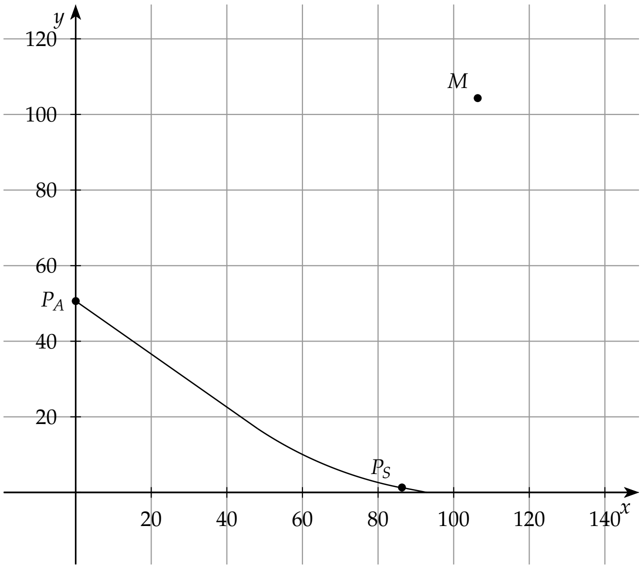
1.1 ▶ Anlauf skizzieren (3 BE)

Um den Anlauf zu skizzieren, musst du zunächst die dir gegebenen Punkte in das Koordinatensystem eintragen. Diese sind in diesem Fall die Punkte P_A, M und P_S.

Desweiteren kannst du die Längen, die dir gegebenen sind, unter den jeweiligen Winkeln abtragen.

Der Punkt M ist der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius $r = \overline{MP_S}$. Trage die Punkte in das Koordinatensystem ein.

Berechne über $\tan(\alpha) = m$ die Steigungen der Geraden, die die Streckenabschnitte durch P_A und P_S beschreiben.



1.2 ▶ Geradengleichung des geradlinigen Anlaufs aufstellen (5 BE)

Da die Aufgabenstellung dir den Steigungswinkel γ der Geraden gibt, kannst du die Steigung selbiger über die Gleichung $\tan(\gamma) = m$ bestimmen.

Achte darauf, dass dein Rechner auf `DEGREE` eingestellt ist und nicht auf `RADIAN`!

Nach der allgemeinen Geradengleichung $g(x) = m \cdot x + n$ oder nach obiger Vorgabe $g(x) = \tan(\gamma) \cdot x + n$, musst du nun nur noch den y-Achsenabschnitt n mittels eines Punktes P_A bestimmen.

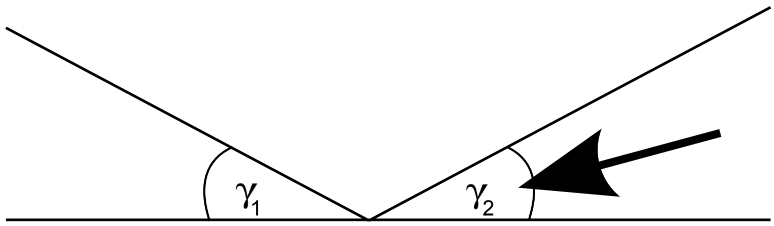
Für die Steigung ergibt sich folgender Wert:

$\tan\gamma = m \Longrightarrow m \approx 0{,}7$

Hierbei handelt es sich um eine positive Steigung, allerdings wissen wir, dass die Steigung negativ sein muss, damit die Schanze auch aussieht wie auf der Skizze gezeigt.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Die folgende Skizze soll die Problematik verdeutlichen, dass es zu jedem Winkel, der gegenüber der Horizontalen eingeschlossen wird, auch einen Gegenwinkel gibt.



Die Berechnung durch den Rechner gibt dir nun den Wert m für den Winkel γ_2. Wir suchen allerdings den negativen „Partner“ dazu. Folglich muss für unsere Steigung gelten $m = -\tan(\gamma)$. Es ergibt sich die Steigung $m \approx -0,7$.

Somit erhalten wir die Geradengleichung $g(x) = -0,7 \cdot x + n$.

Bestimme nun n, indem du die Koordinaten des Punktes P_A, der allgemein die Form $P_A(x \mid g(x))$ und in diesem Fall die Koordinaten $P_A(0 \mid 50,64)$ besitzt.
Folglich liegt er bereits auf der y-Achse, sodass sein y-Wert bereits n beschreibt.
$n = 50,64$.

Somit ergibt sich die Geradengleichung von g wie folgt.

$g(x) = -0,7 \cdot x + 50,64$

▶ Punkt P_E bestimmen

Da es sich bei dem Anlauf um eine Gerade handelt und du die Länge der Strecke $\overline{P_A P_E}$ gegeben hast, kannst du die Koordinaten von P_E mittels des Sinus und des Kosinus bestimmen.
Die Gegenkathete bzw. die Ankathete kannst du über $\sin\gamma = \frac{G}{H}$ bzw $\cos\gamma = \frac{A}{H}$ bestimmen, wobei gilt $P_E(x_a + A \mid y_a - G)$.

Berechne unter diesen Voraussetzungen nun P_E mittels der An- und der Gegenkathete.

$$\begin{aligned}
\cos\gamma &= \frac{A}{H} && \mid \cdot H \\
\cos\gamma \cdot H &= A \\
\cos(35) \cdot 56,3 &= A \\
46,12 &= A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\gamma &= \frac{G}{H} && \mid \cdot H \\
\sin\gamma \cdot H &= G \\
\sin(35) \cdot 56,3 &= G \\
32,29 &= G
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich der Punkt P_E mit $P_E(x_a + 46,12 \mid y_a - 32,29)$ und somit $P_E(46,12 \mid 18,35)$.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

1.3 ▶ **m_1 und m_2 bestimmen** (7 BE)

m_1 soll laut des Kastens die Steigung des oberen geradlinigen Anlaufs beschreiben, der durch eine Gerade durch P_A und P_E beschrieben wird, die du bereits mit

$g(x) = -0,7 \cdot x + 50,64$

bestimmt hast.

Die Gerade durch P_E und M, die den Radius des kreisförmigen Übergangsbogens beschreibt, kannst du über ein lineares Gleichungssystem berechnen, indem du die Koordinaten der beiden Punkte jeweils in die allgemeine Geradengleichung $r(x) = m_2 \cdot x + c$ einsetzt.

Somit ergibt für m_1 der Wert $m_1 = -0,7$.

Stelle nun das LGS auf, um die Steigung m_2 zu bestimmen. Mit eingesetzten Koordinaten der Punkte P_E und M ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{I} & 104,35 & = & m_2 \cdot 106,36 & + & c \cdot 1 \\
\text{II} & 18,35 & = & m_2 \cdot 46,12 & + & c \cdot 1 \quad \text{Rechne } I - II \\
\hline
\text{IIA} & 86 & = & m_2 \cdot 60,24 & \mid : 60,24 & \\
 & 1,427 & \approx & m_2 & &
\end{array}$$

Setze diesen Wert in I ein und berechne c mittels folgender Gleichung.

$$104,35 = 1,427 \cdot 106,36 + c$$

$$104,35 = 151,776 + c \qquad \mid -151,776$$

$$-47,426 = c$$

Somit ergeben sich folgende Werte für m_2 und c.

$m_2 \approx 1,428; \quad c \approx -47,426$

Folglich gilt $m_1 = -0,7$ und $m_2 = 1,427$.

▶ **Produkt aus m_1 und m_2**

Berechne zunächst das Produkt der beiden Steigungen. Für Geraden, die orthogonal zueinander stehen, gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$.

$(-0,7) \cdot 1,427 \approx -1.$

Somit stehen die Geraden senkrecht aufeinander. Da die Strecke $P_E M$ den Radius des Übergangsbogens beschreibt und für Kreise gilt, dass sie sich ohne Knick an jede Strecke anschließen, zu der ihr Radius senkrecht steht, gilt somit, dass sich der Übergangsbogen ohne Knick an den oberen geradlinigen Anlauf anschließt.

2 ▶ **Vier Bedingungen angeben** (8 BE)

Bedingungen beschreiben Tatsachen, die gelten müssen, damit eine gewisse Vorgabe erfüllt ist. Sie können durch Funktionswerte, aber auch durch Steigungen an bestimmten Stellen ausgedrückt werden.

Allgemein wird eine Bedingung wie folgt aufgestellt.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$p_3(x_0) \stackrel{!}{=} f(x_0) \qquad p_3'(x_0) \stackrel{!}{=} f'(x_0)$

Damit die Näherung ohne Knick und Sprung anschließt, müssen die oben genannten Bedingungen erfüllt werden. Beachte, dass für Geraden gilt $g'(x) = m$.

Somit ergeben sich für die Punkte P_S und P_E die folgenden vier Bedingungen.

1. $p_3(46,12) \stackrel{!}{=} 18,35$
2. $p_3'(46,12) \stackrel{!}{=} m_1 = -0,7$
3. $p_3(86,32) \stackrel{!}{=} 1,28$
4. $p_3'(86,32) \stackrel{!}{=} -\tan(11) \approx -0,194$

Achte für die Steigung in P_S auch wieder darauf, dass der Tangens die positive Steigung des Gegenwinkels berechnet, die Schanze aber weiterhin abfällt.

▶ **Prüfen ob Bedingungen in P_E erfüllt sind**

Um zu prüfen, ob die Bedingungen erfüllt sind, suchst du dir zunächst die Bedingung für P_E, der die Koordinaten $P_E(46,12 \mid 18,35)$ besitzt, aus den vier Bedingungen heraus.

1. $p_3(46,12) \stackrel{!}{=} 18,35$
2. $p_3'(46,12) \stackrel{!}{=} m_1 = -0,7$

Leite in einem weiteren Schritt die Funktion p_3 ab, um die auch die zweite Bedingung prüfen zu können.

$$p_3(x) = -0,000028053 \cdot x^3 + 0,011864312 \cdot x^2 - 1,61556349 \cdot x + 70,3757036$$

$$\begin{aligned} p_3'(x) &= -3 \cdot 0,000028053 \cdot x^2 + 2 \cdot 0,011864312 \cdot x - 1,61556349 \\ &= -0,000084159 \cdot x^2 + 0,023728624 \cdot x - 1,61556349 \end{aligned}$$

Prüfe nun die Bedingungen.

$p_3(46,12) \stackrel{!}{=} 18,35$

$$\begin{aligned} 18,35 &= -0,000028053 \cdot (46,12)^3 + 0,011864312 \cdot (46,12)^2 - 1,61556349 \cdot (46,12) + 70,3757036 \\ &= 18,34996023 \end{aligned}$$

Somit gilt $18,34996023 \approx 18,35$, sodass die 1. Bedingung erfüllt ist.

$p_3'(46,12) \stackrel{!}{=} m_1 = -0,7$

$$\begin{aligned} -0,7 &= -0,000084159 \cdot (46,12)^2 + 0,023728624 \cdot 46,12 - 1,61556349 \\ &= -0,7002101224 \end{aligned}$$

Es gilt $-0,7002101224 \approx -0,7$. Somit sind beide Bedingungen erfüllt, sodass sich der Übergangsbogen am Punkt P_E ohne Knick und ohne Sprung anschließt.

3.1 ▶ **$y'_{Kreis}(x)$ bilden** (10 BE)

Die Funktion y_{Kreis} ist gegeben mit der Funktionsgleichung $y_{Kreis}(x) = y_m - \sqrt{R^2 - (x - x_m)^2}$. Sie enthält nur Parameter und keine konkreten Werte. Folglich musst du einige Parameter, nach denen nicht abgeleitet werden soll, betrachten, als ob sie Zahlenwerte wären.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Da die Funktion y_{Kreis} nach x abgeleitet werden soll, wären dies also die Parameter y_m und R.

Leite die Funktion y_{Kreis} nun ab. Achte dabei auf die Summen- und Kettenregel des Differenzierens, da es sich hierbei um eine 2-fach verkette Funktion handelt.

$$\begin{aligned}
y_{Kreis}(x) &= y_m - \sqrt{R^2 - (x - x_m)^2} \\
y'_{Kreis}(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - (x - x_m)^2}} \cdot 2 \cdot -(x - x_m) \cdot 1 \\
y'_{Kreis}(x) &= \frac{x - x_m}{\sqrt{R^2 - (x - x_m)^2}}
\end{aligned}$$

► **Umformungen erklären**

Betrachte zunächst einmal nur die Gleichungen (1) und (2).
Hier kannst du sehen, dass nur der Ausdruck $(y'_{Kreis}(x))^2$ ersetzt wurde. Betrachtest du die Ableitung, die du zuvor bestimmt hast, so kannst du sehen, dass nur der zugehörige Funktionsterm eingesetzt wurde.

Betrachtest du nun die Veränderung von (2) nach (3), so beschränkt sich diese auch wieder nur auf das Ersetzen von Parametern sowie der Variablen x durch eine andere Variable.
Die hier angewandte Substitution lautet $x - x_m = z$.

Der Schritt von (3) nach (4) ist dann ein relativ großer, da sich hier der Term unter der Wurzel wie folgt verändert.

$$\begin{aligned}
1 + \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}}\right)^2 &= 1 + \frac{z^2}{R^2 - z^2} \\
&= \frac{R^2 - z^2}{R^2 - z^2} + \frac{z^2}{R^2 - z^2} \\
&= \frac{R^2 - z^2 + z^2}{R^2 - z^2} \\
&= \frac{R^2}{R^2 - z^2}
\end{aligned}$$

Somit erhältst du durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen des Terms unter der Wurzel aus der Zeile (3) die Zeile (4).

3.2 ► **Länge des Kreisbogens berechnen** (7 BE)

Um die Länge des Kreisbogens zu berechnen, musst du dir erst einmal überlegen, was die einzelnen Parameter R sowie θ_1 und θ_2 bedeuten.
Da es sich hierbei um eine Aufgabe mit Bezug zu Kreisen handelt, beschreibt R in der Regel den Radius des Kreises und somit den Abstand von P_E zu M oder von P_S zu M.

Die Winkel θ_1 und θ_2, die nun die Variablen sind, von denen L_{Bogen} abhängt, beschreiben die Winkel, die die Tangenten des Kreisbogens an seinen „Endpunkten“ einschließen.

Diese Winkel sind dir durch die Aufgabe gegeben mit $\theta_1 = 35°$ und $\theta_2 = 11°$.

Den Radius des Kreises kannst du über den Satz des Pythagoras berechnen, der dann wie folgt aussieht.

$$d(P_E, M) = R = \sqrt{(x_p - x_m)^2 + (y_p - y_m)^2}$$

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$d(P_E, M) = R = \sqrt{(46,12 - 106,36)^2 + (18,35 - 104,35)^2} = \sqrt{(-60,24)^2 + (-86,00)^2} \approx 105$

Berechne nun mittels dieser Länge und den beiden Winkeln die Länge des Kreisbogens.

Rechne zunächst deine Winkel über die Formel $\alpha^* = \dfrac{\alpha \cdot \pi}{180}$ in Bogenmaß um.

$\theta_1^* = \dfrac{35 \cdot \pi}{180} = \dfrac{7}{36} \cdot \pi$

$\theta_2^* = \dfrac{11 \cdot \pi}{180} = \dfrac{11}{180} \cdot \pi$

Somit ergibt sich für die Länge des Kreisbogens die Form

$L_{Kreis} = R \cdot (\theta_1^* - \theta_2^*)$

Setze nun die berechneten Werte ein, um die Länge des Kreisbogens zu berechnen.

$L_{Kreis} = 105 \cdot \left(\dfrac{7}{36} \cdot \pi - \dfrac{11}{180} \cdot \pi\right) = 14 \cdot \pi \approx 43,98$

Somit hat der Kreisbogen die Länge 43,98 m.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.