1. **▶ Fehlende Werte berechnen** (8BE)

	Ehepaare	keine Ehepaare	Summe
mit Kindern	0,39	**0,13**	**0,52**
ohne Kinder	0,41	0,07	0,48
Summe	**0,8**	0,2	**1**

Die **fett** gedruckten Werte sind aus der Aufgabenstellung und aus der Konstruktion der Vierfeldertafel an sich bekannt. Die fehlenden Werte ergeben sich durch einfache **Addition**.

▶ Wahrscheinlichkeit für ein Ehepaar berechnen

Hier ist nach der **bedingten Wahrscheinlichkeit** dafür gefragt, dass die in einem Haushalt lebenden Personen ein Ehepaar sind, **unter der Bedingung** dass sie Kinder haben.
Sei E das Ereignis „In einem Haushalt wohnt ein Ehepaar" und K das Ereignis „Ein Haushalt hat Kinder".

$$P(A) = P_K(E) = \frac{P(K \cap E)}{P(K)} = \frac{0{,}39}{0{,}52} = \frac{1}{4} = 0{,}75$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % sind die Eltern ein Ehepaar.

▶ Wahrscheinlichkeit für Kinder berechnen

Hier ist wieder nach einer **bedingten Wahrscheinlichkeit** gefragt. Dieses Mal nach der, dass ein Haushalt Kinder hat, unter der Bedingung dass ein Ehepaar darin lebt.

$$P(B) = P_E(K) = \frac{P(E \cap K)}{P(E)} = \frac{0{,}39}{0{,}8} = 0{,}4875$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 48,75 % hat das Ehepaar Kinder.

2. **▶ Wahrscheinlichkeit berechnen** (4BE)

Wir wollen in einem ersten Schritt allgemein die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass in einem **Haushalt mit Kindern** Personen in einer nichtehelichen Lebensgemeinschaft leben bzw. alleinerziehend sind. Dies ist wieder eine bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_K(\overline{E}) = \frac{K \cap \overline{E}}{K} = \frac{0{,}13}{0{,}52} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 25 % stammt ein Kind aus einer nichtehelichen Lebensgemeinschaft.

Sei X nun die Anzahl der Kinder aus einer nichtehelichen Lebensgemeinschaft in der Jahrgangsstufe 1 der Grundschule. X kann als binomialverteilt angenommen werden:

- Entweder ein Kind ist aus einer nichtehelichen Lebensgemeinschaft bzw. von Alleinerziehenden oder nicht
- Die Wahrscheinlichkeit von 0,25 bleibt von „Versuch zu Versuch" immer gleich.

Als Parameter für die Binomialverteilung gelten $n = 100$ und $p = 0{,}25$.

Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit $P(X = 20)$:

$$P(X = 20) = \binom{100}{20} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{20} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{80} = 0{,}0493$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 4,93 % stammen genau 20 der 100 Kinder aus einer nichtehelichen Lebensgemeinschaft.

3. ▶ **Hypothesentest entwickeln** (8BE)

Sei X die Anzahl der Alleinerziehenden, die ein Betreuungsangebot wünschen.

Getestet wird die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}8$. Dabei werden 10 % der Alleinerziehenden, also 662 Personen befragt. X kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 662$. Bei wahrer Nullhypothese ist $p = 0{,}8$.

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn nur **sehr wenige** der Alleinerziehenden angeben, ein Betreuungsangebot zu wünschen. Als obere Grenze des Ablehnungsbereichs können wir also k mit $\overline{A} = \{0; 1; ...; k\}$.

Das Signifikanzniveau von 5 % gibt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art an, also dafür, dass die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt wird. Dies ist dann der Fall, wenn $P(X \leq k) < 0{,}05$ ist für $p = 0{,}8$.

Da n sehr groß ist, bietet sich eine Näherung durch die Normalverteilung an. Dabei erhalten wir

$\mu = n \cdot p = 662 \cdot 0{,}8 = 529{,}6$

und

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{529{,}6 \cdot 0{,}2} = \sqrt{105{,}92} \approx 10{,}29$.

Mit $\sigma > 3$ ist die Laplace-Bedingung erfüllt und eine Näherung durch die Normalverteilung ist zulässig.

Zurück zu unserem Wert für k:

$$\begin{aligned}
P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - 529{,}6}{10{,}29}\right) &\leq 0{,}05 && |\ \cdot(-1) \\
-\Phi\left(\frac{k + 529{,}1}{10{,}29}\right) &\geq -0{,}05 && |\ +1 \\
1 - \Phi\left(\frac{k + -529{,}1}{10{,}29}\right) &\geq 0{,}95 \\
\Phi\left(-\frac{k - 529{,}1}{10{,}29}\right) &\geq 0{,}95
\end{aligned}$$

Die Tabelle zur Standardnormalverteilung liefert $\Phi(1{,}65) = 0{,}95$, also:

$$\begin{aligned}
-\frac{k - 529{,}1}{10{,}29} &\geq 1{,}65 && |\ \cdot(-10{,}29) \\
k - 529{,}1 &\leq -16{,}97 && |\ +529{,}1 \\
k &\leq 512{,}13
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0; 1; ..; 512\}$. Wenn höchstens 512 der 662 Alleinerziehenden angeben, eine Nachmittagsbetreuung zu wünschen, dann wird die Nullhypothese abgelehnt.

4.1 ▶ **Rechnung erläutern** (10BE)

Sei X die Anzahl der Haushalte, die aus Ehepaaren bestehen. Aus der Vierfeldertafel in Teilaufgabe 1 geht hervor, dass 80 % aller Haushalte aus Ehepaaren bestehen.

Mit $n = 24.300$ und $p = 0{,}8$ ergeben sich:

$\mu = 24.300 \cdot 0{,}8 = 19.440 \quad \text{und} \quad \sigma^2 = (\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)})^2 = 19.440 \cdot 0{,}2 = 3.880$

In der Aufgabenstellung ist weiterhin gegeben, dass in einer hessischen Stadt 19.320 Haushalte aus Ehepaaren bestehen. Dieser Wert weicht vom Erwartungswert μ um 120 ab.
Mit $P\left(|X - 19.440| \geq 120\right) \leq \dfrac{3.888}{14.400} = 27\,\%$ wird also die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass die Anzahl der Haushalte betragsmäßig um **mindestens** 120 vom Erwartungswert abweicht.

4.2 ► **Binomialverteilung begründen** (10BE)

Die Zufallsgröße X, welche die Anzahl der Haushalte beschreibt, die aus Ehepaaren bestehen, kann als binomialverteilt angesehen werden, wenn

- es nur zwei mögliche Ausgänge gibt (entweder... oder...)
- die Wahrscheinlichkeit, dass ein Haushalt aus Ehepaaren besteht, durchweg gleich bleibt

Beide Bedingungen sind erfüllt: Entweder ein Haushalt besteht aus einem Ehepaar oder nicht. Weiterhin ist gegeben, dass ein beliebiger Haushalt in Hessen mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % aus einem Ehepaar besteht.

► **Wahrscheinlichkeit berechnen**

In Aufgabenteil 4.1 hast du bereits $\mu = 19.440$ und $\sigma = \sqrt{3.888} \approx 62{,}35$ berechnet. Da $\sigma > 3$ ist, liefert die Normalverteilung brauchbare Näherungswerte.

Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit $P(|X - 19.440| \geq 120)$:

$$\begin{aligned}
P(|X - 19.440| \geq 120) &= P\left((19.440 - 120 \leq X) \cup (19.440 + 120) \geq X\right) \\
&= P(19.320 \leq X) + P(19.560 \geq X) \\
&= P(19.320 \leq X) + 1 - P(19.559 \leq X) \\
&= \Phi\left(\frac{19.320 + 0{,}5 - 19.440}{62{,}35}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{19.559 + 0{,}5 - 19.440}{62{,}35}\right) \\
&= \Phi\left(-\frac{119{,}5}{62{,}35}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{119{,}5}{62{,}35}\right) \\
&\approx 2 - 2 \cdot \Phi\left(1{,}92\right) \\
&= 2 - 2 \cdot 0{,}97257 \\
&\approx 0{,}05486
\end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 5,486 % weicht das Ergebnis um mindestens 120 vom Erwartungswert ab. Im Vergleich zur Abschätzung mit der Tschebyscheff-Gleichung aus Aufgabenteil 4.1 ergibt sich damit ein Unterschied von über 20 %. Damit ist die Berechnung mit der Binomialverteilung bzw. die Näherung durch die Normalverteilung um einiges genauer als die Abschätzung mit Tschebyscheff.