حساب التعقيد:

يعبر التعقيد عن عدد خطوات الخوارزمية بدلالة حجم عينة الدخل ولدينا دائماً في أي برنامج أمور لا ندري كم مرة على وجه التعيين سيتم تنفيذها مثل الشروط if والحلقات المشروطة بشرط معين وليس بعدد مرات معروفة لذلك نعمد في حساب التعقيد إلى حساب القيمة العظمى وتسمى BigO

سلاسل شهيرة تساعد في حساب التعقيد

مجموع قيمة ثابتة عدداً من المرات:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+1\ldots\ldots\ldots+1}_{n\ times} = n$$

ويمكننا تطبيق هذا القانون حتى لو بدأت المتسلسلة من قيمة مختلفة عن 1 لأن عدد الأعداد في مجال ما $[k,n]$ مغلق من الطرفين وبخطوة 1 بين كل عددين هو $n-k+1$

مجموع الأعداد من 1 وحتى n:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3\ldots\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

وتفسر بأنها الحد الأول (1) + الحد الأخير (n) مضروباً بعدد الحدود (n) ومقسوماً على 2 وبناء عليه فعندما تبدأ المتسلسلة من قيمة مختلفة عن 1 فلدينا طريقتين لحلها إما تطبيق القانون السابق أو فصلها إلى متسلسلتين مستقلتين أي

$$\sum_{i=k}^{n} i = k+(k+1)+(k+2)\ldots\ldots+n = \frac{(n-k+1)(k+n)}{2} = \frac{nk+n^2-k^2-kn+k+n}{2}$$

$$= \frac{n^2-k^2+k+n}{2}$$

$$\sum_{i=k}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(k-1)(1+k-1)}{2} = \frac{n^2+n-(k+k^2-k-1-k+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2+n-k^2+k}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1+4+9\ldots\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = O\left(n^3\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{k} = O\left(n^{k+1}\right)$$

عدد الأعداد الزوجية في المجال [1-n]:

نميز حالتين عندما n فردي وعندما n زوجي وفي الحالتين العدد هو n/2 كناتج صحيح وكمثال على ذلك عدد الأعداد في المجال [1-10] أو [1-11] هو 10/2=5 أو 11/2=5 وهي [2,4,6,8,10]

عدد الأعداد الفردية في المجال [1-n]:

نميز حالتين عندما n زوجي عددها هو n/2 وعندما n فردي عددها (n/2+1) وفي الحالتين يمكن التعبير عنه بالعلاقة (n+1)/2 وكمثال عليها عدد الأعداد في المجال [1-10] هو 5=2/(10+1) وهي [1,3,5,7,9] أو في المجال [1-11] هو 6=2/(11+1) وهي [1,3,5,7,9,11]

مجموع الأعداد الزوجية في المجال [1-n]:

$$\sum_{\substack{i=1\\ even}}^{n} i = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) = O\left(n^{2}\right)$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ even}}^{10} i = 2+4+6+8+10 = 30 = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) = 5(5+1) = 30$$

مجموع الأعداد الفردية في المجال [1-n]:

$$\sum_{\substack{i=1\\ odd}}^{n} i = \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)(n+1)}{2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2} = O\left(n^{2}\right)$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ odd}}^{10} i = 1+3+5+7+9 = 25 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{10+1}{2}\right)^{2} = 25$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ odd}}^{11} i = 1+3+5+7+9+11 = 36 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{11+1}{2}\right)^{2} = 36$$

مثال1: لنأخذ الكود التالي

$$
\begin{array}{l}
For\ \ i=1\ \ to\ \ m\ \ do \\
\quad for\ \ j=1\ to\ \ n\ \ do \\
\quad\quad for\ \ k=1\ \ to\ \ p\ \ do \\
\quad\quad\quad statments\ \ does\ not\ \ contain\ \ for
\end{array}
$$

لو أردنا حساب تعقيد الكود السابق فإنه يتم من خلال وضع متسلسلة لكل حلقة داخل الأخرى

$$\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n}\ \sum_{k=1}^{p} 1=\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n} p=\sum_{i=1}^{m} n.p=m.n.p$$

مثال2:

لنأخذ الكود التالي:

$$
\begin{array}{l}
For\ \ i=1\ \ to\ \ n-1\ \ do \\
\quad for\ \ j=i+1\ to\ \ n\ \ do \\
\quad\quad for\ \ k=1\ \ to\ \ j\ \ do \\
\quad\quad\quad statments\ \ does\ not\ \ contain\ \ for
\end{array}
$$

لو أردنا حساب تعقيده يتم كمايلي

$$\sum_{i=1}^{n-1}\ \sum_{j=i+1}^{n}\ \sum_{k=1}^{j} 1=\sum_{i=1}^{n-1}\ \sum_{j=i+1}^{n} j=\sum_{i=1}^{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} j-\sum_{j=1}^{i} j\right]=$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{n(n+1}{2}-\frac{i(i+1)}{2}\right]=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}-\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{i(i+1)}{2}\right]=$$

$$O\left(n^3\right)-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n-1} i^2-\sum_{i=1}^{n-1} i\right]=O\left(n^3\right)-O\left(n^3\right)+O\left(n^2\right)=O\left(n^3\right)$$

مثال3: لنأخذ الكود التالي

$$
\begin{array}{l}
For\ \ i=1\ \ to\ \ n\ \ do \\
\quad for\ \ j=1\ to\ \ sqr(i)\ \ do \\
\qquad for\ \ k=1\ \ to\ \ i\ \ do \\
\qquad\quad statments\ \ does\ not\ \ contain\ \ for
\end{array}
$$

لو أردنا حساب تعقيده يتم كمايلي

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{i^2}\ \sum_{k=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{i^2} i = \sum_{i=1}^{n} i^3 = O\left(n^4\right)$$

مثال4: لنأخذ الكود التالي

$$
\begin{array}{l}
For\ \ i=1\ \ to\ \ n\ \ do \\
\quad if\ \ odd(i)\ \ then \\
\qquad for\ \ j=1\ to\ \ n\ \ do \\
\qquad\quad x=x+1 \\
\qquad for\ \ j=1\ \ to\ \ i\ \ do \\
\qquad\quad sum=sum+1
\end{array}
$$

لو أردنا حساب تعقيده يتم كمايلي

$$\sum_{\substack{i=1\\ \| \, odd(i)}}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} 1 + \sum_{j=1}^{i} 1\right] = \sum_{\substack{i=1\\ \| \, odd(i)}}^{n} [n+i] = \sum_{\substack{i=1\\ \| \, odd(i)}}^{n} n + \sum_{\substack{i=1\\ \| \, odd(i)}}^{n} i =$$

$$n\left(\frac{n+1}{2}\right)+\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = O\left(n^2\right)$$

مثال5: لنأخذ الكود التالي:

$$
\begin{array}{l}
For\ \ k=1\ \ to\ \ n\ \ do \\
\quad for\ \ j=1\ to\ \ sqr(n)\ \ do \\
\qquad sum=sum+1
\end{array}
$$

لو أردنا حساب تعقيده يتم كمايلي $\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n^2} 1 = \sum_{k=1}^{n} n^2 = O\left(n^3\right)$

مثال6: لنأخذ الكود التالي

```
For k = 1 to n do
   for j = 1 to sqr(k) do
      if (j mod k == 0) then
         for m = 1 to j do
            sum = sum + 1
```

لو أردنا حساب تعقيده يتم كمايلي

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \bmod k = 0}}^{k^2} \left[\sum_{m=1}^{j} 1\right] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \bmod k = 0}}^{k^2} j =$$

إن الشرط $j \bmod k = 0$ يعني أن j مضاعف للعدد k وهذا يعني أننا سنجمع فقط القيم التي هي من مضاعفات k بدأً من 1 وحتى k^2 أي القيم $k + 2k + 3k + ...k^2$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \bmod k = 0}}^{k^2} j = \sum_{k=1}^{n} \left(k + 2k + 3k + ...k^2\right) = \sum_{k=1}^{n} k\left(1 + 2 + 3 + ...k\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3 + k^2}{2} = O\left(n^4\right)$$

نهاية الجلسة