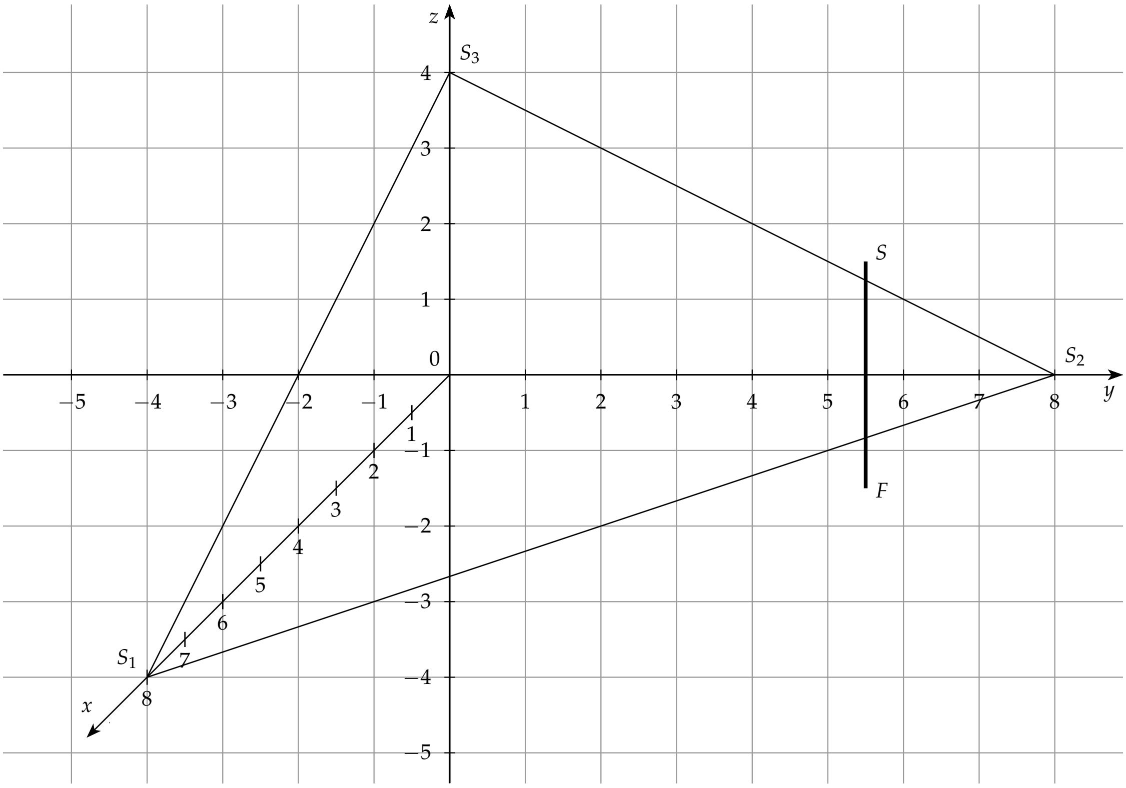
$$\begin{aligned} S_1\colon y = z = 0 \Rightarrow\ & x + 0 + 2 \cdot 0 = 8 \\ \Rightarrow\ & x = 8 \\ \Rightarrow\ & S_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2\colon x = z = 0 \Rightarrow\ & 0 + y + 2 \cdot 0 = 8 \\ \Rightarrow\ & y = 8 \\ \Rightarrow\ & S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3\colon x = y = 0 \Rightarrow\ & 0 + 0 + 2 \cdot z = 8 \\ \Rightarrow\ & z = 4 \\ \Rightarrow\ & S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Maibaum stellt eine Strecke dar, die bei $F(3 \mid 7 \mid 0)$ beginnt und dann in Richtung der $z$-Achse drei Längeneinheiten nach oben bis zum Punkt $S$ verläuft, da eine Einheit 10 m entspricht und der Baum 30 m hoch ist.

Wähle ein ausreichend großes Koordinatensystem und zeichne die Spurpunkte und ihre Verbindungslinien sowie den Maibaum ein:




2. ► **Prüfen, ob der Abstand eingehalten wird** (6P)

Wir wollen wissen, ob das 2 m breite Beet, das um den Maibaum in einem inneren Radius von 8 m gepflanzt werden soll, den Abstand von mindestens 3 m zum Hang einhalten kann. Insgesamt soll der Hang also mindestens

$d > (2+8+3)\,\text{m} = 13\,\text{m}$

vom Maibaum entfernt sein. Der Rand des Hangs, der zum Maibaum zeigt, ist dabei diejenige Gerade $g$, in der sich $H$ und die $x$-$y$-Ebene schneiden. Um zu prüfen, ob der Abstand eingehalten wird, kannst du nun die Gleichung von $g$ bestimmen und anschließend den Abstand der Geraden vom Punkt $F$ bestimmen, wo der Maibaum steht.

**1. Schritt: Geradengleichung bestimmen**

Um die Schnittgerade von $H$ mit der $x$-$y$-Ebene zu bestimmen, benötigen wir zunächst die Koordinatengleichung der $x$-$y$-Ebene. In der $x$-$y$-Ebene können die $x$- und $y$-Koordinaten der darin liegenden Punkte beliebige Werte annehmen, lediglich $z$ muss gleich Null sein. Die Ebene erfüllt also die Gleichung:

$z = 0$

Die Gerade $g$ erfüllt nun sowohl die Koordinatengleichung von $H$, als auch die der $x$-$y$-Ebene. Um die Geradengleichung zu berechnen, kannst du also das unterbestimmte System aus Koordinatengleichungen lösen:

$$\begin{array}{llrl} \text{I} & 0 = & & z \\ \text{II} & 8 = & 2x + y + & 2z \quad | \text{ Setze I in II ein:} \\ \text{III} & 8 = & x + y + & 2 \cdot 0 \end{array}$$

Das LGS ist unterbestimmt: Wähle also beispielsweise $x = t$, setze in III ein und löse nach $y$ auf:

$$\begin{array}{llr} \text{III} & 8 = & t + y \\ \text{III} & y = & 8 - t \end{array}$$

Du erhältst die Koordinaten aller gemeinsamen Punkte von $H$ und der $x$-$y$-Ebene mit $x = t$, $y = 8 - t$ und $z = 0$. Du kannst diese nun als Vektor darstellen und in zwei Vektoren aufteilen: Einen konstanten Vektor und einen Vektor abhängig von $t$. Die Gerade $g$ hat dann die Gleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 8-t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1\cdot t \\ 8+(-1)\cdot t \\ 0+0\cdot t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**2. Schritt: Abstand des Maibaums zum Hang berechnen**

Um den Abstand des Punktes $F$ von $g$ zu bestimmen, kannst du eine Hilfsebene durch $F$ legen, die den Richtungsvektor von $g$ als Normalenvektor hat. Der Schnittpunkt dieser Ebene mit $g$ ist dann genau der Punkt auf $g$ mit der kürzesten Entfernung zu $F$.

Du kannst für die Hilfsebene $E$ eine Normalengleichung aufstellen und auflösen, bei der $F$ ein Punkt der Ebene und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Normalenvektor ist:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$\begin{aligned} 1x - 1y + 0z - 1\cdot 3 - (-1)\cdot 7 - 0\cdot 0 &= 0 \\ x - y + 4 &= 0 \\ x &= y - 4 \end{aligned}$$

Der gesuchte Punkt hat also den Ortsvektor: $\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} y-4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{P}$ soll nun zudem auf $g$ liegen. Es gilt also:

$$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} y-4 \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten – $y,\ z,\ t$. Dabei ist der Wert von $t$ nicht relevant für die Lösung. Jede Zeile stellt eine Gleichung dar:

(1) $\quad y - 4 = t$

(2) $\quad y = 8 - t$

(3) $\quad z = 0$

Die dritte Zeile ist bereits eine Lösung für die Unbekannte $z$. Aus den anderen beiden ergibt sich:

(1) in (2) $\quad y = 8 - y + 4$

$\Rightarrow \quad y = 6$

Mit $x = y - 4$ folgt $x = 6 - 4 = 2$. Der Punkt mit der kürzesten Entfernung zu $F$ hat damit die Koordinaten $P(2 \mid 6 \mid 0)$.

Den Abstand der beiden Punkte erhältst du nun, indem du den Betrag des Verbindungsvektors der beiden Punkte berechnest:

$$d = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(3-2)^2 + (7-6)^2 + 0^2}\,\text{LE} = \sqrt{2}\,\text{LE} \approx 1{,}41\,\text{LE}$$

Da eine Längeneinheit 10 m entspricht, beträgt der Abstand vom Maibaum zum Hang insgesamt $d \approx 14{,}1$ m. Dies sind mehr als die 13 m Mindestabstand. Der Landschaftsgärtner darf sein Blumenbeet also pflanzen.

3. ▶ **Schatten der Baumspitze bestimmen** (6P)

Gesucht ist der Schattenpunkt $S'$ der Baumspitze $S(3 \mid 7 \mid 3)$, wenn die Richtung der Sonnenstrahlen durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Um den Schattenpunkt auf der Hangebene zu bestimmen, kannst du den Punkt $S$ auf $H$ projizieren, indem du eine Gerade $g$ durch $S$ mit Richtungsvektor $\vec{v}$ legst und den Schnittpunkt dieser mit $H$ ermittelst. Der Schnittpunkt ist dann gerade der Schattenpunkt $S'$.

Die Geradengleichung von $g$ ergibt sich mit dem Ortsvektor von $S$ als Stützvektor und $\vec{v}$ als Richtungsvektor zu:

$$g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OS} + m \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Um den Schnittpunkt von $s$ mit der Hangebene $H$ zu bestimmen, kannst du die Parametergleichung von $H$ mit $g$ gleichsetzen und den Parameter $m$ bestimmen. $m$ kannst du anschließend wieder in $g$ einsetzen und $S'$ berechnen:

$$\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\\3\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix}$$

Es ergeben sich drei Gleichungen mit den drei Unbekannten $m$, $r$ und $t$:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 3-3m & = & 2-3r-s\\
\text{II} & 7-3m & = & -2+r-s\\
\text{III} & 3-m & = & 4+r+s
\end{array}$$

Du kannst nun das lineare Gleichungssystem nach $m$ auflösen:

$$\begin{array}{lrcll}
\text{III} & -1-m-s & = & r & \mid \text{Setze III in I ein:}\\
\text{IV} & 2-3(-1-m-s)-s & = & 3-3m & \\
\text{IV} & s & = & -1-3m & \mid \text{Setze III in II ein:}\\
\text{V} & -2+(-1-m-s)-s & = & 7-3m & \\
\text{V} & s & = & -5+m & \mid \text{Setze IV mit V gleich:}\\
\text{VI} & -5+m & = & -1-3m & \\
\text{VI} & m & = & 1 &
\end{array}$$

Der Ortsvektor des Schattenpunktes $S'$ ergibt demnach:

$$\overrightarrow{S'}=\begin{pmatrix}3\\7\\3\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$$

Der Schattenpunkt hat also die Koordinaten $S'(0\mid 4\mid 2)$.

**▶ Schattenübergang in die Hangebene zeigen**

Zu zeigen ist, dass $R(2\mid 6\mid 0)$ derjenige Punkt ist, an dem der Schatten in den Hang übergeht. Aus Aufgabe 2 weißt du, dass $R$ tatsächlich auf der Übergangsgerade $g$ von der Park- in die Hangebene liegt. Es ist also nur noch zu beweisen, dass $R$ ein Schattenpunkt des Maibaums ist.

Wenn du den Schattenstrahl zurückverfolgst, muss dieser die Baumstrecke schneiden. Wäre dies nicht der Fall, wäre $R$ kein Schattenpunkt des Baums.

Gesucht ist also der Schnitt des Schattenstrahls durch $R$ mit dem Maibaum. Der Schattenstrahl $l$ liegt auf einer Geraden durch $R$ mit dem Richtungsvektor des Lichtstrahls $\vec{v}$:

$$l:\ \vec{x}=\overrightarrow{R}+n\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix}$$

Den Maibaum kannst du ebenso durch eine Gerade $m$ durch $S$ und $F$ darstellen, wobei $\overrightarrow{OF}$ ein Stützvektor sein kann und der Richtungsvektor gerade der Einheitsvektor in $z$-Richtung ist:

$$m:\ \vec{x}=\overrightarrow{F}+o\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}+o\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Nun kannst du die beiden Geradengleichungen von $l$ und $m$ gleichsetzen. Du erhältst drei Gleichungen, die ein überbestimmtes Gleichungssystem bilden. Hat dieses System eine Lösung für $n$ **und** liegt der Lösungspunkt auf dem Maibaum, ist die Behauptung gezeigt:

$$\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix} + n\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix} + o\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(1) $\quad 2-3n = 3$

$$n = \frac{3-2}{-3} = -\frac{1}{3}$$

(2) $\quad 6-3n = 7$

$$n = \frac{3-2}{-3} = -\frac{1}{3}$$

(3) $\quad -n = o \qquad$ Setze (1) in (3) ein:

$$o = \frac{1}{3}$$

Die erste Gleichung ergibt $n = -\frac{1}{3}$, die zweite liefert dasselbe Ergebnis. Aus der dritten Gleichung ergibt sich $o = \frac{1}{3}$. Das Gleichungssystem besitzt also genau eine Lösung. Prüfe nun durch Einsetzen von $n$, ob der Lösungspunkt auf dem Maibaum liegt. Dies gilt genau dann, wenn die $z$-Koordinate im Intervall $[0,3]$ liegt. Setze also $n$ in die dritte Zeile von $l$ ein und vereinfache:

$$z = 0 - \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Damit liegt der Lösungspunkt auf dem Baum und die Behauptung ist gezeigt.

### 4.1 ▶ Abbildungsmatrix bestimmen (5P)

Allgemein sieht die gesuchte $3\times 3$-Matrix aus wie folgt:

$$M = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

Sie enthält also neun Unbekannte. Wir benötigen demnach neun Bedingungen, um die Matrix vollständig zu bestimmen. Bilde dazu drei beliebige Punkte $P_1$, $P_2$ und $P_3$ mit den Sonnenstrahlvektor auf $E$ ab. Du erhältst für jeden Bildpunkt drei Gleichungen - für jede Koordinate eine - die du nach den Koeffizienten der Matrix auflösen kannst.

Ein beliebiger Punkt $P$, der mit $\vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix}$ auf $P'$ verschoben wird, erfüllt die Gleichung:

$$\overrightarrow{P'} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1-3t\\x_2-3t\\x_3-t\end{pmatrix}$$

Dabei bestimmt $t$ wie weit $P$ entlang des Sonnenstrahlvektors bewegt wird. Liegt $P'$ in $E$, so müssen die Koordinaten von $P'$ die Koordinatengleichung von $E$ erfüllen:

$$(x_1 - 3t) + (x_2 - 3t) + 2(x_3 - t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{8} + \frac{x_3}{4} = t$$

Wähle nun beliebige Punkte und finde mithilfe der obigen Gleichung den zugehörigen Parameter $t$ und durch Einsetzen $\overrightarrow{P'}$. In diesem Fall bieten sich $P_1(0 \mid 8 \mid 0)$, $P_2(8 \mid 0 \mid 0)$ und $P_3(0 \mid 0 \mid 4)$ an, da sie linear unabhängig sind und die Gleichung oben stark vereinfachen. Für sie ergeben sich für $t$ die Werte:

$$t_1 = \frac{0}{8} + \frac{8}{8} + \frac{0}{4} = 1$$
$$t_2 = \frac{8}{8} + \frac{0}{8} + \frac{0}{4} = 1$$
$$t_3 = \frac{0}{8} + \frac{0}{8} + \frac{4}{4} = 1$$

Hieraus kannst du nun die Bildpunkte $P_1'$, $P_2'$ und $P_3'$ berechnen. Es ergibt sich:

$$P_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P_2' = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Durch eine Abbildung von $\overrightarrow{OP_i}$ durch $M$ erhältst du $\overrightarrow{OP_i'}$ und damit folgende Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8a_{12} \\ 8a_{22} \\ 8a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8a_{11} \\ 8a_{21} \\ 8a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4a_{13} \\ 4a_{23} \\ 4a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dies liefert dir sofort die Koeffizienten der Matrix, wenn du jede Zeile als Gleichung betrachtest, etwa:

$$8a_{12} = -3 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{12} = -\frac{3}{8}$$

Gehe bei den anderen Gleichungen analog vor und du erhältst für die Abbildungsmatrix $M$ durch Einsetzen der Ergebnisse:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

### 4.2 ► Begründen, dass $\overrightarrow{OP''}$ eine Abbildung auf $H$ ist (3P)

Du weißt bereits, dass $M$ diejenige Abbildungsmatrix ist, die beliebige Punkte auf die Ebene $E$ mit der Gleichung

$$E: \; x + y + 2z = 0$$

abbildet. Die Abbildung $\overrightarrow{OP''}$ enthält gerade diese Abbildung und zusätzlich noch eine Verschiebung:

$$\overrightarrow{OP''} = \underbrace{M \cdot \overrightarrow{OP}}_{\text{Abbildung auf } E} + \underbrace{\frac{4}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Verschiebung}}$$

Daraus folgt: Die Koordinaten $\overrightarrow{OP'}$ des durch $M$ abgebildeten Punktes liegen auf $E$ und werden anschließend so verschoben, dass sie auf $H$ liegen. Demnach erfüllen die abgebildeten Punkte die Koordinatengleichung für $H$. $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ erfüllt die Koordinatengleichung $E$:

$$x' + y' + 2z' = 0$$

Durch die Verschiebung erhältst du:

$$x'' = x' + \frac{4}{5} \cdot 3 \;\Leftrightarrow\; x' = x'' - \frac{4}{5} \cdot 3$$

$$y'' = y' + \frac{4}{5} \cdot 3 \;\Leftrightarrow\; y' = y'' - \frac{4}{5} \cdot 3$$

$$z'' = z' + \frac{4}{5} \cdot 2 \;\Leftrightarrow\; z' = z'' - \frac{4}{5} \cdot 2$$

Eingesetzt in die obere Gleichung ergibt sich gerade die Koordinatengleichung von $H$, was zu zeigen war:

$$\begin{aligned}\left(x'' - \frac{4}{5}\cdot 3\right) + \left(y'' - \frac{4}{5}\cdot 3\right) + 2\left(z'' - \frac{4}{5}\cdot 2\right) &= 0\\ x'' + y'' + 2z'' - \frac{12}{5} - \frac{12}{5} - \frac{16}{5} &= 0\\ x'' + y'' + 2z'' &= 8\end{aligned}$$