

B1 - Analysis

Rückhaltebecken für Regen dienen dazu, bei starkem Regen Überschwemmungen zu vermeiden, indem das Regenwasser zunächst darin gesammelt und später langsam wieder abgelassen wird.

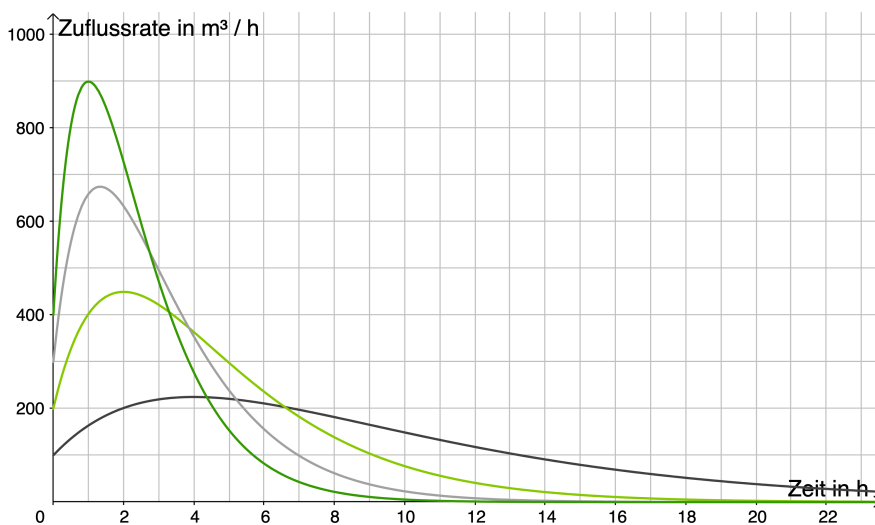
Die Zuflussrate des Regenwassers kann bei einigen Regenfällen modelliert werden durch die Funktionenschar f_k mit

$$f_k(t) = 100(k^2 \cdot t + k) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}, t \geq 0, k \in \mathbb{R}^+.$$

Dabei gibt t die Zeit in Stunden nach Beobachtungsbeginn und $f_k(t)$ die Zuflussrate in $\frac{m^3}{h}$ an.

Der Parameter k ist ein Maß für die Stärke des Regens.

In der Abbildung sind die Graphen der Funktionen f_k für $k = 1, 2, 3, 4$ dargestellt.



- 1.1 Berechne die Zuflussrate zum Zeitpunkt $t = 0$ in Abhängigkeit vom Parameter k .

(2 BE)

- 1.2 Berechne die maximale Zuflussrate und den zugehörigen Zeitpunkt jeweils in Abhängigkeit vom Parameter k .

Die zweite Ableitung $f_k''(t) = 4k^3(k \cdot t - 9) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}$ kann ohne Nachweis verwendet werden.

[Zur Kontrolle: $t_{max} = \frac{4}{k}$]

(7 BE)

- 1.3 Beschrifte die Graphen in der Abbildung mit den zugehörigen Parameterwerten $k = 1, 2, 3, 4$ und beschreibe den Einfluss des Parameters k auf Zeitpunkt und Größe der maximalen Zuflussrate.

Skizziere in das Koordinatensystem in der Abbildung die Ortskurve der Hochpunkte und bestimme die Funktionsgleichung der Ortskurve.

(7 BE)

- 1.4 Berechne die Wendepunkte der Graphen der Funktionenschar f_k in Abhängigkeit von k .

Hinweis: Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist ausreichend.

(4 BE)

Die Wendetangenten der Graphen der Scharfunktionen f_k werden durch Graphen der Funktionenschar w_k mit

$w_k(t) = 100k \cdot (19 - k \cdot t) \cdot e^{-\frac{9}{5}t}$ beschrieben.

- 1.5 Das nötige Fassungsvermögen des Rückhaltebeckens, das für die Aufnahme der gesamten Regenmenge bei einer Modellierung der Zuflussrate durch die Funktionenschar f_k ausreicht, kann mittels zweier Verfahren bestimmt werden:

(1) Bestimmung des Grenzwerts $\lim_{u \rightarrow \infty} [F_k(u) - F_k(0)]$, wobei F_k eine Stammfunktionenschar der Funktionenschar f_k darstellt.

(2) Bestimmung des Inhalts der Fläche, die zwischen den Koordinatenachsen und der Wendetangente w_k eingeschlossen ist.

- 1.5.1 Mit einem der beiden Verfahren wird der genaue Wert für das nötige Fassungsvermögen ermittelt und mit dem anderen lediglich eine Näherungslösung.

Entscheide, mit welchem der beiden Verfahren bei der vorgegebenen Modellierung der genaue Wert für das nötige Fassungsvermögen bestimmt wird, und erläutere deine Entscheidung.

(3 BE)

- 1.5.2 Berechne mithilfe des Formansatzes

$$F_k(t) = 100(a \cdot t + b) \cdot e^{-\frac{k}{5}t}$$

eine Stammfunktionenschar F_k von f_k .

[zur Kontrolle: F_k mit

$$F_k(t) = 100 \cdot (-5 \cdot k \cdot t - 30) \cdot e^{-\frac{k}{5}t}$$

ist eine mögliche Stammfunktionenschar.]

(7 BE)

- 1.5.3 Berechne jeweils die Werte für das nötige Fassungsvermögen nach den beiden genannten Verfahren und vergleiche die beiden Werte, indem du die prozentuale Abweichung der Näherungslösung berechnest.

(6 BE)

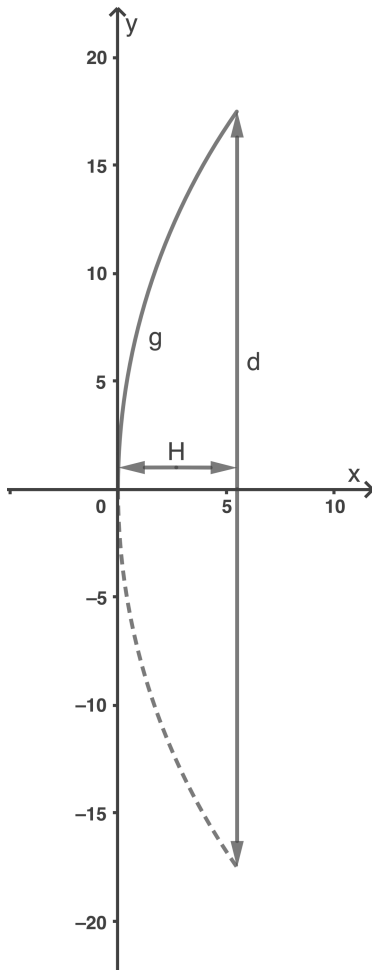
- 2 Die obere Randkurve des um 90° gekippten rotationssymmetrischen Rückhaltebeckens in der folgenden Abbildung kann durch den Graphen der Funktion g mit

$$g(x) = \sqrt{60x}, \quad x \geq 0,$$

beschrieben werden.

Die Tiefe des Rückhaltebeckens wird mit H und der Durchmesser mit d bezeichnet.

Alle Längenangaben erfolgen dabei in Meter.



- 2.1 Zeige, dass für das Volumen des Rückhaltebeckens $V = \pi \cdot 30H^2$ gilt.
 Berechne die Tiefe H und den Durchmesser d des Rückhaltebeckens, wenn dieses ein Fassungsvermögen von 3000 m^3 besitzt.

(5 BE)

- 2.2 Das vollgelaufene Rückhaltebecken wird bei konstanter Abflussrate in **100** Stunden wieder völlig entleert.

- 2.2.1 Entscheide ohne eine Rechnung, ob nach **50** Stunden die Höhe des Wasserstandes im Rückhaltebecken auf der halben Höhe über dem Beckenboden oder darüber bzw. darunter liegt.

(2 BE)

- 2.2.2 Begründe, dass für die Regenwassermenge (in m^3), die sich zum Zeitpunkt t nach Beginn der Entleerung noch im Rückhaltebecken befindet, gilt:

$$V(t) = -30t + 3000$$

(3 BE)

- 2.2.3 Leite mithilfe der Formeln aus Aufgabe 2.1 und Aufgabe 2.2.2 für die Höhe des Wasserstands über dem Beckenboden bei der Entleerung die Formel $h(t) = \sqrt{\frac{1}{\pi}(100 - t)}$ her.

(4 BE)