Колебания цепочек(8). четвертый этап

Гебриал Ибрам Есам Зекри НПИ-01-18
Каримов Зуфар Исматович НПИ-01-18
Волков Тимофей Евгеньевич НПИ-01-18
Гаджиев Нурсултан Тофик оглы НПИ-01-18

Введение

Гармонический осциллятор, к изучению которого мы сейчас перейдем, будет встречаться нам почти всюду; хотя мы начнем с чисто механических примеров грузика на пружинке, малых отклонений маятника или каких-то других механических устройств, на самом деле мы будем изучать некое дифференциальное уравнение.

Итак, что же такое гармонические осцилляторы? Это свободные колебания, которые совершаются под действием внутренних сил системы после того, как система была выведена из положения равновесия. Для того, чтобы свободные колебания совершались по гармоническому закону, необходимо, чтобы сила, стремящаяся возвратить тело в положение равновесия, была пропорциональна смещению тела из положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению:

$F(t) = ma(t) = -m\omega^2 x(t)$.

Пример гармонического осциллятора

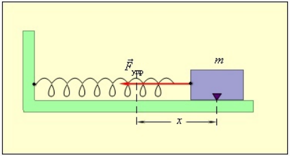

Figure 1: Колебания груза на пружине. Трения нет.

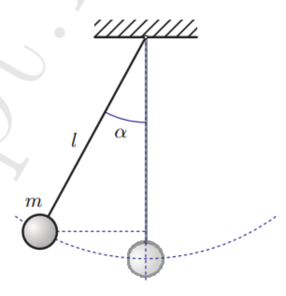

Figure 2: Математический маятник.

Рассмотрим математический маятник: небольшой грузик массы m на нерастяжимой невесомой нити длины l. Пусть этот маятник совершает малые колебания вблизи положения равновесия и в некоторый момент времени нить маятника составляет угол α с вертикалью (рис. 1).

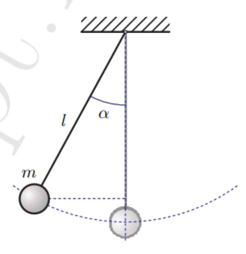

Figure 3: Рисунок 1. Математический маятник.

$\frac{mv^2}{2}$ + mgl(1-cosα)=$E_0, (1)$

где ноль потенциальной энергии принят в положении равновесия. Воспользовавшись условием, что колебания происходят с малой амплитудой (т. е. угол α мал), используем приближение cos α = 1 - $\frac{\alpha^2}{2}$. Скорость движения грузика v = ω l = αl, где ω — мгновенная угловая скорость вращения. Тогда уравнение (1) принимает вид

$\frac{ml^2\alpha'}{2}$ + $\frac{mgl\alpha}{2}$ =E_0, или α'^2 + $\frac{g}{l}$ * α^2 = $\frac{2E_0}{ml^2}$

После дифференцирования имеем

$\alpha'' + \frac{g}{l} * \alpha = 0$

или, вводя обозначение $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, получаем

$\alpha'' + \omega_0^2 * \alpha = 0$ (2)

аналогичное уравнению

$x'' + \omega_0^2 x = 0$

Период колебаний такого маятника:

$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g}}$

Построили для сравнения модели нелинейных и линейных колебаний математического маятника.

```
[1]: # импорт библиотек и отдельных функций
import numpy as np
from numpy import sin, cos
from scipy.integrate import odeint
from matplotlib import pyplot as plt


# определение/установка функции "equations"
def equations(y0, t):
    theta,x= y0
    f = [x, -(g/l) * sin(theta)]
    return f
```

```
[2]: # определение функции результирования графика
def plot_results(time, theta1, theta2):


    plt.plot(time, theta1[:, 0])
    plt.plot(time, theta2)

    s = '(Начальный угол = ' + str(initial_angle) + ' градусов)'
    plt.title('Движение маятника: ' + s)
    plt.xlabel('время (с)')
    plt.ylabel('Угол (Радиус)')
    plt.grid(True)
    plt.legend(['нелинейный', 'линейный'], loc='Нижний правый')
    plt.show()
```

Figure 4: Код программы.

```
[3]: # определение параметров
g = 9.81
l = 1.0

time = np.arange(0, 20.0, 0.025)

# оглашение изначальных условий
initial_angle = 130.0
theta0 = np.radians(initial_angle)
x0 = np.radians(0.0)
```

```
[4]: # нахождение решения для нелинейной задачи
theta1 = odeint(equations, [theta0, x0], time)

# нахождение решения для линейной задачи
w = np.sqrt(g/l)
theta2 = [theta0 * cos(w*t) for t in time]

# вывод графика
plot_results(time, theta1, theta2)
```

Figure 5: Код программы.

Результат

Результат

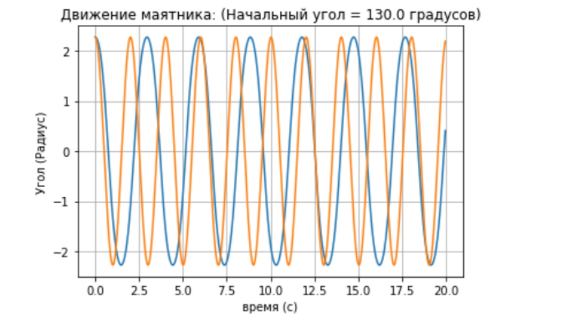

Figure 6: Движение Математического маятника

Заключение