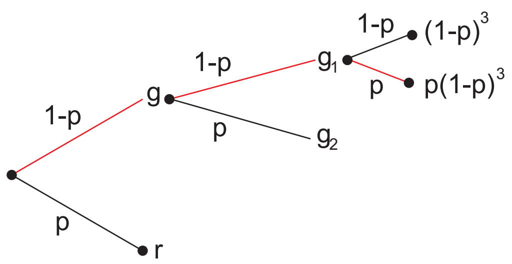
1.1 ▸ Wahrscheinlichkeit für drei Einzelkontrollen berechnen (2P)

Gesucht ist Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine defekte Fotozelle erst bei der dritten Kontrolle ausgesondert wird.

Du kannst das Ereignis durch ein dreistufiges Bernoulli-Experiment darstellen mit den folgenden Stufen:

1. Die Fotozelle wird einmal kontrolliert und nicht ausgesondert.
2. Die Fotozelle wird wieder kontrolliert und nicht ausgesondert.
3. Die Fotozelle wird ein drittes Mal kontrolliert, ausgesondert und entfernt.

Das zugehörige Baumdiagramm sieht dann wie folgt aus:



Nach der Pfadregel musst du, um die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E zu bestimmen, die Einzel-Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse auf den jeweiligen Stufen multiplizieren. Diese sind die Wahrscheinlichkeit p, dass eine Fotozelle ausgesondert wird und die Gegenwahrscheinlichkeit $1-p$, dass die Fotozelle nicht ausgesondert wird. Um diese herauszufinden, kannst du die folgende Information verwenden:

Im Durchschnitt wird eine von fünf fehlerhaften Fotozellen nicht entdeckt.

Das heißt, mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{4}{5}$ wird eine fehlerhafte Fotozelle bei einer Einzelkontrolle entdeckt und $(1-p) = \frac{1}{5}$ wird diese **nicht** entdeckt. Die Wahrscheinlichkeit p_1 dafür, dass die Fotozelle erst bei der dritten Kontrolle entdeckt und ausgesondert wird, ergibt sich gemäß dem entsprechenden Pfad im Baumdiagramm zu:

$$p_1 = (1-p)^2 \cdot (p) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{125} = 0,032$$

Die hier gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $p = 0,032 = 3,2\,\%$.

1.2 ▸ Wahrscheinlichkeit für Ereignis *A* berechnen (6P)

Wir suchen zunächst die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zehn getesteten, fehlerhaften Fotozellen, **mindestens** neun entdeckt werden.

Sei X die Zahl der entdeckten fehlerhaften Fotozellen. X kann als binomialverteilt angenommen werden, denn:

- Entweder wird die fehlerhafte Fotozelle nach der gesamten Untersuchung ausgesondert oder nicht.
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine defekte Fotozelle entdeckt wird, bleibt immer gleich.

Der Aufgabenstellung können wir entnehmen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine defekte Fotozelle in einer Einzelkontrolle nicht entdeckt wird $\frac{1}{5}$ beträgt. Demnach wird eine defekte Fotozelle in jeder Einzelkontrolle mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{5}$ entdeckt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine defekte Fotozelle im gesamten Kontrollverlauf irgendwann entdeckt wird, ergibt sich dann als Gegenwahrscheinlichkeit dazu, dass sie nie entdeckt wird. Letzte kannst du über die

Pfadmultiplikationsrgel berechnen.

Insgesamt ergibt sich dann die Wahrscheinlichkeit, dass eine Fotozelle im Gesamtdurchgang entdeckt wird, wie folgt:

$$p = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 0,992$$

Wir suchen also die kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(A) = P(X \geq 9)$:

$$\begin{aligned} P(X \geq 9) &= P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= \binom{10}{9}(0,992)^9 \cdot (1 - 0,992)^1 + \binom{10}{10}(0,992)^{10} \cdot (1 - 0,992)^0 \\ &\approx 0,0744 + 0,9228 \\ &= 99,72\,\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens neun fehlerhafte Fotozellen entdeckt werden beträgt etwa 99,72 %.

▶ Wahrscheinlichkeit für Ereignis B berechnen

Das Ereignis B kann in zwei Bernoulli Experimente aufgeteilt werden:

B_1: Es werden fünf fehlerhafte Fotozellen getestet und drei davon entdeckt.

B_2: Es werden fünf fehlerhafte Fotozellen getestet und alle entdeckt.

Nach der Pfadregel gilt: $P(B) = P(B_1) \cdot P(B_2)$. B_1 und B_2 sind wiederum Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten wir über eine Binomialverteilung bestimmen können. Die dabei verwendete Binomialverteilung hat die Parametern $n = 5$ und $p = 0,992$, denn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine defekte Fotozelle entdeckt wird, liegt nach den Erkenntnissen von oben bei $p = 0,992$.

$$\begin{aligned}P(B) &= P(B_1)\cdot P(B_2)\\ &= \left(\binom{5}{3}\cdot(0,992)^3\cdot(1-0,992)^2\right)\cdot\left(\binom{5}{5}\cdot(0,992)^5\cdot(1-0,992)^0\right)\\ &\approx 0,0006\cdot 0,9606\\ &\approx 0,0006\\ &\mathrel{\widehat{=}} 0,06\,\%\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten fünf nur drei fehlerhafte Fotozellen und unter den restlichen fünf alle fehlerhaften Fotozellen entdeckt werden, beträgt etwa 0,06 %.

2.1 ▶ **Wahrscheinlichkeiten $P(p)$ berechnen und Ergebnisse auswerten** (6P)

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(p)$ mit drei verschiedenen Werten von p für das Ereignis:

Der Rauchmelder löst Alarm aus. Das geschieht genau dann, wenn **mindestens** zwei der drei enthaltenen Fotozellen eine Reaktion zeigen.

Die Einzelwahrscheinlichkeiten p_i dafür, dass eine Fotozelle reagiert, sind $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,5$ und $p_3 = 0,7$. X sei nun die Zahl der reagierenden Fotozellen. Wir können X dabei als binomialverteilt annehmen:

- Entweder reagiert die Fotozelle oder sie reagiert nicht.
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Fotozelle reagiert ist immer gleich p.

Da der Rauchmelder reagiert, wenn zwei oder drei der Fotozellen reagieren, suchen wir die kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(p_i) = P(X \geq 2)$ mit den Parametern $n = 3$ und $p = p_i$ mit $i \in \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned}P(p_1) &= P_1(X=2)+P_1(X=3)\\ &= \binom{3}{2}0,3^2\cdot(1-0,3)^1+\binom{3}{3}0,3^3\cdot(1-0,3)^0\\ &= 0,189+0,027\\ &\mathrel{\widehat{=}} 21,6\,\%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(p_2) &= P_2(X=2)+P_2(X=3)\\ &= \binom{3}{2}0,5^2\cdot(1-0,5)^1+\binom{3}{3}0,5^3\cdot(1-0,5)^0\\ &= 0,375+0,125\\ &\mathrel{\widehat{=}} 50\,\%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(p_3) &= P_3(X=2)+P_3(X=3)\\ &= \binom{3}{2}0,7^2\cdot(1-0,7)^1+\binom{3}{3}0,7^3\cdot(1-0,7)^0\\ &= 0,441+0,343\\ &\widehat{=}78,4\,\%\end{aligned}$$

Vergleiche nun einen Rauchmelder mit einer Fotozelle, die mit der Wahrscheinlichkeit p_i reagiert mit einem Rauchmelder mit drei Fotozellen, der mit der Wahrscheinlichkeit $P(p_i)$ Alarm auslöst. Du kannst erkennen: Die Rauchmelder, die mit Fotozellen der Reaktionswahrscheinlichkeit $p_1=0,3$ ausgestattet sind, werden durch die 3-er Kombination unzuverlässiger, weil die Wahrscheinlichkeit kleiner wird, bei $p_2=0,5$ besteht kein Unterschied und bei $p_3=0,7$ erhöht sich tatsächlich die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rauchmelder Alarm auslöst, wenn man drei Fotozellen kombiniert.

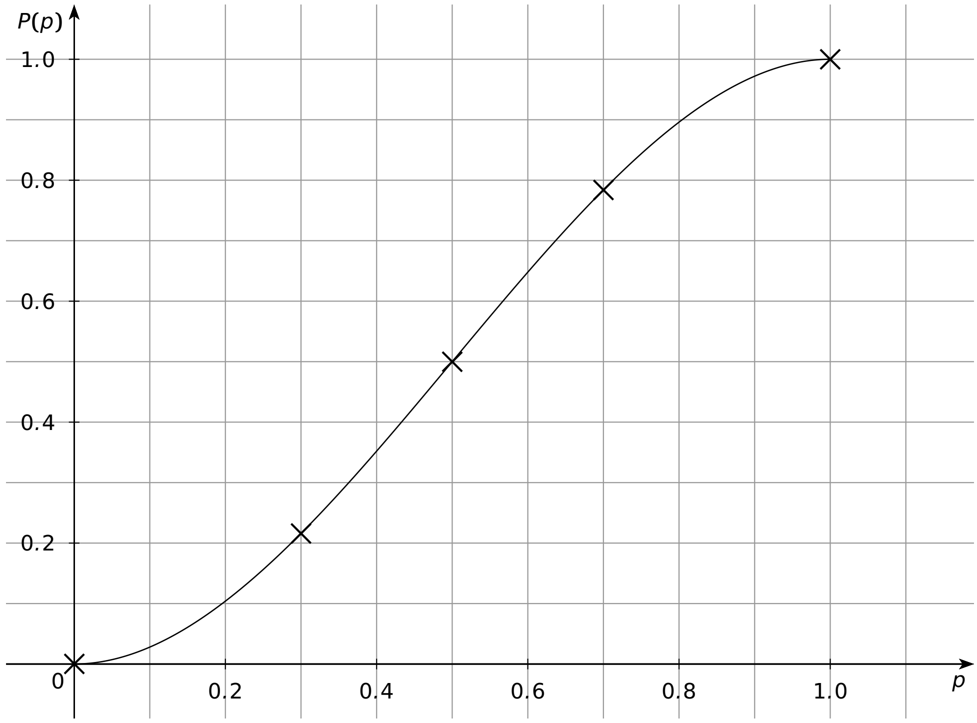
Du kannst also vermuten: Die 3-er Kombination lohnt sich nur, wenn die Fotozellen mit einer Wahrscheinlichkeit $p>0,5$ reagieren, dann wird die Wahrscheinlichkeit geringfügig erhöht, wie etwa bei $p=0,7$ um insgesamt $8,4$ Prozentpunkte.

2.2 ► $P(p)$ herleiten und skizzieren (2P)

Um den Term für $P(p)$ herzuleiten, kannst du analog zu Aufgabe 2.1 vorgehen: Da der Rauchmelder reagiert, wenn zwei oder drei der Fotozellen reagieren, suchen wir die kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(p)=P(X\geq 2)$ mit den Parametern $n=3$ und p, wobei p variabel ist:

$$\begin{aligned}P(p) &= P(X=2)+P(X=3)\\ &= \binom{3}{2}p^2\cdot(1-p)^1+\binom{3}{3}p^3\cdot(1-p)^0\\ &= \frac{3\cdot 2}{2\cdot 1}\cdot p^2\cdot(1-p)+1\cdot p^3\cdot 1\\ &= 3\cdot(p^2-p^3)+p^3\\ &= 3p^2-2p^3\end{aligned}$$

Um nun den Graphen von P zu skizzieren, kannst du $P(0)=0$ und $P(1)=1$, sowie die Werte $P(p_1)\approx 0,22$, $P(p_2)=0,5$ und $P(p_3)\approx 0,78$ einzeichnen und als Orientierungspunkte für die Skizze verwenden:



2.3 ▶ Bedeutung von *R* erläutern und Rechnung im Kasten deuten (4P)

Gefragt ist, welche Bedeutung die Funktion R im Sachzusammenhang hat. Zunächst kannst du an der Funktionsgleichung erkennen, dass $R(p)$ den Funktionsterm von $P(p)$ enthält:

$$R(p) = -2p^3 + 3p^3 - p = P(p) - p$$

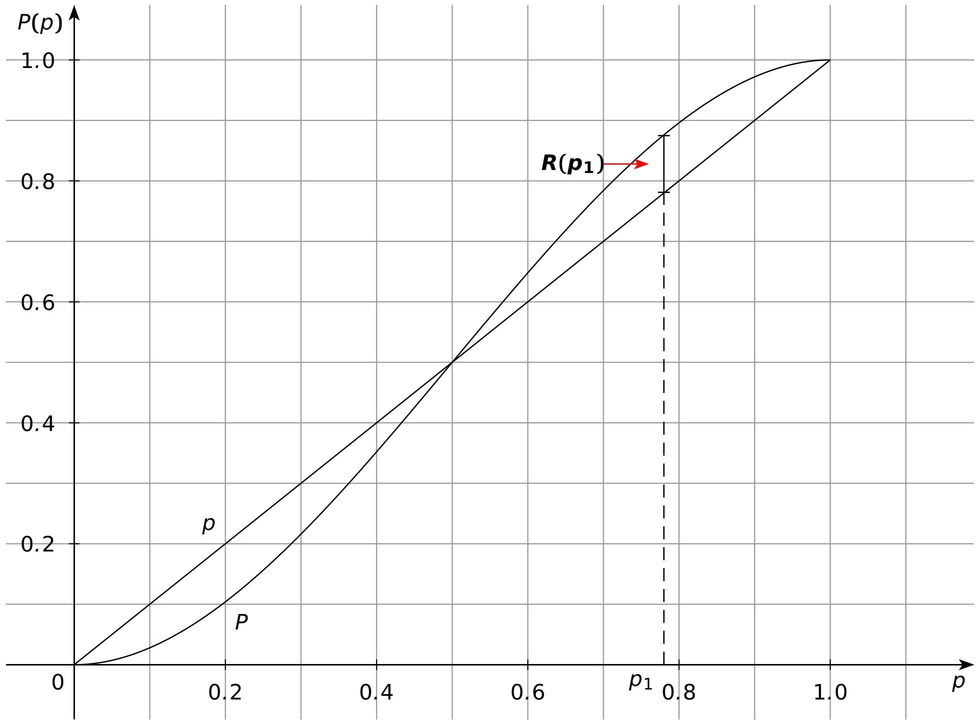
P gibt dabei die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Rauchmelder mit drei Fotozellen Alarm auslöst und p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Rauchmelder mit einer Fotozelle Alarm auslöst. Die Differenz R der beiden Größen gibt also in Abhängigkeit von p an, wie viel effektiver ein Rauchmelder mit drei Fotozellen gegenüber einem Rauchmelder mit einer Fotozelle ist.

Betrachte nun die Zeilen (1) bis (3):

- In Zeile (1) wird die erste Ableitung R' von R nach p gebildet.
- In Zeile (2) wird die Ableitung $R'(p) = 0$ gesetzt und nach p_1 aufgelöst. Es ergibt sich $p_1 \approx 0,78$.
- In Zeile (3) wird die zweite Ableitung R'' an der Stelle p_1 berechnet: Sie ist negativ.

Du kannst erkennen: Hier wird ein **Maximum der Funktion *R*** berechnet, denn in einem lokalen Maximum einer Funktion wird ihre erste Ableitung Null und ihre zweite Ableitung negativ. Dies ist für R an der Stelle $p_1 \approx 0,78$ der Fall. Die Funktion R wird also bei p_1 maximal.

Das bedeutet: Wenn die Fotozelle mit einer Wahrscheinlichkeit von 78 % reagiert, lohnt es sich am meisten, den Rauchmelder mit drei Fotozellen herzustellen, da dann die Differenz der Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Rauchmelder mit drei oder nur einer Fotozelle Alarm auslöst, am größten ist. In der Skizze aus Aufgabe 2.2 kannst du dir das Ergebnis vor Augen führen:



3. ▸ **Hypothesentest entwickeln** (8P)

Es soll ein Hypothesentest entwickelt werden, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % für einen Fehler 1. Art entscheidet, ob sich die Ausschussquote tatsächlich verringert hat. Zuvor ist sie von 3 % um ein Drittel gestiegen. Die Ausschussquote vor der Maßnahme des Unternehmens zur Verringerung betrug daher:

$$p_0 = 3\,\% + \frac{1}{3} \cdot 3\,\% = 4\,\%$$

Sei X die Zahl der Rauchmelder, die nicht funktionieren.

Da man mit dem Test bestätigen will, dass sich die Ausschussquote verringert hat, will man die Nullhypothese mit $H_0 : p \geq 0,04$ verwerfen. Dabei werden 850 Rauchmelder getestet. X kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 850$. Bei wahrer Nullhypothese ist $p = 0,04$.

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn **sehr wenige** Rauchmelder kaputt sind. Als obere Grenze des Ablehnungsbereichs können wir also k mit $\overline{A} = \{0, 1, .., k\}$ setzen.

Das Signifikanzniveau von 5 % gibt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art an, also dafür, dass die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt wird. Dies ist dann der Fall, wenn $P(X \leq k) < 0,05$ ist für $p = 0,04$.

Da n sehr groß ist, bietet sich eine Näherung durch die Normalverteilung an. Dabei erhalten wir

$\mu = n \cdot p = 850 \cdot 0{,}04 = 34$

und

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{34 \cdot 0{,}96} \approx 5{,}71.$

Mit $\sigma > 3$ ist die Laplace-Bedingung erfüllt und eine Näherung durch die Normalverteilung ist zulässig.

Zurück zu unserem Wert für k:

$$\begin{aligned}
P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k+0{,}5-34}{5{,}71}\right) &\leq 0{,}05 && \mid \cdot(-1) \\
-\Phi\left(\frac{k-33{,}5}{5{,}71}\right) &\geq -0{,}05 && \mid +1 \\
1-\Phi\left(\frac{k-33{,}5}{5{,}71}\right) &\geq 0{,}95 \\
\Phi\left(-\frac{k-33{,}5}{5{,}71}\right) &\geq 0{,}95
\end{aligned}$$

Die Tabelle zur Standardnormalverteilung liefert $\Phi(1{,}65) = 0{,}95$, also:

$$\begin{aligned}
-\frac{k-33{,}5}{5{,}71} &\geq 1{,}65 && \mid \cdot(-5{,}71) \\
k-33{,}5 &\leq -9{,}42 && \mid +33{,}5 \\
k &\leq 24{,}08
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0, 1..24\}$. Wenn höchstens 24 der 850 Rauchmelder kaputt sind, wird die Nullhypothese abgelehnt und die Maßnahme zur Senkung der Ausschussquote hat gewirkt.