B2 - Analysis

1

1.1 Zum Ableiten wird die Produktregel und für den Term e^{-kx} die Kettenregel verwendet:

$$f'_{a;k}(x) = 2ax \cdot \mathrm{e}^{-kx} + ax^2 \cdot \mathrm{e}^{-kx} \cdot (-k)$$

Durch Vereinfachen und Ausklammern von $a \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-kx}$ folgt:

$$f'_{a;k}(x) = a \cdot x \cdot (2 - k \cdot x) \cdot \mathrm{e}^{-kx}$$

1.2 Es gilt:

$$f_{a;k}(x) = a \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{-kx}$$

$$f'_{a;k}(x) = a \cdot x \cdot (2 - k \cdot x) \cdot \mathrm{e}^{-kx}$$

$$f''_{a;k}(x) = a \cdot (k^2 \cdot x^2 - 4 \cdot k \cdot x + 2) \cdot \mathrm{e}^{-kx}$$

Durch Überprüfen der notwendigen Bedingung für Extremstellen werden potentielle Extremstellen errechnet:

$$\begin{array}{rcll} f'_{a;k}(x) &=& 0 & \\ a \cdot x \cdot (2 - k \cdot x) \cdot \mathrm{e}^{-kx} &=& 0 & \quad \mid : (a \cdot \mathrm{e}^{-kx}) \\ x \cdot (2 - k \cdot x) &=& 0 & \end{array}$$

Falls $x = 0$, gilt die Gleichung und es folgt: $x_1 = 0$.
Falls $x \neq 0$, folgt durch Umstellen: $x_2 = \dfrac{2}{k}$.

Um die Art der Extremstelle zu ermitteln, wird die hinreichende Bedingung für Extremstellen überprüft:

$$f''_{a;k}(0) = 2 \cdot a > 0$$

$$f''_{a;k}\left(\frac{2}{k}\right) = -a \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^{-2} < 0$$

Damit liegt bei $T = (0 \mid f_{a;k}(0)) = (0 \mid 0)$ ein Tiefpunkt und bei
$H = \left(\frac{2}{k} \,\middle|\, f_{a;k}\left(\frac{2}{k}\right)\right) = \left(\frac{2}{k} \,\middle|\, \frac{4a}{k^2 \cdot \mathrm{e}^2}\right)$
ein Hochpunkt vor.

Für einen festen Wert k ist die $x-$Koordinate der Hochpunkte fest und für alle Hochpunkte gleich. Da die $y-$Koordinate noch von a abhängt, liegen alle Hochpunkte auf einer zur $y-$Achse parallelen Geraden.

1.3 Die Ortskurve für Hochpunkte berechnet sich durch das Einsetzen der nach k umgestellten $x-$Koordinate der

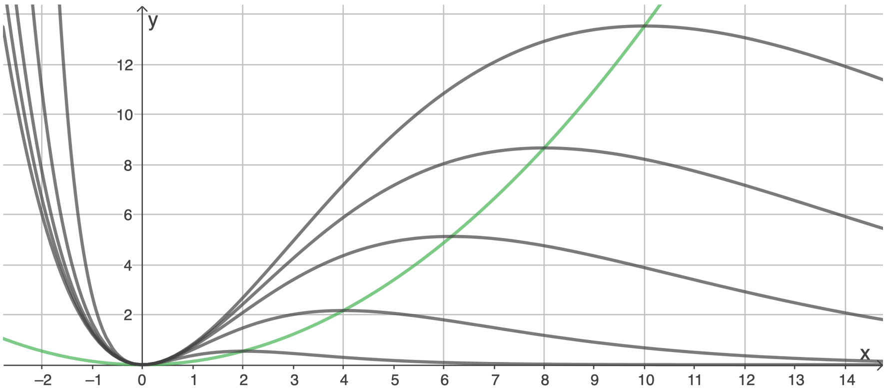
Hochpunkte in die $y-$Koordinate:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{k} \\ \frac{2}{x} &= k \end{aligned}$$

Einsetzen in die $y-$Koordinate:

$$y = \frac{4a}{k^2 \cdot e^2} = \frac{4a}{\frac{4}{x^2} \cdot e^2} = \frac{a}{e^2} \cdot x^2$$

Damit liegen alle Hochpunkte auf der angegebenen Parabel $p_a(x)$.



Material 1: Funktionenschar und Ortskurve

1.4 Durch den Hochpunkt des Graphen an der Stelle $x = 10$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{2}{k} &= 10 \qquad \mid \cdot k \qquad \mid :10 \\ \frac{1}{5} &= k \end{aligned}$$

Nun lässt sich a mit Hilfe von k und der Bedingung $f_{a;\frac{1}{5}}(2) = 828$ berechnen:

$$\begin{aligned} f_{a;\frac{1}{5}}(2) &= 828 \\ a \cdot 4 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}} &= 828 \qquad \mid :(4 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}}) \\ a &\approx 309 \end{aligned}$$

Somit folgen die Paramter $a \approx 309$ und $k = \dfrac{1}{5}$.

2

2.1 Die Lösung der Summe ist gegeben durch

$f_{309;\;0,2}(1)+f_{309;\;0,2}(2)+f_{309;\;0,2}(3)+f_{309;\;0,2}(4)\approx 253+829+1526+2221=4829.$

Dann folgt:

$$\frac{4892-4829}{4892}\approx 0,0129.$$

Somit beträgt die prozentuale Abweichung des Näherungswertes von der tatsächlichen Verkaufszahl ungefähr $1,29\%$ und damit weniger als $1,5\%$.

2.2

2.2.1 Mit dem WTR gilt:

$$\int_{0,5}^{4,5} f_{309;\;0,2}(x)\;\mathrm{d}x\approx 4844$$

$$\int_{0}^{4} f_{309;\;0,2}(x)\;\mathrm{d}x\approx 3663$$

2.2.2 Das Integral $\int_{0,5}^{4,5} f_{309;\;0,2}(x)\;\mathrm{d}x$ ist eine gute Approximation, da die Fläche innerhalb der Rechtecke, aber überhalb des Graphen, ungefähr der Fläche unterhalb des Graphen, aber nicht innerhalb der Rechtecke entspricht. Dadurch gleichen sich diese beiden Flächen bei diesem Integral aus und es entsteht eine sehr gute Approximation.
Das Integral $\int_{0}^{4} f_{309;\;0,2}(x)\;\mathrm{d}x$ hingegen, ist keine gute Approximation, da die Fläche innerhalb der Rechtecke, aber überhalb des Graphen, nicht berücksichtigt wird. Damit ergibt das Integral einen deutlich niedrigeren Wert, als die eigentliche Verkaufszahl.

2.3 Damit $F_{309;\;0,2}(x)$ eine Stammfunktion von $f_{309;\;0,2}(x)$ ist, muss folgendes gelten:

$$\begin{array}{rcll} F'_{309;\;0,2}(x) &=& f_{309;\;0,2}(x) & \\ (-0,2\cdot c_2\cdot x^2+(2c_2-0,2c_1)x+c_1-0,2c_0)\cdot \mathrm{e}^{-0,2x} &=& 309\cdot x^2\cdot \mathrm{e}^{-0,2x} & \mid :\mathrm{e}^{-0,2x} \\ -0,2\cdot c_2\cdot x^2+(2c_2-0,2c_1)x+c_1-0,2c_0 &=& 309\cdot x^2 & \end{array}$$

Diese Gleichung setzt Gleichheit auf beiden Seiten bei allen Termen mit x^2, allen Termen mit x und allen Termen ohne x voraus. Es muss also gelten:

Terme mit x^2 :

$$\begin{array}{rcll} -0,2\cdot c_2\cdot x^2 &=& 309x^2 & \mid :(-0,2\cdot x^2) \\ c_2 &=& -1545 & \end{array}$$

Terme mit x:

$$
\begin{aligned}
(2c_2 - 0,2c_1)\cdot x &= 0 && \mid :x \\
2c_2 - 0,2c_1 &= 0 && \mid +0,2c_1 \\
2c_2 &= 0,2c_1 && \mid :0,2 \\
10c_2 &= c_1 && \mid c_2 \text{ einsetzen} \\
-15450 &= c_1
\end{aligned}
$$

Terme ohne x:

$$
\begin{aligned}
c_1 - 0,2c_0 &= 0 && \mid +0,2c_0 \quad \mid :0,2 \\
\frac{c_1}{0,2} &= c_2 && \mid c_1 \text{ einsetzen} \\
-77250 &= c_0
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich die Stammfunktion:

$$F_{309;\,0,2}(x) = (-1545x^2 - 15450x - 77250)\cdot \mathrm{e}^{-0,2x}$$

2.4

$$
\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty}\int_{14,5}^{u} f_{309;\,0,2}(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{u\to\infty}\left(F_{309;\,0,2}(u) - F_{309;\,0,2}(14,5)\right) \\
&\approx \lim_{u\to\infty}\left((-1545u^2 - 15450u - 77250)\cdot \mathrm{e}^{-0,2u} + 34451\right) \\
&= \lim_{u\to\infty}\left(\underbrace{\underbrace{(-1545u^2 - 15450u - 77250)}_{\to -\infty}\cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-0,2u}}_{\to 0}}_{\to 0}\right) + 34451
\end{aligned}
$$

Da die $\mathrm{e}-$ Funktion wesentlich schneller gegen 0 konvergiert, als eine quadratische Funktion gegen $\pm\infty$, konvergiert der obere Term gegen 0.

Damit folgt:

$$\lim_{u\to\infty}\int_{14,5}^{u} f_{309;\,0,2}(x)\,\mathrm{d}x \approx 0 + 34451 = 34451.$$

Nach der 14. Wochen werden noch ungefähr 34451 Paar Schuhe verkauft. Die 36000 Schuhpaare, die noch auf Lager liegen, werden also ausreichen.

3

3.1 Es gilt nach der Kettenregel für Ableitungen:

$$V'(x) = 300 - 241\cdot\cos(0,1205\cdot x)$$

Die Kosinus-Funktion nimmt maximal Werte zwischen -1 und 1 an. Durch Einsetzen der beiden Randwerte in die Ableitungsfunktion folgt:

$V'(0) = 300 - 241 \cdot 1 = 59$

$V'(\frac{\pi}{0,1205}) = 300 - 241 \cdot (-1) = 541$

Damit wird ersichtlich, dass $59 \leq V'(x) \leq 541$ gilt.

Im Sachzusammenhang bedeutet das, dass die Verkaufszahlen der Schuhpaare in der Woche zwischen 59 und 541 periodisch schwanken.

3.2

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot V(x)\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(300 - \underbrace{\frac{2000\cdot\sin(0,1205x)}{x}}_{\to 0}\right) \\ &= 300 \end{aligned}$$

Im Sachzusammenhang bedeutet das Ergebnis, dass durchschnittlich 300 Paar Schuhe pro Woche verkauft werden.