1. ▶ **Wahrscheinlichkeiten berechnen** (3BE)

1. Schritt: Ereignis A

Das Tischrechteck besteht aus insgesamt 100 Tischen und besitzt genau 4 Ecken. Damit folgt $P(A) = \frac{4}{100} = 4\,\%$.

2. Schritt: Ereignis B

Wenn Berta nicht in der ersten Reihe sitzt, dann sitzt sie in einer der anderen neun Reihen; also ist $P(B) = \frac{9}{10} = 90\,\%$.

3. Schritt: Ereignis C

Carola darf **nicht** an einem Randplatz sitzen, d.h. weder in der ersten noch in der letzten Reihe und auch nicht links oder rechts am Rand. Das Tischviereck hat genau 36 Randplätze. Für Carola bleiben also noch 64 „günstige" Plätze übrig und es folgt die Wahrscheinlichkeit $P(C) = \frac{64}{100} = 64\,\%$.

2. ▶ **Wahrscheinlichkeiten für Person aus NRW berechnen** (9BE)

Von den 100 Personen stammen genau $\frac{1}{5}$, also 20 Personen, aus Nordrhein-Westfalen. Entsprechen sind 80 Personen nicht aus Nordrhein-Westfalen. Aus diesen 100 Personen werden nun nacheinander drei Personen ausgewählt. Ins Urnenmodell übersetzt handelt es sich also um ein **Ziehen ohne Zurücklegen**.

Es soll die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden, dass **genau eine** der drei Personen aus NRW stammt. Für dieses Ereignis gibt es genau **drei** günstige Fälle: Entweder die erste, die zweite oder die dritte ausgewählte Person stammt aus NRW.

Nach der Pfadregel folgt die Wahrscheinlichkeit

$$p = \underbrace{\frac{20}{100} \cdot \frac{80}{99} \cdot \frac{79}{98}}_{\text{1. Person}} + \underbrace{\frac{80}{100} \cdot \frac{20}{99} \cdot \frac{79}{98}}_{\text{2. Person}} + \underbrace{\frac{80}{100} \cdot \frac{79}{99} \cdot \frac{20}{98}}_{\text{3. Person}} = \frac{632}{1617} \approx 0{,}3908$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 39 % stammt mindestens eine der drei ausgewählten Personen aus NRW.

▶ **Wahrscheinlichkeit mit Binomialverteilung berechnen**

Sei X die Anzahl der Personen, die aus NRW stammen. X soll näherungsweise als binomialverteilt angenommen werden; die Parameter hierfür sind $n = 3$ und $p = \frac{1}{5}$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 1)$:

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125} = 0{,}384$$

Die Unterschied der beiden Ergebnisse beläuft sich auf $0{,}3908 - 0{,}384 = 0{,}0068$, also auf etwa 1,7 %.

Er ist damit zu erklären, dass sich beim **Ziehen ohne Zurücklegen** die Wahrscheinlichkeiten von Zug zu Zug ändern. Bei der Annäherung durch die Binomialverteilung hingegen wird eine gleichbleibende Wahrscheinlichkeit angenommen; es wird mit **Ziehen mit Zurücklegen** gerechnet.

3. **► Zusammenstellung angeben** (9BE)

Die Gruppe besteht insgesamt aus 21 männlichen und x weiblichen Teilnehmern. Dabei ist lediglich bekannt, dass $x > 21$ ist. Insgesamt besteht die Gruppe also aus $21 + x$ Personen.

Betrachte nun die Gleichung. Wichtig ist dabei, im Hinterkopf zu behalten: Das **und** ($\cap$) drückt sich in der Gleichung durch eine **Multiplikation** aus, das **oder** ($\cup$) als eine **Addition**.

Im ersten Term wird die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass aus der Gruppe mit insgesamt $21 + x$ Teilnehmern, nacheinander genau zwei Männer ausgewählt werden: $\frac{21}{21+x} \cdot \frac{20}{20+x}$.
Im zweiten Term wird die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass nacheinander genau zwei Frauen ausgewählt werden: $\frac{x}{21+x} \cdot \frac{x-1}{20+x}$.

Insgesamt kannst du sagen: Es wird die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass **entweder** zwei Männer **oder** zwei Frauen interviewt werden. Diese Wahrscheinlichkeit liegt bei 50 %.

► Anzahl der Teilnehmerinnen berechnen

Aus der Überlegung von oben geht hervor, dass x die Anzahl der Teilnehmerinnen ist. Löse also die Bruchgleichung nach x auf:

$$\frac{21}{21+x} \cdot \frac{20}{20+x} + \frac{x}{21+x} \cdot \frac{x-1}{20+x} = 0{,}5 \qquad | \cdot (21+x)(20+x)$$

$$21 \cdot 20 + x \cdot (x-1) = 0{,}5 \cdot (21+x) \cdot (20+x)$$

$$420 + x^2 - x = 0{,}5 \cdot \left(420 + 41x + x^2\right)$$

$$420 + x^2 - x = 210 + 20{,}5x + 0{,}5x^2$$

$$0{,}5x^2 - 21{,}5x + 210 = 0$$

$$x^2 - 43x + 420 = 0$$

$$x_{1,2} = 21{,}5 \pm \sqrt{(21{,}5)^2 - 420} = 21{,}5 \pm \sqrt{42{,}25}$$

$$x_{1,2} = 21{,}5 \pm \sqrt{(21{,}5)^2 - 420} = 21{,}5 \pm 6{,}5$$

$x_1 = 28, \quad x_2 = 15.$

Da die Anzahl der weiblichen Teilnehmer **größer** als die der männlichen Teilnehmer sein soll, kommt nur $x_1 = 28$ in Frage.

4. **► Mögliche Fehlentscheidungen beschreiben** (9BE)

Beim Testen der Hypothese können der Fehler 1. und der Fehler 2. Art auftreten.

1. Schritt: Fehler 1. Art

Der Fehler 1. Art beschreibt, dass die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0{,}1$ abgelehnt wird, **obwohl** sie eigentlich richtig ist. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art ist genau das **Signifikanzniveau** und beträgt damit 1 %.

Im Sachzusammenhang interpretiert bedeutet dies, dass der Veranstalter dann davon ausgeht, dass **mehr** Parkplätze erforderlich sind als in den letzten Jahren, obwohl dies gar nicht der Fall ist.

2. Schritt: Fehler 2. Art

Der Fehler 2. Art beschreibt, dass die Nullhypothese $H_0: p \leq 0{,}1$ angenommen wird, **obwohl** sie eigentlich falsch ist. Dies bedeutet, dass der Veranstalter dann darauf **verzichtet**, zusätzliche Parkplätze zur Verfügung zu stellen, dass aber dennoch mehr Personen mit dem Auto anreisen als in den Jahren zuvor.

► Zusammenhang erläutern

In Abbildung 1 wird der Zusammenhang zwischen dem Fehler 2. Art und dem tatsächlichen Wert für p dargestellt. Der Fehler 2. Art besagte, dass die Nullhypothese **irrtümlich** angenommen wird. Es würde dann irrtümlich von einem Anteil $p = 0{,}1$ ausgegangen werden.

Der Verlauf des Graphen zeigt deutlich, dass der Fehler 2. Art mit zunehmendem p **weniger wahrscheinlich** wird: Je weiter der tatsächliche Anteil p von $p = 0{,}1$ abweicht, desto kleiner wird die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese irrtümlich anzunehmen.

► Bedeutung des Punktes erklären

Der Punkt $(0{,}2 \mid 0{,}13)$ besitzt die Koordinaten $p = 0{,}2$ und $\beta = 0{,}13$. Nach der Überlegung von eben bedeuten diese Werte: Wenn in Wirklichkeit 20 % der Teilnehmer mit dem PKW anreisen, so liegt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art bei 13 %.