Projet : organisation d'une École Mathématique Africaine (EMA)

Theme : Théorie des Représentations et Applications en Sciences Physiques (TRASP 2024)

Dossier soumis par : Ibrahim NONKANE (coordinateur)

Université Thomas Sankara (UTS),

BURKINA FASO.

Contents

1. Contexte

Le Burkina Faso compte plusieurs Départements de Mathématique repartis au sein de ses sept (7) universités: Université Joseph Ki-Zerbo, Université Thomas Sankara, Université Nazi Boni, Université Nobert Zongo, Université de Fada N'Gourma et Université de Ouahigouya. Le corps enseignants, de taille assez modeste, est majoritairement constitué de specialistes d'équations aux dérivées partielles (EDP) et de mathématiques de la décisions. Ainsi, les Masters de recherche en mathématiques disponibles sont principalement orientés vers les mathématiques de la décision et les EDP.

Au fil des années nous assistons donc à une baisse de l'offre de formation dans les spécialités algébriques et géométriques. Cela est surtout dû à :

- Au vieillissement des pionniers de l'algèbre et de la géométrie au Burkina Faso.
- Au manque de financement pour la formation des étudiants dans les disciplines liées à l'algèbre et à la géométrie .
- Au manque de vulgarisation de l'algèbre et de la géométrie à travers ses applications concrètes (par exemple en sciences physiques). Il faut dire que les jeunes générations d'étudiants sont de moins en moins séduites par les disciplines qui manipulent beaucoup d'abstraction.
- Au manque de spécialiste en géométrie au Burkina Faso.

Cette situation est pareille dans la plupart des pays voisins. Cette prise de conscience est partagée par nombres de chercheurs de d'autres universités d'Afrique subsaharienne. D'où la nécessité non seulement de former des enseignants chercheurs dans ces specialités qui animeront ses institutions mais aussi de créer un cadre de formation des jeunes capables de se lancer dans la carrière d'enseignant et de chercheur dans ces specialités en Afrique subsaharienne. C'est conscient de cette réalité que nous voulons organiser une École Mathématique Africaine (EMA) sur le thème **Theorie des Représentations et Applications en Sciences Physiques**.

La théorie des représentations est la branche des mathématiques qui étudie les structures algébriques abstraites en représentant leurs éléments comme des transformations linéaires d'espaces vectoriels La théorie des représentations vise à calculer des objets mathématiques complexes de la manière la plus simple possible. Elle tire son origine de l'étude des groupes des permutations et des algèbres de matrices. Cette théorie a été developpée initialement par Frobenuis, Burnside, Schur et Young durant les deux décennies du XIX ème siècle. Elle a connu un développement fulgurant pendant les 50 dernières années, et utilise des techniques sophistiquées provenant de plusieurs branches des mathématiques, par exemple l'algèbre homologique, la théorie des anneaux, la théorie des catégories,la topologie,l a gémétrie et la physique.
De manière générale, la théorie des représentations est une interaction entre l' algèbre, l' analyse et la géométrie. Elle a des nombreuses applications aux sciences physiques, en cristallographie, etc.

Cette EMA compte donner un nouveau souffle à l'enseignement et à la recherche en théorie des représentations au Burkina et dans les pays voisins r̂avers par des applications en sciences physiques.

2. Objectifs

Cette rencontre consistera en des mini-cours et des communications scientifiques sur les travaux de recherches des enseignants-chercheurs. Elle a pour objectif principal l'échange des connaissances introductives mises à jour sur les différents aspects de la théorie des représentations dans les domaines de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie. Cette rencontre aura à:

- Initier les étudiants en master et doctorants du Burkina Faso et de la sous-région aux outils et concepts mathématiques liés aux applications de la théorie de représentation en algèbre, analyse et géométrie.
- Des cours introductifs, des résultats les plus récents et les problèmes ouverts seront donnés afin de permettre aux jeunes chercheurs débutants(es) de s'orienter vers ces domaines de recherches.
- Aider à mieux comprendre les calculs autours des problèmes ouverts à travers les séances de tutorat.
- Sensibiliser les jeunes africains afin qu'ils s'intéressent davantage aux sciences en général et aux mathématiques en particulier.
- Mettre en place un reseau en théorie des représentations et applications pour favoriser la création des groupes thématiques autour des problèmes actuels et contribuer à réduire l'isolement scientifique des chercheurs africains.
- Créer une synergie entre mathématiciens et physiciens dans le but de favoriser des équipes de recherches pluridisciplinaires.

3. Description scientifique de l'EMA

3.1. **Coordonnateur:** Ibrahin NONKANE, Université Thomas Sankara.

3.2. Comité Scientifique.

(1) Président: Gérard KIENTEGA, Université Joseph Ki-Zerbo, Burkina Faso.
(2) Membres:
  - Gérard KIENTEGA, Université Joseph Ki-Zerbo, Burkina Faso.
  - Joel TOSSA, IMSP, Université d'Abomey-Calavi, Bénin
  - Kinvi KANGNI, Université Félix Houphouet Boigny, Côte d'Ivoire
  - Julio C. FABRIS, UFES, Brésil
  - Giuseppe DITO, Université de Franche Comté, France
  - Patricia L ZOUGRANA, Université Thomas Sankara, Burkina Faso
  - Jean-Pierre GAZEAU, Université Paris Cité, France
  - Ibrahim LY, Université Joseph Ki-Zerbo, Burkina Faso
  - Nelson PINTO-NETO, CBPF, Rio de Janiero, Brésil
  - André CONSEIBO, Université Nobert Zongo, Burkina Faso
  - Bakary MANGA, Université Cheick Anta Diop

3.3. Comité d'organisation locale.

- Ibrahim NONKANE Université Thomas Sankara, Burkina Faso
- Frédéric D.Y. ZONGO Ecole Normale Supérieure, Burkina Faso
- Luc T. BAMBARA, Ecole Normale Supérieure, Burkina Faso
- Ibrahime KONATE, Université Thomas Sankara, Burkina Faso
- Dominique BONKOUGOU, Université Thomas Sankara, Burkina Faso
- Salifou NIKIEMA Université de Ouahigouya, Burkina Faso
- Matthieu SOME Université Sankara, Burkina Faso
- Abdoul Aziz Kalifa DIANDA, Université Thomas Sankara, Burkina Faso
- Angela Tabiri, African Institute of Mathematical Sciences, AIMS-GHANA

3.4. Programme pédagogique de l'EMA.

3.4.1. *Cours magistraux.* Nous prévoyons 8 mini-cours. Tous ces cours sont de niveau Master 1 et Master 2, avec des séances d'exercices, des thèmes/sujets de réflexion pour des ateliers de travail par petits groupes (et éventuellement des Travaux Pratiques sur ordinateurs). Le tableau ci-dessous donne la liste des intitulés des cours,

Cours	**Noms**	**Affiliation**
Théorie des représentations linéaires des groupes finis [cours 1]	Patricia L.Zougrana	Université Thomas Sankara Burkina Faso
Introduction aux Algèbres de Lie et Leurs représentations [cours 2]	André Conseibo	Université Nobert Zongo Burkina Faso
Groupes de Lie et algèbres de Lie en Physique [cours 3]	Bakary Manga	Université Cheikh Anta Diop Sénégal
Symétries de Lie pour la résolution des équations différentielles [cours 4]	Joel Tossa	Université Abomey-Calavi Bénin
Introduction à l'Analyse Harmonique abstraite [cours 5]	Kinvi Kangni	Université Félix Houphouet Boigny, Côte d'Ivoire
Dualité de Schur–Weyl et algèbres de Temperley–Lieb [cours 6]	Alexis Langlois-Rémillard	Université de Bonn Allemagne
Representation of Hopf algebras and applications [cours 7]	Angela Tabiri	African Institute of Mathematical Sciences, AIMS-GHANA , Ghana

Résumé des cours. Nous donnons ici une brève description des cours prévus.

cours 1: Les représentations linéaires des groupes finis permettent de décrire un groupe abstrait comme un groupe de matrices. Au lieu de considérer une opération binaire complexe sur un ensemble, l'opération qui dicte le groupe se réduit à la multiplication des matrices. Ceci est souhaitable car la théorie de l'algèbre linéaire est bien comprise, et en transformant le groupe en un groupe de matrices, nous pouvons appliquer les techniques de l'algèbre linéaire pour résoudre les problèmes de la théorie des groupes. La théorie des représentations est magnifique en soi et permet de comprendre les propriétés abstraites d'un groupe par le biais de leur réflexion dans diverses représentations matricielles. Dans ce cours, nous etudiéerons d'abord la construction des modules (G-modules; sous-modules; quotients; sommes directes; produit tensoriel; $\mathrm{Hom}_G(V, W)$; restriction; induction et coinduction). Ensuite nous aboderons le théorie des caractères (caractères; produits scalaires des caractères; relations d'orthogonalité; sommmes et produits de caractères). Enfin nous terminerons par l'etude de la décomposition de G-modules (Théorème de Mascke; Lemme de Schur, décomposition de la représentation régulière).

cours 2: L'objectif de ce cours qui s'adresse aux étudiants de Master, est d'introduire des notions essentielles sur les algèbres de Lie et certains aspects de leurs représentations. Après avoir précisé le contexte d'introduction des algèbres Lie, nous évoquerons leur importance en mathématiques et en physique. Ensuite on traitera des généralités sur les algèbres de Lie : définitions, exemples usuels, notions d'idéaux, de morphismes, de représentations. En particulier on étudiera les algèbres de Lie nilpotentes et résolubles. Les algèbres de Lie seront supposées de dimension finie et le corps de base sera algébriquement clos et de caractéristique nulle. On se focalisera ensuite sur l'étude des algèbres de Lie semi-simples et l'on présentera différentes caractérisations des algèbres de Lie semi-simples. Nous étudierons enfin la structure et les représentations de ces dernières.

cours 3: Les groupes de Lie revt̂ent une grande importance dans la physique théorique moderne. Leur application principale se situe dans le contexte des symétries. Les symétries sont des transformations d'un système physique qui font évoluer les configurations possibles vers d'autres configurations. C'est un concept extrêmement puissant, car il restreint la dynamique d'un système et permet d'utiliser les puissants outils mathématiques de la théorie des groupes.

Les groupes de Lie sont des groupes qui contiennent un continuum (donc une infinité) de transformations différentes qui sont liées de manière différentiable. Leur structure est essentiellement codée dans leurs algèbres de Lie associées, très utiles pour le calcul explicite. En fait, à peu près tout dans le contexte de la théorie des groupes peut en principe être calculé. Le cas échéant, la théorie des groupes fournit une description et une organisation naturelles d'un système physique. Par exemple, dans le contexte des systèmes lagrangiens, les symétries issues des groupes de Lie conduisent à des lois de conservation via le théorème de Noether.

Parmi les applications des groupes de Lie en physique on peut citer :

- les translations, mènent aux ondes planes, aux transformées de Fourier, aux concepts d'énergie et de quantité de mouvement ;
- les rotations dans $\mathbb{R}^3$ (soit $SO(3)$) conduisent à la notion de moment cinétique ; par ailleurs, Einstein a étendu les rotations dans $\mathbb{R}^3$ aux rotations dans l'espace de Minkowski, qui sont décrits par $SO(1,3)$ menant par exemple à $E = mc^2$;
- en Mécanique Quantique, les rotations sont généralisées à $SU(2)$, conduisant au concept de spin ;
- Wigner s'est rendu compte que $SO(1,3)$ peut être étendu au groupe de Poincaré, conduisant à la description correcte des particules élémentaires : ce sont des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré ;
- les théories modernes de la dynamique des particules élémentaires sont basées sur le concept de groupes de jauge, qui sont des groupes de Lie de dimension infinie basés sur des groupes de Lie classiques ;
- dans la théorie des cordes, les groupes et les algèbres de Lie apparaissent, y compris ceux de dimension infinie comme l'algèbre de Virasoro.

Dans le cas discret, voici quelques exemples :

- groupes cristallographiques, conduisant à une classification des cristaux ;
- translations de réseaux, conduisant aux ondes de Bloch en physique du solide ;
- le groupe symétrique (groupe de permutations), menant par exemple au concept de Fermions et Bosons.

Ce mini cours a pour objectif de présenter les notions et techniques essentielles de la théorie des groupes et des algèbres de Lie (de matrices).

cours 4: Les méthodes classiques qui sont enseignés pour la rśolution des équations diffŕentielles ou des systèmes différentielles sont basées sur des recettes qui proposent des astuces. La méthode qui utilise les symétries de Lie est une méthode systématique, pas très algorithmique. Cette méthode existe depuis plusieurs décennies, mais n'est pas enseignée dans les programmes de nos cycles universitaires. Certes, elle demeure impuissante en face de toute équation différentielle génériquement insoluble analytiquement mais si la solution existe, elle donne les meilleures chances de la trouver sans artifice ni intervention du hasard. Cette méthode, due à Lie, et d'une rélle beauté, est basée sur l'étude des symétries des équations différentielles. L'objet de ce mini cours est de présenter l'essentiel de cette méthode avec des applications à différents cas.

cours 5: L'analyse Fourier classique joue un très grand rôle en informatique, en médecine, dans les traitements des images, des signaux et aussi dans la résolution des équations différentielles plus complexes. L'analyse harmonique est une extension de l'analyse de Fourier sur les groupes topologiques plus généraux, donc est une extension de l'analyse de Fourier classique. Dans ce cours, aprş un rappel des notions de base des groupes topologiques, des paires de Gelfand, des algèbres de Lie nilpotentes, résolubles et semi-simples, nous développerons la théorie des représentations des groupes localement compacts ainsi que les représentations unitaires. En effet, une représentation d'un groupe topologique d'un groupe localement compact G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, est un morphisme de G dans l'espace des opérateurs linéaires bornés inversibles de $\mathcal{H}$. L'un des problèmes essentiels en analyse harmonique abstraite est de décomposer toute représentation unitaire en sous-représentations unitaires irréductibles. Nous terminerons par l'étude ce problème dans les cas les plus élémentaires.

cours 6: La dualité de Schur–Weyl a marqué l'étude des algèbres et de leurs représentations. La dualité de Schur–Weyl classique provient de l'observation remontant à Schur que les actions du groupe linèaire $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ et du groupe symétrique S_n sur le produit tensoriel de la représentation standard $(\mathbb{C}^d)^{\otimes n}$ sont le centralisateur l'une de l'autre. Cela permet une décomposition en représentations provenant du groupe linéaire et du groupe symétrique, donnant ainsi une façon combinatoire de construire des bases. Il existe depuis plusieurs généralisations de la dualité de Schur–Weyl. L'objectif de ce cours et de se concentrer sur la dualité de Schur–Weyl provenant du groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ qui a pour partenaire dual l'algèbre de Temperley–Lieb. Cette algèbre intervient dans la description de modèles de physique statistique, ainsi que dans plusieurs facettes de la théorie des représentations contemporaines. Au courant de ce cours, nous explorerons la théorie des représentations des algèbres de Temperley–Lieb autour de la notion de dualité de Schur–Weyl quantique ainsi que les liens que ces algèbres entretiennent avec plusieurs domaines de physique et de mathématiques. Une série de travaux inspirés de recherche récente seront proposés.

cours 7: Given a vector space V over a field and a group G, an action of G on V can be defined. We call this action a representation of G on V. As Hopf algebras generalize groups, a representation of a Hopf algebra is defined. For two representations V and W of a group G, will the tensor product of V with W be a representation of G? The answer is generally no. But when G is a Hopf algebra, the tensor product of V with W is a representation of G. This is one of the motivations for studying Hopf algebras. The lecture will start with the motivation for studying Hopf algebras and introduce the representation of Hopf algebras. We will explore the basics of quantum groups, quantum algebra, and some of their applications.

3.5. **Evaluations.** Les différents intervenants organiseront des séances de travaux dirigés et pratiques (TD et TP) et des tests notés. Ils feront aussi des propositions de projets de recherche niveau Master afin d'initier des encadrements et des échanges scientifiques avec les étudiants les plus motivés.

3.6. **Exposés.** En plus des cours, nous prévoyons quelques exposés de résultats de recherches par des participants volontaires. Un appel à soumission sera lancé à cet effet.

3.7. **Infrastructures.** L'EMA se tiendra l'**Université Thomas Sankara au Burkina Faso**. L'Université s'engage à fournir sur son campus un amphithéatre (avec internet haut débit) pour les activités scientifiques de l'EMA (cours, exposés, TD et TP) et une salle pour les déjeuners. Elles mettra également à disposition un mini-bus pour les navettes entre le campus de l'Université et le site d'hébergements des participants (Maison des Hôtes de l'Université Joseph Ki-Zerbo).

3.8. **Date.** La période retenue est celle qui va du **20 au 31 Mai 2024**.

3.9. **Emploi du temps provisioire.** L'école EMA se déroulera sur deux (2) semaines. La premiere semaine sera consacrée aux mini-cours d'introduction tandis que la seconde semaine à ceux plus avancés ou ceux qui traiteront des applications.

Semaine 1 (20 - 24 Mai 2024).

Horaires	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
08h0-10h00	cours 1	cours 2	cours 3	cours 4	cours 1
10h00-10h30			Pause Café		
10h30- 12h30	cours 2	cours 3	cours 1	cours 2	cours 3
12h30- 14h00			Pause déjeuner		
14h00-16h00	cours 3	cours 1	cours 2	cours 3	cours 4
16h00-17h00			Exposés		

Semaine 2 (27-31 Mai 2024).

Horaires	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
08h00-10h00	cours 4	cours 5	cours 7	cours 6	cours 7
10h00-10h30			Pause Café		
10h30- 12h30	cours 5	cours 6	cours 7	cours 5	cours 6
12h30- 14h00			Pause déjeuner		
14h00-16h00	cours 6	cours 4	cours 5	cours 7	Cérémonie
16h0-17h00	Exposés	Exposés	Exposés	Exposés	de clôture

3.10. **Participants.** Nous prévoyons au total **50** participants pour cette EMA.

- **30 participants locaux:** 10 enseignants-chercheurs, 10 doctorants, 10 étudiants en Master de mathématiques.
- **20 participants étrangers:** 10 enseignants-chercheurs, 5 doctorants, 5 étudiants en Master de mathématiques.

L'effectif global des étudiants est donc égal à 30, soit 60 % des participants. Pour le reste il s'agit de chercheurs intéressés pour initier et/ou renforcer des collaborations lors de cette école. Par ailleurs **l'effectif global des femmes est égal à 10 (3 enseignantes-chercheures et 7 étudiantes), soit 20% des participants**.

Prof Ibrahim NONKANE