Ecole Supérieure en Informatique
Sidi Bel Abbes
2ème année CPI

ANALYSE 3

TD : SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1

En utilisant les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad ; \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

montrer que la série $\left(\sum \frac{1}{n!}\right)$ est convergente.

Exercice 2

Montrer que la série $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ est de Cauchy puis en déduire que la série $\left(\sum \frac{1}{n^a}\right)$ est convergente pour $a \geq 2$ et divergente pour $a < 1$

Exercice 3

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ 2 suites réelles ou complexes vérifiant $u_n = v_n - v_{n+1}$. Établir :

$$\left(\sum u_n\right) \text{ converge } \Leftrightarrow (v_n)_n \text{ converge}$$

Application : Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$(1) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right); \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 2ni - 2}; \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}\right)$$

Exercice 4

Soit $(v_n)_n$ une suite réelle ou complexe. Soit $(\sum u_n)$ une série définie par

$$u_n = av_{n-1} + bv_n + cv_{n+1}; \qquad \text{avec } a + b + c = 0$$

1. Montrer : $(v_n)_n$ converge $\Longrightarrow (\sum u_n)$ converge. En déduire la somme.
2. Que pensez-vous de la réciproque ?

Exercice 5

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer somme :

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 5n + 1}{n!}; \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \pi^{2n} e^{\pi - 5n}; \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} \ ; |t| > 1$$

Exercice 6

Soit $(\sum u_n)$ une série dont la somme partielle d'ordre n est $\mathbb{U}_n = \frac{1}{n^2 + 1}$.

1. Trouver la série $(\sum u_n)$
2. En déduire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n - 1}{(n^2 + 1)(n^2 - 2n + 2}$ est convergent et trouver sa somme.

Exercice 7
Donner la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{n!\pi}{8}\right) \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{n!\pi}{8}\right)$$

Exercice 8

Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ 2 séries à termes positifs convergentes

1. Montrer alors que la série $(\sum \sqrt{u_n v_n})$ est convergente.
2. Montrer que la série $\left(\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}\right)$ est convergente.
3. Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ 2 séries définies par :

$$u_n = \begin{cases} u_{2p} = 1 \\ u_{2p+1} = \dfrac{1}{(2p+1)^4} \end{cases} \quad ; \qquad v_n = \begin{cases} v_{2p} = \dfrac{1}{(2p)^4} \\ u_{2p+1} = 1 \end{cases}$$

Etudier la convergence des séries $(\sum u_n)$, $(\sum v_n)$ et $(\sum \sqrt{u_n v_n})$

Exercice 9
Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\begin{array}{llllll}
(1) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n+1}; & (2) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n; & (3) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(n+a)}{n+b}\right)^{n^2} \\
(4) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; & (5) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-\sqrt{n}}; & (6) & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1-\frac{1}{n^\alpha}) \\
(7) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n+1}; & (8) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha^n}; & (9) & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \\
(10) & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}; & (11) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{10}{n!}\right)^n; & (12) & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{3}{2}}
\end{array}$$

Exercice 10
Soit $(\sum u_n)$ une série à termes positifs.

1. Etablir : $(\sum u_n)$ converge $\Longrightarrow$ $(\sum u_n^p)$ converge $\forall p \in \mathbb{N}^*$
2. Donner un exemple montrant que cette implication est fausse si $(\sum u_n)$ n'est pas à termes positifs.
3. Donner un exemple d'une série $(\sum a_n)$ divergente et $(\sum a_n^2)$ converge.
4. Donner un exemple de 2 séries $(\sum a_n)$ et $(\sum b_n)$ divergentes et $(\sum a_n b_n)$ converge.
5. Montrer que la somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente.
6. Donner un exemple de séries $(\sum a_n)$ et $(\sum b_n)$ divergentes telles que :

   a) $(\sum (a_n + b_n))$ diverge

   b) $(\sum (a_n + b_n))$ converge

Exercice 11
Soit $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{an+1}$ le terme général d'une série $(\sum u_n)$.

1. Etudier la convergence de $(\sum u_n)$
2. Calculer la somme $(\sum_{10}^{+\infty} u_n)$ si $a = 1$

Exercice 12
Soit $(\sum u_n)$ une série à termes positifs et soient $(\sum a_n)$ et $(\sum b_n)$ 2 séries telles que $a_n = \ln(1+u_{)}$ et $b_n = \frac{a_n}{1+u_n}$.
Montrer que les 3 séries $(\sum u_n)$ $(\sum a_n)$ $(\sum b_n)$ sont de même nature.

Exercice 13
Etudier la convergence des séries suivantes :

$$(1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}};\quad (3)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{2n+1}$$

$$(4)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!x^n};\quad (5)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^x};\quad (6)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\ln n}}$$

$$(7)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{e^{nx}};\quad (8)\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{\sin(nx)};\quad (9)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4+(-1)^n}{a^n}; a \neq 0$$

Exercice 14
Utiliser la règle de Raab-Duhamel pour étudier la convergence des séries suivantes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!e^n}\ ; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1.4.7....(3n+1)}{3^n n!}$$

Exercice 15
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \ln(1-\frac{1}{n^\alpha})$.
2. Etudier la convergence absolue.

Exercice 16
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence des séries suivantes dont le terme général est :

(1) $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$;	(2) $u_n = (-1)^n\frac{\ln n}{n^2}$;	(3) $u_n = \frac{\alpha^n}{1+\alpha^n+\ln n}$
(4) $u_n = (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;	(5) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}\ln n}$;	(6) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$
(7) $u_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^\alpha \ln(\frac{n+1}{n-1})$;	(8) $u_n = \ln\left(\frac{1}{\cos(\frac{1}{n})}\right)$;	(9) $u_n = (-1)^n\frac{n^n}{n!}$
(10) $u_n = \frac{1}{n(n+\ln n)}$;	(11) $u_n = \sin^2\left(\pi(n+\frac{1}{n})\right)$;	(12) $u_n = \frac{1}{n^{n+1}}$
(13) $u_n = e^{\sin n}$;	(14) $u_n = \frac{n+\cos n}{n^3+1}$;	(15) $u_n = \frac{\sin^2(n)}{n^2}$
(16) $u_n = n^2\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$;	(17) $u_n = a^{\ln(n)}, a>0$;	(18) $u_n = \frac{a^n}{n^\alpha}, a>0$
(19) $u_n = e^{k(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\frac{1}{n})}$;	(20) $u_n = \left(\frac{e^n n!}{n^n}\right)^\alpha$;	(21) $u_n = arctan(n\alpha)$

1

Exercice 17 (libre)
Etudier la convergence des séries données par leur terme général u_n.

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} \tag{1}$$

$$u_n = \ln\left(\frac{n^2+an+1}{n^2+bn+2}\right) \tag{2}$$

$$u_n = \arctan\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \arctan\sqrt{1-\frac{1}{n}} \tag{3}$$

$$u_n = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{4} \tag{4}$$

$$u_n = 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \tag{5}$$

$$u_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \tag{6}$$

$$u_n = \frac{a^n+n^c}{b^n},\ a>0;\ b>0 \tag{7}$$

$$u_n = \frac{n^p}{\ln(\ln(n))} \tag{8}$$

$$u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{k}{n^{5\alpha}}\right) \tag{9}$$

$$u_n = \frac{k^n 3^{\sqrt{n}}}{3^{\sqrt{n}}+t^n} \tag{10}$$

1. Formule de Stirling :$n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}$