تعقيد خوارزمية Strassen:

لحساب تعقيد الخوارزمية يجب أن نحصي عمليات الجمع والطرح والضرب وعمليات الاستدعاء التعاودي حيث نلاحظ أن التعقيد هو كمايلي:

تعقيد الخوارزمية = تعقيد الشرط + تعقيد التجزئة*2 + تعقيد جمع (أو طرح) المصفوفات*18 + تعقيد الاستدعاء التعاودي*7 + تعقيد تجميع المصفوفة C

تعقيد الشرط:

إن الشرط يحوي عملية الضرب التقليدي وصحيح أنها تحوي ثلاث حلقات وتعقيدها عادة هو $O(n^3)$ ولكن لأن الشرط لا يتم الدخول إليه سوى في حالة وحيدة هي n=2 فهذا يعني أن هذا التعقيد هو دائماً 8 وهو قيمة ثابتة لا يعتد بها.

تعقيد التجزئة:

إن عملية التجزئة تحتاج إلى حلقتين متداخلتين كل منها بعدد دورات n/2 مع اختلاف البداية والنهاية ونحتاج إلى تكرارها ثماني مرات (أربع مرات من أجل المصفوفة الأولى وأربع مرات من أجل المصفوفة الثانية) وبالتالي تعقيدها هو $O(n^2)$

تعقيد جمع المصفوفات:

إن الجمع أو الطرح لمصفوفات ثنائية يحتاج إلى حلقتين متداخلتين كل منها بطول n وبالتالي تعقيده هو $O(n^2)$

تعقيد تجميع المصفوفة C:

إن تجميع المصفوفة C يحتاج إلى حلقتين لنقل المصفوفات الجزئية إلى المصفوفة الكلية في الأماكن المناسبة وبالتالي تعقيده هو $O(n^2)$

تعقيد الاستدعاء التعاودي:

يوجد لدينا سبع عمليات ضرب كل منها ستؤدي إلى استدعاء الخوارزمية نفسها وبالتالي سنعرف تابع يعطي التعقيد بدلالة حجم المعطيات

نفرض أن التعقيد من أجل معطيات حجمها n يعطى بالتابع T(n) وهذا يعني أنه من أجل n/2 يعطي بالتابع T(n/2) أي:

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & if \quad n\le 2 \\ 7*T\left(\frac{n}{2}\right) & if \quad n>2 \end{cases}$$

لحل هذه المعادلة يوجد طريقتان الطريفة العامة أو الطريقة التكرارية (الشجرة العودية)

تعتمد الطريقة العامة على علاقات جاهزة بدلالة حجم المعطيات الجديدة وعدد مرات الاستدعاء أي

$$T(n)=aT\left(\frac{n}{b}\right)=\begin{cases} O(n) & if \quad a<b \\ O(n*\log n) & if \quad a=b \\ O\left(a^{\log_b n}\right) & if \quad a>b \end{cases}$$

نلاحظ في حالتنا أن a=7 و b=2 ولأن a>b إذا فحل معادلتنا هو

$$T(n)=7*T\left(\frac{n}{2}\right)=O\left(7^{\log_2 n}\right)$$

ونعلم من خواص اللوغارتم أن (يمكن التبديل بين الأساس n و ما بعد اللوغارتم x)

$$x^{\log_y n}=n^{\log_y x}$$

إذاً فحل المعادلة هو

$$T(n)=7*T\left(\frac{n}{2}\right)=O\left(7^{\log_2 n}\right)=O\left(n^{\log_2 7}\right)=O\left(n^{2.8}\right)$$

إذاً تعقيد خوارزمية ستراسين هو $O\left(n^{2.8}\right)$

أي أن خوارزمية ستراسين قامت بالتحسين عن الخوارزمية التقليدية بمقدار 0.2 فقط ويمكن القول أن هذا التحسين ضعيف ولكن عندما يتم التعامل مع مصفوفات بحجم كبير فإن هذا التحسين الضعيف قد يعطيني توفير كبير على مستوى الزمن

لو أردنا حل المعادلة السابقة بالطريقة التكرارية والتي تقوم على مبدأ فك العلاقة العودية مرة تلو الأخرى وصولاً إلى العلاقة الأساسية التي ليس فيها استدعاء عودي n=2 أي كمايلي:

$$T(n)=7*T\left(\frac{n}{2}\right)=7*7*T\left(\frac{n}{4}\right)=7^2*T\left(\frac{n}{2^2}\right)=7^2*7*T\left(\frac{\frac{n}{2^2}}{2}\right)=7^3*T\left(\frac{n}{2^3}\right)=......$$

سنستمر في ذلك وصولاً إلى العلاقة الأخيرة التي ليس فيها عودية وهي عندما n=2 ولكن متى نصل إليها؟؟؟؟

نحن نعلم أنه من شروط ستراسين أن تكون أبعاد المصفوفة من المضاعفات الأسية للعدد 2 أي من الشكل $n=2^k$ وهنا تمثل k عدد المرات التي يجب فيها تقسيم n على 2 حتى تصل إلى القيمة 1 إذاً فإننا سنستمر بالتقسيم وصولاً إلى هذا العدد وتكون العلاقة هي

$$T(n)=7^3*T\left(\frac{n}{2^3}\right)=.....7^k*T\left(\frac{2^k}{2^k}\right)=7^k*T(1)=7^k$$

ولكن لدينا

$$n=2^k \Rightarrow \log_2 n=\log_2 2^k \Rightarrow \log_2 n=k*\log_2 2 \Rightarrow \log_2 n=k \Rightarrow$$
$$7^k=7^{\log_2 n}=n^{\log_2 7}=n^{2.8}$$

وفي الحالتين نلاحظ أن التحسين الذي جرى على الخوارزمية التقليدية هو بمقدار 0.2

كتابة برنامج لإنجاز الخوارزمية

لكتابة برنامج نحن بحاجة إلى كتابة التوابع التالية

int[][] standard(int[][] A, int[][] B);

هذا التابع يقوم بضرب مصفوفتين بالطريقة التقليدية من خلال ثلاث حلقات متداخلة الأولى لتغيير السطر والثانية لتغيير العمود والثالثة للمرور على كل من عناصر السطر والعمود وتكوين العنصر منهما وتعيد مصفوفة الناتج

int[][] add(int[][] A, int[][] B)

الذي يقوم بجمع مصفوفتين متساويتي الأبعاد ويعيد الناتج في المصفوفة C

int[][] subtract(int[][] A, int[][] B)

الذي يقوم بطرح مصفوفتين متساويتي الأبعاد ويعيد الناتج في المصفوفة C

```
int[][] strassen (int[][] A, int[][] B)
```

الذي يقوم باختبار قيمة n ومن ثم يستدعي تابع الضرب القياسي أو يطبق عمليات التجزئة ثم دساتير ستراسين ثم عملية التجميع، أما عملية التجزئة والتجميع فلن نفرد لها تابع مستقل وسنقوم بها ضمن تابع ستراسين

ملاحظة: ضمن لغة جافة لا يعطى أي خصوصية للمصفوفات المربعة وإنما يتم التعامل معها على أنها مصفوفة كل عنصر من عناصرها هو مصفوفة أخرى بمعنى أنه يمكن لكل سطر أن ينشأ بتعليمة new مستقلة وبالتالي يحوي عدداً مختلفاً من الأعمدة ولدينا الخيار أن نعرف المصفوفة الثنائية بأحد الشكلين

```
int [][] a = new int[n][m];    //we make it square
int[][] a = new int[n][];      // we have the choice to make each column with different
                                  length inside for
```

ولذلك يمكن الحصول على البعد الأول للمصفوفة من خلال التعليمة int n = A.length;

وهي تعطي عدد الأسطر وتمثل في حالتنا البعد المطلوب

نهاية الجلسة