1.1 **► Dauer der Ballonfahrt bestimmen** (17BE)

Der Ballon startet zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Höhe $h = 0$. Da die Landschaft eben ist und sich auf der Höhe $h = 0$ befindet, endet die Fahrt, wenn der Ballon wieder die Höhe $h = 0$ erreicht hat. Dieser Zeitpunkt entspricht der nächsten **Nullstelle** von h:

$h(t) = 2t^2 \cdot (1{,}5 - \ln(t)) = 0$. Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist. Da nach der Aufgabenstellung $t > 0$ ist, genügt es, wenn du die Klammer alleine Null setzt.

$$\begin{aligned} 1{,}5 - \ln(t) &= 0 && \mid +\ln(t) \\ 1{,}5 &= \ln(t) && \mid \mathrm{e}^{\cdot\cdot} \\ \mathrm{e}^{1{,}5} &= t \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t = \mathrm{e}^{1{,}5} \approx 4{,}4817$ erreicht der Ballon wieder die Höhe $h = 0$ und die Ballonfahrt endet. Sie dauert etwa 4,5 Stunden.

► Größte erreichte Höhe ermitteln

Der Graph von h beschreibt die Höhe der Ballonfahrt über dem Startpunkt mit Höhe $h = 0$. Der Ballon erreicht die größte Höhe demnach am **Maximum** von h. Es ist demnach die y-Koordinate des Hochpunktes zu berechnen.

Bilde zunächst die ersten beiden Ableitungen nach der Produktregel. Beachte, dass $(\ln(t))' = \frac{1}{t}$.

$$\begin{aligned} h'(t) &= 4t \cdot (1{,}5 - \ln(t)) + 2t^2 \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) \\ &= 6t - 4t \cdot \ln(t) - 2t \\ &= 4t - 4t\ln(t) = 4t \cdot (1 - \ln(t)) \\ h''(t) &= 4 \cdot (1 - \ln(t)) + 4t \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) \\ &= 4 - 4\ln(t) - 4 = -4\ln(t) \end{aligned}$$

Aus der notwendigen Bedingung für Extrema $h'(t) = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} h'(t) = 4t \cdot (1 - \ln(t)) &= 0 && t > 0 \\ 1 - \ln(t) &= 0 \\ \ln(t) &= 1 \\ t &= \mathrm{e}. \end{aligned}$$

Da $h''(\mathrm{e}) = -4\ln(\mathrm{e}) = -4 \cdot 1 = -4 < 0$, ist die hinreichende Bedingung für ein Maximum erfüllt. Der Ballon erreicht zum Zeitpunkt $t = \mathrm{e}$ seine größte Höhe.
Die Höhe selbst entspricht dem Funktionswert $h(\mathrm{e})$ in 100 Metern:
$h(\mathrm{e}) = 2\mathrm{e}^2 \cdot (1{,}5 - \ln(\mathrm{e})) = 2\mathrm{e}^2\,(1{,}5 - 1) = \mathrm{e}^2 \approx 7{,}389$

Die größte erreichte Höhe ist 738,9 m.

1.2 ▶ Zeitpunkt des stärksten Steigens/Fallens angeben (17BE)

Gefragt ist nach den Zeitpunkten t zu denen h die **extremale** Steigung annimmt, d.h. nach den Extremstellen der ersten Ableitung h'. Dies sind genau die **Wendestelle** von h. Bilde für deren Berechnung noch die dritte Ableitung $h'''(t) = -\frac{4}{t}$.

Aus der notwendigen Bedingung $h''(t) = 0$ für Wendestellen folgt:

$$\begin{aligned} h''(t) = -4\ln(t) &= 0 \\ \ln(t) &= 0 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Wegen $h'''(t) = -\frac{4}{1} = -4 \neq 0$ ist die hinreichende Bedingung für eine Wendestelle erfüllt. Die Steigung zum Zeitpunkt $t = 1$ ist mit $h'(1) = 4 \cdot (1 - \ln(1)) = 4$ positiv. Damit gilt: Zum Zeitpunkt $t = 1$ **steigt** der Ballon am stärksten.

Alternativ: Die Funktion $-4\ln(t)$ besitzt eine Nullstelle, an der das Vorzeichen von $+$ nach $-$ wechselt. Es liegt also tatsächlich ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung vor und h besitzt an dieser Stelle eine Wendestelle.

h besitzt keine weiteren Wendestellen und h' damit keine weiteren Extremstellen. Der Zeitpunkt, zu dem der Ballon am stärksten steigt, ist somit am **Rande des Definitionsbereichs** zu suchen. Da h die Höhe des Ballons beschreibt und die Ballonfahrt nach Teilaufgabe 1.1 zum Zeitpunkt $t = e^{1,5}$ zu Ende ist, erhalten wir den **Definitionsbereich** $D_h =]0; e^{1,5}]$.

Wegen $h''(t) = -4\ln(t) < 0$ für $t > 1$ ist die **1. Ableitung h' streng monoton fallend** auf $]1; e^{1,5}]$ und nimmt bei $t = e^{1,5}$ ihr **Randminimum** an.

Zum Zeitpunkt der **Landung** $t = e^{1,5}$ sinkt der Ballon am stärksten.

▶ Jeweilige Sinkgeschwindigkeit und Höhe bestimmen

Die **Sinkgeschwindigkeit** entspricht jeweils dem **Funktionswert** der ersten Ableitung f'. Die **Höhe** entspricht jeweils dem **Funktionswert** der Funktion h.

1. Schritt: Höhe und Steigungsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt des stärksten Anstiegs

$h'(1) = 4 \cdot (1 - \ln(1)) = 4$, $h(1) = 2 \cdot (1{,}5 - \ln(1)) = 3$.

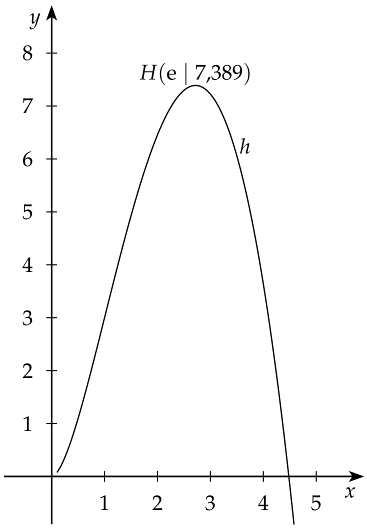
Zum Zeitpunkt $t = 1$ steigt der Ballon mit einer Geschwindigkeit von 400 m pro Stunde und befindet sich in einer Höhe von 300 m.

2. Schritt: Höhe und Sinkgeschwindigkeit zum Zeitpunkt des stärksten Abfalls

$h'(e^{1,5}) = 4e^{1,5} \cdot \left(1 - \ln(e^{1,5})\right) = -2e^{1,5} \approx -8{,}96$
$h(e^{1,5}) = 0$.

Zum Zeitpunkt $t = e^{1,5}$ sinkt der Ballon mit einer Geschwindigkeit von etwa 896 m pro Stunde und befindet sich in der Höhe $h = 0$.

▶ Graphen von h skizzieren

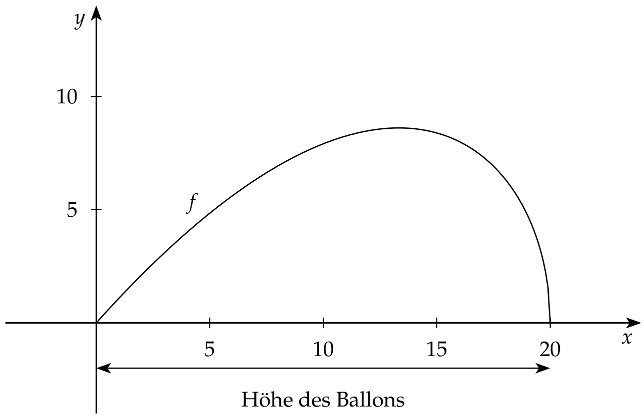


2.1 **▶ Höhe des Ballons berechnen** (12BE)

In der Aufgabenstellung ist der Hinweis gegeben, dass die vertikalen Lastbänder am höchsten Punkt des Ballons, also an der Ballonspitze, starten und bis zum runden Brennerrahmen verlaufen.

Aus Abbildung 2 geht hervor, dass der Ballon „quer“ im Koordinatensystem liegt: Seine Spitze liegt auf der x-Achse!

Die vertikalen Lastbänder werden im Querschnittsprofil durch den Graphen von f dargestellt. Die x-Achse ist die Rotationsachse des Ballons. Der **Schnittpunkt** mit der x-Achse entspricht im Querschnitt genau der Ballonspitze.
Der Abstand der **Nullstelle** von f vom **Ursprung** ist genau die Höhe des Ballons.



Setze $f(x) = 0$ und berechne die Nullstelle von f:

$f(x) = \frac{x}{4} \cdot \sqrt{20-x} = 0$. Du kannst sofort erkennen, dass f die Nullstellen $x = 0$ und $x = 20$ besitzt, da ein Produkt Null wird, wenn einer seiner Faktoren Null ist. Da an der Stelle $x = 0$ die Austrittsdüse vorliegt, befindet sich die Spitze des Ballons bei $x = 20$.

Der Ballon ist 20 m hoch.

2.2 **▶ Länge des horizontalen Lastbandes berechnen**

Am Ballonäquator ist der Umfang des Ballons maximal. Im Koordinatensystem entsteht Ballon durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse. Den größten Umfang hat der Ballon am **Maximum** von f.

Bilde zunächst die Terme der ersten beiden Ableitungen von f nach der Kettenregel und der Potenzregel.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}\sqrt{20x^2-x^3} = \frac{1}{4}\cdot\left(20x^2-x^3\right)^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(20x^2-x^3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(40x-3x^2\right) \\ &= \frac{1}{8}\cdot\left(20x^2-x^3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(40x-3x^2\right) \end{aligned}$$

Bilde die zweite Ableitung nun über die Produktregel unter Verwendung der Ketten- und Potenzregel.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(20x^2-x^3\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(40x-3x^2\right)^2+\frac{1}{8}\cdot\left(20x^2-x^3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(40-6x) \\ &= -\frac{1}{16}\cdot\frac{\left(40x-3x^2\right)^2}{\left(20x^2-x^3\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{8}\cdot\frac{40-6x}{\left(20x^2-x^3\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{1}{16}\cdot\frac{\left(40x-3x^2\right)^2}{\left(20x^2-x^3\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2}{16}\cdot\frac{(40-6x)\cdot\left(20x^2-x^3\right)}{\left(20x^2-x^3\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{1600x^2-240x^3+9x^4}{16\left(20x^2-x^3\right)^{\frac{3}{2}}}+2\cdot\frac{800x^2-160x^3+6x^4}{16\left(20x^2-x^3\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-1600x^2+240x^3-9x^4+1600x^2-320x^3+12x^4}{16\left(20x^2-x^3\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3x^4-80x^3}{16\left(20x^2-x^3\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Aus der notwendigen Bedingung für Extrema $f'(x) =$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}\cdot\left(20x^2-x^3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(40x-3x^2\right) &= 0 \\ \frac{1}{8}\cdot\frac{40x-3x^2}{\sqrt{20x^2-x^3}} &= 0 \\ \frac{1}{8}\cdot\frac{x\cdot(40-3x)}{\sqrt{x^2\cdot(20-x)}} &= 0 \\ \frac{1}{8}\cdot\frac{x\cdot(40-3x)}{x\cdot\sqrt{20-x}} &= 0 \\ \frac{1}{8}\cdot\frac{40-3x}{\sqrt{20-x}} &= 0 \end{aligned}$$

Ein Bruch wird Null, wenn sein Zähler Null wird:

$$\begin{aligned} 40-3x &= 0 \\ x &= \frac{40}{3} \end{aligned}$$

Wegen $f''\left(\frac{40}{3}\right) = \dfrac{3\cdot\left(\frac{40}{3}\right)^4-80\cdot\left(\frac{40}{3}\right)^3}{16\left(20\cdot\left(\frac{40}{3}\right)^2-\left(\frac{40}{3}\right)^3\right)^{\frac{3}{2}}} \approx \dfrac{-94814{,}81}{652828{,}8} < 0$ ist das hinreichende Kriterium für ein Maximum erfüllt.

Alternativ: Betrachte $f'(x) = \dfrac{1}{8}\dfrac{40-3x}{\sqrt{20-x}}$. Aufgrund des linearen Terms im Zähler hat diese Funktion nur genau eine Nullstelle $x = \frac{40}{3}$. An dieser Nullstelle wechselt das Vorzeichen der ersten Ableitung von $+$ nach $-$. Damit besitzt die Funktion f an dieser Stelle ein Maximum.

Der Funktionswert $f\left(\frac{40}{3}\right) \approx 8{,}6066$ liefert den Radius des Ballons am Äquator. Für die Länge des horizontalen Lastbandes am Äquator gilt dann nach der Formel für den Kreisumfang:
$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 8{,}6066 \approx 54{,}08$.

Das horizontale Lastband am Äquator ist etwa 54,08 m lang.

▶ Durchmesser des Brennerrahmens berechnen

Der Brennerrahmen ist 1 m über der Austrittsdüse des Brenners angebracht; im Querschnittsprofil entspricht dies der Stelle $x = 1$. Der Funktionswert $f(1) \approx 1{,}09$ liefert wieder den Radius des Ballons an dieser Stelle. Gefragt ist nach dem Durchmesser:
$d = 2 \cdot r = 2 \cdot f(1) \approx 2{,}18\,\text{m}$.
Der Durchmesser des Brennerrahmens beträgt etwa 2,18 m.

3. **▶ Volumen des Ballons berechnen** (11BE)

Laut Aufgabentext entspricht das Ballonvolumen gerade dem Rotationsvolumen von f vom Brennerrahmen ($x = 1$) bis zur Ballonspitze ($x = 20$). Für dieses gilt:

$$V = \pi \cdot \int_1^{20} (f(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \int_1^{20} \left(\frac{x}{4}\sqrt{20-x}\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \int_1^{20} \frac{x^2}{16}(20-x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \cdot \int_1^{20} \left(\frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{16}x^3\right)\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}x^4\right]_1^{20}$$

$$= \pi\left[\frac{5}{12}x^3 - \frac{1}{64}x^4\right]_1^{20} = \pi\left[\left(\frac{5}{12}\cdot 20^3 - \frac{1}{64}\cdot 20^4\right) - \left(\frac{5}{12}\cdot 1^3 - \frac{1}{64}\cdot 1^4\right)\right]$$

$$= \pi\left[\frac{10.000}{3} - 2500 - \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{64}\right)\right]$$

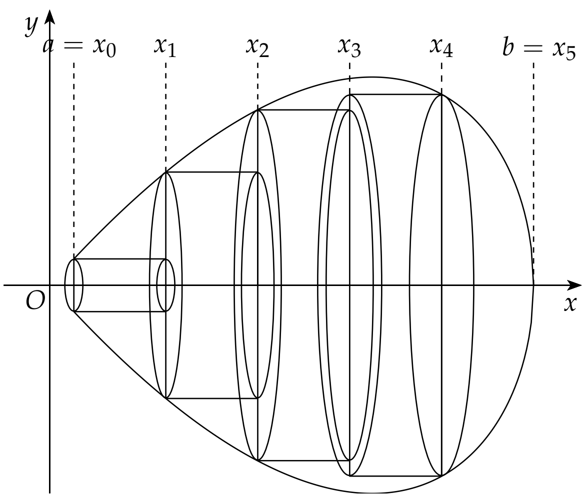
$$= \frac{159.923}{192}\pi \approx 2.616{,}7\,\text{m}^3.$$

Der Ballon fasst also ein Volumen von etwa 2616,7 Kubikmetern.

▶ Erläuterung, wie das Rotationsvolumen über Zylinder bestimmt werden kann

Das Volumen von Rotationskörpern kann äquivalent zu der Flächenbestimmung unter Funktionsgraphen bestimmt werden. Dazu sind folgende Schritte notwendig:

(1) Teile das betrachtete Intervall $[a; b]$ in n gleich große Teilintervalle der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Dies ist die Höhe der einzelnen Teilzylinder. Die Ränder heißen $a = x_0$, x_1, x_2, ..., $x_n = b$.



(2) Bestimme die Funktionswerte $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$. Der **kleinere** der beiden Funktionswerte in einem Teilintervall ist der Radius des zugehörigen Zylinders.

(3) Ein solcher Kreiszylinder hat nach der allgemeinen Formel ein Volumen von gerade $V = \pi \cdot (f(x_n))^2 \cdot \Delta x$. Alle Zylinder zusammen haben das Volumen

$$\begin{aligned} V_{\text{ges}} &= \pi \cdot (f(x_0))^2 \cdot \Delta x + \pi \cdot (f(x_1))^2 \cdot \Delta x + ... + \pi \cdot (f(x_n))^2 \cdot \Delta x \\ &= \sum_{i=0}^{n} \pi \cdot (f(x_i))^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot \sum_{i=0}^{n} (f(x_i))^2 \cdot \Delta x \end{aligned}$$

(4) Das Volumen wird immer exakter, wenn die einzelnen Intervall immer feiner werden und das Volumen durch immer mehr Zylinder ausgefüllt wird. Die Länge Δx der Teilintervalle wird immer kleiner.

(5) Stellt man sich vor, dass das Volumen durch unendlich viele Zylinder ausgefüllt wird, die unendlich klein sind, so hat man das Rotationsvolumen beliebig genau ausgefüllt. Dieser Grenzwert für $n \to \infty$ hat zur Folge, dass die Längen Δx der Teilintervalle praktisch gleich Null sind, sodass man symbolisch dx schreibt („Differenzial"). Aus der Summe wird ein Integral, und man hat die Formel für das Rotationsvolumen gefunden:

$$V = \lim_{n \to \infty} \pi \cdot \sum_{i=0}^{n} (f(x_i))^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$