B1 - Analysis

1.1 ▶ **Parameter nennen**

Die Parameter T_R und T_0 kannst du aus dem Aufgabentext ablesen. Die Raumtemperatur ist $T_R = 30$ und zu Beginn, also nach Entnahme aus dem Kühlschrank, hat das Wasser die Temperatur $T_0 = 8$.

▶ **Parameter k berechnen**

Setze T_R und T_0, sowie die Temperatur $w(t)$ und die Zeit t nach 10 Minuten, also $t = 10$ und $w(10) = 21,9$ in die Gleichung ein und löse nach k auf:

$$\begin{array}{rcll}
21,9 &=& 30-(30-8)\cdot e^{-k\cdot 10} & \\
21,9 &=& 30-22\cdot e^{-10k} & \mid -30 \\
-8,1 &=& -22\cdot e^{-10k} & \mid :(-22) \\
\dfrac{8,1}{22} &=& e^{-10k} & \mid \ln() \\
\ln\left(\dfrac{8,1}{22}\right) &\approx& -10k & \mid :(-10) \\
\dfrac{\ln\left(\dfrac{8,1}{22}\right)}{-10} &\approx& k & \\
0,0999 &\approx& k &
\end{array}$$

Für die Funktionsgleichung gilt somit:

$w(t) = 30 - 22\cdot e^{-0,0999k}$

1.2 ▶ **Prozentuale Zunahme berechnen**

Das Wasser hat sich in den ersten 10 Minuten um $21,9-8 = 13,9$ Grad erwärmt. Berechne also $13,9$ von 8 in Prozent:

$\dfrac{13,9}{8} = 174\,\%$

1.3 ▶ **Integral berechnen und erläutern**

Für das Integral gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{10}\cdot\int\limits_0^{10}\left(30-22\cdot e^{-0,1t}\right)dt &= \frac{1}{10}\cdot\left[30t+\frac{22}{0,1}\cdot e^{-0,1t}\right]_0^{10}\\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(300+220\cdot e^{-1}-220\right)\\
&\approx 16,09
\end{aligned}
$$

Das Wasser hatte in den ersten 10 Minuten eine durchschnittliche Temperatur von $16,09^\circ\mathrm{C}$.

1.4 ► **Grenzwert begründen und erläutern**

Betrachte den Funktionsterm für $t\to\infty$. Da

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$$

gilt, gilt für die gesamte Funktion

$$\lim_{t\to\infty}\left(30-22\cdot e^{-0,1t}\right) = 30-22\cdot 0 = 30$$

Im Sachzusammenhang gibt der Grenzwert die Temperatur des Wassers nach unendlich langer Zeit an. Das Wasser passt sich also der Raumtemperatur an und wird nach genügend langer Zeit näherungsweise $30^\circ\mathrm{C}$ annehmen.

1.5 ► **Halbierte Erwärmungsgeschwindigkeit berechnen**

Die Erwärmungsgeschwindigkeit kannst du mithilfe der ersten Ableitung berechnen:

$$w'(t) = -22\cdot\left(-0,1\cdot e^{-0,1t}\right) = 2,2\cdot e^{-0,1t}$$

Zu Beginn, bei $t=0$, beträgt die Erwärmungsgeschwindigkeit:

$$w'(0) = 2,2\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{min}}$$

Berechne jetzt den Zeitpunkt, bei welchem $w'(t)=1,1$ ist:

$$
\begin{aligned}
1,1 &= 2,2\cdot e^{-0,1t} && \mid :2,2\\
0,5 &= e^{-0,1t} && \mid \ln()\\
\ln(0,5) &= -0,1t && \mid :(-0,1)\\
6,93 &\approx t
\end{aligned}
$$

Nach $6,93$ Minuten hat sich die Erwärmungsgeschwindigkeit halbiert.

► **Verlauf der Erwärmungsgeschwindigkeit zeigen**

Weil die e-Funktion immer positiv ist $(e^x>0)$ muss auch die Ableitungsfunktion $w'(t)$ immer positiv sein:

$$w'(t) = 2,2\cdot e^{-0,1t} > 0$$

Damit hast du gezeigt, dass die Erwärmungsgeschwindigkeit nie null wird.

Die Ableitung w'' beschreibt die Änderungsrate der Erwärmungsgeschwindigkeit. Da

$$w''(t) = -0,22 \cdot e^{-0,1t} < 0$$

ist, nimmt w' streng monoton ab. Die Erwärmungsgeschwindigkeit nimmt also immer ab, bleibt aber positiv.

1.6 ► **Begrenztes Wachstum zeigen**

Setze $k = 0,1$, die Schranke $S = 30$ und die Funktion $f(t) = w(t)$ in die Gleichung ein:

$$\begin{array}{rcl} f'(t) &=& 0,1 \cdot \left(30 - \left(30 - 22 \cdot e^{-0,1t}\right)\right) \\ &=& 2,2 \cdot e^{-0,1t} \\ &=& w'(t) \end{array}$$

Da du die richtige Ableitung erhältst, hast du gezeigt, dass die Funktion w ein begrenztes Wachstum beschreibt.

Im Sachzusammenhang beschreibt $k = 0,1 = 10\,\%$ die Erwärmungsgeschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt mit jeweiliger Temperaturdifferenz zwischen Wasser- und Raumtemperatur. Das Wasser erwärmt sich also immer um $10\,\%$ dieser Temperaturdifferenz.

2.1 ► **Zeigen, dass alle Graphen dieselbe Nullstelle haben**

$$\begin{array}{rcl} f_n(x) &=& 0 \\ (x+1)^n \cdot \mathrm{e}^x &=& 0 \\ (x+1)^n &=& 0 \\ x &=& -1 \end{array}$$

Die Nullstelle ist also unabhängig von n.

$$f_n(0) = 1^n \cdot \mathrm{e}^0 = 1$$

Der y-Achsenabschnitt ist also unabhängig von n.

► **Schnittpunkte angeben**

$S_x(-1 \mid 0)$, $S_y(0 \mid 1)$

2.2 ► **Begründen**

Es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Da der Faktor e^x das Verhalten der Graphen der Funktionenschar für $x \to -\infty$ dominiert, nähern sich die Graphen der x-Achse an.

► **Unterschied erklären**

Ob die Annäherung eines Graphen der Funkionenschar an die x-Achse aus dem zweiten oder aus dem dritten Quadranten erfolgt, hängt vom Faktor $(x+1)^n$ ab.

Für gerade n strebt für $x \to -\infty$ der Faktor $(x+1)^n$ gegen ∞; somit erfolgt die Annäherung aus dem zweiten Quadranten.
Für ungerade n strebt für $x \to -\infty$ der Faktor $(x+1)^n$ gegen $-\infty$; somit erfolgt die Annäherung aus dem dritten Quadranten.

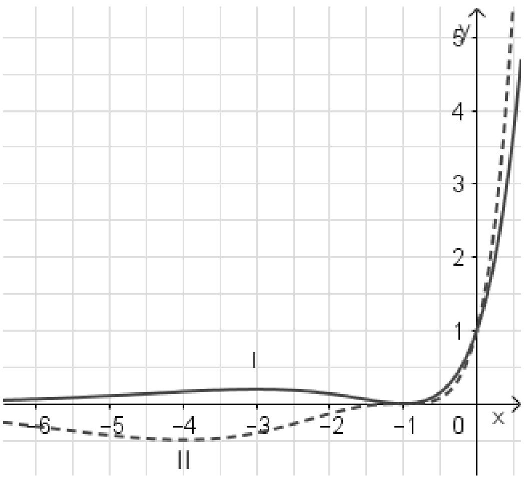
2.3
$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n \cdot (x+1)^{n-1} \cdot \mathrm{e}^x + (x+1)^n \cdot \mathrm{e}^x \\ &= n \cdot (x+1)^{n-1} \cdot \mathrm{e}^x + (x+1) \cdot (x+1)^{n-1} \cdot \mathrm{e}^x \quad \mid (x+1)^{n-1} \cdot \mathrm{e}^x \text{ ausklammern} \\ &= (n+x+1) \cdot (x+1)^{n-1} \cdot \mathrm{e}^x \\ &= (x+1+n) \cdot f_{n-1}(x) \end{aligned}$$

2.4 ▶ **Mögliche Extremstellen bestimmen**

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= 0 \\ (x+1+n) \cdot (x+1)^{n-1} \cdot \mathrm{e}^x &= 0 \\ x+1+n &= 0 \quad \vee \quad (x+1)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Also muss $x = -n-1 \vee x = -1$ sein. Die möglichen Extremstellen von f_n sind also $x_1 = -n-1$ und $x_2 = -1$.

▶ **Skalierung angeben**



▶ **Parameter n bestimmen**

Die x-Koordinaten des Hochpunktes und des Tiefpunktes kannst du ablesen.
Hochpunkt bei $x = -3$, damit gilt: $-n-1 = -3 \Leftrightarrow n = 2$
Tiefpunkt bei $x = -4$, damit gilt: $-n-1 = -4 \Leftrightarrow n = 3$

Graph I gehört zum Parameterwert $n = 2$, Graph II gehört zu $n = 3$.

2.5 ▶ **Aussage begründen**

Der Funktionsterm der ersten Ableitungsfunktion lautet:

$$f_n'(x) = (n+x+1) \cdot (x+1)^{n-1} \cdot \mathrm{e}^x$$

In der Nähe von $x=-1$ ist der Faktor $(n+x+1)$ positiv, da $n>0$. Ebenfalls ist $\mathrm{e}^x>0$, also positiv. Somit genügt es, den Faktor $(x+1)^{n-1}$ zu betrachten.
Dieser Faktor hat an der Stelle $x=-1$ für gerade Werte von n eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel (Extrempunkt) und für ungerade Werte von n eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel (Sattelpunkt).