Колебания цепочек

Гебриал Ибрам Есам Зекри НПИ-01-18
Каримов Зуфар Исматович НПИ-01-18
Волков Тимофей Евгеньевич НПИ-01-18
Гаджиев Нурсултан Тофик оглы НПИ-01-18

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Рассмотрение алгоритма задачи математического маятника.

2 Введение

Гармонический осциллятор, к изучению которого мы сейчас перейдем, будет встречаться нам почти всюду; хотя мы начнем с чисто механических примеров грузика на пружинке, малых отклонений маятника или каких-то других механических устройств, на самом деле мы будем изучать некое дифференциальное уравнение. Это уравнение непрестанно встречается в физике и в других науках и фактически описывает столь многие явления, что стоит того, чтобы изучить его получше. Такое уравнение описывает колебания грузика на пружинке, колебания заряда, текущего взад и вперед по электрической цепи, колебания камертона, порождающие звуковые волны, аналогичные колебания электронов в атоме, порождающие световые волны. Мы привели неполный список явлений, которые описы¬ваются почти теми же уравнениями, что и механический осциллятор. Эти уравнения называются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

3 Математический маятник

Рассмотрим математический маятник: небольшой1 грузик массы m на нерастяжимой невесомой нити длины l. Пусть этот маятник совершает малые колебания вблизи положения равновесия и в некоторый момент времени нить маятника составляет угол α с вертикалью (рис. 3.1). Трение, включая сопротивление среды, в системе отсутствует. Учитывая, что сила натяжения нити всегда перпендикулярна скорости движения маятника и поэтому не совершает работу, запишем для данной колебательной системы закон сохранения энергии:

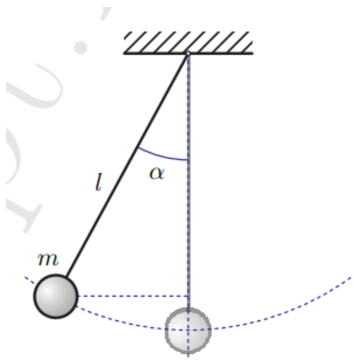

Figure 3.1: Рисунок 1. Математический маятник.

$\frac{mv^2}{2}$ + mgl(1-cosα)=E_0, (1)

где ноль потенциальной энергии принят в положении равновесия. Воспользовавшись условием, что колебания происходят с малой амплитудой (т. е. угол α мал), используем приближение cos α = 1 - $\frac{\alpha^2}{2}$. Скорость движения грузика v = ω l = αl, где ω — мгновенная угловая скорость вращения. Тогда уравнение (1) принимает вид

$\frac{ml^2\alpha'}{2} + \frac{mgl\alpha}{2} = E_0$, или $\alpha'^2 + \frac{g}{l} * \alpha^2 = \frac{2E_0}{ml^2}$

После дифференцирования имеем

$\alpha'' + \frac{g}{l} * \alpha = 0$

или, вводя обозначение $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, получаем

$\alpha'' + \omega_0^2 * \alpha = 0$ (2)

аналогичное уравнению

$x'' + \omega_0^2 x = 0$

Период колебаний такого маятника:

$T=\frac{2\pi}{\omega_0}= 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}$

Рассмотрим математический маятник длины l и массы m, совершающий малые колебания вблизи положения равновесия и испытывающий со стороны окружающей среды воздействие силы трения, величина которой пропорциональна скорости грузика маятника (коэффициент пропорциональности β). Запишем для грузика маятника второй закон Ньютона в проекции на ось x (рис. 3.2):

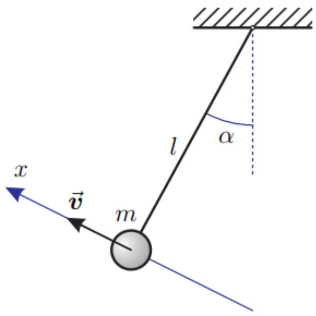

Figure 3.2: Рисунок 2. Математический маятник.

$m*v'' = -\beta v - mg \sin \alpha$

учитывая, что $v=l\alpha'$, а колебания малые, получаем

$\alpha'' + \frac{\beta}{m} * \alpha' + g * 1 * \alpha = 0$

или вводя обозначения $\delta = \frac{\beta}{2m}$ и $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, находим $\alpha'' + 2\delta\, \alpha'' + \omega_0^2 = 0$ (3)

В обоих приведенных примерах мы пришли к уравнению свободных затухающих гармонических колебаний:

$X'' + 2\,\delta\, x' + \omega_0\, x = 0.$ (4)

В зависимости от соотношения между δ и ω_0 уравнение (4) будет иметь различные решения:

а) При $\omega_0 > \delta^2$ решение уравнения (4) имеет вид

x(t) = $x_0\ e^{-\delta t}$ cos(ω t +φ), $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (5)

где величины x_0 — амплитуда колебаний и φ — начальная фаза колебаний определяются из начальных условий. График таких затухающих колебаний, а также изображение на фазовой плоскости приведены (рис. 3.3): Для характеристики того, насколько быстро происходит затухание колебаний, вводят характерное время затухания T= $\frac{1}{\delta}$, представляющее собой время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

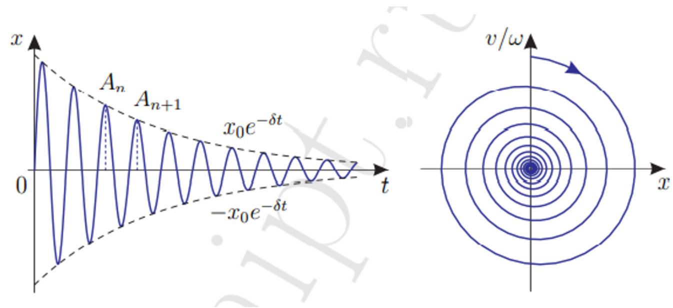

Figure 3.3: Рис 3 и 4. Зависимость координаты x от времени t и фазовая диаграмма затухающих колебаний

б) При $\omega_0^2 < \delta^2$ решение уравнения (4) имеет вид

x(t) = $x_{01}\ e^{-\delta t}\ e^{\sqrt{(\delta^2-\omega_0^2)}t}$ + $x_{02}\ e^{-\delta t}\ e^{\sqrt{(\delta^2-\omega_0^2)}t}$ (6)

в) При $\omega_0^2 = \delta^2$ решение уравнения (4) имеет вид

Величины x_{01} и x_{02} также определяются из начальных условий

x(t) = $x_{01}\ e^{-\delta t}$ + x_{02}t $e^{-\delta t}$ (7) Зависимости (6) и (7) носят апериодический характер и не являются колебаниями. Графики этих зависимостей приведены (рис. 3.4). Дальше мы будем рассматривать только случай $\omega_0^2 > \delta^2$

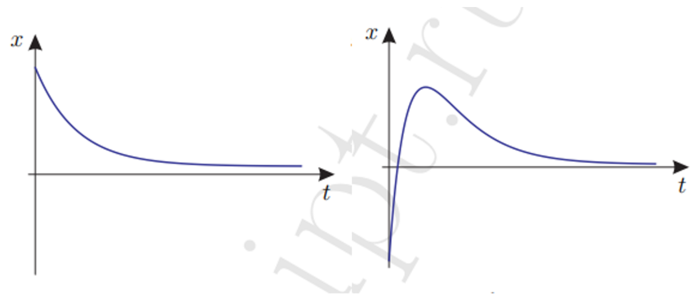

Figure 3.4: Рис 5 и 6. Пример осциллограмм в случае большого трения

4 Выводы

Рассмотрели алгоритм задачи математического маятника.