Колебания цепочек(8)

Гебриал Ибрам Есам Зекри НПИ-01-18

Каримов Зуфар Исматович НПИ-01-18

Волков Тимофей Евгеньевич НПИ-01-18

Гаджиев Нурсултан Тофик оглы НПИ-01-18

Введение

Рассмотрим математический маятник: небольшой грузик массы m на нерастяжимой невесомой нити длины l. Пусть этот маятник совершает малые колебания вблизи положения равновесия и в некоторый момент времени нить маятника составляет угол α с вертикалью (рис. 1).

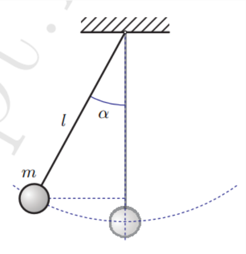

Figure 1: Рисунок 1. Математический маятник.

$\frac{mv^2}{2}$ + mgl(1-cosα)=$E_0, (1)$

где ноль потенциальной энергии принят в положении равновесия. Воспользовавшись условием, что колебания происходят с малой амплитудой (т. е. угол α мал), используем приближение cos α = 1 - $\frac{\alpha^2}{2}$. Скорость движения грузика v = ω l = αl, где ω — мгновенная угловая скорость вращения. Тогда уравнение (1) принимает вид

$\frac{ml^2\alpha'}{2}$ + $\frac{mgl\alpha}{2}$ =E_0, или α'^2 + $\frac{g}{l}$ * α^2 = $\frac{2E_0}{ml^2}$

После дифференцирования имеем

$\alpha'' + \frac{g}{l} * \alpha = 0$

или, вводя обозначение $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, получаем

$\alpha'' + \omega_0^2 * \alpha = 0$ (2)

аналогичное уравнению

x'' + ω_0^2x = 0

Период колебаний такого маятника:

T= $\frac{2\pi}{\omega_0}$ = 2 π $\sqrt{\frac{1}{g}}$

Рассмотрим математический маятник длины l и массы m, совершающий малые колебания вблизи положения равновесия и испытывающий со стороны окружающей среды воздействие силы трения, величина которой пропорциональна скорости грузика маятника (рис. 2)

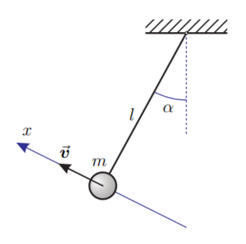

Figure 2: Рисунок 1. Математический маятник под действием силы трения.

m*v’ ’ = - β v - mg sin α

учитывая, что v=lα' , а колебания малые, получаем

α’ ’ + $\frac{\beta}{m}$ * α’ + g * l * α = 0

или вводя обозначения δ = $\frac{\beta}{2m}$ и ω_0^2 = $\frac{g}{l}$, находим α’ ’ + 2δ α'' + ω_0^2 = 0 (3)

В обоих приведенных примерах мы пришли к уравнению свободных затухающих гармонических колебаний:

X’ ’ + 2 δ x’ + ω_0 x =0. (4)

В зависимости от соотношения между δ и ω_0 уравнение (4) будет иметь различные решения:

а) При ω_0 > δ^2 решение уравнения (4) имеет вид

x(t) = $x_0\ e^{-\delta t}$ cos(ω t +φ), ω = $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (5)

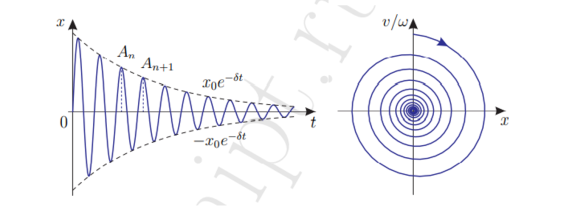

Figure 3: Рис 3 и 4. Зависимость координаты x от времени t и фазовая диаграмма затухающих колебаний

б) При ω_0^2 < δ^2 решение уравнения (4) имеет вид

x(t) = $x_{01}\ e^{-\delta t}\ e^{\sqrt{(\delta^2 - \omega_0^2)}t}$ + $x_{02}\ e^{-\delta t}\ e^{\sqrt{(\delta^2 - \omega_0^2)}t}$ (6)

в) При $\omega_0^2 = \delta^2$ решение уравнения (4) имеет вид

x(t) = $x_{01}\ e^{-\delta t}$ + x_{02}t $e^{-\delta t}$ (7)

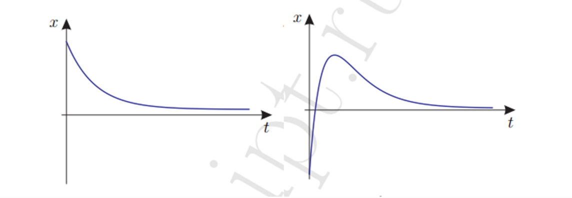

Figure 4: Рис 5 и 6. Пример осциллограмм в случае большого трения

Заключение