1. **▶ Wahrscheinlichkeiten berechnen** (7BE)

Sei X die Anzahl der Fluggäste, die ihren Flug **nicht** antreten. X kann als binomialverteilte Zufallsgröße angenommen werden, denn

- es gibt genau zwei mögliche Ausgänge: entweder ein Gast fliegt mit oder nicht
- die Masse der Fluggäste insgesamt ist so groß, dass bei der Wahl einer relativ kleinen Stichprobe näherungsweise von einem **Ziehen mit Zurücklegen** gesprochen werden kann.
- die Fluggesellschaft geht davon aus, dass jeder Fluggast **unabhängig** von anderen Fluggästen seinen Flug mit 6 % Wahrscheinlichkeit nicht antritt. In diesem Modell wird also keine Rücksicht auf z.B. Familien oder Reisegruppen genommen.

1. Schritt: Wahrscheinlichkeit für genau 52 von 57

Es ist bekannt, dass 6 % der Fluggäste ihren Flug nicht antreten. Deshalb können wir X als binomialverteilt annehmen mit $n = 57$ und $p = 0,06$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 52 Personen ist Flug antreten, d.h. dass genau 5 Personen dies **nicht** tun. Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit $P(X = 5)$.

$$P(X=5) = \binom{57}{5} \cdot (0,06)^5 \cdot (0,94)^{52} \approx 0,130412$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 13,04 % treten genau 52 von 57 Gästen ihren Flug tatsächlich an.

2. Schritt: Wahrscheinlichkeit für höchstens 186 von 200

Die Anzahl der Fluggäste, die ihren Flug **tatsächlich** antreten, sei dieses Mal Y. Diese Zufallsvariable kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 200$ und $p = 0,94$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 186 Gäste ihren Flug antreten, also $P(X \leq 186)$.

Im Anhang findest du eine Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung für $n = 200$. Sieh dir die Spalte zu $p = 0,94$ an und entnimm ihr den Wert für $P(X \leq 186) = 0,3151$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 31,51 % treten höchstens 186 von 200 Gästen ihren Flug tatsächlich an.

2. **▶ Wahrscheinlichkeit für Entschädigungszahlung berechnen** (5BE)

Es wurden insgesamt 200 Buchungen angenommen; jeder Gast tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 94 % seinen gebuchten Flug auch an. Die Fluggesellschaft muss Entschädigungszahlungen leisten, wenn **mehr als** 189 Fluggäste ihren Flug tatsächlich antreten. Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit $P(X > 189) = 1 - P(X \leq 189)$.

Betrachte hierzu wieder die Tabelle im Anhang: wegen $P(X \leq 189) = 0,6593$ ist $P(X > 189) = 1 - 0,6593 = 0,3407$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 34,07 % muss die Fluggesellschaft Entschädigungszahlungen leisten.

3. ▶ **Funktionen interpretieren** (10BE)

Aus dem ersten Einleitungstext zur Aufgabe geht hervor:

- Für jeden unbesetzten Sitzplatz fallen Kosten in Höhe von 150 € an
- Für jeden Kunden, der seinen gebuchten Flug nicht antreten kann, fallen Kosten in Höhe von 500 € an.

Diese beiden Zahlen (150 und 500) tauchen auch in den Gleichungen der Funktionen V_1 und V_2 wieder auf.

1. Schritt: Funktion V_1

Wir möchten den Funktionsterm von V_1 zunächst in seiner ausmultiplizierten Form betrachten:

$$V_1(n) = \underbrace{\binom{n}{0} \cdot 0,94^0 \cdot 0,06^n}_{P(X=0)} \cdot (189-0) \cdot 150 + \underbrace{\binom{n}{1} \cdot 0,94^1 \cdot 0,06^{n-1}}_{P(X=1)} \cdot (189-1) \cdot 150 + \cdots + \underbrace{\binom{n}{k} \cdot 0,94^k \cdot 0,06^{n-k}}_{P(X=k)} \cdot (189-k) \cdot 150$$

Der erste Teil der jeweiligen Summanden berechnet also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von n Buchungen **genau k Gäste** ihren Flug tatsächlich antreten. Diese Wahrscheinlichkeit wird multipliziert mit dem Faktor $(189-k) \cdot 150$.

k entspricht jeweils der Anzahl der Personen, die ihren Flug antreten. $189-k$ ist also die Anzahl der **unbesetzten Plätze**. In diesem Fall werden allerdings nur die k-Werte betrachtet, die **kleiner als 189** sind; also die Werte, für die es **unbesetzte Plätze** im Flugzeug gibt.

Diese Anzahl der unbesetzten Plätze wird mit 150 multipliziert. Damit entspricht der Faktor $(189-k) \cdot 150$ also den **anfallenden Kosten** für die unbesetzten Sitzplätze.

Du kannst also erkennen, dass im Term von V_1 ein **Erwartungswert** berechnet wird: die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau k Personen ihren Flug antreten, wird multipliziert mit den anfallenden Kosten, die in der jeweiligen Situation entstehen.

2. Schritt: Funktion V_2

Auch den Term von V_2 möchten wir zunächst ausmultiplizieren:

$$V_2(n) = \binom{n}{190} \cdot 0,94^{190} \cdot 0,06^{n-190} \cdot (190-189) \cdot 500 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot 0,94^n \cdot 0,06^{n-n} \cdot (n-189) \cdot 500$$

Der Term sieht ähnlich aus wie der von V_1:

Zunächst wird jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass von n Buchungen **genau k Gäste** ihren Flug tatsächlich antreten. Dieses Mal werden nur die k-Werte betrachtet, die größer als 190 sind, für die also **mehr Gäste als Plätze** vorhanden sind.

Die Wahrscheinlichkeit wird multipliziert mit $(k-189)$. Dies ist die Anzahl der **Gäste, die keinen Platz** Flugzeug mehr bekommen. Diese Anzahl wiederum wird multipliziert mit 500 – dies sind ja die Kosten, die pro Fahrgast auf die Fluggesellschaft zukommen.

Also wird auch hier eine Art Erwartungswert berechnet: wie oben wird die Wahrscheinlichkeit für genau k antretende Fluggäste bestimmt und mit den anfallenden Kosten für die Reisegesellschaft multipliziert.

Insgesamt stellt die Funktion V also den **Erwartungswert** der anfallenden Kosten dar, wenn n Buchungen ausgegeben werden und nur 189 Flugplätze im Flugzeug verfügbar sind.

3. Schritt: Lösung des Problems angeben

Die Fluggesellschaft fährt am besten, wenn sie den Verlust V möglichst niedrig hält. Es sollte also das **Minimum** von V berechnet werden. Betrachte hierzu die in der Aufgabenstellung gegebene Tabelle: hier ist für einige Werte von n der zugehörige langfristige Verlust gegeben. Gesucht ist der Wert für n, für den $V(n)$ möglichst klein wird:
Du findest $n = 198$ mit $V(198) = 637$.

Das bedeutet: die Fluggesellschaft macht erwartungsgemäß den kleinsten Verlust, wenn sie für ein Flugzeug mit 189 Plätzen genau 198 Buchungen annimmt.

4. ► **Angemessenheit der Entschädigungszahlungen untersuchen** (8BE)

Die Entschädigungszahlungen sind **langfristig** angemessen, wenn sich der langfristige **Verlust** und die langfristigen **Entschädigungszahlungen** decken.
Das Wörtchen „langfristig" ist dabei ein Hinweis auf den **Erwartungswert**.

Wir möchten mit E zunächst die langfristigen Entschädigungen und mit V den langfristigen Verdienstausfall des Geschäftsmanns bezeichnen. Angemessen sind die Zahlungen, falls $V + E = 0$ ist.

1. Schritt: *E* berechnen

Wir stellen die Zahlungen, die in der Aufgabenstellung gegeben sind, zunächst tabellarisch dar. Die **relativen Häufigkeiten**, welche die Fluggesellschaft aus Erfahrung kennt, verwenden wir dabei als Wahrscheinlichkeiten.

Sei X die Zufallsvariable, die die bezahlte Entschädigung angibt.

x_i	150 €	450 €	600 €
$P(X = x_i)$	0,05	0,02	0,01

Für den Erwartungswert $E(X)$ ergibt sich dann:
$E(X) = 150 \cdot 0,05 + 450 \cdot 0,02 + 600 \cdot 0,01 = 22,5$

Also ist $E = 22,5$.

2. Schritt: *V* berechnen

Der Geschäftsmann macht Verlust, wenn der Flug um mehr als 2 Stunden verschoben wird. Der Verlust beträgt 350 € und kann als ein „Gewinn" von −350 € verstanden werden. Dies ist in 5 % + 2 % + 1 % = 8 % aller Flüge der Fall. Bei 92 % der Flüge macht er keinen Verlust. Damit gilt für V:
$V = 0,08 \cdot (-350) + 0,92 \cdot 0 = -28$

Betrachte nun die Summe $E + V$:
$E + V = 22,5 + (-28) = -5,5.$

Die Entschädigungszahlungen sind langfristig gesehen **nicht angemessen** für den Geschäftsmann. Langfristig gesehen fährt er pro Flug einen Verlust von 5,50 € ein.