E. N. S. I. de Sidi-Bel-Abbès.
Cycle Préparatoire Intégré

Deuxième année — *Module : Algèbre 3*

Fiche de TD $N^o 4$
2017/18

Systèmes lineaires

Exercice 1) Résoudre par la méthode des pivots de Gauss

$$(S_1)\begin{cases} x-y+3z=6 \\ 3x-2y+7z=14 \\ x+3y-3z=-4 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} 2x+3y=12 \\ -3x+5y=1 \\ 7x-11y=-1 \end{cases}$$

Exercice 2) m est un paramètre complexe. En appliquant la méthode des pivots de Gauss, discuter suivant m le nombre de solutions du système

$$(S_m)\begin{cases} x-my+m^2z=m \\ mx-m^2y+mz=1 \\ mx+y-m^3z=-1 \end{cases}$$

Exercice 3) Ecrire les systemes suivants sous forme échelnnée réduite, puis résoudre.

$$\begin{cases} 2y-2z+5t+3v=1 \\ -x+3y+4t+u+2v=-1 \\ y-2z+2t+u++v=0 \\ -y+2z-4t-u-3v=0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x-y+mz=m-2 \\ -mx+y+mz=1 \\ x-my-z=-m \\ mx+y+z=m+2 \end{cases}$$

Exercice 4) Discuter l'existence et l'unicité des solutions des systèmes

$$(S_1)\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} (1+\lambda)x+y+z+t=0 \\ x+(1+\lambda)t+z+t=0 \\ x+t+(1+\lambda)z+t=a \\ x+y+z+(1+\lambda)t=b \end{cases}$$

Exercice 5) Inverser les matrices suivantes en utilisant la méthode de Gauss-Jordan

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

inversible — n'est pas inversible

Algèbre (3) Deuxième année

Fiche de TD N°4
2017/18

Exercice (1):

Resoudre par la méthode des pivots de Gauss:

$$(S_1)\begin{cases} x - y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 7z = 14 \\ x + 3y - 3z = -4 \end{cases} \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} +1 & -1 & +3 & 6 \\ +3 & -2 & +7 & 14 \\ +1 & +3 & -3 & -4 \end{array}\right)$$ la matrice augmentée

1 ligne pivot:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -6 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{pivot} \\ \leftarrow l_2 = l_2 - 3l_1 \\ \leftarrow l_3 = l_3 - l_1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 = L_1 \\ \leftarrow \text{pivot} \\ \leftarrow l_3 = L_3 - 4l_2 \end{array}$$

Alors: $\boxed{\begin{cases} z = 3 \\ y = 2 \\ x = -1 \end{cases}}$ la solution est $(-1, 2, 3)$.

$$(S_2)\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ -3x + 5y = 1 \\ 7x - 11y = -1 \end{cases} \Rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 12 \\ -3 & 5 & 1 \\ 7 & -11 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$ la matrice augmentée.

$$L_j = L_j - \frac{a_{ij}}{a_{ii}} l_i$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 12 \\ 0 & 19/2 & 19 \\ 0 & -43/2 & -43 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{pivot} \\ \leftarrow L_2 = L_2 + \frac{3}{2} l_1 \\ \leftarrow L_3 = L_3 - \frac{7}{2} l_1 \end{array} \Rightarrow (S_2) = \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 19/2\, y = 19 \\ -43/2\, y = -43 \end{cases} \Big\} E_2 = E_3 \Rightarrow (S_2) \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 19y = 38 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}}$ la solution est unique $(3, 2)$

Exercice ②,

$$(S_m)\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = -1 \end{cases}$$

Pivots de Gauss: la matrice augmentée. $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & m^2 & m \\ m & -m^2 & m & 1 \\ m & 1 & -m^3 & -1 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & m^2 & m \\ 0 & 0 & m-m^3 & 1-m^2 \\ 0 & 1+m^2 & -2m^3 & -1-m^2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{pivot.} \\ \leftarrow L_2 = L_2 - mL_1 \\ \leftarrow L_3 = L_3 - mL_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & m^2 & m \\ 0 & 1+m^2 & -2m^3 & -1-m^2 \\ 0 & 0 & m-m^3 & 1-m^2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-m^3)z = 1-m^2 & \dots E_1 \\ (1+m^2)y - (2m^3)z = -1-m^2 & \dots E_2 \\ x - (m)y + (m^2)z = m & \dots E_3 \end{cases}$$

1/ si $(m=0) \Rightarrow E_1 \Rightarrow 0 = 1$ E_1 est contradictoire, (Pas de solution)

2/ si $(m=1) \Rightarrow E_1 \Rightarrow 0 = 0$ $(S_1)\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$

le $\overset{2}{rg}(A) =$ le $\overset{2}{rg}(A|B) \Rightarrow$ (il y a une infinité de solution (2 équation et 3 variables)

3/ si $(m=-1) \Rightarrow E_1 \Rightarrow 0 = 0$ $(S_{-1})\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2y + 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$

le $\overset{2}{rg}(A) =$ le $\overset{2}{rg}(A|B) \Rightarrow$ (il y a une infinité de solution) (2 équation et 3 variables)

4/ Si $m \neq \{0, 1, -1\} \Rightarrow E_1 \Rightarrow z = \frac{1}{m}$ $(S_m)\begin{cases} x - my = 0 \\ (1+m^2)y = m^2 - 1 \\ z = \frac{1}{m} \end{cases}$

4a/ $Si(m = i) \Rightarrow E_2 \Leftrightarrow 0 = -2$ E_2 contradictoir donc (Pas de solution)

4b/ $si(m=-i) \Rightarrow E_2 \Leftrightarrow 0 = -2$ E_2 contradictoir donc (Pas de solution)

4c/ si $(m \neq i, -i) \Rightarrow$ (solution unique)

$m = i, -i, 0 \Rightarrow$ Pas de solution
$m = 1, -1 \Rightarrow$ infinité de solution
$m \neq \{0, 1, -1, i, -i\} \Rightarrow$ Solution unique

Exercice (5) :

Inverser les matrices en utilisant la méthode de (Gauss-Jordan)

#1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A \mid Id) \sim (Id \mid A^{-1})$$

$$(A \mid Id) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{Pivot} \\ \leftarrow L_2 = L_2 \\ \leftarrow L_3 = L_3 - 2L_1 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 = L_1 + L_3 \\ \leftarrow L_2 = L_2 + 2L_3 \\ \leftarrow \text{Pivot} \end{array}$$

$$(A \mid Id) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & +1 & +2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim (Id \mid A^{-1}) \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

#2 :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 4 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow (B \mid Id) \sim (Id \mid A^{-1})$$

$$(B \mid Id) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{Pivot} \\ \leftarrow L_2 = L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow L_3 = L_3 - L_1 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 = L_1 - 5L_2 \\ \leftarrow \text{Pivot} \\ \leftarrow L_3 = L_3 + L_2 \end{array}$$

$$(B \mid Id) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -38 & 11 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \leftarrow (0 \ 0 \ 0) . \not\sim (Id \mid B^{-1}).$$

$\boxed{\text{B n'est pas inversible}}$

Exercice (3) :

On permute L_2 et L_1

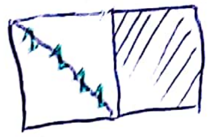
$$\begin{cases} 0 + 2y - 2z + 5t + 0 + 3V = 1 \\ -x + 3y + 4t + U + 2V = -1 \\ 0 + y - 2z + 2t + U + V = 0 \\ 0 - y + 2z - 4t - U - 3V = 0 \end{cases} \Rightarrow (A \mid B) \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} l_1 \leftarrow l_1 - \frac{3}{2} l_2 \\ l_2 \leftarrow l_2 \ \ \text{Pivot} \\ l_3 \leftarrow l_3 - \frac{1}{2} l_2 \\ l_4 \leftarrow l_4 - \frac{1}{2} l_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 3 & -7/2 & 1 & -5/2 & -5/2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -1 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 \ \ \text{Pivot} \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & -5 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{5}{2} L_4$
$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_4$
$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{L_4}{4}$
$L_4 \leftarrow L_4$ Pivot

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$



$$(S) \begin{cases} x - 4u - v = 4 \\ y - u - v = 1 \\ z - u = \frac{1}{2} \\ t + v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4u + v + 4 \\ y = u + v + 1 \\ z = u + \frac{1}{2} \\ t = -v \end{cases}$$

Exercice (4) :

$a, b \in \mathbb{R}$

$$(S_1) : \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \Rightarrow (A|B) : \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array}\right)$$

(S_1) soit resoluble (compatible) $\Longleftrightarrow rg(A|B) = rg(A)$

$$\det \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix} = b(a^3 - 3a + 2)$$

On a $(a = 1)$ est une racine : $\Rightarrow \det(A) = (a-1)(a^2 + a - 2)\,b$

$\Rightarrow \det(A) = b(a-1)^2(a+2)$

$$\boxed{\Rightarrow \det(A) = b(a-1)^2(a+2)}$$

Si $b \neq 0$ et $a \neq 1$ et $a \neq -2$, alors $\det(A) \neq 0$

$\Rightarrow$ le systeme est de cramer $\Rightarrow rg(A|B) = rg(A)$

$\Rightarrow$ le systeme admet une solution unique.

$a \backslash b$		-2		0		1	
	Solution Unique				Solution Unique		
-2		infinité de solution					
	Solution Unique				Solution Unique		
1						infinité de solution	
	Solution Unique				Solution Unique.		

Scanned by CamScanner

Si $b=0$.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right)$$

1/ $a=1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 1 \\ rg(A|B) \neq 1 \end{array}\right\}$ $rg(A) \neq rg(A|B)$ $\boxed{\text{On a pas de solution}}$ ✓

2/ $a \neq 1$

$\det \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2(a-1) \neq 0 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(A|B) = 3 \end{array}\right\}$ $rg(A) \neq rg(A|B)$ $\boxed{\text{On a pas de solution}}$ ✓

$\boxed{\text{si } b=0 \text{ il n'y a pas de solution}}$

$a=1$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 1$

1/ $b=1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 1 \\ rg(A|B) = 1 \end{array}\right\}$ $rg(A) = rg(A|B)$ ✓ $\boxed{\text{On a une infinité de solutions}}$

2/ $b \neq 1$.

$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 1 \\ rg(A|B) = 2 \end{array}\right\}$ $rg(A) \neq rg(A|B)$ $\boxed{\text{On n'a pas de solution}}$ ✓

$a=-2$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & \cancel{2b} & 1 & b \\ 1 & b & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 2$

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-2+b-2)-(1+4b+1)$$

$$= -4b-2-4b = -3b-6$$

$$= -3(b+2)$$

1/ $b \neq -2$:

$rg(A|B) = 3 \} \Rightarrow rg(A) \neq rg(A|B)$ $\boxed{\text{pas de solution}}$ ✓

2/ $b = -2$:

$rg(A|B) = 2 \} \Rightarrow rg(A) = rg(A|B)$ $\boxed{\text{infinité de solutions}}$ ✓

$$(S_2)\begin{cases}(1+\lambda)x+y+z+t=0\\ x+(1+\lambda)y+z+t=0\\ x+y+(1+\lambda)z+t=a\\ x+y+z+(1+\lambda)t=b\end{cases}$$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}1+\lambda&1&1&1&0\\1&1+\lambda&1&1&0\\1&1&1+\lambda&1&a\\1&1&1&1+\lambda&b\end{array}\right)$$

$$\boxed{\det(A)=\lambda^3(4+\lambda)}$$

#: $\det(A)\neq 0 \Rightarrow (\lambda\neq 0)\wedge(\lambda\neq -4) \Rightarrow$ système de cramer $\Rightarrow rg(A)=rg(A|B)$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Admet une solution unique}}$

$\boxed{\lambda=0}$:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&a\\1&1&1&1&b\end{array}\right) \Rightarrow rg(A)=1$$

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix}1&a\\1&b\end{pmatrix}=b-a$

#1/ $a=b$: $\det\begin{pmatrix}1&a\\1&b\end{pmatrix}=b-a=0$ $\left.\begin{array}{l}rg(A)=1\\rg(A|B)=1\end{array}\right\}$ $rg(A)=rg(A|B)$ $\boxed{\text{infinité de solution}}$ ✓

#1/ $a\neq b$: $b-a\neq 0 \Rightarrow (a\neq 0, b\neq 0) \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}rg(A)=1\\rg(A|B)=2\end{array}\right\}$ $rg(A)\neq rg(A|B)$ $\boxed{\text{pas de solution}}$ ✓

$\boxed{\lambda=-4}$,

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}-3&1&1&1&0\\1&-3&1&1&0\\1&1&-3&1&a\\1&1&1&-3&b\end{array}\right)$$

$(a=0)\wedge(b\neq 0) \Rightarrow$ $\boxed{\text{pas de solution}}$ ✓

$(a\neq 0)\wedge(b=0) \Rightarrow$ $\boxed{\text{pas de Solution}}$ ✓

$\det\begin{vmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{vmatrix}=-16 \Rightarrow rg(A)=3.$

$$\det\begin{pmatrix}-3&1&0&1\\1&-3&0&1\\1&1&a&1\\1&1&b&-3\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$=16(a+b)$ $\Rightarrow rg(A|B)$ dépends de a et b

Scanned by CamScanner

si $(a+b)=0 \Rightarrow \det|\,| = 0 \Rightarrow rg(A|B) \neq 4 \Rightarrow rg(A|B) = 3$.

#1/ $a+b=0$:

$$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 3 \\ rg(A|B) = 3 \end{array}\right\} \quad rg(A) = rg(A|B)$$

$\boxed{\text{infinité de solution}}$ ✓

#2/ $a+b \neq 0$: $\det|\,| \neq 0 \Rightarrow rg(A|B) = 4$

$$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 3 \\ rg(A|B) = 4 \end{array}\right\} \quad rg(A) \neq rg(A|B)$$

$\boxed{\text{pas de solution}}$ ✓